

# 15. Þreföld heildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

23. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is  
Verkfræði- og náttúruvísindasvið  
Háskóli Íslands

### Umræða 15.1

Heildi falls  $f(x, y, z)$  yfir kassa  $K = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  í  $\mathbb{R}^3$  er skilgreint á sambærilegan hátt og tvöfalt heildi er skilgreint.

Á sama hátt og fyrir tvöföld heildi má svo skilgreina heildi fyrir almennari rúmskika í  $\mathbb{R}^3$ .

Heildi falls  $f(x, y, z)$  yfir rúmskika  $R$  er táknað með

$$\iiint_R f(x, y, z) dV.$$

( $dV$  stendur fyrir að heildað er með tilliti til rúmmáls.)

## Setning 15.2

Látum  $f(x, y, z)$  vera fall sem er heildanlegt yfir kassa  $K = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  í  $\mathbb{R}^3$ . Þá er

$$\iiint_K f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x, y, z) dz dy dx.$$

Breyta má röð heilda að vild, t.d. er

$$\iiint_K f(x, y, z) dV = \int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz.$$

### Setning 15.3

Látum  $f(x, y, z)$  vera fall sem er heildanlegt yfir rúmskika  $R$  og gerum ráð fyrir að  $R$  hafi lýsingu á forminu

$$R = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}.$$

Þá er

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Breyturnar  $x, y, z$  geta svo skipt um hlutverk.

### Setning 15.4 (Almenn breytuskiptaformúla fyrir þreföld heildi.)

Látum

$$(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

vera gagntæka vörpun milli rúmskika  $R$  í  $xyz$ -rúmi og rúmskika  $S$  í  $uvw$ -rúmi. Gerum ráð fyrir að föllin

$x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  hafi öll samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður. Ef  $f(x, y, z)$  er fall sem er heildanlegt yfir  $R$  þá er

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV \\ = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

### Skilgreining 15.5

Látum  $(x, y, z)$  vera punkt í  $\mathbb{R}^3$ . *Sívalningshnit*  $(x, y, z)$  eru þrennd talna  $r, \theta, z$  þannig að

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta \qquad z = z.$$

Athugið að  $[r, \theta]$  eru pólnit punktsins  $(x, y)$ .

### Setning 15.6 (Breytuskipti yfir í sívalningshnit.)

Látum  $R$  vera rúmskika í  $\mathbb{R}^3$  og látum  $f(x, y, z)$  vera heildanlegt fall yfir  $R$ . Gerum ráð fyrir að  $R$  megi lýsa með eftirfarandi skorðum á sívalningshnit punktanna sem eru í  $R$

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad a(\theta) \leq r \leq b(\theta), \quad u(r, \theta) \leq z \leq v(r, \theta),$$

þar sem  $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ . Þá er

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \int_{u(r, \theta)}^{v(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta.$$