Solución de Ejercicios de Área con Integrales

Problema 1

Funciones: $y_1 = x^2 - 6x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$

Necesitamos encontrar el área entre la parábola $y_1 = x^2 - 6x$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 8$.

Paso 1: Encontrar dónde:

$y_1 = 0$

$x^2 - 6x = 0$

$x(x - 6) = 0$

$x = 0$ o $x = 6$

Paso 2: Analizar el signo de y_1 en el intervalo $[0, 8]$

- Para $x \in [0, 6]$: $y_1 = x^2 - 6x \leq 0$ (la función está debajo del eje x)
- Para $x \in [6, 8]$: $y_1 = x^2 - 6x \geq 0$ (la función está arriba del eje x)

Paso 3: Calcular el área

$$A = \int_0^6 |x^2 - 6x|\, dx + \int_6^8 |x^2 - 6x|\, dx$$

$$A = \int_0^6 -(x^2 - 6x)\, dx + \int_6^8 (x^2 - 6x)\, dx$$

$$A = \int_0^6 (-x^2 + 6x)\, dx + \int_6^8 (x^2 - 6x)\, dx$$

Paso 4: Evaluar las integrales

$$\int_0^6 (-x^2 + 6x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = -\frac{216}{3} + 3(36) = -72 + 108 = 36$$

$$\int_6^8 (x^2 - 6x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_6^8 = \left(\frac{512}{3} - 192\right) - \left(\frac{216}{3} - 108\right)$$

$$= \frac{512}{3} - 192 - 72 + 108 = \frac{512}{3} - 156 = \frac{512 - 468}{3} = \frac{44}{3}$$

Respuesta: $A = 36 + \frac{44}{3} = \frac{108+44}{3} = \frac{152}{3}$ unidades cuadradas

---

Problema 2

Funciones: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2 - x$, $x = 0$, $x = 1$

Necesitamos encontrar el área entre las curvas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 - x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Paso 1: Determinar cuál función está arriba

En $x = 0$: $f(0) = -1$, $g(0) = 2$

En $x = 1$: $f(1) = 0$, $g(1) = 1$

Como $g(x) > f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, el área es:

Paso 2: Calcular el área

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 [(2 - x) - (x^2 - 1)]\, dx$$

$$A = \int_0^1 (2 - x - x^2 + 1)\, dx = \int_0^1 (3 - x - x^2)\, dx$$

Paso 3: Evaluar la integral

$$A = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{18 - 3 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

Respuesta: $A = \frac{13}{6}$ unidades cuadradas

Problema 3

Funciones: $h(x) = \frac{1}{9x^2}$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 2$

Necesitamos encontrar el área entre la hipérbola $h(x) = \frac{1}{9x^2}$ y la recta $y = 1$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

Paso 1: Determinar cuál función está arriba

En $x = 1$: $h(1) = \frac{1}{9}$, $y = 1$

En $x = 2$: $h(2) = \frac{1}{36}$, $y = 1$

Como $y = 1 > h(x)$ en el intervalo $[1, 2]$, el área es:

Paso 2: Calcular el área

$$A = \int_1^2 [1 - h(x)]\, dx = \int_1^2 \left[1 - \frac{1}{9x^2}\right]\, dx$$

Paso 3: Evaluar la integral

$$A = \int_1^2 1\, dx - \int_1^2 \frac{1}{9x^2}\, dx$$

$$A = [x]_1^2 - \frac{1}{9} \int_1^2 x^{-2}\, dx$$

$$A = (2-1) - \frac{1}{9}\left[-x^{-1}\right]_1^2$$

$$A = 1 - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

Respuesta: $A = \frac{17}{18}$ unidades cuadradas

Problema 4

Funciones: $f(y) = y(2-y)$, $i(y) = -y$

Este problema requiere integración respecto a y. Necesitamos encontrar el área entre las curvas $f(y) = y(2-y) = 2y - y^2$ e $i(y) = -y$.

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección

$f(y) = i(y)$

$2y - y^2 = -y$

$2y - y^2 + y = 0$

$3y - y^2 = 0$

$y(3-y) = 0$

$y = 0$ o $y = 3$

Paso 2: Determinar cuál función está a la derecha

Para $y \in (0,3)$: $f(y) = 2y - y^2 > -y = i(y)$ (verificar con $y = 1$: $f(1) = 1 > i(1) = -1$)

Paso 3: Calcular el área

$$A = \int_0^3 [f(y) - i(y)]\, dy = \int_0^3 [(2y - y^2) - (-y)]\, dy$$

$$A = \int_0^3 (2y - y^2 + y)\, dy = \int_0^3 (3y - y^2)\, dy$$

Paso 4: Evaluar la integral

$$A = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3(9)}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27-18}{2} = \frac{9}{2}$$

Respuesta: $A = \frac{9}{2}$ unidades cuadradas