1. Ferlar

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

5. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Inngangur

- Viðfangsefni námskeiðsins er varpanir sem skilgreindar eru á hlutmengi í $\mathbf{R}^n$ og taka gildi í $\mathbf{R}^m$.
- Fáumst við stærðfræðigreiningu í mörgum breytistærðum.
- Sambærileg verkefni og í stærðfræðigreiningu í einni breytistærð: Samfelldni, diffrun, heildun. Rúmfræðileg túlkun skiptir nú miklu máli.
- Gerir okkur kleift að fást við mörg raunveruleg verkefni þar sem margar breytistærðir koma við sögu.

Skilgreining 1.1

Vörpun $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ þannig að $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ kallast *vigurgild vörpun*. Slík vörpun er sögð samfelld ef föllin $r_1, \ldots, r_n$ eru öll samfelld. Samfelld vörpun $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er oft kölluð *stikaferill*.

Stikaferlar

Ritháttur 1.2

Þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

og þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Skilgreining 1.3

Ferill í plani er mengi punkta (x, y) í planinu þannig að skrifa má $x = f(t)$ og $y = g(t)$ fyrir t á bili I þar sem f og g eru samfelld föll á I. Bilið I ásamt föllunum (f, g) kallast *stikun* á ferlinum. Ferill í rúmi og stikun á ferli í rúmi eru skilgreind á sambærilegan hátt.

Ferlar og stikanir á ferlum

Ferill í plani/rúmi er **ekki** það sama og stikaferill. Fyrir gefinn feril eru til (óendanlega) margar ólíkar stikanir.

Ferlar og stikanir á ferlum

Ferill í plani/rúmi er **ekki** það sama og stikaferill. Fyrir gefinn feril eru til (óendanlega) margar ólíkar stikanir.

Dæmi 1.6 - Eðlisfræðileg túlkun

Líta má á veginn milli Reykjavíkur og Akureyrar sem feril.
Líta má á ferðalag eftir veginum frá Reykjavík til Akureyrar þar sem staðsetning er þekkt á hverjum tíma sem stikaferil þar sem tíminn er stikinn.

Ferlar og stikanir á ferlum

Ferill í plani/rúmi er **ekki** það sama og stikaferill. Fyrir gefinn feril eru til (óendanlega) margar ólíkar stikanir.

Dæmi 1.8 - Eðlisfræðileg túlkun

Líta má á veginn milli Reykjavíkur og Akureyrar sem feril.
Líta má á ferðalag eftir veginum frá Reykjavík til Akureyrar þar sem staðsetning er þekkt á hverjum tíma sem stikaferil þar sem tíminn er stikinn.

Dæmi 1.9

Jafnan

$$x^2 + y^2 = 1$$

lýsir ferli í planinu sem er hringur með miðju í (0,0) og geisla 1.
Dæmi um ólíkar stikanir:

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}) & \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [-1, 1[, \\ (2-t, -\sqrt{1-(2-t)^2}) & \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [1, 3]. \end{cases}$$

Skilgreining 1.10

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti t* ef markgildið

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

er til. Stikaferillinn $\mathbf{r}$ er sagður *diffranlegur* ef hann er diffranlegur í öllum punktum á bilinu $[a, b]$. (Í endapunktum bilsins $[a, b]$ er þess krafist að einhliða afleiður séu skilgreindar.)

Setning 1.11

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti* t ef og aðeins ef föllin $r_1, \ldots, r_n$ eru öll diffranleg í t. Þá gildir að

$$\mathbf{r}'(t) = (r_1'(t), \ldots, r_n'(t)).$$

Setning 1.13

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti* t ef og aðeins ef föllin $r_1, \ldots, r_n$ eru öll diffranleg í t. Þá gildir að

$$\mathbf{r}'(t) = (r_1'(t), \ldots, r_n'(t)).$$

Ritháttur 1.14

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera diffranlegan stikaferil. Venja er að rita $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og tala um $\mathbf{v}(t)$ sem *hraða* eða *hraðavigur*. Talan $|\mathbf{v}(t)|$ er kölluð *ferð*. Einnig er ritað $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ og talað um $\mathbf{a}(t)$ sem *hröðun* eða *hröðunarvigur*.

Dæmi 1.15

Lítum á eftirfarand stikaferla sem stika hring með miðju í (0,0) og geisla 1.

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$
$$\mathbf{r}_2(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, \sqrt{2\pi}].$$

Þá er tilsvarandi hraði

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{r}_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$
$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{r}_2'(t) = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, \sqrt{2\pi}].$$

og ferðin $|\mathbf{v}_1(t)| = 1$ og $|\mathbf{v}_2(t)| = 2t$.

Setning 1.16

Látum $\mathbf{u}, \mathbf{v} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ vera diffranlega stikaferla og λ diffranlegt fall. Þá eru stikaferlarnir $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t), \lambda(t)\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{u}(\lambda(t))$ diffranlegir, og ef $n = 3$ þá er stikaferillinn $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ líka diffranlegur. Fallið $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ er líka diffranlegt. Eftirfarandi listi sýnir formúlur fyrir afleiðunum:

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$,

(b) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$,

(c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$,

(d) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$,

(e) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \mathbf{u}'(\lambda(t))\lambda'(t)$.

Ef $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ þá er

(f) $\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$.

Skilgreining 1.17

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n; \mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ vera stikaferil. Stikaferillinn er sagður *samfellt diffranlegur* ef föllin $r_1(t), \dots, r_n(t)$ eru öll diffranleg og afleiður þeirra eru samfelldar. Samfellt diffranlegur stikaferill er sagður *þjáll* (e. smooth) ef $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t.

Stikaferillinn er sagður *samfellt diffranlegur á köflum* ef til eru tölur $b_0, \dots, b_k$ þannig að $a = b_0 < b_1 < \cdots < b_k = b$ og stikaferillinn er samfellt diffranlegur á hverju bili $[b_{i-1}, b_i]$. Það að stikaferill sé *þjáll á köflum* (e. piecewise smooth curve) er skilgreint á sambærilegan hátt.

Setning 1.18

Látum $\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ vera samfellt diffranlegan stikaferil fyrir t á bili I. Ef $f'(t) \neq 0$ á I þá hefur ferilinn snertilínu fyrir hvert gildi á t og hallatala hennar er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Ef $g'(t) \neq 0$ á I þá hefur ferilinn snertilínu fyrir hvert gildi á t og hallatala hennar er

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Lengd stikaferils

Regla 1.19

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera samfellt diffranlegan stikaferil. *Lengd* eða *bogalengd* stikaferilsins er skilgreind með formúlunni

$$s = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

Skilgreining og umræða 1.20

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera samfellt diffranlegan stikaferil. Sagt er að stikaferillinn sé *stikaður með bogalengd* ef fyrir allar tölur t_1, t_2 þannig að $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ þá gildir

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

(Skilyrðið segir að lengd stikaferilsins á milli punkta $\mathbf{r}(t_1)$ og $\mathbf{r}(t_2)$ sé jöfn muninum á t_2 og t_1.) Stikun með bogalengd má líka þekkja á þeim eiginleika að $|\mathbf{v}(t)| = 1$ fyrir öll gildi á t.