19. Ferilheildi og stigulsvið

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 9. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

19.1

Setning 19.1
Látum $\mathbf{F}(x,y)$ vera samfellt stigulsvið skilgreint á svæði D í $\mathbb{R}^2$ og látum φ vera fall skilgreint á D þannig að $\mathbf{F}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$ fyrir alla punkta $(x,y) \in D$. Látum $\mathbf{r} : [a,b] \to D$ vera stikaferill sem er samfellt diffranlegur á köflum og stikar feril $\mathcal{C}$ í D. Þá er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

(Samsvarandi gildir fyrir vigursvið skilgreint á svæði $D \subseteq \mathbb{R}^3$.)

19.2

Fylgisetning 19.2
Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt stigulsvið skilgreint á mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum $\mathbf{r} : [a,b] \to D$ vera stikaferil sem er samfellt diffranlegur á köflum og lokaður (þ.e.a.s. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$) og stikar feril $\mathcal{C}$. Þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(Ath. að rithátturinn

$$\oint_{\mathcal{C}}$$

er gjarnan notaður þegar heildað er yfir lokaðan feril $\mathcal{C}$.)

19.3

Fylgisetning 19.3
Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt stigulsvið skilgreint á mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to D$ og $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to D$ vera stikaferla sem eru samfellt diffranlegir á köflum og stika ferlana $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1(a_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$ og $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(b_2)$, þ.e.a.s. stikaferlarnir $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ hafa sameiginlega upphafs- og endapunkta. Þá er

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

19.4

Skilgreining 19.4
Segjum að heildi vigursviðs $\mathbf{F}$ sé *óháð stikaferli* ef fyrir sérhverja tvo samfellt diffranlega á köflum stikaferla $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ með sameiginlega upphafs- og endapunkta sem stika ferlana $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ gildir að

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

19.5

Setning 19.5
Ferilheildi samfellds vigursviðs $\mathbf{F}$ er óháð stikaferli ef og aðeins ef $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ fyrir alla lokaða ferla $\mathcal{C}$ sem eru samfellt diffranlegir á köflum.

19.6

Skilgreining 19.6
Segjum að mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sé *ferilsamanhangandi* (e. connected, path-connected) ef fyrir sérhverja tvo punkta $P, Q \in D$ gildir að til er stikaferill $\mathbf{r} : [0, 1] \to D$ þannig að $\mathbf{r}(0) = P$ og $\mathbf{r}(1) = Q$.

(Athugasemd: Í bók er orðið *connected* notað fyrir hugtakið *ferilsamanhangandi*. Venjulega er orðið *connected* notað yfir annað hugtak, skylt en samt ólíkt.)

19.7

Setning 19.7
Látum D vera opið mengi í $\mathbb{R}^2$ sem er ferilsamanhangandi. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt vigursvið skilgreint á D og ferilheildi $\mathbf{F}$ eru óháð vegi þá er $\mathbf{F}$ stigulsvið.

19.8

Setning 19.8
Fyrir samfellt vigursvið $\mathbf{F}$ skilgreint á opnu ferilsamanhangandi mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er eftirfarandi jafngilt:

(a) $\mathbf{F}$ er stigulsvið,
(b) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ fyrir alla samfellt diffranlega á köflum lokaða stikaferla $\mathbf{r}$ í D,
(c) ferilheildi $\mathbf{F}$ er óháð vegi.

Sönnun:
(a) $\Rightarrow$ (b). Fylgisetning 19.2. (b) $\Leftrightarrow$ (c). Setning 19.5. (c) $\Rightarrow$ (a). Setning 19.7.

19.9