

Vika 1: Hvað er töluleg greining? Skekkjur og mat á þeim

Töluleg greining, STÆ405G, 8., 10. og 15. janúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

1.1

Námskeiðið

Yfirlit

Vika 1: Lagt af stað

Nr.	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
1.1	Hvað er töluleg greining?	1-16	1-5
1.2	Skekkjur		6-7
1.3	Nokkur atriði um samleitni runa	20-24	8-10
1.4	Fleytitalnakerfið	30-50	11-15
1.5	Vítt og breitt um skekkjumat		16-23
1.6	Ástandsgildi falla		24-31
1.7	Úrlausn annars stigs jöfnu		32
1.8	Ritháttur fyrir deildanleg föll		33
1.9	Nálgun með Taylor-margliðu	25-27	34-38
1.10	Áhrif gagnaskekkju		39-43
1.11	<i>O</i> - og <i>o</i> - ritháttur	20-24	44-48

1.2

1.1 Hvað er töluleg greining?

Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að finna nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.
- Aðferðirnar eru settar fram með reikniritum sem síðan eru forrituð og það þarf góðan skilning á eiginleikum lausnanna sem verið er að nálgast til þess að geta greint hvernig forritin munu virka.
- Greining á reikniritum er aðallega fólgin í skekkjumati og mati á þeim aðgerðafjölda sem þarf til þess að ná að nálgast lausn með fyrirfram gefinni nákvæmni, þ.e. hagkvæmni og nákvæmni reikniritsins.

1.3

1.1 Dæmi

Í hvaða hæð er eldflaug þegar eldsneytið klárast

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi gildi um eldflaug sem við höfum undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0,1v^2$.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$
- Massi eldsneytisins $m = 180 - 10t$.
- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$.

Úr öðru lögmáli Newtons fæst að $F = (Mv)'$. Kraftarnir sem verka á eldflaugina er T upp á við og loftmótstaðan og þyngdarkrafturinn niður á við. Þannig fæst

$$(Mv)' = F = T - Mg - d$$

Það er

$$M'v + Mv' = T - Mg - d.$$

1.4

1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \quad (1)$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma t gefin með $h(t) = \int_0^t v(s) ds$. Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s) ds$.

Verkefnið er því að finna v , og reikna svo heildið.

Diffurjafnan (1) er ólínuleg þannig að við getum ekki vænst þess finna lausn með þeim aðferðum sem við höfum þegar lært. Eins er ekki víst að við getum auðveldlega fundið stofnfall h fyrir v , ef við höfum v .

Hins vegar getum við leyst diffurjöfnuna tölulega með Runge-Kutta aðferð (Kaffi 7) og heildið reiknum við svo tölulega (Kaffi 6).

1.5

1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Við fáum *gagnaskekkjur* vegna þess að við þurfum að nota ónákvæm inntaksgildi.
- Gögn eru oft niðurstöður mælinga og þá fylgja þeim *mæliskekkjur*.
- Við nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum verða til *aðferðarskekkjur*. Þær verða til þegar reikniritin eru hönnuð og greining á reikniritum snýst fyrst og fremst um mat á aðferðarskekkjum.
- *Reikningsskekkjur* verða til í tölvum á öllum stigum, jafnvel þegar tölur eru lesnar inn í tugakerfi og þeim snúið yfir í tvíundarkerfi. Þær verða líka til vegna þess að tölur geta einungis unnið með endanlegt mengi af tölum og allar útkomur þarf að nálgast innan þess mengis. Þessar skekkjur nefnast oft *afrúningsskekkjur*.

1.6

1.2 Skekkja í nálgun á rauntölu r

Við stillum alltaf upp jöfnunum okkar þannig að

$$\text{rétt gildi} = \text{nálgunargildi} + \text{skekkja}.$$

Ef talan x er nálgun á tölunni r þá nefnist

$$e = r - x$$

skekkja í nálgun á r með x eða bara skekkja.

Algildi skekkju er tölugildið

$$|e| = |r - x|$$

Ef vitað er að $r \neq 0$, þá nefnist

$$\frac{|e|}{|r|} = \frac{|r - x|}{|r|}$$

hlutfallsleg skekkja í nálgun á r með x .

1.7

1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa x_0, x_1, x_2, \dots sem á að nálgast lausnina okkar.

Skilgreining

Rauntalnaruna (x_n) er sögð vera samleitin að markgildinu r ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \quad \text{ef } n \geq N.$$

Þetta er táknað með

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r \quad \text{og} \quad x_n \rightarrow r \text{ ef } n \rightarrow \infty.$$

Ef runan (x_n) er samleitin að markgildinu r þá segjum við einnig að hún *stefni á r* .

Hugsum okkur nú að (x_n) sé gefin runa sem stefnir á r og táknum skekkjuna með $e_n = r - x_n$.

1.8

1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in]0, 1[$ þannig að

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

ofurlínulega samleitin (e. superlinear convergence), ef

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0,$$

ferningssamleitin (e. quadratic convergence) ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lambda,$$

og *samleitin af stigi α* (e. convergence of order α), þar sem $\alpha > 1$, ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda.$$

1.9

1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið λ og α nákvæmlega).

Þannig segjum við að runan (x_n) sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ef til er $\lambda \in]0, 1[$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|, \quad n \geq N,$$

að minnsta kosti ferningssamleitin ef til er $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|^2, \quad n \geq N,$$

og *að minnsta kosti samleitin af stigi α* , þar sem $\alpha > 1$, ef til eru $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|^\alpha, \quad n \geq N.$$

1.10

1.4 Fleytitalnakerfið – Framsetning á tölum

Ef r er rauntala frábrugðin 0 og β er náttúrleg tala, 2 eða stærri, þá er til einhlýtt ákvörðuð framsetning á r af gerðinni

$$r = \pm(0.d_1d_2\dots d_kd_{k+1}\dots)_\beta \times \beta^e$$

þar sem e er heiltala og d_j eru heiltölur

- $1 \leq d_1 < \beta$,
- $0 \leq d_j < \beta$, $j = 2, 3, 4, \dots$

Tölvur reikna ýmist í *tvíundarkerfi* með $\beta = 2$ eða í *sextánundarkerfi* með $\beta = 16$, en við mannfólkið með okkar tíu fingur reiknum í *tugakerfi* með $\beta = 10$.

1.11

1.4 Mantissa

Formerkið og runan

$$\pm(0.d_1d_2\dots d_kd_{k+1}\dots)_\beta = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$$

nefnist *mantissa* tölunnar r .

Við skrifum

$$(0.d_1d_2\dots d_k)_\beta = \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{\beta^j}$$

ef $d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = 0$ og segjum þá að talan r hafi k -stafa mantissu.

1.12

1.4 Marktækir β -stafir

Ef rauntalan x er nálgun á r , þá segjum við að x sé nálgun á r með *að minnsta kosti t marktækum β -stöfum* ef

$$\frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

Ef við höfum að auki að

$$\beta^{-t-1} < \frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

þá segjum við að x sé nálgun á r með t marktækum β -stöfum.

Athugið að ef e er minnsta heila talan þannig að $|r| < \beta^e$, þá gefur seinni ójafnan matið

$$|r - x| = (0.0 \dots 0a_t a_{t+1} \dots)_\beta \times \beta^e,$$

þar sem núllin aftan við punkt eru t talsins.

1.13

1.4 Afrúningur talna

Ef r er sett fram á stöðluðu β -fleytitöluformi, þá nefnist talan

$$x = (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

afskurður tölunnar r við k -ta aukastaf r , en talan

$$x = \begin{cases} \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e, & d_{k+1} < \beta/2, \\ \pm((0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta + \beta^{-k}) \times \beta^e, & d_{k+1} \geq \beta/2. \end{cases}$$

nefnist *afrúningur* tölunnar r við k -ta aukastaf.

Við köllum þessar aðgerðir *afskurð* (e. chopping) og *afrúning* (e. rounding).

1.14

1.4 Fleytitölukerfi

Fleytitölukerfi er endanlegt hlutmengi í \mathbb{R} , sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem d_j eru heiltölur eins og áður var lýst, k er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.

Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.

Eftir hverja aðgerð í tölvunni þarf að nálgast útkomuna með *afskurði* eða *afrúningu*.

Ef við förum ekki varlega þá getur þetta magnað upp skekkju.

IEEE staðlar

- Single: $\beta = 2, k = 24, m = -125$ og $M = 128$,
- Double: $\beta = 2, k = 53, m = -1021$ og $M = 1024$.

Sjá nánar bls. 37 í kennslubók.

1.15

1.5 Vítt og breitt um skekkjumark

Fyrirframmat á skekkju

Metið er áður en reikningar hefjast hversu umfangsmikla reikninga þarf að framkvæma til þess að nálgunin náist innan fyrirfram gefinna skekkjumarka.

Ef lausnin er fundin með ítrekunaraðferð er yfirleitt metið hversu margar ítrekarnir þarf til þess að nálgun verði innan skekkjumarka.

Eftirámat á skekkju

Um leið og reikningar eru framkvæmdir er lagt mat á skekkju og reikningum er hætt þegar matið segir að nálgun sé innan skekkjumarka.

1.16

1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (ofurlínuleg samleitni)

Hugsum okkur að við séum að nálga töluna r með gildum rununnar x_n , að við höfum reiknað út x_0, \dots, x_n og viljum fá mat á skekkjunni $e_n = r - x_n$ í n -ta skrefi.

Við reiknum næst út x_{n+1} og skrifum $e_{n+1} = \lambda_n e_n$. Þá er

$$x_{n+1} - x_n = (r - x_n) - (r - x_{n+1}) = e_n - e_{n+1} = (1 - \lambda_n)e_n$$

og við fáum

$$e_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \lambda_n}.$$

Ef við vitum að runan er *ofurlínulega samleitni*, þá stefnir λ_n á 0 og þar með er

$$e_n \approx x_{n+1} - x_n.$$

Við hættum því útreikningi þegar $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ þar sem ε er fyrirfram gefin tala, sem lýsir þeirri nákvæmni sem við viljum ná.

1.17

1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan x_n sé *að minnsta kosti línulega samleitni*; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0, 1)$, þá á λ_n að stefna á fasta λ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1 - \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \approx \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út x_0, \dots, x_n og viljum fá mat á e_n . Við reiknum þá út x_{n+1} og x_{n+2} og síðan hlutfallið $\kappa_n = (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n)$ sem við notum sem mat á λ_n . Eftirámatið á skekkjunni í ítrekunarskrefi númer n verður síðan

$$e_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \kappa_n}.$$

Ef stærðin í hægri hliðinni er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk ε , þá stöðvum við útreikningana.

1.18

1.5 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitni:

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $	$\frac{ x_{n+1} - x_n }{ x_n - x_{n-1} ^2}$
0	3.000000000000000		
1	2.73251570951922	0.10052257507862	1.404
2	2.63199313444060	0.01373904283351	1.359
3	2.61825409160709	0.00024006192208	1.273
4	2.61801402968501	0.00000007236005	1.256
5	2.61801395732496	0.000000000000001	1.272

Við metum $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$ og þar af leiðandi $e_n/e_{n-1}^2 \approx |x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$.

Við sjáum að hlutfallið $|x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$ helst stöðugt og því ályktum við að aðferðin sé ferningssamleitni.

1.19

1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Skoðum lítið dæmi um útreikninga á samleitnistigi.

Dæmi

Eftirfarandi runa stefnir á $\sqrt{3}$.

n	x_n
0	2.0000000000000000
1	1.6666666666666667
2	1.7272727272727272
3	1.732142857142857
4	1.732050680431722
5	1.732050807565499

Er samleitnistigið 1.618?

Ef ekki, hvert er þá samleitnistigið?

1.20

1.5 Útreikningur á samleitnistigi *Lausn:*

Ef miðað er við að runan (x_n) sé ofurlínulega samleitn, þá er eðlilegt að taka $e_n \approx x_{n+1} - x_n$ sem mat á skekkjunni $e_n = \sqrt{3} - x_n$ í n -ta ítrekunarskrefinu.

Við byrjum á því að kanna hvernig tilgátan um að samleitnistigið kemur út á þessum tölum með $e_n = x_{n+1} - x_n$:

n	x_n	$ e_n $	$ e_n / e_{n-1} ^{1.618}$
0	2.0000000000000000	$3.3333 \cdot 10^{-1}$	
1	1.6666666666666667	$6.0606 \cdot 10^{-2}$	$3.5851 \cdot 10^{-1}$
2	1.7272727272727272	$4.8701 \cdot 10^{-3}$	$4.5439 \cdot 10^{-1}$
3	1.732142857142857	$9.2177 \cdot 10^{-5}$	$5.0837 \cdot 10^{-1}$
4	1.732050680431722	$1.2713 \cdot 10^{-7}$	$4.3004 \cdot 10^{-1}$
5	1.732050807565499		

Tveimur síðustu tölunum í aftasta dálki ber ekki nógu vel saman, svo það er vafasamt hvort talan 1.618 er rétta samleitnistigið.

1.21

1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Ef (x_n) er samleitn af stigi α , þá gildir $\lim_{n \rightarrow \infty} |e_{n+1}|/|e_n|^\alpha = \lambda$, þar sem $\lambda > 0$. Þar með höfum við nálgunarjöfnu ef n er nógu stórt,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \approx \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^\alpha} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad \frac{|e_{n+1}|}{|e_{n+2}|} \approx \left| \frac{e_n}{e_{n+1}} \right|^\alpha.$$

Ef við lítum á þetta sem jöfnu og leysum út α , þá fáum við

$$\alpha_n = \frac{\ln(|e_{n+1}|/|e_{n+2}|)}{\ln(|e_n|/|e_{n+1}|)}.$$

1.22

1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Við getum reiknað út þrjú gildi á α úr þeim gögnum sem við höfum, $\alpha_0 = 1.479$, $\alpha_1 = 1.573$ og $\alpha_2 = 1.660$.

Ef við endurtökum útreikninga okkar hér að framan með 1.660 í stað 1.618, þá fæst

n	p_n	$ e_n $	$ e_n / e_{n-1} ^{1.660}$
0	2.0000000000000000	$3.3333 \cdot 10^{-1}$	
1	1.6666666666666667	$6.0606 \cdot 10^{-2}$	$3.7551 \cdot 10^{-1}$
2	1.7272727272727272	$4.8701 \cdot 10^{-3}$	$5.1143 \cdot 10^{-1}$
3	1.732142857142857	$9.2177 \cdot 10^{-5}$	$6.3639 \cdot 10^{-1}$
4	1.732050680431722	$1.2713 \cdot 10^{-7}$	$6.3639 \cdot 10^{-1}$
5	1.732050807565499		

Tölunum neðst í aftasta dálki ber saman með fimm réttum stöfum og því ályktum við að 1.660 sé rétta samleitnistigið.

1.23

1.6 Ástandsgildi falla

Hugsum okkur nú að $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall sem skilgreint er á hlutmengi $I \subset \mathbb{R}$ og tekur gildi í \mathbb{R} og að $r \in I$.

Gerum ráð fyrir að x sé nálgun á r og að við viljum nota $f(x)$ sem nálgun á $f(r)$. Skekkjan í nálguninni á $f(r)$ með $f(x)$ er þá

$$f(r) - f(x) = f(x + e) - f(x) \approx f'(x)e.$$

Ef við vitum að $f(r) \neq 0$, þá er hlutfallsleg skekkja í nálgun á $f(r)$ með $f(x)$

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \frac{|f'(x)e|}{|f(r)|} \approx \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|} \cdot \frac{|e|}{|r|}.$$

1.24

1.6 Ástandsgildi

Við skilgreinum *ástandsgildi fallsins f í punktinum x* sem

$$\text{astand}_x(f) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

Ef $\text{astand}_x(f) \leq 1$ og x er nálgun á r með m marktækum stöfum, þá segir nálgunarjafnan

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \text{astand}_x(f) \cdot \frac{|e|}{|r|}$$

okkur að við getum búist við því að $f(x)$ sé nálgun á $f(r)$ með jafn mörgum marktækum stöfum.

Athugasemd

Niðurstöðuna að ofan má orða svona, hlutfallsleg skekkja á fallgildinu $f(x)$ er ástandsgildið sinnum hlutfallsleg skekkja x .

1.25

1.6 Ástand er gott eða slæmt

Skilgreining

Ef $\text{astand}_x(f) \leq 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *gott* eða að verkefnið sé *reikningslega stöðugt* eða einfaldlega að *ástand fallsins f sé gott í punktinum x* .

Skilgreining

Ef hins vegar $\text{astand}_x(f) > 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *slæmt* eða að það sé *reikningslega óstöðugt*.

Athugasemd

Ef ástandið er gott þá getum við búist við því að það tapist í mesta lagi einn marktækur stafur í hlutfallslegri skekkju við útreikning á $f(x)$. Ef hins vegar $\text{astand}_x(f) \approx 10^q$ og x er nálgun á r með m marktækum stöfum, þá er ekki ástæða til þess að ætla að $f(x)$ sé betri nálgun á $f(r)$ en að við höfum $m - q$ marktæka stafi.

1.26

1.6 Ástandsgildi falla af mörgum breytistærðum

Ef $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ er deildanlegt fall af mörgum breytistærðum sem skilgreint er á hlutmengi $D \subset \mathbb{R}^n$ og tekur gildi í \mathbb{R} , þá skilgreinum við ástandsgildi f í punktinum x með tilliti til allra breytistærðanna x_i með formúlunni

$$\text{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) = \frac{|x_i f'_{x_i}(\mathbf{x})|}{|f(\mathbf{x})|}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

þar sem ritháttur okkar fyrir hlutafleiður er

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f.$$

Ef $\text{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) \leq 10$ fyrir öll i , þá segjum við að ástand þess verkefnis að ákvarða fallgildið $f(\mathbf{x})$ sé gott, en að það sé slæmt ef $\text{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) > 10$ fyrir eitthvert i .

1.27

1.6 Ástandsgildi kvaðratrótar

Lítum á kvaðratrótarfallið á jákvæða raunásnum

$$\text{astand}_x(\sqrt{x}) = \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}, \quad x > 0,$$

svo ástand verkefnisins að ákvarða kvaðratrót er gott á öllum ásnum.

1.28

1.6 Ástandsgildi lograns

Lítum næst á náttúrlega logrann á sama mengi

$$\text{astand}_x(\ln x) = \frac{x \cdot 1/x}{|\ln x|} = \frac{1}{|\ln x|}, \quad x > 0.$$

Ástandsgildið er til fyrir öll $x \neq 1$. Ástand verkefnisins að reikna út $\ln x$ er gott ef $1/|\ln x| \leq 10$, sem jafngildir því að $0 < x \leq e^{-\frac{1}{10}}$ eða $x \geq e^{\frac{1}{10}}$, og það er slæmt ef $e^{-\frac{1}{10}} < x < e^{\frac{1}{10}}$ og fer versnandi þegar við nálgumst 1.

1.29

1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Við getum litið á grunnaðgerðirnar fjórar, samlagningu $(x, y) \mapsto x + y$, frádrátt $(x, y) \mapsto x - y$, margföldun $(x, y) \mapsto xy$ og deilingu $(x, y) \mapsto x/y$ sem föll af tveimur breytistærðum og reiknað út ástandsgildi þeirra,

$$\begin{aligned}\text{astand}_x(x \pm y) &= \frac{|x \cdot 1|}{|x \pm y|} = \frac{1}{|1 \pm y/x|}, \\ \text{astand}_y(x \pm y) &= \frac{|y \cdot 1|}{|x \pm y|} = \frac{1}{|1 \pm x/y|},\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand samlagningar er gott nema þegar $x \approx -y$ og ástand frádráttar er gott nema þegar $x \approx y$.

1.30

1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Eins höfum við

$$\begin{aligned}\text{astand}_x(xy) &= \frac{|x \cdot y|}{|xy|} = 1 \\ \text{astand}_x(xy) &= \frac{|y \cdot x|}{|xy|} = 1,\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand margföldunar er alltaf gott, og

$$\begin{aligned}\text{astand}_x(x/y) &= \frac{|x \cdot 1/y|}{|x/y|} = 1 \\ \text{astand}_y(x/y) &= \frac{|y \cdot (-x/y^2)|}{|x/y|} = 1,\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand deilingar er einnig alltaf gott.

Hlutfallsleg skekkja sem verður til þegar frádráttur er framkvæmdur á tveimr álíka stórum stærðum er oft nefnd *styttingarskekkja*. Þegar við hönnum reiknirit og forritum þau verðum við að forðast styttingarskekkjur.

1.31

1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef b^2 er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x - x_1)(x - x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar x_1 og x_2 uppfylla $x_1x_2 = c/a$.

Ef $b > 0$, þá reiknum við x_1 fyrst út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og síðan} \quad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef aftur á móti $b < 0$, þá reiknum við fyrst x_1 út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og síðan} \quad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef $b^2 \approx 4ac$ þá lendum við í styttingarskekkjum, en við neyðumst til þess að lifa með þeim.

1.32

1.8 Ritháttur fyrir deildanleg föll

Látum nú $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ vera fall á bili I sem tekur gildi í tvinntölunum. Ef f er deildanlegt í sérhverjum punkti í I , þá táknum við afleiðuna með f' . Ef f' er deildanlegt í sérhverjum punkti í I , þá táknum við aðra afleiðu f með f'' , og svo framvegis.

Við skilgreinum með þrepun $f^{(k)}$ fyrir $k = 0, 1, 2, \dots$ þannig að $f^{(0)} = f$ og ef $f^{(k-1)}$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í I , þá er $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Við látum $C^k(I)$ tákna línulega rúmið sem samanstendur af öllum föllum $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ þannig að $f', \dots, f^{(k)}$ eru til í sérhverjum punkti í I og $f^{(k)}$ er samfelld fall á I .

1.33

1.9 Nálgun með Taylor-margliðu

Ef $a \in I$, m er jákvæð heiltala og $f \in C^{m-1}$ og $f^{(m)}(x)$ er til í sérhverjum punkti $x \in I$, þá nefnist margliðan

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

Taylor-margliða fallsins f í punktinum a af röð m .

Athugið að stig margliðunnar p er $\leq m$.

1.34

1.9 Skekkja í nálgun með Taylor-margliðu

Setning Taylors

Látum $I \subseteq \mathbb{R}$ vera bil, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ vera fall, $m \geq 0$ vera heiltölu og gerum ráð fyrir að $f \in C^m(I)$ og að $f^{(m+1)}(x)$ sé til í sérhverjum innri punkti bilsins I . Þá er til punktur ξ á milli a og x þannig að

$$f(x) - T_m f(x; a) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}.$$

Hægri hliðin er oft táknuð $R_m(x)$.

Viðbót

Ef $f^{(m+1)}$ er samfelld á lokaða bilinu með endapunkta a og x , þá er

$$\begin{aligned} f(x) - T_m f(x; a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt \\ &= (x-a)^{m+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^m}{m!} f^{(m+1)}(a+s(x-a)) ds \\ &= (x-a)^{m+1} g_m(x) \end{aligned}$$

1.35

1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef x er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni. Hún gefur

$$\sin 0.1 = 0.09933417$$

Af því leiðir

$$0.1 - \sin 0.1 = 1.66583 \cdot 10^{-4}$$

Við höfum tapað tveimur marktækum stöfum í nákvæmni.

Ef við notum Taylor-nálgunina fyrir $\sin(x)$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

og tökum fyrstu þrjá liðina, þ.e. skoðum 6. stigs Taylor-margliðu fallsins.

$x - \sin(x)$ er þá u.þ.b.

$$x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}.$$

1.36

1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$, framh.

Fallgildið er þá

$$\frac{0.1^3}{3!} - \frac{0.1^5}{5!} = 1.6658334 \cdot 10^{-10}.$$

Skekkjan er gefin með

$$|R_6(0.1)| = \left| \frac{\sin^{(7)}(\xi)}{7!} 0.1^7 \right| = \left| \frac{-\cos(\xi)}{7!} 0.1^7 \right| \leq \frac{1}{7!} 0.1^7 < 0.2 \cdot 10^{-10}.$$

Sem þýðir að við höfum enn 8 marktæka stafi.

Ritháttur

$\sin^{(7)}$ hér að ofan táknar 7. afleiðu \sin , sem er $-\cos$.

1.37

1.9 Sýnidæmi: Nálgun á $x - \sin x$

Ef við tökum $x = 0.01$ er þetta enn greinilegra. Reiknivélin gefur

$$\sin(0.01) = 0.0099998333$$

Þannig að

$$0.01 - \sin 0.01 = 0.1667 \cdot 10^{-7}$$

og við erum bara með 4 marktæka stafi.

Hér dugir að taka aðeins þriðja stigs liðinn í Taylor-formúlunni

$$0.01 - \sin(0.01) = \frac{0.01^3}{3!} = 0.16666667 \cdot 10^{-7},$$

því skekkjan er

$$R_4(0.01) \leq \frac{0.01^5}{5!} < 10^{-12}$$

1.38

1.10 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur að við séum að finna nálgun á núllstöð falls $x \mapsto f(x, \alpha)$. Við viljum finna nálgun x á lausninni $r = r(\alpha)$ sem uppfyllir

$$f(r, \alpha) = 0$$

og við lítum á α sem stika.

Gerum ráð fyrir að α_0 sé nálgun á α og að við þekkjum nálgun á $r(\alpha_0)$ sem er lausn á jöfnunni $f(x, \alpha_0) = 0$.

Við viljum athuga hversu mikil áhrif þessi nálgun á α hefur á lausnina okkar, þ.e. við þurfum að meta skekkjuna $r(\alpha) - r(\alpha_0)$.

1.39

1.10 Áhrif gagnaskekkju

Ef við gefum okkur að f sé samfelld deildanlegt í grennd um punktinn (x_0, α_0) , þar sem $x_0 = r(\alpha_0)$ og $\partial_x f(x_0, \alpha_0) \neq 0$, þá segir setningin um fólgin föll að til sé grennd I um punktinn α_0 í \mathbb{R} og samfelld deildanlegt fall $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, þannig að $r(\alpha_0) = x_0$ og $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ fyrir öll $\alpha \in I$.

Með öðrum orðum má segja að við getum alltaf leyst jöfnuna $f(x, \alpha) = 0$ með tilliti til x þannig að út komi lausn $x = r(\alpha)$ sem er samfelld diffranlegt fall af α .

1.40

1.10 Áhrif gagnaskekkju

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ leiðir að

$$f'_x(r(\alpha), \alpha) \cdot r'(\alpha) + f'_\alpha(r(\alpha), \alpha) = 0.$$

Þetta gefur

$$r'(\alpha) = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha), \alpha)}{f'_x(r(\alpha), \alpha)}.$$

Nú látum við e tákna skekkjuna í nálguninni á α með α_0 , $e = \alpha - \alpha_0$. Þá fáum við skekkjumatið

$$r(\alpha) - r(\alpha_0) \approx r'(\alpha_0) \cdot e = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha_0), \alpha_0)}{f'_x(r(\alpha_0), \alpha_0)} \cdot e$$

og jafnframt mat á hlutfallslegri skekkju

$$\frac{|r(\alpha) - r(\alpha_0)|}{|r(\alpha)|} \approx \text{astand}_\alpha(r(\alpha)) \cdot \frac{|e|}{|\alpha|}.$$

þar sem mat okkar á ástandstölunni er

$$\text{astand}_\alpha(r(\alpha)) \approx \frac{|\alpha_0 f'_\alpha(r(\alpha_0), \alpha_0)|}{|r(\alpha_0) f'_x(r(\alpha_0), \alpha_0)|}.$$

1.41

1.10 Sýnidæmi

Við skulum nú líta á það verkefni að finna nálgun á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$, þar sem við gerum ráð fyrir því að þurfa að nálga π með 3.14.

Okkur eru gefnar niðurstöður úr nálguninni með einhverri aðferð. Við setjum $f(x, \alpha) = 1 - e^{-x} - \sin(\alpha x)$ og fáum

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $	$\frac{ x_{n+1} - x_n }{ x_n - x_{n-1} ^2}$
0			0.8
1	0.81276894538752	0.00014017936338	0.8597
2	0.81262876602414	0.00000001621651	0.8253
3	0.81262874980763	0.00000000000000	0.8444

1.42

1.10 Sýnidæmi

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.

Hlutaafleiðurnar eru $f'_x(x, \alpha) = e^{-x} - \alpha \cos(\alpha x)$ og $f'_\alpha(x, \alpha) = -x \cos(\alpha x)$.

Við stingum tölunum okkar inn í matið og notum punktinn $(x_3, \alpha_0) = (0.8126, 3.14)$. Það gefur

$$r(\pi) - r(3.14) \approx r'(3.14)e \approx \frac{0.8126 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)}{|e^{-0.8126} - 3.14 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)|} 0.0016 \approx 0.4 \cdot 10^{-3}$$

Þetta mat segir okkur að við eigum að gera ráð fyrir að áhrif gagnaskekkjunnar séu þau að við fáum lausn með þremur réttum stöfum, 0.813. Nálgun okkar á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$ er 0.813.

1.43

1.11 *O*- og *o*- ritháttur

Látum f og g vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum c vera tölu á I eða annan hvorn endapunkt I .

Við segjum að $f(t)$ sé *stórt* O af $g(t)$ og skrifum

$$f(t) = O(g(t)), \quad t \rightarrow c,$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|f(t)| \leq C|g(t)|$$

gildi fyrir öll t í einhverri grennd um c .

Athugið að grennd um $c = +\infty$ er bil af gerðinni $]\alpha, +\infty[$ og grennd um $c = -\infty$ er bil af gerðinni $]-\infty, \alpha[$.

Við skrifum

$$f(t) = o(g(t)), \quad t \rightarrow c$$

og segjum að $f(t)$ sé *óvera* af $g(t)$ þegar t stefnir á c ef til er fall h á I þ.a. $h(t) \rightarrow 0$ ef $t \rightarrow c$ og ójafnan

$$|f(t)| \leq |h(t)||g(t)|,$$

gildi fyrir öll t í einhverri grennd um c .

1.44

1.11 *O*- og *o*- ritháttur og skekkja í Taylor-nálgnum

Oft er *O*-ritháttur notaður þegar fjallað er um skekkjur í Taylor-nálgnum,

$$f(x) - f(c) - f'(x-c) - \dots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = O((x-c)^{n+1}), \quad x \rightarrow c$$

1.45

1.11 Nokkur sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

Dæmi

Við vitum að $t^\alpha e^{-t} \rightarrow 0$ ef $t \rightarrow \infty$. Þannig að

$$h(t) := e^{-t} t^\alpha = \frac{e^{-t}}{t^{-\alpha}},$$

stefnir á 0 þegar t stefnir á ∞ . Það er

$$e^{-x} = o(x^{-\alpha}), \quad x \rightarrow \infty \quad \text{fyrir öll } \alpha > 0.$$

Dæmi

Setning Taylors gefur okkur:

$$x - \sin x = O(x^3), \quad x \rightarrow 0$$
$$x - \frac{x^3}{3!} - \sin x = O(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

1.46

1.11 O - og o - ritháttur fyrir runur

Látum nú (a_n) og (b_n) vera tvær talnarunur. Við segjum að a_n sé *stórt* O af b_n og skrifum

$$a_n = O(b_n),$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \leq C|b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Við segjum að a_n sé *óvera* af b_n og skrifum

$$a_n = o(b_n),$$

ef til er runa $\varepsilon_n \searrow 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \leq \varepsilon_n |b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

1.47

1.11 Tvö sýnidæmi

- Út frá Taylor-röðinni fyrir $\cos x$ fáum við að

$$\cos(1/n) - 1 + 1/(2n^2) = O(1/n^4)$$

- Út frá

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

sjáum við að

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

1.48

Kafli 1: Fræðilegar spurningar

1. Hverjar eru helstu tegundir af skekkjum sem þarf að taka tillit til í tölulegum útreikningum?
2. Hvernig eru *skekkja* og *hlutfallsleg skekkja* í nálgun á rauntölu skilgreindar?
3. Hver er skilgreiningin á því að *rauntalnaruna* (x_n) er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* r ?
4. Ef (x_n) er gefin runa sem stefnir á r og skekkjan er $e_n = r - x_n$, hvað þýðir þá að runan sé að minnsta kosti línulega samleitin, að minnsta kosti ferningssamleitin og að minnsta kosti samleitin af stigi α ?
5. Eftir hvaða reglum eru tölur afrúnaðar í tugakerfi?
6. Hvernig er fyrirframat á skekkju framkvæmt?
7. Útskýrið hvernig er eftirámat á skekkju framkvæmt við nálgun á rauntölu r er aðferðin er ofurlínulega samleitin?
8. Útskýrið hvernig er eftirámat á skekkju framkvæmt við nálgun á rauntölu r ef aðferðin er að minnsta kosti línulega samleitin.

1.49

Kafli 1: Fræðilegar spurningar

9. Útskýrið hvernig samleitnistig runu er metið.
10. Hvernig eru ástandsgildi falla af einni og mörgum breytistærðum skilgreint og hvernig eru þau notuð?
11. Útskýrið hvernig forðast á styttingarskekkjur þegar núllstöðvar annars stigs margliðu $ax^2 + bx + c$ eru reiknaðar
12. Hvernig er setning Taylors og hvernig er skekkjan í Taylor-nálgun?
13. Útskýrið hvernig hægt er að meta hlutfallslega skekkju í núllstöð $r(\alpha)$ fallsins $x \mapsto f(x, \alpha)$ ef gefið er að það er skekkja í gildinu sem notað er fyrir α .
14. Hvað þýðir að $f(t) = O(g(t))$ ef $t \rightarrow c$ þar sem f og g eru föll sem skilgreind eru á bili sem inniheldur c eða á hálfás $x > a$ í tilfellinu þegar $c = +\infty$?
15. Hvað þýðir að $f(t) = o(g(t))$ ef $t \rightarrow c$ þar sem f og g eru föll sem skilgreind eru á bili sem inniheldur c eða á hálfás $x > a$ í tilfellinu þegar $c = +\infty$?

1.50

Kafli 1: Fræðilegar spurningar

16. Hvað þýðir að $a_n = O(b_n)$ ef $n \rightarrow \infty$ þegar (a_n) og (b_n) eru tvær talnarunur?
17. Hvað þýðir að $a_n = o(b_n)$ ef $n \rightarrow \infty$ þegar (a_n) og (b_n) eru tvær talnarunur?

1.51