16. Hagnýtingar margfaldra heilda

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 25. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

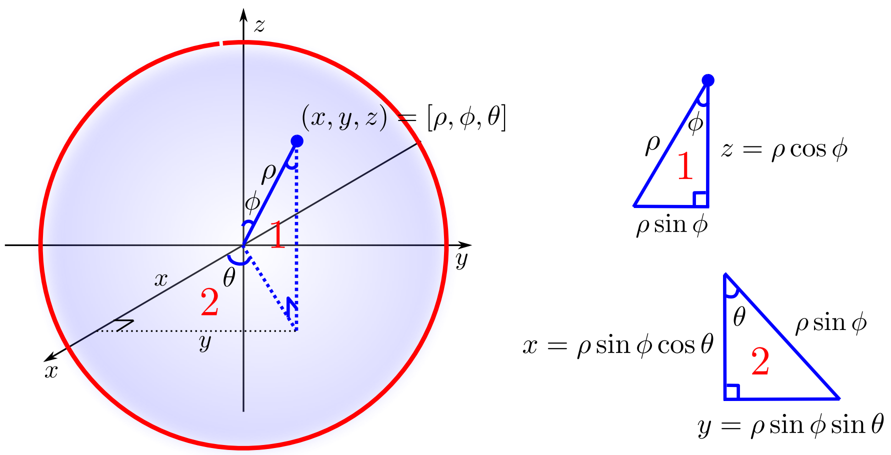
16.1

Kúluhnit

Skilgreining 16.1
Látum (x, y, z) vera punkt í $\mathbb{R}^3$. *Kúluhnit* (x, y, z) eru þrennd talna ρ, φ, θ þannig að

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \qquad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \qquad z = \rho \cos \varphi.$$

Punktur sem hefur kúluhnit ρ, φ, θ er táknaður með $[\rho, \varphi, \theta]$.



16.2

Umræða 16.2
Eftirfarandi jöfnur gefa aðferð til að finna kúluhnit:

ρ er fjarlægðin frá $(0, 0, 0)$ til (x, y, z), það er að segja

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

φ er hornið á milli jákvæða hluta z-ássins og línustriksins frá $(0, 0, 0)$ til (x, y, z). Hornið φ má ákvarða út frá jöfnunni

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

θ er hornið sem jákvæði hluti x-ásins myndar við línustrikið frá $(0,0,0)$ til $(x,y,0)$ (sama horn og notað í sívalningshnitum (og pólhnitum)). Hornið θ má finna út frá jöfnunni

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Um kúluhnit $[\rho,\varphi,\theta]$ fyrir punkt (x,y,z) gildir að velja má ρ,φ,θ þannig að $0 \le \rho$, $0 \le \varphi \le \pi$ og $0 \le \theta \le 2\pi$.

16.3

Breytuskipti í kúluhnit

Setning 16.3

Látum R vera rúmskika þannig að þegar notuð eru kúluhnit þá fæst eftirfarandi lýsing

$$R = \{[\rho,\varphi,\theta] \mid \alpha \le \theta \le \beta, c \le \varphi \le d, a \le \rho \le b\}.$$

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV =$$
$$\int_\alpha^\beta \int_c^d \int_a^b f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

16.4

Massamiðja

Regla 16.4

Látum D tákna svæði í plani. Hugsum D sem plötu þ.a. í punkti (x,y) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x,y)$. Massi plötunnar er

$$m = \iint_D \delta(x,y)\,dA.$$

Vægi plötunnar um línuna $x=0$ (þ.e. y-ás) og um línuna $y=0$ (þ.e. x-ás) eru gefin með

$$M_{x=0} = \iint_D x\delta(x,y)\,dA \quad \text{og} \quad M_{y=0} = \iint_D y\delta(x,y)\,dA.$$

Hnit *massamiðju* plötunnar eru $(\overline{x},\overline{y})$ þar sem

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad \text{og} \quad \overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m}.$$

16.5

Regla 16.5

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x,y,z) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x,y,z)$. Massi hlutarins er

$$m = \iiint_R \delta(x,y,z)\,dV.$$

Vægi hlutarins um planið $x=0$ (þ.e. yz-planið) er

$$M_{x=0} = \iiint_R x\delta(x,y,z)\,dV.$$

Svipað skilgreinum við

$$M_{y=0} = \iiint_R y\delta(x,y,z)\,dV \quad \text{og} \quad M_{z=0} = \iiint_R z\delta(x,y,z)\,dV.$$

Hnit *massamiðju* hlutarins eru $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ þar sem

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \qquad \text{og} \qquad \overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \qquad \text{og} \qquad \overline{z} = \frac{M_{z=0}}{m}.$$

16.6

Hverfitregða

Regla 16.6
Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x,y,z) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x,y,z)$. Látum L tákna línu (snúningsás) í rúminu. *Hverfitregða* hlutarins um L er

$$I = \iiint_R D^2\,\delta\,dV$$

þar sem $\delta = \delta(x,y,z)$ og $D = D(x,y,z)$ er fjarlægð punktsins (x,y,z) frá L.

16.7

Yfirborðsflatarmál

Regla 16.7
Látum D vera svæði í plani og $f(x,y)$ diffranlegt fall skilgreint á D. Flatarmál grafsins $z = f(x,y)$ þar sem $(x,y) \in D$ er gefið með formúlunni

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_1(x,y)^2 + f_2(x,y)^2}\,dA.$$

16.8