27. Hagnýtingar í eðlisfræði

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 13. apríl 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

27.1

Vökvaflæði 27.1
Skoðum vökvaflæði í rúmi. Hugsum okkur að vökvaflæðið sé líka háð tíma. Látum $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ tákna hraðavigur agnar sem er í punktinum (x, y, z) á tíma t. Látum $\delta(x, y, z, t)$ tákna efnisþéttleika (massi per rúmmálseiningu) í punktum (x, y, z) á tíma t. Þá gildir að

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\delta \mathbf{v}) = 0.$$

(Þessi jafna kallast samfelldnijafnan um vökvaflæðið.)

27.2

Vökvaflæði 27.2
Til viðbótar við $\mathbf{v}$ og δ þá skilgreinum við $p(x, y, z, t)$ sem þrýsting og $\mathbf{F}$ sem utanaðkomandi kraft, gefinn sem kraftur per massaeiningu. Þá gildir að

$$\delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \delta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \delta \mathbf{F}.$$

(Þessi jafna er kölluð hreyfijafna flæðisins.)

27.3

Rafsvið 27.3 - Lögmál Coulombs
Látum punkthleðslu q vera í punktinum $\mathbf{s} = \xi\,\mathbf{i} + \eta\,\mathbf{j} + \zeta\,\mathbf{k}$. Í punktum $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ er rafsviðið vegna þessarar hleðslu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

þar sem ε_0 er $r$afsvörunarstuðull tómarúms.

27.4

Rafsvið 27.4 - Lögmál Gauss (fyrsta jafna Maxwells)
Látum $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ vera hleðsludreifingu og $\mathbf{E}$ rafsviðið vegna hennar. Þá gildir að

$$\boxed{\mathbf{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.}$$

Rafsvið 27.5
Látum $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ vera hleðsludreifingu á takmörkuðu svæði R og $\mathbf{E}$ rafsviðið vegna hennar. Ef við setjum

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_R \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} dV$$

þá er $\mathbf{E} = \nabla\varphi$ og þar með er

$$\boxed{\mathbf{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}.}$$

27.5

Segulsvið 27.6 - Lögmál Biot-Savart
Látum straum I fara eftir ferli $\mathcal{F}$. Táknum segulsviðið með $\mathbf{H}$ og látum $\mathbf{s} = \xi\,\mathbf{i} + \eta\,\mathbf{j} + \zeta\,\mathbf{k}$ vera punkt á ferlinum $\mathcal{F}$. Þá gefur örbútur $d\mathbf{s}$ úr $\mathcal{F}$ af sér segulsvið

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

þar sem μ_0 er *s*egulsvörunarstuðull tómarúms. Af þessu sést að

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

og sýna má að ef $\mathbf{r} \notin \mathcal{F}$ þá er

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

27.6

Segulsvið 27.7 - Lögmál Ampére
Hugsum okkur að straumur I fari upp eftir z-ás. Táknum með $\mathbf{H}$ segulsviðið og $H = |\mathbf{H}|$. Í punkti $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ í fjarlægð a frá z-ás er $H = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ og ef $\mathcal{C}$ er lokaður einfaldur ferill sem fer rangsælis einu sinni umhverfis z-ásinn þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I.$$

Hugsum okkur að $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ sé straumþéttleiki í punkti $\mathbf{r}$ (straumur á flatareiningu). Þá er

$$\boxed{\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J}.}$$

Einnig gildir að ef við setjum

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_R \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} dV,$$

þá er $\mathbf{H} = \mathbf{curl}\,\mathbf{A}$ og því er

$$\boxed{\mathbf{div}\,\mathbf{H} = 0.}$$

27.7

Samantekt

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathbf{div}\,\mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} &= \mathbf{0} & \mathbf{curl}\,\mathbf{H} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

Jöfnur Maxwells

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathbf{div}\,\mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \mathbf{curl}\,\mathbf{H} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

27.8