Kafli 8: Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Töluleg greining, STÆ405G, 26. og 28. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

8.1

Yfirlit

Kafli 8: Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Kafli	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
8.0	Almenn atriði um jaðargildisverkefni	656-660	3-4
8.1	Línulegar jöfnur – Dirichlet-jaðarskilyrði	660-670	5-11
8.2	Línulegar jöfnur – Blönduð jaðarskilyrði	673-683	12-18

8.2

8.0 Almenn atriði um jaðargildisverkefni

8.0 Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Við ætlum að finna nálgunarlausnir á verkefnum af gerðinni

$$\begin{aligned} y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b,\\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3,\\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3. \end{aligned}$$

Afleiðujafnan er sögð vera línuleg ef hún er á forminu

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

8.3

8.0 Jaðarskilyrðin nefnast

(i)	Dirichlet-jaðarskilyrði:	$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$
	Fallsjaðarskilyrði:	
(ii)	Neumann-jaðarskilyrði:	$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$
	Afleiðujaðarskilyrði:	
	Flæðisjaðarskilyrði:	
(iii)	Robin-jaðarskilyrði:	$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$
		$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3$
		$(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$
	Blandað jaðarskilyrði:	

Athugið að blandað jaðarskilyrði með $\alpha_2 = 0$ (eða $\beta_2 = 0$) er Dirichlet skilyrði með $\alpha = \alpha_3/\alpha_1$ (eða $\beta = \beta_3/\beta_1$).

Athugið að blandað jaðarskilyrði með $\alpha_1 = 0$ (eða $\beta_1 = 0$) er Neumann skilyrði með $\alpha = \alpha_3/\alpha_2$ (eða $\beta = \beta_3/\beta_2$). 8.4

8.1 Línulegar jöfnur – Dirichlet-jaðarskilyrði

8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Við nefnum x_j *skiptipunkta* eða *hnútpunkta* skiptingarinnar.

Punktarnir $a = x_0$ og $b = x_N$ nefnast *endapunktar* skiptingarinnar og x_j, með $j = 1, \dots, N - 1$, nefnast *innri punktar* skiptingarinnar.

Í fyrstu atrennu ætlum vð aðeins að nálga lausnina fyrir línulegar jöfnur,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

Við reiknum út nálgun á réttu lausninni $y(x)$ í hnútpunktunum.

Rétta gildið í punktinum x_j táknum við með y_j og nálgunargildið með w_j,

$$y_j = y(x_j) \approx w_j.$$

Eins skrifum við

$$p_j = p(x_j), \qquad q_j = q(x_j), \qquad r_j = r(x_j).$$

8.5

8.1 Línulegar afleiðujöfnur:

Nú leiðum við út nálgunarjöfnur, eina fyrir hvern innri skiptipunkt. Við byrjum á því að stinga punkti x_j inn í afleiðujöfnuna

$$\left\{y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)\right\}_{x=x_j}.$$

Næst skiptum á afleiðum og mismunakvótum i þessari jöfnu,

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Síðan stillum við upp nálgunargildunum í stað réttu gildanna: 8.6

8.1 Skipt á afleiðum og mismunakvótum

Endurtökum réttu jöfnuna

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Nú fellum við niður leifarliðina og setjum nálgunargildin í stað réttu gildanna:

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j$$

Hér fáum við eina jöfnu fyrir sérhvern innri skiptipunkt $j = 1, \dots, N - 1$. 8.7

8.1 Dirichlet-jaðarskilyrði

Við erum komin með $N - 1$ nálgunarjöfnu til þess að finna $N + 1$ nálgunargildi $w_0, \dots, w_N$ fyrir $y_0, \dots, y_N$.

Ef við erum að leysa línulegt jaðargildisverkefni með Dirichlet-jaðarskilyrðum,

$$\begin{gathered} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \le x \le b, \\ y(a) = \alpha \quad \text{og} \quad y(b) = \beta, \end{gathered}$$

þá fæst nálgunin með því að leysa línulega jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} &= p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j, \qquad j = 1, \dots, N - 1, \\ w_N &= \beta. \end{aligned}$$

8.8

8.1 Jafngild framsetning á hneppinu

Við lítum aftur á línulegu nálgunarjöfnurnar

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j.$$

Margföldum alla liði með $-h^2$ og röðum síðan óþekktu stærðunum vinstra mengin jafnaðarmerkisins. Þá fæst línulega jöfnuhneppið

$$\big(-1 - \tfrac{1}{2}hp_j\big)w_{j-1} + \big(2 + h^2 q_j\big)w_j + \big(-1 + \tfrac{1}{2}hp_j\big)w_{j+1} = -h^2\, r_j$$

fyrir $j = 1, 2, 3, \ldots, N-1$. 8.9

8.1 Línulega jöfnuhneppið á fylkjaformi

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ l_1 & d_1 & u_1 & & & & & \\ & l_2 & d_2 & u_2 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} & \\ & & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Þar sem stuðlarnir l_j, d_j og u_j eru gefnir með

$$\begin{aligned} l_j &= -1 - \tfrac{1}{2}hp_j \\ d_j &= 2 + h^2 q_j \\ u_j &= -1 + \tfrac{1}{2}hp_j \end{aligned}$$

8.10

8.1 Óþekktar stærðir og hægri hlið

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Þetta jöfnuhneppi er leyst og þar með eru nálgunargildin fundin. 8.11

8.2 Línulegar jöfnur – Blönduð jaðarskilyrði

8.2 Línulega jafna – Blönduð jaðarskilyrði

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Til þess að líkja eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x = a$ þá hugsum við okkur að við bætum einum punkti $x_{-1} = a - h$ við og látum w_f tákna ímyndað gildi lausnarinnar í x_{-1}.

Svona punktur x_{-1} utan við skiptinguna er kallaður *felupunktur* við skiptinguna og ímyndað gildi w_f í felupunkti er kallað *felugildi*.

Takið eftir því að lausnin er ekki til í felupunktinum, en við reiknum eins og w_f sé gildi hennar þar.

Mismunajafnan sem líkir eftir afleiðujöfnunni í punktinum x_0 er

$$\big(-1-\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f+\big(2+h^2q_0\big)w_0+\big(-1+\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1=-h^2r_0$$

Mismunajafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er

$$\alpha_1 w_0+\alpha_2\frac{w_1-w_f}{2h}=\alpha_3.$$

8.12

8.2 Felugildið leyst út

Jafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er:

$$\alpha_1 w_0+\alpha_2\frac{w_1-w_f}{2h}=\alpha_3.$$

Út úr henni leysum við

$$w_f=w_1-\frac{2h}{\alpha_2}(\alpha_3-\alpha_1 w_0)$$

Við stingum síðan þessu gildi inn í jöfnuna sem líkir eftir afleiðujöfnunni

$$\big(-1-\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f+\big(2+h^2q_0\big)w_0+\big(-1+\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1=-h^2r_0$$

Útkoman verður:

8.13

8.2 Jöfnur fyrir gildin í endapunktum

Fyrsta jafna hneppisins:

$$\left(2+h^2q_0-\big(2+hp_0\big)h\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)w_0-2w_1=-h^2r_0-\big(2+hp_0\big)h\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Með því að innleiða felupunkt $x_{N+1}=b+h$ hægra megin við skiptinguna, tilsvarandi felugildi w_f og leysa saman tvær jöfnur, þá fáum við síðustu jöfnu hneppisins :

$$-2w_{N-1}+\left(2+h^2q_N+\big(2-hp_N\big)h\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)w_N=-h^2r_N-\big(2-hp_N\big)h\frac{\beta_3}{\beta_2}$$

Við erum því aftur komin með $(N+1)\times(N+1)$-jöfnuhneppi

8.14

8.2 Hneppið á fylkjaformi

$$A\mathbf{w}=\mathbf{b}$$

$$A=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & & & & & & \\
l_1 & d_1 & u_1 & & & & & \\
 & l_2 & d_2 & u_2 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} & \\
 & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\
 & & & & & & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1}
\end{bmatrix}$$

Þar sem stuðlarnir l_j, d_j og u_j fyrir $j=1,2,3\dots,N-1$ eru þeir sömu og áður.

$$\begin{aligned}
l_j&=-1-\tfrac{1}{2}hp_j\\
d_j&=2+h^2q_j\\
u_j&=-1+\tfrac{1}{2}hp_j
\end{aligned}$$

8.15

8.2 Fyrsta og síðasta lína hneppisins

$$a_{11} = \begin{cases} 1, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ d_0 & \text{Neumann í } x = a : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \\ d_0 + 2hl_0\alpha_1/\alpha_2 & \text{Robin í } x = a : \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{12} = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ -2, & \text{annars.} \end{cases}$$

$$a_{N+1,N+1} = \begin{cases} 1, & \text{Dirichlet í } x = b : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ d_N & \text{Neumann í } x = b : \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ d_N - 2hu_N\beta_1/\beta_2 & \text{Robin í } x = a : \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{N+1,N} = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet í } x = b : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ -2 & \text{annars.} \end{cases}$$

8.16

8.2 Hægri hlið hneppisins

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{cases} \alpha = \alpha_3/\alpha_1, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ -h^2 r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Neumann í } x = a : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \\ -h^2 r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Robin í } x = a : \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$b_{N+1} = \begin{cases} \beta = \beta_3/\beta_1, & \text{Dirichlet í } x = a : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ -h^2 r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Neumann í } x = a : \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ -h^2 r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Robin í } x = a : \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

8.17

8.2 Samantekt

Gildi lausnarinnar $y(x)$ á línulega jaðargildisverkefninu

$$\begin{aligned} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3 \end{aligned}$$

í punktunum $x_j = a + jh$, þar sem $h = (b-a)/N$ og $j = 0, \ldots, N$, eru nálguð með

$$w_j \approx y(x_j) = y_j$$

Dálkvigurinn

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_N]^T$$

er lausn á línulegu jöfnuhneppi $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$.

Stuðlum $(N+1) \times (N+1)$ fylkisins A og $(N+1)$-dálkvigursins $\mathbf{b}$ hefur verið lýst hér að framan. 8.18

Kafli 8: Fræðilegar spurningar

1. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Dirichlet-jaðarskilyrði*? (Samheiti er *fallsjaðarskilyrði*.)
2. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Neumann-jaðarskilyrði*? (Samheiti eru *afleiðujaðarskilyrði* og *flæðisjaðarskilyrði*.)
3. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Robin-jaðarskilyrði*? (Samheiti er *blandað jaðarskilyrði*.)
4. Hvernig er nálgunarjafna fyrir línulegu afleiðujöfnuna $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ í innri skiptipunkti á bilinu $[a, b]$ leidd út?
5. Hvernig eru *felupunktur* og *felugildi* notuð til þess að meðhöndla blandað jaðarskilyrði $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ í vinstri endapunkti bilsins $[a, b]$?
6. Hvernig er *felupunktur* og *felugildi* notuð til þess að meðhöndla blandað jaðarskilyrði $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ í vinstri endapunkti bilsins $[a, b]$ og hvernig verður nálgunarjafnan í punktinum $x = 0$ þegar þetta er gert?

8.19