7. Línulegar nálganir

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

26. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 7.0

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f sé skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn a. Fallið f er sagt vera *diffranlegt* í punkti a ef markgildið

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

er til.

Diffranleiki í einni breytistærð - önnur lýsing

Skilgreining 7.0

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f sé skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn a. Fallið f er sagt vera *diffranlegt* í punkti a ef til er tala m þannig að ef $L(x) = f(a) + m(x - a)$ þá er

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} = 0.$$

(Talan m verður að vera jöfn $f'(a)$.)

Fallið f er 'nálægt' línunni L nálægt punktinum a.

Skilgreining 7.1

Fall $f(x, y)$ sem er skilgreint á opinni skífu umhverfis (a, b) er sagt vera diffranlegt í punktinum (a, b) ef báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar í (a, b) og ef

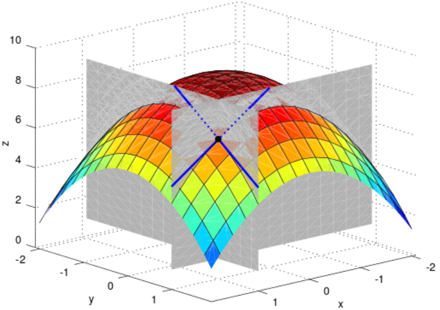
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - S(a+h, b+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

þar sem $S(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$.

Fallið f er 'nálægt' sléttunni S nálægt punktinum (a, b).

Snertiplan

Ef f er diffranlegt í (a, b) þá kallast planið S *snertiplan* við graf fallsins.



$$S(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Setning 7.2 (Meðalgildissetningin)

Gerum ráð fyrir að fallið f sé samfellt á lokaða bilinu $[a, b]$ og diffranlegt á opna bilinu (a, b). Þá er til punktur c á opna bilinu (a, b) þannig að

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Setning 7.3

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu $\mathcal{D}$ með miðju í (a, b) þannig að á þessari skífu eru báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Gerum ráð fyrir að h og k séu tölur þannig að $(x + h, y + k) \in \mathcal{D}$. Þá eru til tölur θ_1 og θ_2 á milli 0 og 1 þannig að

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_1(a + \theta_1 h, b + k) + kf_2(a, b + \theta_2 k).$$

Setning 7.4

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu $\mathcal{D}$ með miðju í (a, b) þannig að á þessari skífu eru báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Þá er fallið f diffranlegt í (a, b).

Setning 7.5

Gerum ráð fyrir að $f(x, y)$ sé fall sem er diffranlegt í punktinum (a, b). Þá er f samfellt í (a, b).

Keðjuregla 7.6

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$. Gerum ráð fyrir að
(i) $x(a, b) = p$ og $y(a, b) = q$;
(ii) fyrsta stigs hlutafleiður $x(s, t)$ og $y(s, t)$ eru skilgreindar í punktinum (a, b);
(iii) fallið f er diffranlegt í punktinum (p, q).
Þá eru fyrsta stigs hlutafleiður z með tilliti til breytanna s og t skilgreindar í punktinum (a, b) og um þær gildir að

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Skilgreining 7.7

Ritum $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Diffrið* af z er skilgreint sem

$$dz = df = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Diffrið er nálgun á

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Táknmál 7.8

Látum $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tákna vörpun. Ritum $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ þar sem hvert f_i er fall $\mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$. Fyrir punkt í $\mathbf{R}^n$ ritum við $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Síðan ritum við $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ þar sem $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ og

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Skilgreining 7.9

Notum táknmálið úr 7.8. Ef allar hlutafleiðurnar $\partial y_i/\partial x_j$ eru skilgreindar í punktinum $\mathbf{x}$ þá skilgreinum við *Jacobi-fylki* f í punktinum $\mathbf{x}$ sem $m \times n$ fylkið

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Skilgreining 7.10

Notum táknmálið úr 7.8 og 7.9. Látum $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vera fastan punkt í $\mathbf{R}^n$ og ritum $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Vörpunin $\mathbf{f}$ er sögð diffranleg í punktinum $\mathbf{a}$ ef

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Vörpunin f er 'nálægt' línulegu vörpuninni $D\mathbf{f}$ nálægt punktinum $\mathbf{a}$.

Línulega vörpunin $D\mathbf{f}$ kallast afleiða $\mathbf{f}$.

Setning 7.11

Látum $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $\mathbf{g} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ vera varpanir. Gerum ráð fyrir að vörpunin $\mathbf{f}$ sé diffranleg í punkti $\mathbf{x}$ og vörpunin $\mathbf{g}$ sé diffranleg í punktinum $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Þá er samskeytta vörpunin $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ diffranleg í $\mathbf{x}$ og

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$