

Solución de Ejercicios de Área con Integrales

Problema 1

Funciones: $y_1 = x^2 - 6x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$

Necesitamos encontrar el área entre la parábola $y_1 = x^2 - 6x$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 8$.

Paso 1: Encontrar dónde:

$$y_1 = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ o } x = 6$$

Paso 2: Analizar el signo de y_1 en el intervalo $[0, 8]$

- Para $x \in [0, 6]$: $y_1 = x^2 - 6x \leq 0$ (la función está debajo del eje x)
- Para $x \in [6, 8]$: $y_1 = x^2 - 6x \geq 0$ (la función está arriba del eje x)

Paso 3: Calcular el área

$$A = \int_0^6 |x^2 - 6x| dx + \int_6^8 |x^2 - 6x| dx$$

$$A = \int_0^6 -(x^2 - 6x) dx + \int_6^8 (x^2 - 6x) dx$$

$$A = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx + \int_6^8 (x^2 - 6x) dx$$

Paso 4: Evaluar las integrales

$$\int_0^6 (-x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^6 = -\frac{216}{3} + 3(36) = -72 + 108 = 36$$

$$\int_6^8 (x^2 - 6x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_6^8 = \left(\frac{512}{3} - 192 \right) - \left(\frac{216}{3} - 108 \right)$$

$$= \frac{512}{3} - 192 - 72 + 108 = \frac{512}{3} - 156 = \frac{512 - 468}{3} = \frac{44}{3}$$

Respuesta: $A = 36 + \frac{44}{3} = \frac{108+44}{3} = \frac{152}{3}$ unidades cuadradas

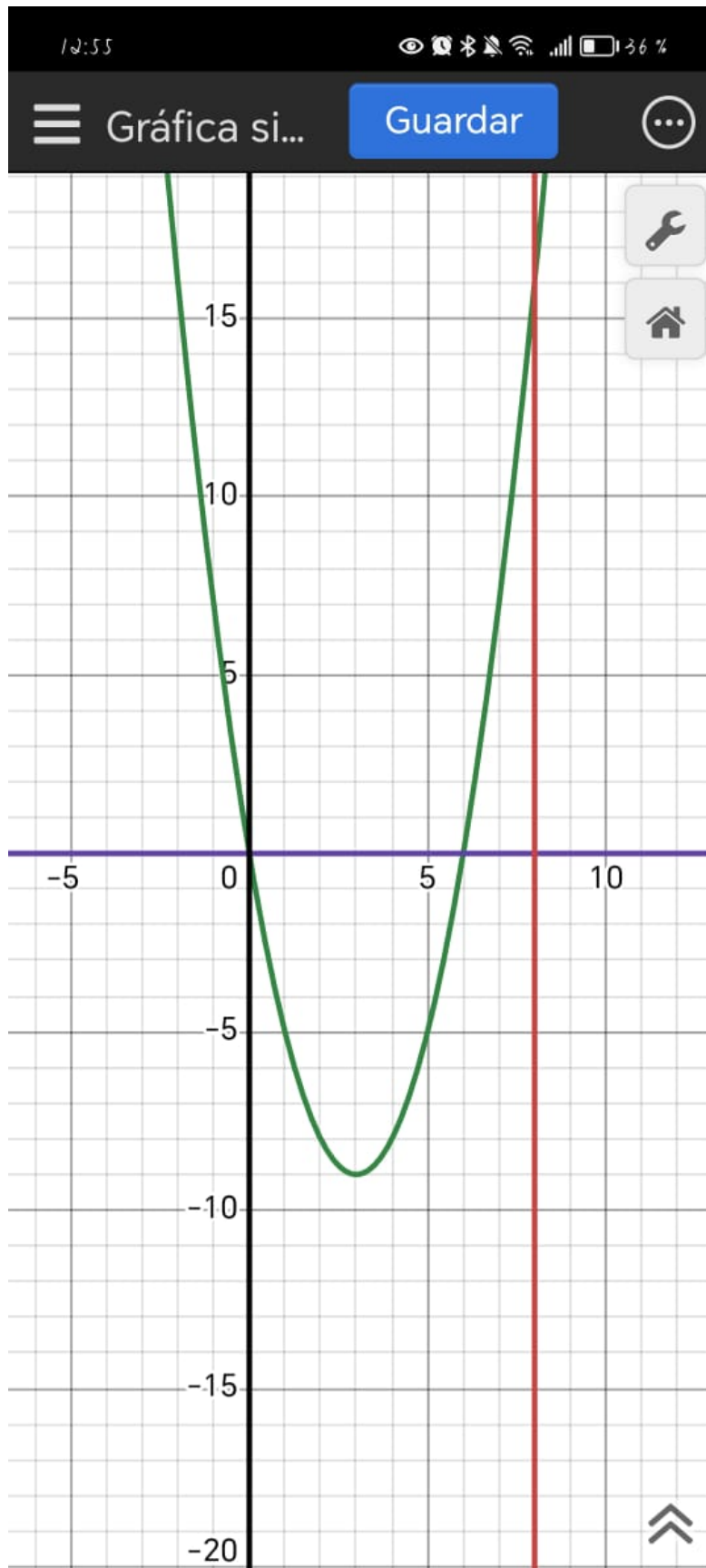


Figure 1: Problema 1
2

Problema 2

Funciones: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2 - x$, $x = 0$, $x = 1$

Necesitamos encontrar el área entre las curvas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 - x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Paso 1: Determinar cuál función está arriba

En $x = 0$: $f(0) = -1$, $g(0) = 2$

En $x = 1$: $f(1) = 0$, $g(1) = 1$

Como $g(x) > f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, el área es:

Paso 2: Calcular el área

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 [(2 - x) - (x^2 - 1)] dx$$

$$A = \int_0^1 (2 - x - x^2 + 1) dx = \int_0^1 (3 - x - x^2) dx$$

Paso 3: Evaluar la integral

$$A = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{18 - 3 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

Respuesta: $A = \frac{13}{6}$ unidades cuadradas

Problema 3

Funciones: $h(x) = \frac{1}{9x^2}$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 2$

Necesitamos encontrar el área entre la hipérbola $h(x) = \frac{1}{9x^2}$ y la recta $y = 1$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

Paso 1: Determinar cuál función está arriba

En $x = 1$: $h(1) = \frac{1}{9}$, $y = 1$

En $x = 2$: $h(2) = \frac{1}{36}$, $y = 1$

Como $y = 1 > h(x)$ en el intervalo $[1, 2]$, el área es:

Paso 2: Calcular el área

$$A = \int_1^2 [1 - h(x)] dx = \int_1^2 \left[1 - \frac{1}{9x^2} \right] dx$$

Paso 3: Evaluar la integral

$$A = \int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{9x^2} dx$$

$$A = [x]_1^2 - \frac{1}{9} \int_1^2 x^{-2} dx$$

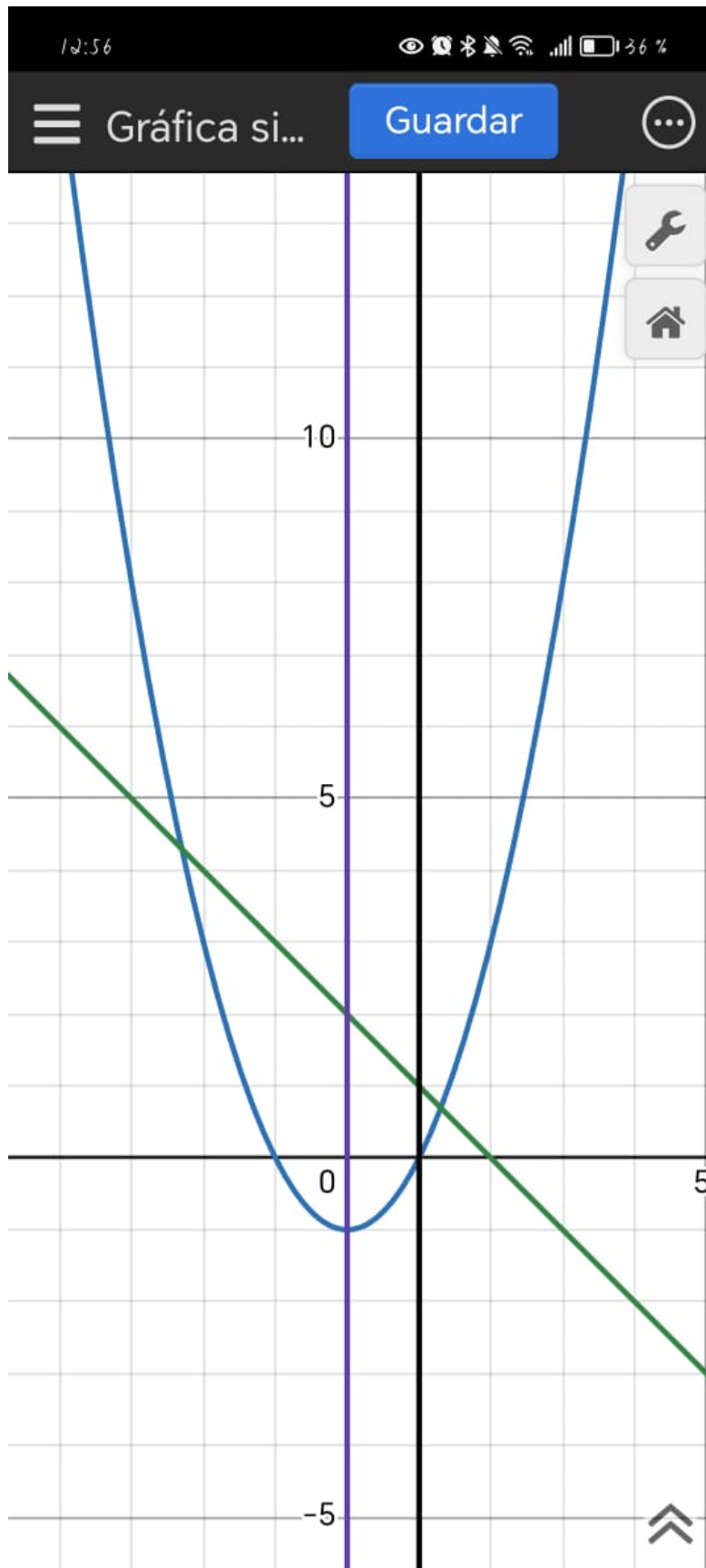


Figure 2: Problema 2
4

$$A = (2 - 1) - \frac{1}{9} [-x^{-1}]_1^2$$

$$A = 1 - \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

Respuesta: $A = \frac{17}{18}$ unidades cuadradas

Problema 4

Funciones: $f(y) = y(2 - y)$, $i(y) = -y$

Este problema requiere integración respecto a y . Necesitamos encontrar el área entre las curvas $f(y) = y(2 - y) = 2y - y^2$ e $i(y) = -y$.

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección

$$f(y) = i(y)$$

$$2y - y^2 = -y$$

$$2y - y^2 + y = 0$$

$$3y - y^2 = 0$$

$$y(3 - y) = 0$$

$$y = 0 \text{ o } y = 3$$

Paso 2: Determinar cuál función está a la derecha

Para $y \in (0, 3)$: $f(y) = 2y - y^2 > -y = i(y)$ (verificar con $y = 1$: $f(1) = 1 > i(1) = -1$)

Paso 3: Calcular el área

$$A = \int_0^3 [f(y) - i(y)] dy = \int_0^3 [(2y - y^2) - (-y)] dy$$

$$A = \int_0^3 (2y - y^2 + y) dy = \int_0^3 (3y - y^2) dy$$

Paso 4: Evaluar la integral

$$A = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3(9)}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27 - 18}{2} = \frac{9}{2}$$

Respuesta: $A = \frac{9}{2}$ unidades cuadradas

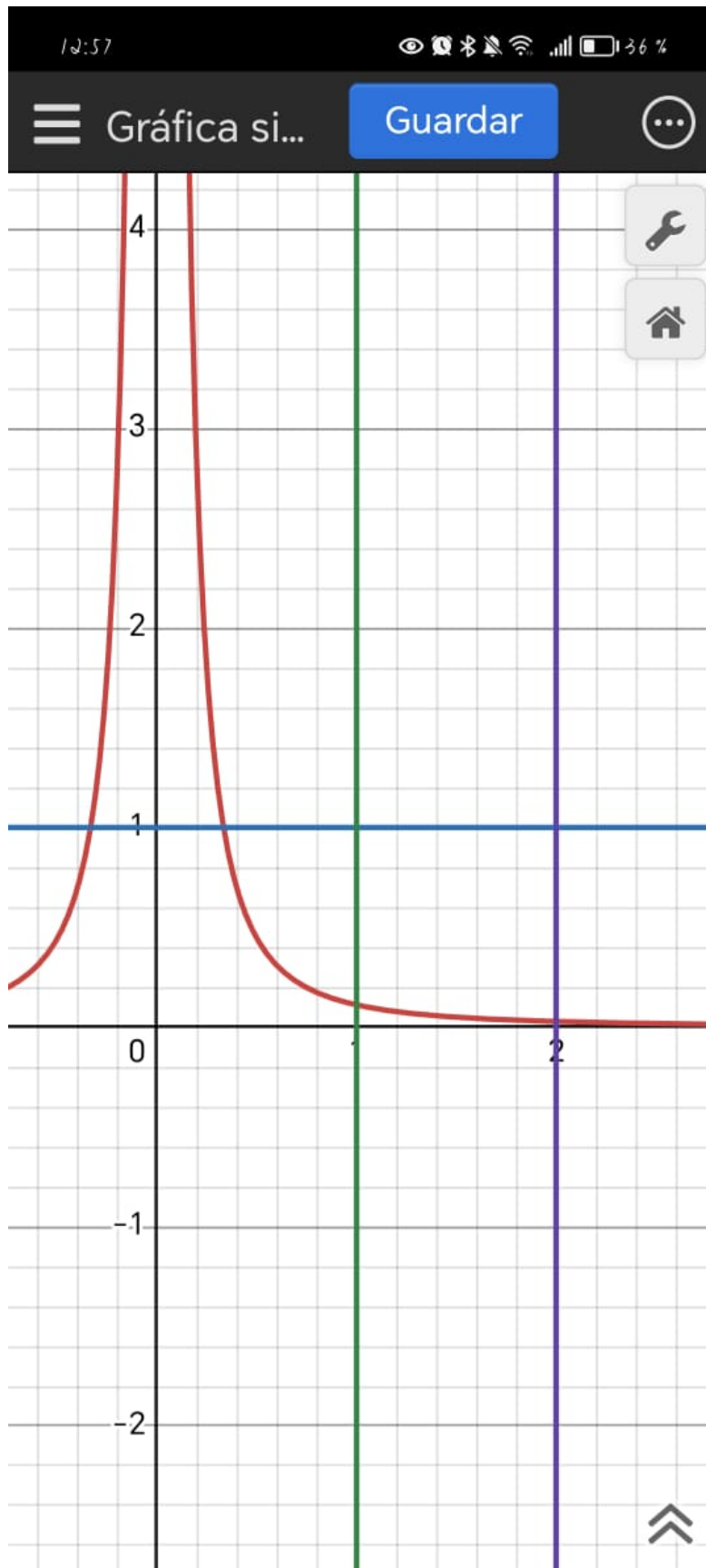


Figure 3: Problema 3
6

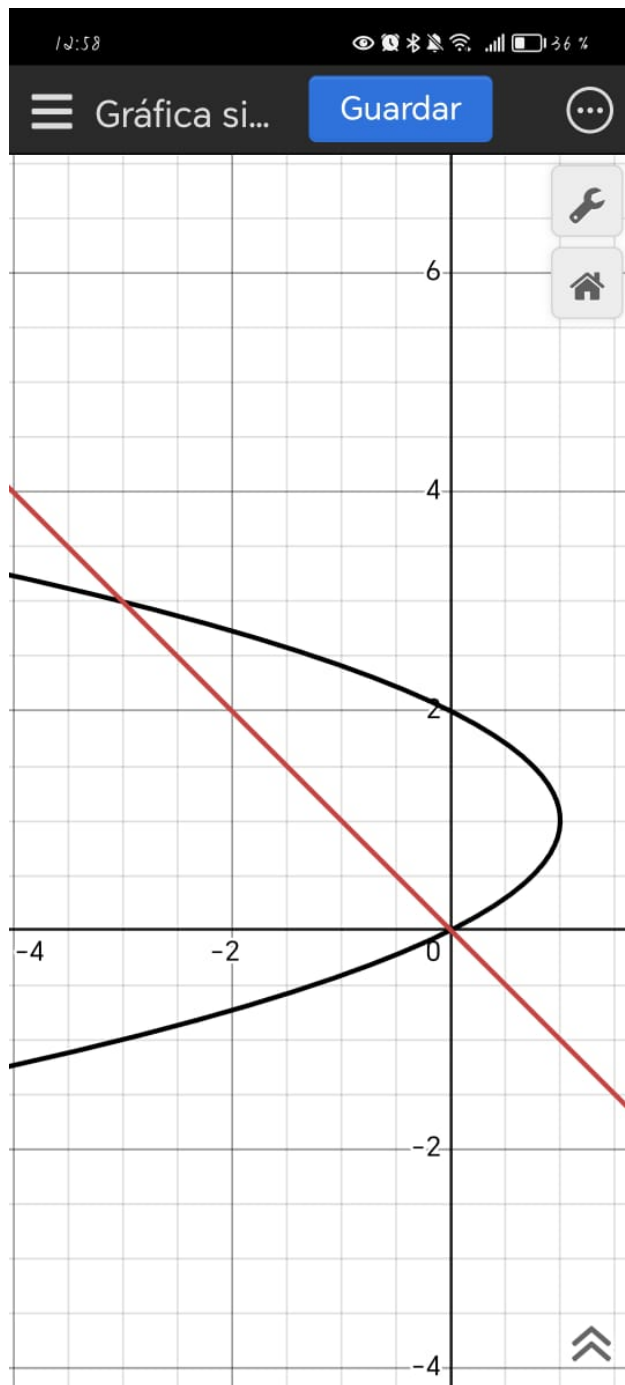


Figure 4: Problema 4