

17. Vigursvið og stigulsvið

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

2. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 17.1

Vigursvið á \mathbb{R}^2 er vörpun

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}.$$

Þegar talað er um vigursvið þá hugsum við vigurinn $\mathbf{F}(x, y)$ sem vigur í \mathbb{R}^2 sem hefur fótþunkt í punktinum (x, y) .

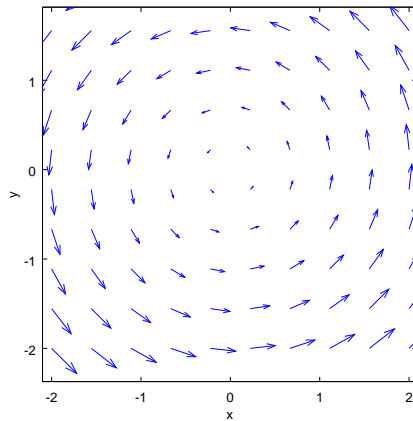
Vigursvið $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ er sagt *samfelld* ef föllin $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$ eru samfelld.

Vigursvið á \mathbb{R}^3 er vörpun

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Við hugsum $\mathbf{F}(x, y, z)$ sem vigur með (x, y, z) sem fótþunkt. Skilgreiningin á því að vigursvið í \mathbb{R}^3 sé samfelld er eins og á samfeldni vigursvið í \mathbb{R}^2 .

Vigursvið

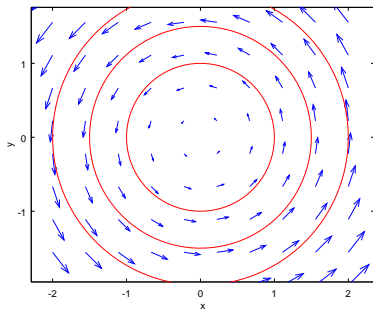


Vigursviðið $F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Straumlína

Skilgreining 17.2

Ferill C í planinu kallast *straumlína* (e. stream line, flow line) fyrir vigursvið $\mathbf{F}(x, y)$ ef í hverjum punkti (x, y) á ferlinum er vigurinn $\mathbf{F}(x, y)$ snertivigur við ferilinn.



Vigursviðið $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ásamt nokkrum straumlínum.

Stigulsvið

Skilgreining 17.3

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y)$ kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* (e. gradient field, conservative field) á mengi D ef til er fall $\varphi(x, y)$ þannig að

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$$

fyrir alla punkta $(x, y) \in D$, það er að segja ef

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$$

þá er

$$F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) \quad \text{og} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y).$$

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y, z)$ kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* ef til er fall $\varphi(x, y, z)$ þannig að $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$.

Fallið φ kallast *mætti* (e. potential) fyrir vigursviðið \mathbf{F} .

Setning 17.4

Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ vera vigursvið þannig að föllin $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$ hafi samfelldar hlutafleiður. Ef $\mathbf{F}(x, y)$ er stigulsvið þá er

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y).$$

Athugasemd. Þó að hlutafleiðurnar séu jafnar þá er **ekki** hægt að álykta að \mathbf{F} sé stigulsvið. Þetta atriði verður rætt síðar.

Setning 17.5

Látum $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ vera vigursvið þannig að föllin $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ og $F_3(x, y, z)$ hafi samfelldar hlutafleiður. Ef $\mathbf{F}(x, y, z)$ er stigulsvið þá er

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} F_3(x, y, z) \quad \text{og}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} F_3(x, y, z).$$

Reikniaðferð 17.6

Finna á mætti $\varphi(x, y)$ fyrir stigulsvið

$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$. Viljum finna fall $\varphi(x, y)$ þannig að

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) = F_1(x, y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = F_2(x, y).$$

Með því að heilda þessar jöfnur fæst að

$$\varphi(x, y) = \int F_1(x, y) dx + C_1(y)$$

og

$$\varphi(x, y) = \int F_2(x, y) dy + C_2(x).$$

Þegar fyrra stofnfallið er reiknað þá er y hugsað sem fasti og því fæst heildunarfasti sem getur verið fall af y . Lokaskrefið er svo að horfa á jöfnurnar tvær hér að ofan og sjá hvort ekki er hægt að finna gildi fyrir heildunarfastanna $C_1(x)$ og $C_2(y)$ þannig að sama formúlan fyrir $\varphi(x, y)$ fáiist.