Sýnidæmi

Þetta er dæmi um jöfnuhneppi þar sem nauðsynlegt er að nota vendingu til þess að fá nothæfa lausn. Við sjáum að það skiptir því miklu máli hvernig við útfærum Gauss-eyðinguna. Jöfnuhneppið sem við ætlum að skoða er

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nákvæm lausn

Byrjum á því að finna nákvæma lausn með Gauss-eyðingu. Margföldum fyrstu línuna með $\frac{1}{\varepsilon}$ og drögum frá annarri línunni.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right]$$

Af þessu sjáum við að $x_2 = \frac{2-\frac{1}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}} = 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, og þá er $x_1 = \frac{1-1x_2}{\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Lausn í tölvu, án vendingar

Athugum hvernig sömu reikningar eru framkvæmdir í tölvu, og gerum ráð fyrir að ε sé minna heldur en nákvæmnin í tölvunni. Það þýðir að tölvan getur ekki gert greinarmun á tölunum $1-\frac{1}{\varepsilon}$ og $-\frac{1}{\varepsilon}$, og eins á tölunum $2-\frac{1}{\varepsilon}$ og $-\frac{1}{\varepsilon}$, því $\frac{1}{\varepsilon}$ er svo miklu stærra en 1 og 2. Gauss-eyðing út frá fyrstu línu skilar eins og áður

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right]$$

En af ofangreindum ástæðum þá lítur tölvan á seinna hneppið sem

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right]$$

Þannig að $x_2 = \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon}} = 1$. Þá er $x_1 = \frac{1-1x_2}{\varepsilon} = \frac{1-1}{\varepsilon} = 0$. Sem er langt frá réttu lausninni.

Lausn í tölvu, með vendingu

Prófum að gera það sama, nema nú skulum við eyða út frá annarri línu. Margföldum línu 2 með ε og drögum frá fyrstu línunni.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1-\varepsilon & 1-2\varepsilon \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Tölvan sér ekki mun á $1-\varepsilon$ og 1, og eins á $1-2\varepsilon$ og 1 þannig að í hennar augum verður þetta að

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Þannig að $x_2 = 1$, og þá fæst $x_1 = \frac{2-1x_2}{1} = 1$. Þetta er ekki hárrétt lausn, en mun betri en sú sem við fengum áður.

Matlab

Þið getið prófað að framkvæma þessa reikninga í Matlab. Það má gera með eftirfarandi skipunum.

```
>>[ 1/5 1 ; 1 1 ]\[1 ; 2]
>>[ 1e-20 1 ; 1 1 ]\[ 1 ; 2]
```

Í fyrri skipuninni þá er $\varepsilon = \frac{1}{5}$, þá sést greinilega nákvæma lausnin að ofan. En í seinni skipuninni þá er $\varepsilon = 10^{-20}$ og þá lendum við í því að lausnin okkar er ekki alveg rétt. Matlab er hins vegar það skynsamt að það beita skalaðri hlutvendingu þannig að lausnin okkar verður ekki alveg út úr kú.

Benedikt Magnússon
2. apríl 2014