9. Fólgin föll og Taylor-nálganir

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

2. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Upprifjun 9.1

Skoðum feril sem gefinn er með jöfnu $F(x, y) = 0$ og gerum ráð fyrir að báðar fyrsta stigs hlutafleiður F séu samfelldar. Látum (x_0, y_0) vera punkt á ferlinum. Ef $F_2(x_0, y_0) \neq 0$ þá má skoða y sem fall af x í grennd við punktinn (x_0, y_0) og fallið $y = y(x)$ er diffranlegt í punktinum x_0 og afleiðan er gefin með formúlunni

$$y'(x_0) = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$

Sagt að jafnan $F(x, y) = 0$ skilgreini y sem *fólgið fall* af x í grennd við (x_0, y_0).

Setning 9.2

Látum F vera fall af n-breytum $x_1, \ldots, x_n$ og gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður F séu samfelldar. Látum $(a_1, \ldots, a_n)$ vera punkt þannig að $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Ef $F_n(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ þá er til samfellt diffranlegt fall $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ skilgreint á opinni kúlu B utan um $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ þannig að

$$\varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$$

og

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$$

fyrir alla punkta $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ í B.
Ennfremur gildir að

$$\varphi_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = -\frac{F_i(a_1, \ldots, a_n)}{F_n(a_1, \ldots, a_n)}.$$

Skilgreining 9.3

Jacobi-ákveða tveggja falla $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ með tilliti til breytanna x og y er skilgreind sem

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ef F og G eru föll af breytum $x, y, z, \ldots$ þá skilgreinum við, til dæmis,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Ef við höfum föll F, G, H af breytum $x, y, z, w, \ldots$ þá skilgreinum við, til dæmis,

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(w, z, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial w} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial w} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial w} & \frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Setning 9.4 (Upprifjun á reglu Cramers.)

Látum A vera andhverfanlegt $n \times n$ fylki og $\mathbf{b}$ vigur í $\mathbf{R}^n$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sé lausn á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Skilgreinum B_i sem $n \times n$ fylkið sem fæst með því að setja vigurinn $\mathbf{b}$ í staðinn fyrir dálk i í A. Þá er

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}.$$

Setning 9.5 (Setningin um fólgin föll)

Skoðum jöfnuhneppi

$$
\begin{aligned}
F_{(1)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\
F_{(2)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\
&\vdots \\
F_{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0.
\end{aligned}
$$

Látum $P_0 = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ vera punkt sem uppfyllir jöfnurnar. Gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður fallanna $F_{(1)}, \ldots, F_{(n)}$ séu samfelldar á opinni kúlu umhverfis P_0 og að

$$
\left.\frac{\partial(F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right|_{P_0} \neq 0.
$$

Þá eru til föll $\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$
á opinni kúlu B umhverfis $(a_1, \dots, a_m)$ þannig að

$$\varphi_1(a_1, \dots, a_m) = b_1, \dots, \varphi_n(a_1, \dots, a_m) = b_n \qquad \text{og}$$

$$\begin{aligned}
F_{(1)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) &= 0 \\
F_{(2)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) &= 0 \\
&\vdots \\
F_{(n)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) &= 0
\end{aligned}$$

fyrir alla punkta $(x_1, \dots, x_m)$ í B. Ennfremur fæst að

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, x_j, \dots y_n)}}{\frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, y_n)}}.$$

Setning 9.6 (Setningin um staðbundna andhverfu)
Látum

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

vera vörpun af n breytistærðum sem tekur gildi í $\mathbf{R}^n$ og er skilgreind á opnu mengi í $\mathbf{R}^n$. Gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður fallanna $f_1, \dots, f_n$ séu samfelld föll. Ef Jacobi-fylkið $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ er andhverfanlegt í punkti $\mathbf{x}_0$ á skilgreiningarsvæði $\mathbf{f}$ þá er til opin kúla $B_\mathbf{x}$ utan um $\mathbf{x}_0$ og opin kúla $B_\mathbf{y}$ utan um $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ og vörpun $\mathbf{g} : B_\mathbf{y} \to B_\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ fyrir alla punkta $\mathbf{x} \in B_\mathbf{x}$ og $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ fyrir alla punkta $\mathbf{y} \in B_\mathbf{y}$.

Upprifjun 9.7 (Taylor-regla í einni breytistærð.)

Látum f vera $n+1$-diffranlegt fall af einni breytistærð. Margliðan

$$P_{(n)}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kallast *n-ta stigs Taylor-margliða f með miðju í a*. Til er punktur s á milli a og x þannig að

$$E_{(n)}(x) = f(x) - P_{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Fáum svo að

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{(n)}(x) + E_{(n)}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

sem er kallað *n-ta stigs Taylor-formúla.*

Skilgreining 9.8

Látum $f(x, y)$ vera fall þannig að fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar og samfelldar. Margliðan

$$P_{(1)}(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

kallast *fyrsta stigs Taylor-margliða f með miðju í* (a, b).

Skilgreining 9.9

Látum $f(x, y)$ vera fall þannig að fyrsta og annars stigs hlutafleiður f eru skilgreindar og samfelldar. Margliðan

$$\begin{aligned} P_{(2)}(x, y) &= f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(f_{11}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{12}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{22}(a, b)(y - b)^2\big) \end{aligned}$$

kallast *annars stigs Taylor-margliða f með miðju í* (a, b).

Skilgreining og athugasemd 9.10

Skilgreinum tvo *diffurvirkja* D_1 og D_2 þannig að

$$D_1 f(a,b) = f_1(a,b) \qquad \text{og} \qquad D_2 f(a,b) = f_2(a,b).$$

Athugið að ef hlutafleiður f af nógu háum stigum eru allar skilgreindar og samfelldar þá er $D_1 D_2 = D_2 D_1$, þ.e.a.s. ekki skiptir máli í hvaða röð er diffrað, bara hve oft er diffrað með tilliti til hvorrar breytu.

Upprifjun 9.11(Tvíliðuregla)

Skilgreinum

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Talan $\binom{n}{j}$ (lesið n yfir j) er $j+1$ talan í $n+1$ línu Pascals-þríhyrningsins. Höfum að

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Regla 9.12

Ef $f(x, y)$ er fall þannig að allar hlutafleiður af n-ta og lægri stigum eru samfelldar þá gildir að

$$(hD_1 + kD_2)^n f(a, b) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^j k^{n-j} D_1^j D_2^{n-j} f(a, b).$$

Skilgreining 9.13

Fyrir fall $f(x, y)$ þannig að allar hlutafleiður af n-ta og lægri stigum eru samfelldar þá er *n-ta stigs Taylor-margliða f með miðju í punktinum* (a, b) skilgreind sem margliðan

$$
\begin{aligned}
P_{(n)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}((x-a)D_1 + (y-b)D_2)^m f(a, b) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m!} \binom{m}{j} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b)(x-a)^j (y-b)^{m-j} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b)(x-a)^j (y-b)^{m-j}.
\end{aligned}
$$

Setning 9.14

Fyrir fall $f(x,y)$ þannig að allar hlutafleiður af $n+1$-ta og lægri stigum eru samfelldar þá gildir um skekkjuna í n-ta stigs Taylor-nálgun að til er tala θ á milli 0 og 1 þannig að ef $h = x - a$ og $k = y - b$ þá er

$$f(x,y) - P_{(n)}(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}(hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k).$$