3. Krappi og vindingur

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

12. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 3.1

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi. Látum $\mathbf{r}$ vera stikun á $\mathcal{C}$ og gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}$ sé þjáll stikaferill (þ.e.a.s. $\mathbf{r}$ er samfellt diffranlegur stikaferill og $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t). *Einingarsnertivigurinn* $\mathbf{T}$ við ferilinn $\mathcal{C}$ í punktinum $\mathbf{r}(t)$ er skilgreindur með formúlunni

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

Krappi

Skilgreining 3.2

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. (Þegar fjallað er um stikanir með bogalengd er venja að tákna stikann með s.) Lengd hraðavigurs er alltaf 1 og því er $\mathbf{T}(s) = \mathbf{v}(s)$. *Krappi* (e. curvature) ferilsins $\mathcal{C}$ í punktinum $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem talan

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

Krappageisli (e. radius of curvature) í punktinum $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Meginþverill

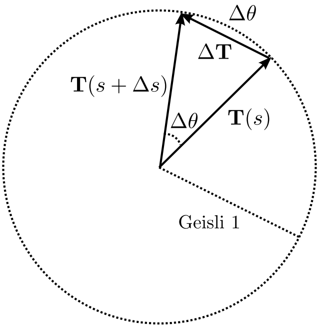
Skilgreining 3.3

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. *Meginþverill* (e. unit principal normal) í punkti $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem vigurinn

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}'(s).$$

Umræða 3.4

Táknum með θ hornið sem $\mathbf{T}$ myndar við grunnvigurinn $\mathbf{i}$. Þá er $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$.



Skilgreining 3.5

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. *Hjúfurplanið* (e. osculating plane) við ferilinn í punkti $\mathbf{r}(s)$ er planið sem spannað er af vigrunum $\mathbf{T}(s)$ og $\mathbf{N}(s)$ og liggur um punktinn $\mathbf{r}(s)$.
Hjúfurhringur (e. osculating circle) við ferilinn í punkti $\mathbf{r}(s)$ er hringur sem liggur í hjúfurplaninu, fer í gegnum punktinn $\mathbf{r}(s)$, hefur geisla $\rho(s)$ og hefur miðju í punktinum $\mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$.

Skilgreining 3.6

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. Vigurinn

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

kallas *tvíþverill* (e. binormal) við ferilinn í $\mathbf{r}(s)$.

$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ er þverstaðlaður grunnur og kallast **Frenet ramminn**.

Setning og skilgreining 3.7

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. Vigurinn $\mathbf{B}'(s)$ er samsíða vigrinum $\mathbf{N}(s)$, þ.e.a.s. $\mathbf{B}'(s)$ er margfeldi af $\mathbf{N}(s)$. Talan $\tau(s)$ þannig að

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$$

kallast *vindingur* ferilsins í punktinum $\mathbf{r}(s)$.

Frenet-Serret jöfnurnar

Jöfnur 3.8

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. Þá gildir

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa\mathbf{N}\\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Setning 3.9

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}$ sé þjáll stikaferill sem stikar $\mathcal{C}$. Ritum $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$. Þá gildir í punktinum $\mathbf{r}(t)$ að

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T},$$

einnig er

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}.$$