Capítulo 1: Introducción

Lic. Arnoldo Del Toro Peña

Universidad Autonoma de Nuevo Leon

24 de enero de 2022

Secciones

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

1. Shortest path problem.
2. Maximum flow problem
3. Minimum cost flow problem

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Minimum cost flow problem

Este modelo es el más fundamental de todos los problemas de flujo de red.
Este modelo es sencillo de explicar: Se trata de determinar el envio a menor costo de acuerdo a la red en orden de satisfacer las demandas de ciertos nodos disponibles para otros nodos suministros.
Algunos ejemplos son: distribución de productos de plantas a depósitos, depósitos a minoristas, ruteo de automóviles en una red de calles urbanas entre otras.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Definitions

Sea $G = (N, A)$ una red dirigida definida por un conjunto N de n nodos y un conjunto A de m arcos dirigidos. Cada arco $(i, j) \in A$ tiene asociado un costo c_{ij} que denota el costo por unidad enviada en ese arco. Ademas cada arco $(i, j) \in A$ tiene asociado una capacidad u_{ij} que denota la cantidad máxima de monto que puede ser enviada en ese arco y un l_{ij} que denota el minimo de monto que puede ser enviada por ese mismo arco.

Definitions 2

Nosotros asociaremos para cada nodo $i \in N$ un número entero $b(i)$ que representa oferta/demanda. Si $b(i) > 0$ el nodo i representa un nodo oferta; si $b(i) < 0$ el nodo i representa un nodo demanda y si $b(i) = 0$ el nodo i representa un nodo de transbordo (puente). Las variables de decisión en *Minimum cost flow problem* representan lo enviado en cada arco $(i, j) \in A$ por x_{ij}.

Model formulated

$$\text{Minimize} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = b(i) \qquad \text{for all} \qquad i \in N, \tag{2}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \text{for all} \qquad (i,j) \in A, \tag{3}$$

Nota: $\sum_{i=1}^{n} b(i) = 0$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Matrix Form

$$\text{Minimize} \quad cx \tag{4}$$

subject to

$$Nx = b \tag{5}$$
$$l \leq x \leq u \tag{6}$$

Nota: N es una matriz $n \times m$ llamada matriz incidente nodo-arco, cada columna dentro de la matriz representa una x_{ij}.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Shortest path problem

Este problema es tal vez el más simple de todos.
Para este problema trataremos de encontrar el camino de mínimo costo para un específico nodo de partida s hacia un nodo específico de destino t.
Para este problema tenemos que $b(s) = 1$, $b(t) = -1$ y $b(i) = 0$ para todos los demás nodos.
Asumiremos que cada $(ij) \in A$ tiene asociado un c_{ij} costo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Ejemplo Shortest path problem

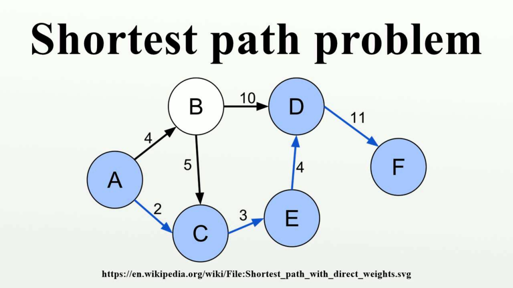

Figura: Shortest path problem with solution

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Maximum flow problem

En esencia este problema es el modelo complementario de Shortest path problem.
En el Shortest path problem en cada uno de arcos tenemos un costo asociado; en contraste en el Maximum flow problem no tenemos costos pero estamos restringuidos por flujos acotados.Dicho esto tenemos:

$$b(i) = 0, \; \forall \, i \in N$$

$$c_{ij} = 0, \; \forall \, (i,j) \in A$$

E introduciremos un arco extra (t,s) con un costo: $c_{ts} = -1$ y un límite de flujo de $u_{ts} = \infty$

Ejemplo Maximum flow problem

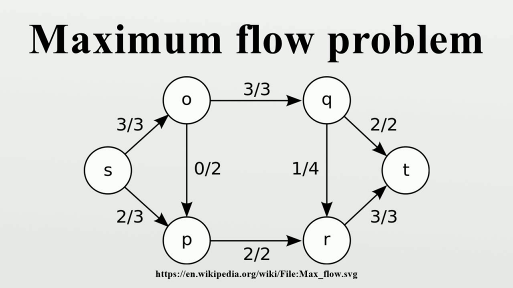

Figura: Maximum flow problem with solution

Assigment prroblem

Este probllema consiste en dos conjuntos de misma cardinalidad, $(|N_1| = |N_2|)$, una colección de pares $(A \in N_1 \times N_2)$ denota los posibles asignamientos y un costo (c_{ij}) asociado a cada elemento $((i, j) \in A)$. En este problema queremos encontar los pares que asocien un elemento de N_1 a un solo elemento de N_2 con el costo mínimo posible.

Ejemplo Assigment problem

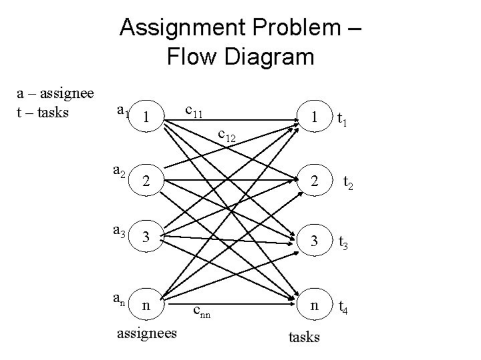

Figura: Ejemplo obtenido de: assigment

Transportation problem

Este problema es un caso especial de Minimum cost flow problem con propiedad de que el conjunto de nodos N es partido en dos conjuntos N_1 y N_2 (es posible que no sean iguales en cardinalidad) talque cada nodo en N_1 es un nodo de oferta mientras que cada nodo en N_2 es un nodo de demanda y por último cada arco $(i,j) \in A$, $i \in N_1$ y $j \in N_2$

Ejemplo Transportation problem

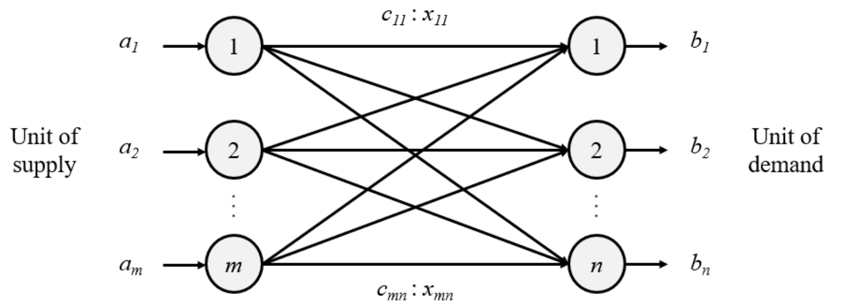

Figura: Ejemplo obtenido de: Transportation

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Circulation problem

Este problema es un ***Minimum cost flow problem*** con la propiedad de que cada nodo es un nodo transbordo esto quiere decir que $b(i) = 0$ para toda $i \in N$ en esta instancia lo deseable es encontrar un camino factible que honre las restricciones (l_{ij}, u_{ij}) de cada arco por las que fluje x_{ij} con el mínimo costo posible.

Convex cost flow problem

En ***Minimum cost flow problem*** asumimos que los costos de cualquier arco varia linealmente con el monto en cada flujo. Convex cost flow problem tiene una estructura más compleja en costos, en este problema el costo depende de una función del monto en cada flujo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Generalized flow problems

En este problema los arcos ''consumen'' o ''generan'' flujo. Si x_{ij} unidades fluyen por el arco (i, j), entonces $\mu_{ij} x_{ij}$ unidades son las que llegan al nodo j; donde μ_{ij} es un multiplicador positivo asociado a cada arco. Si $0 < \mu_{ij} < 1$ el arco "pierde", y si $1 < \mu_{ij} < \infty$ el arco ''gana''.

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Multicommodity flow problems

Los modelos ***Minimum cost flow problem*** el flujo es de un solo producto a través de una red. En un Multicommodity flow problems tendremos múltiples artículos utilizando las mismas redes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Others models

En esta sección veremos otros dos modelos:

1. Minimum spanning tree problem.
2. Matching problem.

Minimum spanning tree problem

En este problema todos los nodos forman una red no dirigida. El costo del árbol de expansión es la suma de los costos de estos arcos. En el minimum spanning tree problem se desea identificar la expansión con el costo mínimo.
Ejemplo: designing local access networks.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Matching problems

Un problema *Matching* es un conjunto de arcos con la propiedad donde cada nodo es incidente a lo sumo en un arco del conjunto; este emparejamiento induce un emparejamiento de los nodos en el gráfico usando los arcos en A.

Tenemos dos sub-clases para este problema:

1. Bipartite matching problems.
2. Nonbipartite matching problems.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Cardinality matching

En el problema bipartito de máxima cardinalidad se busca un emparejamiento que asocie el mayor número de nodos posibles de un grafo bipar-tito no dirigido

Weighted matching problem

Es conocido como el problema de asignación...