

21. Flatarheildi. Áttanlegir fletir

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

16. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Verkefni 21.1

1. Flatarmál flata – sambærilegt við bogalengd ferla.
2. Heildi falls yfir flöt með tilliti til flatarmáls – sambærilegt við heildi falls eftir ferli með tilliti til bogalengdar.
3. Heildi vigursviðs yfir flöt – svipar til heildis vigursviðs eftir ferli.

Skilgreining 21.2

Látum $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vera reglulegan stikaflöt sem stíkar flöt \mathcal{S} .
Flatarmál \mathcal{S} er

$$A = \iint_D dS = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

Formúla 21.3

Látum $f(x, y)$ vera diffranlegt fall skilgreint á mengi D í \mathbb{R}^2 .
Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ er gefið með formúlunni

$$A = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Formúlur 21.4

Ritum dS fyrir flatarmálselement á fleti \mathcal{S} .

- ▶ Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er stikun á \mathcal{S} þá er

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

- ▶ Ef \mathcal{S} er graf $z = g(x, y)$ þá er

$$dS = \sqrt{1 + g_1(x, y)^2 + g_2(x, y)^2} dx dy.$$

Formúlur 21.4, frh

Ritum dS fyrir flatarmálselement á fleti \mathcal{S} .

- ▶ Gerum ráð fyrir að flöturinn \mathcal{S} í \mathbb{R}^3 hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy -planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x, y)$. Ef \mathbf{n} er þvervigur á flötinn og γ er hornið sem þvervigurinn \mathbf{n} myndar við jákvæða hluta z -ássins þá er

$$dS = \left| \frac{1}{\cos \gamma} \right| dx dy = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} dx dy.$$

Í þessu tilviki gildir einnig að ef \mathcal{S} er lýst sem hæðarfleti $G(x, y, z) = C$ þá er

$$dS = \left| \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} \right| dx dy.$$

Skilgreining 21.5

Látum $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vera reglulega stikun á fleti \mathcal{S} . Heildi falls $f(x, y, z)$ yfir flötinn \mathcal{S} með tilliti til flatarmáls er

$$\iint_{\mathcal{S}} f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \, du dv.$$