Integrales

Vólumenes

Prof. Arnoldo Del Toro Peña

12 de julio de 2025

Fórmulas Clave

FÓRMULA

Método de Discos (revolución alrededor del eje x): $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

FÓRMULA

Método de Arandelas (revolución alrededor del eje x): $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 - [r(x)]^2 dx$

Donde:

$R(x)$ = radio exterior (función superior) $r(x)$ = radio interior (función inferior) $[a, b]$ = intervalo de integración

NOTA IMPORTANTE

Es fundamental identificar correctamente cuál función está ”arriba” y cuál está ”abajo” en el intervalo de integración.

Solución de Volúmenes de Sólidos de Revolución

Problema 1: $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección

$x^2 = 4x - x^2$

$2x^2 = 4x$

$2x^2 - 4x = 0$

$2x(x-2) = 0$

$x = 0$ o $x = 2$

Paso 2: Determinar cuál función está arriba

Para $x = 1$: $y_1 = 1^2 = 1$, $y_2 = 4(1) - 1^2 = 3$

Por lo tanto, $4x - x^2 > x^2$ en el intervalo $[0, 2]$

Paso 3: Aplicar la fórmula del volumen (método de discos)

$$V = \pi \int_0^2 [(4x - x^2)^2 - (x^2)^2] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 [(4x - x^2)^2 - x^4] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 [16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^4] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 [16x^2 - 8x^3] dx$$

$$V = \pi \left[\frac{16x^3}{3} - \frac{8x^4}{4} \right]_0^2$$

$$V = \pi \left[\frac{16x^3}{3} - 2x^4 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left[\frac{16(8)}{3} - 2(16) \right]$$

$$V = \pi \left[\frac{128}{3} - 32 \right] = \pi \left[\frac{128 - 96}{3} \right] = \frac{32\pi}{3}$$

Problema 2: $y = \sqrt{2x-5}$, $y = 0$, $x = 4$

Paso 1: Encontrar el dominio

$2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

Paso 2: Determinar los límites de integración

La región está entre $x = \frac{5}{2}$ y $x = 4$

Paso 3: Aplicar la fórmula del volumen

$$V = \pi \int_{5/2}^{4} (\sqrt{2x-5})^2 dx$$

$$V = \pi \int_{5/2}^{4} (2x-5) dx$$

$$V = \pi \left[x^2 - 5x\right]_{5/2}^{4}$$

$$V = \pi \left[(16-20) - \left(\frac{25}{4} - \frac{25}{2}\right)\right]$$

$$V = \pi \left[-4 - \left(\frac{25}{4} - \frac{50}{4}\right)\right]$$

$$V = \pi \left[-4 - \left(-\frac{25}{4}\right)\right]$$

$$V = \pi \left[-4 + \frac{25}{4}\right] = \pi \left[\frac{-16+25}{4}\right] = \frac{9\pi}{4}$$

Problema 3: $y = x^{3/2}$, $y = 8$, $x = 0$

Paso 1: Encontrar el punto de intersección

$x^{3/2} = 8$

$x = 8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$

Paso 2: Determinar los límites de integración

La región está entre $x = 0$ y $x = 4$

Paso 3: Aplicar la fórmula del volumen (método de arandelas)

$$V = \pi \int_{0}^{4} [8^2 - (x^{3/2})^2] dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{4} [64 - x^3] dx$$

$$V = \pi \left[64x - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{4}$$

$$V = \pi \left[64(4) - \frac{4^4}{4}\right]$$

$$V = \pi \left[256 - \frac{256}{4}\right]$$

$$V = \pi[256 - 64] = 192\pi$$

Problema 4: $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 4$

Paso 1: Encontrar el punto de intersección

$4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ (tomamos el valor positivo)

Paso 2: Resolver usando el método de discos perpendiculares al eje y

Despejamos x en función de y: $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$

Paso 3: Aplicar la fórmula del volumen

$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^4 \frac{y}{4} dy$$

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^4 y dy$$

$$V = \frac{\pi}{4} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot 8 = 2\pi$$

Problema 5: $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, $y = 0$

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección

Para $y = \sqrt{x+2}$ y $y = x$:

$x = \sqrt{x+2}$

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2$ o $x = -1$

Como $y = x$ y $y \geq 0$, tomamos $x = 2$.

Para $y = \sqrt{x+2}$ y $y = 0$:

$0 = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = -2$

Paso 2: Analizar la región

- Entre $x = -2$ y $x = -1$: solo $y = \sqrt{x+2}$
- Entre $x = -1$ y $x = 2$: $y = \sqrt{x+2}$ está arriba de $y = x$

Paso 3: Aplicar la fórmula del volumen

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} (\sqrt{x+2})^2 dx + \pi \int_{-1}^{2} [(\sqrt{x+2})^2 - x^2] dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} (x+2) dx + \pi \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2] dx$$

Primera integral:

$$\pi \int_{-2}^{-1} (x+2) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - 2 \right) - \left(\frac{4}{2} - 4 \right) \right]$$

$$= \pi \left[-\frac{3}{2} - (-2) \right] = \pi \left[-\frac{3}{2} + 2 \right] = \frac{\pi}{2}$$

Segunda integral:

$$\pi \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \right]$$

$$= \pi \left[8 - 3 - \frac{1}{2} \right] = \pi \left[5 - \frac{1}{2} \right] = \frac{9\pi}{2}$$

Volumen total:

$$V = \frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = 5\pi$$

Resumen de Resultados

1. $V = \dfrac{32\pi}{3}$
2. $V = \dfrac{9\pi}{4}$

3. $V = 192\pi$
4. $V = 2\pi$
5. $V = 5\pi$