25. Sundurleitnisetningin II

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

30. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 25.1

Flötur er sagður reglulegur ef hann hefur snertiplan í hverjum punkti.
Flötur $\mathcal{S}$ sem er búinn til með því að taka endanlega marga reglulega fleti $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ og líma þá saman á jöðrunum kallast *reglulegur á köflum*.

Þegar talað um einingarþvervigrasvið á slíkan flöt þá er átt við vigursvið sem er skilgreint á fletinum nema í þeim punktum þar sem fletir $\mathcal{S}_i$ og $\mathcal{S}_j$ hafa verið límdir saman. Í slíkum punktum þarf flöturinn ekki að hafa snertiplan og því ekki heldur þvervigur.

Flötur er sagður *lokaður* ef hann er yfirborð svæðis í $\mathbb{R}^3$ (t.d. er kúluhvel lokaður flötur).

Setning 25.2 (Sundurleitnisetningin, Setning Gauss)

Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F} \, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Skilgreining 25.3

Látum D vera rúmskika í $\mathbb{R}^3$. Segjum að rúmskikinn D sé *z-einfaldur* ef til er svæði D_z í planinu og samfelld föll f og g skilgreind á D_z þannig að

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z \text{ og } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

Það að rúmskiki sé x- eða y-einfaldur er skilgreint á sama hátt.

Setning 25.4

Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á D og φ diffranlegt fall skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\,dV = -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \mathbf{N}\,dS,$$

og

$$\iiint_D \mathbf{grad}\,\varphi\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \varphi\mathbf{N}\,dS.$$

Athugið að útkomurnar úr heildunum eru vigrar.