Problemas de Optimización

Problema 1: Caja sin tapa

Enunciado:
Se desea construir una caja sin tapa a partir de una hoja cuadrada de cartón de 1 metro de lado, recortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando los lados hacia arriba.

¿Qué tamaño deben tener los cuadrados recortados para que el volumen de la caja sea máximo?

Solución:

Sea x el lado del cuadrado recortado.
Dimensiones de la base: $(1-2x) \times (1-2x)$
Altura de la caja: x

Volumen:

$V(x) = (1-2x)^2 \cdot x = x(1-2x)^2$

Derivamos:

$V'(x) = (1-2x)^2 - 4x(1-2x)$

Igualamos a cero y resolvemos: $(1-2x)(1-6x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$

Pero $x = \frac{1}{2}$ haría que la base desaparezca, entonces:

Respuesta:
El volumen es máximo cuando
$x = \frac{1}{6}$ m

Problema 2: Minimizar el costo de un cilindro

Enunciado:
Una lata cilíndrica con volumen de 500 cm^3 tiene la tapa y base más costosas (el doble del lateral).
¿Qué dimensiones minimizan el costo de fabricación?

Solución:

Volumen: $V = \pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$

Costo: - Área lateral: $2\pi r h$ - Área tapa y base: $2\pi r^2$ - Costo total:
$C(r) = 2\pi r h + 2(2\pi r^2) = \frac{1000}{r} + 4\pi r^2$

Derivamos y resolvemos: $C'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 8\pi r = 0 \Rightarrow 8\pi r^3 = 1000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \approx 3.42\,\text{cm}$

Luego: $h = \frac{500}{\pi r^2} \approx 13.65\,\text{cm}$

Respuesta:
Radio $r \approx 3.42\,\text{cm}$, altura $h \approx 13.65\,\text{cm}$

Problema 3: Punto más cercano a una parábola

Enunciado:
Encuentra el punto en la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(0, 1)$.

Solución:

Distancia al punto (x, x^2) desde $(0, 1)$: $D^2 = x^2 + (x^2 - 1)^2 \Rightarrow D^2 = x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1$

Derivamos: $D^{2\prime}(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) \Rightarrow x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Evaluamos: - $x = 0 \to D = 1$ - $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \to D > 1$

Respuesta:
El punto más cercano es $(0, 0)$, con una distancia mínima de 1.

Problema 4: Corral contra un muro

Enunciado:
Con 100 m de cerca se quiere construir un corral rectangular, usando un muro como uno de los lados largos.
¿Cuáles son las dimensiones de área máxima?

Solución:

Sean: - x: ancho (los dos lados vallados) - y: largo (frente al muro)

Restricción: $2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$

Área: $A = x \cdot y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

Derivamos: $A'(x) = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow y = 50$

Respuesta:
Dimensiones de área máxima:
Ancho $x = 25\,\text{m}$, largo $y = 50\,\text{m}$

Problema 5: Triángulo con lados fijos

Enunciado:
Dos lados del triángulo miden 8 cm y 5 cm, el ángulo entre ellos puede variar.
¿Qué ángulo maximiza el área?

Solución:

Área del triángulo: $A = \frac{1}{2}ab\sin(\theta) = \frac{1}{2}(8)(5)\sin(\theta) = 20\sin(\theta)$

El máximo valor de $\sin(\theta)$ es 1 cuando $\theta = 90^\circ$

Respuesta:
El área máxima se obtiene cuando
$\theta = 90^\circ$
