

# 24. Sundurleitnisetningin I

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 25. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

24.1

## Setning 24.1 (Sundurleitnisetning I)

Látum  $\mathbf{F}$  vera samfelldt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi  $D$  í  $\mathbb{R}^3$ . Látum  $P$  vera punkt á skilgreiningarsvæði  $\mathbf{F}$  og  $\mathcal{S}_\varepsilon$  kúluskel með miðju í  $P$  og geisla  $\varepsilon$ . Látum svo  $\mathbf{N}$  vera einingarþvægrasvið á  $\mathcal{S}_\varepsilon$  þannig að  $\mathbf{N}$  vísar út á við. Þá er

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS.$$

þar sem  $V_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^3/3$  er rúmmálið innan í  $\mathcal{S}_\varepsilon$ .

24.2

## Setning 24.2 (Setning Stokes I)

Látum  $\mathbf{F}$  vera samfelldt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi  $D$  í  $\mathbb{R}^3$ . Látum  $P$  vera punkt á skilgreiningarsvæði  $\mathbf{F}$  og  $C_\varepsilon$  vera hring með miðju í  $P$  og geisla  $\varepsilon$ . Látum  $\mathbf{N}$  vera einingarþvægrisveigi á planið sem hringurinn liggur í. Áttum hringinn jákvætt. Þá er

$$\mathbf{N} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{A_\varepsilon} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

þar sem  $A_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$  er flatarmálið sem afmarkast af  $C_\varepsilon$ .

24.3

## Túlkun 24.3

Hugsum  $\mathbf{F}$  sem lýsingu á vökvastreymi í  $\mathbb{R}^3$ .

$\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$  lýsir því hvort vökvinn er að þenjast út eða dragast saman í punktinum  $P$ . Sundurleitnisetningin (næsti fyrirlestur) segir að samanlögð útpensla á rúmskika  $R$  er jöfn streymi út um jaðar svæðisins  $\mathcal{S}$ , eða

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS.$$

$\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)$  lýsir hringstreymi í kringum punktinn  $P$ . Setning Stokes (þar næsti fyrirlestur) segir að samanlagt hringstreymi á fleti  $\mathcal{S}$  er jafnt hringstreymi á jaðri flatarins, sem við táknum með  $\mathcal{C}$ , eða

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

24.4

#### Skilgreining 24.4

Látum  $R$  vera svæði í  $\mathbb{R}^2$  og  $\mathcal{C}$  jaðar  $R$ . Gerum ráð fyrir að  $\mathcal{C}$  samanstandi af endanlega mörgum ferlum  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ . Jákvæð áttun á ferlunum felst í því að velja fyrir hvert  $i$  stikun  $\mathbf{r}_i$  á  $\mathcal{C}_i$  þannig að ef labbað eftir  $\mathcal{C}_i$  í stefnu stikunar þá er  $R$  á vinstri hönd.

---

24.5

#### Setning Green 24.5

Látum  $R$  vera svæði í planinu þannig að jaðar  $R$ , táknaður með  $\mathcal{C}$ , samanstendur af endanlega mörgum samfelldum diffranlegum ferlum. Áttum  $\mathcal{C}$  jákvætt. Látum  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$  vera samfelld diffranlegt vigursvið skilgreint á  $R$ . Þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA.$$

---

24.6

#### Fylgisetning 24.6

Látum  $R$  vera svæði í planinu þannig að jaðar  $R$  táknaður með  $\mathcal{C}$ , samanstendur af endanlega mörgum samfelldum diffranlegum ferlum. Áttum  $\mathcal{C}$  jákvætt. Þá er

$$\text{Flatarmál } R = \oint_{\mathcal{C}} x dy = - \oint_{\mathcal{C}} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x dy - y dx.$$

---

24.7

#### Sundurleitnisetningin í tveimur víddum 24.7

Látum  $R$  vera svæði í planinu þannig að jaðar  $R$ , táknaður með  $\mathcal{C}$ , samanstendur af endanlega mörgum samfelldum diffranlegum ferlum. Látum  $\mathbf{N}$  tákna einingarpervigrasvið á  $\mathcal{C}$  þannig að  $\mathbf{N}$  vísar út úr  $R$ . Látum  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$  vera samfelld diffranlegt vigursvið skilgreint á  $R$ . Þá er

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds.$$

---

24.8