

22. Heildi vigursviðs yfir flöt

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

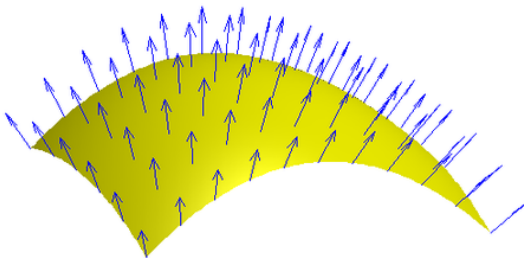
18. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Einingarþvervigrasvið

Skilgreining 22.1

Látum \mathcal{S} vera flöt í \mathbb{R}^3 . Einingarþvervigur \mathbf{n} á flötinn \mathcal{S} í punktinum P er einingarvigur hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum P . Einingarþvervigrasvið á \mathcal{S} er samfelld vigursvið \mathbf{N} sem er skilgreint í öllum punktum \mathcal{S} þannig að fyrir $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ er vigurinn $\mathbf{n}(x, y, z)$ einingarvigur sem er hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum (x, y, z) .

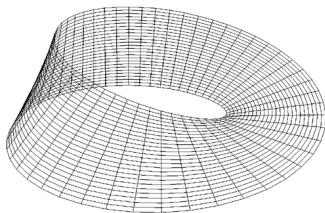


Áttanlegir fletir

Skilgreining 22.2

Flöturinn S er sagður *áttanlegur* ef til er einingarþervigrasvið N á S .

Áttun á áttanlegum fleti felst í því að velja annað af tveimur mögulegum einingaþervigrasviðum.

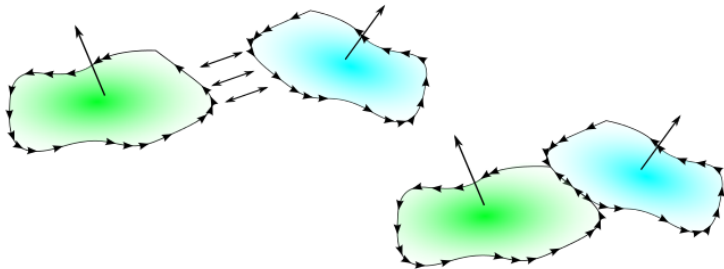


Möbiusarborði er ekki áttanlegur.

Umræða 22.3

Ef áttanlegur flötur \mathcal{S} hefur jaðar þá skilgreinir áttunin stefnu á jaðri \mathcal{S} . Venjan er að velja stefnu jaðarsins þannig að þegar gengið er eftir honum sé einingarþværigrasviðið á vinstri hönd (hægri handar regla).

Ef tveir áttanlegir fletir hafa jaðar má splæsa þeim saman í áttanlegan flöt með því að líma þá saman á (hluta af) jöðrunum og gæta þess að jaðrarnir hafi andstæða stefnu á samskeytunum.



Setning 22.4

Gerum ráð fyrir að \mathcal{S} sé áttanlegur flötur og $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sé regluleg stíkun á \mathcal{S} (það er, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru samfelld föll af u og v og vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru línulega óháðir). Þá er

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

einingarþværvigrasvið á \mathcal{S} .

Heildi vigursviðs yfir flöt - Flæði

Skilgreining og ritháttur 22.5

Látum \mathcal{S} vera áttanlegan flöt stikaðan af reglulegum stikaferli $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ með samfelldar hlutafleiður. Látum \mathbf{N} tákna einingarþvervigursviðið sem gefið er í 22.4. Heildi vigursviðs \mathbf{F} yfir flötinn \mathcal{S} er skilgreint sem

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv.$$

Slík heildi eru oft nefnd *flæði vigursviðsins \mathbf{F} gegnum flötinn \mathcal{S}* .

Ritum $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \, dS$. Þá er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Samantekt 22.6

1. Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er stikun á \mathcal{S} þá er

$$d\mathbf{S} = \pm \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

2. Ef \mathcal{S} er graf $z = f(x, y)$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy.$$

3. Gerum ráð fyrir að flöturinn \mathcal{S} í \mathbb{R}^3 hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy -planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x, y)$. Ef fletinum \mathcal{S} er lýst sem hæðarfleti $G(x, y, z) = C$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\nabla G(x, y, z)}{|\nabla G(x, y, z)|} dS = \pm \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} dx dy.$$

Val á áttun felst í því að velja $+$ eða $-$ í formúlunum hér að ofan.

Túlkun 22.7

Hugsum okkur að vigursviðið \mathbf{F} lýsi streymi vökva. Hugsum svo flötinn \mathcal{S} sem himnu sem vökvinn getur streymt í gegnum. Áttun á \mathcal{S} gefur okkur leið til að tala um hliðar flatarins og að vökvinn streymi í gegnum flötinn frá einni hlið til annarrar. Streymi vökvans gegnum flötinn (rúmmál per tímaeiningu) er gefið með heildinu $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ þar sem streymi í stefnu \mathbf{N} reiknast jákvætt.

