25. Sundurleitnisetningin II

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 30. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

25.1

Skilgreining 25.1
Flötur er sagður reglulegur ef hann hefur snertiplan í hverjum punkti.

Flötur $\mathcal{S}$ sem er búinn til með því að taka endanlega marga reglulega fleti $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ og líma þá saman á jöðrunum kallast *reglulegur á köflum*.

Þegar talað um einingarþvervigrasvið á slíkan flöt þá er átt við vigursvið sem er skilgreint á fletinum nema í þeim punktum þar sem fletir $\mathcal{S}_i$ og $\mathcal{S}_j$ hafa verið límdir saman. Í slíkum punktum þarf flöturinn ekki að hafa snertiplan og því ekki heldur þvervigur.

Flötur er sagður *lokaður* ef hann er yfirborð svæðis í $\mathbb{R}^3$ (t.d. er kúluhvel lokaður flötur).

25.2

Setning 25.2 (Sundurleitnisetningin, Setning Gauss)
Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

25.3

Skilgreining 25.3
Látum D vera rúmskika í $\mathbb{R}^3$. Segjum að rúmskikinn D sé z-*einfaldur* ef til er svæði D_z í planinu og samfelld föll f og g skilgreind á D_z þannig að

$$D = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D_z \text{ og } f(x,y)\le z\le g(x,y)\}.$$

Það að rúmskiki sé x- eða y-einfaldur er skilgreint á sama hátt.

25.4

Setning 25.4
Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á D og φ diffranlegt fall skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\,dV = -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \mathbf{N}\,dS,$$

og

$$\iiint_D \mathbf{grad}\,\varphi\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \varphi\mathbf{N}\,dS.$$

Athugið að útkomurnar úr heildunum eru vigrar.

25.5