Stærðfræðigreining IIB

1. Ferlar.

1.1 Skilgreining. Vörpun $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ þannig að $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ kallst *vigurgild vörpun*. Slík vörpun er sögð samfelld ef föllin $r_1, \dots, r_n$ eru öll samfelld. Samfelld vörpun $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er oft kölluð *stikaferill*.

1.2 Ritháttur. Þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

og þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

1.3 Skilgreining. Látum $\mathcal{C}$ vera *feril í plani* (þ.e.a.s. $\mathcal{C}$ er mengi punkta í planinu sem er ferill í venjulegum skilningi orðsins *ferill*). Stikun á $\mathcal{C}$ er stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ þannig að $\mathbf{r}$ tekur hvern punkt í $\mathcal{C}$ sem gildi. *Ferill í rúmi* er skilgreindur á sambærilegan hátt.

1.4 Skilgreining. Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti* t ef markgildið

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

er til. Stikaferillinn $\mathbf{r}$ er sagður *diffranlegur* ef hann er diffranlegur í öllum punktum á bilinu $[a, b]$. (Í endapunktum bilsins $[a, b]$ er þess krafist að einhliða afleiður séu skilgreindar.)

1.5 Setning. Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti* t ef og aðeins ef föllin $r_1, \dots, r_n$ eru öll diffranleg í t. Þá gildir að

$$\mathbf{r}'(t) = (r_1'(t), \dots, r_n'(t)).$$

1.6 Setning. Látum $\mathbf{u}, \mathbf{v} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera diffranlega stikaferla og λ diffranlegt fall. Þá eru stikaferlarnir $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t), \lambda(t)\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{u}(\lambda(t))$ diffranlegir, og ef $n = 3$ þá er stikaferillinn $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ líka diffranlegur. Fallið $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ er líka diffranlegt. Eftirfarandi listi sýnir formúlur fyrir afleiðunum:

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$,
(b) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$,
(c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$,
(d) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$,
(e) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \mathbf{u}'(\lambda(t))\lambda'(t)$.

Ef $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ þá er

(f) $\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$.

1.7 Ritháttur. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera diffranlegan stikaferil. Venja er að rita $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og tala um $\mathbf{v}(t)$ sem *hraða* eða *hraðavigur*. Talan $|\mathbf{v}(t)|$ er kölluð *ferð*. Einnig er ritað $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ og talað um $\mathbf{a}(t)$ sem *hröðun* eða *hröðunarvigur*.

1.8 Skilgreining. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n; \mathbf{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ vera stikaferil.

Stikaferillinn er sagður *samfellt diffranlegur* ef föllin $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ eru öll diffranleg og afleiður þeirra eru samfelldar. Samfellt diffranlegur stikaferill er sagður *þjáll* (e. smooth) ef $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t.

Stikaferillinn er sagður *samfellt diffranlegur á köflum* ef til eru tölur $b_0, \ldots, b_k$ þannig að $a = b_0 < b_1 < \cdots < b_k = b$ og stikaferillinn er samfellt diffranlegur á hverju bili $[b_{i-1}, b_i]$. Það að stikaferill sé *þjáll á köflum* (e. piecewise smooth curve) er skilgreint á sambærilegan hátt.

1.9 Regla. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera samfellt diffranlegan stikaferil. *Lengd* eða *bogalengd* stikaferilisins er skilgreind með formúlunni

$$s = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

1.10 Skilgreining og umræða. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera samfellt diffranlegan stikaferil. Sagt er að stikaferillinn sé *stikaður með bogalengd* ef fyrir allar tölur t_1, t_2 þannig að $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ þá gildir

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

(Skilyrðið segir að lengd stikaferilsins á milli punkta $\mathbf{r}(t_1)$ og $\mathbf{r}(t_2)$ sé jöfn muninum á t_2 og t_1.) Stikun með bogalengd má líka þekkja á þeim eiginleika að $|\mathbf{v}(t)| = 1$ fyrir öll gildi á t.