23. grad, div og curl

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

23. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 23.1

Skilgreinum *nabla*-virkjann sem diffurvirkja

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Skilgreining 23.2

Látum $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$ vera vigursvið og $\varphi(x,y,z)$ vera fall.

Skilgreinum *stigul* φ sem vigursviðið

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k}.$$

Skilgreinum *sundurleitni* (e. divergens) vigursviðsins $\mathbf{F}$ sem

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Skilgreinum *rót* vigursviðsins $\mathbf{F}$ sem

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Varúð 23.3
Ef $\varphi(x, y, z)$ er fall þá er $\nabla\varphi(x, y, z)$ stigullinn af $\varphi(x, y, z)$ en $\varphi(x, y, z)\nabla$ er diffurvirki.

Varúð 23.4

Sundurleitnin **div F** er fall $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en rótið **curl F** er vigursvið $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Skilgreining 23.5

Látum $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$ vera vigursvið. Skilgreinum *sundurleitni* $\mathbf{F}$ sem

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

og *rót* $\mathbf{F}$ skilgreinum við sem

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Reiknireglur 23.6

Gerum ráð fyrir að $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ séu vigursvið og φ og ψ föll. Gerum ráð fyrir að þær hlutafleiður sem við þurfum að nota séu skilgreindar og samfelldar.

(a) $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$.

(b) $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

(c) $\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi(\nabla \times \mathbf{F})$.

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$.

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ $\qquad$ $\mathbf{div}\,\mathbf{curl} = 0$

(h) $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad} = \mathbf{0}$

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$.

Skilgreining 23.7

Látum $\mathbf{F}$ vera vigursvið skilgreint á svæði D.
(a) Vigursviðið $\mathbf{F}$ er sagt vera *sundurleitnilaust* (e. solenoidal) ef $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$ i öllum punktum D.
(b) Vigursviðið $\mathbf{F}$ er sagt vera *rótlaust* (e. irrotational) ef $\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ á öllu D.

Athugasemd 23.8

Vigursvið $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$ er rótlaust ef og aðeins ef

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Setning 23.9

(a) Rót vigursviðs er sundurleitnilaus.

(b) Stigulsvið er rótlaust.

Skilgreining 23.10

Svæði D í rúmi eða plani kallast *stjörnusvæði* ef til er punktur P í D þannig að fyrir sérhvern annan punkt Q í D þá liggur allt línustrikið á milli P og Q í D.

Setning 23.11

Látum **F** vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á stjörnusvæði D. Ef **F** er rótlaust þá er **F** stigulsvið. Með öðrum orðum, ef vigursviðið **F** er samfellt diffranlegt og skilgreint á stjörnusvæði D og uppfyllir jöfnurnar

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

þá er **F** stigulsvið.

Setning 23.12

Lát $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á stjörnusvæði D. Ef $\mathbf{F}$ er sundurleitnilaust þá er til vigursvið $\mathbf{G}$ þannig að $\mathbf{F} = \mathbf{curl}\,\mathbf{G}$. Vigursviðið $\mathbf{G}$ kallast *vigurmætti* fyrir $\mathbf{F}$.