8. Stiglar

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 28. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

8.1

Stigull

Skilgreining 8.1

Látum $f(x,y)$ vera fall og (x,y) punkt þar sem báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar. Skilgreinum *stigul* f í punktinum (x,y) sem vigurinn

$$\nabla f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}.$$

Stigull f er stundum táknaður með $\mathbf{grad}\, f$.

8.2

Stigull

Ritháttur 8.2

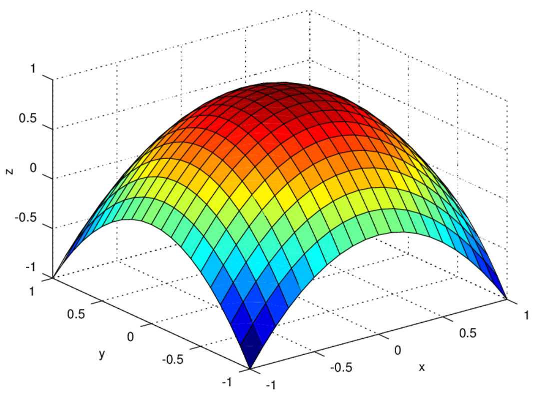
Oft hentugt að rita

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}.$$

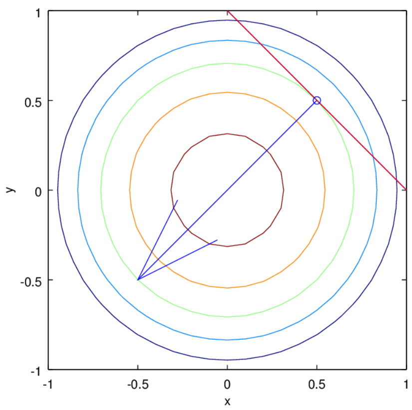
Þá er litið svo á að ∇ sé *diffurvirki*, þ.e.a.s. ∇ gefur fyrirmæli um hvað á að gera við f til að fá $\nabla f(x,y)$.

8.3

Dæmi



Graf $z = 1 - x^2 - y^2$



Jafnhæðarlínur. Stigull og snertilína við jafnhæðarlínuna $z = 0.5$ í $(x,y) = (0.5, 0.5)$.

8.4

Stigull

Setning 8.3
Gerum ráð fyrir að fallið $f(x,y)$ sé diffranlegt í punktinum (a,b) og að $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$. Þá er vigurinn $\nabla f(a,b)$ hornréttur á þá jafnhæðarlínu f sem liggur í gegnum punktinn (a,b).

8.5

Snertilína við jafnhæðarferil

Setning 8.4
Gerum ráð fyrir að fallið $f(x,y)$ sé diffranlegt í punktinum (a,b) og að $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$. Jafna snertilínu við jafnhæðarferil f í punktinum (a,b) er gefin með formúlunni

$$\nabla f(a,b) \cdot (x,y) = \nabla f(a,b) \cdot (a,b),$$

eða

$$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) = 0.$$

8.6

Stefnuafleiða

Skilgreining 8.5
Látum $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ vera einingarvigur. *Stefnuafleiða* f í punktinum (a,b) í stefnu $\mathbf{u}$ er skilgreind sem

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+hu, b+hv) - f(a,b)}{h}$$

ef markgildið er skilgreint.

8.7

Stefnuafleiða

Setning 8.6
Gerum ráð fyrir að fallið f sé diffranlegt í (a,b) og $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ sé einingarvigur. Þá er stefnuafleiðan í punktinum (a,b) í stefnu $\mathbf{u}$ skilgreind og gefin með formúlunni

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b).$$

8.8

Stefnuafleiða

Setning 8.7
Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a,b).

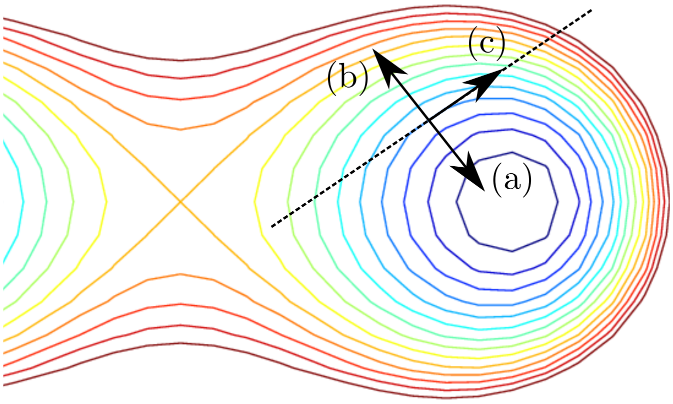
(a) Hæsta gildið á stefnuafleiðunni $D_{\mathbf{u}} f(a,b)$ fæst þegar $\mathbf{u}$ er einingarvigur í stefnu $\nabla f(a,b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

(b) Lægsta gildið á stefnuafleiðunni $D_{\mathbf{u}} f(a,b)$ fæst þegar $\mathbf{u}$ er einingarvigur í stefnu $-\nabla f(a,b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

(c) Ef $\mathcal{C}$ er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a,b) og $\mathbf{u}$ er einingarsnertivigur við $\mathcal{C}$ í punktinum (a,b) þá er $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = 0$.

8.9

Stefnuafleiða



8.10

Stefnuafleiða

Setning 8.8
Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b).

(a) Í punktinum (a, b) þá vex f hraðast ef haldið er í stefnu $\nabla f(a, b)$.

(b) Í punktinum (a, b) þá minnkar f hraðast ef haldið er í stefnu $-\nabla f(a, b)$.

(c) Ef $\mathcal{C}$ er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og $\mathbf{u}$ er einingarsnertivigur við $\mathcal{C}$ í punktinum (a, b) þá er er vaxtarhraði f í stefnu $\mathbf{u}$ jafn 0.

8.11

Stigull

Skilgreining 8.9
Látum f vera fall af þremur breytistærðum, þannig að allar þrjár fyrsta stigs hlutafleiður f í punktinum (x, y, z) séu skilgreindar. *Stigull* f í punktinum (x, y, z) er skilgreindur sem vigurinn

$$\nabla f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

8.12

Snertiplan við jafnhæðarflöt

Setning 8.10
Látum f vera fall af þremur breytistærðum þannig að fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b, c). Látum $\mathcal{F}$ tákna þann jafnhæðarflöt f sem liggur um (a, b, c). Stigullinn

$\nabla f(a,b,c)$ er hornréttur á flötinn $\mathcal{F}$ í punktinum (a,b,c) og snertiplan (ef $\nabla f(a,b,c) \neq \mathbf{0}$) við jafnhæðarflötinn í punktinum (a,b,c) er gefið með jöfnunni

$$\nabla f(a,b,c) \cdot (x,y,z) = \nabla f(a,b,c) \cdot (a,b,c)$$

eða með umritun

$$f_1(a,b,c)(x-a) + f_2(a,b,c)(y-b) + f_3(a,b,c)(z-c) = 0.$$

8.13