

# 17. Vigursvið og stigulsvið

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 2. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

17.1

## Vigursvið

### Skilgreining 17.1

Vigursvið á  $\mathbb{R}^2$  er vörpun

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}.$$

Þegar talað er um vigursvið þá hugsum við vigurinn  $\mathbf{F}(x, y)$  sem vigur í  $\mathbb{R}^2$  sem hefur fótþunkt í punktinum  $(x, y)$ .

Vigursvið  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$  er sagt *samfellt* ef föllin  $F_1(x, y)$  og  $F_2(x, y)$  eru samfelld.

Vigursvið á  $\mathbb{R}^3$  er vörpun

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Við hugsum  $\mathbf{F}(x, y, z)$  sem vigur með  $(x, y, z)$  sem fótþunkt. Skilgreiningin á því að vigursvið í  $\mathbb{R}^3$  sé samfellt er eins og á samfeldni vigursvið í  $\mathbb{R}^2$ .

17.2

## Vigursvið

17.3

## Straumlína

### Skilgreining 17.2

Ferill  $C$  í planinu kallast *straumlína* (e. stream line, flow line) fyrir vigursvið  $\mathbf{F}(x, y)$  ef í hverjum punkti  $(x, y)$  á ferlinum er vigurinn  $\mathbf{F}(x, y)$  snertivigur við ferilinn.

17.4

## Stigulsvið

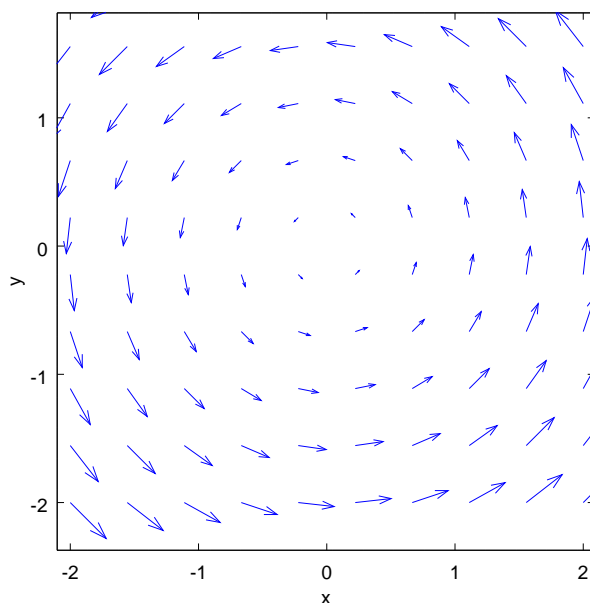
### Skilgreining 17.3

Vigursvið  $\mathbf{F}(x, y)$  kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* (e. gradient field, conservative field) á mengi  $D$  ef til er fall  $\varphi(x, y)$  þannig að

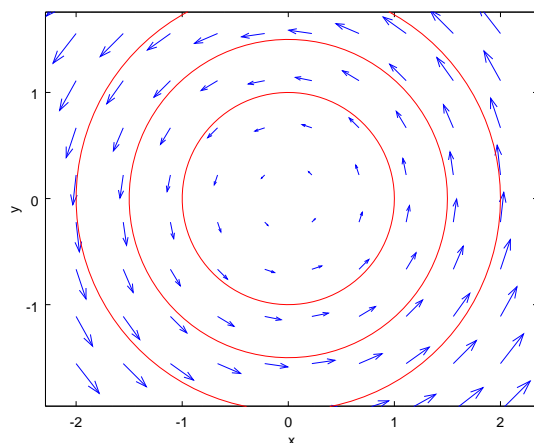
$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$$

fyrir alla punkta  $(x, y) \in D$ , það er að segja ef

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$$



Vigursviðið  $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ .



Vigursviðið  $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  ásamt nokkrum straumlínum.

Þá er

$$F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) \quad \text{og} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y).$$

Vigursvið  $\mathbf{F}(x, y, z)$  kallast *stigulsvið* ef til er fall  $\varphi(x, y, z)$  þannig að  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z)$ .

Fallið  $\varphi$  kallast *mætti* (e. potential) fyrir vigursviðið  $\mathbf{F}$ .

17.5

#### Setning 17.4

Látum  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$  vera vigursvið þannig að föllin  $F_1(x, y)$  og  $F_2(x, y)$  hafi samfelldar hlutafleiður. Ef  $\mathbf{F}(x, y)$  er stigulsvið þá er

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y).$$

**Athugasemd.** Þó að hlutafleiðurnar séu jafnar þá er **ekki** hægt að álykta að  $\mathbf{F}$  sé stigulsvið. Þetta atriði verður rætt síðar.

17.6

### Setning 17.5

Látum  $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$  vera vigursvið þannig að föllin  $F_1(x, y, z)$ ,  $F_2(x, y, z)$  og  $F_3(x, y, z)$  hafi samfelldar hlutafleiður. Ef  $\mathbf{F}(x, y, z)$  er stigulsvið þá er

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y, z), \\ \frac{\partial}{\partial z}F_1(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}F_3(x, y, z) \quad \text{og} \\ \frac{\partial}{\partial z}F_2(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}F_3(x, y, z).\end{aligned}$$

17.7

### Reikniaðferð 17.6

Finna á mætti  $\varphi(x, y)$  fyrir stigulsvið  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ . Viljum finna fall  $\varphi(x, y)$  þannig að

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) = F_1(x, y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = F_2(x, y).$$

Með því að heilda þessar jöfnur fæst að

$$\varphi(x, y) = \int F_1(x, y) dx + C_1(y)$$

og

$$\varphi(x, y) = \int F_2(x, y) dy + C_2(x).$$

Þegar fyrri stofnfallið er reiknað þá er  $y$  hugsað sem fasti og því fæst heildunarfasti sem getur verið fall af  $y$ . Lokaskrefið er svo að horfa á jöfnurnar tvær hér að ofan og sjá hvort ekki er hægt að finna gildi fyrir heildunarfastanna  $C_1(x)$  og  $C_2(y)$  þannig að sama formúlan fyrir  $\varphi(x, y)$  fáiast.

17.8