HÁSKÓLI ÍSLANDS
VERKFRÆÐI- OG NÁTTÚRUVÍSINDASVIÐ
RAUNVÍSINDADEILD

Stærðfræðigreining II (STÆ205G)

19. janúar 2016

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

Rafræna útgáfu af þessum nótum má finna á
http://notendur.hi.is/sigurdur/stae205/

Efnisyfirlit

Ferlar

Winter is coming.

- George R.R. Martin, A Game of Thrones

1.1 Inngangur

- Viðfangsefni námskeiðsins er varpanir sem skilgreindar eru á hlutmengi í $\mathbf{R}^n$ og taka gildi í $\mathbf{R}^m$.
- Fáumst við stærðfræðigreiningu í mörgum breytistærðum.
- Sambærileg verkefni og í stærðfræðigreiningu í einni breytistærð: Samfelldni, diffrun, heildun. Rúmfræðileg túlkun skiptir nú miklu máli.
- Gerir okkur kleift að fást við mörg raunveruleg verkefni þar sem margar breytistærðir koma við sögu.

1.2 Stikaferlar

1.2.1 Skilgreining

Vörpun $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ þannig að $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ kallast *vigurgild vörpun*. Slík vörpun er sögð samfelld ef föllin $r_1, \ldots, r_n$ eru öll samfelld. Samfelld vörpun $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ er oft kölluð *stikaferill*.

1.2.2 Ritháttur

Þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

og þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

1.3 Ferlar og stikanir á ferlum

1.3.1 Skilgreining

Ferill í plani er mengi punkta (x,y) í planinu þannig að skrifa má $x = f(t)$ og $y = g(t)$ fyrir t á bili I þar sem f og g eru samfelld föll á I. Bilið I ásamt föllunum (f,g) kallast *stikun* á ferlinum. Ferill í rúmi og stikun á ferli í rúmi eru skilgreind á sambærilegan hátt.

Aðvörun: Ferill í plani/rúmi er **ekki** það sama og stikaferill. Fyrir gefinn feril eru til (óendanlega) margar ólíkar stikanir.

1.3.2 Dæmi - Eðlisfræðileg túlkun

Líta má á veginn milli Reykjavíkur og Akureyrar sem feril.

Líta má á ferðalag eftir veginum frá Reykjavík til Akureyrar þar sem staðsetning er þekkt á hverjum tíma sem stikaferil þar sem tíminn er stikinn.

1.3.3 Dæmi

Jafnan

$$x^2 + y^2 = 1$$

lýsir ferli í planinu sem er hringur með miðju í (0,0) og geisla 1. Dæmi um ólíkar stikanir:

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}) & \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [-1, 1[, \\ (2-t, -\sqrt{1-(2-t)^2}) & \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [1, 3]. \end{cases}$$

1.4 Diffrun stikaferla

1.4.1 Skilgreining

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti* t ef markgildið

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

er til. Stikaferillinn $\mathbf{r}$ er sagður *diffranlegur* ef hann er diffranlegur í öllum punktum á bilinu $[a, b]$. (Í endapunktum bilsins $[a, b]$ er þess krafist að einhliða afleiður séu skilgreindar.)

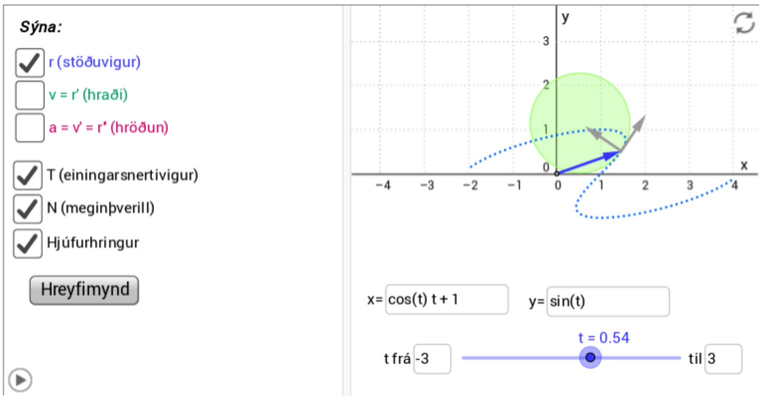
1.4.2 Setning

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti* t ef og aðeins ef föllin $r_1, \dots, r_n$ eru öll diffranleg í t. Þá gildir að

$$\mathbf{r}'(t) = (r_1'(t), \dots, r_n'(t)).$$

1.4.3 Ritháttur

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera diffranlegan stikaferil. Venja er að rita $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og tala um $\mathbf{v}(t)$ sem *hraða* eða *hraðavigur*. Talan $|\mathbf{v}(t)|$ er kölluð *ferð*. Einnig er ritað $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ og talað um $\mathbf{a}(t)$ sem *hröðun* eða *hröðunarvigur*.



1.4.4 Dæmi

Lítum á eftirfarand stikaferla sem stika hring með miðju í (0,0) og geisla 1.

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$
$$\mathbf{r}_2(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, \sqrt{2\pi}].$$

Þá er tilsvarandi hraði

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{r}_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$
$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{r}_2'(t) = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, \sqrt{2\pi}].$$

og ferðin $|\mathbf{v}_1(t)| = 1$ og $|\mathbf{v}_2(t)| = 2t$.

1.4.5 Setning

Látum $\mathbf{u}, \mathbf{v} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera diffranlega stikaferla og λ diffranlegt fall. Þá eru stikaferlarnir $\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{u}(\lambda(t))$ diffranlegir, og ef $n = 3$ þá er stikaferillinn $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ líka diffranlegur. Fallið $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ er líka diffranlegt. Eftirfarandi listi sýnir formúlur fyrir afleiðunum:

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$,

(b) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$,

(c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$,

(d) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$,

(e) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \mathbf{u}'(\lambda(t))\lambda'(t)$.

Ef $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ þá er

(f) $\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$.

1.4.6 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n; \mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ vera stikaferil.

Stikaferillinn er sagður *samfellt diffranlegur* ef föllin $r_1(t), \dots, r_n(t)$ eru öll diffranleg og afleiður þeirra eru samfelldar. Samfellt diffranlegur stikaferill er sagður *þjáll* (e. smooth) ef $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t.

Stikaferillinn er sagður *samfellt diffranlegur á köflum* ef til eru tölur $b_0, \dots, b_k$ þannig að $a = b_0 < b_1 < \cdots < b_k = b$ og stikaferillinn er samfellt diffranlegur á hverju bili $[b_{i-1}, b_i]$. Það að stikaferill sé *þjáll á köflum* (e. piecewise smooth curve) er skilgreint á sambærilegan hátt.

1.4.7 Setning

Látum $\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ vera samfellt diffranlegan stikaferil fyrir t á bili I. Ef $f'(t) \neq 0$ á I þá hefur ferilinn snertilínu fyrir hvert gildi á t og hallatala hennar er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Ef $g'(t) \neq 0$ á I þá hefur ferilinn þverlínu fyrir hvert gildi á t og hallatala hennar er

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

1.5 Lengd stikaferils

1.5.1 Regla

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera samfellt diffranlegan stikaferil. *Lengd* eða *bogalengd* stikaferilsins er skilgreind með formúlunni

$$s = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

1.5.2 Skilgreining og umræða

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vera samfellt diffranlegan stikaferil. Sagt er að stikaferillinn sé *stikaður með bogalengd* ef fyrir allar tölur t_1, t_2 þannig að $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ þá gildir

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

(Skilyrðið segir að lengd stikaferilsins á milli punkta $\mathbf{r}(t_1)$ og $\mathbf{r}(t_2)$ sé jöfn muninum á t_2 og t_1.) Stikun með bogalengd má líka þekkja á þeim eiginleika að $|\mathbf{v}(t)| = 1$ fyrir öll gildi á t.

1.6 Pólhnit

- Þegar við fáumst við verkefni í mörgum víddum höfum við frelsi til að velja hnitakerfi.
- Heppilegt val á hnitakerfi getur skipt sköpum við lausn verkefnis.

1.6.1 Skilgreining

Látum $P = (x, y) \neq \mathbf{0}$ vera punkt í plani. *Pólhnit* P er talnapar $[r, \theta]$ þannig að r er fjarlægð P frá $O = (0, 0)$ og θ er hornið á milli striksins $\overline{OP}$ og x-ássins. (Hornið er mælt þannig að rangsælis stefna telst jákvæð, og leggja má við θ heil margfeldi af 2π.)

1.6.2 Regla

Ef pólhnit punkts í plani eru $[r, \theta]$ þá má reikna xy-hnit hans (e. *rectangular coordinates* eða *Cartesian coordinates*) með formúlunum

$$x = r\cos\theta \qquad \text{og} \qquad y = r\sin\theta.$$

Ef við þekkjum xy-hnit punkts þá má finna pólhnitin út frá jöfnunum

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{og} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

(Ef $x = 0$ þá má taka $\theta = \frac{\pi}{2}$ ef $y > 0$ en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ef $y < 0$. Þegar jafnan $\tan\theta = \frac{y}{x}$ er notuð til að ákvarða θ þá er tekin lausn á milli $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ ef $x > 0$ en á milli $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$ ef $x < 0$.)

1.7 Pólhnitagraf

1.7.1 Skilgreining og umræða

Látum f vera fall skilgreint fyrir θ þannig að $\alpha \le \theta \le \beta$. Jafnan $r = f(\theta)$ lýsir mengi allra punkta í planinu sem hafa pólhnit á forminu $[f(\theta), \theta]$ þar sem $\alpha \le \theta \le \beta$. Þetta mengi kallast *pólhnitagraf* fallsins f.

Pólhnitagraf er ferill í planinu sem má stika með stikaferlinum

$$\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$$

með formúlu

$$\mathbf{r}(\theta) = [f(\theta), \theta] = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta).$$

1.8 Snertill við pólhnitagraf

1.8.1 Setning

Látum $r = f(\theta)$ vera pólhnitagraf fallsins f og gerum ráð fyrir að fallið f sé samfellt diffranlegt. Látum $\mathbf{r}(\theta)$ tákna stikunina á pólhnitagrafinu sem innleidd er í 1.7.1. Ef vigurinn $\mathbf{r}'(\theta) \neq \mathbf{0}$ þá gefur þessi vigur stefnu snertils við pólhnitagrafið og út frá $\mathbf{r}'(\theta)$ má reikna hallatölu snertils við pólhnitagrafið.

1.9 Flatarmál

1.9.1 Setning

Flatarmál svæðisins sem afmarkast af geislunum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ (með $\alpha \le \beta$ og $\beta - \alpha \le 2\pi$) og pólhnitagrafi $r = f(\theta)$ (f samfellt) er

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\, d\theta.$$

1.10 Bogalengd

1.10.1 Setning

Gerum ráð fyrir að fallið $f(\theta)$ sé diffranlegt. Bogalengd pólhnitagrafsins $r = f(\theta)$, þegar $\alpha \leq \theta \leq \beta$, er gefin með formúlunni

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta.$$

1.11 Einingarsnertivigur

1.11.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi. Látum $\mathbf{r}$ vera stikun á $\mathcal{C}$ og gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}$ sé þjáll stikaferill (þ.e.a.s. $\mathbf{r}$ er samfellt diffranlegur stikaferill og $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t). *Einingarsnertivigurinn* $\mathbf{T}$ við ferilinn $\mathcal{C}$ í punktinum $\mathbf{r}(t)$ er skilgreindur með formúlunni

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

1.12 Krappi

1.12.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. (Þegar fjallað er um stikanir með bogalengd er venja að tákna stikann með s.) Lengd hraðavigurs er alltaf 1 og því er $\mathbf{T}(s) = \mathbf{v}(s)$. *Krappi* (e. curvature) ferilsins $\mathcal{C}$ í punktinum $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem talan

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|.$$

Krappageisli (e. radius of curvature) í punktinum $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

1.13 Meginþverill

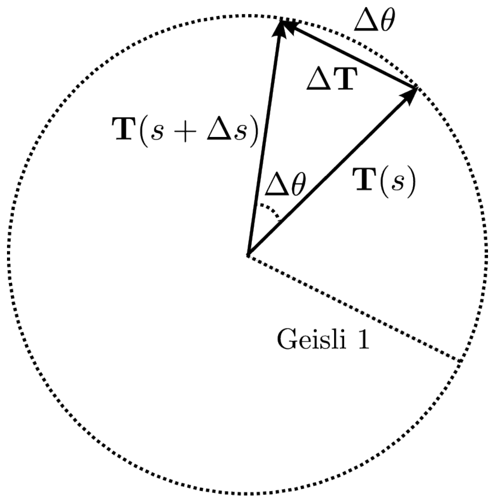
1.13.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. *Meginþverill* (e. unit principal normal) í punkti $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem vigurinn

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}'(s).$$

1.13.2 Umræða

Táknum með θ hornið sem $\mathbf{T}$ myndar við grunnvigurinn $\mathbf{i}$. Þá er $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$.



1.14 Hjúfurplan

1.14.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd.

Hjúfurplanið (e. osculating plane) við ferilinn í punkti $\mathbf{r}(s)$ er planið sem spannað er af vigrunum $\mathbf{T}(s)$ og $\mathbf{N}(s)$ og liggur um punktinn $\mathbf{r}(s)$.

Hjúfurhringur (e. osculating circle) við ferilinn í punkti $\mathbf{r}(s)$ er hringur sem liggur í hjúfurplaninu, fer í gegnum punktinn $\mathbf{r}(s)$, hefur geisla $\rho(s)$ og hefur miðju í punktinum $\mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$.

1.15 Tvíþverill

1.15.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. Vigurinn

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

kallas *tvíþverill* (e. binormal) við ferilinn í $\mathbf{r}(s)$.

$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ er þverstaðlaður grunnur og kallast **Frenet ramminn**.

1.16 Vindingur

1.16.1 Setning og skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. Vigurinn $\mathbf{B}'(s)$ er samsíða vigrinum $\mathbf{N}(s)$, þ.e.a.s. $\mathbf{B}'(s)$ er margfeldi af $\mathbf{N}(s)$. Talan $\tau(s)$ þannig að

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$$

kallast *vindingur* ferilsins í punktinum $\mathbf{r}(s)$.

1.17 Frenet-Serret jöfnurnar

1.17.1 Jöfnur

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi og $\mathbf{r}$ stikun á $\mathcal{C}$ með bogalengd. Þá gildir

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa\mathbf{N}\\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau\mathbf{N}.\end{aligned}$$

1.17.2 Setning

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í plani eða rúmi. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}$ sé þjáll stikaferill sem stikar $\mathcal{C}$. Ritum $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$. Þá gildir í punktinum $\mathbf{r}(t)$ að

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T},$$

einnig er

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{a}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}.$$

Hlutafleiður

"If you need help bark like a dog." - Gendry. "That's stupid. If I need help I'll shout help." - Arya"

- George R.R. Martin, A Clash of Kings

2.1 Graf falls

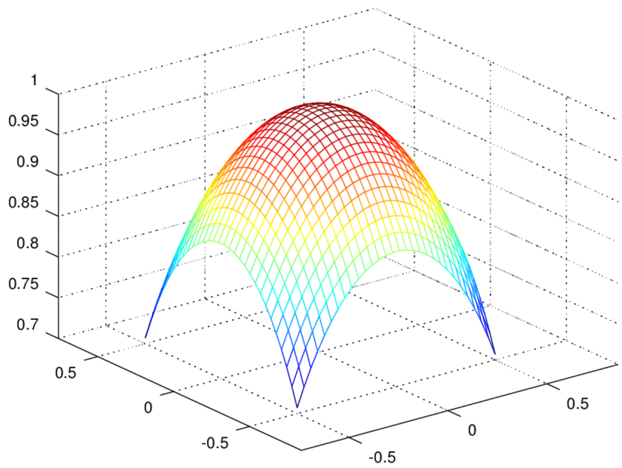
2.1.1 Skilgreining

Látum $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vera fall. *Graf* fallsins er skilgreint sem mengið

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ef $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er fall, þá er *graf* fallsins skilgreint sem mengið

$$\{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$



Graf fallsins $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

2.2 Jafnhæðarlínur

2.2.1 Skilgreining

Látum $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vera fall. Ef c er fasti þá er mengið

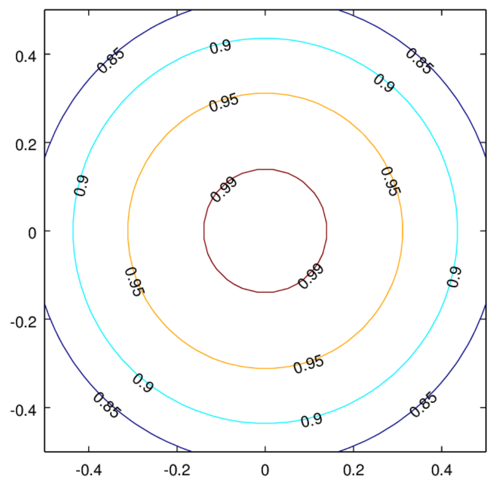
$$\{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kallað *jafnhæðarlína* eða *jafnhæðarferill* (e. level curve) fallsins f fyrir fastann c.

Látum $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vera fall. Ef c er fasti þá er mengið

$$\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = c\}$$

kallað *jafnhæðarflötur* (e. level surface) fallsins f fyrir fastann c.



Nokkrar jafnæðarlínur fallsins $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

2.3 Fjarlægð milli punkta

2.3.1 Skilgreining

Fjarlægðin milli tveggja punkta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ í $\mathbf{R}^n$ er skilgreind sem talan

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

2.4 Opnar kúlur

2.4.1 Skilgreining

Látum $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vera punkt í $\mathbf{R}^n$. Skilgreinum *opnu kúluna* með miðju í P og geisla r sem mengið

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid |Q - P| < r\}.$$

Í $\mathbb{R}^2$ er eðlilegra að tala um *opna skífu* eða *opinn disk* í stað opinnar kúlu og í $\mathbb{R}$ þá er talað um opin bil.

2.5 Opin mengi

2.5.1 Skilgreining

Látum U vera hlutmengi í $\mathbf{R}^n$.

Sagt er að U sé *opið mengi* ef um sérhvern punkt P í U gildir að til er tala $r > 0$ þannig að $B_r(P) \subseteq U$.

Mengið U er sagt *lokað* ef fyllimengið er opið. (*Fyllimengi* U er skilgreint sem mengið $\mathbf{R}^n \setminus U = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid Q \notin U\}$.)

2.6 Jaðarpunktur

2.6.1 Skilgreining

Látum U vera mengi í $\mathbf{R}^n$. Punktur P í $\mathbf{R}^n$ er sagður *jaðarpunktur* U ef sérhver opin kúla $B_r(P)$ með $r > 0$ inniheldur bæði punkt úr U og punkt úr $\mathbf{R}^n \setminus U$. (Athugið að bæði er mögulegt að jaðarpunktur U sé í U og að hann sé ekki í U.)

2.7 Skilgreiningarmengi

2.7.1 Skilgreining

Fyrir fall $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ þá táknar $\mathcal{D}(f)$ skilgreiningarmengi fallsins f. Ef fallið er gefið með formúlu og ekkert sagt um $\mathcal{D}(f)$ þá lítum við svo á að $\mathcal{D}(f)$ sé mengi allra punkta í $\mathbf{R}^n$ þannig að formúlan gefi vel skilgreinda tölu.

2.8 Markgildi

2.8.1 Skilgreining

Látum $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vera fall af n breytistærðum með skilgreiningarmengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbf{R}^n$. Látum $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vera punkt í $\mathbf{R}^n$ þannig að sérhver opin kúla um P inniheldur meira en einn punkt úr $\mathcal{D}(f)$.

Segjum að $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stefni á tölu L þegar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stefnir á $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ef eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að ef $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (p_1, p_2, \ldots, p_n)| < \delta$$

þá er

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \epsilon.$$

2.8.2 Ritháttur

Ef $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stefnir á tölu L þegar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stefnir á $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ þá er ritað

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (p_1, p_2, \ldots, p_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L.$$

2.8.3 Skilgreining (Skilgreining 2.8.1 sett fram fyrir föll af tveimur breytum.)

Látum $f(x, y)$ vera fall skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum (a, b) vera punkt í $\mathbb{R}^2$ þannig að sérhver opin skífa um (a, b) inniheldur meira en einn punkt úr $\mathcal{D}(f)$.

Segjum að $f(x, y)$ stefni á tölu L þegar (x, y) stefnir á (a, b) ef eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að ef $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ og

$$\delta > |(x, y) - (a, b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

þá er

$$|f(x, y) - L| < \epsilon.$$

2.9 Reglur um markgildi

2.9.1 Setning

Látum f og g vera föll af tveimur breytum. Gerum ráð fyrir að

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{og} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M,$$

og að sérhver grennd um (a,b) innihaldi fleiri en einn punkt þar sem bæði föllin f og g eru skilgreind. Þá gildir

(a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, svo framarlega sem $M \neq 0$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$ ef F er fall af einni breytistærð sem er samfellt í punktinum L.

2.10 Samfelldni

2.10.1 Skilgreining

Látum f vera fall af n breytistærðum skilgreint á mengi $\mathcal{D}\dashv\Updownarrow\sqcup(f)$ í $\mathbf{R}^n$. Fallið f er sagt *samfellt í punkti* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ í $\mathcal{D}(f)$ ef

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(p_1,p_2,\ldots,p_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Sagt er að fallið sé *samfellt* ef það er samfellt í öllum punktum skilgreiningarmengis síns.

2.11 Hlutafleiður

2.11.1 Skilgreining

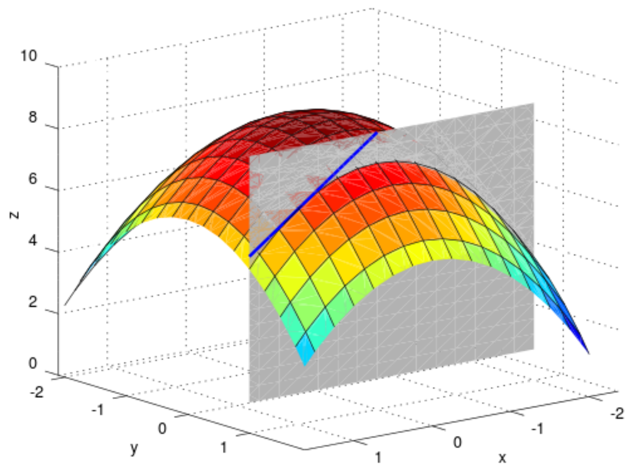
Látum $f(x,y)$ vera fall af tveimur breytum x og y sem er skilgreint á opinni skífu með miðju í punktinum (a,b). Skilgreinum *hlutafleiðu m.t.t.* x í (a,b) með

$$f_1(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

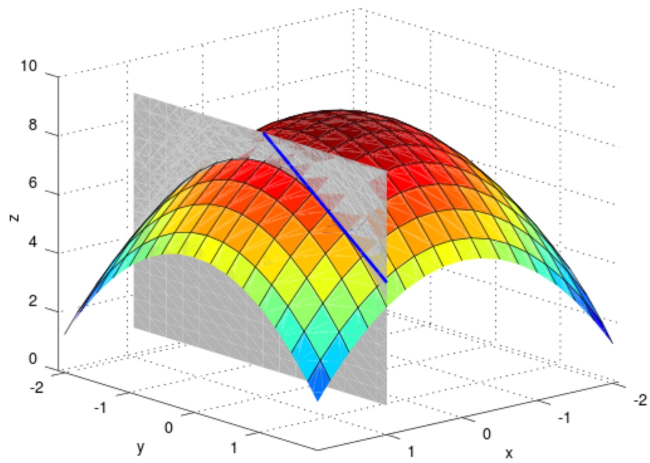
og *hlutafleiðu m.t.t.* y í (a,b) með

$$f_2(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

ef markgildin eru til.



Hlutafleiða m.t.t. x fyrir $y = 1$.



Hlutafleiða m.t.t. y fyrir $x = 1$.

2.11.2 Skilgreining

Látum $f(x, y, z)$ vera fall af þremur breytum x, y og z sem er skilgreint á opinni kúlu með miðju í punktinum (a, b, c).

Skilgreinum *hlutafleiðu m.t.t.* x í (a, b, c) með

$$f_1(a, b, c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b, c) - f(a, b, c)}{h},$$

hlutafleiðu m.t.t. y í (a, b, c) með

$$f_2(a, b, c) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k, c) - f(a, b, c)}{k}$$

og *hlutafleiðu m.t.t.* z í (a, b, c) með

$$f_3(a, b, c) = \lim_{\ell \to 0} \frac{f(a, b, c + \ell) - f(a, b, c)}{\ell}$$

ef markgildin eru til.

2.11.3 Skilgreining

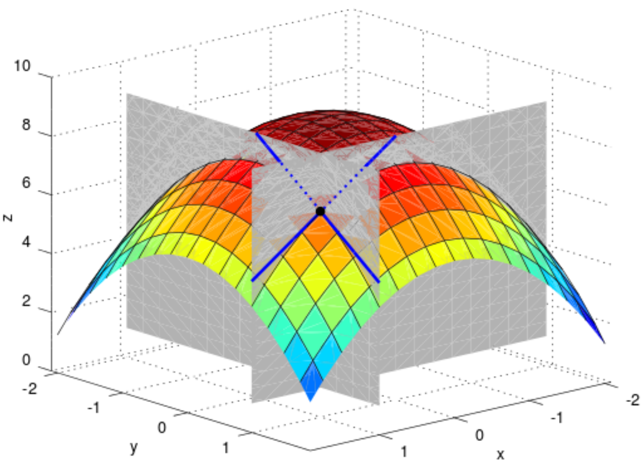
Látum f vera fall af n breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sem er skilgreint á opinni kúlu um punktinn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Hlutafleiða f með tilliti til breytunnar x_k í punktinum $\mathbf{a}$ er skilgreind sem markgildið

$$f_k(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{h}$$

ef markgildið er til. (Hér stendur $\mathbf{e}_k$ fyrir vigurinn sem er með 0 í öllum hnitum nema því k-ta þar sem er 1.)

2.12 Snertiplan

Látum $f(x, y)$ vera fall af tveimur breytistærðum þannig að hlutafleiðurnar $f_1(a, b)$ og $f_2(a, b)$ séu skilgreindar.



Í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k}$ snertivigur við ferilinn $f(x, b) = z$ og

$\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}$ snertivigur við ferilinn $f(a, y) = z$.

Táknum með S planið sem hefur stikunina

$$(a, b, f(a, b)) + s\mathbf{T}_1 + t\mathbf{T}_2, \quad -\infty < s, t < \infty.$$

Vigurinn

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

er þvervigur á S og jafna plansins S er

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Þverlína á S hefur stikun

$$(a, b, f(a, b)) + u\mathbf{n}, \quad -\infty < u < \infty.$$

Ef $f(x, y)$ er 'nógu nálægt' (skilgreint nánar síðar) planinu S þegar (x, y) er nálægt punktinum (a, b) þá kallast S *snertiplan* við grafið $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b)$.

2.13 Hlutafleiður af hærra stigi

2.13.1 Skilgreining

Ritum $z = f(x,y)$. *Annars stigs hlutafleiður* f eru skilgreindar með formúlunum

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x,y) = f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x,y) = f_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x,y) = f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x,y) = f_{xy}(x,y).$$

Hlutafleiðurnar $f_{11}(x,y)$ og $f_{22}(x,y)$ kallast hreinar hlutafleiður og $f_{12}(x,y)$ og $f_{21}(x,y)$ kallast blandaðar hlutafleiður.

2.13.2 Setning

Látum $f(x,y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu D með miðju í $P = (a,b)$. Gerum ráð fyrir að hlutafleiðurnar $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_{12}(x,y)$ og $f_{21}(x,y)$ séu allar skilgreindar á D og að þær séu allar samfelldar á D. Þá gildir að

$$f_{12}(a,b) = f_{21}(a,b).$$

2.13.3 Hugmynd að skilgreiningu

Skilgreiningu 5.6 má útvíkka á augljósan hátt til að skilgreina 2. stigs hlutafleiður fyrir föll af fleiri en tveimur breytum. Einnig er augljóst hvernig má skilgreina hlutafleiður af hærri stigum en 2, til dæmis ef $w = f(x,y,z)$ þá

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \qquad \text{(diffra fyrst tvisvar m.t.t. } y\text{, svo einu sinni m.t.t. } x\text{)}$$

og

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial y} \qquad \text{(diffra fyrst m.t.t. } y\text{, svo m.t.t. } z \text{ og að lokum m.t.t. } y\text{).}$$

2.13.4 Setning (Almenn útgáfa af Setningu 2.13.2)

Látum f vera fall n breytistærðum sem er skilgreint á opinni kúlu með miðju í $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Skoðum tvær hlutafleiður f í punktum P þar sem er diffrað með tilliti til sömu breytistærða og jafn oft með tilliti til hverrar breytistærðar. Ef þessar hlutafleiður eru samfelldar í punktinum P og allar hlutafleiður af lægra stigi eru skilgreindar á D og samfelldar á D þá eru hlutafleiðurnar sem við erum að skoða jafnar í P.

2.13.5 Dæmi:

Ef $w = f(x, y, z)$ er fall af þremur breytistærðum þá er t.d.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y \partial x \partial z}$$

ef skilyrðin í setningunni eru uppfyllt.

2.14 Keðjuregla

2.14.1 Setning (Keðjureglan í einni breytistærð.)

Gerum ráð fyrir að fallið $f(u)$ sé diffranlegt í punktinum $u = g(x)$ og að fallið $g(x)$ sé diffranlegt í punktinum x. Þá er fallið $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ diffranlegt í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

2.14.2 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$ eru föll af breytu t, Gerum ráð fyrir að á opinni skífu um punktinum $(x(t), y(t))$ séu báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Gerum enn fremur ráð fyrir að föllin $x(t)$ og $y(t)$ séu bæði diffranleg í punktinum t. Þá er fallið

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

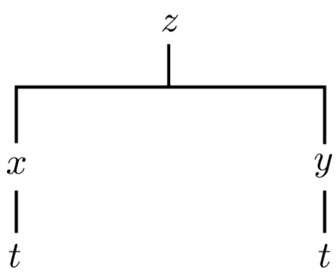
diffranlegt í t og

$$g'(t) = f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t).$$

2.14.3 Ritháttur

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$ eru föll af breytu t. Þá er

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$



2.14.4 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall af breytistærðum x og y sem aftur eru föll af breytum s og t, það er að segja $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$. Ritum svo

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)).$$

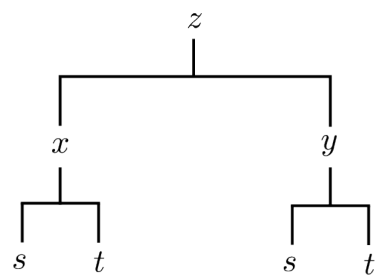
Þá gildir (að gefnum sambærilegum skilyrðum og í 2.14.2) að

$$g_1(s,t) = f_1(x(s,t), y(s,t))x_1(s,t) + f_2(x(s,t), y(s,t))y_1(s,t),$$
$$og$$
$$g_2(s,t) = f_1(x(s,t), y(s,t))x_2(s,t) + f_2(x(s,t), y(s,t))y_2(s,t).$$

2.14.5 Ritháttur

Ritum $z = f(x,y)$ þar sem $x = x(s,t)$ og $y = y(s,t)$ eru föll af breytum s og t. Þá er

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$



2.14.6 Ritháttur

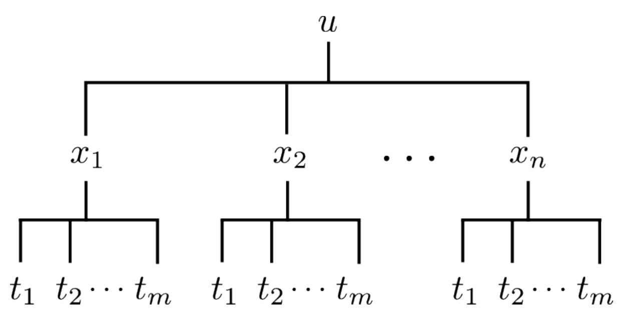
Ritum $z = f(x,y)$ þar sem $x = x(s,t)$ og $y = y(s,t)$ eru föll af breytum s og t. Þá er

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

2.14.7 Setning

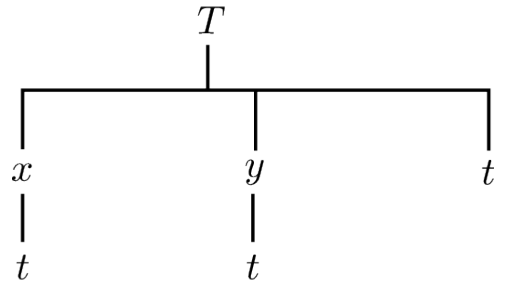
Látum u vera fall af n breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ þannig að hvert x_i má rita sem fall af m breytum $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Gerum ráð fyrir að allar hlutafleiðurnar $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ og $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ séu til og samfelldar. Þegar u er skoðað sem fall af breytunum $t_1, t_2, \ldots, t_m$ fæst að

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$



2.14.8 Dæmi

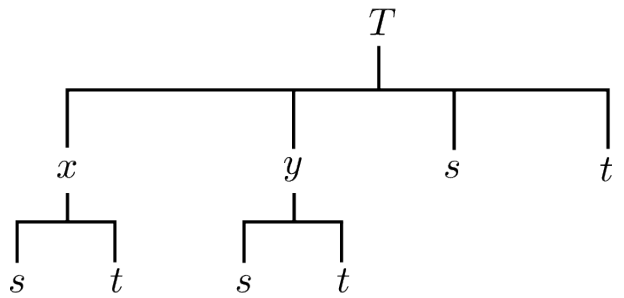
Látum T vera fall af fall af x, y og t, og x og y föll af t. Finnum $\frac{dT}{dt}$.



$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

2.14.9 Dæmi

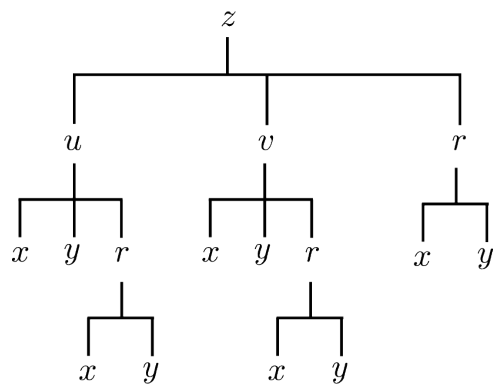
Látum T vera fall af fall af x, y, s og t, og x og y föll af s og t. Finnum $\frac{\partial T}{\partial t}$.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x,y,s}.$$

2.14.10 Dæmi

Látum z vera fall af fall af u, v og r, u og v vera föll af x, y og r og r vera fall af x og y. Skrifum niður $\frac{\partial z}{\partial x}$.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

2.15 Jákvætt einsleit föll

2.15.1 Skilgreining

Fall $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er sagt vera *jákvætt einsleitt af stigi* k (e. positively homogeneous of degree k) ef fyrir sérhvern punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og sérhverja tölu $t > 0$ gildir að

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2.15.2 Setning

Ef fall $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hefur samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður og er jákvætt einsleitt af stigi k þá er

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2.16 Diffranleiki í einni breytistærð

2.16.1 Skilgreining

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f sé skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn a. Fallið f er sagt vera *diffranlegt* í punkti a ef markgildið

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

er til.

2.17 Diffranleiki í einni breytistærð - önnur lýsing

2.17.1 Skilgreining

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f sé skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn a. Fallið f er sagt vera *diffranlegt* í punkti a ef til er tala m þannig að ef $L(x) = f(a) + m(x - a)$ þá er

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} = 0.$$

(Talan m verður að vera jöfn $f'(a)$.)

Fallið f er 'nálægt' línunni L nálægt punktinum a.

2.18 Diffranleiki

2.18.1 Skilgreining

Fall $f(x, y)$ sem er skilgreint á opinni skífu umhverfis (a, b) er sagt vera diffranlegt í punktinum (a, b) ef báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar í (a, b) og ef

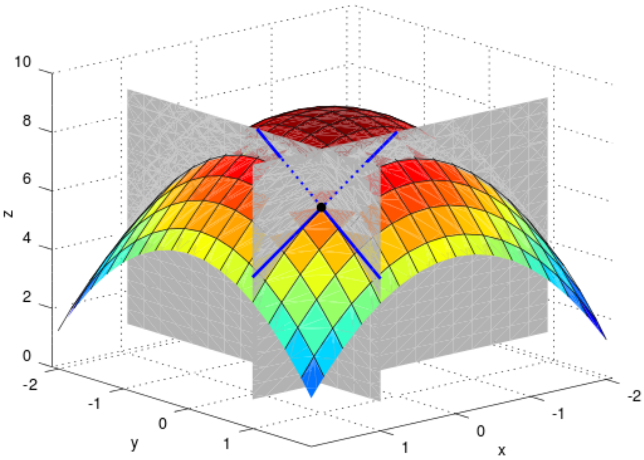
$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - S(a+h, b+k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

þar sem $S(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$.

Fallið f er 'nálægt' sléttunni S nálægt punktinum (a, b).

2.19 Snertiplan

Ef f er diffranlegt í (a, b) þá kallast planið S *snertiplan* við graf fallsins.



$S(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$

2.20 Diffranleiki

2.20.1 Setning (Meðalgildissetningin)

Gerum ráð fyrir að fallið f sé samfellt á lokaða bilinu $[a, b]$ og diffranlegt á opna bilinu (a, b). Þá er til punktur c á opna bilinu (a, b) þannig að

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

2.20.2 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu $\mathcal{D}$ með miðju í (a, b) þannig að á þessari skífu eru báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Gerum ráð fyrir að h og k séu tölur þannig að $(x+h, y+k) \in \mathcal{D}$. Þá eru til tölur θ_1 og θ_2 á milli 0 og 1 þannig að

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_1(a + \theta_1 h, b + k) + kf_2(a, b + \theta_2 k).$$

2.20.3 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu $\mathcal{D}$ með miðju í (a, b) þannig að á þessari skífu eru báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Þá er fallið f diffranlegt í (a, b).

2.20.4 Setning

Gerum ráð fyrir að $f(x, y)$ sé fall sem er diffranlegt í punktinum (a, b). Þá er f samfellt í (a, b).

2.20.5 Keðjuregla

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$. Gerum ráð fyrir að

1. $x(a, b) = p$ og $y(a, b) = q$;
2. fyrsta stigs hlutafleiður $x(s, t)$ og $y(s, t)$ eru skilgreindar í punktinum (a, b);
3. fallið f er diffranlegt í punktinum (p, q).

Þá eru fyrsta stigs hlutafleiður z með tilliti til breytanna s og t skilgreindar í punktinum (a, b) og um þær gildir að

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

2.21 Diffur

2.21.1 Skilgreining

Ritum $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Diffrið* af z er skilgreint sem

$$dz = df = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n.$$

Diffrið er nálgun á

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2.22 Varpanir $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$

2.22.1 Táknmál

Látum $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tákna vörpun. Ritum $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ þar sem hvert f_i er fall $\mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$. Fyrir punkt í $\mathbf{R}^n$ ritum við $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Síðan ritum við $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ þar sem $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ og

2.23 Jacobi-fylki

2.23.1 Skilgreining

Notum táknmálið úr 2.22.1. Ef allar hlutafleiðurnar $\partial y_i/\partial x_j$ eru skilgreindar í punktinum $\mathbf{x}$ þá skilgreinum við *Jacobi-fylki* f í punktinum $\mathbf{x}$ sem $m \times n$ fylkið

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2.24 Diffranleiki varpana $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$

2.24.1 Skilgreining

Notum táknmálið úr 2.22.1 og 2.23.1. Látum $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vera fastan punkt í $\mathbf{R}^n$ og ritum $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Vörpunin $\mathbf{f}$ er sögð diffranleg í punktinum $\mathbf{a}$ ef

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Vörpunin f er 'nálægt' línulegu vörpuninni $D\mathbf{f}$ nálægt punktinum $\mathbf{a}$.

Línulega vörpunin $D\mathbf{f}$ kallast afleiða $\mathbf{f}$.

2.25 Keðjureglan

2.25.1 Setning

Látum $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $\mathbf{g} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ vera varpanir. Gerum ráð fyrir að vörpunin $\mathbf{f}$ sé diffranleg í punkti $\mathbf{x}$ og vörpunin $\mathbf{g}$ sé diffranleg í punktinum $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Þá er samskeytta vörpunin $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ diffranleg í $\mathbf{x}$ og

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2.26 Stigull

2.26.1 Skilgreining

Látum $f(x, y)$ vera fall og (x, y) punkt þar sem báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar. Skilgreinum *stigul* f í punktinum (x, y) sem vigurinn

$$\nabla f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}.$$

Stigull f er stundum táknaður með **grad** f.

2.26.2 Ritháttur

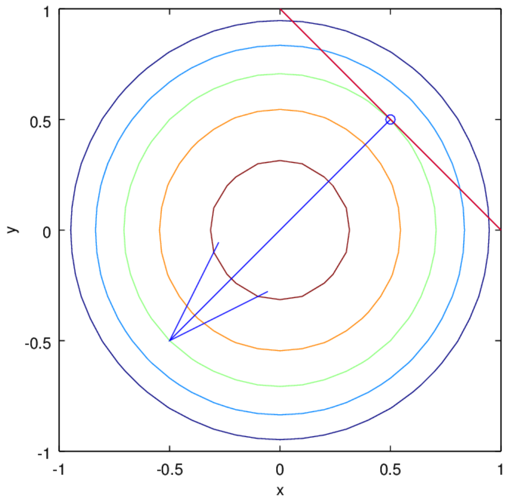
Oft hentugt að rita

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Þá er litið svo á að ∇ sé *diffurvirki*, þ.e.a.s. ∇ gefur fyrirmæli um hvað á að gera við f til að fá $\nabla f(x, y)$.

2.27 Dæmi

Graf $z = 1 - x^2 - y^2$



Jafnhæðarlínur. Stigull og snertilína við jafnhæðarlínuna $z = 0.5$ *í* $(x, y) = (0.5, 0.5)$.

2.27.1 Setning

Gerum ráð fyrir að fallið $f(x, y)$ sé diffranlegt í punktinum (a, b) og að $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Þá er vigurinn $\nabla f(a, b)$ hornréttur á þá jafnhæðarlínu f sem liggur í gegnum punktinn (a, b).

2.28 Snertilína við jafnhæðarferil

2.28.1 Setning

Gerum ráð fyrir að fallið $f(x, y)$ sé diffranlegt í punktinum (a, b) og að $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Jafna snertilínu við jafnhæðarferil f í punktinum (a, b) er gefin með formúlunni

$$\nabla f(a, b) \cdot (x, y) = \nabla f(a, b) \cdot (a, b),$$

eða

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = 0.$$

2.29 Stefnuafleiða

2.29.1 Skilgreining

Látum $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ vera einingarvigur. *Stefnuafleiða* f í punktinum (a, b) í stefnu $\mathbf{u}$ er skilgreind sem

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + hu, b + hv) - f(a, b)}{h}$$

ef markgildið er skilgreint.

Gerum ráð fyrir að fallið f sé diffranlegt í (a, b) og $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ sé einingarvigur. Þá er stefnuafleiðan í punktinum (a, b) í stefnu $\mathbf{u}$ skilgreind og gefin með formúlunni

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b).$$

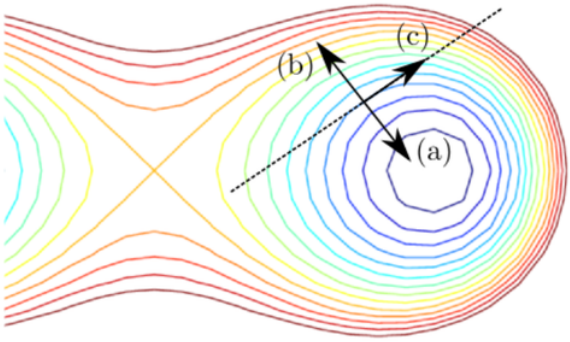
2.29.2 Setning

Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b).

(a) Hæsta gildið á stefnuafleiðunni $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ fæst þegar $\mathbf{u}$ er einingarvigur í stefnu $\nabla f(a, b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

(b) Lægsta gildið á stefnuafleiðunni $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ fæst þegar $\mathbf{u}$ er einingarvigur í stefnu $-\nabla f(a, b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

(c) Ef $\mathcal{C}$ er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og $\mathbf{u}$ er einingarsnertivigur við $\mathcal{C}$ í punktinum (a, b) þá er $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$.



2.29.3 Setning

Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b).

(a) Í punktinum (a, b) þá vex f hraðast ef haldið er í stefnu $\nabla f(a, b)$.

(b) Í punktinum (a, b) þá minnkar f hraðast ef haldið er í stefnu $-\nabla f(a, b)$.

(c) Ef $\mathcal{C}$ er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og $\mathbf{u}$ er einingarsnertivigur við $\mathcal{C}$ í punktinum (a, b) þá er er vaxtarhraði f í stefnu $\mathbf{u}$ jafn 0.

2.30 Stigull (aftur)

2.30.1 Skilgreining

Látum f vera fall af þremur breytistærðum, þannig að allar þrjár fyrsta stigs hlutafleiður f í punktinum (x, y, z) séu skilgreindar. *Stigull* f í punktinum (x, y, z) er skilgreindur sem vigurinn

$$\nabla f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

2.31 Snertiplan við jafnhæðarflöt

2.31.1 Setning

Látum f vera fall af þremur breytistærðum þannig að fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b, c). Látum $\mathcal{F}$ tákna þann jafnhæðarflöt f sem liggur um (a, b, c). Stigullinn $\nabla f(a, b, c)$ er hornréttur á flötinn $\mathcal{F}$ í punktinum (a, b, c) og snertiplan (ef $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$) við jafnhæðarflötinn í punktinum (a, b, c) er gefið með jöfnunni

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (x, y, z) = \nabla f(a, b, c) \cdot (a, b, c)$$

eða með umritun

$$f_1(a,b,c)(x-a)+f_2(a,b,c)(y-b)+f_3(a,b,c)(z-c)=0.$$

2.32 Fólgin föll og Taylor-nálganir

2.32.1 Upprifjun

Skoðum feril sem gefinn er með jöfnu $F(x,y)=0$ og gerum ráð fyrir að báðar fyrsta stigs hlutafleiður F séu samfelldar. Látum (x_0,y_0) vera punkt á ferlinum. Ef $F_2(x_0,y_0)\neq 0$ þá má skoða y sem fall af x í grennd við punktinn (x_0,y_0) og fallið $y=y(x)$ er diffranlegt í punktinum x_0 og afleiðan er gefin með formúlunni

$$y'(x_0)=-\frac{F_1(x_0,y_0)}{F_2(x_0,y_0)}.$$

Sagt að jafnan $F(x,y)=0$ skilgreini y sem *fólgið fall* af x í grennd við (x_0,y_0).

2.32.2 Setning

Látum F vera fall af n-breytum $x_1,\dots,x_n$ og gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður F séu samfelldar. Látum $(a_1,\dots,a_n)$ vera punkt þannig að $F(a_1,\dots,a_n)=0$. Ef $F_n(a_1,\dots,a_n)\neq 0$ þá er til samfellt diffranlegt fall $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ skilgreint á opinni kúlu B utan um $(a_1,\dots,a_{n-1})$ þannig að

$$\varphi(a_1,\dots,a_{n-1})=a_n$$

og

$$F(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))=0$$

fyrir alla punkta $(x_1,\dots,x_{n-1})$ í B.

Ennfremur gildir að

$$\varphi_i(a_1,\dots,a_{n-1})=-\frac{F_i(a_1,\dots,a_n)}{F_n(a_1,\dots,a_n)}.$$

2.32.3 Skilgreining

Jacobi-ákveða tveggja falla $u=u(x,y)$ og $v=v(x,y)$ með tilliti til breytanna x og y er skilgreind sem

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}.$$

Ef F og G eru föll af breytum $x,y,z,\dots$ þá skilgreinum við, til dæmis,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}\quad \text{og}\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}.$$

Ef við höfum föll F,G,H af breytum $x,y,z,w,\dots$ þá skilgreinum við, til dæmis,

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(w,z,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial w} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial w} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y}\\ \frac{\partial H}{\partial w} & \frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial y}\end{vmatrix}.$$

2.32.4 Setning (Upprifjun á reglu Cramers.)

Látum A vera andhverfanlegt $n \times n$ fylki og $\mathbf{b}$ vigur í $\mathbf{R}^n$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sé lausn á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Skilgreinum B_i sem $n \times n$ fylkið sem fæst með því að setja vigurinn $\mathbf{b}$ í staðinn fyrir dálk i í A. Þá er

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}.$$

2.32.5 Setning (Setningin um fólgin föll)

Skoðum jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\ F_{(2)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0. \end{aligned}$$

Látum $P_0 = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ vera punkt sem uppfyllir jöfnurnar. Gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður fallanna $F_{(1)}, \ldots, F_{(n)}$ séu samfelldar á opinni kúlu umhverfis P_0 og að

$$\left.\frac{\partial(F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right|_{P_0} \neq 0.$$

Þá eru til föll $\quad \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$
á opinni kúlu B umhverfis $(a_1, \ldots, a_m)$ þannig að

$$\varphi_1(a_1, \ldots, a_m) = b_1, \ldots, \varphi_n(a_1, \ldots, a_m) = b_n \qquad \text{og}$$

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) &= 0 \\ F_{(2)}(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{(n)}(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) &= 0 \end{aligned}$$

fyrir alla punkta $(x_1, \ldots, x_m)$ í B. Enn fremur fæst að

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial(F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, x_j, \ldots y_n)}}{\frac{\partial(F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}}.$$

2.32.6 Setning (Setningin um staðbundna andhverfu)

Látum

$$\mathbf{f}(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$$

vera vörpun af n breytistærðum sem tekur gildi í $\mathbf{R}^n$ og er skilgreind á opnu mengi í $\mathbf{R}^n$. Gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður fallanna $f_1,\dots,f_n$ séu samfelld föll. Ef Jacobi-fylkið $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ er andhverfanlegt í punkti $\mathbf{x}_0$ á skilgreiningarsvæði $\mathbf{f}$ þá er til opin kúla $B_{\mathbf{x}}$ utan um $\mathbf{x}_0$ og opin kúla $B_{\mathbf{y}}$ utan um $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ og vörpun $\mathbf{g} : B_{\mathbf{y}} \to B_{\mathbf{x}}$ þannig að $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ fyrir alla punkta $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ fyrir alla punkta $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{y}}$.

2.32.7 Upprifjun (Taylor-regla í einni breytistærð.)

Látum f vera $n+1$-diffranlegt fall af einni breytistærð. Margliðan

$$P_{(n)}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kallast *n-ta stigs Taylor-margliða f með miðju í a*. Til er punktur s á milli a og x þannig að

$$E_{(n)}(x) = f(x) - P_{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Fáum svo að

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{(n)}(x) + E_{(n)}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

sem er kallað *n-ta stigs Taylor-formúla.*

2.32.8 Skilgreining

Látum $f(x,y)$ vera fall þannig að fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar og samfelldar. Margliðan

$$P_{(1)}(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

kallast *fyrsta stigs Taylor-margliða f með miðju í (a,b)*.

2.32.9 Skilgreining

Látum $f(x,y)$ vera fall þannig að fyrsta og annars stigs hlutafleiður f eru skilgreindar og samfelldar. Margliðan

$$\begin{aligned} P_{(2)}(x,y) &= f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\big) \end{aligned}$$

kallast *annars stigs Taylor-margliða f með miðju í (a,b)*.

2.32.10 Skilgreining og athugasemd

Skilgreinum tvo *diffurvirkja* D_1 og D_2 þannig að

$$D_1 f(a,b) = f_1(a,b) \qquad \text{og} \qquad D_2 f(a,b) = f_2(a,b).$$

Athugið að ef hlutafleiður f af nógu háum stigum eru allar skilgreindar og samfelldar þá er $D_1D_2 = D_2D_1$, þ.e.a.s. ekki skiptir máli í hvaða röð er diffrað, bara hve oft er diffrað með tilliti til hvorrar breytu.

2.32.11 Upprifjun (Tvíliðuregla)

Skilgreinum

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Talan $\binom{n}{j}$ (lesið n yfir j) er $j+1$ talan í $n+1$ línu Pascals-þríhyrningsins. Höfum að

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

2.32.12 Regla

Ef $f(x,y)$ er fall þannig að allar hlutafleiður af n-ta og lægri stigum eru samfelldar þá gildir að

$$(hD_1 + kD_2)^n f(a,b) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^j k^{n-j} D_1^j D_2^{n-j} f(a,b).$$

2.32.13 Skilgreining

Fyrir fall $f(x,y)$ þannig að allar hlutafleiður af n-ta og lægri stigum eru samfelldar þá er *n-ta stigs Taylor-margliða f með miðju í punktinum* (a,b) skilgreind sem margliðan

$$\begin{aligned}
P_{(n)}(x,y) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}((x-a)D_1 + (y-b)D_2)^m f(a,b) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m!} \binom{m}{j} D_1^j D_2^{m-j} f(a,b)(x-a)^j (y-b)^{m-j} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a,b)(x-a)^j (y-b)^{m-j}.
\end{aligned}$$

2.32.14 Setning

Fyrir fall $f(x,y)$ þannig að allar hlutafleiður af $n+1$-ta og lægri stigum eru samfelldar þá gildir um skekkjuna í n-ta stigs Taylor-nálgun að til er tala θ á milli 0 og 1 þannig að ef $h = x-a$ og $k = y-b$ þá er

$$f(x,y) - P_{(n)}(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}(hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k).$$

Útgildisverkefni

Old stories are like old friends, she used to say. You have to visit them from time to time.

-George R.R. Martin, A Storm of Swords

3.1 Útgildi

3.1.1 Skilgreining

Látum f vera fall af tveim breytum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f)$.

Sagt er að f hafi *staðbundið lággildi* (e. local minimum) í punkti (a, b) ef til er tala $r > 0$ þannig að $f(a, b) \leq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in B_r(a, b) \cap \mathcal{D}(f)$.

Sagt er að f hafi *staðbundið hágildi* (e. local maximum) í punkti (a, b) ef til er tala $r > 0$ þannig að $f(a, b) \geq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in B_r(a, b) \cap \mathcal{D}(f)$.

Í þeim punktum þar sem f tekur annað hvort staðbundið lággildi eða staðbundið hágildi er sagt að f hafi *staðbundið útgildi* (e. local extreme).

Ef $f(a, b) \leq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ þá er sagt að f taki *lægsta gildi* í (a, b) (e. global minimum). Ef $f(a, b) \geq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ þá er sagt að f taki *hæsta gildi* í (a, b) (e. global maximum).

3.2 Staðbundið útgildi

3.2.1 Upprifjun

Látum f vera fall af einni breytu skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punkti a þá gildir eitt af þrennu um a:

1. $f'(a) = 0$. (punkturinn a kallast *stöðupunktur* f).
2. Afleiðan $f'(a)$ er ekki skilgreind.
3. Punkturinn a er jaðarpunktur $\mathcal{D}(f)$.

3.2.2 Setning

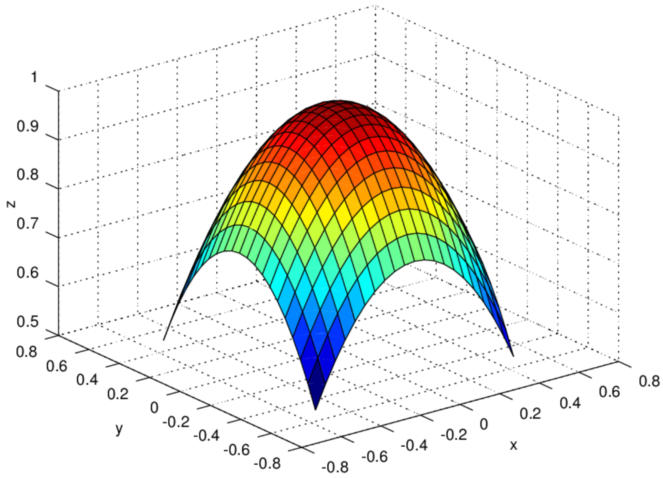
Látum f vera fall af tveim breytum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punkti (a, b) þá gildir eitt af þrennu um a

1. $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. (punkturinn (a, b) kallast *stöðupunktur* f)
2. Stigullinn $\nabla f(a, b)$ er ekki skilgreindur.

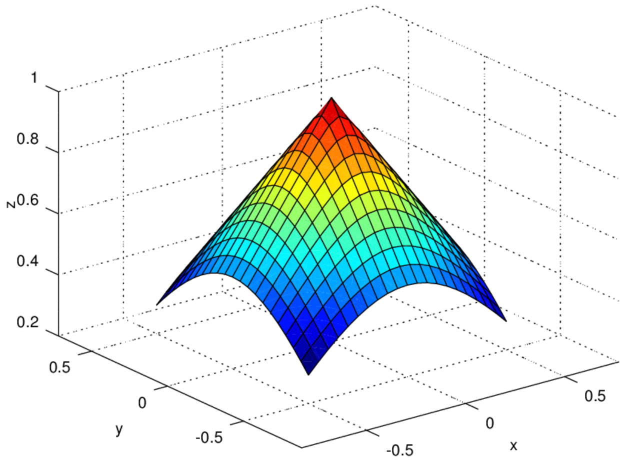
3. Punkturinn (a, b) er jaðarpunktur $\mathcal{D}(f)$.

3.2.3 Dæmi

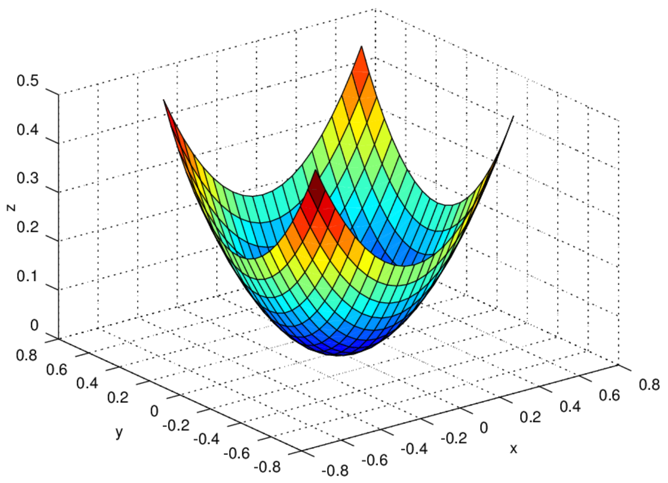
Föll skilgreind á svæðinu $-0.5 \leq x \leq 0.5$, $-0.5 \leq y \leq 0.5$. Hvar eru staðbundin hágildi?



$z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.



$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.



$z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

3.3 Tilvist útgilda

3.3.1 Setning

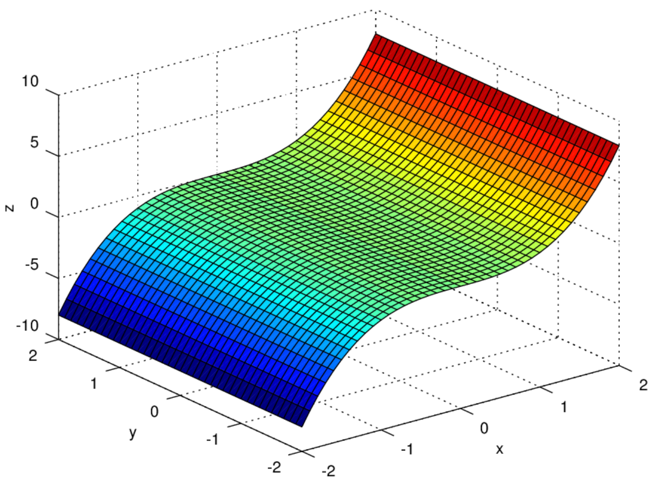
Látum f vera samfellt fall af tveim breytum skilgreint á lokuðu og takmörkuðu mengi $\mathcal{D}(f)$. Fallið f tekur þá bæði hæsta og lægsta gildi.

3.4 Söðulpunktur

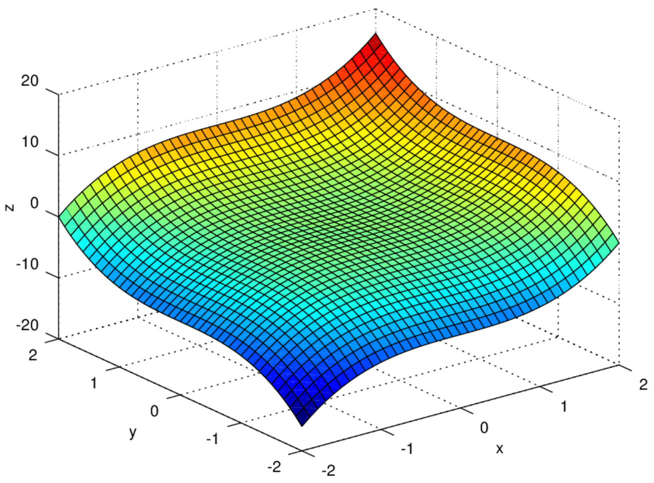
3.4.1 Skilgreining

Punktur $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ sem er ekki jaðarpunktur kallast *söðulpunktur* ef $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ en f hefur ekki staðbundið útgildi í (x, y).

Dæmi um föll með söðulpunkta.



$z = f(x, y) = x^3$.



$z = f(x, y) = x^3 + y^3$.

3.5 Staðbundið útgildi

3.5.1 Upprifjun

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f' sé samfellt fall. Gerum einnig ráð fyrir að $f'(a) = 0$. Þá gildir:

1. Ef $f''(a) > 0$ þá hefur f staðbundið lággildi í a.
2. Ef $f''(a) < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í a.
3. Ef $f''(a) = 0$ þá gæti verið staðbundið lággildi í A, það gæti verið staðbundið hágildi í a eða það gætu verið beygjuskil í a, alltsvo. ekkert hægt að segja.

3.6 Hesse-fylki

3.6.1 Skilgreining

Látum f vera fall af n breytum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og gerum ráð fyrir að allar 2. stigs hlutafleiður f séu skilgreindar í punktinum $\mathbf{x}$. Skilgreinum *Hesse-fylki* f í punktinum $\mathbf{x}$ sem $n \times n$-fylkið

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

3.7 Ferningsform (sjá kafla 10.7 í Adams)

3.7.1 Upprifjun

Ferningsform Q af n-breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er einsleit margliða af stigi 2 gefin með

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

þar sem A er samhverft $n \times n$ fylki með tölu a_{ij} í sæti (i, j) og $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T$.

3.7.2 Skilgreining

Ferningsform Q af n-breytum er sagt vera *jákvætt ákvarðað* (e. positive definite) ef $Q(\mathbf{x}) > 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ í $\mathbf{R}^n$.

Sagt að ferningsformið Q sé *neikvætt ákvarðað* (e. negative definite) ef $Q(\mathbf{x}) < 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ í $\mathbf{R}^n$.

Síðan er sagt að ferningsformið Q sé *óákvarðað* (e. indefinite) ef $Q(\mathbf{x}) < 0$ fyrir einhvern vigur $\mathbf{x}$ og $Q(\mathbf{y}) > 0$ fyrir einhvern vigur $\mathbf{y}$.

3.7.3 Setning

Látum Q vera fernings form af n breytum og A samhverft $n \times n$ fylki þannig að $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ fyrir alla vigra $\mathbf{x}$,

1. Ferningsformið er jákvætt ákvarðað ef og aðeins ef öll eigingildi A eru jákvæð.
2. Ferningsformið er neikvætt ákvarðað ef og aðeins ef öll eigingildi A eru neikvæð.
3. Ferningsformið er óákvarðað ef og aðeins ef A hefur bæði jákvæð og neikvæð eigingildi.

3.8 Staðbundið útgildi

3.8.1 Setning

Látum f vera fall af n breytum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ þannig að allar 1. og 2. stigs hlutafleiður f eru samfelldar. Látum $\mathbf{a}$ vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Þá gildir: Ef $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ er

1. ...jákvætt ákvarðað þá hefur f staðbundið lággildi í $\mathbf{a}$.
2. ...neikvætt ákvarðað þá hefur f staðbundið hágildi í $\mathbf{a}$.
3. ...óákvarðað þá hefur f söðulpunkt í $\mathbf{a}$.
4. ...hvorki jákvætt ákvarðað, neikvætt ákvarðað né óákvarðað þá nægja upplýsingarnar sem felast í jöfnunni $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ og Hesse-fylkinu ekki til að segja til um hvers eðlis stöðupunkturinn $\mathbf{a}$ er.

3.8.2 Fylgisetning

Látum f vera fall af tveim breytum þannig að 1. og 2. stigs hlutafleiður f eru samfelldar. Látum (a, b) vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. Setjum

$$A = f_{11}(a, b), \qquad B = f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b) \qquad C = f_{22}(a, b).$$

Þá gildir:

1. Ef $B^2 - AC < 0$ og $A > 0$ þá hefur f staðbundið lággildi í (a, b).
2. Ef $B^2 - AC < 0$ og $A < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í (a, b).
3. Ef $B^2 - AC > 0$ þá hefur f söðulpunkt í (a, b).
4. Ef $B^2 - AC = 0$ þá er ekkert hægt að segja.

3.9 Ferningsform

3.9.1 Regla

Ef A er samhverft $n \times n$ fylki með tölu a_{ij} í sæti (i, j) og

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

þá gildir

1. Ef $D_i > 0$ fyrir $1 \leq i \leq n$ þá er A jákvætt ákvarðað.
2. Ef $D_i > 0$ fyrir slétt i í $\{1, 2, \ldots, n\}$ og $D_i < 0$ fyrir oddatölu i í $\{1, 2, \ldots, n\}$ þá er A neikvætt ákvarðað.
3. Ef $\det(A) = D_n \neq 0$ en hvorki 1 né 2 gilda þá er A óákvarðað.
4. Ef $\det(A) = 0$ þá er A hvorki jákvætt né neikvætt ákvarðað en getur verið óákvarðað.

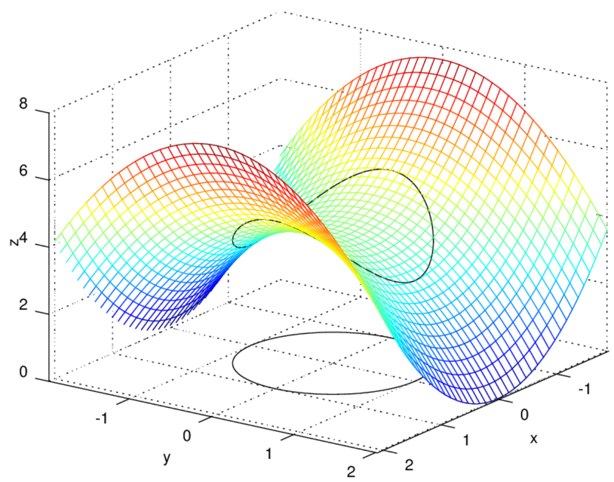
3.10 Útgildi falla þar sem breytur uppfylla skorðujöfnur

3.10.1 Sértækar aðferðir

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

1. Er mögulegt að einangra x eða y í jöfnunni $g(x, y) = 0$?
   - Ef hægt er að einangra y og rita $y = h(x)$ þá snýst verkefnið nú um að finna útgildi falls $f(x, h(x))$ af einni breytu x.
2. Er hægt að stika ferilinn $g(x, y) = 0$?
   - Ef $\mathbf{r}$ er stikun á ferlinum þá þurfum við að leita að útgildum fallsins $f(\mathbf{r}(t))$ þar sem er bara ein breyta.

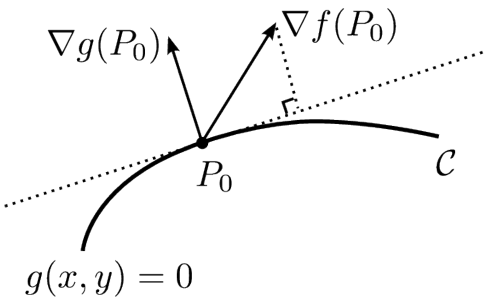
3.10.2 Dæmi



Hver eru hæstu og lægstu gildi fallsins $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ á menginu $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$?

3.10.3 Setning

Látum f og g vera föll sem eru bæði diffranleg í punktinum $P_0 = (x_0, y_0)$ sem liggur á ferlinum $g(x, y) = 0$, og er ekki endapunktur ferilsins. Gerum ráð fyrir að $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Gerum líka ráð fyrir að ef við einskorðum fallið f við ferilinn $g(x, y) = 0$ þá hafi f staðbundið útgildi í P_0. Þá eru stiglarnir $\nabla f(x_0, y_0)$ og $\nabla g(x_0, y_0)$ samsíða.



Ef stiglarnir $\nabla g(P_0)$ og $\nabla f(P_0)$ eru ekki samsíða þá vex f eða minnkar þegar farið er eftir $\mathcal{C}$ út frá punktinum P_0.

3.11 Lagrange-margfaldarar

3.11.1 Reikniaðferð

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

Búum til *Lagrange-fallið*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Stöðupunktar L, þ.e.a.s. punktar (x_0, y_0, λ_0) þar sem $\nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$, gefa mögulega punkta (x_0, y_0) þar sem f tekur útgildi.

Þessir punktar finnast með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Talan λ nefnist *Lagrange-margfaldari*.

3.11.2 Regla

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

Athuga þarf punkta sem uppfylla eitt af eftirfarandi skilyrðum:

1. Stöðupunktar $L(x, y, \lambda)$.
2. Punktar (x, y) þar sem $\nabla g(x, y) = \mathbf{0}$
3. Punktar (x, y) þar sem annar eða báðir stiglanna $\nabla g(x, y)$ og $\nabla f(x, y)$ eru ekki skilgreindir.
4. „Endapunktar" ferilsins $g(x, y) = 0$.

3.11.3 Reikniaðferð

Finna skal útgildi falls $f(x, y, z)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y, z) sem uppfylla jöfnurnar $g(x, y, z) = 0$ og $h(x, y, z) = 0$.

Búum til Lagrange-fallið

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

Stöðupunktar L, þ.e.a.s. punktar $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ þar sem $\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \mathbf{0}$ gefa mögulega punkta (x_0, y_0, z_0) þar sem f tekur útgildi.

Þessir punktar finnast með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu h_1(x, y, z) &= 0 \\
f_2(x, y, z) + \lambda g_2(x, y, z) + \mu h_2(x, y, z) &= 0 \\
f_3(x, y, z) + \lambda g_3(x, y, z) + \mu h_3(x, y, z) &= 0 \\
g(x, y, z) &= 0 \\
h(x, y, z) &= 0.
\end{aligned}$$

Margföld heildi

A bruise is a lesson... and each lesson makes us better.

- George R.R. Martin, A Game of Thrones

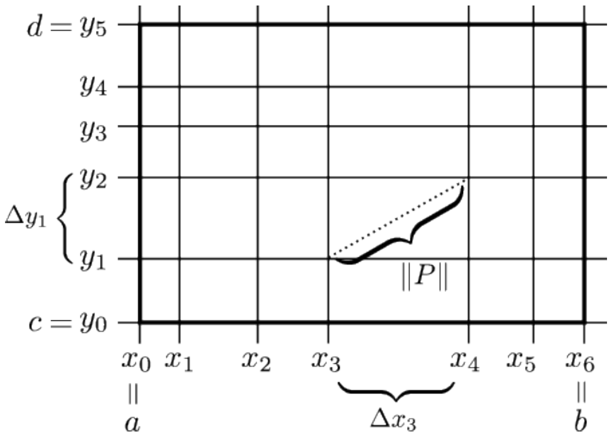
4.1 Skiptingar

4.1.1 Skilgreining

Látum $R = [a, b] \times [c, d]$ vera rétthyrning í planinu. *Skipting* P á rétthyrningnum R felst í því að taka skiptingar

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \qquad \text{og} \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

á bilunum $[a, b]$ og $[c, d]$ og nota þær skiptingar til að skipta R upp í rétthyrninga $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Ritum $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ og $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. *Norm* skiptingarinnar P, táknað með $\|P\|$, er skilgreint sem lengd lengstu hornalínu í rétthyrningunum $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.



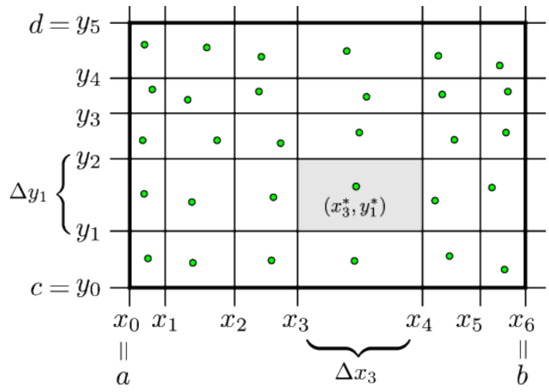
Skipting P *á rétthyrningi* $R = [a, b] \times [c, d]$.

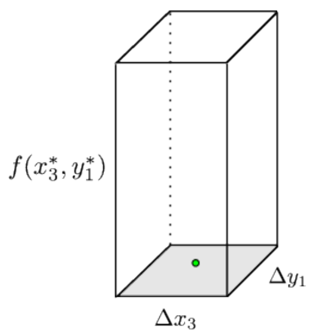
4.2 Riemann-summa

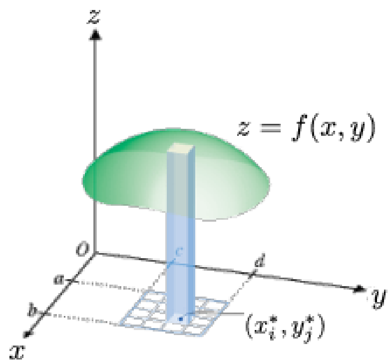
4.2.1 Skilgreining

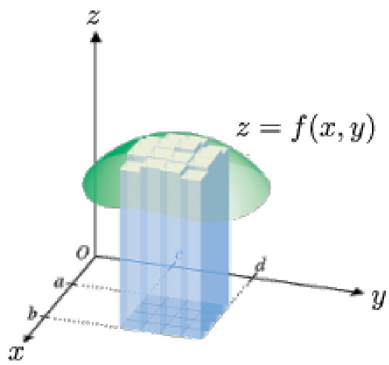
Látum f vera fall skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ og látum P vera skiptingu á R. Veljum úr hverjum rétthyrningi $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ punkt (x_i^*, y_j^*). Skilgreinum *Riemann-summuna*

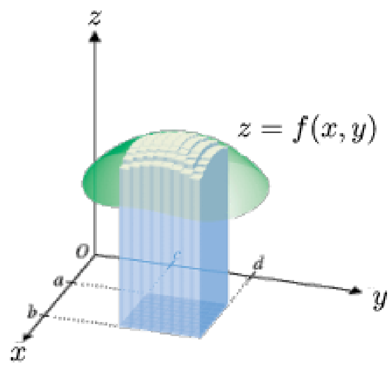
$$\mathcal{R}(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j.$$











4.3 Tvöfalt heildi yfir rétthyrning

4.3.1 Skilgreining

Sagt er að fall f skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ sé *heildanlegt yfir* R með heildi I (hér stendur I fyrir tölu) ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að $|\mathcal{R}(f, P) - I| < \varepsilon$ fyrir allar skiptingar P með $\|P\| < \delta$ óháð vali á punktunum (x_i^*, y_j^*).

Ritum þá

$$\iint_R f(x,y)dA = I.$$

4.4 Tvöfalt heildi yfir takmarkað svæði

4.4.1 Skilgreining

Látum D vera takmarkað svæði í planinu. Fall f er sagt heildanlegt yfir D ef til er rétthyrningur R sem inniheldur D og fallið

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{ef } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{ef } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

er heildanlegt yfir R.

4.4.2 Setning

Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu og takmörkuðu svæði D í planinu $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að jaðar D samanstandi af endanlega mörgum ferlum sem hafa endanlega lengd. Þá er fallið f heildanlegt yfir D.

4.4.3 Setning

Látum D vera svæði í planinu og f takmarkað fall skilgreint á D og heildanlegt yfir D. Þá gildir:

1. $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$ ef flatarmál D er 0.
2. $\iint_D 1\,dA =$ flatarmál D.
3. Ef $f(x,y) \geq 0$ fyrir alla punkta (x,y) í D þá er $\iint_D f(x,y)\,dA$ jafnt rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x,y)$.
4. Ef $f(x,y) \leq 0$ fyrir alla punkta (x,y) í D þá er $\iint_D f(x,y)\,dA$ jafnt mínus rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x,y)$.

4.4.4 Setning

Ef D er svæði í planinu og f og g heildanleg föll yfir D þá gildir:

1. Ef L og M eru fastar þá er

$$\iint_D Lf(x,y) + Mg(x,y)\,dA = L\iint_D f(x,y)\,dA + M\iint_D g(x,y)\,dA.$$

2. Ef $f(x,y) \leq g(x,y)$ þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA.$$

3. Þríhyrningsójafna:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA.$$

1. Ritum D sem sammengi af svæðum $D_1, \ldots, D_k$ sem skarast ekki nema mögulega í jaðarpunktum þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x,y)\,dA.$$

4.4.5 Setning Fubinis

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir rétthyrning $R = [a,b] \times [c,d]$. Setjum

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (x \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}).$$

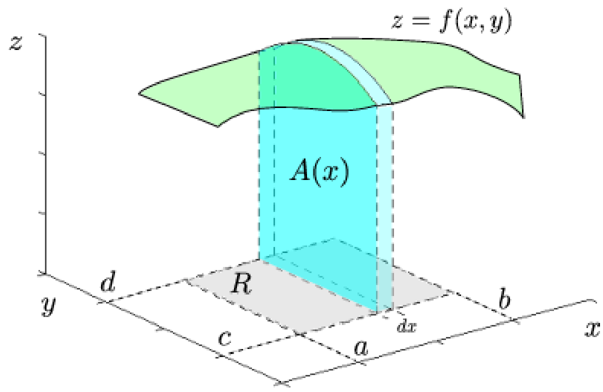
Þá gildir að

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Sömuleiðis gildir þegar við setjum

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (y \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}) \qquad \text{að}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$



4.5 x-einföld og y-einföld svæði

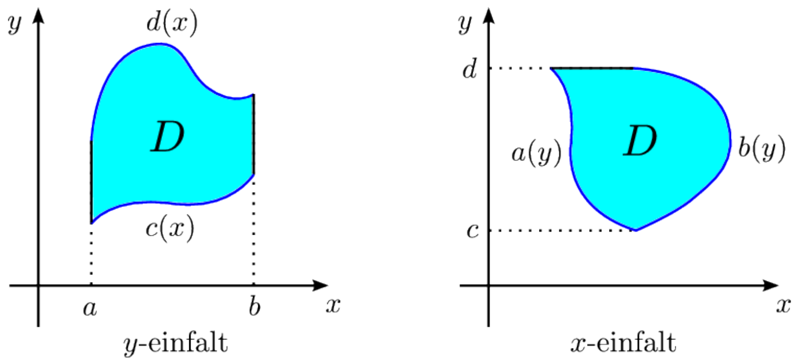
4.5.1 Skilgreining

Svæði D í planinu er sagt vera y-*einfalt* ef hægt er að finna tölur a og b og föll $c(x)$ og $d(x)$ þannig að

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}.$$

Svæði D í planinu er sagt vera x-*einfalt* ef hægt er að finna tölur c og d og föll $a(y)$ og $b(y)$ þannig að

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, a(y) \le x \le b(y)\}.$$



4.5.2 Regla

Lokað og takmarkað svæði D í planinu er y-einfalt ef og aðeins ef sérhver lína af gerðinni $x = x_0$ sker D í línustriki.

Lokað og takmarkað svæði D er x-einfalt ef og aðeins ef sérhver lína af gerðinni $y = y_0$ sker svæðið í línustriki.

4.6 Heildi yfir x-einföld og y-einföld svæði

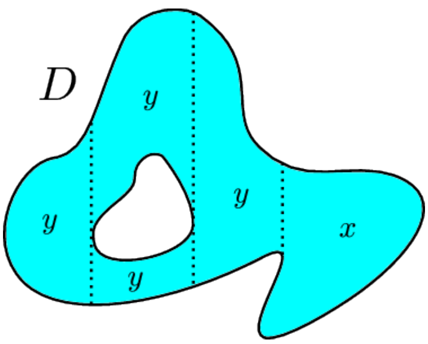
4.6.1 Setning

Látum $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ vera y-einfalt svæði og $f(x, y)$ fall sem er heildanlegt yfir D. Þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Látum $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ vera x-einfalt svæði og $f(x, y)$ fall sem er heildanlegt yfir D. Þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



Hér er svæðinu D skipt í endanlega mörg x-einföld og *y-einföld svæði sem skarast eingöngu í punktum á jaðrinum.*

4.7 Óeiginleg heildi

4.7.1 Umræða

Látum $f(x, y) \geq 0$ vera jákvætt fall sem er skilgreint á svæði D í sléttunni. Ef

1. D er ótakmarkað svæði eða

2. $f(x, y)$ er ótakmarkað á D

má í sumum tilfellum skilgreina tvöfalda heildið af f yfir D.

Það er gert með því að finna fyrst runu af stækkandi lokuðum og takmörkuðum mengjum $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots \subseteq D$ sem 'stefnir á' D. Ef

$$\iint_{D_n} f(x, y)\, dA$$

er vel skilgreint fyrir öll n og hefur markgildi þegar $n \to \infty$ (fyrir allar ólíkar runur $(D_n)_{n\geq 1}$) þá skilgreinum við *óeiginlega heildið*

$$\iint_D f(x, y)\, dA := \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\, dA.$$

4.7.2 Skilgreining

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir svæði D í $\mathbb{R}^2$. *Meðalgildi* fallsins f á D er skilgreint sem talan

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{flatarmál } D} \iint_D f(x, y)\, dA.$$

4.7.3 Skilgreining

Segjum að mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sé *ferilsamanhangandi* (e. path-connected) ef fyrir sérhverja tvo punkta $P, Q \in D$ gildir að til er stikaferill $\mathbf{r} : [0, 1] \to D$ þannig að $\mathbf{r}(0) = P$ og $\mathbf{r}(1) = Q$.

Aðvörun: Í bók er orðið *connected* notað fyrir hugtakið *ferilsamanhangandi*. Venjulega er orðið *connected* notað yfir annað hugtak, skylt en samt ólíkt.

4.7.4 Setning (Meðalgildissetning fyrir tvöföld heildi)

Gerum ráð fyrir að f sé samfellt fall sem er skilgreint á lokuðu, takmörkuðu og ferilsamanhangandi svæði D í $\mathbb{R}^2$. Þá er til punktur (x_0, y_0) í D þannig að

$$\frac{1}{\text{flatarmál } D} \iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0).$$

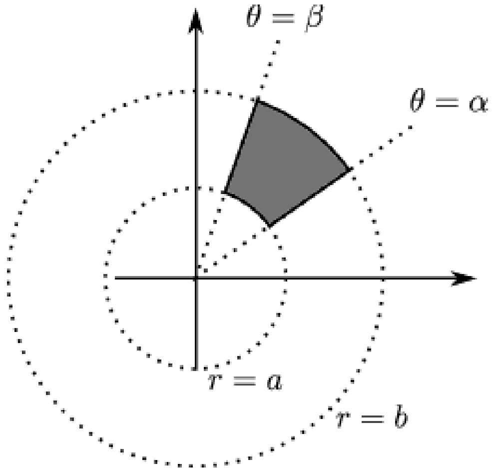
4.8 Breytuskipti

4.8.1 Upprifjun

Látum $P = (x, y) \neq \mathbf{0}$ vera punkt í plani. *Pólhnit* P er talnapar $[r, \theta]$ þannig að r er fjarlægð P frá $O = (0, 0)$ og θ er hornið á milli striksins $\overline{OP}$ og x-ássins. (Hornið er mælt þannig að rangsælis stefna telst jákvæð, og leggja má við θ heil margfeldi af 2π.)

4.8.2 Skilgreining

Pólhnitarétthyrningur í xy-planinu er svæði sem afmarkast af tveimur hringbogum $x^2 + y^2 = a^2$ og $x^2 + y^2 = b^2$ og tveimur hálflínum sem byrja í $(0, 0)$ og mynda hornin α og β við x-ásinn (Hornin eru mæld þannig að rangsælis stefna telst jákvæð.)



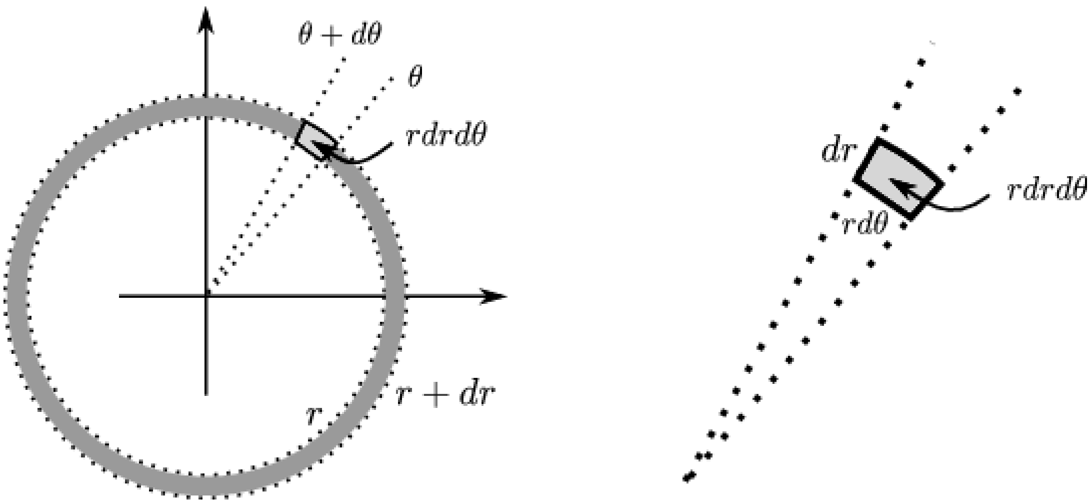
Gerum ráð fyrir að $0 \le a \le b$ og að $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Þá má lýsa pólhnitarétthyrningnum með því að nota pólhnit þannig að

$$D = \{[r, \theta] \mid 0 \le a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}.$$

4.8.3 Setning

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir pólhnitarétthyrning $D = \{[r, \theta] \mid 0 \le a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$ þá er

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$



4.8.4 Upprifjun

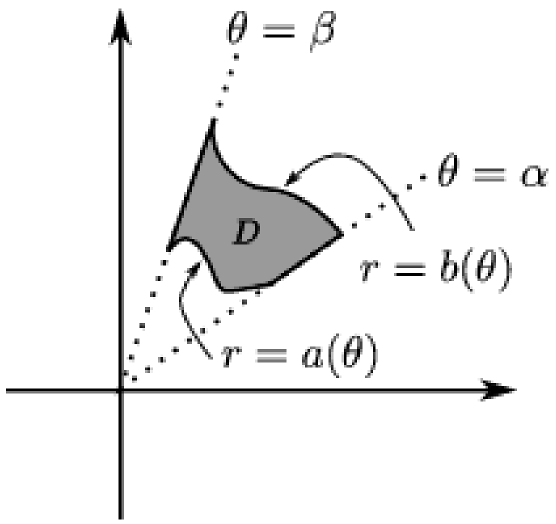
Látum f vera fall skilgreint á bili $[\alpha, \beta]$. Jafnan $r = f(\theta)$ lýsir mengi allra punkta í planinu sem hafa pólhnit á forminu $[f(\theta), \theta]$ þar sem $\alpha \le \theta \le \beta$. Þetta mengi kallast *pólhnitagraf* fallsins f.

4.8.5 Setning

Látum D vera svæði í xy-plani sem afmarkast af pólhnitalínum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ og tveimur pólhnitagröfum $r = a(\theta)$ og $r = b(\theta)$. Gerum ráð fyrir að $0 \le a(\theta) \le r \le b(\theta)$ og $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Ef f er heildanlegt fall yfir

D þá er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$



4.8.6 Regla

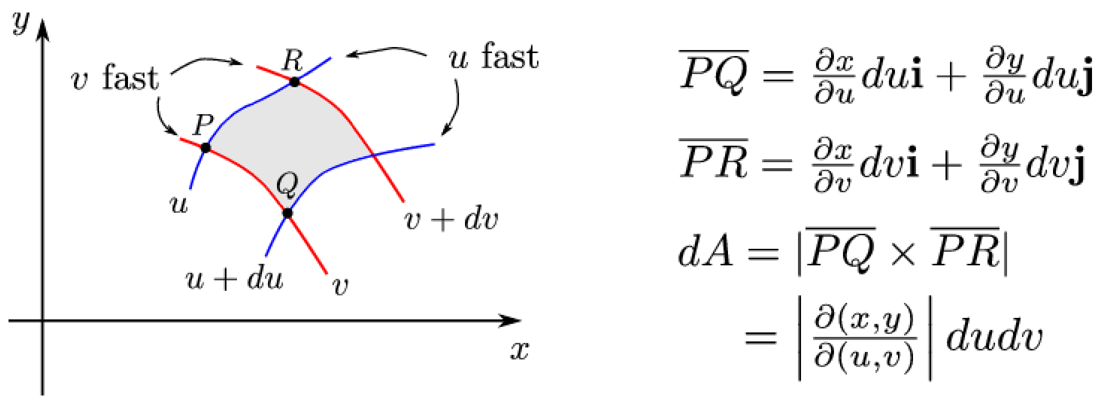
Hugsum okkur að $f(x,y)$ sé fall og hægt sé að rita $f(x,y) = g(x)h(y)$. Látum $R = [a,b] \times [c,d]$. Þá er

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_c^d g(x)h(y)\,dy\,dx \\ &= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

4.8.7 Setning (Almenn breytuskiptaregla fyrir tvöföld heildi)

Látum $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ vera gagntæka vörpun milli svæðis S í uv-plani og svæðis D í xy-plani. Gerum ráð fyrir að föllin $x(u,v)$, $y(u,v)$ hafi samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður á S. Ef f er heildanlegt fall yfir D, þá er fallið $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ heildanlegt yfir S og

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S g(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$



4.9 Þreföld heildi

4.9.1 Umræða

Heildi falls $f(x, y, z)$ yfir kassa $K = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ í $\mathbb{R}^3$ er skilgreint á sambærilegan hátt og tvöfalt heildi er skilgreint.

Á sama hátt og fyrir tvöföld heildi má svo skilgreina heildi fyrir almennari rúmskika í $\mathbb{R}^3$.

Heildi falls $f(x, y, z)$ yfir rúmskika R er táknað með

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV.$$

(dV stendur fyrir að heildað er með tilliti til rúmmáls.)

4.9.2 Setning

Látum $f(x, y, z)$ vera fall sem er heildanlegt yfir kassa $K = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ í $\mathbb{R}^3$. Þá er

$$\iiint_K f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Breyta má röð heilda að vild, t.d. er

$$\iiint_K f(x, y, z)\, dV = \int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

4.9.3 Setning

Látum $f(x, y, z)$ vera fall sem er heildanlegt yfir rúmskika R og gerum ráð fyrir að R hafi lýsingu á forminu

$$R = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x),\ u(x, y) \le z \le v(x, y)\}.$$

Þá er

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Breyturnar x, y, z geta svo skipt um hlutverk.

4.9.4 Setning (Almenn breytuskiptaformúla fyrir þreföld heildi.)

Látum

$$(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

vera gagntæka vörpun milli rúmskika R í xyz-rúmi og rúmskika S í uvw-rúmi. Gerum ráð fyrir að föllin $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ hafi öll samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður. Ef $f(x, y, z)$ er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\begin{aligned}&\iiint_R f(x, y, z)\, dV \\ &\qquad = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw.\end{aligned}$$

4.9.5 Skilgreining

Látum (x, y, z) vera punkt í $\mathbb{R}^3$. *Sívalningshnit* (x, y, z) eru þrennd talna r, θ, z þannig að

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z.$$

Athugasemd: Athugið að $[r, \theta]$ eru pólhnit punktsins (x, y).

4.9.6 Setning (Breytuskipti yfir í sívalningshnit.)

Látum R vera rúmskika í $\mathbb{R}^3$ og látum $f(x, y, z)$ vera heildanlegt fall yfir R. Gerum ráð fyrir að R megi lýsa með eftirfarandi skorðum á sívalningshnit punktanna sem eru í R

$$\alpha \le \theta \le \beta,\ a(\theta) \le r \le b(\theta), u(r, \theta) \le z \le v(r, \theta),$$

þar sem $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Þá er

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

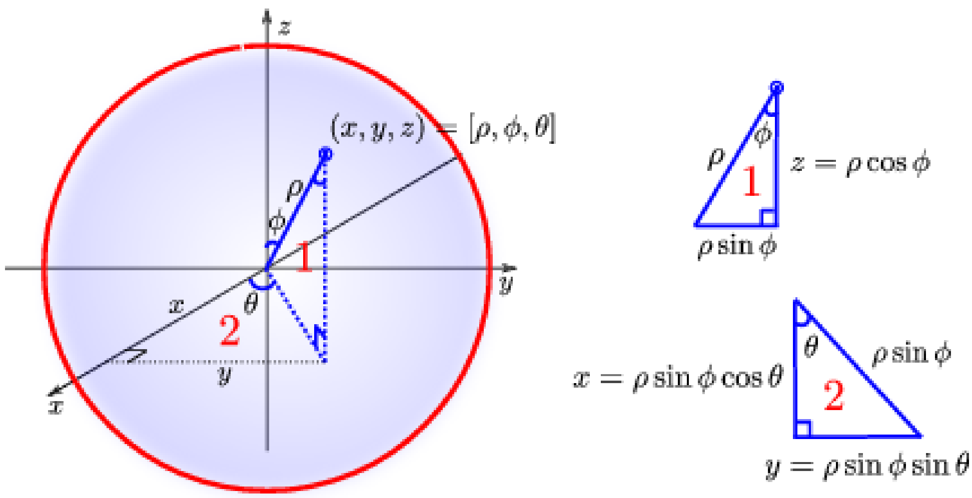
4.10 Kúluhnit

4.10.1 Skilgreining

Látum (x, y, z) vera punkt í $\mathbb{R}^3$. *Kúluhnit* (x, y, z) eru þrennd talna ρ, φ, θ þannig að

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\varphi.$$

Punktur sem hefur kúluhnit ρ, φ, θ er táknaður með $[\rho, \varphi, \theta]$.



4.10.2 Umræða

Eftirfarandi jöfnur gefa aðferð til að finna kúluhnit:

- ρ er fjarlægðin frá $(0,0,0)$ til (x,y,z), það er að segja

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

- φ er hornið á milli jákvæða hluta z-ássins og línustriksins frá $(0,0,0)$ til (x,y,z). Hornið φ má ákvarða út frá jöfnunni

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

- θ er hornið sem jákvæði hluti x-ásins myndar við línustrikið frá $(0,0,0)$ til $(x,y,0)$ (sama horn og notað í sívalningshnitum (og pólhnitum)). Hornið θ má finna út frá jöfnunni

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Um kúluhnit $[\rho,\varphi,\theta]$ fyrir punkt (x,y,z) gildir að velja má ρ,φ,θ þannig að $0\leq\rho$, $0\leq\varphi\leq\pi$ og $0\leq\theta\leq 2\pi$.

4.11 Breytuskipti í kúluhnit

4.11.1 Setning

Látum R vera rúmskika þannig að þegar notuð eru kúluhnit þá fæst eftirfarandi lýsing

$$R = \{[\rho,\varphi,\theta] \mid \alpha\leq\theta\leq\beta, c\leq\varphi\leq d, a\leq\rho\leq b\}.$$

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta\int_c^d\int_a^b f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

4.12 Massamiðja

4.12.1 Regla

Látum D tákna svæði í plani. Hugsum D sem plötu þ.a. í punkti (x,y) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x,y)$. Massi plötunnar er

$$m = \iint_D \delta(x,y)\,dA.$$

Vægi plötunnar um línuna $x=0$ (þ.e. y-ás) og um línuna $y=0$ (þ.e. x-ás) eru gefin með

$$M_{x=0} = \iint_D x\delta(x,y)\,dA \quad \text{og} \quad M_{y=0} = \iint_D y\delta(x,y)\,dA.$$

Hnit *massamiðju* plötunnar eru $(\overline{x},\overline{y})$ þar sem

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad \text{og} \quad \overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m}.$$

4.12.2 Regla

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x, y, z) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y, z)$. Massi hlutarins er

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z)\, dV.$$

Vægi hlutarins um planið $x = 0$ (þ.e. yz-planið) er

$$M_{x=0} = \iiint_R x\delta(x, y, z)\, dV.$$

Svipað skilgreinum við

$$M_{y=0} = \iiint_R y\delta(x, y, z)\, dV \quad \text{og} \quad M_{z=0} = \iiint_R z\delta(x, y, z)\, dV.$$

Hnit *massamiðju* hlutarins eru $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ þar sem

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \qquad \text{og} \qquad \overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \qquad \text{og} \qquad \overline{z} = \frac{M_{z=0}}{m}.$$

4.13 Hverfitregða

4.13.1 Regla

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x, y, z) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y, z)$. Látum L tákna línu (snúningsás) í rúminu. *Hverfitregða* hlutarins um L er

$$I = \iiint_R D^2\, \delta\, dV$$

þar sem $\delta = \delta(x, y, z)$ og $D = D(x, y, z)$ er fjarlægð punktsins (x, y, z) frá L.

4.14 Yfirborðsflatarmál

4.14.1 Regla

Látum D vera svæði í plani og $f(x, y)$ diffranlegt fall skilgreint á D. Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ þar sem $(x, y) \in D$ er gefið með formúlunni

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_1(x, y)^2 + f_2(x, y)^2}\, dA.$$

KAFLI 5

Vigursvið

Different roads sometimes lead to the same castle.

-George R.R. Martin, A Game of Thrones

5.1 Vigursvið

5.1.1 Skilgreining

Vigursvið á $\mathbb{R}^2$ er vörpun

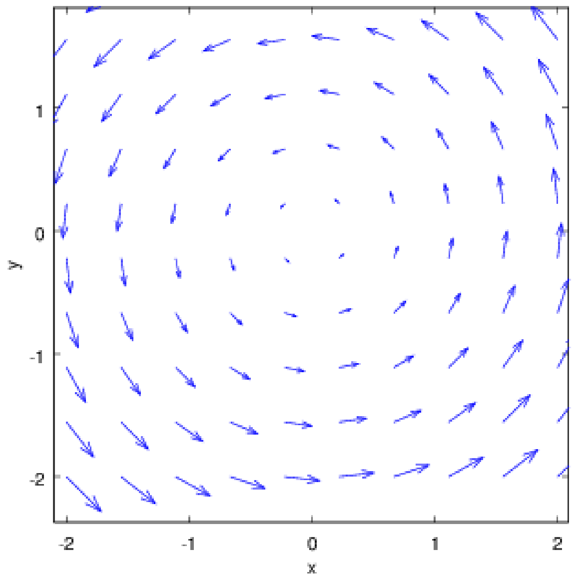
$$\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}.$$

Þegar talað er um vigursvið þá hugsum við vigurinn $\mathbf{F}(x,y)$ sem vigur í $\mathbb{R}^2$ sem hefur fótpunkt í punktinum (x,y). Vigursvið $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ er sagt *samfellt* ef föllin $F_1(x,y)$ og $F_2(x,y)$ eru samfelld.

Vigursvið á $\mathbb{R}^3$ er vörpun

$$\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}.$$

Við hugsum $\mathbf{F}(x,y,z)$ sem vigur með (x,y,z) sem fótpunkt. Skilgreiningin á því að vigursvið í $\mathbb{R}^3$ sé samfellt er eins og á samfeldni vigursvið í $\mathbb{R}^2$.

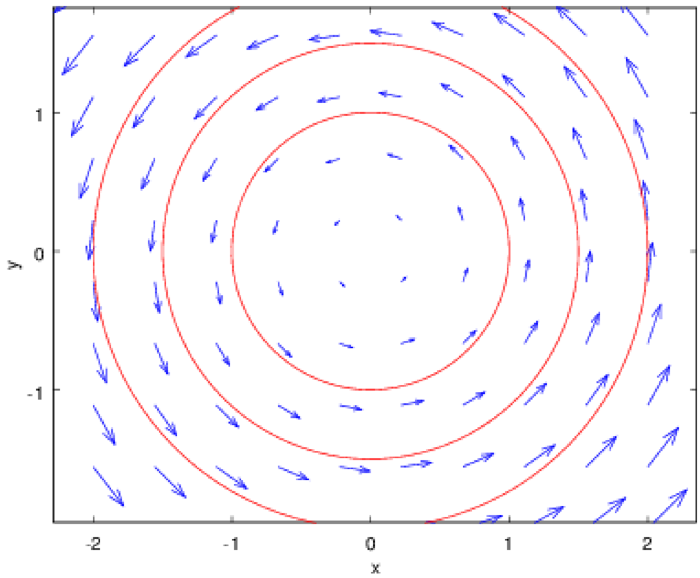


Vigursviðið $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

5.2 Straumlína

5.2.1 Skilgreining

Ferill C í planinu kallast *straumlína* (e. stream line, flow line) fyrir vigursvið $\mathbf{F}(x, y)$ ef í hverjum punkti (x, y) á ferlinum er vigurinn $\mathbf{F}(x, y)$ snertivigur við ferilinn.



Vigursviðið $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ *ásamt nokkrum straumlínum.*

5.3 Stigulsvið

5.3.1 Skilgreining

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y)$ kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* (e. gradient field, conservative field) á mengi D ef til er fall $\varphi(x, y)$ þannig að

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$$

fyrir alla punkta $(x, y) \in D$, það er að segja ef

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$$

þá er

$$F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) \quad \text{og} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y).$$

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y, z)$ kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* ef til er fall $\varphi(x, y, z)$ þannig að $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$.

Fallið φ kallast *mætti* (e. potential) fyrir vigursviðið $\mathbf{F}$.

5.3.2 Setning

Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$ vera vigursvið þannig að föllin $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$ hafi samfelldar hlutafleiður. Ef $\mathbf{F}(x, y)$ er stigulsvið þá er

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y).$$

Athugasemd: Þó að hlutafleiðurnar séu jafnar þá er **ekki** hægt að álykta að $\mathbf{F}$ sé stigulsvið. Þetta atriði verður rætt síðar.

5.3.3 Setning

Látum $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$ vera vigursvið þannig að föllin $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)$ og $F_3(x,y,3)$ hafi samfelldar hlutafleiður. Ef $\mathbf{F}(x,y,z)$ er stigulsvið þá er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,z),\\
\frac{\partial}{\partial z}F_1(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}F_3(x,y,z) \quad \text{og}\\
\frac{\partial}{\partial z}F_2(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}F_3(x,y,z).
\end{aligned}$$

5.3.4 Reikniaðferð

Finna á mætti $\varphi(x,y)$ fyrir stigulsvið $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$. Viljum finna fall $\varphi(x,y)$ þannig að

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = F_1(x,y) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = F_2(x,y).$$

Með því að heilda þessar jöfnur fæst að

$$\varphi(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + C_1(y)$$

$$og$$

$$\varphi(x,y) = \int F_2(x,y)\,dy + C_2(x).$$

Þegar fyrra stofnfallið er reiknað þá er y hugsað sem fasti og því fæst heildunarfasti sem getur verið fall af y. Lokaskrefið er svo að horfa á jöfnurnar tvær hér að ofan og sjá hvort ekki er hægt að finna gildi fyrir heildunarfastanna $C_1(x)$ og $C_2(y)$ þannig að sama formúlan fyrir $\varphi(x,y)$ fáist.

5.4 Heildi falls yfir feril

5.4.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$ stikaðan af samfellt diffranlegum stikaferli $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Ritum $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. *Heildi falls $f(x,y)$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$ með tilliti til bogalengdar* er skilgreint sem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\,ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt\\
&= \int_a^b f(x(t),y(t))\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Sama aðferð notuð til að skilgreina heildi falls yfir feril í $\mathbb{R}^3$.

5.4.2 Setning

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ séu tveir samfellt diffranlegir stikaferlar sem báðir stika ferilinn $\mathcal{C}$. Ef fall $f(x,y)$ er heildað yfir $\mathcal{C}$ þá fæst sama útkoma hvort sem stikunin $\mathbf{r}_1$ eða stikunin $\mathbf{r}_2$ er notuð við útreikningana.

5.4.3 Skilgreining

Ferill $\mathcal{C}$ í plani er sagður *samfellt diffranlegur á köflum* ef til er stikun $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ á $\mathcal{C}$ þannig að til eru punktar $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ þannig að á hverju bili (t_i, t_{i+1}) er $\mathbf{r}$ samfellt diffranlegur ferill og markgildin

$$\lim_{t\to t_i^+} \mathbf{r}'(t) \qquad \text{og} \qquad \lim_{t\to t_{i+1}^-} \mathbf{r}'(t)$$

eru bæði til.

Líka sagt að stikaferillinn $\mathbf{r}$ sé *samfellt diffranlegur á köflum.*

5.5 Heildi vigursviðs eftir ferli

5.5.1 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}(x,y)$ vera vigursvið og $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stikun á ferli $\mathcal{C}$ og gerum ráð fyrir að stikaferillinn $\mathbf{r}$ sé samfellt diffranlegur á köflum. *Heildi vigursviðsins* $\mathbf{F}(x,y)$ *eftir ferlinum* $\mathcal{C}$ er skilgreint sem

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathbf{T}\,ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt.$$

5.5.2 Skilgreining

Ritum $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i}+F_2(x,y)\,\mathbf{j}$. Ritum líka $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}$. Þá má rita $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$. Með því að nota þennan rithátt fæst að

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x(t),y(t))\,\mathbf{j})\cdot(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_a^b F_1(x(t),y(t))x'(t)\,dt + F_2(x(t),y(t))y'(t)\,dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

Athugasemd: Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{r}_2 : [a',b'] \to \mathbb{R}^2$ séu tveir samfellt diffranlegir á köflum stikaferlar sem stika $\mathcal{C}$. Gerum ennfremur ráð fyrir að $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(b')$ og $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(a')$ (þ.e.a.s. stikaferlarnir fara í sitthvora áttina eftir $\mathcal{C}$). Þá gildir ef $\mathbf{F}(x,y)$ er vigursvið að

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_1 = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_2.$$

(Ef breytt er um stefnu á stikun á breytist formerki þegar vigursvið heildað eftir ferlinum.)

5.6 Ferilheildi og stigulsvið

5.6.1 Setning

Látum $\mathbf{F}(x, y)$ vera samfellt stigulsvið skilgreint á svæði D í $\mathbb{R}^2$ og látum φ vera fall skilgreint á D þannig að $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in D$. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to D$ vera stikaferill sem er samfellt diffranlegur á köflum og stikar feril $\mathcal{C}$ í D. Þá er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

(Samsvarandi gildir fyrir vigursvið skilgreint á svæði $D \subseteq \mathbb{R}^3$.)

5.6.2 Fylgisetning

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt stigulsvið skilgreint á mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \to D$ vera stikaferil sem er samfellt diffranlegur á köflum og lokaður (þ.e.a.s. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$) og stikar feril $\mathcal{C}$. Þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(Ath. að rithátturinn

$$\oint_{\mathcal{C}}$$

er gjarnan notaður þegar heildað er yfir lokaðan feril $\mathcal{C}$.)

5.6.3 Fylgisetning

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt stigulsvið skilgreint á mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to D$ og $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to D$ vera stikaferla sem eru samfellt diffranlegir á köflum og stika ferlana $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1(a_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$ og $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(b_2)$, þ.e.a.s. stikaferlarnir $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ hafa sameiginlega upphafs- og endapunkta. Þá er

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

5.6.4 Skilgreining

Segjum að heildi vigursviðs $\mathbf{F}$ sé *óháð stikaferli* ef fyrir sérhverja tvo samfellt diffranlega á köflum stikaferla $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ með sameiginlega upphafs- og endapunkta sem stika ferlana $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ gildir að

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

5.6.5 Setning

Ferilheildi samfellds vigursviðs $\mathbf{F}$ er óháð stikaferli ef og aðeins ef $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ fyrir alla lokaða ferla $\mathcal{C}$ sem eru samfellt diffranlegir á köflum.

5.6.6 Upprifjun

Segjum að mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sé *ferilsamanhangandi* (e. connected, path-connected) ef fyrir sérhverja tvo punkta $P, Q \in D$ gildir að til er stikaferill $\mathbf{r} : [0, 1] \to D$ þannig að $\mathbf{r}(0) = P$ og $\mathbf{r}(1) = Q$.

5.6.7 Setning

Látum D vera opið mengi í $\mathbb{R}^2$ sem er ferilsamanhangandi. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt vigursvið skilgreint á D og ferilheildi $\mathbf{F}$ eru óháð vegi þá er $\mathbf{F}$ stigulsvið.

5.6.8 Setning

Fyrir samfellt vigursvið $\mathbf{F}$ skilgreint á opnu ferilsamanhangandi mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er eftirfarandi jafngilt:

1. $\mathbf{F}$ er stigulsvið,
2. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ fyrir alla samfellt diffranlega á köflum lokaða stikaferla $\mathbf{r}$ í D,
3. Ferilheildi $\mathbf{F}$ er óháð vegi.

1. $\Rightarrow$ (b). Fylgisetning 5.6.2.
2. $\Leftrightarrow$ (c). Setning 5.6.5.
3. $\Rightarrow$ (a). Setning 5.6.7.

5.7 Fletir

5.7.1 Óformleg skilgreining

Flötur $\mathcal{S}$ í $\mathbb{R}^3$ er „tvívítt hlutmengi í $\mathbb{R}^3$.

5.7.2 Lýsing

Flötum er aðallega lýst með formúlum á þrjá vegu:

1. Gefið er fall $f(x, y, z)$. Fletinum $\mathcal{S}$ er lýst með jöfnu $f(x, y, z) = C$ (þ.e.a.s. $\mathcal{S}$ er jafnhæðarflötur fallsins f). Þá er
$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = C\}.$$
2. Gefið er fall skilgreint á ferilsamanhangandi svæði D í $\mathbb{R}^2$. Fletinum $\mathcal{S}$ er lýst sem grafi fallsins f. Þá er
$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ og } z = f(x, y)\}.$$
3. Með stikafleti (sjá næstu grein).

5.8 Stikafletir

5.8.1 Skilgreining

Látum D vera ferilsamanhangandi hlutmengi í $\mathbb{R}^2$. Samfelld vörpun $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3; \mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ þannig að
$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$
er flötur kallast *stikaflötur*. Segjum að $\mathbf{r}$ sé *stikun á fletinum* $\mathcal{S}$. Viljum að $\mathbf{r}$ sé eintæk vörpun, nema hugsanlega á jaðri D. Ritum einnig
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

5.9 Snertiplön

5.9.1 Setning

1. Látum $\mathcal{S}$ vera flöt sem er gefinn sem jafnhæðarflötur $f(x,y,z)=C$. Ef (a,b,c) er punktur á fletinum og fallið f er diffranlegt í punktinum (a,b,c) þá er vigurinn $\mathbf{n}=\nabla f(a,b,c)$ hornréttur á flötinn í punktinum (a,b,c) og ef $\nabla f(a,b,c)\neq \mathbf{0}$ þá hefur flöturinn snertiplan í punktinum. Jafna snertiplansins er

$$f_1(a,b,c)x+f_2(a,b,c)y+f_3(a,b,c)z=D$$

þar sem

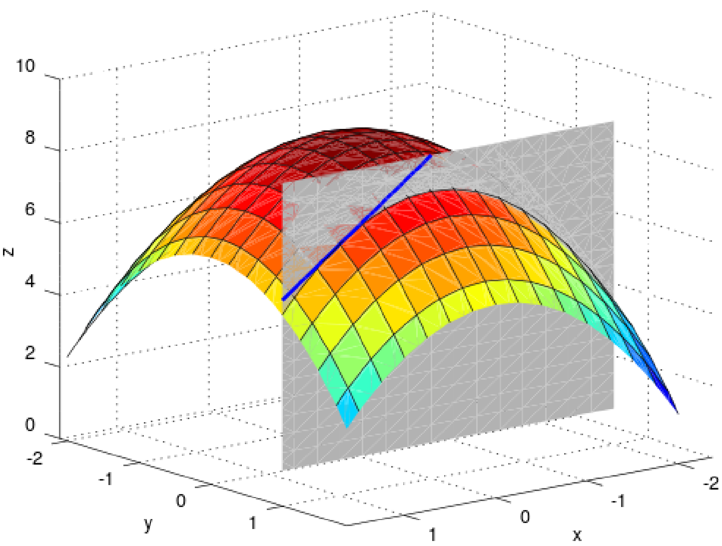
$$D=f_1(a,b,c)a+f_2(a,b,c)b+f_3(a,b,c)c.$$

2. Látum $\mathcal{S}$ vera flöt sem er gefinn sem graf falls $z=f(x,y)$. Ef $(a,b,f(a,b))$ er punktur á fletinum og fallið f er diffranlegt í punktinum (a,b) þá er vigurinn

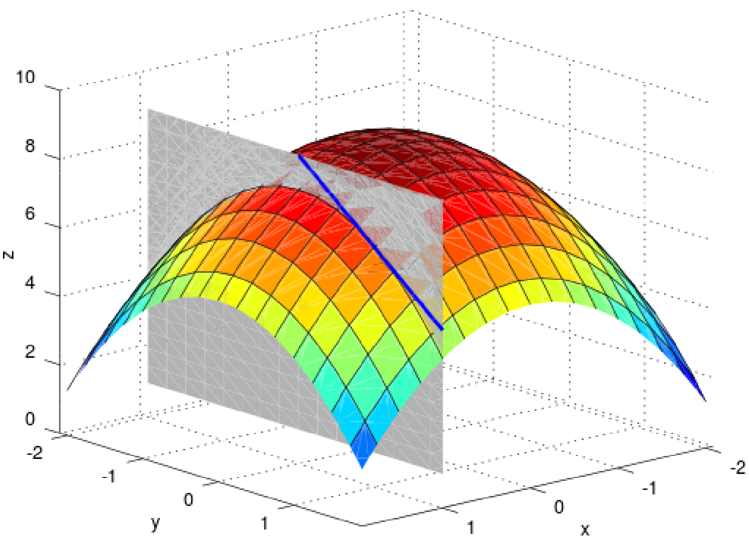
$$\mathbf{n}=\big(0,1,f_2(a,b)\big)\times\big(1,0,f_1(a,b)\big)=\big(f_1(a,b),f_2(a,b),-1\big)$$

hornréttur á flötinn í punktinum $(a,b,f(a,b))$ og flöturinn hefur snertiplan í punktinum. Jafna snertiplansins er

$$z=f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b).$$



Snertivigur við skurðferil sléttunnar $y=b$ og yfirborðsins $z=f(x,y)$ í punktinum $(a,b,f(a,b))$ er $\mathbf{T}_1=(1,0,f_1(a,b))$.



Snertivigur við skurðferil sléttunnar $x = a$ og yfirborðsins $z = f(x,y)$ í punktinum $(a,b,f(a,b))$ er $\mathbf{T}_2 = (0,1,f_2(a,b))$.

3. Látum $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vera stikaflöt. Ef $(x_0,y_0,z_0) = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ er punktur á fletinum sem $\mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ stikar og föllin $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ eru diffranleg í punktinum (x_0,y_0) þá er vigurinn

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

reiknaður með $u = u_0$ og $v = v_0$ þvervigur á flötinn í punktinum (x_0,y_0,z_0).

5.9.2 Skilgreining

Ef vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ eru óháðir fyrir alla punkta $(u,v) \in D$ þá er sagt að stikunin sé *regluleg*.

Athugasemd: Ef vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ eru óháðir þá spanna þeir snertiplan við flötinn í punktinum $\mathbf{r}(u_0,v_0)$. Snertiplanið hefur stikun

$$\Pi(u,v) = \mathbf{r}(u_0,v_0) + u\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0) + v\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0).$$

5.10 Flatarheildi

5.10.1 Verkefni

1. Flatarmál flata – sambærilegt við bogalengd ferla.
2. Heildi falls yfir flöt með tilliti til flatarmáls – sambærilegt við heildi falls eftir ferli með tilliti til bogalengdar.
3. Heildi vigursviðs yfir flöt – svipar til heildis vigursviðs eftir ferli.

5.11 Flatarmál flata

5.11.1 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^2$ vera reglulegan stikaflöt sem stikar flöt $\mathcal{S}$. Flatarmál $\mathcal{S}$ er

$$A = \iint_D dS = \iint_D |\tfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}| \, dudv.$$

5.11.2 Formúla

Látum $f(x, y)$ vera diffranlegt fall skilgreint á mengi D í $\mathbb{R}^2$. Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ er gefið með formúlunni

$$A = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

5.11.3 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vera reglulegan stikaflöt sem stikar flöt $\mathcal{S}$. Flatarmál $\mathcal{S}$ er

$$A = \iint_D dS = \iint_D |\tfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}| \, dudv.$$

5.11.4 Formúla

Látum $f(x, y)$ vera diffranlegt fall skilgreint á mengi D í $\mathbb{R}^2$. Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ er gefið með formúlunni

$$A = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

5.11.5 Formúlur

Ritum dS fyrir flatarmálselement á fleti $\mathcal{S}$.

- Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er stikun á $\mathcal{S}$ þá er

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv.$$

- Ef $\mathcal{S}$ er graf $z = g(x, y)$ þá er

$$dS = \sqrt{1 + g_1(x, y)^2 + g_2(x, y)^2} \, dx \, dy.$$

- Gerum ráð fyrir að flöturinn $\mathcal{S}$ í $\mathbb{R}^3$ hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy-planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x,y)$. Ef $\mathbf{n}$ er þvervigur á flötinn og γ er hornið sem þvervigurinn $\mathbf{n}$ myndar við jákvæða hluta z-ássins þá er

$$dS = \left|\frac{1}{\cos\gamma}\right| dx\,dy = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}\,dx\,dy.$$

  Í þessu tilviki gildir einnig að ef $\mathcal{S}$ er lýst sem hæðarfleti $G(x,y,z) = C$ þá er

$$dS = \left|\frac{\nabla G(x,y,z)}{G_3(x,y,z)}\right| dx\,dy.$$

5.11.6 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vera reglulega stikun á fleti $\mathcal{S}$. Heildi falls $f(x,y,z)$ yfir flötinn $\mathcal{S}$ með tilliti til flatarmáls er

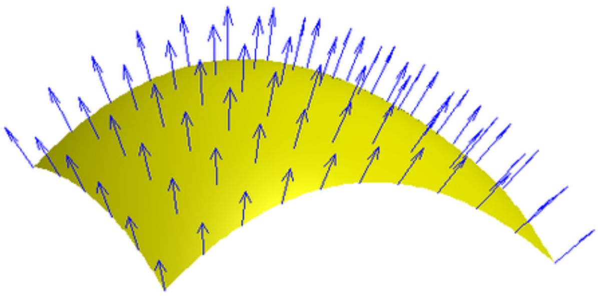
$$\iint_{\mathcal{S}} f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\left|\tfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\tfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv.$$

5.12 Einingarþvervigrasvið

5.12.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{S}$ vera flöt í $\mathbb{R}^3$ sem hefur snertiplan í punkti P. *Einingarþvervigur* $\mathbf{n}$ á flötinn $\mathcal{S}$ í punktinum P er einingarvigur hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum P.

Einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ er samfellt vigursvið $\mathbf{N}$ sem er skilgreint í öllum punktum $\mathcal{S}$ þannig að fyrir $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ er vigurinn $\mathbf{n}(x,y,z)$ einingarvigur sem er hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum (x,y,z).

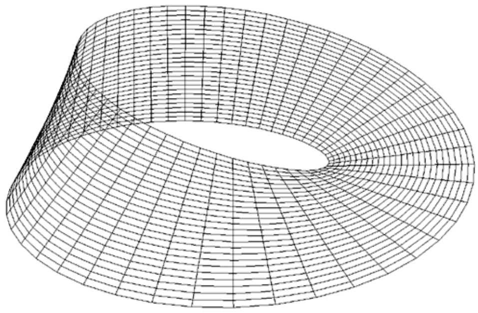


5.13 Áttanlegir fletir

5.13.1 Skilgreining

Flöturinn $\mathcal{S}$ er sagður *áttanlegur* ef til er einingarþvervigrasvið $\mathbf{N}$ á $\mathcal{S}$.

Áttun á áttanlegum fleti felst í því að velja annað af tveimur mögulegum einingaþvervigrasviðum.

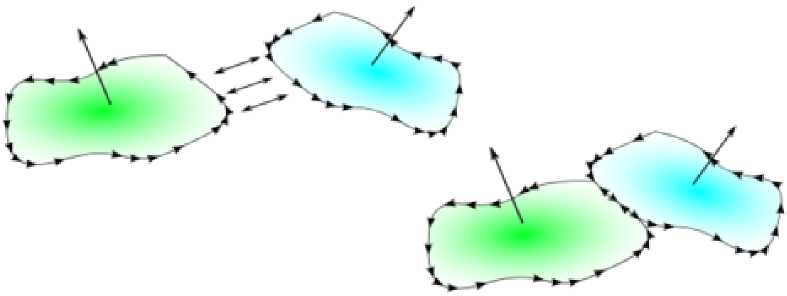


Möbiusarborði er ekki áttanlegur.

5.13.2 Umræða

Ef áttanlegur flötur $\mathcal{S}$ hefur jaðar þá skilgreinir áttunin stefnu á jaðri $\mathcal{S}$. Venjan er að velja stefnu jaðarsins þannig að þegar gengið er eftir honum sé einingarþvervigrasviðið á vinstri hönd (hægri handar regla).

Ef tveir áttanlegir fletir hafa jaðar má splæsa þeim saman í áttanlegan flöt með því að líma þá saman á (hluta af) jöðrunum og gæta þess að jaðrarnir hafi andstæða stefnu á samskeytunum.



5.13.3 Setning

Gerum ráð fyrir að $\mathcal{S}$ sé áttanlegur flötur og $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sé regluleg stikun á $\mathcal{S}$ (það er, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru samfelld föll af u og v og vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru línulega óháðir). Þá er

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$$

einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$.

5.14 Heildi vigursviðs yfir flöt - Flæði

5.14.1 Skilgreining og ritháttur

Látum $\mathcal{S}$ vera áttanlegan flöt stikaðan af reglulegum stikaferli $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ með samfelldar hlutafleiður. Látum $\mathbf{N}$ tákna einingarþvervigrasviðið sem gefið er í Setningu 5.13.3. Heildi vigursviðs $\mathbf{F}$ yfir flötinn $\mathcal{S}$ er skilgreint sem

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv.$$

Slík heildi eru oft nefnd *flæði vigursviðsins* $\mathbf{F}$ *gegnum flötinn* $\mathcal{S}$.

Ritum $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\,dS$. Þá er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

5.14.2 Samantekt

1. Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er stikun á $\mathcal{S}$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\,dv.$$

2. Ef $\mathcal{S}$ er graf $z = f(x, y)$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx\,dy.$$

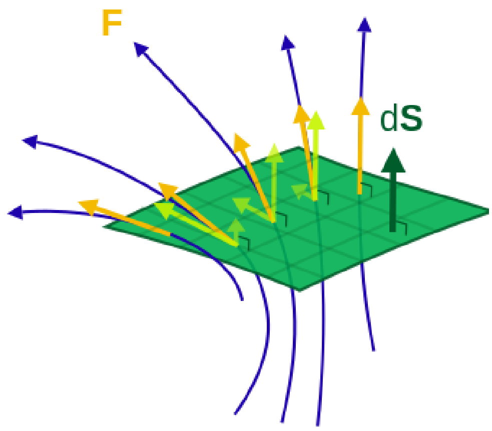
3. Gerum ráð fyrir að flöturinn $\mathcal{S}$ í $\mathbb{R}^3$ hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy-planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x, y)$. Ef fletinum $\mathcal{S}$ er lýst sem hæðarfleti $G(x, y, z) = C$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm\frac{\nabla G(x, y, z)}{|\nabla G(x, y, z)|}\,dS = \pm\frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)}\,dx\,dy.$$

Val á áttun felst í því að velja $+$ eða $-$ í formúlunum hér að ofan.

5.14.3 Túlkun

Hugsum okkur að vigursviðið $\mathbf{F}$ lýsi streymi vökva. Hugsum svo flötinn $\mathcal{S}$ sem himnu sem vökvinn getur streymt í gegnum. Áttun á $\mathcal{S}$ gefur okkur leið til að tala um hliðar flatarins og að vökvinn streymi í gegnum flötinn frá einni hlið til annarrar. Streymi vökvans gegnum flötinn (rúmmál per tímaeiningu) er gefið með heildinu $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ þar sem streymi í stefnu $\mathbf{N}$ reiknast jákvætt.



Diffur- og heildareikningur vigursviða

A reader lives a thousand lives before he dies. The man who never reads lives only one.

- George R.R. Martin, A Dance with Dragons

6.1 grad, div og curl

6.1.1 Skilgreining

Skilgreinum *nabla*-virkjann sem diffurvirkja

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

6.1.2 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ vera vigursvið og $\varphi(x, y, z)$ vera fall.

Skilgreinum *stigul* φ sem vigursviðið

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k}.$$

Skilgreinum *sundurleitni* (e. divergens) vigursviðsins $\mathbf{F}$ sem

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Skilgreinum *rót* vigursviðsins $\mathbf{F}$ sem

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Aðvörun: Ef $\varphi(x, y, z)$ er fall þá er $\nabla\varphi(x, y, z)$ stigullinn af $\varphi(x, y, z)$ en $\varphi(x, y, z)\nabla$ er diffurvirki.

Aðvörun: Sundurleitnin $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ er fall $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en rótið $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ er vigursvið $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

6.1.3 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$ vera vigursvið. Skilgreinum *sundurleitni* $\mathbf{F}$ sem

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

og *rót* $\mathbf{F}$ skilgreinum við sem

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

6.1.4 Reiknireglur

Gerum ráð fyrir að $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ séu vigursvið og φ og ψ föll. Gerum ráð fyrir að þær hlutafleiður sem við þurfum að nota séu skilgreindar og samfelldar.

1. $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$.

(b) $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

(c) $\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi(\nabla \times \mathbf{F})$.

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$.

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \qquad \mathbf{div}\,\mathbf{curl} = 0$

(h) $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{curl}\,\mathbf{grad} = \mathbf{0}$

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$.

6.1.5 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}$ vera vigursvið skilgreint á svæði D.

(a) Vigursviðið $\mathbf{F}$ er sagt vera *sundurleitnilaust* (e. solenoidal) ef $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$ i öllum punktum D.

(b) Vigursviðið $\mathbf{F}$ er sagt vera *rótlaust* (e. irrotational) ef $\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ á öllu D.

Athugasemd: Vigursvið $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ er rótlaust ef og aðeins ef

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

6.1.6 Setning

1. Rót vigursviðs er sundurleitnilaus.
2. Stigulsvið er rótlaust.

6.1.7 Skilgreining

Svæði D í rúmi eða plani kallast *stjörnusvæði* ef til er punktur P í D þannig að fyrir sérhvern annan punkt Q í D þá liggur allt línustrikið á milli P og Q í D.

6.1.8 Setning

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á stjörnusvæði D. Ef $\mathbf{F}$ er rótlaust þá er $\mathbf{F}$ stigulsvið. Með öðrum orðum, ef vigursviðið $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt og skilgreint á stjörnusvæði D og uppfyllir jöfnurnar

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

þá er $\mathbf{F}$ stigulsvið.

6.1.9 Setning

Lát $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á stjörnusvæði D. Ef $\mathbf{F}$ er sundurleitnilaust þá er til vigursvið $\mathbf{G}$ þannig að $\mathbf{F} = \mathbf{curl}\,\mathbf{G}$. Vigursviðið $\mathbf{G}$ kallast *vigurmætti* fyrir $\mathbf{F}$.

6.2 Sundurleitnisetningin I

6.2.1 Setning (Sundurleitnisetning I)

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í $\mathbb{R}^3$. Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði $\mathbf{F}$ og $\mathcal{S}_\varepsilon$ kúluskel með miðju í P og geisla ε. Látum svo $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}_\varepsilon$ þannig að $\mathbf{N}$ vísar út á við. Þá er

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

þar sem $V_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^3/3$ er rúmmálið innan í $\mathcal{S}_\varepsilon$.

6.2.2 Setning (Setning Stokes I)

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í $\mathbb{R}^3$. Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði $\mathbf{F}$ og C_ε vera hring með miðju í P og geisla ε. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigur á planið sem hringurinn liggur í. Áttum hringinn jákvætt. Þá er

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{A_\varepsilon} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

þar sem $A_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$ er flatarmálið sem afmarkast af $\mathcal{C}_\varepsilon$.

6.2.3 Túlkun

Hugsum $\mathbf{F}$ sem lýsingu á vökvastreymi í $\mathbb{R}^3$.

$\mathbf{div}\,\mathbf{F}(P)$ lýsir því hvort vökvinn er að þenjast út eða dragast saman í punktinum P. Sundurleitnisetningin (næsti fyrirlestur) segir að samanlögð útþensla á rúmskika R er jöfn streymi út um jaðar svæðisins $\mathcal{S}$, eða

$$\iiint_R \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

$\mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P)$ lýsir hringstreymi í kringum punktinn P. Setning Stokes (þar næsti fyrirlestur) segir að samanlagt hringstreymi á fleti $\mathcal{S}$ er jafnt hringstreymi á jaðri flatarins, sem við táknum með $\mathcal{C}$, eða

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

6.2.4 Skilgreining

Látum R vera svæði í $\mathbb{R}^2$ og $\mathcal{C}$ jaðar R. Gerum ráð fyrir að $\mathcal{C}$ samanstandi af endanlega mörgum ferlum $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$. Jákvæð áttun á ferlunum felst í því að velja fyrir hvert i stikun $\mathbf{r}_i$ á $\mathcal{C}_i$ þannig að ef labbað eftir $\mathcal{C}_i$ í stefnu stikunar þá er R á vinstri hönd.

6.2.5 Setning Green

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R, táknaður með $\mathcal{C}$, samanstendur af endanlega mörgum samfellt diffranlegum ferlum. Áttum $\mathcal{C}$ jákvætt. Látum $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á R. Þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA.$$

6.2.6 Fylgisetning

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R táknaður með $\mathcal{C}$, samanstendur af endanlega mörgum samfellt diffranlegum ferlum. Áttum $\mathcal{C}$ jákvætt. Þá er

$$\text{Flatarmál } R = \oint_{\mathcal{C}} x\,dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx.$$

6.2.7 Sundurleitnisetningin í tveimur víddum

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R, táknaður með $\mathcal{C}$, samanstendur af endanlega mörgum samfellt diffranlegum ferlum. Látum $\mathbf{N}$ tákna einingarþvervigrasvið á $\mathcal{C}$ þannig að $\mathbf{N}$ vísar út úr R. Látum $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á R. Þá er

$$\iint_R \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds.$$

6.3 Sundurleitnisetningin II

6.3.1 Skilgreining

Flötur er sagður reglulegur ef hann hefur snertiplan í hverjum punkti.

Flötur $\mathcal{S}$ sem er búinn til með því að taka endanlega marga reglulega fleti $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ og líma þá saman á jöðrunum kallast *reglulegur á köflum*.

Þegar talað um einingarþvervigrasvið á slíkan flöt þá er átt við vigursvið sem er skilgreint á fletinum nema í þeim punktum þar sem fletir $\mathcal{S}_i$ og $\mathcal{S}_j$ hafa verið límdir saman. Í slíkum punktum þarf flöturinn ekki að hafa snertiplan og því ekki heldur þvervigur.

Flötur er sagður *lokaður* ef hann er yfirborð svæðis í $\mathbb{R}^3$ (t.d. er kúluhvel lokaður flötur).

6.3.2 Setning (Sundurleitnisetningin, Setning Gauss)

Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

6.3.3 Skilgreining

Látum D vera rúmskika í $\mathbb{R}^3$. Segjum að rúmskikinn D sé z-*einfaldur* ef til er svæði D_z í planinu og samfelld föll f og g skilgreind á D_z þannig að

$$D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z \text{ og } f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}.$$

Það að rúmskiki sé x- eða y-einfaldur er skilgreint á sama hátt.

6.3.4 Setning

Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á D og φ diffranlegt fall skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\,dV = -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \mathbf{N}\,dS,$$

og

$$\iiint_D \mathbf{grad}\,\varphi\,dV = \iint_{\mathcal{S}} \varphi\mathbf{N}\,dS.$$

Athugið að útkomurnar úr heildunum eru vigrar.

6.4 Setning Stokes

6.4.1 Skilgreining

Látum $\mathcal{S}$ vera áttanlegan flöt sem er reglulegur á köflum með jaðar $\mathcal{C}$ og einingarþvervigrasvið $\mathbf{N}$. Áttun $\mathcal{C}$ út frá $\mathbf{N}$ finnst með að hugsa sér að gengið sé eftir $\mathcal{C}$ þannig að skrokkurinn vísi í stefnu $\mathbf{N}$ og göngustefnan sé valin þannig að flöturinn sé á vinstri hönd.

6.4.2 Setning (Setning Stokes)

Látum $\mathcal{S}$ vera áttanlegan flöt sem er reglulegur á köflum og látum $\mathbf{N}$ tákna einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$. Táknum með $\mathcal{C}$ jaðar $\mathcal{S}$ og áttum $\mathcal{C}$ með tilliti til $\mathbf{N}$. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi sem inniheldur $\mathcal{S}$ þá er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds.$$

6.4.3 Setning

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í $\mathbb{R}^3$. Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði $\mathbf{F}$ og C_ε vera hring með miðju í P og geisla ε. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigur á planið sem hringurinn liggur í. Áttum hringinn jákvætt. Þá er

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

6.4.4 Setning

Látum $\mathcal{S}$ vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem $\mathcal{S}$ umlykur. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ sem vísar út úr D. Ef $\mathbf{F}$ er samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi sem inniheldur D, þá er

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 0.$$

6.5 Hagnýtingar í eðlisfræði

6.5.1 Vökvaflæði

Skoðum vökvaflæði í rúmi. Hugsum okkur að vökvaflæðið sé líka háð tíma. Látum $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ tákna hraðavigur agnar sem er í punktinum (x, y, z) á tíma t. Látum $\delta(x, y, z, t)$ tákna efnisþéttleika (massi per rúmmálseiningu) í punktum (x, y, z) á tíma t. Þá gildir að

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\delta\mathbf{v}) = 0.$$

(Þessi jafna kallast samfelldnijafnan um vökvaflæðið.)

6.5.2 Vökvaflæði

Til viðbótar við $\mathbf{v}$ og δ þá skilgreinum við $p(x, y, z, t)$ sem þrýsting og $\mathbf{F}$ sem utanaðkomandi kraft, gefinn sem kraftur per massaeiningu. Þá gildir að

$$\delta\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \delta(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \delta\mathbf{F}.$$

(Þessi jafna er kölluð hreyfijafna flæðisins.)

6.5.3 Rafsvið - Lögmál Coulombs

Látum punkthleðslu q vera í punktinum $\mathbf{s} = \xi\,\mathbf{i} + \eta\,\mathbf{j} + \zeta\,\mathbf{k}$. Í punktum $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ er rafsviðið vegna þessarar hleðslu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

þar sem ε_0 er *r*afsvörunarstuðull tómarúms.

6.5.4 Rafsvið - Lögmál Gauss (fyrsta jafna Maxwells)

Látum $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ vera hleðsludreifingu og $\mathbf{E}$ rafsviðið vegna hennar. Þá gildir að

$$\mathbf{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

6.5.5 Rafsvið

Látum $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ vera hleðsludreifingu á takmörkuðu svæði R og $\mathbf{E}$ rafsviðið vegna hennar. Ef við setjum

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_R \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}dV$$

þá er $\mathbf{E} = \nabla\varphi$ og þar með er

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

6.5.6 Segulsvið - Lögmál Biot-Savart

Látum straum I fara eftir ferli $\mathcal{F}$. Táknum segulsviðið með $\mathbf{H}$ og látum $\mathbf{s} = \xi\,\mathbf{i} + \eta\,\mathbf{j} + \zeta\,\mathbf{k}$ vera punkt á ferlinum $\mathcal{F}$. Þá gefur örbútur $d\mathbf{s}$ úr $\mathcal{F}$ af sér segulsvið

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

þar sem μ_0 er *s*egulsvörunarstuðull tómarúms. Af þessu sést að

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\mathcal{F}}\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

og sýna má að ef $\mathbf{r}\notin\mathcal{F}$ þá er

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

6.5.7 Segulsvið - Lögmál Ampére

Hugsum okkur að straumur I fari upp eftir z-ás. Táknum með $\mathbf{H}$ segulsviðið og $H = |\mathbf{H}|$. Í punkti $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ í fjarlægð a frá z-ás er $H = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ og ef $\mathcal{C}$ er lokaður einfaldur ferill sem fer rangsælis einu sinni umhverfis z-ásinn þá er

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I.$$

Hugsum okkur að $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ sé straumþéttleiki í punkti $\mathbf{r}$ (straumur á flatareiningu). Þá er

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H} = \mu_0\mathbf{J}.$$

Einnig gildir að ef við setjum

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_R\frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}dV,$$

þá er $\mathbf{H} = \mathbf{curl}\,\mathbf{A}$ og því er

$$\mathbf{div}\,\mathbf{H} = 0.$$

6.5.8 Samantekt

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathbf{div}\,\mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} &= \mathbf{0} & \mathbf{curl}\,\mathbf{H} &= \mu_0\mathbf{J} \end{aligned}$$

Jöfnur Maxwells

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathbf{div}\,\mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} & \mathbf{curl}\,\mathbf{H} &= \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

My old grandmother always used to say, Summer friends will melt away like summer snows, but winter friends are friends forever.

- George R.R. Martin, A Feast for Crows

Viðauki

7.1 Kennsluáætlun

Dags.	Efni	Nótur	Adams Calculus
11.01.16.	1. Ferlar.	1.1-1.5.	8.1, **8.2**, **8.3**, **8.4**, **11.1**, 11.2, **11.3**.
	Viðbótarefni: Krossmargfeldi	**10.3**.	
13.01.16.	2. Ferlar í plani og pólhnit.	1.6-1.10.	**8.4**, **8.5**, **8.6**.
18.01.16.	3. Krappi og vindingur.	1.10-1.17.	**11.4**, **11.5**, 11.6.
20.01.16.	4. Föll af mörgum breytistærðum.	2.1-2.10.	**12.1**, **12.2**.
25.01.16.	5. Hlutafleiður.	2.11-2.13.	**12.3**, **12.4**.
27.01.16.	6. Keðjureglan.	2.14-2.15.	**12.5**.
01.02.16.	7. Línulegar nálganir.	2.16-2.25.	**12.6**
03.02.16.	8. Stiglar.	2.26-2.31.	**12.7**.
08.02.16.	9. Fólgin föll og Taylor-nálganir.	2.32.	**12.8**, **12.9**.
10.02.16.	10. Útgildi.	3.1-3.9.	**13.1**, **13.2**.
15.02.16.	11. Lagrange-margfaldarar.	3.10-3.11.	**13.2**, **13.3**.
17.02.16.	12. Tvöföld heildi.	4.1-4.4.	**14.1**, **14.2**, **14.3**.
22.02.16.	13. Meira um tvöföld heildi.	4.5-4.7.	**14.1**, **14.2**, **14.3**.
24.02.16.	14. Breytuskipti.	4.8.	**14.4**.
29.02.16.	15. Þreföld heildi.	4.9.	**14.5**, **14.6**.
02.03.16.	16. Hagnýtingar margfaldra heilda.	4.10-4.14.	**14.7**.
	Próf úr lesnu efni.*		
07.03.16.	17. Vigursvið og stigulsvið.	5.1-5.3.	**15.1**, **15.2**.
09.03.16.	18. Ferilheildi.	5.4-5.5.	**15.3**.
14.03.16.	19. Ferilheildi og stigulsvið.	5.6.	**15.2**, **15.3**, **15.4**.
16.03.16.	20. Fletir.	5.7-5.11.	**15.5**.
21.03.16.	21. Flatarheildi.	5.12.	**15.5**, **15.6**
23.03.16.	**Páskafrí**.		
28.03.16.	**Páskafrí**.		
30.03.16.	22. Áttanlegir fletir. Heildi vigursviðs yfir flöt.	5.13-5.15.	**15.6**.
	Próf úr skiladæmum.*		
04.04.16.	23. grad, div og curl.	6.1.	**16.1**, **16.2**.
06.06.16.	24. Sundurleitnisetningin I.	6.2.	**16.2**, **16.3**, **16.4**.
11.04.16.	25. Sundurleitnisetningin II.	6.3	**16.2**, **16.3**, **16.4**.
13.04.16.	26. Setning Stokes.	6.4.	**16.5**, **16.6**.
18.04.16.	27. Hagnýtingar í eðlisfræði.	6.5.	**16.6**.
20.04.16.	28. Langur dæmatími.		

Kaflanúmer í Adams Calculus miðast við 8. útgáfu kennslubókarinnar. Megináhersla er á efni þeirra kafla sem eru feitletraðir.

*Með fyrirvara um breyttar dagsetningar.