6. Keðjureglan

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

21. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Setning 6.1 (Keðjureglan í einni breytistærð.)

Gerum ráð fyrir að fallið $f(u)$ sé diffranlegt í punktinum $u = g(x)$ og að fallið $g(x)$ sé diffranlegt í punktinum x. Þá er fallið $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ diffranlegt í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Setning 6.2

Látum $f(x, y)$ vera fall þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$ eru föll af breytu t, Gerum ráð fyrir að á opinni skífu um punktinum $(x(t), y(t))$ séu báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Gerum enn fremur ráð fyrir að föllin $x(t)$ og $y(t)$ séu bæði diffranleg í punktinum t. Þá er fallið

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

diffranlegt í t og

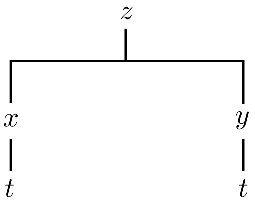
$$g'(t) = f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t).$$

Keðjuregla

Ritháttur 6.3

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$ eru föll af breytu t. Þá er

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$



Setning 6.4

Látum $f(x, y)$ vera fall af breytistærðum x og y sem aftur eru föll af breytum s og t, það er að segja $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$. Ritum svo

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)).$$

Þá gildir (að gefnum sambærilegum skilyrðum og í 6.2) að

$$g_1(s, t) = f_1(x(s, t), y(s, t))x_1(s, t) + f_2(x(s, t), y(s, t))y_1(s, t),$$

og

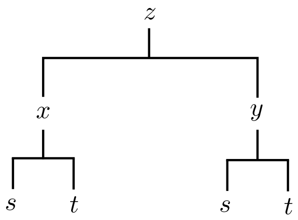
$$g_2(s, t) = f_1(x(s, t), y(s, t))x_2(s, t) + f_2(x(s, t), y(s, t))y_2(s, t).$$

Keðjuregla

Ritháttur 6.5

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$ eru föll af breytum s og t. Þá er

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$



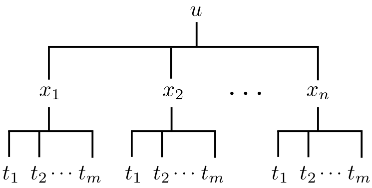
Ritháttur 6.6.
Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$ eru föll af breytum s og t. Þá er

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Setning 6.7

Látum u vera fall af n breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ þannig að hvert x_i má rita sem fall af m breytum $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Gerum ráð fyrir að allar hlutafleiðurnar $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ og $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ séu til og samfelldar. Þegar u er skoðað sem fall af breytunum $t_1, t_2, \ldots, t_m$ fæst að

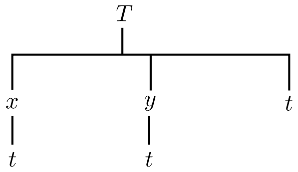
$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$



Keðjuregla

Dæmi 6.8

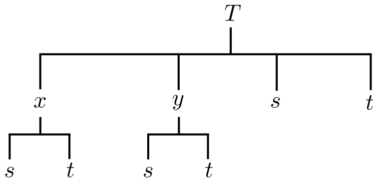
Látum T vera fall af fall af x, y og t, og x og y föll af t. Finnum $\frac{dT}{dt}$.



$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Dæmi 6.9

Látum T vera fall af fall af x, y, s og t, og x og y föll af s og t.
Finnum $\frac{\partial T}{\partial t}$.

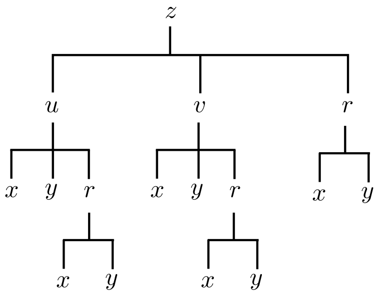


$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x,y,s}.$$

Keðjuregla

Dæmi 6.10

Látum z vera fall af fall af u, v og r, u og v vera föll af x, y og r og r vera fall af x og y. Skrifum niður $\frac{\partial z}{\partial x}$.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Skilgreining 6.11

Fall $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er sagt vera *jákvætt einsleitt af stigi k* (e. positively homogeneous of degree k) ef fyrir sérhvern punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og sérhverja tölu $t > 0$ gildir að

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Setning 6.12

Ef fall $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hefur samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður og er jákvætt einsleitt af stigi k þá er

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$