Análisis de Funciones con Radicales

- Puntos críticos.
- Puntos de inflexión.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Concavidad.
- Primera y segunda derivada.

Ejemplo 1:$f(x) = \sqrt{x}$

Dominio:$(0, +\infty)$

Derivadas:

- **Primera derivada:**
  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- **Segunda derivada:**
  $f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$

Análisis:

1. **Puntos críticos:** -$f'(x) = 0$→ No existe solución. -$f'(x)$no existe en$x = 0$→ **Punto crítico en**$x = 0$ (mínimo absoluto).
2. **Puntos de inflexión:** -$f''(x) = 0$→ No tiene solución.
   - No hay cambio de concavidad en$x = 0$.
3. **Monotonía:**
   - **Creciente:**$(0, +\infty) f'(x) > 0$.
   - **Decreciente:** No existe.
4. **Concavidad:**
   - **Cóncava hacia abajo:**$(0, +\infty) f''(x) < 0$.

Ejemplo 2:$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Dominio:$(-\infty, +\infty)$

Derivadas:

- **Primera derivada:**
  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$
- **Segunda derivada:**
  $f''(x) = -\frac{2}{9x^{5/3}}$

Análisis:

1. **Puntos críticos:** -$f'(x) = 0 \rightarrow$ No existe solución. -$f'(x)$no existe en$x = 0 \rightarrow$ **Punto crítico en**$x = 0$ (no es extremo).
2. **Puntos de inflexión:** -$f''(x)$no existe en$x = 0$, pero hay cambio de concavidad $\rightarrow$ **Punto de inflexión en**$x = 0$.
3. **Monotonía:**
   - **Creciente:**$(-\infty, +\infty)(f'(x) > 0$para$x \neq 0)$.
   - **Decreciente:** No existe.
4. **Concavidad:**
   - **Cóncava hacia abajo:**$(-\infty, 0)(f''(x) < 0)$.
   - **Cóncava hacia arriba:**$(0, +\infty)(f''(x) > 0)$.

Ejemplo 3:$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Dominio:$(-\infty, +\infty)$

Derivadas:

- **Primera derivada:**
  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- **Segunda derivada:**
  $f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$

Análisis:

1. **Puntos críticos:** -$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ **Punto crítico en**$x = 0$ (mínimo absoluto).
2. **Puntos de inflexión:** -$f''(x) = 0 \rightarrow$ No tiene solución.
3. **Monotonía:**
   - **Creciente:**$(0, +\infty)$ $(f'(x) > 0)$.
   - **Decreciente:**$(-\infty, 0)$ $(f'(x) < 0)$.
4. **Concavidad:**
   - **Cóncava hacia arriba:**$(-\infty, +\infty)(f''(x) > 0)$.

Ejemplo 4:$f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$

Dominio:$[0, +\infty)$

Derivadas:

- **Primera derivada:**
  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
- **Segunda derivada:**
  $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$

Análisis:

1. **Puntos críticos:** -$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ **Punto crítico en**$x = 0$ (mínimo absoluto).
2. **Puntos de inflexión:** -$f''(x) = 0 \rightarrow$ No tiene solución.
3. **Monotonía:**
   - **Creciente:**$(0, +\infty)(f'(x) > 0)$.
   - **Decreciente:** No existe.
4. **Concavidad:**
   - **Cóncava hacia arriba:**$(0, +\infty)(f''(x) > 0)$.

Ejemplo 5:$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$(Semicírculo superior)

Dominio:$[-2, 2]$

Derivadas:

- **Primera derivada:**
  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
- **Segunda derivada:**
  $f''(x) = \frac{-4}{(4-x^2)^{3/2}}$

Análisis:

1. **Puntos críticos:** -$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ **Punto crítico en**$x = 0$ (máximo absoluto). -$f'(x)$no existe en$x = \pm 2$(extremos del dominio).
2. **Puntos de inflexión:** -$f''(x) = 0 \rightarrow$ No tiene solución.
3. **Monotonía:**
   - **Creciente:**$(-2, 0)(f'(x) > 0)$.
   - **Decreciente:**$(0, 2)(f'(x) < 0)$.
4. **Concavidad:**
   - **Cóncava hacia abajo:**$(-2, 2)(f''(x) < 0)$.
