Kafli 3: Línuleg algebra, Gauss-eyðing, fylkjastaðll, skekkjumat, ástandstala, LU-þáttun og fastapunktsaðferðir

Töluleg greining, STÆ405G, 2., 4. og 9. apríl 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

3.1

Yfirlit

Kafli 3: Jöfnuhneppi

Kafli	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
3.1	Línuleg algebra	149-159	3-5
3.2	Vending (pivoting)	160-170	6-9
3.3	Fylkjastaðall (matrix norm)	171-180	10-17
3.4	Skekkjumat og ástandstala (condition numb.)	181-190	18-23
3.5	LU-þáttun	191-204	24-39
3.8	Fastapunktsaðferðir (fixed point iteration)	223-236	40-49
3.10	Newton-aðferð fyrir jöfnuhneppi	249-258	50-55
3.8	Fastapunktssetning fyrir jöfnuhneppi		56

3.2

3.1 Línuleg algebra

3.1 Línuleg jöfnuhneppi

Línuleg jöfnuhneppi
Gefið $n \times n$ fylki A og n-vigur $\mathbf{b}$ þá leitum við að vigri $\mathbf{x}$ þannig að

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Lausnir
Við höfum almennt tvær leiðir til þess að leysa línuleg jöfnuhneppi:

- Gauss-eyðing og innsetning.
- Reikna andhverfu A, A^{-1}. Þá er
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

3.3

3.1 Fjöldi aðgerða

- Gauss-eyðing fyrir $n \times n$ fylki krefst $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ reikniaðgerða. Innsetningin krefst svo n^2 aðgerða til viðbótar. Samanlagður fjöldi aðgerða er því
$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$
- Það að reikna A^{-1} krefst hins vegar $2n^3 - 2n^2 + n$ aðgerða og margföldunin $A^{-1}b$, krefst $2n^2 - n$ aðgerða til viðbótar. Samanlagður fjöldi aðgerða er því
$$2n^3.$$

Hér er greinilega gáfulegra að nota Gauss-eyðingu. Almennt þá forðumst við eins og mögulegt er að reikna A^{-1}.

3.4

3.1 Vandamál með stöðugleika

Einfalt dæmi
Skoðum jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nákvæm lausn er $x_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, x_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Ef hins vegar ε er minna en nákvæmnin í tölvunni sem erum að vinna á, þá gefur Gauss-eyðing í tölvu, þar sem eytt er með 1. línu, svarið $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Ef línunum væri víxlað, þá gæfi tölvan hins vegar $x_1 = 1, x_2 = 1$ sem er miklu nær réttu svari. Sjá nánar skrána `tg14_03synidaemi.pdf` á Uglu.

Athugasemd
Það er alveg ljóst að megum ekki framkvæma Gauss-eyðingu blindandi því þá getur magnast upp styttingarskekkja sem skemmir lausnina okkar.

3.5

3.2 Vending

3.2 Vending (e. pivoting)

Vandamálið
Það sem olli vandræðum í dæminu hér á undan var það að forystustuðull fyrstu línurnar var hlutfallslega miklu minni en forystustuðull annarrar línu.

Lausnin
Lausnin felst í því að víxla á línum þannig að við þurfum ekki að notast við litla forystustuðla.

3.6

3.2 Hlutvending (e. partial pivoting)

Í grófum dráttum: Í umferð i í Gauss-eyðingunni þá athugum við hvort tölugildi forystustuðla línanna fyrir neðan línu i eru stærri en forystustuðull línu i, ef svo er þá víxlum við á þeirri línu og línu i.

Það er, í i-tu ítrun Gauss-eyðingar þá látum við $M_i = \max_{i \le j \le n} |a_{ji}|$. Ef $|a_{ii}| < M_i$ þá víxlum við á línu i og fyrstu línunni fyrir neðan sem hefur forystustuðul með tölugildi jafnt og M_i. (Þetta þýðir að ef $j_0 = \min\{j; i \le j \le n \text{ og } a_{ji} = M_i\}$ þá víxlum við á línu i og j_0).

Vankantar
Hlutvending virkar oft vel en getur búið til skekkju þar sem hún tekur bara tillit til forystustuðlanna í hverri línu, sjá dæmi kafla 3.2 (bls. 165).

3.7

3.2 Sköluð hlutvending (e. scaled partial pivoting)

Skilgreinum vigurinn $\mathbf{s}$ sem heldur utan um "stærð" línanna í A,

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|.$$

Látum dálkvigurinn $\mathbf{r}$ halda utan um það hvernig við umröðum línunum í A. Byrjum með

$$\mathbf{r} = [1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n]^T.$$

Athugasemd
Við munum uppfæra $\mathbf{r}$ eftir þörfum en breytum ekki $\mathbf{s}$ (of dýrt ef n stórt).

3.8

3.2 Sköluð hlutvending, framh.

Í ítrun i þá látum við

$$M_i = \max_{i \le j \le n} \frac{|a_{r_j i}|}{s_{r_j}},$$

og látum j_0 vera minnsta j þannig að hámarkinu er náð,

$$\frac{|a_{r_{j_0} i}|}{s_{r_{j_0}}} = M_i.$$

Ef $i < j_0$ þá skiptum við á línum i og j_0, þ.e.

$$\mathbf{r} = [\ldots\ i\ \ldots\ j_0\ \ldots]^T \text{ breytist í } \mathbf{r} = [\ldots\ j_0\ \ldots\ i\ \ldots]^T.$$

3.9

3.3 Fylkjastaðall

3.3 Inngangur

Að mæla fjarlægð milli hluta
Á rauntalnalínunni þá mælum við fjarlægð með tölugildinu, þannig að fjarlægðin á milli x og y er gefin með $d(x,y) = |x-y|$.

Í $\mathbb{R}^n$ þá finnst okkur evklíðski staðallinn náttúrulegur, enda svarar hann til þess að mæla fjarlægð milli punkta með beinni reglustiku;

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}.$$

Þetta er hins vegar ekki eina leiðin til þess mæla fjarlægð í $\mathbb{R}^n$, eins og við sjáum fljótlega, og ekki endalega réttari en aðrar aðferðir.

Almennt viljum við geta mælt "fjarlægð" á milli allra þeirra hluta sem við erum skoða, hvort sem það eru margliður, föll eða fylki. Tilgangurinn er að geta metið hversu langt nálgunin okkar er frá réttu gildi og hversu stór skekkjan er í samanburði við "stærð" hlutarins sem við erum að vinna með.

3.10

3.3 Vigurstaðall

Skilgreining
Fall $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kallast *vigurstaðall* (e. vector norm) ef fyrir öll $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ gildir eftirfarandi:

1. $\|\mathbf{x}\| \ge 0$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{x} = 0$
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$
4. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Athugasemd
Tölugildisfallið á $\mathbb{R}$ er greinilega staðall.

3.11

3.3 Dæmi um staðla

ℓ_2 staðallinn
Einnig kallaður evklíðska fjarlægðin, er gefinn með

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}.$$

ℓ_∞ staðallinn

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|.$$

ℓ_p staðlar
Almennt, ef $1 \le p < \infty$, þá skilgreinum við

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3.12

3.3 Fylkjastaðall

Skilgreining
Fylkjastaðall (e. matrix norm) er fall $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, þannig að fyrir öll $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ gildir

1. $\|A\| \geq 0$
2. $\|A\| = 0$ ef og aðeins ef $A = 0$
3. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
5. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Athugasemd
Ef þessi skilgreining er borin saman við skilgreininguna á staðli fyrir vigurrúm þá sjáum við að eini raunverulegi munurinn er skilyrði 5.

3.13

3.3 Fylkjastaðall skilgreindur út frá vigurstaðli

Skilgreining
Látum $\|\cdot\|$ vera vigurstaðal. Fallið $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ sem skilgreint er með

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

kallast *náttúrulegi fylkjastaðallinn* sem $\|\cdot\|$ gefur af sér.

Athugasemd
Það þarf að sýna, og er ekki mjög erfitt, að þessi fylkjastaðall uppfyllir öll skilyrðin í skilgreiningu hér á undan og er því sannarlega fylkjastaðall.

Athugasemd
Ef $\|\cdot\|$ er náttúrulegur fylkjastaðall þá gildir að fyrir öll fylki A og alla vigra $\mathbf{x}$ að

$$\underbrace{\|A\mathbf{x}\|}_{\text{vigurstaðll}} \leq \underbrace{\|A\|}_{\text{fylkjastaðall}} \underbrace{\|\mathbf{x}\|}_{\text{vigurstaðall}}.$$

3.14

3.3 Dæmi um fylkjastaðal

Athugasemd
Fyrir sérhvern ℓ_p staðal fáum við fylkjastaðal $\|\cdot\|_p$.

$\|\cdot\|_\infty$
Einfaldastur er staðallinn sem tilheyrir ℓ_∞, en hann uppfyllir

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

3.15

3.3 Eigingildi

Skilgreining
Látum A vera fylki. Ef tala λ (hugsanlega tvinntala) og vigur $\mathbf{x}$ uppfylla

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

þá kallast λ *eigingildi* A, og $\mathbf{x}$ *eiginvigur* A.

Athugið að eigingildi A eru nákvæmlega rætur kennimargliðu A, $t \mapsto \det(A - It)$.

3.16

3.3 Róf og eiginleikar þess

Skilgreining
Mengi allra eigingilda A er kallað *róf* A (e. spectrum) og er táknað með $\sigma(A)$.

Rófgeisli (e. spectral radius) fylkisins A er talan

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Setning
Látum A vera fylki, þá gildir eftirfarandi

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
- $\rho(A) \leq \|A\|$ fyrir sérhvern náttúrulegan fylkjastaðal $\|\cdot\|$
- Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ þá er til náttúrulegur fylkjastaðall $\|\cdot\|$ þannig að $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

3.17

3.4 Skekkjumat og ástandstala

3.4 Hvernig á að mæla skekkju

Gerum ráð fyrir að A sé andhverfanlegt fylki, $\mathbf{b}$ einhver vigur og að við séum að leita að lausn $\mathbf{x}$ á

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ef við höfum nálgun $\tilde{\mathbf{x}}$ þannig að *leifin* (e. residual) $\mathbf{r} = A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ er lítil, hvað getum við þá sagt um *skekkjuna* (e. error) $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$? Er hún endilega lítil?

Sjáum að svo er ekki, skekkjan getur verið hlutfallslega miklu meiri heldur en leifin (Example 3.11).

3.18

3.4 Skekkjumat

Við höfum fjórar jöfnur

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{r} = A(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = A\mathbf{e}, \quad \text{og} \quad \mathbf{e} = A^{-1}\mathbf{r}$$

og þær gefa okkur fjórar ójöfnur fyrir tilsvarandi staðal:

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{b}\|, \quad \|\mathbf{r}\| \leq \|A\|\|\mathbf{e}\|, \quad \|\mathbf{e}\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{r}\|$$

Við getum tengt tvær síðustu ójöfnurnar saman í mat á skekkjunni

$$\frac{1}{\|A\|} \cdot \|\mathbf{r}\| \leq \|\mathbf{e}\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{r}\|$$

og með því að nota fyrstu tvær ójöfnurnar fæst mat á hlutfallslegri skekkju

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Nú skilgreinum við *ástandstölu fylkisins* A með

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

3.19

3.4 Ástandstala fylkis og mat á hlutfallslegri skekkju

Matið
Með ástandstölunni verður mat okkar á hlutfallslegu skekkjunum að

$$\frac{1}{\kappa(A)} \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Athugasemd
Athugið að skilgreiningin

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

er *mjög* háð því hvaða staðal við veljum, en við höfum þó að

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

3.20

3.4 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur nú að við viljum leysa jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en vegna skekkju í stuðlum jöfnuhneppisins leysum við annað hneppi $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$.

Við skilgreinum *gagnaskekkjur* $\delta A = \tilde{A} - A$ og $\delta\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$ og ætlum að nota þær til þess að meta skekkjuna $\mathbf{e} = \delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$.

Við verðum að gera ráð fyrir að $\|\delta A\| \leq 1/\|A^{-1}\|$ sem tryggir að fylkið $\tilde{A}$ sé andhverfanlegt.

Nú stillum við upp jöfnuhneppinu $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ á forminu

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$$

sem jafngildir

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\big(\delta\mathbf{b} - (\delta A)\mathbf{x} - (\delta A)(\delta x)\big)$$

3.21

3.4 Áhrif gagnaskekkju

Við vorum komin með jöfnuna

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\big(\delta\mathbf{b} - (\delta A)\mathbf{x} - (\delta A)(\delta x)\big).$$

Af henni leiðir ójafnan

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\big(\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta A\|\|\mathbf{x}\| + \|\delta A\|\|\delta\mathbf{x}\|\big)$$

Einangrum nú $\|\delta\mathbf{x}\|$,

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \cdot \big(\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta A\|\|\mathbf{x}\|\big)$$

deilum með $\|\mathbf{x}\|$ báðum megin, margföldum síðan með $\|A\|$ í teljara og nefnara í hægri hliðinni,

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|A\|\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

3.22

3.4 Áhrif gagnaskekkju

Við vorum komin með

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|A\|\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Samkvæmt skilgreiningu er $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ og við höfum auk þess ójöfnuna $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$, en það gefur matið á hlutfallslegu skekkjunni sem við sækjumst eftir

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot (\|\delta A\|/\|A\|)} \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

3.23

3.5 LU-þáttun

3.5 Nokkrar skilgreiningar um fylki

(i) Fylkið A nefnist *neðra þríhyrningsfylki* ef öll stök fyrir ofan hornalínuna í A eru 0, þ.e. $a_{ij} = 0$ ef $i < j$.
(ii) Fylkið A nefnist *efra þríhyrningsfylki* ef öll stökin neðan við hornalínuna eru 0, þ.e. $a_{ij} = 0$ ef $i > j$.
(iii) Fylkið A nefnist *bandfylki* (e. striped matrix) ef til er $\beta \leq n - 2$ þannig að $a_{ij} = 0$ ef $|i - j| > \beta$. Minnsta talan β sem uppfyllir þetta skilyrði kallst á *bandvídd* fylkisins A.
(iv) Ef A er bandfylki með bandvíddina 1, þá nefnist A *þríhornalínufylki.*
(v) Fylkið A er sagt vera *samhverft* ef $a_{ij} = a_{ji}$ fyrir öll i og j.
(vi) Fylkið A er sagt vera *jákvætt ákvarðað* ef $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ gildir fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq 0$ í $\mathbb{R}^n$.

3.24

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með neðra þríhyrningsfylki

Ef A er neðra þríhyrningsfylki, þá er úrlausn jöfnuhneppisins $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auðveld, því hneppið er þá af gerðinni

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 &&= b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &&= b_2,\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &&= b_3,\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \cdots + a_{nn}x_n &&= b_n,
\end{aligned}$$

3.25

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með neðra þríhyrningsfylki

Við getum rakið okkur niður línurnar og leyst úr stærðirnar $x_1, \ldots, x_n$ hverja á eftir annarri

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1/a_{11},\\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22},\\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}.
\end{aligned}$$

3.26

3.5 Talning á aðgerðunum við úrlausnina

Nú skulum við telja saman fjölda reikningsaðgerða sem þarf til þess að framkvæma þessa útreikninga.

Við lítum á samlagningu og frádrátt sem sömu aðgerðina. Við þurfum enga samlagningu til að reikna út x_1, eina til þess að reikna út x_2, tvær til þess að reikna x_3 og þannig áfram upp í $n-1$ samlagningu til þess að reikna út x_n.

Heildarfjöldinn er því

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \tfrac{1}{2}n(n-1) = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n.$$

Fjöldi margfaldana er sá sami.

Við þurfum hins vegar aðeins eina deilingu til þess að reikna út hverja af stærðunum $x_1, \ldots, x_n$.

Heildarfjöldi reikniaðgerða við úrlausn á línulegu jöfnuhneppi $Ax = b$, þar sem A er neðra þríhyrningsfylki er því

$$\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + n = n^2.$$

3.27

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með efra þríhyrningsfylki

Hugsum okkur nú að A sé efra þríhyrningsfylki. Þá verður jöfnuhneppið

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3,\\
\vdots \quad &\vdots\\
a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}$$

3.28

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með efra þríhyrningsfylki

Við getum rakið okkur upp línurnar og fundið $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ hverja af annarri

$$\begin{aligned}
x_n &= b_n/a_{nn},\\
x_{n-1} &= (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1},\\
\vdots \quad &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots\\
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1,n}x_n)/a_{11}.
\end{aligned}$$

Aðgerðafjöldinn er sá sami og í úrlausn neðra þríhyrningshneppisins. 3.29

3.5 Línuaðgerðir

Gerum ráð fyrir að við séum að ryðja 4×4 fylki með Gauss-eyðingu og að við séum búin með fyrsta dálkinn. Næsta skref er að nota línu 2 til þess að losna við stökin í sætum (3,2) og (4,2).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a & \cdot & \cdot \\ 0 & b & \cdot & \cdot \\ 0 & c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Lína 3, l_3, verður þá að $l_3 - \frac{b}{a} l_2$, og líne 4, l_4, verður að $l_4 - \frac{c}{a} l_2$.

Þessar tvær aðgerðir má einnig framkvæma með því að margfalda fylkið að ofan frá vinstri með fylkinu

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.30

3.5 Ný sýn á Gauss-eyðingu

Það að ryðja fylkið eins og hér á undan, felst því í því að margfalda A frá vinstri með þremur fylkjum M_1, M_2 og M_3 sem eru þannig að M_i er einingafylkið nema í sætum $(i+1, i), \ldots, (n, i)$ eru tölur sem eru hugsanlega frábrugðnar 0.

Athugum að Gauss-eyðing skilar fylki U á efra þríhyrningsformi.

Við getum því skrifað

$$M_3 M_2 M_1 A = U$$

Almennt, fyrir $n \times n$ fylki þá getum við skrifað

$$M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A = U,$$

þar sem M_i eru fylki eins og lýst er hér að ofan. 3.31

3.5 Nánar um M_i

Við sjáum að ef

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix},$$

þá er

$$M_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

3.32

3.5 Nánar um M_i

Eins þá er auðvelt að sjá að

$$M_i^{-1} M_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -m_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & \vdots & & 1 & & \\ & & \vdots & & -m_{j+1,j} & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ & & -m_{n,i} & & -m_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Það er

$$M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -m_{2,1} & 1 & & & & \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 & & & \\ & -m_{4,2} & -m_{4,3} & 1 & & \\ & . & & & . & \\ -m_{n,1} & -m_{n,2} & -m_{n,3} & . & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

3.33

3.5 LU-þáttun

Þetta hefur í för með sér að ef við skilgreinum $L = M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}$ þá er

$$A = LU$$

eða

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ -m_{2,1} & 1 & & & & & \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 & & & & \\ & -m_{4,2} & -m_{4,3} & 1 & & & \\ & . & & & . & & \\ & . & & & & . & \\ & . & & & & & . \\ -m_{n,1} & -m_{n,2} & -m_{n,3} & . & . & . & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} U$$

Þannig að með því að framkvæma Gauss-eyðingu á A og halda utanum um aðgerðirnar (M_i'in) og niðurstöðuna U þá fæst LU-þáttun á A. 3.34

3.5 LU-þáttun og sköluð hlutvending

Vandamálið
Aðferðin hér að framan gerði ráð fyrir að stak $a_{i,i}$ yrði aldrei 0 (þá getum við ekki notað þá línu til þess að eyða). Eins hugsuðum við ekkert út í styttingarskekkjur sem við búum til.

Lausnin
Ef við framkvæmum Gauss-eyðinguna með skalaðri hlutvendingu þá ráðum við bót á báðum þessum atriðum, því þá veljum við aldrei línu með forystustuðul 0 og við minnkum skekkjuna eins og hefur komið fram áður.

Athugasemd
Þegar við notum skalaða hlutvendingu þá uppfylla fylkin L og U ekki endilega $LU = A$ (sjá dæmi bls. 196). Þess í stað fæst

$$LU = PA$$

þar sem fylkið P umraðar línunum í A í samræmi við umröðunarvigrinn $\mathbf{r}$. Það er, stökin í P eru 0, nema $p_{i,r_i} = 1$.

3.35

3.5 Úrlausn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

Við skiptum nú úrlausnarferlinu á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ í þrjú skref

(i) **LU-þáttun:** Reiknum út neðra þríhyrningsfylki L og efra þríhyrningsfylki U með skalaðri hlutvendingu. Höldum utanum $\mathbf{r}$ (og þar með P). Þá er

$$LU = PA.$$

(ii) **Forinnsetning:** Leysum $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$.
(iii) **Endurinnsetning:** Leysum $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
Lausnin sem við leitum að er þá $\mathbf{x}$, því

$$P\mathbf{b} = L\mathbf{y} = UL\mathbf{x} = PA\mathbf{x},$$

sem er jafngilt því að $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ 3.36

3.5 Fjöldi reikniaðgerða fyrir LU-þáttun

Heildarfjöldi reikningsaðgerða til þess að framkvæma LU-þáttunina er

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Liðir (ii) og (iii) krefjast svo $n^2 + n^2 = 2n^2$ aðgerða til viðbótar. Samanlagður fjöldi aðgerða er því

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Ef n er stór tala, segjum $n = 1000$, þá er fyrsti liðurinn lang stærstur og við getum slegið á aðgerðafjöldann með $\frac{2}{3}n^3$.

Þetta er töluvert betra heldur en að reikna A^{-1} og svo $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, en þá er heildafjöldi aðgerða $2n^3$. 3.37

3.5 Mörg jöfnuhneppi

Ef við þurfum að leysa mörg jöfnuhneppi með sama stuðlafylkið þá koma kostir LU-þáttunar vel í ljós.

Gefið A og $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ þá leitum við að vigrum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ þannig að

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i, \qquad \text{fyrir } i = 1, \ldots, m.$$

Við þurfum bara að framkvæma LU-þáttunina einu sinni, en innsetningarnar í lið (ii) og (iii) framkvæmum við m-sinnum. Heildar fjöldi aðgerða er þá

$$\frac{2}{3}n^3 + (2m - \frac{1}{2})n^2 - (m - \frac{1}{6})n.$$

3.38

3.8 Fastapunktsaðferðir fyrir línuleg jöfnuhneppi

3.8 Ítrekunaraðferðir til þess að leysa línuleg jöfnuhneppi

Munum að samanlagður fjöldi reikniaðgerða sem þarf til þess að leysa $n \times n$ línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ með Gauss-eyðingu, for- og endurinnsetningu er $\sim \frac{2}{3}n^3$.

Ef jöfnuhneppið er jafngilt hneppinu

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

þá getum við sett upp fastapunktsferð til þess að leysa þetta hneppi með því að giska á eitthvert nálgunargildi $\mathbf{x}^{(0)}$ fyrir lausnina og ítra síðan með formúlunni

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

í þeirri von að runan $(\mathbf{x}^{(k)})$ stefni á réttu lausnina $\mathbf{x}$ á upprunalega jöfnuhneppinu.

Það þarf $n^2 - n$ aðgerðir til þess að reikna út margfeldið $T\mathbf{v}$ fyrir vigur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og því getum við komist upp með að taka $\approx \frac{2}{3}n$ ítrekanir áður en heildaraðgerðafjöldinn er kominn upp fyrir aðgerðafjöldann í Gauss-eyðingu, ásamt for- og endurinnsetningu. 3.39

3.8 Fastapunktsítrekun til þess að leysa línuleg jöfnuhneppi

Við ætlum nú að gera ráð fyrir að jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sé jafngild

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

giskum á eitthvert nálgunargildi $\mathbf{x}^{(0)}$ fyrir lausnina $\mathbf{x}$ og skilgreinum síðan rununa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Allt er nú undir því komið að $n \times n$ fylkið T sé vel valið. 3.40

3.8 Fastapunktsítrekun - skekkjumat

Við skilgreinum nú skekkjuna í k-ta ítrekunarskrefinu $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$. Þá gildir formúlan

$$\mathbf{e}^{(k)} = T\mathbf{e}^{(k-1)} = T^2\mathbf{e}^{(k-2)} = \cdots = T^k\mathbf{e}^{(0)}$$

sem við höfum áður séð í athugun okkar á fastapunktsaðferðinni.

Nú beitum við

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \le \|T^k\|\|\mathbf{e}^{(0)}\| \le \|T\|^k\|\mathbf{e}^{(0)}\|$$

Við höfum $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = T\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} - \mathbf{x}^{(0)}$ og $\mathbf{c} = \mathbf{x} - T\mathbf{x}$ og þar með

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = T(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}) = -(\mathbf{e}^{(0)} - T\mathbf{e}^{(0)}) = -(I-T)\mathbf{e}^{(0)}.$$

Þetta gefur jöfnuna:

$$\mathbf{e}^{(0)} = -(I-T)^{-1}\big(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\big).$$

3.41

3.8 Fastapunktsítrekun - skekkjumat

Með smá útreikningi má sýna fram á að ef $\|T\| < 1$, þá er

$$\|(I-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Við vorum komin með ójöfnurnar

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \le \|T\|^k\|\mathbf{e}^{(0)}\|$$

og niðurstaðan verður því

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \le \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

Sem þýðir að fastapunktsaðferðin er samleitin þegar $\|T\| < 1$. 3.42

3.8 Skilyrði fyrir samleitni

Munum nú að $\rho(T)$ er rófgeisli fylkisins T sem er samkvæmt skilgreiningu tölugildi á stærsta eigingildi fylkisins T.

Rifjum líka upp að fyrir sérhvern náttúrlegan fylkjastaðal $\|\cdot\|$ þá er $\rho(T) \le \|T\|$, og að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að hægt er að finna náttúrlegan fylkjastaðal þannig að

$$\|T\| \le \rho(T) + \varepsilon.$$

Sérstaklega gildir í tilfellinu $\rho(T) < 1$ að til er náttúrlegur fylkjastaðall $\|\cdot\|$ þannig að $\|T\| < 1$. Þetta þýðir að fastapunktsaðferðin er samleitin ef $\rho(T) < 1$. 3.43

3.8 Skiptingaraðferð (e. splitting method)

Við viljum setja upp fastapunktsaðferð til þess að leysa línulega jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ með því að umrita jöfnuna yfir í jafngilda línulega jöfnu

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

Gerum ráð fyrir að $A = M - N$ þar sem M er andhverfanlegt fylki. Þá jafngildir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jöfnunni $M\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$ og fastapunktsjafnan er

$$\mathbf{x} = M^{-1}N\mathbf{x} + M^{-1}\mathbf{b},$$

þar sem $T = M^{-1}N$ og $\mathbf{c} = M^{-1}\mathbf{b}$.

Þessi leið til þess að umrita línulega jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yfir í jafngilda hneppið $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ nefnist *skiptingaraðferð* fyrir línulega jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 3.44

3.8 Jacobi-aðferð

Við skrifum $A = D - L - U$, þar sem D er hornalínufylkið með hornalínu A, L er neðra þríhyrningsfylki og U er efra þríhyrningsfylki

Við tökum $M = D$ og $N = L + U$ og fáum þá $T = D^{-1}(L+U)$ og $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$.

Þessi skiptingaraðferð er nefnd *Jacobi-aðferð.*

Rakningarformúlan er
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}.$$
Ef við skrifum hana hnit fyrir hnit, þá fáum við fyrir $i = 1, 2, \ldots, n$,
$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)$$

3.45

3.8 Gauss-Seidel-aðferð

Augljós endurbót á Jacobi-aðferðinni er að nota gildið $x_i^{(k+1)}$ fyrir $i < j$ um leið og það hefur verið reiknað.

Við það breytist rakningarformúlan í Jacobi-aðferð í
$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)$$
Þetta svarar til þess að við veljum skiptingu á A með $M = D - L$ og $N = U$ og þar með að
$$T = (D-L)^{-1}U \qquad \text{og} \qquad \mathbf{c} = (D-L)^{-1}\mathbf{b}$$

3.46

3.8 SOR-aðferð (e. successive over-relaxation)

Það er hægt að hraða samleitni í Gauss-Seidel-aðferð með því að taka vegið meðaltal af gildinu $x_i^{(k+1)}$ sem kemur út úr Gauss-Seidel reikniritinu og næsta gildi á undan með vægisstuðli sem við táknum með ω.

Formúlan verður
$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)$$

Þetta svarar til þess að við veljum
$$M = \frac{1}{\omega}D - L \quad og \quad N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U$$
og þar með að
$$T = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right) \quad \text{og} \quad \mathbf{c} = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\mathbf{b}$$

3.47

3.8 Samleitni Gauss-Seidel-aðferðar

Setning

- Gerum ráð fyrir að A sé samhverft rauntölufylki með öll hornalínustökin jákvæð. Þá er Gauss-Seidel aðferðin samleitin ef og aðeins ef A er jákvætt ákvarðað.
- Ef fylkið A er jákvætt ákvarðað, þá er Gauss-Seidel-aðferð samleitin fyrir sérhvert val á upphafságiskun $\mathbf{x}^{(0)}$.

3.48

3.10 Newton-aðferð fyrir jöfnuhneppi

3.10 Aðferð Newtons fyrir jöfnuhneppi

Látum $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, þar sem I er svæði í $\mathbb{R}^n$ vera samfelld föll. Það getur komið sér vel að geta leyst ólínuleg jöfnuhneppi af gerðinni

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Svo heppilega vill til að aðferð Newtons virkar næstum óbreytt fyrir slík hneppi. 3.49

3.10 Jacobi-fylki

Skilgreinum $\mathbf{f} : I \to R^n$ með

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \quad \dots \quad , f_n(\mathbf{x})\big)$$

og gerum ráð fyrir að allar hlutafleiðurnar $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$ séu til og séu samfelldar.

Táknum Jacobi-fylki $\mathbf{f}$ með $\mathbf{f}'$, það er

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

3.50

3.10 Aðferð Newtons fyrir hneppi

Lausn á hneppinu er því vigur $\mathbf{r}$ þannig að $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0$.

Ef $\mathbf{r}$ er lausn hneppisins og $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ er upphafságiskun á $\mathbf{r}$ má sjá að runan $(\mathbf{x}_n)$, þar sem

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n^T$$

og $\mathbf{h}_n^T$ er lausn á jöfnuhneppinu

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}_n^T = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

stefnir á lausnina $\mathbf{r}$.

Við getum metið skekkjuna með

$$\mathbf{e}_{n+1} \approx \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|$$

og forritið okkar helst næstum óbreytt, við þurfum aðeins að skipta `abs` út fyrir skipunina `norm`. 3.51

3.10 Matlab-forrit fyrir hneppi

```
function x = newtonNullHneppi(f,df,x0,epsilon)
%
%   x = newtonNullHneppi(f,df,x0,epsilon)
%
% Nálgar núllstöð fallsins f:Rn --> Rn með aðferð Newtons.
% Fallið df er Jacobi-fylki f, x0 er upphafságiskun
% á núllstöð og epsilon er tilætluð nákvæmni.
% x0 verður að vera dálkvigur og f verður að
% skila dálkvigrum

x = x0; mis = -df(x)\f(x);
% Ítrum meðan ástæða er til
while (norm(mis) >= epsilon)
    x = x + mis;
    mis = -df(x)\f(x);
end
```

3.52

3.10 Sýnidæmi

Grafið $y = e^x$ sker lokaða ferilinn sem gefinn er með jöfnunni $x^4 + y^2 = 1$ í tveimur punktum. Notið aðferð Newtons til þess að nálga hnit þeirra með 5 aukastafa nákvæmni.

Lausn: Það er alveg augljóst að punkturinn $\mathbf{r} = (0, 1)$ gefur lausn á jöfnuhneppinu. Við látum eins og ekkert sé og giskum á $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 0.75)$

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|$
0	0.50000000000000	0.75000000000000	
1	0.17270262414568	1.10909912528477	0.18447541668198
2	0.01946538693088	1.00638822766059	0.02028257413953
3	0.00020831857772	1.00002048613263	0.00020930163934
4	0.00000002190660	1.00000000020984	0.00000002190761
5	0.00000000000000	1.00000000000000	0.00000000000000
6	-0.00000000000000	1.00000000000000	0.00000000000000

3.53

3.10 Sýnidæmi framhald

Við tökum fyrir hinn skurðpunktinn:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|$
0	-0.80000000000000	0.25000000000000	
1	-1.03486380522268	0.34379785380788	0.07380487278262
2	-0.96968875917544	0.37842981331349	0.00919771982977
3	-0.96137076039507	0.38235523639344	0.00014098927991
4	-0.96124395918305	0.38241687590740	0.00000003252214
5	-0.96124392995056	0.38241689016050	0.00000000000000
6	-0.96124392995055	0.38241689016050	0.00000000000000

Nálgun okkar á skurðpunkti ferlanna í vinstra hálfplaninu er $(-0.96124392995055, 0.38241689016050)$

Í töfluna var ekki hægt að koma fyrir athugun á samleitnistiginu en hlutfallið

$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|} \approx \frac{\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|}{\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|^2} = 1.6$$

fyrir fjögur síðustu gildin. 3.54

3.8 Fastapunktssetningi fyrir jöfnuhneppi

3.8 Fastapunktssetning

Munum að mengi X í $\mathbb{R}^n$ er sagt vera *kúpt* ef strikið sem tengir sérhverja tvo punkta í X liggur alltaf í X.

Fastapunktssetning:

Látum X vera lokað og takmarkað kúpt hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{f} : X \to X$ vera herpingu, þ.e.a.s. til er $\lambda \in [0, 1[$ þannig að

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Þá hefur $\mathbf{f}$ nákvæmlega einn fastapunkt $\mathbf{r}$ í menginu X og runan $(\mathbf{x}_n)$ þar sem

$$\mathbf{x}_0 \in X,$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0$$

stefnir á hann. 3.55

Kafli 3: Fræðilegar spurningar:

1. Lýsið því hvernig línulegt jöfnuhneppi er leyst með LU-þáttun, for- og endurinnsetningu.
2. Hvað þýðir að A sé efra þríhyrningsfylki og hvað þýðir að A sé neðra þríhyrningsfylki?
3. Hvað er bandfylki og hvað er þríhornalínufylki?
4. Hvað þýðir að A sé samhverft og hvað þýðir að A sé jákvætt ákvarðað?

5. Hver er heildarfjöldi reikniaðgerða sem þarf til þess að leysa $n \times n$ línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ef A er efra eða neðra þríhyrningsfylki?
6. Hvað er LU-þáttun á $n \times n$ fylki A?
7. Hver er stærðargráðan $\approx an^k$ á fjölda langra reikningsaðgerða sem þarf til þess að framkvæma LU-þáttun á $n \times n$ fylki?

3.56

Kafli 3: Fræðilegar spurningar:

8. Hvað er PLU-þáttun á fylki A og til hvers er henni beitt?
9. Hvað er fylkjastaðall og hvernig er fylkjastaðall sem staðall $\|\cdot\|_v$ á $\mathbb{R}^n$ gefur af sér? (Þetta er einnig nefnt náttúrlegur fylkjastaðall.)
10. Hvað er rófgeisli fylkis og hvernig tengist hann fylkjastöðlum?
11. Hvernig er ástandstala fylkis skilgreind og hvernig er hún notuð til þess að meta hlutfallslega skekkju í nálgunarlausn á línulegu jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
12. Hvernig er skiptingaraðferð til þess að finna nálgun á línulegu jöfnuhneppi?
13. Jacobi-aðferð er dæmi um skiptingaraðferð. Hvernig er hún?
14. Gauss-Seidel-aðferð er annað dæmi um skiptingaraðferð. Hvernig er hún?
15. Hvernig er ítrekunarskrefið í aðferð Newtons fyrir hneppi?

3.57