15. Þreföld heildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 23. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

15.1

Umræða 15.1
Heildi falls $f(x,y,z)$ yfir kassa $K=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ í $\mathbb{R}^3$ er skilgreint á sambærilegan hátt og tvöfalt heildi er skilgreint.

Á sama hátt og fyrir tvöföld heildi má svo skilgreina heildi fyrir almennari rúmskika í $\mathbb{R}^3$.

Heildi falls $f(x,y,z)$ yfir rúmskika R er táknað með

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV.$$

(dV stendur fyrir að heildað er með tilliti til rúmmáls.)

15.2

Setning 15.2
Látum $f(x,y,z)$ vera fall sem er heildanlegt yfir kassa $K=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ í $\mathbb{R}^3$. Þá er

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_c^d\int_u^v f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Breyta má röð heilda að vild, t.d. er

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV=\int_u^v\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

15.3

Setning 15.3
Látum $f(x,y,z)$ vera fall sem er heildanlegt yfir rúmskika R og gerum ráð fyrir að R hafi lýsingu á forminu

$$R=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x),\ u(x,y)\le z\le v(x,y)\}.$$

Þá er

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)}\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Breyturnar x,y,z geta svo skipt um hlutverk.

15.4

Setning 15.4 (Almenn breytuskiptaformúla fyrir þreföld heildi.)
Látum
$$(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$
vera gagntæka vörpun milli rúmskika R í xyz-rúmi og rúmskika S í uvw-rúmi. Gerum ráð fyrir að föllin $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ hafi öll samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður. Ef $f(x,y,z)$ er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\begin{aligned}&\iiint_R f(x,y,z)\,dV \\ &\qquad = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.\end{aligned}$$

15.5

Skilgreining 15.5
Látum (x,y,z) vera punkt í $\mathbb{R}^3$. *Sívalningshnit* (x,y,z) eru þrennd talna r, θ, z þannig að
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z.$$
Athugið að $[r,\theta]$ eru pólhnit punktsins (x,y).

15.6

Setning 15.6 (Breytuskipti yfir í sívalningshnit.)

Látum R vera rúmskika í $\mathbb{R}^3$ og látum $f(x,y,z)$ vera heildanlegt fall yfir R. Gerum ráð fyrir að R megi lýsa með eftirfarandi skorðum á sívalningshnit punktanna sem eru í R
$$\alpha \le \theta \le \beta,\ a(\theta) \le r \le b(\theta), u(r,\theta) \le z \le v(r,\theta),$$
þar sem $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Þá er
$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dz\,dr\,d\theta.$$

15.7