14. Breytuskipti

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

18. febrúar 2015

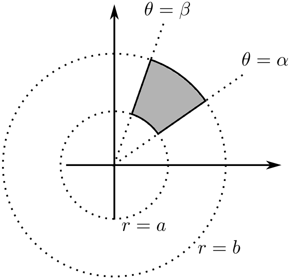
Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Upprifjun 14.1

Látum $P = (x, y) \neq \mathbf{0}$ vera punkt í plani. *Pólhnit* P er talnapar $[r, \theta]$ þannig að r er fjarlægð P frá $O = (0, 0)$ og θ er hornið á milli striksins $\overline{OP}$ og x-ássins. (Hornið er mælt þannig að rangsælis stefna telst jákvæð, og leggja má við θ heil margfeldi af 2π.)

Skilgreining 14.2

Pólhnitarétthyrningur í xy-planinu er svæði sem afmarkast af tveimur hringbogum $x^2 + y^2 = a^2$ og $x^2 + y^2 = b^2$ og tveimur hálflínum sem byrja í $(0,0)$ og mynda hornin α og β við x-ásinn (Hornin eru mæld þannig að rangsælis stefna telst jákvæð.)



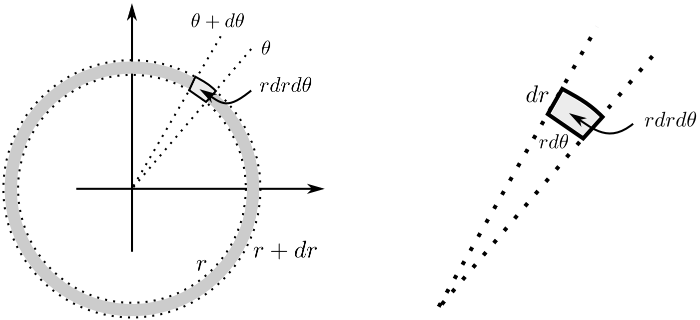
Gerum ráð fyrir að $0 \leq a \leq b$ og að $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Þá má lýsa pólhnitarétthyrningnum með því að nota pólhnit þannig að

$$D = \{[r, \theta] \mid 0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Setning 14.3

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir pólhnitarétthyrning $D = \{[r, \theta] \mid 0 \le a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$ þá er

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$



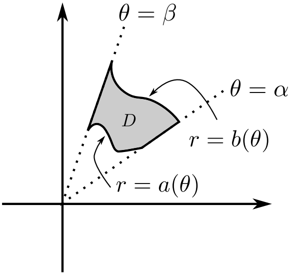
Upprifjun 14.4

Látum f vera fall skilgreint á bili $[\alpha, \beta]$. Jafnan $r = f(\theta)$ lýsir mengi allra punkta í planinu sem hafa pólhnit á forminu $[f(\theta), \theta]$ þar sem $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Þetta mengi kallast *pólhnitagraf* fallsins f.

Setning 14.5

Látum D vera svæði i xy-plani sem afmarkast ef pólhnitalínum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ og tveimur pólhnitagröfum $r = a(\theta)$ og $r = b(\theta)$. Gerum ráð fyrir að $0 \leq a(\theta) \leq r \leq b(\theta)$ og $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Ef f er heildanlegt fall yfir D þá er

$$\iint f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$



Regla 14.6

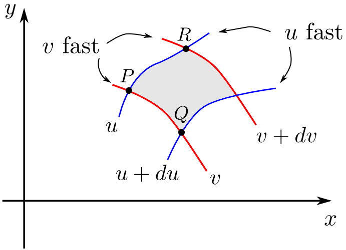
Hugsum okkur að $f(x,y)$ sé fall og hægt sé að rita $f(x,y) = g(x)h(y)$. Látum $R = [a,b] \times [c,d]$. Þá er

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_c^d g(x)h(y)\,dy\,dx \\ &= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

Setning 14.7 (Almenn breytuskiptaregla fyrir tvöföld heildi)

Látum $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ vera gagntæka vörpun milli svæðis S í uv-plani og svæðis D í xy-plani. Gerum ráð fyrir að föllin $x(u, v)$, $y(u, v)$ hafi samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður á S. Ef f er heildanlegt fall yfir D, þá er fallið $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ heildanlegt yfir S og

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$



$$\overline{PQ} = \frac{\partial x}{\partial u} du\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du\mathbf{j}$$

$$\overline{PR} = \frac{\partial x}{\partial v} dv\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} dv\mathbf{j}$$

$$dA = |\overline{PQ} \times \overline{PR}| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$