12. Tvöföld heildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 11. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

12.1

Skiptingar

Skilgreining 12.1
Látum $R = [a, b] \times [c, d]$ vera rétthyrning í planinu. *Skipting* P á rétthyrningnum R felst í því að taka skiptingar

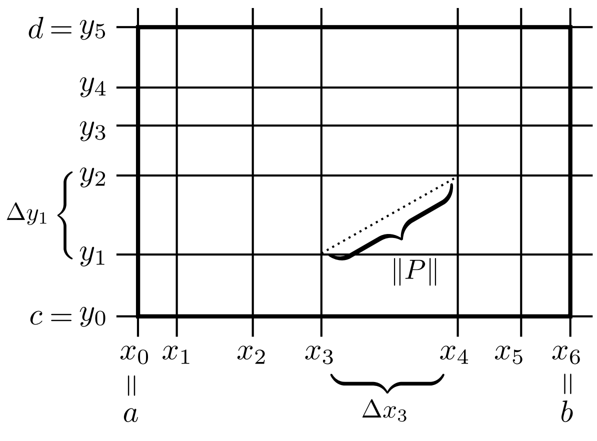
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \qquad \text{og} \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

á bilunum $[a, b]$ og $[c, d]$ og nota þær skiptingar til að skipta R upp í rétthyrninga $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Ritum $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ og $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. *Norm* skiptingarinnar P, táknað með $\|P\|$, er skilgreint sem lengd lengstu hornalínu í rétthyrningunum $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

12.2

Skiptingar

Skipting P á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$.



12.3

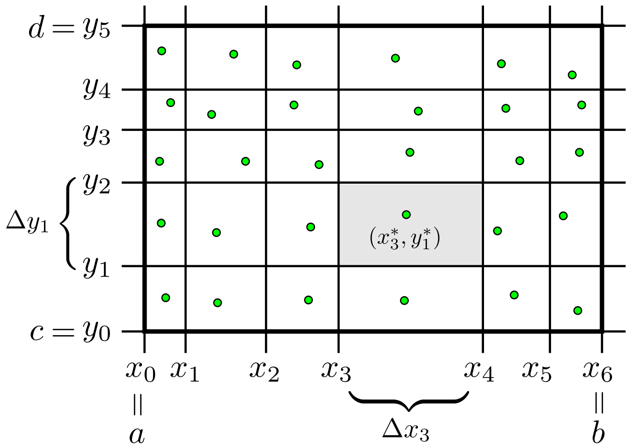
Riemann-summa

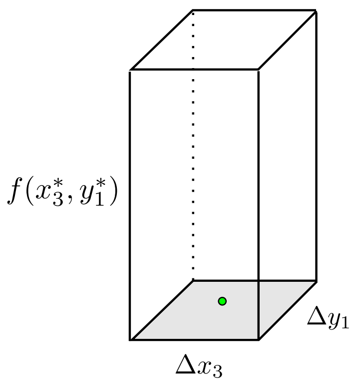
Skilgreining 12.2

Látum f vera fall skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ og látum P vera skiptingu á R. Veljum úr hverjum rétthyrningi $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ punkt (x_i^*, y_j^*).

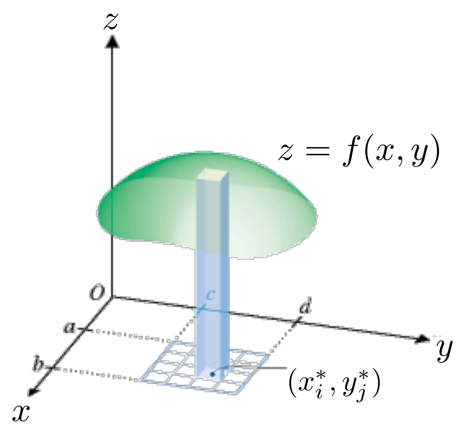
Skilgreinum *Riemann-summuna*

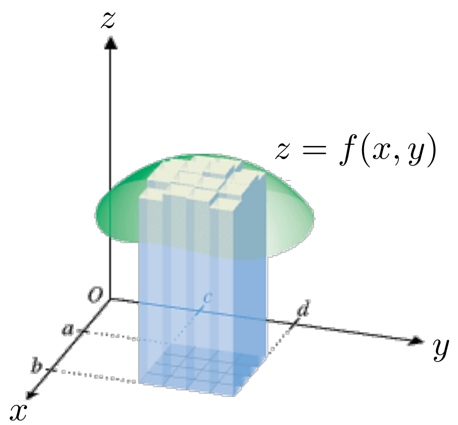
$$\mathcal{R}(f,P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_i^*,y_j^*)\Delta x_i\Delta y_j.$$

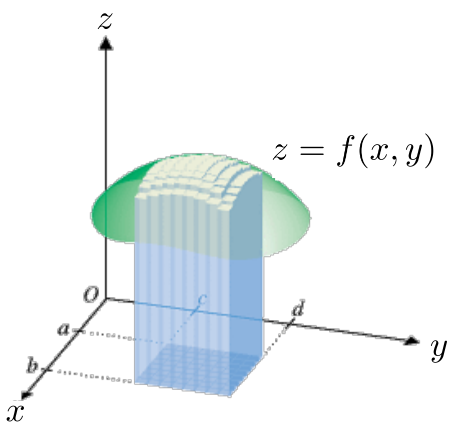




12.4







12.5

Tvöfalt heildi yfir rétthyrning

Skilgreining 12.3
Sagt er að fall f skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ sé *heildanlegt yfir* R með heildi I (hér stendur I fyrir tölu) ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að $|\mathcal{R}(f, P) - I| < \varepsilon$ fyrir allar skiptingar P með $\|P\| < \delta$ óháð vali á punktunum (x_i^*, y_j^*).
Ritum þá

$$\iint_R f(x, y) dA = I.$$

12.6

Tvöfalt heildi yfir takmarkað svæði

Skilgreining 12.4
Látum D vera takmarkað svæði í planinu. Fall f er sagt heildanlegt yfir D ef til er rétthyrningur R sem inniheldur D og fallið

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{ef } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{ef } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

er heildanlegt yfir R.

12.7

Tvöfalt heildi yfir takmarkað svæði

Setning 12.5
Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu og takmörkuðu svæði D í planinu $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að jaðar D samanstandi af endanlega mörgum ferlum sem hafa endanlega lengd. Þá er fallið f heildanlegt yfir D.

12.8

Setning 12.6
Látum D vera svæði í planinu og f takmarkað fall skilgreint á D og heildanlegt yfir D. Þá gildir:

1. $\iint_D f(x, y)\, dA = 0$ ef flatarmál D er 0.
2. $\iint_D 1\, dA =$ flatarmál D.
3. Ef $f(x, y) \geq 0$ fyrir alla punkta (x, y) í D þá er $\iint_D f(x, y)\, dA$ jafnt rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x, y)$.
4. Ef $f(x, y) \leq 0$ fyrir alla punkta (x, y) í D þá er $\iint_D f(x, y)\, dA$ jafnt mínus rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x, y)$.

12.9

Setning 12.7
Ef D er svæði í planinu og f og g heildanleg föll yfir D þá gildir:

1. Ef L og M eru fastar þá er

$$\iint_D Lf(x, y) + Mg(x, y)\, dA = L \iint_D f(x, y)\, dA + M \iint_D g(x, y)\, dA.$$

2. Ef $f(x,y) \leq g(x,y)$ þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA.$$

3. Þríhyrningsójafna: $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA.$
4. Ritum D sem sammengi af svæðum $D_1, \ldots, D_k$ sem skarast ekki nema mögulega í jaðarpunktum þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x,y)\,dA.$$

12.10

Setning Fubinis 12.8

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir rétthyrning $R = [a,b] \times [c,d]$. Setjum

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (x \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}).$$

Þá gildir að

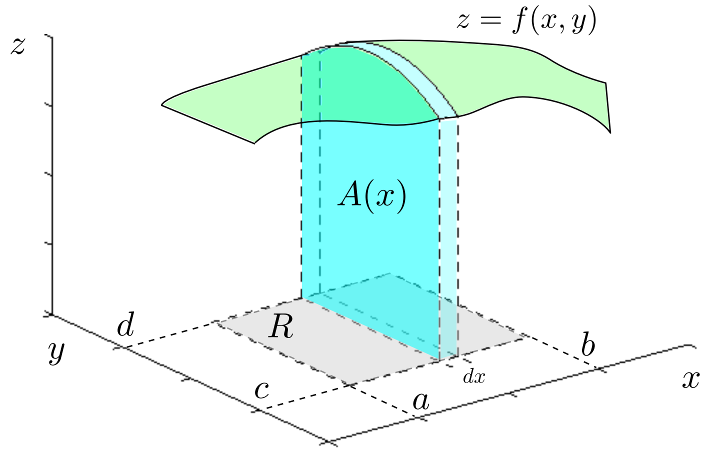
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Sömuleiðis gildir þegar við setjum

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (y \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}) \qquad \text{að}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

12.11



12.12