22. Heildi vigursviðs yfir flöt

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 18. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

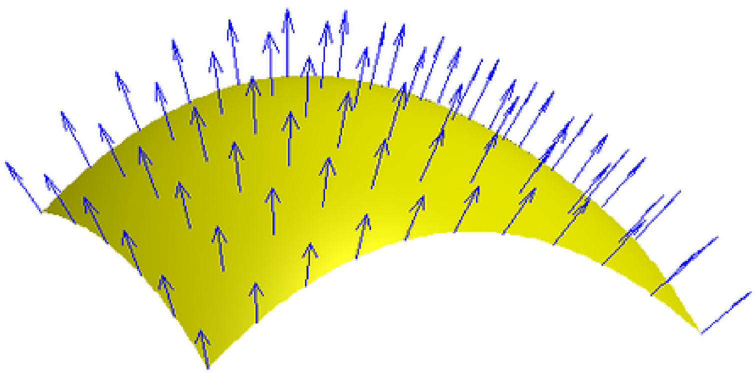
22.1

Einingarþvervigrasvið

Skilgreining 22.1

Látum $\mathcal{S}$ vera flöt í $\mathbb{R}^3$. *Einingarþvervigur* $\mathbf{n}$ á flötinn $\mathcal{S}$ í punktinum P er einingarvigur hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum P.

Einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$ er samfellt vigursvið $\mathbf{N}$ sem er skilgreint í öllum punktum $\mathcal{S}$ þannig að fyrir $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ er vigurinn $\mathbf{n}(x, y, z)$ einingarvigur sem er hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum (x, y, z).



22.2

Áttanlegir fletir

Skilgreining 22.2

Flöturinn $\mathcal{S}$ er sagður *áttanlegur* ef til er einingarþvervigrasvið $\mathbf{N}$ á $\mathcal{S}$.

Áttun á áttanlegum fleti felst í því að velja annað af tveimur mögulegum eningaþvervigrasviðum.

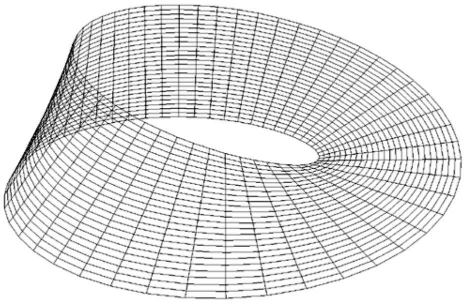
22.3

Umræða 22.3

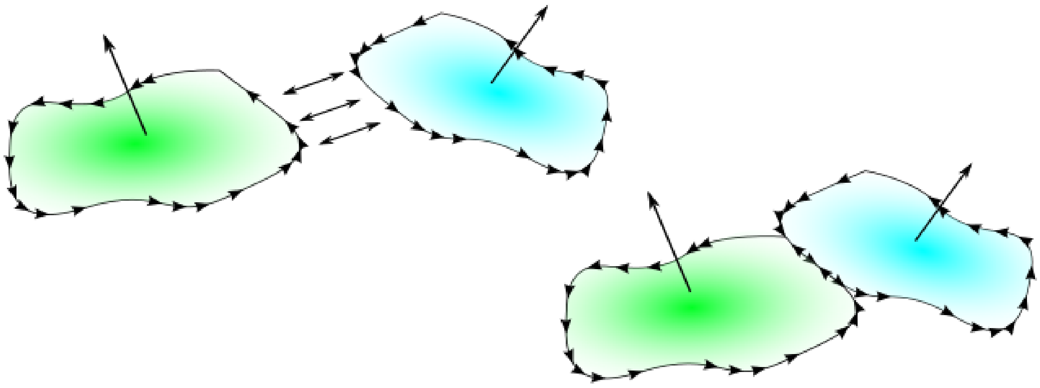
Ef áttanlegur flötur $\mathcal{S}$ hefur jaðar þá skilgreinir áttunin stefnu á jaðri $\mathcal{S}$. Venjan er að velja stefnu jaðarsins þannig að þegar gengið er eftir honum sé einingarþvervigrasviðið á vinstri hönd (hægri handar regla).

Ef tveir áttanlegir fletir hafa jaðar má splæsa þeim saman í áttanlegan flöt með því að líma þá saman á (hluta af) jöðrunum og gæta þess að jaðrarnir hafi andstæða stefnu á samskeytunum.

22.4



Möbiusarborði er ekki áttanlegur.



Setning 22.4
Gerum ráð fyrir að $\mathcal{S}$ sé áttanlegur flötur og $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sé regluleg stikun á $\mathcal{S}$ (það er, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru samfelld föll af u og v og vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru línulega óháðir). Þá er

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}|}$$

einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}$.

22.5

Heildi vigursviðs yfir flöt - Flæði

Skilgreining og ritháttur 22.5
Látum $\mathcal{S}$ vera áttanlegan flöt stikaðan af reglulegum stikaferli $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ með samfelldar hlutafleiður. Látum $\mathbf{N}$ tákna einingarþvervigrasviðið sem gefið er í 22.4. Heildi vigursviðs $\mathbf{F}$ yfir flötinn $\mathcal{S}$ er skilgreint sem

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv.$$

Slík heildi eru oft nefnd *flæði vigursviðsins* $\mathbf{F}$ *gegnum flötinn* $\mathcal{S}$.

Ritum $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \, dS$. Þá er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}.$$

22.6

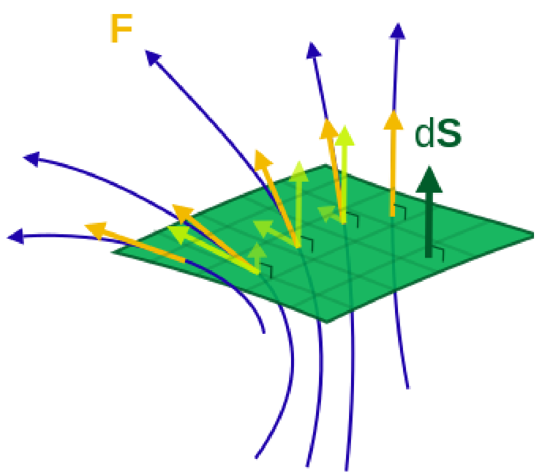
Samantekt 22.6

1. Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er stikun á $\mathcal{S}$ þá er
$$d\mathbf{S} = \pm\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv.$$
2. Ef $\mathcal{S}$ er graf $z = f(x,y)$ þá er
$$d\mathbf{S} = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx\, dy.$$
3. Gerum ráð fyrir að flöturinn $\mathcal{S}$ í $\mathbb{R}^3$ hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy-planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x,y)$. Ef fletinum $\mathcal{S}$ er lýst sem hæðarfleti $G(x,y,z) = C$ þá er
$$d\mathbf{S} = \pm\frac{\nabla G(x,y,z)}{|\nabla G(x,y,z)|}\, dS = \pm\frac{\nabla G(x,y,z)}{G_3(x,y,z)}\, dx\, dy.$$

Val á áttun felst í því að velja + eða − í formúlunum hér að ofan.

22.7

Túlkun 22.7
Hugsum okkur að vigursviðið $\mathbf{F}$ lýsi streymi vökva. Hugsum svo flötinn $\mathcal{S}$ sem himnu sem vökvinn getur streymt í gegnum. Áttun á $\mathcal{S}$ gefur okkur leið til að tala um hliðar flatarins og að vökvinn streymi í gegnum flötinn frá einni hlið til annarrar. Streymi vökvans gegnum flötinn (rúmmál per tímaeiningu) er gefið með heildinu $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ þar sem streymi í stefnu $\mathbf{N}$ reiknast jákvætt.



22.8