# Kafli 6: Töluleg diffrun og heildun

## Töluleg greining, STÆ405G

21., 26. og 28. febrúar, 5., og 7. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

# Yfirlit

## Kafli 6: Töluleg diffrun og heildun

Deildun og heildun eru meginaðgerðir stærðfræðigreiningarinnar. Þess vegna er nauðsynlegt að geta nálgað

$$f'(a), f''(a), f'''(a), \dots \qquad \text{og} \qquad \int_a^b f(x)\,dx,$$

þar sem $f$ er fall sem skilgreint er á bili $I$ sem inniheldur $a$ og $b$.

## 6.0 Meginhugmynd í öllum nálgunaraðferðunum

Látum $p$ vera margliðu sem nálgar $f$,

## 6.0 Meginhugmynd í öllum nálgunaraðferðunum

Látum $p$ vera margliðu sem nálgar $f$, og látum $r(x) = f(x) - p(x)$ tákna skekkjuna í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Þá er

$$f'(x) = p'(x) + r'(x), \quad f''(x) = p''(x) + r''(x), \ldots$$

og

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx.$$

## 6.0 Meginhugmynd í öllum nálgunaraðferðunum

Látum $p$ vera margliðu sem nálgar $f$, og látum $r(x) = f(x) - p(x)$ tákna skekkjuna í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Þá er

$$f'(x) = p'(x) + r'(x), \quad f''(x) = p''(x) + r''(x), \ldots$$

og

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx.$$

Nú þurfum við að gera tvennt:

(i) Finna heppilegar nálgunarmargliður og reikna út

$$p'(a),\ p''(a), \ldots, \qquad \int_a^b p(x)\,dx$$

(ii) Meta skekkjurnar

$$r'(a),\ r''(a), \ldots \int_a^b r(x)\,dx$$

Byrjum á að leiða út nokkrar nálgunarformúlur með skekkjumati.

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall á bili $I \subset \mathbb{R}$ og $a$ vera punkt í $I$. Afleiða $f$ í punktinum $a$ er skilgreind með

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ef markgildið er til. Við skrifum því oft

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall á bili $I \subset \mathbb{R}$ og $a$ vera punkt í $I$. Afleiða $f$ í punktinum $a$ er skilgreind með

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ef markgildið er til. Við skrifum því oft

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Þessi nálgun er kölluð *frammismunur* því oftast hugsar maður sér að $h > 0$ og þá er $a + h$ lítið skref áfram frá $a$.

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall á bili $I \subset \mathbb{R}$ og $a$ vera punkt í $I$. Afleiða $f$ í punktinum $a$ er skilgreind með

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ef markgildið er til. Við skrifum því oft

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Þessi nálgun er kölluð *frammismunur* því oftast hugsar maður sér að $h > 0$ og þá er $a + h$ lítið skref áfram frá $a$.

Við þurfum skekkjumat fyrir þessa formúlu ef við eigum að geta notað hana.

## 6.2 Frammismunur

Við fáum mat á skekkjuna í nálguninni með að skoða Taylor-margliðu $f$ í $a$. Samkvæmt setningu Taylors er til $\xi$ á milli $a$ og $a+h$ þannig að

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

Við fáum mat á skekkjuna í nálguninni með að skoða Taylor-margliðu $f$ í $a$. Samkvæmt setningu Taylors er til $\xi$ á milli $a$ og $a+h$ þannig að

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

Þá fæst að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f[a, a+h]$$

er

$$e = f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Með öðrum orðum

$$\min_{t\in[0,h]} -\frac{1}{2}f''(t)h \leq e \leq \max_{t\in[0,h]} -\frac{1}{2}f''(t)h.$$

## 6.2 Frammismunur

Við fáum mat á skekkjuna í nálguninni með að skoða Taylor-margliðu $f$ í $a$. Samkvæmt setningu Taylors er til $\xi$ á milli $a$ og $a+h$ þannig að

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

Þá fæst að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f[a, a+h]$$

er

$$e = f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Með öðrum orðum

$$\min_{t\in[0,h]} -\frac{1}{2}f''(t)h \le e \le \max_{t\in[0,h]} -\frac{1}{2}f''(t)h.$$

Við sjáum því að $e = O(h)$ þegar $h \to 0$.

Við getum sett $a - h$ í stað $a + h$ í skilgreininguna á afleiðu. Þá fæst svokallaður *bakmismunur*

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

og ljóst er að sama skekkjumat gengur fyrir þessa nálgun og fyrir nálgun með frammismun.

Lítum nú á þriðja stigs Taylor nálgun

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(\alpha)h^3,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(\beta)h^3,$$

þar sem $\alpha$ er á milli $a$ og $a+h$ og $\beta$ er á milli $a$ og $a-h$.

Lítum nú á þriðja stigs Taylor nálgun

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(\alpha)h^3, \\
f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(\beta)h^3,
\end{aligned}
$$

þar sem $\alpha$ er á milli $a$ og $a+h$ og $\beta$ er á milli $a$ og $a-h$.
Tökum nú mismuninn og fáum

$$
f(a+h) - f(a-h) = f'(a)\cdot 2h + \tfrac{1}{6}\big(f'''(\alpha) + f'''(\beta)\big)h^3
$$

Ef $f'''$ er samfellt fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er $\xi$ á milli $\alpha$ og $\beta$ þannig að $f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\alpha) + f'''(\beta))$

Niðurstaðan verður

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \tfrac{1}{6} f'''(\xi) h^2.$$

Þannig að skekkjan er

$$e = -\frac{1}{6} f'''(\xi) h^2,$$

og jafnframt er $e = O(h^2)$ þegar $h \to 0$.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Við getum útfært þessa sömu hugmynd til þess að reikna út aðra afleiðu, en þá byrjum við með fjórða stigs Taylor-nálgun

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\alpha)h^4,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\beta)h^4,$$

þar sem $\alpha$ er á milli $a$ og $a+h$ og $\beta$ er á milli $a$ og $a-h$.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Við getum útfært þessa sömu hugmynd til þess að reikna út aðra afleiðu, en þá byrjum við með fjórða stigs Taylor-nálgun

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\alpha)h^4,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\beta)h^4,$$

þar sem $\alpha$ er á milli $a$ og $a+h$ og $\beta$ er á milli $a$ og $a-h$.

Nú leggjum við saman og fáum

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + \tfrac{1}{24}\big(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta)\big)h^4.$$

Nú þurfum við að gefa okkur að $f^{(4)}$ sé samfellt fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er $\xi$ á milli $\alpha$ og $\beta$ þannig að $f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta))$.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Niðustaðan verður

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12} f^{(4)}(\xi) h^2$$

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Niðustaðan verður

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12} f^{(4)}(\xi) h^2$$

Með Taylor-margliðum má leiða út fleiri nálgunarformúlur fyrir afleiður.

Við ætlum ekki að halda lengra í þessa átt heldur snúa okkur að almennu aðferðinni.

Ef $x_0, \dots, x_n$ eru punktar í $I$ (hugsanlega með endurtekningum) og $p$ er margliðan sem brúar $f$ í þeim, þá er

$$f(x) = p(x) + r(x),$$

þar sem skekkjuliðurinn $r(x)$ er gefinn með formúlunni

$$r(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Ef við tökum $p'(a)$ sem nálgun á $f'(a)$ er skekkjan

$$r'(a) = f'(a) - p'(a).$$

Munið að formúlan fyrir afleiðu af margfeldi margra þátta er

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_m)'(a)\\
&=\varphi_1'(a)\varphi_2(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a)+\varphi_1(a)\varphi_2'(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a)+\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots+\varphi_1(a)\varphi_2(a)\cdots\varphi_{m-1}(a)\varphi_m'(a)
\end{aligned}
$$

## 6.2 Skekkjumat

Munið að formúlan fyrir afleiðu af margfeldi margra þátta er

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_m)'(a)\\
&= \varphi_1'(a)\varphi_2(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a) + \varphi_1(a)\varphi_2'(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a) + \cdots\\
&\qquad \cdots + \varphi_1(a)\varphi_2(a)\cdots\varphi_{m-1}(a)\varphi_m'(a)
\end{aligned}
$$

Horfum nú á skekkjuliðinn $r(x)$. Hann er svona margfeldi með $\varphi_1(x) = f[x_0,\ldots,x_n,x]$, $\varphi_2(x) = x - x_0$, $\varphi_3(x) = x - x_1$ o.s.frv.

Munið að formúlan fyrir afleiðu af margfeldi margra þátta er

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_m)'(a)\\
&=\varphi_1'(a)\varphi_2(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a)+\varphi_1(a)\varphi_2'(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a)+\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots+\varphi_1(a)\varphi_2(a)\cdots\varphi_{m-1}(a)\varphi_m'(a)
\end{aligned}
$$

Horfum nú á skekkjuliðinn $r(x)$. Hann er svona margfeldi með $\varphi_1(x)=f[x_0,\ldots,x_n,x]$, $\varphi_2(x)=x-x_0$, $\varphi_3(x)=x-x_1$ o.s.frv. Athugum nú að ef $a$ er einn af gefnu punktunum $x_k$, þá er $\varphi_{k+2}(x)=(x-x_k)$ sem gefur $\varphi_{k+2}(x_k)=0$ og $\varphi_{k+2}'(x_k)=1$. Þetta segir okkur að ef við tökum $a=x_k$, þá eru allir liðirnir í summunni í hægri hliðinni 0 nema einn, þ.e. við sitjum eftir með þann sem inniheldur $\varphi_{k+2}'$.

Niðurstaðan verður því að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $p'(a)$ er

$$f'(a) - p'(a) = r'(a) = f[x_0, \dots, x_n, x_k] \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (x_k - x_j)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (a - x_j)$$

þar sem $a = x_k$.

Niðurstaðan verður því að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $p'(a)$ er

$$f'(a) - p'(a) = r'(a) = f[x_0, \dots, x_n, x_k] \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (x_k - x_j)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (a - x_j)$$

þar sem $a = x_k$.

Hér notuðum við skekkjumatið fyrir Newton aðferðina (glæra 5.56) sem segir að til er $\xi$ á minnsta bilinu sem inniheldur $x_0, \dots, x_n, x_k$ sem uppfyllir

$$f[x_0, \dots, x_n, x_k] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Nálgum $f$ með fyrsta stigs brúunarmargliðunni gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ (þ.e. $x_0 = a$ og $x_1 = a + h$),

$$f(x) = f[a] + f[a, a+h](x-a) + f[a, a+h, x](x-a)(x-a-h)$$

Nálgum $f$ með fyrsta stigs brúunarmargliðunni gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ (þ.e. $x_0 = a$ og $x_1 = a+h$),

$$f(x) = f[a] + f[a, a+h](x-a) + f[a, a+h, x](x-a)(x-a-h)$$

Af þessu leiðir formúlan sem við vorum áður komin með

$$f'(a) = f[a, a+h] + f[a, a+h, a](a-a-h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Þar sem $\xi$ er á milli $a$ og $a+h$ og uppfyllir að $f[a, a+h, a] = f[a, a, a+h] = \frac{1}{2}f''(\xi)$. Hér erum við að notafæra okkur aftur skekkjumatið sem við sönnuðum í kaflanum um brúunarmargliður.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti

Tökum þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og $a$. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) = f[a-h] &+ f[a-h, a+h](x-a+h) \\ &+ f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ &+ f[a-h, a+h, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \end{aligned}$$

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti

Tökum þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og $a$. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a-h] + f[a-h, a+h](x-a+h) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \end{aligned}$$

Athugum að afleiðan af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er 0 í punktinum $a$ og því er

$$\begin{aligned} f'(a) &= f[a-h, a+h] + f[a-h, a+h, a, a](-h^2) \\ &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \tfrac{1}{6} f'''(\xi) h^2 \end{aligned}$$

Hér nýttum við okkur að til er $\xi$ á milli $a-h$ og $a+h$ þannig að $f[a-h, a+h, a, a] = \frac{1}{6} f'''(\xi)$.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Áfram heldur leikurinn. Nú skulum við leiða aftur út formúluna fyrir nálgun á $f''(a)$ með miðsettum mismunakvóta

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Áfram heldur leikurinn. Nú skulum við leiða aftur út formúluna fyrir nálgun á $f''(a)$ með miðsettum mismunakvóta

Þá tökum við þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og $a$ með $a$ tvöfaldan. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) = f[a-h] &+ f[a-h,a+h](x-a+h) \\ &+ f[a-h,a+h,a](x-a+h)(x-a-h) \\ &+ f[a-h,a+h,a,a](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \\ &+ f[a-h,a+h,a,a,x](x-a+h)(x-a-h)(x-a)^2 \end{aligned}$$

Gætum þess að halda liðnum $(x-a)$. Þá fáum við

$$\begin{aligned} f(x) = f[a-h] &+ f[a-h,a+h](x-a+h) \\ &+ f[a-h,a+h,a]\big((x-a)^2-h^2)\big) \\ &+ f[a-h,a+h,a,a]\big((x-a)^3-h^2(x-a))\big) \\ &+ f[a-h,a+h,a,a,x]\big((x-a)^4-h^2(x-a)^2)\big) \end{aligned}$$

Nú þurfum við að reikna aðra afleiðu í punktinum $a$. Athugum að önnur afleiða af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er fastafallið 2, önnur afleiða af þriðja stigs liðnum

$$x \mapsto (x-a)^3 - h^2(x-a)$$

er 0 í punktinum $a$ og önnur afleiða af fjórða stigs liðnum

$$x \mapsto (x-a)^4 - h^2(x-a)^2$$

er fastafallið $-2h^2$.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu, frh.

Við höfum því

$$f''(a) = 2f[a-h, a+h, a] + f[a-h, a+h, a, a, a](-2h^2)$$

Nú er til punktur $\xi$ á minnsta bili sem inniheldur $a-h$, $a+h$ og $a$ þannig að $f[a-h, a+h, a, a, a] = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi)$.

## 6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu, frh.

Við höfum því

$$f''(a) = 2f[a-h, a+h, a] + f[a-h, a+h, a, a, a](-2h^2)$$

Nú er til punktur $\xi$ á minnsta bili sem inniheldur $a-h$, $a+h$ og $a$ þannig að $f[a-h, a+h, a, a, a] = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)$.

Við þurfum að reikna út fyrri mismunakvótann

$$\begin{aligned} f[a-h, a+h, a] = f[a-h, a, a+h] &= \frac{f[a, a+h] - f[a-h, a]}{2h} \\ &= \frac{1}{2h}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right) \\ &= \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{2h^2} \end{aligned}$$

Við höfum því leitt aftur út formúluna

$$f''(a) = \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin $h$ er lítil eru tölurnar $f(a+h), f(a), f(a-h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin $h$ er lítil eru tölurnar $f(a+h), f(a), f(a-h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Því er ekki hægt að búast við að fá alltaf betri nálgun á $f'(a)$ við að minnka skrefalengdina $h$.

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin $h$ er lítil eru tölurnar $f(a+h), f(a), f(a-h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Því er ekki hægt að búast við að fá alltaf betri nálgun á $f'(a)$ við að minnka skrefalengdina $h$.

Leiðin er Richardson útgiskun (e. extrapolation), sem er aðferð til að bæta nálganir.

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin $h$ er lítil eru tölurnar $f(a+h), f(a), f(a-h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Því er ekki hægt að búast við að fá alltaf betri nálgun á $f'(a)$ við að minnka skrefalengdina $h$.

Leiðin er Richardson útgiskun (e. extrapolation), sem er aðferð til að bæta nálganir.

Til eru mjög almennar útgáfur þessarar aðferðar en við munum aðeins skoða þau sértilfelli sem nýtast okkur mest.

## 6.3 Útleiðsla á miðsettum mismunakvóta

Við skulum byrja á að að leiða aftur út formúluna fyrir miðsettann mismunakvóta til að fá betri upplýsingar um skekkjuliðinn. Fyrir fall $f$ sem er nógu oft deildanlegt má beita Taylor til að skrifa

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

## 6.3 Útleiðsla á miðsettum mismunakvóta

Við skulum byrja á að að leiða aftur út formúluna fyrir miðsettann mismunakvóta til að fá betri upplýsingar um skekkjuliðinn. Fyrir fall $f$ sem er nógu oft deildanlegt má beita Taylor til að skrifa

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

Ef við drögum seinni jöfnuna frá þeirri fyrri fæst

$$f(a+h)-f(a-h) = 2f'(a)h+2\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\ldots+2\frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1}+O(h^{2n+2})$$

## 6.3 Útleiðsla á miðsettum mismunakvóta

Við skulum byrja á að að leiða aftur út formúluna fyrir miðsettann mismunakvóta til að fá betri upplýsingar um skekkjuliðinn. Fyrir fall $f$ sem er nógu oft deildanlegt má beita Taylor til að skrifa

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

Ef við drögum seinni jöfnuna frá þeirri fyrri fæst

$$f(a+h)-f(a-h) = 2f'(a)h+2\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\ldots+2\frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1}+O(h^{2n+2})$$

svo ef við einangrum $f'(a)$ sjáum við að

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_1(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \quad \text{og} \quad a_k = -\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}, \quad k = 2, 4, \ldots, 2n.$$

Hér er minnsta veldi í skekkjuliðnum $h^2$, svo nálgunin $f'(a) \approx R_1(h)$ er $O(h^2)$, eins og við höfum reyndar séð áður. Helmingum nú skrefalengdina $h$, þá fæst

$$f'(a) = R_1(h/2) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

Nú berum við saman þessi tvö skref:

$$f'(a) = R_1(h/2) + \tfrac{1}{4}a_2h^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}),$$
$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Nú berum við saman þessi tvö skref:

$$f'(a) = R_1(h/2) + \tfrac{1}{4} a_2 h^2 + a_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}),$$
$$f'(a) = R_1(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \ldots + a_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Margföldum efri jöfnuna með 4 og drögum þá síðari frá. Þá stendur eftir

$$3f'(a) = 4R_1(h/2) - R_1(h) + a_4 \left(\frac{4}{2^4} - 1\right) h^4 + a_6 \left(\frac{4}{2^6} - 1\right) h^6 + \ldots + a_{2n} \left(\frac{4}{2^{2n}} - 1\right) h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

## 6.3 Fjórða stigs nálgun

Nú erum við komin með nýja formúlu:

$$f'(a) = R_2(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \ldots + b_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_2(h) = \frac{4R_1(h/2) - R_1(h)}{3} \quad \text{og} \quad b_k = \frac{a_k}{3} \cdot \left( \frac{4}{2^k} - 1 \right), \; k = 4, 6, \ldots, 2n.$$

## 6.3 Fjórða stigs nálgun

Nú erum við komin með nýja formúlu:

$$f'(a) = R_2(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \ldots + b_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_2(h) = \frac{4R_1(h/2) - R_1(h)}{3} \quad \text{og} \quad b_k = \frac{a_k}{3} \cdot \left( \frac{4}{2^k} - 1 \right), \; k = 4, 6, \ldots, 2n.$$

Ef við berum þetta saman við jöfnuna sem við byrjuðum með

$$f'(a) = R_1(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \ldots + a_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þá sjáum við að minnsta veldi í skekkjuliðnum er $h^4$, svo nálgunin $f'(a) \approx R_2(h)$ uppfyllir

$$f'(a) - R_2(h) = O(h^4)$$

og er því betri nálgun en áður.

Þetta ferli heitir *Richardson útgiskun*.

## 6.3 Hægt er að halda áfram útgiskun

Næsta takmark er að eyða liðnum $b_4 h^4$ úr þessari formúlu með því að líta á

$$f'(a) = R_2(h/2) + b_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + b_6 \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \ldots + b_{2n} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1})$$

## 6.3 Hægt er að halda áfram útgiskun

Næsta takmark er að eyða liðnum $b_4 h^4$ úr þessari formúlu með því að líta á

$$f'(a) = R_2(h/2) + b_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + b_6 \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \ldots + b_{2n} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Síðan stillum við þessari jöfnu upp með þeirri síðari

$$f'(a) = R_2(h/2) + \tfrac{1}{16} b_4 h^4 + \tfrac{1}{64} b_6 h^6 + \ldots + \tfrac{1}{2^{2n}} b_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$
$$f'(a) = R_2(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \ldots + b_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

## 6.3 Hægt er að halda áfram útgiskun

Næsta takmark er að eyða liðnum $b_4h^4$ úr þessari formúlu með því að líta á

$$f'(a) = R_2(h/2) + b_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + b_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Síðan stillum við þessari jöfnu upp með þeirri síðari

$$f'(a) = R_2(h/2) + \tfrac{1}{16}b_4h^4 + \tfrac{1}{64}b_6h^6 + \ldots + \tfrac{1}{2^{2n}}b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$
$$f'(a) = R_2(h) + b_4h^4 + b_6h^6 + \ldots + b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Margföldum fyrri jöfnuna með 16 og drögum þá síðari frá

$$\begin{aligned}15f'(a) &= 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6 \\ &\quad + b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}).\end{aligned}$$

# 6.3 Sjötta stigs skekkja

$$15f'(a) = 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6 + b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

$$15f'(a) = 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6 + b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

Því er

$$f'(a) = R_3(h) + c_6h^6 + c_8h^8 \ldots + c_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_3(h) = \frac{16R_2(h/2) - R_2(h)}{15}, \quad \text{og} \quad c_k = \frac{b_k}{15}\cdot\left(\frac{16}{2^k} - 1\right), \quad k = 6, 8, \ldots,$$

## 6.3 Sjötta stigs skekkja

$$15f'(a) = 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6$$
$$+ b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

Því er

$$f'(a) = R_3(h) + c_6 h^6 + c_8 h^8 \ldots + c_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_3(h) = \frac{16R_2(h/2) - R_2(h)}{15}, \quad \text{og} \quad c_k = \frac{b_k}{15}\cdot\left(\frac{16}{2^k} - 1\right), \quad k = 6, 8, \ldots,$$

Nýja nálgunin uppfyllir

$$f'(a) - R_3(h) = O(h^6)$$

og er því enn betri en áður, en við þurfum líka að reikna út $R_1(h/4)$ til að reikna $R_2(h/2)$.

## 6.3 Almenn rakningarformúla

Richardson-útgiskunin heldur áfram og út kemur

$$R_{i+1}(h) = \frac{4^i R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1} = R_i(h/2) + \frac{R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1}$$

fyrir $(i+1)$-tu Richardson útgiskun og $R_{i+1}(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) - R_{i+1}(h) = O(h^{2i+2}),$$

en á móti kemur að til að reikna út $R_{i+1}(h)$ þurfum við að hafa reiknað út tölurnar
$R_1(h)$, $R_1(h/2)$, …, $R_1(h/2^i)$ auk
$R_2(h)$, $R_2(h/2)$, …, $R_2(h/2^{i-1})$ og svo framvegis að

$$\vdots$$

$R_i(h)$ og $R_i(h/2)$.

## 6.3 Almenn rakningarformúla

Richardson-útgiskunin heldur áfram og út kemur

$$R_{i+1}(h) = \frac{4^i R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1} = R_i(h/2) + \frac{R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1}$$

fyrir $(i+1)$-tu Richardson útgiskun og $R_{i+1}(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) - R_{i+1}(h) = O(h^{2i+2}),$$

en á móti kemur að til að reikna út $R_{i+1}(h)$ þurfum við að hafa reiknað út tölurnar

$R_1(h)$, $R_1(h/2)$, ..., $R_1(h/2^i)$ auk

$R_2(h)$, $R_2(h/2)$, ..., $R_2(h/2^{i-1})$ og svo framvegis að

$\vdots$

$R_i(h)$ og $R_i(h/2)$.

Eins og áður sagði fara styttingarskekkjur á endanum að segja til sín í útreikningum á $R_1(h)$, svo einhver takmörk eru fyrir hversu margar Richardson útgiskanir er hægt að framkvæma.

## 6.3 Reiknirit

Útreikningarnir að ofan eru yfirleitt settir fram í töflu

$$\begin{array}{lllll} D(1,1) & & & & \\ D(2,1) & D(2,2) & & & \\ D(3,1) & D(3,2) & D(3,3) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D(n,1) & D(n,2) & D(n,3) & \dots & D(n,n) \end{array}$$

þar sem $D(i,j) = R_j(h/2^{i-j})$ og þar með

$$D(i,j) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h/2^{i-1}) - f(a-h/2^{i-1})}{2 \cdot h/2^{i-1}}, & j = 1 \\ D(i,j-1) + \dfrac{D(i,j-1) - D(i-1,j-1)}{4^{j-1}-1}, & j > 1 \end{cases}$$

sem gerir auðvelt að forrita Richardson útgiskun.

# 6.3 Skekkjumat

Finnum nú eftirámat fyrir $D(i,j)$ með stærðunum $D(i,j-1)$ og $D(i-1,j-1)$. Hér á eftir er $R_j(h/2)$ í hlutverki $D(i,j-1)$ og $R_i(h)$ í hlutverki $D(i-1,j-1)$
($h$ er helmingað þegar við förum niður um eina línu).

## 6.3 Skekkjumat

Finnum nú eftirámat fyrir $D(i,j)$ með stærðunum $D(i,j-1)$ og $D(i-1,j-1)$. Hér á eftir er $R_j(h/2)$ í hlutverki $D(i,j-1)$ og $R_i(h)$ í hlutverki $D(i-1,j-1)$
($h$ er helmingað þegar við förum niður um eina línu).

Munum að $R_i(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) = R_j(h) + Kh^{2j} + O(h^{2j+1})$$

fyrir eitthvert $K$ í $\mathbb{R}$ og að

$$f'(a) = R_j(h/2) + K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1})$$

## 6.3 Skekkjumat

Finnum nú eftirámat fyrir $D(i,j)$ með stærðunum $D(i,j-1)$ og $D(i-1,j-1)$. Hér á eftir er $R_j(h/2)$ í hlutverki $D(i,j-1)$ og $R_i(h)$ í hlutverki $D(i-1,j-1)$
($h$ er helmingað þegar við förum niður um eina línu).

Munum að $R_i(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) = R_j(h) + Kh^{2j} + O(h^{2j+1})$$

fyrir eitthvert $K$ í $\mathbb{R}$ og að

$$f'(a) = R_j(h/2) + K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1})$$

Ef við tökum mismun á hægri og vinstri hliðum þessara jafna, þá fáum við

$$0 = R_j(h) - R_j(h/2) + K\left(1 - \frac{1}{2^{2j}}\right)h^{2j} + O(h^{2j+1})$$

og ef við einangrum $K$ fæst

$$K = -\frac{4^j}{h^{2j}} \cdot \frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}).$$

Þá er skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $R_j(h/2)$ jöfn

$$\begin{aligned} e_j(h/2) &= f'(a) - R_j(h/2) \\ &= K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1}) \\ &= -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}) \\ &\approx -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1}. \end{aligned}$$

## 6.3 Útleiðsla á fyrirframmati

Þá er skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $R_j(h/2)$ jöfn

$$
\begin{aligned}
e_j(h/2) &= f'(a) - R_j(h/2) \\
&= K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1}) \\
&= -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}) \\
&\approx -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1}.
\end{aligned}
$$

Þar sem $R_j(h/2)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2j+1})$, en $R_{j+1}(h)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2i+3})$ getum við slegið á $e_{j+1}(h)$ með $e_j(h/2)$. Ef við lækkum vísinn $j+1$ um einn gefur það okkur matið

$$
e_j(h) \approx \frac{R_{j-1}(h) - R_{j-1}(h/2)}{4^{j-1} - 1} = \frac{D(i, j-1) - D(i-1, j-1)}{4^{j-1} - 1}
$$

sem er einmitt liðurinn í rakningarformúlunni fyrir $D(i, j)$.

# 6.3 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2+4}$ og $a = -1$. Með því að byrja á $h = 1$ og prentum út útgiskunartöfluna

| $h$ | $D(i,1)$ | $D(i,2)$ | $D(i,3)$ | $D(i,4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 0.50000000 | | | |
| 0.5 | 0.50564632 | 0.50752843 | | |
| 0.25 | 0.50657385 | 0.50688303 | 0.50684000 | |
| 0.125 | 0.50676839 | 0.50683323 | 0.50682991 | 0.50682976 |

Niðustaðan er: $f'(-1) \approx 0.50682976$
með eftirámat á skekkju $-1.6 \cdot 10^{-7}$.

Rétt gildi er 0.50682974129023.

## 6.4 Töluleg heildun

Gerum ráð fyrir að $x_0, x_1, \ldots, x_n$ séu punktar á bilinu $[a, b]$ og að við þekkjum gildi $f$ í þessum punktum. Þá getum við fundið brúunarmargliðuna $p_n$ gegnum punktana $(x_k, f(x_k))$ og skrifað

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

þar sem leifin $r_n$ er gefin með

$$r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

## 6.4 Töluleg heildun

Gerum ráð fyrir að $x_0, x_1, \ldots, x_n$ séu punktar á bilinu $[a, b]$ og að við þekkjum gildi $f$ í þessum punktum. Þá getum við fundið brúunarmargliðuna $p_n$ gegnum punktana $(x_k, f(x_k))$ og skrifað

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

þar sem leifin $r_n$ er gefin með

$$r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Nú er auðvelt að reikna heildi margliða, svo við nálgum heildi $f$ með

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_n(f) := \int_a^b p_n(x)dx$$

## 6.4 Töluleg heildun

Gerum ráð fyrir að $x_0, x_1, \ldots, x_n$ séu punktar á bilinu $[a, b]$ og að við þekkjum gildi $f$ í þessum punktum. Þá getum við fundið brúunarmargliðuna $p_n$ gegnum punktana $(x_k, f(x_k))$ og skrifað

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

þar sem leifin $r_n$ er gefin með

$$r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Nú er auðvelt að reikna heildi margliða, svo við nálgum heildi $f$ með

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_n(f) := \int_a^b p_n(x)dx$$

og skekkjan í þessari nálgun er gefin með

$$e_n = \int_a^b r_n(x)dx.$$

Þessi aðferð er kölluð *Newton-Cotes-heildun*.

Hugsum okkur að brúunarpunktarnir $x_0, \ldots, x_n$ séu ólíkir. Þá getum við skrifað $p_n$ með Lagrange-margliðum

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)},$$

Hugsum okkur að brúunarpunktarnir $x_0, \ldots, x_n$ séu ólíkir. Þá getum við skrifað $p_n$ með Lagrange-margliðum

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)},$$

og þá er heildi $p_n$ jafnt

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k, \quad \text{þar sem} \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x)dx.$$

## 6.4 Newton-Cotes -heildun

Hugsum okkur að brúunarpunktarnir $x_0, \dots, x_n$ séu ólíkir. Þá getum við skrifað $p_n$ með Lagrange-margliðum

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)},$$

og þá er heildi $p_n$ jafnt

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k, \quad \text{þar sem} \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x)dx.$$

Athugið að gildi $A_k$ veltur aðeins á brúunarpunktunum $x_0, \dots, x_n$ en ekki gildum $f(x_k)$. Ef það á að heilda mörg föll yfir sama bil er því hægt að reikna gildi $A_k$ í eitt skipti fyrir öll og endurnýta þau svo.

## 6.4 Sýnidæmi

Metum heildi $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ og $g(x) = \sin(\frac{x^2}{2})$ yfir bilið $[0,2]$ með að nota skiptipunktana $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$.
Lagrange-margliðurnar sem við eiga eru

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad \ell_1(x) = -x(x-2), \quad \ell_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

## 6.4 Sýnidæmi

Metum heildi $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ og $g(x) = \sin(\frac{x^2}{2})$ yfir bilið $[0, 2]$ með að nota skiptipunktana $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$.
Lagrange-margliðurnar sem við eiga eru

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad \ell_1(x) = -x(x-2), \quad \ell_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

svo við fáum að

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)(x-2)dx = \frac{1}{3}, \qquad A_1 = -\int_0^2 x(x-2)dx = \frac{4}{3},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x(x-1)dx = \frac{1}{3}.$$

Nú eru stuðlarnir fundnir og því fáum við

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)\frac{1}{3} + f(1)\frac{4}{3} + f(2)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1 + 4e^{-1}\cos(1) + e^{-2}\cos(2)}{3} \approx 0.59581$$

og

$$\int_0^2 g(x)dx \approx g(0)\frac{1}{3} + g(1)\frac{4}{3} + g(2)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{4\sin(1/2) + \sin(2)}{3} \approx 0.91972.$$

## 6.4 Sýnidæmi frh.

Nú eru stuðlarnir fundnir og því fáum við

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)\frac{1}{3} + f(1)\frac{4}{3} + f(2)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1 + 4e^{-1}\cos(1) + e^{-2}\cos(2)}{3} \approx 0.59581$$

og

$$\int_0^2 g(x)dx \approx g(0)\frac{1}{3} + g(1)\frac{4}{3} + g(2)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{4\sin(1/2) + \sin(2)}{3} \approx 0.91972.$$

Gildi heildanna eru $\int_0^2 f(x)dx \approx 0.58969$ og $\int_0^2 g(x)dx \approx 0.99762$ með 5 réttum aukastöfum svo nálgunargildin verða að teljast nokkuð góð miðað við hversu lítið fór í þau.

## 6.4 Trapisuregla

Nú ætlum við að leiða út formúlur fyrir helstu reglum fyrir nálgun á heildum. Sú fyrsta er *trapisuregla*.

## 6.4 Trapisuregla

Nú ætlum við að leiða út formúlur fyrir helstu reglum fyrir nálgun á heildum. Sú fyrsta er *trapisuregla*.

Veljum $x_0 = a$ og $x_1 = b$ sem skiptipunktana okkar. Þá er graf $p_1$ línustrikið gegnum $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$,

$$p_1(x) = f(a)\ell_0(x) + f(b)\ell_1(x) = f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

og vigtirnar eru

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) = \frac{b-a}{2} = A_1,$$

svo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Trapisureglan er kölluð þessu nafni því með henni nálgum við heildi $f$ með flatarmáli trapisunnar sem hefur hornpunktana $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$ og $(a, f(a))$.

Enn einfaldari er miðpunktsreglan, þá veljum við aðeins einn skiptipunkt, $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$, og brúunarmargliðan verður fastamargliðan $p_0(x) = f(x_0)$. Þá er

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Nú veljum við þrjá skiptipunkta, $x_0 = a$, $x_1 = b$ og $x_2 = \frac{1}{2}(a+b)$.
Til einföldunar skulum við hliðra fallinu $f$ um miðpunkt bilsins
$m = \frac{1}{2}(a+b)$.
Við skilgreinum $\alpha = \frac{1}{2}(b-a)$ og $g(x) = f\big(x+m\big)$

Nú veljum við þrjá skiptipunkta, $x_0 = a$, $x_1 = b$ og $x_2 = \frac{1}{2}(a+b)$.
Til einföldunar skulum við hliðra fallinu $f$ um miðpunkt bilsins $m = \frac{1}{2}(a+b)$.
Við skilgreinum $\alpha = \frac{1}{2}(b-a)$ og $g(x) = f\big(x+m\big)$
Þá hliðrast $a$, $m$ og $b$ yfir í $-\alpha$, 0 og $\alpha$ og

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Lagrange margliðurnar og vigtirnar eru

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-\alpha)x}{(-\alpha-\alpha)(-\alpha-0)} = \frac{(x-\alpha)x}{2\alpha^2} \\
A_0 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_0(x)\,dx = \frac{\alpha}{3} \\
l_1(x) &= \frac{(x-(-\alpha))(x-0)}{(\alpha-(-\alpha))(\alpha-0)} = \frac{(x+\alpha)x}{2\alpha^2} \\
A_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_1(x)\,dx = \frac{\alpha}{3} \\
l_2(x) &= \frac{(x-(\alpha))(x-\alpha)}{0-(-\alpha)(0-\alpha)} = \frac{(x+\alpha)(x-\alpha)}{-\alpha^2} \\
A_2 &= \int_{\alpha}^{\alpha} l_2(x)\,dx = \frac{4\alpha}{3}
\end{aligned}
$$

Nálgunarformúlan verður þá

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx \approx \frac{\alpha}{3}g(-\alpha) + \frac{\alpha}{3}g(\alpha) + \frac{4\alpha}{3}g(0)$$

$$= (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

Ef við tökum brúunarmargliðu gegnum $a$, $b$ og $\frac{1}{2}(a+b)$ með $\frac{1}{2}(a+b)$ tvöfaldan þá fáum við 3. stigs brúunarmargliðu

$$p_3(x) = p_2(x) + g[-\alpha, \alpha, 0, 0](x+\alpha)(x-\alpha)x$$

Ef við tökum brúunarmargliðu gegnum $a$, $b$ og $\frac{1}{2}(a+b)$ með $\frac{1}{2}(a+b)$ tvöfaldan þá fáum við 3. stigs brúunarmargliðu

$$p_3(x) = p_2(x) + g[-\alpha, \alpha, 0, 0](x+\alpha)(x-\alpha)x$$

Heildið yfir seinni liðinn hægra megin er 0 því margliðan $(x+a)(x-a)x$ er oddstæð,

## 6.4 Regla Simpsons aftur

Ef við tökum brúunarmargliðu gegnum $a$, $b$ og $\frac{1}{2}(a+b)$ með $\frac{1}{2}(a+b)$ tvöfaldan þá fáum við 3. stigs brúunarmargliðu

$$p_3(x) = p_2(x) + g[-\alpha, \alpha, 0, 0](x+\alpha)(x-\alpha)x$$

Heildið yfir seinni liðinn hægra megin er 0 því margliðan $(x+a)(x-a)x$ er oddstæð, en heildið yfir fyrri liðinn er

$$\frac{\alpha}{3}(g(-\alpha) + 4g(0) + g(\alpha)).$$

Ef við tökum brúunarmargliðu gegnum $a$, $b$ og $\frac{1}{2}(a+b)$ með $\frac{1}{2}(a+b)$ tvöfaldan þá fáum við 3. stigs brúunarmargliðu

$$p_3(x) = p_2(x) + g[-\alpha, \alpha, 0, 0](x+\alpha)(x-\alpha)x$$

Heildið yfir seinni liðinn hægra megin er 0 því margliðan $(x+a)(x-a)x$ er oddstæð, en heildið yfir fyrri liðinn er

$$\frac{\alpha}{3}(g(-\alpha) + 4g(0) + g(\alpha)).$$

Út kemur því Simpson-regla.

Þar sem Newton-Cotes heildun notar brúunarmargliður fylgja henni nokkur vandamál.

Þar sem Newton-Cotes heildun notar brúunarmargliður fylgja henni nokkur vandamál.

Ef okkur finnst nákvæmnin í nálguninni vera of lítil getum við ekki búist við að hún batni við að fjölga skiptipunktum; þá hækkar stig margliðunnar líklega sem orsakar sveiflukenndari hegðun.

Þar sem Newton-Cotes heildun notar brúunarmargliður fylgja henni nokkur vandamál.

Ef okkur finnst nákvæmnin í nálguninni vera of lítil getum við ekki búist við að hún batni við að fjölga skiptipunktum; þá hækkar stig margliðunnar líklega sem orsakar sveiflukenndari hegðun.

Eins er ekki gott að halda sig við margliður af lægra stigi; ef bilið sem á að heilda yfir er stórt væri mikil tilviljun að 1., 2. eða 3. stigs brúunarmargliða nálgaði fallið vel á öllu bilinu.

## 6.4 Samsettu reglurnar

Lausnin á þessu vandamáli er í sama anda og fyrir splæsibrúun.

## 6.4 Samsettu reglurnar

Lausnin á þessu vandamáli er í sama anda og fyrir splæsibrúun. Við veljum skiptingu

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

á bilinu $[a, b]$.

Lausnin á þessu vandamáli er í sama anda og fyrir splæsibrúun. Við veljum skiptingu

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

á bilinu $[a, b]$.

Um heildi gildir að

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

svo við getum nálgað heildi $f$ á sérhverju litlu hlutbili $[x_{k-1}, x_k]$ með að heilda brúunarmargliðu af lágu stigi og lagt öll gildin saman til að fá nálgun á heildi $f$ yfir allt bilið.

## 6.4 Samsettu reglurnar

Lausnin á þessu vandamáli er í sama anda og fyrir splæsibrúun. Við veljum skiptingu

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

á bilinu $[a, b]$.

Um heildi gildir að

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

svo við getum nálgað heildi $f$ á sérhverju litlu hlutbili $[x_{k-1}, x_k]$ með að heilda brúunarmargliðu af lágu stigi og lagt öll gildin saman til að fá nálgun á heildi $f$ yfir allt bilið.

Þegar ákveðin regla er notuð til að nálga heildi $f$ á sérhverju hlutbili er þetta kölluð *samsetta* útgáfa reglunnar. Einfalt er að leiða út samsettar útgáfur reglanna að ofan.

## 6.4 Samsetta trapisureglan

Á sérhverju hlutbili er

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

svo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)).$$

## 6.4 Samsetta trapisureglan

Á sérhverju hlutbili er

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

svo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)).$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng og $h = x_k - x_{k-1}$,

## 6.4 Samsetta trapisureglan

Á sérhverju hlutbili er

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

svo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)).$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng og $h = x_k - x_{k-1}$, þá fæst

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx h\left(\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b)\right).$$

# 6.4 Samsetta miðpunktsreglan

Fljótséð er að

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

Fljótséð er að

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng verður formúlan

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

## 6.4 Samsetta Simpson

Hér er venjan að velja $2n+1$ jafndreifða skiptipunkta og fá $n$ jafn stór hlutbil. Þá er $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_k = a + kh$ fyrir $k = 0, \ldots, 2n$ og hlutbilin eru $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ fyrir $k = 1, \ldots, n$.

## 6.4 Samsetta Simpson

Hér er venjan að velja $2n+1$ jafndreifða skiptipunkta og fá $n$ jafn stór hlutbil. Þá er $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_k = a + kh$ fyrir $k = 0, \dots, 2n$ og hlutbilin eru $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ fyrir $k = 1, \dots, n$.

Á hverju hlutbili er

$$\int_{t_{2k-2}}^{t_{2k}} f(x)\, dx \approx 2h \left( \frac{1}{6} f(x_{2k-2}) + \frac{4}{6} f(x_{2k-1}) + \frac{1}{6} f(x_{2k}) \right)$$

## 6.4 Samsetta Simpson

Hér er venjan að velja $2n+1$ jafndreifða skiptipunkta og fá $n$ jafn stór hlutbil. Þá er $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_k = a + kh$ fyrir $k = 0, \dots, 2n$ og hlutbilin eru $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ fyrir $k = 1, \dots, n$.

Á hverju hlutbili er

$$\int_{t_{2k-2}}^{t_{2k}} f(x)\,dx \approx 2h\left(\frac{1}{6}f(x_{2k-2}) + \frac{4}{6}f(x_{2k-1}) + \frac{1}{6}f(x_{2k})\right)$$

svo að

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx &\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{3}\Big(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\Big)\right)\\ =&\frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h)\\ &+ \cdots + 2f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h) + f(b).\Big)\end{aligned}$$

Rifjum upp grunnhugmyndina að baki nálgunarformúlunum. Við veljum brúunarpunkta $x_0, \ldots, x_n$ í $[a, b]$, látum $p_n$ vera tilsvarandi brúunarmargliðu og skrifum

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

## 6.4 Skekkjumat

Rifjum upp grunnhugmyndina að baki nálgunarformúlunum. Við veljum brúunarpunkta $x_0, \ldots, x_n$ í $[a, b]$, látum $p_n$ vera tilsvarandi brúunarmargliðu og skrifum

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

þar sem $r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$. Þá er nálgunin

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx$$

## 6.4 Skekkjumat

Rifjum upp grunnhugmyndina að baki nálgunarformúlunum. Við veljum brúunarpunkta $x_0, \ldots, x_n$ í $[a, b]$, látum $p_n$ vera tilsvarandi brúunarmargliðu og skrifum

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

þar sem $r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$. Þá er nálgunin

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p_n(x)\, dx$$

með skekkjuna

$$\int_a^b r_n(x)\, dx$$

Nú viljum við meta skekkjuheildið.

Við skekkjumatið í þessum kafla munum við þurfa að nota eftirafarandi setningu nokkrum sinnum.

Setning (Meðalgildissetningin fyrir heildi):

Ef $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ er samfellt fall og $\varphi$ er heildanlegt fall sem skiptir ekki um formerki á bilinu $[a, b]$ þá er til tala $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\int_a^b G(x)\varphi(x)\,dx = G(\eta)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

# 6.4 Trapisuregla

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x+\alpha)(x-\alpha)$$

## 6.4 Trapisuregla

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x+\alpha)(x-\alpha)$$

Athugum að

$$(x+\alpha)(x-\alpha) = (x^2-\alpha^2)$$

skiptir ekki um formerki á bilinu $]-\alpha, \alpha[$.

# 6.4 Trapisuregla

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x+\alpha)(x-\alpha)$$

Athugum að

$$(x+\alpha)(x-\alpha) = (x^2 - \alpha^2)$$

skiptir ekki um formerki á bilinu $]-\alpha, \alpha[$. Þá gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x+\alpha)(x-\alpha)$$

Athugum að

$$(x+\alpha)(x-\alpha) = (x^2 - \alpha^2)$$

skiptir ekki um formerki á bilinu $]-\alpha, \alpha[$. Þá gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\begin{aligned}
\int_a^b r_1(x)\,dx &= f[-\alpha, \alpha, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2)\,dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{2!}\left(-\frac{4}{3}\alpha^3\right) \\
&= \frac{-f''(\xi)}{2!}\frac{(b-a)^3}{6}, \qquad \xi \in [a, b]
\end{aligned}$$

## 6.4 Trapisuregla

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x+\alpha)(x-\alpha)$$

Athugum að

$$(x+\alpha)(x-\alpha) = (x^2 - \alpha^2)$$

skiptir ekki um formerki á bilinu $]-\alpha, \alpha[$. Þá gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\begin{aligned}
\int_a^b r_1(x)\,dx &= f[-\alpha, \alpha, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2)\,dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{2!}\left(-\frac{4}{3}\alpha^3\right) \\
&= \frac{-f''(\xi)}{2!}\frac{(b-a)^3}{6}, \qquad \xi \in [a, b]
\end{aligned}$$

Niðurstaða:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

Ef við lítum á samsettu trapisuregluna með jafna skiptingu þar sem hlutbilin eru $[x_i, x_{i+1}]$, þá fáum við skekkjuna

$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

## 6.4 Skekkjumat í samsettu reglunni

Ef við lítum á samsettu trapisuregluna með jafna skiptingu þar sem hlutbilin eru $[x_i, x_{i+1}]$, þá fáum við skekkjuna

$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Ef við leggjum saman og beitum milligildissetningunni, þá fáum við

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in [a, b]$$

að því gefnu að $f \in C^2[a, b]$.

Ath: Hér er $T(h)$ útkoman úr samsettu Trapisureglunni með jafna skiptingu $h = \frac{b-a}{n}$.

## 6.4 Skekkja í miðpunktsreglu

Til einföldunar skoðum við bilið $[-\alpha, \alpha]$. Veljum miðpunktinn tvöfaldan

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(0) + f'(0)x \\ r_1(x) &= f[0, 0, x]x^2 \end{aligned}$$

Athugum að heildið af $f'(0)x$ yfir $[-\alpha, \alpha]$ er 0.

## 6.4 Skekkja í miðpunktsreglu

Til einföldunar skoðum við bilið $[-\alpha, \alpha]$. Veljum miðpunktinn tvöfaldan

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x$$
$$r_1(x) = f[0, 0, x]x^2$$

Athugum að heildið af $f'(0)x$ yfir $[-\alpha, \alpha]$ er 0. Nú skiptir $x^2$ ekki um formerki og því gefur meðalgildisreglan fyrir heildi að til er $\eta \in [-\alpha, \alpha]$ þannig að

$$\begin{aligned}\int_a^b r_1(x)\,dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} f[0,0,x]x^2\,dx \\ &= f[0,0,\eta]\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\,dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!}2\frac{\alpha^3}{3} \\ &= \frac{(b-a)^3}{24}\cdot f''(\xi)\end{aligned}$$

Þar sem $\xi$ fæst úr skekkjumatinu fyrir brúunarmargliður (kafli 5).

Fyrir hvert bil fáum við skekkjulið:

$$\frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi_i)$$

Fyrir hvert bil fáum við skekkjulið:

$$\frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi_i)$$

Leggjum saman skekkjuliðina og beitum milligildissetningunni, þá fæst að til er $\xi$ þannig að:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i - \frac{1}{2})h\right) + \frac{b-a}{24} f''(\xi)h^2$$

# 6.4 Skekkja í reglu Simpsons

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

Leiddum út þessa formúlu með því að taka brúunarmargliðu $p_3(x)$ með punktana $-\alpha, \alpha, 0, 0$. Skekkjan er

$$f(x) - p_3(x) = f[-\alpha, \alpha, 0, 0, x](x+\alpha)(x-\alpha)x^2$$

# 6.4 Skekkja í reglu Simpsons

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

Leiddum út þessa formúlu með því að taka brúunarmargliðu $p_3(x)$ með punktana $-\alpha, \alpha, 0, 0$. Skekkjan er

$$f(x) - p_3(x) = f[-\alpha, \alpha, 0, 0, x](x+\alpha)(x-\alpha)x^2$$

þar með er skekkjan í formúlu Simpsons:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f[-\alpha, \alpha, 0, 0, x](x+\alpha)(x-\alpha)x^2\,dx$$

Fallið $x \mapsto (x+\alpha)(x-\alpha)x^2 = (x^2-\alpha^2)x^2$ er $\leq 0$ á $[-\alpha, \alpha]$. Þar með gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [-\alpha, \alpha]$ þannig að skekkjan er

$$f[-\alpha, \alpha, 0, 0, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2-\alpha^2)x^2 \, dx$$
$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{(-4)}{15} \cdot \alpha^5 = \frac{-f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5, \qquad \xi \in [a, b]$$

Þar sem $\xi$ fæst úr skekkjumatinu fyrir Newton aðferðina (glæra 5.55).

## 6.4 Skekkja samsettu Simpsonreglu

Skiptum $[a, b]$ í $n$ jafnlöng bil og látum $h$ vera helming hlutbillengdarinnar,

$$h = \frac{(b-a)}{2n}.$$

## 6.4 Skekkja samsettu Simpsonreglu

Skiptum $[a, b]$ í $n$ jafnlöng bil og látum $h$ vera helming hlutbillengdarinnar,

$$h = \frac{(b-a)}{2n}.$$

Þá er

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \approx & \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{h}{3}\Big( f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \Big) \right) \\
= & \frac{h}{3}\Big( f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) \\
& + \cdots + 2f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h) + f(b) \Big)
\end{aligned}$$

## 6.4 Skekkjumat í samsettu Simpsonreglu

Ef við beitum skekkjumatinu á sérhvert bilanna þá fáum við

$$\frac{-f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5$$

sem skekkju með $\xi_i \in [x_i, x_i + 1]$. Heildarskekkjan verður

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5 = \frac{-h^5}{90} \cdot \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i)$$

## 6.4 Skekkjumat í samsettu Simpsonreglu

Ef við beitum skekkjumatinu á sérhvert bilanna þá fáum við

$$\frac{-f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5$$

sem skekkju með $\xi_i \in [x_i, x_i + 1]$. Heildarskekkjan verður

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5 = \frac{-h^5}{90} \cdot \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú gefur meðalgildisreglan að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i)$$

## 6.4 Skekkjumat í samsettu Simpsonreglu

Ef við beitum skekkjumatinu á sérhvert bilanna þá fáum við

$$\frac{-f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5$$

sem skekkju með $\xi_i \in [x_i, x_i + 1]$. Heildarskekkjan verður

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5 = \frac{-h^5}{90} \cdot \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú gefur meðalgildisreglan að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú er $nh = \frac{(b-a)}{2}$ þar með er skekkjan:

$$\frac{-h^5}{90} \cdot nf^{(4)}(\xi) = \frac{-(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi) \cdot h^4$$

# 6.4 Skekkjumat á samsettu Simpsonreglunni: Niðurstaða

Ef við táknum útkomuna úr samsettu Simpsonsreglunni fyrir $h = \frac{b-a}{2n}$ með $S(h)$ þá fæst að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$\int_a^b f(x)\, dx = S(h) - \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) h^4$$

# 6.7 Romberg-útgiskun

Á sama hátt og við gátum bætt nálgun okkar á afleiðu falls með að nota Richardson útgiskun getum við bætt nálgun á heildi.

Á sama hátt og við gátum bætt nálgun okkar á afleiðu falls með að nota Richardson útgiskun getum við bætt nálgun á heildi.

Aðferðin virkar í aðalatriðum eins fyrir heildi og afleiður, en til að fá sem bestar upplýsingar um samleitni hennar skulum við leiða út formúluna fyrir trapisureglunni aftur.

## 6.7 Euler-Maclauren-formúlan

Fyrir samfellt fall $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sem er $2n$-sinnum samfellt deildanlegt gildir Euler-Maclauren formúlan

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}\left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right) - A_{2n} f^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in [0,1]$$

# 6.7 Euler-Maclauren-formúlan

Fyrir samfellt fall $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sem er $2n$-sinnum samfellt deildanlegt gildir Euler-Maclauren formúlan

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}\left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right) - A_{2n} f^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in [0,1]$$

Hér eru stuðlarnir $A_k$ þannig að $k!A_k$ verði Bernoulli-talan númer $k$. Þessar tölur eru stuðlar í veldaröðinni

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

## 6.7 Euler-Maclauren-formúlan

Fyrir samfellt fall $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sem er $2n$-sinnum samfellt deildanlegt gildir Euler-Maclauren formúlan

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}\left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right) - A_{2n} f^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in [0,1]$$

Hér eru stuðlarnir $A_k$ þannig að $k!A_k$ verði Bernoulli-talan númer $k$. Þessar tölur eru stuðlar í veldaröðinni

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

(Það þarf að hafa töluvert fyrir því að sanna þessa formúlu)

## 6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Látum nú $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera $2n$-sinnum samfellt deildanlegt fall.

## 6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Látum nú $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera $2n$-sinnum samfellt deildanlegt fall. Ef við búum til skiptingu $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ með jöfn hlutbil $h = x_{i+1} - x_i$ og beitum síðan Euler-Maclauren formúlunni á $g(t) = f(x_i + ht)$ fæst

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx =& h \int_0^1 \underbrace{f(x_i + ht)}_{g(t)}\,dt \\
=& h\left(\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1})\right) \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(x_i) - f^{(2k-1)}(x_{i+1})\right) \\
& - A_{2n} h^{2n+1} f^{(2n)}(\xi_i),
\end{aligned}$$

þar sem $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

## 6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Nú innleiðum við

$$
\begin{aligned}
T(h) &:= \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{1}{2}f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_{i+1})\right) \\
&= h\left(\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(a+nh)\right)
\end{aligned}
$$

## 6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Nú innleiðum við

$$
\begin{aligned}
T(h) &:= \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{1}{2}f(x_i)+\frac{1}{2}f(x_{i+1})\right)\\
&= h\left(\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(a+nh)\right)
\end{aligned}
$$

og fáum síðan:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = T(h) &+ \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}h^{2k}\left(f^{(2k-1)}(a)-f^{(2k-1)}(b)\right)\\
&- A_{2n}h^{2n+1}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_i)
\end{aligned}
$$

## 6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin

Nú gefur milligildissetningin að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_i) = f^{(2n)}(\xi)$$

Notum okkur nú að $nh = b - a$ og fáum að

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)\right)$$
$$- A_{2n} h^{2n}(b-a) f^{(2n)}(\xi).$$

## 6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin

Nú gefur milligildissetningin að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_i) = f^{(2n)}(\xi)$$

Notum okkur nú að $nh = b - a$ og fáum að

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx =& T(h) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)\right)\\ &- A_{2n}h^{2n}(b-a)f^{(2n)}(\xi).\end{aligned}$$

Niðurstaðan er að samsetta trapisureglan er

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + c_2h^2 + c_4h^4 + \cdots + c_{2m-2}h^{2m-2} + c_{2n}h^{2m}f^{(2m)}(\xi)$$

Hugsum okkur nú að við viljum reikna út $T(h_j)$ fyrir $h_j = (b-a)/2^j$, $j = 1, 2, \ldots$ og að við viljum nýta öll fallgildi í $T(h_{j-1})$ til að reikna út $T(h_j)$. Rakningarformúlan er

$$T(h_j) = \frac{1}{2}T(h_{j-1}) + h_j \sum_{k=1}^{2^{j-1}} f(a + (2k-1)h_j)$$

Athugið að hér er bilinu $[a, b]$ skipt í $2^j$ hlutbil.

## 6.7 Reikniritið fyrir Romberg-heildun

Romberg-heildun er hugsuð nákvæmlega eins og Richardson-útgiskunin: Við reiknum út línu fyrir línu í töflunni:

$$
\begin{array}{llllll}
i & & & & & \\
1 & R(1,1) & & & & \\
2 & R(2,1) & R(2,2) & & & \\
3 & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & & \\
4 & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

þar sem

$$
\begin{aligned}
R(i,1) &= T(h_i) \qquad i = 1, 2, \ldots \\
R(i,j) &= \frac{4^{j-1}R(i,j-1) - R(i-1,j-1)}{4^{j-1} - 1}.
\end{aligned}
$$

Með þessu fæst $\int_a^b f(x)\,dx = R(k,k) + O(h_k^{2k})$, þar sem $k$ er síðasta línan sem við reiknum í töflunni að ofan.

Hægt er að nota síðustu viðbót sem eftirámat fyrir skekkjuna, þetta mat er

$$\frac{1}{4^j - 1}\left(R(i, j-1) - R(i-1, j-1)\right)$$

þegar þessi stærð er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk er hætt.

## 6.7 Skekkjumat í Romberg heildun

Hægt er að nota síðustu viðbót sem eftirámat fyrir skekkjuna, þetta mat er

$$\frac{1}{4^j - 1}\left(R(i, j-1) - R(i-1, j-1)\right)$$

þegar þessi stærð er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk er hætt.

Athugið að það er ekki nauðsynlegt að hafa $h_1$ sem allt bilið $[a, b]$, það er ekkert sem kemur í veg fyrir það að við byrjum með $h_1 = \frac{b-a}{m}$, og helmingum svo; $h_2 = \frac{b-a}{2m}$, $h_3 = \frac{b-a}{4m}$, $\ldots$.
Almennt er þá $h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}m}$.

## Kafli 6: Fræðilegar spurningar

1. Hver er meginhugmyndin í tölulegri deildun og heildun?
2. Hvað eru *frammismunur* og *bakmismunur* til þess að nálga afleiðu?
3. Hvernig er *miðsettur mismunakvóti* fyrir fyrsta stigs afleiðu skilgreindur og hver er skekkjan í nálgun á afleiðu falls með honum?
4. Hvernig er *miðsettur mismunakvóti* fyrir annars stigs afleiðu skilgreindur og hvernig er skekkjan í nálgun á annarri afleiðu með honum?
5. Hvernig eru brúnunarmargliður notaðar til þess að reikna út afleiðu falls $f$ í punkti $a$ og hver er skekkjan í slíkri nálgun?
6. Lýsið fyrsta skrefinu i Richardson-útgiskun þar sem formúlan $f'(a) = R_0(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + O(h^6)$ er endurbætt þannig að út komi skekkja sem er $O(h^4)$.
7. Lýsið Richardson-útgiskunartöflunni.
8. Hvaða skekkjumat er notað í Richardson-útgiskun?

## Kafli 6: Fræðilegar spurningar

9. Hvernig er almenna aðferðin sem notar brúunarmargliður til þess að nálga heildi og nefnd er Newton-Cotes-heildun og hvernig er skekkjuformúlan í henni?
10. Hvernig er trapisuregla til þess að nálga heildi og aðferðarskekkja hennar?
11. Hvernig er miðpunktsregla til þess að nálga heildi og aðferðarskekkja hennar?
12. Hvernig er Simpson-regla til þess að nálga heildi og aðferðarskekkja hennar?
13. Hvernig er samsetta trapisureglan og aðferðarskekkja hennar?
14. Hvernig er samsetta miðpunktsreglan og aðferðarskekkja hennar?
15. Hvernig er samsetta Simpson-reglan og aðferðarskekkja hennar?
16. Hvernig er rakningarformúla fyrir samsettu trapisureglunni?
17. Lýsið reikniritinu fyrir Romberg-heildun.
18. Hver er skekkjan í eftirámatinu í Romberg-heildun?