13. Meira um tvöföld heildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 16. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

13.1

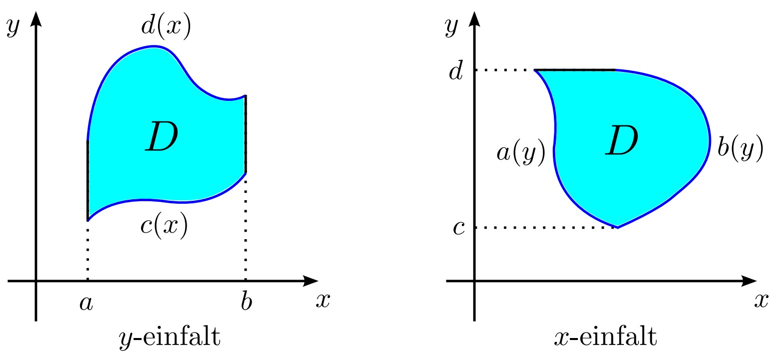
x-einföld og y-einföld svæði

Skilgreining 13.1
Svæði D í planinu er sagt vera y-*einfalt* ef hægt er að finna tölur a og b og föll $c(x)$ og $d(x)$ þannig að

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}.$$

Svæði D í planinu er sagt vera x-*einfalt* ef hægt er að finna tölur c og d og föll $a(y)$ og $b(y)$ þannig að

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d, a(y) \le x \le b(y)\}.$$



13.2

x-einföld og y-einföld svæði

Regla 13.2
Lokað og takmarkað svæði D í planinu er y-einfalt ef og aðeins ef sérhver lína af gerðinni $x = x_0$ sker D í línustriki.

Lokað og takmarkað svæði D er x-einfalt ef og aðeins ef sérhver lína af gerðinni $y = y_0$ sker svæðið í línustriki.

13.3

Heildi yfir x-einföld og y-einföld svæði

Setning 13.3
Látum $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}$ vera y-einfalt svæði og $f(x, y)$ fall sem er heildanlegt yfir D. Þá er

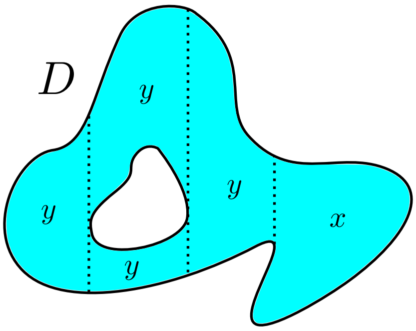
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Látum $D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, a(y) \le x \le b(y)\}$ vera x-einfalt svæði og $f(x,y)$ fall sem er heildanlegt yfir D. Þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

13.4

Heildi yfir x-einföld og y-einföld svæði



Hér er svæðinu D skipt í endanlega mörg x-einföld og y-einföld svæði sem skarast eingöngu í punktum á jaðrinum.

13.5

Óeiginleg heildi

Umræða 13.4
Látum $f(x,y) \ge 0$ vera jákvætt fall sem er skilgreint á svæði D í sléttunni. Ef

1. D er ótakmarkað svæði eða
2. $f(x,y)$ er ótakmarkað á D

má í sumum tilfellum skilgreina tvöfalda heildið af f yfir D.

Það er gert með því að finna fyrst runu af stækkandi lokuðum og takmörkuðum mengjum $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots \subseteq D$ sem 'stefnir á' D. Ef

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dA$$

er vel skilgreint fyrir öll n og hefur markgildi þegar $n \to \infty$ (fyrir allar ólíkar runur $(D_n)_{n\ge 1}$) þá skilgreinum við *óeiginlega heildið*

$$\iint_D f(x,y)\,dA := \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dA.$$

13.6

Skilgreining 13.5
Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir svæði D í $\mathbb{R}^2$. *Meðalgildi* fallsins f á D er skilgreint sem talan

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{flatarmál } D} \iint_D f(x,y)\,dA.$$

13.7

Skilgreining 13.6
Svæði D í $\mathbb{R}^2$ er sagt vera *samanhangandi* (e. connected) ef um sérhverja tvo punkta P_1 og P_2 í D gildir að til er ferill sem liggur í D, byrjar í P_1 og endar í P_2. (Hugtakið sem hér er skilgreint væri venjulega kallað *ferilsamanhangandi*.)

13.8

Skilgreining 13.7
(Meðalgildissetning fyrir tvöföld heildi) Gerum ráð fyrir að f sé samfellt fall sem er skilgreint á lokuðu, takmörkuð og samanhangandi svæði D í $\mathbb{R}^2$. Þá er til punktur (x_0, y_0) í D þannig að

$$\frac{1}{\text{flatarmál } D} \iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0).$$

13.9