# Vika 1: Hvað er töluleg greining? Skekkjur og mat á þeim

Töluleg greining, STÆ405G

8., 10. og 15. janúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

# Yfirlit

## Vika 1: Lagt af stað

## 1.1 Hvað er töluleg greining?

## 1.1 Hvað er töluleg greining?

### Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að finna nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.

## 1.1 Hvað er töluleg greining?

### Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að finna nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.
- Aðferðirnar eru settar fram með reikniritum sem síðan eru forrituð og það þarf góðan skilning á eiginleikum lausnanna sem verið er að nálga til þess að geta greint hvernig forritin munu virka.

## 1.1 Hvað er töluleg greining?

### Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að finna nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.
- Aðferðirnar eru settar fram með reikniritum sem síðan eru forrituð og það þarf góðan skilning á eiginleikum lausnanna sem verið er að nálga til þess að geta greint hvernig forritin munu virka.
- Greining á reikniritum er aðallega fólgin í skekkjumati og mati á þeim aðgerðafjölda sem þarf til þess að ná að nálga lausn með fyrirfram gefinni nákvæmni,

## 1.1 Hvað er töluleg greining?

### Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að finna nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.
- Aðferðirnar eru settar fram með reikniritum sem síðan eru forrituð og það þarf góðan skilning á eiginleikum lausnanna sem verið er að nálga til þess að geta greint hvernig forritin munu virka.
- Greining á reikniritum er aðallega fólgin í skekkjumati og mati á þeim aðgerðafjölda sem þarf til þess að ná að nálga lausn með fyrirfram gefinni nákvæmni, þ.e. hagkvæmni og nákvæmni reikniritsins.

## 1.1 Dæmi

### Í hvaða hæð er eldflaug þegar eldsneytið klárast

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi gildi um eldflaug sem við höfum undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0,1v^2$.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$
- Massi eldsneytisins $m = 180 - 10t$.
- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$.

## 1.1 Dæmi

Í hvaða hæð er eldflaug þegar eldsneytið klárast

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi gildi um eldflaug sem við höfum undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0,1v^2$.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$
- Massi eldsneytisins $m = 180 - 10t$.
- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$.

Úr öðru lögmáli Newtons fæst að $F = (Mv)'$.

## 1.1 Dæmi

### Í hvaða hæð er eldflaug þegar eldsneytið klárast

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi gildi um eldflaug sem við höfum undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0,1v^2$.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$
- Massi eldsneytisins $m = 180 - 10t$.
- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$.

Úr öðru lögmáli Newtons fæst að $F = (Mv)'$. Kraftarnir sem verka á eldflaugina er $T$ upp á við og loftmótstaðan og þyngdarkrafturinn niður á við. Þannig fæst

$$(Mv)' = F = T - Mg - d$$

## 1.1 Dæmi

### Í hvaða hæð er eldflaug þegar eldsneytið klárast

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi gildi um eldflaug sem við höfum undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0,1v^2$.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$
- Massi eldsneytisins $m = 180 - 10t$.
- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$.

Úr öðru lögmáli Newtons fæst að $F = (Mv)'$. Kraftarnir sem verka á eldflaugina er $T$ upp á við og loftmótstaðan og þyngdarkrafturinn niður á við. Þannig fæst

$$(Mv)' = F = T - Mg - d$$

það er

$$M'v + Mv' = T - Mg - d.$$

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

# 1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

## 1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$,

## 1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma $t$ gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\,ds$.

## 1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma $t$ gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\,ds$.

Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s)\,ds$.

## 1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma $t$ gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\, ds$.

Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s)\, ds$.

Verkefnið er því að finna $v$, og reikna svo heildið.

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma $t$ gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\,ds$.

Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s)\,ds$.

Verkefnið er því að finna $v$, og reikna svo heildið.

Diffurjafnan (1) er ólínuleg þannig að við getum ekki vænst þess finna lausn með þeim aðferðum sem við höfum þegar lært. Eins er ekki víst að við getum auðveldlega fundið stofnfall $h$ fyrir $v$, ef við höfum $v$.

## 1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma $t$ gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\,ds$.

Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s)\,ds$.

Verkefnið er því að finna $v$, og reikna svo heildið.

Diffurjafnan (1) er ólínuleg þannig að við getum ekki vænst þess finna lausn með þeim aðferðum sem við höfum þegar lært. Eins er ekki víst að við getum auðveldlega fundið stofnfall $h$ fyrir $v$, ef við höfum $v$.

Hins vegar getum við leyst diffurjöfnuna tölulega með Runge-Kutta aðferð (Kafli 7) og heildið reiknum við svo tölulega (Kafli 6).

## 1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greinininingu þarf að fást við skekkjur.

## 1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

## 1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greinininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Við fáum *gagnaskekkjur* vegna þess að við þurfum að nota ónákvæm inntaksgildi.

## 1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greinininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Við fáum *gagnaskekkjur* vegna þess að við þurfum að nota ónákvæm inntaksgildi.
- Gögn eru oft niðurstöður mælinga og þá fylgja þeim *mæliskekkjur*.

## 1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Við fáum *gagnaskekkjur* vegna þess að við þurfum að nota ónákvæm inntaksgildi.
- Gögn eru oft niðurstöður mælinga og þá fylgja þeim *mæliskekkjur*.
- Við nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum verða til *aðferðarskekkjur*. Þær verða til þegar reikniritin eru hönnuð og greining á reikniritum snýst fyrst og fremst um mat á aðferðarskekkjum.

## 1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greinininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Við fáum *gagnaskekkjur* vegna þess að við þurfum að nota ónákvæm inntaksgildi.
- Gögn eru oft niðurstöður mælinga og þá fylgja þeim *mæliskekkjur*.
- Við nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum verða til *aðferðarskekkjur*. Þær verða til þegar reikniritin eru hönnuð og greining á reikniritum snýst fyrst og fremst um mat á aðferðarskekkjum.
- *Reikningsskekkjur* verða til í tölvum á öllum stigum, jafnvel þegar tölur eru lesnar inn í tugakerfi og þeim snúið yfir í tvíundarkerfi. Þær verða líka til vegna þess að tölvur geta einungis unnið með endanlegt mengi af tölum og allar útkomur þarf að nálga innan þess mengis. Þessar skekkjur nefnast oft *afrúningsskekkjur*.

## 1.2 Skekkja í nálgun á rauntölu $r$

Við stillum alltaf upp jöfnunum okkar þannig að

$$\text{rétt gildi} \;=\; \text{nálgunargildi} + \text{skekkja}.$$

## 1.2 Skekkja í nálgun á rauntölu $r$

Við stillum alltaf upp jöfnunum okkar þannig að

$$\text{rétt gildi} = \text{nálgunargildi} + \text{skekkja}.$$

Ef talan $x$ er nálgun á tölunni $r$ þá nefnist

$$e = r - x$$

*skekkja í nálgun á $r$ með $x$* eða bara *skekkja*.

## 1.2 Skekkja í nálgun á rauntölu $r$

Við stillum alltaf upp jöfnunum okkar þannig að

$$\text{rétt gildi} \;=\; \text{nálgunargildi} + \text{skekkja}.$$

Ef talan $x$ er nálgun á tölunni $r$ þá nefnist

$$e = r - x$$

*skekkja í nálgun á $r$ með $x$* eða bara *skekkja*.
*Algildi skekkju* er tölugildið

$$|e| = |r - x|$$

## 1.2 Skekkja í nálgun á rauntölu $r$

Við stillum alltaf upp jöfnunum okkar þannig að

$$\text{rétt gildi} \;=\; \text{nálgunargildi} + \text{skekkja}.$$

Ef talan $x$ er nálgun á tölunni $r$ þá nefnist

$$e = r - x$$

*skekkja í nálgun á $r$ með $x$* eða bara *skekkja*.
*Algildi skekkju* er tölugildið

$$|e| = |r - x|$$

Ef vitað er að $r \neq 0$, þá nefnist

$$\frac{|e|}{|r|} = \frac{|r-x|}{|r|}$$

*hlutfallsleg skekkja* í nálgun á $r$ með $x$.

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \dots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

**Skilgreining**

*Rauntalnaruna* $(x_n)$ er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* $r$ ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

### Skilgreining

*Rauntalnaruna* $(x_n)$ er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* $r$ ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

Þetta er táknað með

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

### Skilgreining

*Rauntalnaruna* $(x_n)$ er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* $r$ ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

Þetta er táknað með

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r \qquad \text{og} \qquad x_n \to r \text{ ef } n \to \infty.$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

### Skilgreining

*Rauntalnaruna* $(x_n)$ er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* $r$ ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

Þetta er táknað með

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r \qquad \text{og} \qquad x_n \to r \text{ ef } n \to \infty.$$

Ef runan $(x_n)$ er samleitin að markgildinu $r$ þá segjum við einnig að hún *stefni á* $r$.

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

### Skilgreining

*Rauntalnaruna* $(x_n)$ er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* $r$ ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

Þetta er táknað með

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r \qquad \text{og} \qquad x_n \to r \text{ ef } n \to \infty.$$

Ef runan $(x_n)$ er samleitin að markgildinu $r$ þá segjum við einnig að hún *stefni á* $r$.

Hugsum okkur nú að $(x_n)$ sé gefin runa sem stefnir á $r$ og táknum skekkjuna með $e_n = r - x_n$.

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in ]0,1[$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in ]0,1[$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

*ofurlínulega samleitin* (e. superlinear convergence), ef

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0,$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in ]0,1[$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

*ofurlínulega samleitin* (e. superlinear convergence), ef

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0,$$

*ferningssamleitin* (e. quadratic convergence) ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lambda,$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in ]0,1[$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

*ofurlínulega samleitin* (e. superlinear convergence), ef

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0,$$

*ferningssamleitin* (e. quadratic convergence) ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lambda,$$

og *samleitin af stigi* $\alpha$ (e. convergence of order $\alpha$), þar sem $\alpha > 1$, ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda.$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið $\lambda$ og $\alpha$ nákvæmlega).

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið $\lambda$ og $\alpha$ nákvæmlega).

Þannig segjum við að runan $(x_n)$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ef til er $\lambda \in ]0,1[$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|, \qquad n \geq N,$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið $\lambda$ og $\alpha$ nákvæmlega).

Þannig segjum við að runan $(x_n)$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ef til er $\lambda \in ]0,1[$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \le \lambda |e_n|, \qquad n \ge N,$$

*að minnsta kosti ferningssamleitin* ef til er $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \le \lambda |e_n|^2, \qquad n \ge N,$$

## 1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið $\lambda$ og $\alpha$ nákvæmlega).

Þannig segjum við að runan $(x_n)$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ef til er $\lambda \in ]0,1[$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|, \qquad n \geq N,$$

*að minnsta kosti ferningssamleitin* ef til er $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|^2, \qquad n \geq N,$$

og *að minnsta kosti samleitin af stigi* $\alpha$, þar sem $\alpha > 1$, ef til eru $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|^\alpha, \qquad n \geq N.$$

Ef $r$ er rauntala frábrugðin 0 og $\beta$ er náttúrleg tala, 2 eða stærri, þá er til einhlýtt ákvörðuð framsetning á $r$ af gerðinni

$$r = \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $e$ er heiltala og $d_j$ eru heiltölur

- $1 \leq d_1 < \beta$,
- $0 \leq d_j < \beta$, $j = 2, 3, 4, \dots$.

Ef $r$ er rauntala frábrugðin 0 og $\beta$ er náttúrleg tala, 2 eða stærri, þá er til einhlýtt ákvörðuð framsetning á $r$ af gerðinni

$$r = \pm(0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $e$ er heiltala og $d_j$ eru heiltölur

- $1 \leq d_1 < \beta$,
- $0 \leq d_j < \beta$, $j = 2, 3, 4, \ldots$.

Tölvur reikna ýmist í *tvíundarkerfi* með $\beta = 2$ eða í *sextánundarkerfi* með $\beta = 16$, en við mannfólkið með okkar tíu fingur reiknum í *tugakerfi* með $\beta = 10$.

## 1.4 Mantissa

Formerkið og runan

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$$

nefnist *mantissa* tölunnar $r$.

## 1.4 Mantissa

Formerkið og runan

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$$

nefnist *mantissa* tölunnar $r$.

Við skrifum

$$(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j}{\beta^j}$$

ef $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = 0$ og segjum þá að talan $r$ hafi $k$-stafa mantissu.

## 1.4 Marktækir $\beta$-stafir

Ef rauntalan $x$ er nálgun á $r$, þá segjum við að $x$ sé nálgun á $r$ með *að minnsta kosti $t$ marktækum $\beta$-stöfum* ef

$$\frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

## 1.4 Marktækir $\beta$-stafir

Ef rauntalan $x$ er nálgun á $r$, þá segjum við að $x$ sé nálgun á $r$ með *að minnsta kosti $t$ marktækum $\beta$-stöfum* ef

$$\frac{|r-x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

Ef við höfum að auki að

$$\beta^{-t-1} < \frac{|r-x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

þá segjum við að $x$ sé nálgun á $r$ með *$t$ marktækum $\beta$-stöfum*.

## 1.4 Marktækir $\beta$-stafir

Ef rauntalan $x$ er nálgun á $r$, þá segjum við að $x$ sé nálgun á $r$ með *að minnsta kosti $t$ marktækum $\beta$-stöfum* ef

$$\frac{|r-x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

Ef við höfum að auki að

$$\beta^{-t-1} < \frac{|r-x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

þá segjum við að $x$ sé nálgun á $r$ með *$t$ marktækum $\beta$-stöfum*. Athugið að ef $e$ er minnsta heila talan þannig að $|r| < \beta^e$, þá gefur seinni ójafnan matið

$$|r-x| = (0.0\ldots 0a_t a_{t+1}\ldots)_\beta \times \beta^e,$$

þar sem núllin aftan við punkt eru $t$ talsins.

Ef $r$ er sett fram á stöðluðu $\beta$-fleytitöluformi, þá nefnist talan

$$x = (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

*afskurður tölunnar $r$ við $k$-ta aukastaf $r$,*

## 1.4 Afrúningur talna

Ef $r$ er sett fram á stöðluðu $\beta$-fleytitöluformi, þá nefnist talan

$$x = (\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k)_\beta \times \beta^e$$

*afskurður tölunnar $r$ við $k$-ta aukastaf $r$*, en talan

$$x = \begin{cases} \pm(0.d_1 d_2 \ldots d_k)_\beta \times \beta^e, & d_{k+1} < \beta/2, \\ \pm((0.d_1 d_2 \ldots d_k)_\beta + \beta^{-k}) \times \beta^e, & d_{k+1} \geq \beta/2. \end{cases}$$

nefnist *afrúningur tölunnar $r$ við $k$-ta aukastaf.*

Ef $r$ er sett fram á stöðluðu $\beta$-fleytitöluformi, þá nefnist talan

$$x = (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

*afskurður tölunnar $r$ við $k$-ta aukastaf $r$*, en talan

$$x = \begin{cases} \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e, & d_{k+1} < \beta/2, \\ \pm((0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta + \beta^{-k}) \times \beta^e, & d_{k+1} \geq \beta/2. \end{cases}$$

nefnist *afrúningur tölunnar $r$ við $k$-ta aukastaf*.
Við köllum þessar aðgerðir *afskurð* (e. chopping) og *afrúning* (e. rounding).

## 1.4 Fleytitölukerfi

*Fleytitölukerfi* er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $d_j$ eru heiltölur eins og áður var lýst, $k$ er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.

## 1.4 Fleytitölukerfi

*Fleytitölukerfi* er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1d_2\dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $d_j$ eru heiltölur eins og áður var lýst, $k$ er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.
Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.

## 1.4 Fleytitölukerfi

*Fleytitölukerfi* er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $d_j$ eru heiltölur eins og áður var lýst, $k$ er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.

Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.

Eftir hverja aðgerð í tölvunni þarf að nálga útkomuna með *afskurði* eða *afrúningu*.

## 1.4 Fleytitölukerfi

*Fleytitölukerfi* er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $d_j$ eru heiltölur eins og áður var lýst, $k$ er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.
Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.
Eftir hverja aðgerð í tölvunni þarf að nálga útkomuna með *afskurði* eða *afrúningu*.
Ef við förum ekki varlega þá getur þetta magnað upp skekkju.

## 1.4 Fleytitölukerfi

*Fleytitölukerfi* er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem $d_j$ eru heiltölur eins og áður var lýst, $k$ er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.
Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.
Eftir hverja aðgerð í tölvunni þarf að nálga útkomuna með *afskurði* eða *afrúningu*.
Ef við förum ekki varlega þá getur þetta magnað upp skekkju.

### IEEE staðlar

- Single: $\beta = 2, k = 24, m = -125$ og $M = 128$,
- Double: $\beta = 2, k = 53, m = -1021$ og $M = 1024$.

Sjá nánar bls. 37 í kennslubók.

## 1.5 Vítt og breitt um skekkjumat

### Fyrirframmat á skekkju

Metið er áður en reikningar hefjast hversu umfangsmikla reikninga þarf að framkvæma til þess að nálgunin náist innan fyrirfram gefinna skekkjumarka.

Ef lausnin er fundin með ítrekunaraðferð er yfirleitt metið hversu margar ítrekarnir þarf til þess að nálgun verði innan skekkjumarka.

### Fyrirframmat á skekkju

Metið er áður en reikningar hefjast hversu umfangsmikla reikninga þarf að framkvæma til þess að nálgunin náist innan fyrirfram gefinna skekkjumarka.

Ef lausnin er fundin með ítrekunaraðferð er yfirleitt metið hversu margar ítrekarnir þarf til þess að nálgun verði innan skekkjumarka.

### Eftirámat á skekkju

Um leið og reikningar eru framkvæmdir er lagt mat á skekkju og reikningum er hætt þegar matið segir að nálgun sé innan skekkjumarka.

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (ofurlínuleg samleitni)

Hugsum okkur að við séum að nálga töluna $r$ með gildum rununnar $x_n$, að við höfum reiknað út $x_0, \ldots, x_n$ og viljum fá mat á skekkjunni $e_n = r - x_n$ í $n$-ta skrefi.

Við reiknum næst út $x_{n+1}$ og skrifum $e_{n+1} = \lambda_n e_n$. Þá er

$$x_{n+1} - x_n = (r - x_n) - (r - x_{n+1}) = e_n - e_{n+1} = (1 - \lambda_n)e_n$$

og við fáum

$$e_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \lambda_n}.$$

Ef við vitum að runan er *ofurlínulega samleitin*, þá stefnir $\lambda_n$ á 0 og þar með er

$$e_n \approx x_{n+1} - x_n.$$

Við hættum því útreikningi þegar $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ þar sem $\varepsilon$ er fyrirfram gefin tala, sem lýsir þeirri nákvæmni sem við viljum ná.

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan $x_n$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0, 1)$, þá á $\lambda_n$ að stefna á fasta $\lambda$ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1 - \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \approx \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan $x_n$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0,1)$, þá á $\lambda_n$ að stefna á fasta $\lambda$ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan $x_n$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \le c|e_n|$, $n \ge N$, þar sem $c \in (0,1)$, þá á $\lambda_n$ að stefna á fasta $\lambda$ og $|\lambda| \le c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út $x_0, \dots, x_n$ og viljum fá mat á $e_n$.

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan $x_n$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0,1)$, þá á $\lambda_n$ að stefna á fasta $\lambda$ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út $x_0, \dots, x_n$ og viljum fá mat á $e_n$. Við reiknum þá út $x_{n+1}$ og $x_{n+2}$ og síðan hlutfallið $\kappa_n = (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n)$ sem við notum sem mat á $\lambda_n$.

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan $x_n$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0,1)$, þá á $\lambda_n$ að stefna á fasta $\lambda$ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út $x_0, \dots, x_n$ og viljum fá mat á $e_n$. Við reiknum þá út $x_{n+1}$ og $x_{n+2}$ og síðan hlutfallið $\kappa_n = (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n)$ sem við notum sem mat á $\lambda_n$. Eftirámatið á skekkjunni í ítrekunarskrefi númer $n$ verður síðan

$$e_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \kappa_n}.$$

## 1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan $x_n$ sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0,1)$, þá á $\lambda_n$ að stefna á fasta $\lambda$ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út $x_0, \dots, x_n$ og viljum fá mat á $e_n$. Við reiknum þá út $x_{n+1}$ og $x_{n+2}$ og síðan hlutfallið $\kappa_n = (x_{n+2}-x_{n+1})/(x_{n+1}-x_n)$ sem við notum sem mat á $\lambda_n$. Eftirámatið á skekkjunni í ítrekunarskrefi númer $n$ verður síðan

$$e_n \approx \frac{x_{n+1}-x_n}{1-\kappa_n}.$$

Ef stærðin í hægri hliðinni er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk $\varepsilon$, þá stöðvum við útreikningana.

## 1.5 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitin:

## 1.5 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitin:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ | $\frac{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert^2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.00000000000000 | | |
| 1 | 2.73251570951922 | 0.10052257507862 | 1.404 |
| 2 | 2.63199313444060 | 0.01373904283351 | 1.359 |
| 3 | 2.61825409160709 | 0.00024006192208 | 1.273 |
| 4 | 2.61801402968501 | 0.00000007236005 | 1.256 |
| 5 | 2.61801395732496 | 0.00000000000001 | 1.272 |

## 1.5 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitin:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ | $\frac{\lvert x_{n+1}-x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1}\rvert^2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.00000000000000 | | |
| 1 | 2.73251570951922 | 0.10052257507862 | 1.404 |
| 2 | 2.63199313444060 | 0.01373904283351 | 1.359 |
| 3 | 2.61825409160709 | 0.00024006192208 | 1.273 |
| 4 | 2.61801402968501 | 0.00000007236005 | 1.256 |
| 5 | 2.61801395732496 | 0.00000000000001 | 1.272 |

Við metum $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$ og þar af leiðandi $e_n/e_{n-1}^2 \approx |x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$.

## 1.5 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitin:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ | $\frac{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert^2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.00000000000000 | | |
| 1 | 2.73251570951922 | 0.10052257507862 | 1.404 |
| 2 | 2.63199313444060 | 0.01373904283351 | 1.359 |
| 3 | 2.61825409160709 | 0.00024006192208 | 1.273 |
| 4 | 2.61801402968501 | 0.00000007236005 | 1.256 |
| 5 | 2.61801395732496 | 0.00000000000001 | 1.272 |

Við metum $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$ og þar af leiðandi
$e_n/e_{n-1}^2 \approx |x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$.
Við sjáum að hlutfallið $|x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$ helst stöðugt og því ályktum við að aðferðin sé ferningssamleitin.

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Skoðum lítið dæmi um útreikninga á samleitnistigi.

**Dæmi**

Eftirfarandi runa stefnir á $\sqrt{3}$.

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 2.000000000000000 |
| 1 | 1.666666666666667 |
| 2 | 1.727272727272727 |
| 3 | 1.732142857142857 |
| 4 | 1.732050680431722 |
| 5 | 1.732050807565499 |

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Skoðum lítið dæmi um útreikninga á samleitnistigi.

**Dæmi**

Eftirfarandi runa stefnir á $\sqrt{3}$.

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 2.000000000000000 |
| 1 | 1.666666666666667 |
| 2 | 1.727272727272727 |
| 3 | 1.732142857142857 |
| 4 | 1.732050680431722 |
| 5 | 1.732050807565499 |

Er samleitnistigið 1.618?

Ef ekki, hvert er þá samleitnistigið?

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

*Lausn:*

Ef miðað er við að runan $(x_n)$ sé ofurlínulega samleitin, þá er eðlilegt að taka $e_n \approx x_{n+1} - x_n$ sem mat á skekkjunni $e_n = \sqrt{3} - x_n$ í $n$-ta ítrekunarskrefinu.

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

*Lausn:*

Ef miðað er við að runan $(x_n)$ sé ofurlínulega samleitin, þá er eðlilegt að taka $e_n \approx x_{n+1} - x_n$ sem mat á skekkjunni $e_n = \sqrt{3} - x_n$ í $n$-ta ítrekunarskrefinu.

Við byrjum á því að kanna hvernig tilgátan um að samleitnistigið kemur út á þessum tölum með $e_n = x_{n+1} - x_n$:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert e_n \rvert$ | $\lvert e_n \rvert / \lvert e_{n-1} \rvert^{1.618}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.000000000000000 | $3.3333{\cdot}10^{-1}$ | |
| 1 | 1.666666666666667 | $6.0606{\cdot}10^{-2}$ | $3.5851{\cdot}10^{-1}$ |
| 2 | 1.727272727272727 | $4.8701{\cdot}10^{-3}$ | $4.5439{\cdot}10^{-1}$ |
| 3 | 1.732142857142857 | $9.2177{\cdot}10^{-5}$ | $5.0837{\cdot}10^{-1}$ |
| 4 | 1.732050680431722 | $1.2713{\cdot}10^{-7}$ | $4.3004{\cdot}10^{-1}$ |
| 5 | 1.732050807565499 | | |

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

*Lausn:*

Ef miðað er við að runan $(x_n)$ sé ofurlínulega samleitin, þá er eðlilegt að taka $e_n \approx x_{n+1} - x_n$ sem mat á skekkjunni $e_n = \sqrt{3} - x_n$ í $n$-ta ítrekunarskrefinu.

Við byrjum á því að kanna hvernig tilgátan um að samleitnistigið kemur út á þessum tölum með $e_n = x_{n+1} - x_n$:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert e_n \rvert$ | $\lvert e_n \rvert / \lvert e_{n-1} \rvert^{1.618}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.000000000000000 | $3.3333 \cdot 10^{-1}$ | |
| 1 | 1.666666666666667 | $6.0606 \cdot 10^{-2}$ | $3.5851 \cdot 10^{-1}$ |
| 2 | 1.727272727272727 | $4.8701 \cdot 10^{-3}$ | $4.5439 \cdot 10^{-1}$ |
| 3 | 1.732142857142857 | $9.2177 \cdot 10^{-5}$ | $5.0837 \cdot 10^{-1}$ |
| 4 | 1.732050680431722 | $1.2713 \cdot 10^{-7}$ | $4.3004 \cdot 10^{-1}$ |
| 5 | 1.732050807565499 | | |

Tveimur síðustu tölunum í aftasta dálki ber ekki nógu vel saman, svo það er vafasamt hvort talan 1.618 er rétta samleitnistigið.

Ef $(x_n)$ er samleitin af stigi $\alpha$, þá gildir $\lim_{n\to\infty} |e_{n+1}|/|e_n|^\alpha = \lambda$, þar sem $\lambda > 0$. Þar með höfum við nálgunarjöfnu ef $n$ er nógu stórt,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \approx \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^\alpha} \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad \frac{|e_{n+1}|}{|e_{n+2}|} \approx \left|\frac{e_n}{e_{n+1}}\right|^\alpha.$$

Ef $(x_n)$ er samleitin af stigi $\alpha$, þá gildir $\lim_{n\to\infty} |e_{n+1}|/|e_n|^\alpha = \lambda$, þar sem $\lambda > 0$. Þar með höfum við nálgunarjöfnu ef $n$ er nógu stórt,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \approx \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^\alpha} \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad \frac{|e_{n+1}|}{|e_{n+2}|} \approx \left|\frac{e_n}{e_{n+1}}\right|^\alpha.$$

Ef við lítum á þetta sem jöfnu og leysum út $\alpha$, þá fáum við

$$\alpha_n = \frac{\ln(|e_{n+1}|/|e_{n+2}|)}{\ln(|e_n|/|e_{n+1}|)}.$$

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Við getum reiknað út þrjú gildi á $\alpha$ úr þeim gögnum sem við höfum, $\alpha_0 = 1.479$, $\alpha_1 = 1.573$ og $\alpha_2 = 1.660$.

## 1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Við getum reiknað út þrjú gildi á $\alpha$ úr þeim gögnum sem við höfum, $\alpha_0 = 1.479$, $\alpha_1 = 1.573$ og $\alpha_2 = 1.660$.
Ef við endurtökum útreikninga okkar hér að framan með 1.660 í stað 1.618, þá fæst

| $n$ | $p_n$ | $\lvert e_n \rvert$ | $\lvert e_n \rvert / \lvert e_{n-1} \rvert^{1.660}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.000000000000000 | $3.3333 \cdot 10^{-1}$ | |
| 1 | 1.666666666666667 | $6.0606 \cdot 10^{-2}$ | $3.7551 \cdot 10^{-1}$ |
| 2 | 1.727272727272727 | $4.8701 \cdot 10^{-3}$ | $5.1143 \cdot 10^{-1}$ |
| 3 | 1.732142857142857 | $9.2177 \cdot 10^{-5}$ | $6.3639 \cdot 10^{-1}$ |
| 4 | 1.732050680431722 | $1.2713 \cdot 10^{-7}$ | $6.3639 \cdot 10^{-1}$ |
| 5 | 1.732050807565499 | | |

Tölunum neðst í aftasta dálki ber saman með fimm réttum stöfum og því ályktum við að 1.660 sé rétta samleitnistigið.

## 1.6 Ástandsgildi falla

Hugsum okkur nú að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall sem skilgreint er á hlutmengi $I \subset \mathbb{R}$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$ og að $r \in I$.

Hugsum okkur nú að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall sem skilgreint er á hlutmengi $I \subset \mathbb{R}$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$ og að $r \in I$.
Gerum ráð fyrir að $x$ sé nálgun á $r$ og að við viljum nota $f(x)$ sem nálgun á $f(r)$.

## 1.6 Ástandsgildi falla

Hugsum okkur nú að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall sem skilgreint er á hlutmengi $I \subset \mathbb{R}$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$ og að $r \in I$.
Gerum ráð fyrir að $x$ sé nálgun á $r$ og að við viljum nota $f(x)$ sem nálgun á $f(r)$.
Skekkjan í nálguninni á $f(r)$ með $f(x)$ er þá

$$f(r) - f(x) = f(x+e) - f(x) \approx f'(x)e.$$

## 1.6 Ástandsgildi falla

Hugsum okkur nú að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall sem skilgreint er á hlutmengi $I \subset \mathbb{R}$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$ og að $r \in I$.
Gerum ráð fyrir að $x$ sé nálgun á $r$ og að við viljum nota $f(x)$ sem nálgun á $f(r)$.
Skekkjan í nálguninni á $f(r)$ með $f(x)$ er þá

$$f(r) - f(x) = f(x+e) - f(x) \approx f'(x)e.$$

Ef við vitum að $f(r) \neq 0$, þá er hlutfallsleg skekkja í nálgun á $f(r)$ með $f(x)$

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \frac{|f'(x)e|}{|f(r)|} \approx \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|} \cdot \frac{|e|}{|r|}.$$

## 1.6 Ástandsgildi

Við skilgreinum *ástandsgildi fallsins f í punktinum x* sem

$$\operatorname{astand}_x(f) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

## 1.6 Ástandsgildi

Við skilgreinum *ástandsgildi fallsins $f$ í punktinum $x$* sem

$$\mathrm{astand}_x(f) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

Ef $\mathrm{astand}_x(f) \leq 1$ og $x$ er nálgun á $r$ með $m$ marktækum stöfum, þá segir nálgunarjafnan

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \mathrm{astand}_x(f) \cdot \frac{|e|}{|r|}$$

okkur að við getum búist við því að $f(x)$ sé nálgun á $f(r)$ með jafn mörgum marktækum stöfum.

## 1.6 Ástandsgildi

Við skilgreinum *ástandsgildi fallsins $f$ í punktinum $x$* sem

$$\operatorname{astand}_x(f) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

Ef $\operatorname{astand}_x(f) \leq 1$ og $x$ er nálgun á $r$ með $m$ marktækum stöfum, þá segir nálgunarjafnan

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \operatorname{astand}_x(f) \cdot \frac{|e|}{|r|}$$

okkur að við getum búist við því að $f(x)$ sé nálgun á $f(r)$ með jafn mörgum marktækum stöfum.

### Athugasemd

Niðurstöðuna að ofan má orða svona, hlutfallsleg skekkja á fallgildinu $f(x)$ er ástandsgildið sinnum hlutfallsleg skekkja $x$.

## 1.6 Ástand er gott eða slæmt

### Skilgreining

Ef $\text{astand}_x(f) \leq 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *gott* eða að verkefnið sé *reikningslega stöðugt* eða einfaldlega að *ástand fallsins $f$ sé gott í punktinum $x$*.

## 1.6 Ástand er gott eða slæmt

**Skilgreining**

Ef $\text{astand}_x(f) \leq 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *gott* eða að verkefnið sé *reikningslega stöðugt* eða einfaldlega að *ástand fallsins $f$ sé gott í punktinum $x$*.

**Skilgreining**

Ef hins vegar $\text{astand}_x(f) > 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *slæmt* eða að það sé *reikningslega óstöðugt*.

## 1.6 Ástand er gott eða slæmt

### Skilgreining

Ef $\text{astand}_x(f) \leq 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *gott* eða að verkefnið sé *reikningslega stöðugt* eða einfaldlega að *ástand fallsins $f$ sé gott í punktinum $x$*.

### Skilgreining

Ef hins vegar $\text{astand}_x(f) > 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *slæmt* eða að það sé *reikningslega óstöðugt*.

### Athugasemd

Ef ástandið er gott þá getum við búist við því að það tapist í mesta lagi einn marktækur stafur í hlutfallslegri skekkju við útreikning á $f(x)$. Ef hins vegar $\text{astand}_x(f) \approx 10^q$ og $x$ er nálgun á $r$ með $m$ marktækum stöfum, þá er ekki ástæða til þess að ætla að $f(x)$ sé betri nálgun á $f(r)$ en að við höfum $m - q$ marktæka stafi.

## 1.6 Ástandsgildi falla af mörgum breytistærðum

Ef $f : D \to \mathbb{R}$ er deildanlegt fall af mörgum breytistærðum sem skilgreint er á hlutmengi $D \subset \mathbb{R}^n$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$, þá skilgreinum við ástandsgildi $f$ í punktinum $x$ með tilliti til allra breytistærðanna $x_i$ með formúlunni

$$\mathrm{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) = \frac{|x_i f'_{x_i}(\mathbf{x})|}{|f(\mathbf{x})|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

þar sem ritháttur okkar fyrir hlutafleiður er

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f.$$

Ef $\mathrm{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) \leq 10$ fyrir öll $i$, þá segjum við að ástand þess verkefnis að ákvarða fallgildið $f(\mathbf{x})$ sé gott, en að það sé slæmt ef $\mathrm{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) > 10$ fyrir eitthvert $i$.

## 1.6 Ástandsgildi kvaðratrótar

Lítum á kvaðratrótarfallið á jákvæða raunásnum

$$\mathrm{astand}_x(\sqrt{x}) = \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}, \qquad x > 0,$$

svo ástand verkefnisins að ákvarða kvaðratrót er gott á öllum ásnum.

## 1.6 Ástandsgildi lograns

Lítum næst á náttúrlega logrann á sama mengi

$$\mathrm{astand}_x(\ln x) = \frac{x \cdot 1/x}{|\ln x|} = \frac{1}{|\ln x|}, \qquad x > 0.$$

Ástandsgildið er til fyrir öll $x \neq 1$. Ástand verkefnisins að reikna út $\ln x$ er gott ef $1/|\ln x| \leq 10$, sem jafngildir því að $0 < x \leq e^{-\frac{1}{10}}$ eða $x \geq e^{\frac{1}{10}}$, og það er slæmt ef $e^{-\frac{1}{10}} < x < e^{\frac{1}{10}}$ og fer versnandi þegar við nálgumst 1.

## 1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Við getum litið á grunnaðgerðirnar fjórar, samlagningu $(x, y) \mapsto x + y$, frádrátt $(x, y) \mapsto x - y$, margföldun $(x, y) \mapsto xy$ og deilingu $(x, y) \mapsto x/y$ sem föll af tveimur breytistærðum og reiknað út ástandsgildi þeirra,

$$\begin{aligned}\text{astand}_x(x \pm y) &= \frac{|x \cdot 1|}{|x \pm y|} = \frac{1}{|1 \pm y/x|},\\ \text{astand}_y(x \pm y) &= \frac{|y \cdot 1|}{|x \pm y|} = \frac{1}{|1 \pm x/y|},\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand samlagningar er gott nema þegar $x \approx -y$ og ástand frádráttar er gott nema þegar $x \approx y$.

## 1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Eins höfum við

$$\mathrm{astand}_x(xy) = \frac{|x \cdot y|}{|xy|} = 1$$
$$\mathrm{astand}_x(xy) = \frac{|y \cdot x|}{|xy|} = 1,$$

sem sýnir okkur að ástand margföldunar er alltaf gott,

## 1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Eins höfum við

$$\mathrm{astand}_x(xy) = \frac{|x \cdot y|}{|xy|} = 1$$
$$\mathrm{astand}_x(xy) = \frac{|y \cdot x|}{|xy|} = 1,$$

sem sýnir okkur að ástand margföldunar er alltaf gott, og

$$\mathrm{astand}_x(x/y) = \frac{|x \cdot 1/y|}{|x/y|} = 1$$
$$\mathrm{astand}_y(x/y) = \frac{|y \cdot (-x/y^2)|}{|x/y|} = 1,$$

sem sýnir okkur að ástand deilingar er einnig alltaf gott.

## 1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Eins höfum við

$$\text{astand}_x(xy) = \frac{|x \cdot y|}{|xy|} = 1$$
$$\text{astand}_x(xy) = \frac{|y \cdot x|}{|xy|} = 1,$$

sem sýnir okkur að ástand margföldunar er alltaf gott, og

$$\text{astand}_x(x/y) = \frac{|x \cdot 1/y|}{|x/y|} = 1$$
$$\text{astand}_y(x/y) = \frac{|y \cdot (-x/y^2)|}{|x/y|} = 1,$$

sem sýnir okkur að ástand deilingar er einnig alltaf gott.

Hlutfallsleg skekkja sem verður til þegar frádráttur er framkvæmdur á tveimr álíka stórum stærðum er oft nefnd *styttingarskekkja*. Þegar við hönnum reiknirit og forritum þau verðum við að forðast styttingarskekkjur.

## 1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef $b^2$ er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$.

## 1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef $b^2$ er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x - x_1)(x - x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar $x_1$ og $x_2$ uppfylla $x_1 x_2 = c/a$.

## 1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef $b^2$ er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x - x_1)(x - x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar $x_1$ og $x_2$ uppfylla $x_1 x_2 = c/a$.

Ef $b > 0$, þá reiknum við $x_1$ fyrst út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og síðan} \quad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

## 1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef $b^2$ er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x - x_1)(x - x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar $x_1$ og $x_2$ uppfylla $x_1 x_2 = c/a$.

Ef $b > 0$, þá reiknum við $x_1$ fyrst út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og síðan} \quad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef aftur á móti $b < 0$, þá reiknum við fyrst $x_1$ út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{og síðan} \qquad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

## 1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef $b^2$ er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x - x_1)(x - x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar $x_1$ og $x_2$ uppfylla $x_1 x_2 = c/a$.

Ef $b > 0$, þá reiknum við $x_1$ fyrst út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og síðan} \quad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef aftur á móti $b < 0$, þá reiknum við fyrst $x_1$ út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{og síðan} \qquad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef $b^2 \approx 4ac$ þá lendum við í styttingarskekkjum, en við neyðumst til þess að lifa með þeim.

Látum nú $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall á bili $I$ sem tekur gildi í tvinntölunum. Ef $f$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá táknum við afleiðuna með $f'$. Ef $f'$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá táknum við *aðra afleiðu* $f$ með $f''$, og svo framvegis.

## 1.8 Ritháttur fyrir deildanleg föll

Látum nú $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall á bili $I$ sem tekur gildi í tvinntölunum. Ef $f$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá táknum við afleiðuna með $f'$. Ef $f'$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá táknum við *aðra afleiðu* $f$ með $f''$, og svo framvegis.

Við skilgreinum með þrepun $f^{(k)}$ fyrir $k = 0, 1, 2, \ldots$ þannig að $f^{(0)} = f$ og ef $f^{(k-1)}$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá er $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

## 1.8 Ritháttur fyrir deildanleg föll

Látum nú $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall á bili $I$ sem tekur gildi í tvinntölunum. Ef $f$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá táknum við afleiðuna með $f'$. Ef $f'$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá táknum við *aðra afleiðu* $f$ með $f''$, og svo framvegis.

Við skilgreinum með þrepun $f^{(k)}$ fyrir $k = 0, 1, 2, \ldots$ þannig að $f^{(0)} = f$ og ef $f^{(k-1)}$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í $I$, þá er $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Við látum $C^k(I)$ tákna línulega rúmið sem samanstendur af öllum föllum $f : I \to \mathbb{C}$ þannig að $f', \ldots, f^{(k)}$ eru til í sérhverjum punkti í $I$ og $f^{(k)}$ er samfellt fall á $I$.

## 1.9 Nálgun með Taylor-margliðu

Ef $a \in I$, $m$ er jákvæð heiltala og $f \in C^{m-1}$ og $f^{(m)}(x)$ er til í sérhverjum punkti $x \in I$, þá nefnist margliðan

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

Taylor-margliða fallsins $f$ í punktinum $a$ af röð $m$.

## 1.9 Nálgun með Taylor-margliðu

Ef $a \in I$, $m$ er jákvæð heiltala og $f \in C^{m-1}$ og $f^{(m)}(x)$ er til í sérhverjum punkti $x \in I$, þá nefnist margliðan

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

Taylor-margliða fallsins $f$ í punktinum $a$ af röð $m$.
Athugið að stig margliðunnar $p$ er $\leq m$.

## 1.9 Skekkja í nálgun með Taylor-margliðu

### Setning Taylors

Látum $I \subseteq \mathbb{R}$ vera bil, $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall, $m \geq 0$ vera heiltölu og gerum ráð fyrir að $f \in C^m(I)$ og að $f^{(m+1)}(x)$ sé til í sérhverjum innri punkti bilsins $I$. Þá er til punktur $\xi$ á milli $a$ og $x$ þannig að

$$f(x) - T_m f(x; a) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}.$$

Hægri hliðin er oft táknuð $R_m(x)$.

## 1.9 Skekkja í nálgun með Taylor-margliðu

### Setning Taylors

Látum $I \subseteq \mathbb{R}$ vera bil, $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall, $m \geq 0$ vera heiltölu og gerum ráð fyrir að $f \in C^m(I)$ og að $f^{(m+1)}(x)$ sé til í sérhverjum innri punkti bilsins $I$. Þá er til punktur $\xi$ á milli $a$ og $x$ þannig að

$$f(x) - T_m f(x; a) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}.$$

Hægri hliðin er oft táknuð $R_m(x)$.

### Viðbót

Ef $f^{(m+1)}$ er samfellt á lokaða bilinu með endapunkta $a$ og $x$, þá er

$$\begin{aligned} f(x) - T_m f(x; a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\,dt \\ &= (x-a)^{m+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^m}{m!} f^{(m+1)}(a + s(x-a))\,ds \end{aligned}$$

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef $x$ er lítið.

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef $x$ er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni.

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef $x$ er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni. Hún gefur

$$\sin 0.1 = 0.09933417$$

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef $x$ er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni. Hún gefur

$$\sin 0.1 = 0.09933417$$

Af því leiðir

$$0.1 - \sin 0.1 = 1.66583 \cdot 10^{-4}$$

Við höfum tapað tveimur marktækum stöfum í nákvæmni.
Ef við notum Taylor-nálgunina fyrir $\sin(x)$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

og tökum fyrstu þrjá liðina, þ.e. skoðum 6. stigs Taylor-margliðu fallsins.

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef $x$ er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni. Hún gefur

$$\sin 0.1 = 0.09933417$$

Af því leiðir

$$0.1 - \sin 0.1 = 1.66583 \cdot 10^{-4}$$

Við höfum tapað tveimur marktækum stöfum í nákvæmni.
Ef við notum Taylor-nálgunina fyrir $\sin(x)$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

og tökum fyrstu þrjá liðina, þ.e. skoðum 6. stigs Taylor-margliðu fallsins.
$x - \sin(x)$ er þá u.þ.b.

$$x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}.$$

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$, framh.

Fallgildið er þá

$$\frac{0.1^3}{3!} - \frac{0.1^5}{5!} = 1.6658334 \cdot 10^{-10}.$$

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$, framh.

Fallgildið er þá

$$\frac{0.1^3}{3!} - \frac{0.1^5}{5!} = 1.6658334 \cdot 10^{-10}.$$

Skekkjan er gefin með

$$|R_6(0.1)| = \left|\frac{\sin^{(7)}(\xi)}{7!}0.1^7\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{7!}0.1^7\right| \leq \frac{1}{7!}0.1^7 < 0.2 \cdot 10^{-10}.$$

Sem þýðir að við höfum enn 8 marktæka stafi.

**Ritháttur**

$\sin^{(7)}$ hér að ofan táknar 7. afleiðu sin, sem er $-\cos$.

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á $x - \sin x$

Ef við tökum $x = 0.01$ er þetta enn greinilegra. Reiknivélin gefur

$$\sin(0.01) = 0.0099998333$$

Þannig að

$$0.01 - \sin 0.01 = 0.1667 \cdot 10^{-7}$$

og við erum bara með 4 marktæka stafi.

## 1.9 Sýnidæmi: Nálgun á $x - \sin x$

Ef við tökum $x = 0.01$ er þetta enn greinilegra. Reiknivélin gefur

$$\sin(0.01) = 0.0099998333$$

Þannig að

$$0.01 - \sin 0.01 = 0.1667 \cdot 10^{-7}$$

og við erum bara með 4 marktæka stafi.
Hér dugir að taka aðeins þriðja stigs liðinn í Taylor-formúlunni

$$0.01 - \sin(0.01) = \frac{0.01^3}{3!} = 0.16666667 \cdot 10^{-7},$$

því skekkjan er

$$R_4(0.01) \leq \frac{0.01^5}{5!} < 10^{-12}$$

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur að við séum að finna nálgun á núllstöð falls $x \mapsto f(x, \alpha)$. Við viljum finna nálgun $x$ á lausninni $r = r(\alpha)$ sem uppfyllir

$$f(r, \alpha) = 0$$

og við lítum á $\alpha$ sem stika.

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur að við séum að finna nálgun á núllstöð falls $x \mapsto f(x, \alpha)$. Við viljum finna nálgun $x$ á lausninni $r = r(\alpha)$ sem uppfyllir

$$f(r, \alpha) = 0$$

og við lítum á $\alpha$ sem stika.

Gerum ráð fyrir að $\alpha_0$ sé nálgun á $\alpha$ og að við þekkjum nálgun á $r(\alpha_0)$ sem er lausn á jöfnunni $f(x, \alpha_0) = 0$.

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur að við séum að finna nálgun á núllstöð falls $x \mapsto f(x, \alpha)$. Við viljum finna nálgun $x$ á lausninni $r = r(\alpha)$ sem uppfyllir

$$f(r, \alpha) = 0$$

og við lítum á $\alpha$ sem stika.

Gerum ráð fyrir að $\alpha_0$ sé nálgun á $\alpha$ og að við þekkjum nálgun á $r(\alpha_0)$ sem er lausn á jöfnunni $f(x, \alpha_0) = 0$.

Við viljum athuga hversu mikil áhrif þessi nálgun á $\alpha$ hefur á lausnina okkar, þ.e. við þurfum að meta skekkjuna $r(\alpha) - r(\alpha_0)$.

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Ef við gefum okkur að $f$ sé samfellt deildanlegt í grennd um punktinn $(x_0, \alpha_0)$, þar sem $x_0 = r(\alpha_0)$ og $\partial_x f(x_0, \alpha_0) \neq 0$, þá segir setningin um fólgin föll að til sé grennd $I$ um punktinn $\alpha_0$ í $\mathbb{R}$ og samfellt deildanlegt fall $r : I \to \mathbb{R}$, þannig að $r(\alpha_0) = x_0$ og $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ fyrir öll $\alpha \in I$.

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Ef við gefum okkur að $f$ sé samfellt deildanlegt í grennd um punktinn $(x_0, \alpha_0)$, þar sem $x_0 = r(\alpha_0)$ og $\partial_x f(x_0, \alpha_0) \neq 0$, þá segir setningin um fólgin föll að til sé grennd $I$ um punktinn $\alpha_0$ í $\mathbb{R}$ og samfellt deildanlegt fall $r : I \to \mathbb{R}$, þannig að $r(\alpha_0) = x_0$ og $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ fyrir öll $\alpha \in I$.

Með öðrum orðum má segja að við getum alltaf leyst jöfnuna $f(x, \alpha) = 0$ með tilliti til $x$ þannig að út komi lausn $x = r(\alpha)$ sem er samfellt diffranlegt fall af $\alpha$.

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ leiðir að

$$f_x'(r(\alpha), \alpha) \cdot r'(\alpha) + f_\alpha'(r(\alpha), \alpha) = 0.$$

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha),\alpha) = 0$ leiðir að

$$f'_x(r(\alpha),\alpha) \cdot r'(\alpha) + f'_\alpha(r(\alpha),\alpha) = 0.$$

Þetta gefur

$$r'(\alpha) = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha),\alpha)}{f'_x(r(\alpha),\alpha)}.$$

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ leiðir að

$$f_x'(r(\alpha), \alpha) \cdot r'(\alpha) + f_\alpha'(r(\alpha), \alpha) = 0.$$

Þetta gefur

$$r'(\alpha) = \frac{-f_\alpha'(r(\alpha), \alpha)}{f_x'(r(\alpha), \alpha)}.$$

Nú látum við $e$ tákna skekkjuna í nálguninni á $\alpha$ með $\alpha_0$, $e = \alpha - \alpha_0$. Þá fáum við skekkjumatið

$$r(\alpha) - r(\alpha_0) \approx r'(\alpha_0) \cdot e = \frac{-f_\alpha'(r(\alpha_0), \alpha_0)}{f_x'(r(\alpha_0), \alpha_0)} \cdot e$$

## 1.10 Áhrif gagnaskekkju

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha),\alpha) = 0$ leiðir að

$$f'_x(r(\alpha),\alpha)\cdot r'(\alpha) + f'_\alpha(r(\alpha),\alpha) = 0.$$

Þetta gefur

$$r'(\alpha) = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha),\alpha)}{f'_x(r(\alpha),\alpha)}.$$

Nú látum við $e$ tákna skekkjuna í nálguninni á $\alpha$ með $\alpha_0$, $e = \alpha - \alpha_0$. Þá fáum við skekkjumatið

$$r(\alpha) - r(\alpha_0) \approx r'(\alpha_0)\cdot e = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha_0),\alpha_0)}{f'_x(r(\alpha_0),\alpha_0)}\cdot e$$

og jafnframt mat á hlutfallslegri skekkju

$$\frac{|r(\alpha) - r(\alpha_0)|}{|r(\alpha)|} \approx \mathrm{astand}_\alpha(r(\alpha))\cdot\frac{|e|}{|\alpha|}.$$

þar sem mat okkar á ástandstölunni er

$$\mathrm{astand}_\alpha(r(\alpha)) \approx \frac{|\alpha_0 f'_\alpha(r(\alpha_0),\alpha_0)|}{|r(\alpha_0)f'_x(r(\alpha_0),\alpha_0)|}.$$

## 1.10 Sýnidæmi

Við skulum nú líta á það verkefni að finna nálgun á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$, þar sem við gerum ráð fyrir því að þurfa að nálga $\pi$ með 3.14.

## 1.10 Sýnidæmi

Við skulum nú líta á það verkefni að finna nálgun á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$, þar sem við gerum ráð fyrir því að þurfa að nálga $\pi$ með 3.14.
Okkur eru gefnar niðurstöður úr nálguninni með einhverri aðferð.
Við setjum $f(x, \alpha) = 1 - e^{-x} - \sin(\alpha x)$ og fáum

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ | $\frac{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert^2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | 0.8 |
| 1 | 0.81276894538752 | 0.00014017936338 | 0.8597 |
| 2 | 0.81262876602414 | 0.00000001621651 | 0.8253 |
| 3 | 0.81262874980763 | 0.00000000000000 | 0.8444 |

## 1.10 Sýnidæmi

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.

## 1.10 Sýnidæmi

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.
Hlutafleiðurnar eru $f'_x(x, \alpha) = e^{-x} - \alpha \cos(\alpha x)$ og
$f'_\alpha(x, \alpha) = -x \cos(\alpha x)$.

## 1.10 Sýnidæmi

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.
Hlutafleiðurnar eru $f'_x(x, \alpha) = e^{-x} - \alpha \cos(\alpha x)$ og
$f'_\alpha(x, \alpha) = -x \cos(\alpha x)$.
Við stingum tölunum okkar inn í matið og notum punktinn
$(x_3, \alpha_0) = (0.8126, 3.14)$. Það gefur

$$
\begin{aligned}
r(\pi) - r(3.14) &\approx r'(3.14)e \\
&\approx \frac{0.8126 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)}{|e^{-0.8126} - 3.14 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)|} 0.0016 \approx 0.4 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

## 1.10 Sýnidæmi

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.
Hlutafleiðurnar eru $f'_x(x,\alpha) = e^{-x} - \alpha\cos(\alpha x)$ og
$f'_\alpha(x,\alpha) = -x\cos(\alpha x)$.
Við stingum tölunum okkar inn í matið og notum punktinn
$(x_3, \alpha_0) = (0.8126, 3.14)$. Það gefur

$$\begin{aligned} r(\pi) - r(3.14) &\approx r'(3.14)e \\ &\approx \frac{0.8126 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)}{|e^{-0.8126} - 3.14 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)|} 0.0016 \approx 0.4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Þetta mat segir okkur að við eigum að gera ráð fyrir að áhrif gagnaskekkjunnar séu þau að við fáum lausn með þremur réttum stöfum, 0.813. Nálgun okkar á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$ er 0.813.

## 1.11 $O$- og $o$- ritháttur

Látum $f$ og $g$ vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum $c$ vera tölu á $I$ eða annan hvorn endapunkt $I$.

## 1.11 $O$- og $o$- ritháttur

Látum $f$ og $g$ vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum $c$ vera tölu á $I$ eða annan hvorn endapunkt $I$.

Við segjum að $f(t)$ *sé stórt* $O$ *af* $g(t)$ og skrifum

$$f(t) = O(g(t)), \qquad t \to c,$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|f(t)| \leq C|g(t)|$$

gildi fyrir öll $t$ í einhverri grennd um $c$.

## 1.11 $O$- og $o$- ritháttur

Látum $f$ og $g$ vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum $c$ vera tölu á $I$ eða annan hvorn endapunkt $I$.

Við segjum að $f(t)$ *sé stórt $O$ af* $g(t)$ og skrifum

$$f(t) = O(g(t)), \qquad t \to c,$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|f(t)| \leq C|g(t)|$$

gildi fyrir öll $t$ í einhverri grennd um $c$.

Athugið að grennd um $c = +\infty$ er bil af gerðinni $]\alpha, +\infty[$ og grennd um $c = -\infty$ er bil af gerðinni $]-\infty, \alpha[$.

## 1.11 $O$- og $o$- ritháttur

Látum $f$ og $g$ vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum $c$ vera tölu á $I$ eða annan hvorn endapunkt $I$.

Við segjum að $f(t)$ *sé stórt O af* $g(t)$ og skrifum

$$f(t) = O(g(t)), \qquad t \to c,$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|f(t)| \leq C|g(t)|$$

gildi fyrir öll $t$ í einhverri grennd um $c$.

Athugið að grennd um $c = +\infty$ er bil af gerðinni $]\alpha, +\infty[$ og grennd um $c = -\infty$ er bil af gerðinni $]-\infty, \alpha[$.

Við skrifum

$$f(t) = o(g(t)), \quad t \to c$$

og segjum að $f(t)$ sé *óvera* af $g(t)$ þegar $t$ stefnir á $c$ ef til er fall $h$ á $I$ þ.a. $h(t) \to 0$ ef $t \to c$ og ójafnan

$$|f(t)| \leq |h(t)||g(t)|,$$

gildi fyrir öll $t$ í einhverri grennd um $c$.

Oft er $O$-ritháttur notaður þegar fjallað er um skekkjur í Taylor-nálgunum,

$$f(x)-f(c)-f'(x-c)-\cdots-\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = O\big((x-c)^{n+1}\big), \quad x \to c$$

## 1.11 Nokkur sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

## 1.11 Nokkur sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

**Dæmi**

Við vitum að $t^\alpha e^{-t} \to 0$ ef $t \to \infty$. Þannig að

$$h(t) := e^{-t} t^\alpha = \frac{e^{-t}}{t^{-\alpha}},$$

stefnir á 0 þegar $t$ stefnir á $\infty$.

## 1.11 Nokkur sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

**Dæmi**

Við vitum að $t^\alpha e^{-t} \to 0$ ef $t \to \infty$. Þannig að

$$h(t) := e^{-t} t^\alpha = \frac{e^{-t}}{t^{-\alpha}},$$

stefnir á 0 þegar $t$ stefnir á $\infty$. Það er

$$e^{-x} = o(x^{-\alpha}), \qquad x \to \infty \quad \text{fyrir öll } \alpha > 0.$$

## 1.11 Nokkur sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

**Dæmi**

Við vitum að $t^\alpha e^{-t} \to 0$ ef $t \to \infty$. Þannig að

$$h(t) := e^{-t} t^\alpha = \frac{e^{-t}}{t^{-\alpha}},$$

stefnir á 0 þegar $t$ stefnir á $\infty$. Það er

$$e^{-x} = o(x^{-\alpha}), \qquad x \to \infty \quad \text{fyrir öll } \alpha > 0.$$

**Dæmi**

Setning Taylors gefur okkur:

$$x - \sin x = O(x^3), \quad x \to 0$$
$$x - \frac{x^3}{3!} - \sin x = O(x^5), \quad x \to 0$$

## 1.11 $O$- og $o$- ritháttur fyrir runur

Látum nú $(a_n)$ og $(b_n)$ vera tvær talnarunur. Við segjum að $a_n$ *sé stórt O af* $b_n$ og skrifum

$$a_n = O(b_n),$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \leq C|b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Við segjum að $a_n$ sé *óvera* af $b_n$ og skrifum

$$a_n = o(b_n),$$

ef til er runa $\varepsilon_n \searrow 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \leq \varepsilon_n|b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

## 1.11 Tvö sýnidæmi

- Út frá Taylor-röðinni fyrir $\cos x$ fáum við að

$$\cos(1/n) - 1 + 1/(2n^2) = O(1/n^4)$$

## 1.11 Tvö sýnidæmi

- Út frá Taylor-röðinni fyrir $\cos x$ fáum við að

$$\cos(1/n) - 1 + 1/(2n^2) = O(1/n^4)$$

- Út frá

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

## 1.11 Tvö sýnidæmi

- Út frá Taylor-röðinni fyrir $\cos x$ fáum við að
$$\cos(1/n) - 1 + 1/(2n^2) = O(1/n^4)$$

- Út frá
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
sjáum við að
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

## Kafli 1: Fræðilegar spurningar

1. Hverjar eru helstu tegundir af skekkjum sem þarf að taka tillit til í tölulegum útreikningum?
2. Hvernig eru *skekkja* og *hlutfallsleg skekkja* í nálgun á rauntölu skilgreindar?
3. Hver er skilgreiningin á því að *rauntalnaruna* $(x_n)$ er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* $r$?
4. Ef $(x_n)$ er gefin runa sem stefnir á $r$ og skekkjan er $e_n = r - x_n$, hvað þýðir þá að runan sé *að minnsta kosti línulega samleitin*, *að minnsta kosti ferningssamleitin* og *að minnsta kosti samleitin af stigi* $\alpha$
5. Eftir hvaða reglum eru tölur afrúnaðar í tugakerfi?
6. Hvernig er fyrirframmat á skekkju framkvæmt?
7. Útskýrið hvernig er eftirámat á skekkju framkvæmt við nálgun á rauntölu $r$ er aðferðin er ofurlínulega samleitin?
8. Útskýrið hvernig er eftirámat á skekkju framkvæmt við nálgun á rauntölu $r$ ef aðferðin er að minnsta kosti línulega samleitin.

9. Útskýrið hvernig samleitnistig runu er metið.
10. Hvernig eru ástandsgildi falla af einni og mörgum breytistærðum skilgreint og hvernig eru þau notuð?
11. Útskýrið hvernig forðast á styttingarskekkjur þegar núllstöðvar annars stigs margliðu $ax^2 + bx + c$ eru reiknaðar
12. Hvernig er setning Taylors og hvernig er skekkjan í Taylor-nálgun?
13. Útskýrið hvernig hægt er að meta hlutfallslega skekkju í núllstöð $r(\alpha)$ fallsins $x \mapsto f(x, \alpha)$ ef gefið er að það er skekkja í gildinu sem notað er fyrir $\alpha$.
14. Hvað þýðir að $f(t) = O(g(t))$ ef $t \to c$ þar sem $f$ og $g$ eru föll sem skilgreind eru á bili sem inniheldur $c$ eða á hálfás $x > a$ í tilfellinu þegar $c = +\infty$?
15. Hvað þýðir að $f(t) = o(g(t))$ ef $t \to c$ þar sem $f$ og $g$ eru föll sem skilgreind eru á bili sem inniheldur $c$ eða á hálfás $x > a$ í tilfellinu þegar $c = +\infty$?

16. Hvað þýðir að $a_n = O(b_n)$ ef $n \to \infty$ þegar $(a_n)$ og $(b_n)$ eru tvær talnarunur?
17. Hvað þýðir að $a_n = o(b_n)$ ef $n \to \infty$ þegar $(a_n)$ og $(b_n)$ eru tvær talnarunur?