5. Hlutafleiður

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 19. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

5.1

Hlutafleiður

Skilgreining 5.1
Látum $f(x, y)$ vera fall af tveimur breytum x og y sem er skilgreint á opinni skífu með miðju í punktinum (a, b).

Skilgreinum *hlutafleiðu m.t.t.* x í (a, b) með

$$f_1(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

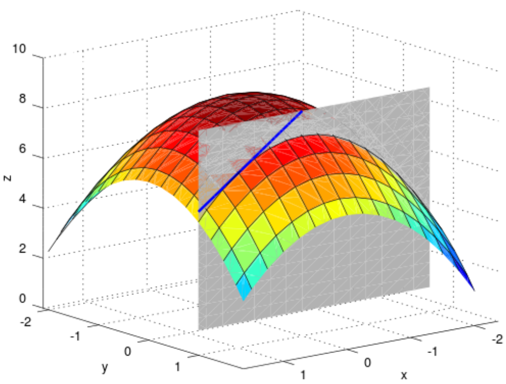
og hlutafleiðu m.t.t. y í (a, b) með

$$f_2(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

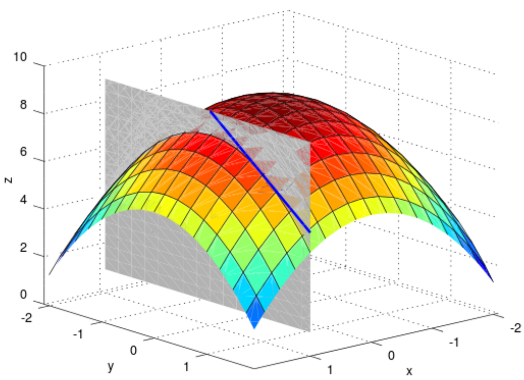
ef markgildin eru til.

5.2

Hlutafleiður



Hlutafleiða m.t.t. x fyrir $y = 1$.



Hlutafleiða m.t.t. y fyrir $x = 1$.

5.3

Hlutafleiður

Skilgreining 5.2

Látum $f(x, y, z)$ vera fall af þremur breytum x, y og z sem er skilgreint á opinni kúlu með miðju í punktinum (a, b, c).

Skilgreinum *hlutafleiðu m.t.t.* x í (a, b, c) með

$$f_1(a, b, c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b, c) - f(a, b, c)}{h},$$

hlutafleiðu m.t.t. y í (a, b, c) með

$$f_2(a, b, c) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k, c) - f(a, b, c)}{k}$$

og *hlutafleiðu m.t.t.* z í (a, b, c) með

$$f_3(a, b, c) = \lim_{\ell \to 0} \frac{f(a, b, c + \ell) - f(a, b, c)}{\ell}$$

ef markgildin eru til.

5.4

Hlutafleiður

Skilgreining 5.3

Látum f vera fall af n breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sem er skilgreint á opinni kúlu um punktinn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Hlutafleiða f með tilliti til breytunnar x_k í punktinum $\mathbf{a}$ er skilgreind sem markgildið

$$f_k(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{h}$$

ef markgildið er til. (Hér stendur $\mathbf{e}_k$ fyrir vigurinn sem er með 0 í öllum hnitum nema því k-ta þar sem er 1.)

5.5

Rithättur 5.4

Ritum $z = f(x, y)$. Ýmis konar ritháttur fyrir hlutafleiður, m.a.

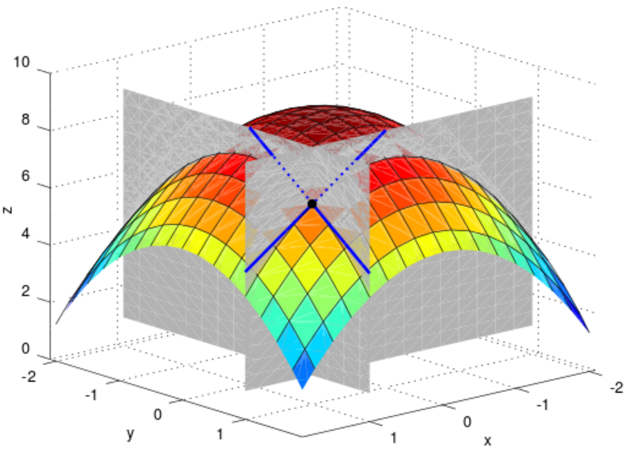
$$f_1(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_1 f(x, y) = f_x(x, y) = D_x f(x, y) = \partial_x f(x, y)$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_2 f(x, y) = f_y(x, y) = D_y f(x, y) = \partial_y f(x, y)$$

Þegar við viljum tákna gildið á hlutafleiðu f í ákveðnum punkti $(x, y) = (a, b)$ þá eru líka ýmsir möguleikar, til dæmis 5.6

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)\right|_{(a,b)} = f_1(a, b) = D_1 f(a, b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)\right|_{(a,b)} = f_2(a, b) = D_2 f(a, b).$$



Snertiplan

Látum $f(x, y)$ vera fall af tveimur breytistærðum þannig að hlutafleiðurnar $f_1(a, b)$ og $f_2(a, b)$ séu skilgreindar. Í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k}$ snertivigur við ferilinn $f(x, b) = z$ og

$\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}$ snertivigur við ferilinn $f(a, y) = z$.

5.7

Snertiplan

Táknum með S planið sem hefur stikunina

$$(a, b, f(a, b)) + s\mathbf{T}_1 + t\mathbf{T}_2, \quad -\infty < s, t < \infty.$$

Vigurinn

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

er þvervigur á S og jafna plansins S er

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Þverlína á S hefur stikun

$$(a, b, f(a, b)) + u\mathbf{n}, \quad -\infty < u < \infty.$$

Ef $f(x, y)$ er 'nógu nálægt' (skilgreint nánar síðar) planinu S þegar (x, y) er nálægt punktinum (a, b) þá kallast S *snertiplan* við grafið $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b))$.

5.8

Hlutafleiður af hærra stigi

Skilgreining 5.5
Ritum $z = f(x, y)$. *Annars stigs hlutafleiður* f eru skilgreindar með formúlunum

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x,y) = f_{yx}(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x,y) = f_{xy}(x,y).$$

Hlutafleiðurnar $f_{11}(x,y)$ og $f_{22}(x,y)$ kallast hreinar hlutafleiður og $f_{12}(x,y)$ og $f_{21}(x,y)$ kallast blandaðar hlutafleiður.

5.9

Hlutafleiður af hærra stigi

Setning 5.6
Látum $f(x,y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu D með miðju í $P = (a,b)$. Gerum ráð fyrir að hlutafleiðurnar $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_{12}(x,y)$ og $f_{21}(x,y)$ séu allar skilgreindar á D og að þær séu allar samfelldar á D. Þá gildir að

$$f_{12}(a,b) = f_{21}(a,b).$$

5.10

Hlutafleiður af hærra stigi

Hugmynd að skilgreiningu 5.7
Skilgreiningu 5.6 má útvíkka á augljósan hátt til að skilgreina 2. stigs hlutafleiður fyrir föll af fleiri en tveimur breytum. Einnig er augljóst hvernig má skilgreina hlutafleiður af hærri stigum en 2, til dæmis ef $w = f(x,y,z)$ þá

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \qquad \text{(diffra fyrst tvisvar m.t.t. } y\text{, svo einu sinni m.t.t. } x\text{)}$$

og

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial y} \qquad \text{(diffra fyrst m.t.t. } y\text{, svo m.t.t. } z \text{ og að lokum m.t.t. } y\text{).}$$

5.11

Setning 5.8 (Almenn útgáfa af Setningu 5.7)
Látum f vera fall n breytistærðum sem er skilgreint á opinni kúlu með miðju í $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Skoðum tvær hlutafleiður f í punktum P þar sem er diffrað með tilliti til sömu breytistærða og jafn oft með tilliti til hverrar breytistærðar. Ef þessar hlutafleiður eru samfelldar í punktinum P og allar hlutafleiður af lægra stigi eru skilgreindar á D og samfelldar á D þá eru hlutafleiðurnar sem við erum að skoða jafnar í P.

Dæmi:
Ef $w = f(x,y,z)$ er fall af þremur breytistærðum þá er t.d.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y \partial x \partial z}$$

ef skilyrðin í setningunni eru uppfyllt.

5.12