

Kaflí 5: Brúun

Töluleg greining, STÆ405G, 29 og 31 janúar, og 5, 7, 12 og 14 febrúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

5.1

Yfirlit

Kaflí 5: Brúun

Kaflí	Viðfangsefni	Bls.	Glærur
5.0	Inngangur	337-341	1-10
5.1	Margliðubrúun og Lagrange-form brúunarmarg.	341-349	11-18
5.3	Newton-form brúunarmargliðu	363-371	19-30
5.X	Brúunarmargliður með margföldum punktum		31-42
5.1	Nálgun á föllum með margliðum og skekkjumat	348-349	43-64
5.5	Splæsibrúun	386-402	65-79
5.8	Aðferð minnstu fervika	418-425	80-93

5.2

5.0 Inngangur

5.0 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

Við sýnum fram á að það sé alltaf hægt að finna margliðu p af stigi $\leq m$ sem uppfyllir $p(x_i) = y_i$ í öllum punktum og að slík margliða sé ótvírætt ákvörðuð.

Hún nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Við alhæfum þetta verkefni með því að úthluta sérhverjum punkti jákvæðri heiltölu m_i og krefjast þess graf margliðunnar fari í gegnum alla punktana og til viðbótar að allar afleiður $p^{(j)}$ upp að stigi $m_i - 1$ taki einnig fyrirfram gefin gildi $y_i^{(j)}$.

5.3

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og “brúar“ því gildin milli mælipunktanna.

Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (reiknirit Horner's).
- Einfalt að diffra og heilda margliður.
- Margliður eru óendanlega oft diffranlegar.
- *Setning Weierstrass*: Látum f vera samfelld fall á bili $[a, b]$. Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ þá er til margliða p þannig að

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

5.4

5.0 Margliður:

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

þar sem m er heiltala og a_0, \dots, a_m eru tvinntölur nefnist margliða.

Stærsta talan j þannig að $a_j \neq 0$ nefnist *stig* margliðunnar p .

Ef allir stuðlarnir eru 0 þá nefnist p *núllmargliðan* og við segjum að stig hennar sé $-\infty$.

Munum að stuðullinn a_j við veldið x^j er gefinn með formúlunni

$$a_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

5.5

5.0 Mismunandi leiðir á framsetningu

Hægt er að setja sömu margliðuna fram á marga mismunandi vegu, en við nefnum framsetninguna hér að framan *staðalform margliðunnar* p .

Ef við veljum okkur einhvern punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, þá getum við skrifað

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_m(x - x_0)^m$$

og stuðlarnir b_j eru gefnir með

$$b_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Þessi formúla er jafngild þeirri staðreynd að ef p er margliða af stigi m . Þá er Taylor-röð p í sérhverjum punkti $x_0 \in \mathbb{R}$ bara margliðan p , og stuðlarnir í Taylor-röðinni eru gefnir með formúlunum fyrir b_j að ofan.

5.6

5.0 Newton-form margliðu

Ef við veljum okkur m punkta x_0, \dots, x_{m-1} þá nefnist framsetning af gerðinni

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

Newton-form margliðunnar p miðað við punktana x_0, \dots, x_{m-1} .

Við munum mikið fást við margliður á Newton-formi og því er nauðsynlegt að hafa hraðvirkt reiknirit til þess að reikna út fallgildi p út frá þessari framsetningu.

Eitt slíkt reiknirit er nefnt *reiknirit Horners*. Það byggir á því að nýta sér að þættirnir $(x - x_j)$ eru endurteknir í liðunum

$$(x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \dots$$

Þar sem við sleppum við að hefja í veldi þá komumst við af með fáar reikniðgerðir hér.

5.7

5.0 Reiknirit Horners

Ef $m = 2$ má skrifa Newton-form p sem

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1) \cdot c_2).$$

Ef $m = 3$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)c_3))$$

og ef $m = 4$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + c_4(x - x_3)))).$$

Reikniritið vinnur á þessari stæðu með því að margfalda upp úr svigunum frá hægri til vinstri.

5.8

5.0 Reiknirit Horners

Skilgreinum tölur b_0, b_1, \dots á eftirfarandi hátt. Fyrst setjum við

$$b_n = c_n.$$

Fyrir hvert k frá $n-1$ niður í 0 þá setjum við

$$b_k = c_k + (a - x_k)b_{k+1}.$$

Þá er $b_0 = p(a)$.

Fyrir $m = 4$

$$p(a) = c_0 + (a - x_0)(c_1 + (a - x_1)(c_2 + (a - x_2)(c_3 + (a - x_3)\underbrace{c_4}_{b_4}))) .$$

The diagram illustrates the nested structure of the polynomial evaluation. Brackets are used to group the terms in the expression $p(a) = c_0 + (a - x_0)(c_1 + (a - x_1)(c_2 + (a - x_2)(c_3 + (a - x_3)c_4)))$. The innermost bracket groups c_4 and labels it b_4 . The next bracket groups $c_3 + (a - x_3)b_4$ and labels it b_3 . The next bracket groups $c_2 + (a - x_2)b_3$ and labels it b_2 . The next bracket groups $c_1 + (a - x_1)b_2$ and labels it b_1 . Finally, the outermost bracket groups $c_0 + (a - x_0)b_1$ and labels it b_0 .

5.9

5.0 Matlab-forrit fyrir reiknirit Horners

```
function b = horner(c,x,a);  
%  
% Fallið reiknar út gildi margliðunnar  
% p(x) = c(1) + c(2)(x-x(1)) + ...  
%       + c(m)(x-x(1))*...*(x-x(m-1))  
% í punktunum a(1), ..., a(n) úr vigrinum a.  
  
m = length(c);          % stig margliðunnar er m-1  
n = length(a);          % fjöldi reiknaðra fallgilda er n  
b = c(m)*ones(1,n);     % b_m skilgreint  
for i=m-1:-1:1          % i gengur frá m-1 niður í 1  
    % b_i reiknað fyrir i < m  
    b = c(i) + (a - x(i)) .* b;  
end
```

Athugasemd: Hér gengur stíkin i fyrir a_i, b_i, c_i og x_i frá 1 upp í m , en ekki frá 0 eins og í glærunum á undan. Þetta helgast af því að í Matlab þá er fyrsta stak í vigrum númer 1.

5.10

5.1 Margliðubruun og Lagrange-form brúunarmargliðunnar

5.1 Margliðubruun

Látum nú $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lágsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Slík margliða nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða *brúunarmargliða gegnum punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Augljóslega verðum við að gera ráð fyrir að x -hnitin séu ólík, það er $x_j \neq x_k$ ef $j \neq k$.

Verkefnið að finna margliðuna p nefnist *brúunarverkefni fyrir punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

5.11

5.1 Brúunarmargliðan er ótvírætt ákvörðuð

Setning

Brúunarmargliðan fyrir $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Sönnun

Ef $p(x)$ og $q(x)$ eru tvær brúunarmargliður af stigi $\leq m$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ þá er mismunurinn $r(x) = p(x) - q(x)$ margliða af stigi $\leq m$ með núllstöðvar x_0, \dots, x_m . Þetta eru $m+1$ ólíkir punktar og því er $r(x)$ núllmargliðan samkvæmt undirstöðusetningu algebrunnar. Þar með $p(x) - q(x)$ núllmargliðan, þ.e. $p(x) = q(x)$.

5.12

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Sönnun

Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.

Ef $m = 0$, þá erum við aðeins með eitt brúunarskilyrði, $p(x_0) = y_0$, og fastamargliðan $p(x) = y_0$ er lausn af stigi ≤ 0 .

G.r.f. að við getum leyst öll brúunarverkefnum þar sem fjöldi punkta er m og sýnum að við getum þá leyst verkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m - 1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m - 1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

5.13

5.1 Framhald af sönnun

Vorum með

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

sem er greinilega margliða af stigi $\leq m$.

Skoðum nú gildin á p

$$p(x_0) = 1 \cdot q(x_0) + 0 \cdot r(x_0) = y_0,$$

$$p(x_k) = \frac{x_k - x_m}{x_0 - x_m} y_k + \frac{x_k - x_0}{x_m - x_0} y_k = y_k, \quad k = 1, \dots, m - 1,$$

$$p(x_m) = 0 \cdot q(x_m) + 1 \cdot r(x_m) = y_m.$$

Þar með er p brúunarmargliðan sem uppfyllir $p(x_j) = y_j$ fyrir $j = 0, \dots, m$ og við höfum leyst brúunarverkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

5.14

5.1 Lagrange-form brúunarmargliðunnar

Sönnunin á síðustu glæru er í raun rakningarformúla til þess að reikna út gildi brúunarmargliðunnar p fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Hægt er að skrifa lausnina niður beint

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_m \ell_m(x),$$

þar sem ℓ_0, \dots, ℓ_m er ákveðinn grunnur fyrir rúm allra margliða \mathcal{P}_m af stigi $\leq m$ og nefnast *Lagrange-margliður fyrir punktastafnið* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

5.15

5.1 Lagrange-margliður, tilfelli $m = 0, 1, 2$

$m = 0$

Ef $m = 0$ þá er $p(x) = y_0$ fastamargliða eins og við höfum séð.

$m = 1$

Ef $m = 1$, þá blasir við að lausnin er

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

sem er margliða af stigi ≤ 1 (þ.e. lína) sem leysir brúunarverkefnið.

$m = 2$

Á hliðstæðan hátt fáum við fyrir $m = 2$ að

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

leysir brúunarverkefnið.

5.16

5.1 Lagrange-margliður almenna tilfellið

Almennt fæst lausnin

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_m \ell_m(x) \quad (1)$$

þar sem

$$\ell_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^m \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Athugið að

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases} \quad (2)$$

Allar margliðurnar ℓ_k eru af stigi m og því er p af stigi $\leq m$. Nú er augljóst útfra (1) og (2) að p er lausn brúunarverkefnisins.

5.17

5.1 Sýnidæmi

Reiknum brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1, 1)$, $(2, 3)$ og $(3, 6)$ með Lagrange-margliðum.

Reiknum fyrst margliðurnar ℓ_0 , ℓ_1 og ℓ_2 :

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \\ \ell_1 &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3) \\ \ell_2 &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \end{aligned}$$

Þá fæst að brúunarmargliðan p er

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3 \cdot (x-1)(x-3) + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Þetta er greinilega annars stigs margliða og auðvelt er að sannfæra sig um að $p(1) = 1$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 6$.

5.18

5.3 Newton-form brúunarmargliðu

5.3 Newton-form brúunarmargliðu

Formúla fyrir c_0, \dots, c_m

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum c_0, \dots, c_m í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna x_0, \dots, x_{m-1} .

Athugum að $c_m = a_m$, þar sem a_m er stuðullinn við veldið x^m í staðalframsetningunni á p .

Til þess að reikna út c_0, \dots, c_m þurfum við að reikna út með skipulegum hætti stuðulinn við veldið x^j í brúunarmargliðunni gegnum punktana $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+j}, y_{i+j})$, fyrir öll $i = 0, \dots, m$ og $j = 0, \dots, m-i$. Við táknum þennan stuðul með $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$.

Athugasemd

Verkefnið er háð röð punktanna, þ.e. framsetningin (Newton-formið) á margliðunni. Auðvitað er margliðan og gildin á henni alltaf þau sömu (sbr. ótvíræðni glæru 5.12).

5.19

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$:

$$y[x_i] = y_i.$$

$j = 1$:

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$j = 2$:

$$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

$j > 2$:

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_j] - y[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}.$$

Athugasemd:

Stærðin $y[x_{n-1}, x_n]$ hefur komið fyrir áður hjá okkur þegar við fjölluðum um sniðilsaðferð, sjá kafla 2.5.

5.20

5.3 Upprifjun á tilvistarsonnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsonnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \dots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \dots, x_m]$.

Við sjáum þá að stuðullinn við veldið x^m í $p(x)$ er

$$\frac{y[x_0, \dots, x_{m-1}]}{x_0 - x_m} + \frac{y[x_1, \dots, x_m]}{x_m - x_0} = y[x_0, \dots, x_m]$$

Athugasemd: Fyrir $m = 0$ gildir að $p(x) = y_0 = y[x_0]$.

5.21

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 0, 1$

Mismunakvótar eru venjulega reiknaðir út í svokölluðum *mismunakvótatöflum*.

Ef $m = 0$ er mismunakvótataflan aðeins ein lína

$$\begin{array}{c|c|c} i & x_i & y[x_i] \\ \hline 0 & x_0 & y[x_0] = y_0 \end{array}$$

Ef $m = 1$ er taflan

$$\begin{array}{c|c|c|c} i & x_i & y[x_i] & y[x_i, x_{i+1}] \\ \hline 0 & x_0 & y[x_0] = y_0 & y[x_0, x_1] \\ 1 & x_1 & y[x_1] = y_1 & \end{array}$$

og

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0).$$

5.22

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 2$

Ef $m = 2$ verður taflan

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} i & x_i & y[x_i] & y[x_i, x_{i+1}] & y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \hline 0 & x_0 & y[x_0] = y_0 & y[x_0, x_1] & y[x_0, x_1, x_2] \\ 1 & x_1 & y[x_1] = y_1 & y[x_1, x_2] & \\ 2 & x_2 & y[x_2] = y_2 & & \end{array}$$

og margliðan er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

5.23

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 3$

Skoðum loks tilfellið $m = 3$

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$			

Brúunarmargliðan fæst svo með því að nota stuðlana úr fyrstu línu töflunnar:

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

5.24

5.3 Sýnidæmi

Við skulum reikna út aftur brúunarmargliðuna gegnum $(1, 1)$, $(2, 3)$ og $(3, 6)$. Stillum fyrst upp mismunakvótatöflu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3		
2	3	6		

Fyllum svo út í hana með að ganga á hvern dálk á fætur öðrum

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\frac{3-1}{2-1} = 2$	$\frac{6-1}{3-1} = 1/2$
1	2	3	$\frac{6-3}{3-2} = 3$	
2	3	6		

Lesum út brúunarmargliðuna p með að ganga á efstu línuna:

$$p(x) = 1 + 2 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot (x - 1)(x - 2).$$

5.25

5.3 Sýnidæmi

Reiknum út brúunarmargliðuna gegnum $(3, 1)$, $(1, -3)$, $(5, 2)$ og $(6, 4)$. Stillum upp og fyllum út í mismunakvótatöflu:

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, \dots, x_{i+3}]$
1	3	1	$\frac{-3-1}{1-3} = 2$	$\frac{5/4-2}{5-3} = -3/8$	$\frac{3/20-(-3/8)}{6-3} = 7/40$
2	1	-3	$\frac{2-(-3)}{5-1} = 5/4$	$\frac{2-5/4}{6-1} = 3/20$	
3	5	2	$\frac{4-2}{6-5} = 2$		
4	6	4			

Nú getum við lesið brúunarmargliðuna okkar úr töflunni með að ganga á efstu línuna, við fáum

$$p(x) = 1 + 2(x - 3) - \frac{3}{8}(x - 3)(x - 1) + \frac{7}{40}(x - 3)(x - 1)(x - 5)$$

5.26

5.3 Samantekt

Ef gefnir eru punktar $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ í \mathbb{R}^2 , þar sem $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$, þá er til nákvæmlega ein margliða p stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m$$

Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna x_0, \dots, x_{m-1} er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + y[x_0, \dots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir eru reiknaðir með rakningarformúlunum $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - y[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m - i.$$

5.27

5.3 Samantekt – Newton-form

Venja er að setja mismunakvótana upp í töflu og stuðlarnir í Newton-forminu raða sér í fyrstu línu töflunnar:

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$y[x_i, \dots, x_{i+4}]$	\dots
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	\dots
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3, x_4]$	\dots	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_2, x_3, x_4]$	\dots		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$	$y[x_3, x_4]$	\dots			
4	x_4	$y[x_4] = y_4$	\dots				
\vdots	\vdots	\vdots					

5.28

5.3 Samantekt – Lagrange-margliður

Lagrange-form brúunarmargliðunnar er

$$p(x) = \sum_{k=0}^m y_k \ell_k(x)$$

þar sem ℓ_k eru Lagrange-margliðurnar með tilliti til punktanna x_0, \dots, x_m ,

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^m \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_m)}.$$

En þær uppfylla

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases}$$

5.29

5.3 Samantekt

Lagrange-margliður

- Auðvelt að finna margliðuna
- Dýrara að reikna fallgildin

Newton-margliður

- Erfiðara að finna margliðuna
- Auðvelt að finna fallgildin (reiknirit Horner's)

5.30

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

Látum a_1, \dots, a_k vera ólíka punkta í \mathbb{R} , m_1, \dots, m_k vera jákvæðar heiltölur og hugsum okkur að gefnar séu rauntölur

$$y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Við viljum finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að margliðan $p = p^{(0)}$ og afleiður hennar $p^{(j)}$ uppfylli

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Við nefnum verkefnið að finna slíka margliðu p *alhæft brúunarverkefni*, og margliða sem uppfyllir þessi skilyrði nefnist *brúunarmargliða fyrir brúunarverkefnið* sem lýst er með gefnu skilyrðunum.

5.31

5.X Margfeldni punktanna

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.

Við skilgreinum nú töluna

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1.$$

Brúunarmargliðan okkar p á að vera af stigi $\leq m$, og fjöldi skilyrða sem við setjum á hana eru $m + 1$. (Athugið að tilfellið $k = m + 1$, $m_j = 1$ er það sem við skoðuðum í köflunum hér á undan).

5.32

5.X Tilfellin: (i) allir punktar eins og (ii) einn punktur

(i) Allir punktar eins

Ef allir punktarnir eru einfaldir, þá er alhæfða brúunarverkefnið sama verkefni og brúunarverkefnið sem við leystum í kafla 5.1 og 5.3 með

$$p^{(0)}(a_i) = p(a_i) = y_i^{(0)},$$

og lausnin var leidd út með

$$x_0 = a_1, \dots, x_m = a_k \quad \text{og} \quad y_0 = y_1^{(0)}, \dots, y_m = y_k^{(0)}.$$

(ii) Einn punktur

Ef aftur á móti $k = 1$, þá er lausn gefin með Taylor-margliðunni af röð m í punktinum a_1

$$p(x) = y_1^{(0)} + \frac{y_1^{(1)}}{1!}(x - a_1) + \dots + \frac{y_1^{(m)}}{m!}(x - a_1)^m.$$

5.33

5.X Upprifjun

Munum að ef p er margliða og $p(a) = 0$ þá er p deilanleg með $(x - a)$. Það er, hægt er að skrifa

$$p(x) = (x - a)q(x),$$

þar sem q er margliða af stigi sem er einu lægra en stig p .

5.34

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.

Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Af þessu leiðir að $r(x)$ er deilanlegt með $(x - a_i)^{m_i}$ en samanlagt stig þessara þátta er $m_1 + \dots + m_k = m + 1$.

Nú er stig $r(x)$ minna eða jafnt m svo þetta getur aðeins gerst ef $r(x)$ er núllmargliðan.

Við höfum því að $p(x) = q(x)$ og ályktum að við höfum nákvæmlega eina lausn á brúunarverkefninu ef við getum sýnt fram á tilvist á lausn.

5.35

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

Gerum nú ráð fyrir að við getum fundið brúunarmargliðu af stigi $\leq m - 1$ fyrir sérhvert alhæft brúunarverkefni þar sem samanlagður fjöldi skilyrðanna er m .

Lítum nú aftur á upprunalega brúunarverkefnið það sem fjöldi skilyrðanna er $m + 1$. Skilgreinum tvær runur af punktum

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_1 \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0, y_1, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(m_k-1)})$$

Við höfum séð að í því tilfalli að við höfum einn punkt, $k = 1$, $x_0 = x_1 = \dots = x_m = a_1$ er lausnin gefin með Taylor-margliðu í a_1 .

5.36

5.X Tilvist á lausn

Við megum því gera ráð fyrir punktarnir séu a.m.k. tveir, $k \geq 2$. Það gefur að $x_0 \neq x_m$.

Látum $q(x)$ vera margliðuna af stigi $\leq m-1$ sem uppfyllir sömu skilyrði og p , nema það síðasta um að $q^{(m_k-1)}(a_k)$ þurfi að vera $y_k^{(m_k-1)}$.

og látum $r(x)$ vera margliðuna sem uppfyllir öll brúunarskilyrðin, nema síðasta skilyrðið í fyrsta punkti um að $r^{(m_1-1)}(a_1)$ sé jafnt $y_1^{(m_1-1)}$.

5.37

5.X Gefin fallgildi eru tekin:

Setjum síðan

$$p(x) = \frac{x-x_m}{x_0-x_m}q(x) + \frac{x-x_0}{x_m-x_0}r(x) = \frac{x-a_k}{a_1-a_k}q(x) + \frac{x-a_1}{a_k-a_1}r(x)$$

Nú þurfum við að staðfesta að öll skilyrðin séu uppfyllt.

Við byrjum á því að taka $j=0$ sem svarar til þess að p taki fyrirfram gefin fallgildi,

$$\begin{aligned} p(a_1) &= \frac{a_1-a_k}{a_1-a_k}q(a_1) + \frac{a_1-a_1}{a_k-a_1}r(a_1) = q(a_1) = y_1^{(0)} \\ p(a_i) &= \frac{a_i-a_k}{a_1-a_k}q(a_i) + \frac{a_i-a_1}{a_k-a_1}r(a_i) = \left(\frac{a_i-a_k}{a_1-a_k} + \frac{a_i-a_1}{a_k-a_1} \right) y_i^{(0)} \\ &= y_i^{(0)}, \quad \text{fyrir } i=2, \dots, k-1, \\ p(a_k) &= \frac{a_k-a_k}{a_1-a_k}q(a_k) + \frac{a_k-a_1}{a_k-a_1}r(a_k) = r(a_k) = y_k^{(0)}. \end{aligned}$$

5.38

5.X Gildin á afleiðunum eru tekin

Rifjum upp margliðuna p :

$$p(x) = \frac{x-x_m}{x_0-x_m}q(x) + \frac{x-x_0}{x_m-x_0}r(x) = \frac{x-a_k}{a_1-a_k}q(x) + \frac{x-a_1}{a_k-a_1}r(x)$$

Afleiður hennar eru

$$p^{(j)}(x) = \frac{(x-a_k)}{(a_1-a_k)}q^{(j)}(x) + \frac{(x-a_1)}{(a_k-a_1)}r^{(j)}(x) + j \frac{(q^{(j-1)}(x) - r^{(j-1)}(x))}{a_k-a_1}$$

Ef nú $m_i > 1$ þá er $q^{(j-1)}(a_i) = y^{(j-1)}(a_i) = r^{(j-1)}(a_i)$ fyrir $j=1, \dots, m_i-1$ og því kemur alltaf 0 út úr síðasta liðnum ef við setjum inn $x = a_i$, fyrir öll $i=1, \dots, k$.

Af þessu sést að afleiður p uppfylla skilyrðin

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad \text{fyrir } j=0, \dots, m_i-1, \quad i=1, \dots, k.$$

5.39

5.X Samantekt

Við höfum því sannað eftirfarandi.

Setning

Ef gefnar eru

- rauntölur a_1, \dots, a_k , með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$,
- jákvæðar heiltölur m_1, \dots, m_k ,
- rauntölur $y_i^{(j)}$, fyrir $j=0, \dots, m_i-1$, $i=1, \dots, k$,

og talan m er skilgreind með $m = m_1 + \dots + m_k - 1$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j=0, \dots, m_i-1, \quad i=1, \dots, k.$$

5.40

5.X Brúunarmargliðan fundin

Ef skilgreindar eru runurnar

$$(x_0, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_k, \dots, a_k)$$

þar sem a_1 kemur fyrir m_1 sinnum, a_2 kemur fyrir m_2 sinnum o.s.frv., og

$$(y_0, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2^{(0)}, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(m_k-1)}),$$

þá er Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna x_0, \dots, x_{m-1} gefið með

5.41

5.X Brúunarmargliðan fundin

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + y[x_0, \dots, x_m](x - x_0) \dots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ eru reiknaðir með rakningarformúlu þannig að $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}] = \begin{cases} \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - y[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, & \text{ef } x_i \neq x_{i+j}, \\ \frac{y_i^{(j)}}{j!}, & \text{ef } x_i = x_{i+j}. \end{cases}$$

5.42

Nálgun á föllum með margliðum og skekkjumat

5.1 Nálgun á föllum með margliðum

Lítum nú aftur á almenna brúunarverkefnið og gefum okkur að tölurnar $y_i^{(j)}$ séu af gerðinni $f^{(j)}(a_i)$ þar sem $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ er fall á bili I sem inniheldur alla punktana a_1, \dots, a_k .

Þá snýst brúunarverkefnið um að finna margliðu af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Við vitum að lausn þess er ótvírætt ákvörðuð. Ef við notum Newton form lausnarinnar, þá táknum við mismunakvótana með

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}]$$

í stað

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}]$$

5.43

5.1 Nálgun á fallgildum

Runurnar (x_0, \dots, x_m) og (y_0, \dots, y_m) eru skilgreindar með

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_1 \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0, y_1, \dots, y_m) = (f^{(0)}(a_1), \dots, f^{(m_1-1)}(a_1), f^{(0)}(a_2), \dots, f^{(m_2-1)}(a_2), \dots, f^{(0)}(a_k), \dots, f^{(m_k-1)}(a_k))$$

5.44

5.1 Skekkjumat

Nú tökum við punkt $x \in I$ og spyrjum um skekkjuna $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Ef x er einn punktana a_1, \dots, a_k , þá er $p(x) = f(x)$ og skekkjan þar með 0, svo við skulum gera ráð fyrir að $x \neq a_i$, $i = 1, \dots, k$.

Við bætum nú $(x, f(x))$ sem einföldum brúunarpunkti við alhæfða brúunar verkefnið og fáum sem lausn $q(t)$ á þessu aukna verkefni. Margliðan q er af stigi $\leq m + 1$. Við notum táknið t fyrir breytu, því x er frátekið.

Þá uppfyllir $q(t)$ að $q(x) = f(x)$ auk allra skilyrðanna

$$q^{(j)}(a_i) = p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$$

í verkefninu sem við byrjuðum með.

5.45

5.1 Skekkjumat

Við getum þá skrifað (sjá glæru 5.27 til hliðsjónar)

$$\begin{aligned} q(t) &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - x_0) \cdots (t - x_m) \\ &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}. \end{aligned}$$

Þegar við gefum breytunni t gildið x , þá fáum við $q(x) = f(x)$ og því fæst formúla fyrir skekkjunni

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

Nú ætlum við að finna leið til þess að meta skekkjuliðinn. Til þess þurfum við að gefa okkur að f hafi að minnsta kosti $m + 1$ afleiðu.

5.46

5.1 Tilfellið þegar við höfum aðeins einn punkt

Munum nú að í tilfellinu þegar við erum bara með einn punkt a_1 , þá erum við með $m + 1$ skilyrði

$$p^{(j)}(a_1) = f^{(j)}(a_1), \quad j = 0, \dots, m$$

og við fáum að p er Taylor-margliða fallsins f í punktinum a_1 . Þá er $x_0 = \cdots = x_m = a_1$ og við fáum

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m+1}$$

Nú segir setning Taylors okkur að til sé punktur ξ milli a_1 og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a_1)^{m+1}$$

Við getum því dregið þá ályktun að í þessu sértilfelli er

$$f[x_0, \dots, x_m, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Það kemur í ljós að þetta er almenn regla sem gildir fyrir öll alhæfðu brúunarverkefni.

5.47

5.1 Tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

Munum að tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

$$f[a_1, x] = \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} = f'(\xi).$$

5.48

5.1 Margfeldni núllstöðva:

Samfelld fall φ á bili I er sagt hafa núllstöð af stigi að minnsta kosti $m > 0$ í punktinum $a \in I$, ef til er samfelld fall ψ á I þannig að

$$\varphi(x) = (x - a)^m \psi(x)$$

Við segjum að φ hafi núllstöð af margfeldni m ef $\psi(a) \neq 0$.

Athugið að ef φ er deildanlegt I með samfellda afleiðu, þá er ψ deildanlegt með samfellda afleiðu í $I \setminus \{a\}$ og við höfum

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= m(x - a)^{m-1} \psi(x) + (x - a)^m \psi'(x) \\ &= (x - a)^{m-1} (m\psi(x) + (x - a)\psi'(x)) \end{aligned}$$

Ef afleiðan ψ' er takmörkuð í grennd um a , þá sjáum við á þessari formúlu að φ' hefur núllstöð af stigi að minnsta kosti $m - 1$ í a .

5.49

5.1 Núllstöðvar taldar með margfeldni

Hugsum okkur nú að við séum með a_1, \dots, a_k ólíka punkta í bilinu I og að m_1, \dots, m_k séu jákvæðar náttúrlegar tölur.

Ef fallið φ hefur núllstöðvar í öllum punktinum a_j og núllstöðin a_j er af stigi að minnsta kosti m_j . Við segjum að þá hafi φ að minnsta kosti

$$n = m_1 + \cdots + m_k$$

núllstöðvar taldar með margfeldni.

Eins þá segjum við að φ hafi n núllstöðvar í $\{a_1, \dots, a_k\}$ taldar með margfeldni ef φ hefur núllstöðvar í öllum punktum a_1, \dots, a_k og samanlögð margfeldni þeirra er n

5.50

5.1 Margfeldni núllstöðva

Hugsum okkur nú að fallið φ hafi núllstöð af stigi m_j í punktinum a_j fyrir öll $j = 1, \dots, k$ og að $n = m_1 + \dots + m_k$.

Til einföldunar gerum við ráð fyrir að

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k.$$

Þá gefur meðalgildissetningin að φ' hefur að minnsta kosti eina núllstöð á sérhverju bilanna

$$]a_1, a_2[,]a_2, a_3[, \dots]a_{k-1}, a_k[$$

Þau eru samanlagt $k - 1$ talsins. Að auki vitum við að φ' hefur núllstöðvar af stigi að minnsta kosti $m_j - 1$ í punktinum a_j . Ef við leggjum þetta saman, þá fáum við að φ' hefur núllstöðvar af margfeldni að minnsta kosti

$$k - 1 + (m_1 - 1) + \dots + (m_k - 1) = n - 1$$

í minnsta lokaða bilinu sem inniheldur alla punktana a_1, \dots, a_k .

5.51

5.1 Skekkjumat – aftur

Nú ætlum við að sýna fram á að fyrir föll f sem eru $(m + 1)$ sinnum samfelld deildanleg að til sé ξ á minnsta bili sem inniheldur a_1, \dots, a_k og x þannig að

$$f[x_0, \dots, x_m, x] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Við skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \dots (t - a_k)^{m_k}$$

og talan λ er valin þannig að $g(x) = 0$.

Nú er $p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$ fyrir $j = 0, \dots, m_i - 1$, þá gefur setning Taylors okkur að g hefur núllstöð af stigi m_i í sérhverjum punktanna a_i . Auk þess hefur g núllstöð í x . Samanlagt eru þetta að minnsta kosti $m + 2$ núllstöðvar taldar með margfeldni.

5.52

5.1 Skekkjumat – aftur

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m + 2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m + 1$ núllstöð talda með margfeldni,

g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni

og þannig áfram, þar til við ályktum að

$g^{(m+1)}$ hefur að minnsta kosti eina núllstöð.

Tökum eina slíka og köllum ξ .

5.53

5.1 Skekkjumat – aftur

Munum að

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \dots (t - a_k)^{m_k} = t^{m+1} + b_m t^m + \dots + b_1 t + b_0$$

Margliðan p hefur stig $\leq m$ svo $p^{(m+1)}(x) = 0$ fyrir öll x

og margliðan w er af stigi $m + 1$ með stuðul 1 við hæsta veldið, svo $w^{(m+1)}(t) = (m + 1)!$. Við höfum því

$$0 = g^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - \lambda \cdot (m + 1)!$$

sem jafngildir því að

$$\lambda = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}$$

5.54

5.1 ... og nú er þetta loksins búið

Við setjum nú inn $t = x$ sem gefur

$$0 = g(x) = f(x) - p(x) - \lambda w(x),$$

og við fáum þar með formúlu fyrir skekkjunni á nálgun á $f(x)$ með alhæfðu brúunarmargliðunni $p(x)$,

$$f(x) - p(x) = \lambda w(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

5.55

5.1 Samantekt

Ef gefið er fall $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ á bili I , a_1, \dots, a_k í I , með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$, jákvæðar heiltölur m_1, \dots, m_k , talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, og gert er ráð fyrir að $f \in C^{m+1}(I)$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.56

5.1 Samantekt

Newton-form margliðunnar p er gefið með

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $f[x_i, \dots, x_{i+j}]$ eru skilgreindir sem $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ út frá gögnunum $y_i^{(j)}$. Fyrir sérhvert x í I er skekkjan $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$ gefin með

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}.$$

Fyrir sérhvert $i = 1, \dots, k$ og $j = 0, \dots, m - i$ þá gildir að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur x_i, \dots, x_{i+j} þannig að

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!},$$

5.57

5.1 Samantekt

Því gildir sérstaklega að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur a_1, \dots, a_k og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}.$$

5.58

5.1 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Setjið upp mismunakvótatöflu til þess að reikna út brúunarmargliðu p af stigi ≤ 3 fyrir fallið f , sem hefur tvo tvöfalda brúunarpunkta $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$. Skrifðið upp Newton-form margliðunnar p .

b) Reiknið út $p(1.3)$. Notið aðferðarskekkju fyrir margliðubrúun til þess að meta skekkjuna $f(1.3) - p(1.3)$ að ofan og neðan og fáið þannig bil þar sem rétta gildið liggur. Veljið miðpunkt bilsins sem nálgunargildi fyrir $f(1.3)$ og afrúnið gildið miðað við mörk bilsins.

c) Látum nú q vera brúunarmargliðuna af stigi ≤ 4 sem uppfyllir sömu skilyrði og gefin eru í a) að viðbættu því að $a_2 = 2$ á að vera þrefaldur brúunarpunktur. Sýnið hvernig hægt er að ákvarða mismunakvótatöfluna fyrir q með því að stækka töfluna í a). Ákvarðið síðan q og reiknið út $q(1.3)$.

5.59

5.1 Lausn á sýnidæmi Lausn:

a) (og c)). Til þess að spara pláss skulum við reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í c)-lið. Punktarnir x_0, \dots, x_4 eru þá 1, 1, 2, 2, 2 og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \quad \text{og} \quad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

Í a)-lið eru punktarnir tvöfaldir svo við höfum gefin gildi afleiðunnar $f'(x) = 2x \ln x + x$ í punktinum 1 og 2.

$$f'(1) = f[1, 1] = f[x_0, x_1] = 1 \quad \text{og} \quad f'(2) = f[2, 2] = f[x_2, x_3] = 4 \ln 2 + 2.$$

Í c)-lið er gildið á 2. afleiðu $f''(x) = 2 \ln x + 3$ gefið í punktinum 2. Það gefur okkur

$$f''(2)/2! = f[2, 2, 2] = f[x_2, x_3, x_4] = \ln 2 + \frac{3}{2}.$$

Við setjum þessi gildi inn í mismunakvótatöfluna og fyllum hana út með því að taka mismunakvóta milli allra gilda

5.60

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
0	1	0	1	$4 \ln 2 - 1$	$-4 \ln 2 + 3$	$5 \ln 2 - \frac{7}{2}$
1	1	0	$4 \ln 2$	2	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	
2	2	$4 \ln 2$	$4 \ln 2 + 2$	$\ln 2 + \frac{3}{2}$		
3	2	$4 \ln 2$	$4 \ln 2 + 2$			
4	2	$4 \ln 2$				

Margliðan í (a) lið er

$$p(x) = (x - 1) + (4 \ln 2 - 1)(x - 1)^2 + (-4 \ln 2 + 3)(x - 1)^2(x - 2).$$

en í (c)-lið er hún

$$q(x) = p(x) + (5 \ln 2 - \frac{7}{2})(x - 1)^2(x - 2)^2$$

5.61

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald b)

Við stingum gildinu $x = 1.3$ inn í margliðuna og fáum $p(1.3) = 0.445206074$. Skekkjan er

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - 1)^2(x - 2)^2$$

þar sem ξ er einhver punktur á bilinu $[1, 2]$.

Við þurfum því að meta fjórðu afleiðuna,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \ln x, & f'(x) &= 2x \ln x + x, & f''(x) &= 2 \ln x + 3, \\ f'''(x) &= 2/x, & f^{(4)}(x) &= -2/x^2. \end{aligned}$$

Ef $x \in [1, 2]$, þá höfum við matið $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$.

5.62

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

Af ójöfnunum $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$ leiðir síðan að

$$\alpha = \frac{-2 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} \leq f(1.3) - p(1.3) \leq \frac{-0.5 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} = \beta.$$

Við reiknum út úr báðum brotunum

$$\alpha = -0.003675 \quad \text{og} \quad \beta = -0.00091875.$$

þar með er $f(1.3)$ á bilinu milli $p(1.3) + \alpha = 0.441531$ og $p(1.3) + \beta = 0.444287$.

Nálgunargildi okkar á að vera miðpunktur þessa bils og algildi skekkjunnar verður þá hálf bil-lengdin. Það færir okkur nálgunina $f(1.3) \approx 0.442909$ og skekkjuna ± 0.0014 . Réttur afrúningur er $f(1.3) = 0.44$.

5.63

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

Við eigum aðeins eftir að reikna út gildi margliðunnar q í punktinum 1.3. Út úr mismunakvótatölflunni fáum við

$$q(x) = p(x) + (5 \ln 2 - \frac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

sem gefur okkur gildið

$$q(1.3) = 0.445206074 - 0.001511046 = 0.4436950278$$

Til samanburðar höfum við rétt gildi

$$f(1.3) = 0.443395606950060 \dots$$

5.64

5.5 Splæsibrúun

5.5 Splæsibrúun

Látum $(t_0, y_0), \dots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i .

Ef punktarnir liggja á grafi fallsins f og nota á margliðuna til þess að nálga fallgildi f , þá getur það verið ýmsum erfiðleikum bundið þegar stig hennar stækkar. Þá getur til dæmis komið fram óstöðugleiki í útreikningum þannig að örlítið frávik í x geta leitt til mikilla frávika í $p(x)$.

Skoðið mynd á bls. 387 í kennslubók.

5.65

5.5 Almennt um splæsibrúun:

Splæsibrúun er leið út úr þessum vandræðum.

Með henni er fundið samfelld fall S sem brúar gefnu punktana, $S(t_i) = y_i$, og er þannig að einskörðun þess við hlutbilin $[t_i, t_{i+1}]$ er gefið með margliðu af stigi $\leq m$, þar sem m er fyrirfram gefin tala.

Algengast er að nota $m = 3$.

5.66

5.5 Fyrsta stigs splæsibrúun:

Ef stigið m er 1, þá erum við einfaldlega að draga línustrik milli punktanna og sjáum í hendi okkar að lausnin er

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(x - t_0) + y_0, & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(x - t_1) + y_1, & x \in [t_1, t_2], \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(x - t_{n-1}) + y_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

Þessi aðferð er ekki mikið notuð því hún er ósannfærandi fyrir deildanleg föll.

5.67

5.5 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskörðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \quad x \in [t_i, t_{i+1}].$$

Við ætlum að leiða út jöfnur fyrir stuðlunum a_i, b_i, c_i og d_i ; við krefjumst þess að:

- (i) S verði samfelld tvisvar sinnum deildanlegt á öllu bilinu $[a, b]$
- (ii) S taki gildin y_i í punktunum t_i

Setjum til einföldunar $h_i = t_{i+1} - t_i$ fyrir $i = 0, \dots, n-1$.

Þá má þýða þessi skilyrði yfir í jöfnurnar

5.68

5.5 Jöfnur fyrir stuðlunum

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \quad x \in [t_i, t_{i+1}].$$

Skilyrðin tvö þýðast nú yfir í jöfnuhneppi:

$$a_i = S_i(t_i) = y_i, \quad (1)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) = a_{i+1}, \quad (2)$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = S'_i(t_{i+1}) = S'_{i+1}(t_{i+1}) = b_{i+1}, \quad (3)$$

$$2c_i + 6d_i h_i = S''_i(t_{i+1}) = S''_{i+1}(t_{i+1}) = 2c_{i+1}, \quad (4)$$

Í (1) höfum við $i = 0, \dots, n$ og í (2)-(4) höfum við $i = 0, \dots, n-2$.

Samtals: $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ línulegar jöfnur til þess að ákvarða $4n$ óþekktar stærðir.

Það er því ljóst að okkur vantar tvö skilyrði til þess að geta fengið ótvírætt ákvarðaða lausn.

5.69

5.5 Við verðum að móða úr þessu!!

$$a_i = S_i(t_i) = y_i, \quad (1)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) = a_{i+1}, \quad (2)$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = S'_i(t_{i+1}) = S'_{i+1}(t_{i+1}) = b_{i+1}, \quad (3)$$

$$2c_i + 6d_i h_i = S''_i(t_{i+1}) = S''_{i+1}(t_{i+1}) = 2c_{i+1}, \quad (4)$$

Fyrstu jöfnurnar gefa strax gildi a_i og (4) gefur að

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Ef við setjum þetta inn í (2) og (3) fæst

5.70

5.5 Meira móð

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{c_{i+1} + c_i}{3} h_i^2, \quad i = 0, \dots, n-2$$

$$b_{i+1} = b_i + (c_{i+1} + c_i) h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Þegar við leysum fyrri jöfnuna fyrir b_i fæst

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3} h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

og ef við setjum þetta inn í seinni jöfnuna fæst á endanum að

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i} (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} (a_i - a_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

5.71

5.5 Jöfnuhneppi

$$\begin{bmatrix}
\begin{array}{c|cccc|c}
\cdot & \cdot & & & & \\
\hline
h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\
& h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\
& & & & \cdot & \cdot
\end{array}
&
\begin{bmatrix}
c_0 \\
c_1 \\
c_2 \\
\vdots \\
c_{n-1} \\
c_n
\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
= 3 \begin{bmatrix}
\begin{array}{c|c|c}
\cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\frac{a_2 - a_1}{h_1} & \frac{a_1 - a_0}{h_0} & \\
\frac{a_3 - a_2}{h_2} & \frac{a_2 - a_1}{h_1} & \\
\vdots & \vdots & \\
\frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} & \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\end{bmatrix}$$

5.72

5.5 Enn vantar í þetta....

... einhver skilyrði á c_0 og c_n .

Þegar þau hafa verið sett, þá getum við leyst þetta hneppi, reiknað svo gildi b_i og d_i og þá höfum við fundið splæsifallið okkar.

Það eru til margar leiðir til að ákvarða c_0 og c_n , en fjórar eru algengastar.

5.73

5.5 Tilfelli 1: Ekki-hnúts endaskilyrði

Ef við höfum engar upplýsingar um fallið f í t_1 og t_{n-1} liggur beint við að krefjast þess að S''' sé samfellt þar, sem þýðir að $d_0 = d_1$ og $d_{n-2} = d_{n-1}$. Með að nota jöfnurnar fyrir d_i má skrifa þetta sem

$$\begin{aligned}
h_1 c_0 - (h_0 + h_1) c_1 + h_0 c_2 &= 0 \\
h_{n-1} c_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1}) c_{n-1} + h_{n-2} c_n &= 0
\end{aligned}$$

og þessar jöfnur, ásamt hinum, má leysa til að ákvarða c_i -in.

5.74

5.5 Tilfelli 2: Þvinguð endaskilyrði

Ef hallatala fallsins f er þekkt í endapunktum bilsins er eðlilegt að nota þær upplýsingar við ákvörðun splæsifallsins. Gerum því ráð fyrir að $f'(t_0) = A$ og $f'(t_n) = B$. Skilyrðið $S'(t_0) = A$ gefur þá að

$$A = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{2c_0 + c_1}{3} h_0,$$

eða

$$2h_0 c_0 + h_0 c_1 = 3 \left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - A \right)$$

og $S'(t_n) = B$ gefur

$$B = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að nota formúlurnar fyrir b_{n-1} og d_{n-1} fæst

$$c_{n-1}h_{n-1} + 2c_n h_{n-1} = 3 \left(B - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} \right).$$

5.75

5.5 Tilfelli 3: Náttúrleg endaskilyrði

Einfaldasta lausnin er að setja $c_0 = c_n = 0$, en það jafngildir því að $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$.

5.76

5.5 Tilfelli 4: Lotubundið endaskilyrði

Hugsum okkur að við viljum framlengja S í tvisvar samfelldt deildanlegt $(b-a)$ -lotubundið fall á \mathbb{R} . Það setur skilyrðin

$$y_0 = S(t_0) = S(t_n) = y_n, \quad S'(t_0) = S'(t_n), \quad \text{og} \quad S''(t_0) = S''(t_n)$$

Fljótséð er að $S''(t_0) = S''(t_n)$ þýðir að $c_0 = c_n$, eða

$$c_0 - c_n = 0.$$

Þetta er fyrri jafnan sem við þurfum.

5.77

5.5 Tilfelli 4: Lotubundið endaskilyrði – frh.

Nú gefur $S'(t_0) = S'(t_n)$ að

$$b_0 = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að setja inn formúlurnar fyrir b_0, b_{n-1}, d_{n-1} og nota að $c_0 = c_n$ fæst jafnan

$$h_0c_1 + 2h_{n-1}c_{n-1} + (2h_0 + 2h_{n-1})c_n = 3 \left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} \right).$$

5.78

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

- (i) Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

$$0 = t_0 < t_1 = 1 < \dots < t_n = n.$$

- (ii) Ákveðið er hvaða endaskilyrði eiga við.
(iii) Búin eru til tvö splæsiföll $R(t)$ fyrir punktastafnið x_0, \dots, x_n og $S(t)$ fyrir punktastafnið y_0, \dots, y_n .
(iv) Stikaferillinn $[a, b] \ni t \mapsto (R(t), S(t))$ er síðan teiknaður, en hann uppfyllir $(R(t_j), S(t_j)) = (x_j, y_j)$, $j = 0, \dots, n$.

5.79

5.8 Aðferð minnstu fervika

5.8 Aðferð minnstu fervika

Látum $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ vera safn punkta í plani með $x_j \in [a, b]$ fyrir öll j og látum f_1, \dots, f_n vera raungild föll á $[a, b]$.

Við viljum finna það fall f af gerðinni

$$f(x) = c_1f_1(x) + \dots + c_nf_n(x)$$

með stuðla c_1, \dots, c_n þannig að punktarnir $(x_j, f(x_j))$ nálgast gefna punktastafnið sem best og þá er átt við að ferningssummuna

$$\sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2$$

verði eins lítil og mögulegt er.

5.80

5.8 Jafna bestu línu

Flestir hafa heyrt talað um bestu línu gegnum punktastafn, hún fæst með að taka hér $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$, en lítið mál er að finna einnig besta fleygboga, bestu margliðu af fyrirfram ákveðnu stigi eða einhverja aðra samantekt falla gegnum punktastafnið.

5.81

5.8 Smávegis línuleg algebra

Til þess að finna þessi gildi á stuðlunum c_i er heppilegt að notfæra sér nokkrar niðurstöður úr línulegri algebra. Fyrir gefin gildi á c_1, \dots, c_n setjum við

$$b_i = f(x_i) = c_1 f_1(x_i) + \dots + f_n(x_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

og skilgreinum síðan dálkvigrana

$$b = [b_1, \dots, b_m]^T, \quad y = [y_1, \dots, y_m]^T, \quad \text{og} \quad c = [c_1, \dots, c_n]^T,$$

Þá er $Ac = b$, þar sem A er $m \times n$ fylkið

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{bmatrix}.$$

5.82

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebra

Verkefnið snýst nú um að finna þann vigur $c \in \mathbb{R}^n$ sem lágmarkar

$$\sum_{i=1}^m (y_i - b_i)^2 = \|y - b\|^2 = \|y - Ac\|^2$$

þar sem $\|\cdot\|$ táknar evklíðska normið (staðalinn) á \mathbb{R}^m .

Vigrar af gerðinni $b = Ac$ spanna dálkrúm fylkisins A og þá má skrifa sem línulegar samantektir af gerðinni

$$b = c_1 A_1 + \dots + c_n A_n$$

þar sem A_j er dálkur númer j .

5.83

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebra

Verkefnið snýst um að finna þann vigur í dálkrúminu sem næstur er y . Vigurinn b er næstur y ef og aðeins ef $y - b$ er hornréttur á alla vigra dálkrúmsins.

Þessi skilyrði má fá með innfeldi

$$A_j \cdot (y - b) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Með fylkjarithætti fæst ein jafna

$$A^T(y - b) = 0.$$

Setjum nú inn $b = Ac$. Þá ákvarðast c af hneppinu

$$A^T(y - Ac) = 0$$

sem jafngildir

$$(A^T A)c = A^T y$$

5.84

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebra

Við þurfum því aðeins að leysa þetta jöfnuhneppi

$$(A^T A)c = A^T y$$

fyrir c til að finna stuðlana okkar. Ef fylkið $A^T A$ hefur andhverfu, þá fæst alltaf ótvírætt ákvörðuð lausn c .

Ef fylkið $A^T A$ hefur ekki andhverfu eða að það hefur ákveðu sem er mjög nálægt 0, þá þurfum við að beita flóknari brögðum. Við komum að því síðar.

5.85

5.8 Jafna bestu línu

Alengt er að menn vilji finna beina línu sem best fellur að punktasafninu $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$. Þá er $n = 2$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$.

Fylkið er þá

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}.$$

og þar með

$$A^T A = \begin{bmatrix} m & \sum_{j=1}^m x_j \\ \sum_{j=1}^m x_j & \sum_{j=1}^m x_j^2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad A^T y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m y_j \\ \sum_{j=1}^m x_j y_j \end{bmatrix}.$$

5.86

5.8 Jafna bestu annars stigs margliðu

Ef við viljum finna bestu annars stigs margliðu gegnum punktasafnið, þá er $n = 3$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

Þetta val gefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}.$$

Fylkið $A^T A$ er þá 3×3 og vigurinn $A^T y$ er dálkvigur með 3 hnit.

5.87

5.8 Nokkur forrit

Í skránni `adferd_minnstu_fervika.m` á heimasvæði okkar á Uglu finnið þið forrit til þess að finna bestu margliðu af hvaða stigi sem er gegnum gefið punktasafn.

Það er hægt vandi að breyta þessu forriti ef þið viljið vinna með aðra fallagrunna en margliður.

5.88

5.8 Sýnidæmi: besta annars stigs margliða

Gefin eru mæligildin

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.7	-0.5	-1.7	-1.9	-1.5	0.2	2.3

Beitið aðferð minnstu fervika til þess að finna þá annars stigs margliðu sem best fellur að þessum gögnum. Teiknið upp gögnin og graf marliðunnar.

Lausn: Við leitum hér að þremur tölum c_1 , c_2 og c_3 þannig að annars stigs margliðan $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$ falli sem best að gögnunum þar sem þar sem grunnföllin þrjú eru $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

5.89

5.8 Sýnidæmi: framhald

Í þessu dæmi er fylkið A gefið með

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix}$$

Nú látum við `matlab` um afganginn

5.90

5.8 Sýnidæmi: leyst með Matlab

```
% Matlab forrit sem teiknar upp bestu margliðunálgun á gefnum gögnum
x=[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6]
y=[2.7; -0.5; -1.7; -1.9; -1.5; 0.2; 2.3 ]
m=length(x);

% Við leitum að bestu margliðu af stigi 2 eða lægri
% og því eru grunnföllin eru 3 talsins.
n=3;

% Stuðlafylkið er  $A=(a_{ij})$ ,  $a_{ij}=x_i^{j-1}$ 
A(1:m,1)=ones(m,1);
A(1:m,2)=x;
for j=3:n
    A(1:m,j)=A(1:m,j-1).*x;
end
% Reiknum úr úr normaljöfnuhneppinu  $A^TAc=A^Ty$ :
c=(A'*A)\(A'*y);
```

5.91

5.8 Sýnidæmi: leyst með Matlab frh.

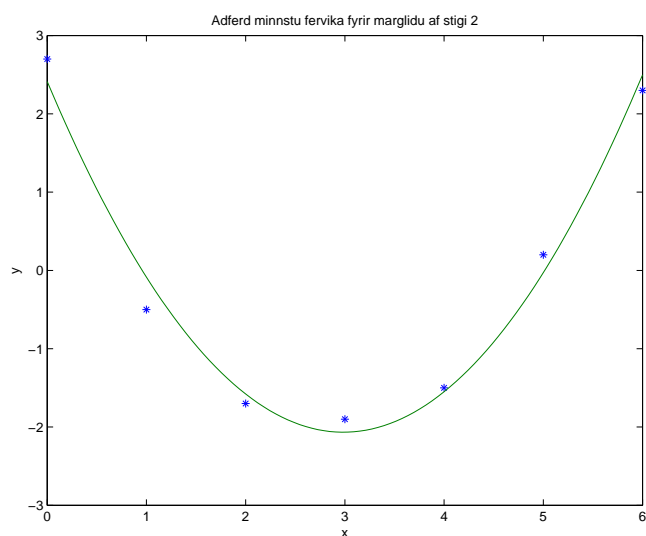
```
% Teikning undirbúin
N=100;
X=linspace(min(x),max(x),N);

% Hliðrun í reikniriti horner er 0
%
hlidrun=zeros(n,1);
for j=1:N
    Y(j)=horner(c, hlidrun, X(j));
end
figure
plot(x,y,'*',X,Y)
xlabel('x'), ylabel('y')
title('Adferd minnstu fervika fyrir margliðu af stigi 2')
print
```

5.92

5.8 Besta annars stigs margliða

Hér kemur myndin sem beðið var um:



5.93

Kafli 5: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er reiknirit Horner's og hver er tilgangur þess?
2. Hvernig er brúunarverkefnið fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$?
3. Rökstyðjið að einungis sé til ein brúunarmargliða af stigi $\leq m$ fyrir brúunarpunktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$
4. Hvernig er Lagrange form brúunarmargliðu og hvernig eru Lagrange-margliður fyrir gefið punkt-
tasafn skilgreindar?
5. Hvernig er Newton-form brúunarmargliðu fyrir fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ þar sem
 $x_i \neq x_j$?
6. Hvernig eru mismunakvótarnir $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ skilgreindir?
7. Hvað er alhæft brúunarverkefni?
8. Hvernig er margfeldni brúunarpunkts í alhæfðu brúunarverkefni skilgreind?
9. Rökstyðjið að alhæfða brúunarverkefnið með $m+1$ skilyrði hafi ótvírætt ákvarðaða lausn af stigi
 $\leq m$.
10. Hvernig er skekkjuformúlan í nálgun á falli $f(x)$ með alhæfðri brúunarmargliðu $p(x)$ sett fram
með mismunakvótum?

5.94

Kafli 5: Fræðilegar spurningar

11. Hvernig er skekkjuformúlan í nálgun á falli $f(x)$ með alhæfðri brúunarmargliðu $p(x)$ sett fram
með $m+1$ afleiðu af f ?
12. Hvaða skilyrði þarf þriðja stigs splæsifall að uppfylla og hvað vantar mörg skilyrði upp á að þau
gefi ótvírætt ákvarðað fall?
13. Hvernig eru ekki-hnúts endaskilyrði á splæsifalli?
14. Hvernig eru þvinguð endaskilyrði á splæsifalli?
15. Hvernig eru náttúrleg endaskilyrði á splæsifalli?
16. Hvernig eru lotubundin endaskilyrði á splæsifalli?
17. Lýsið því hvernig splæsiferlar eru notaðir til þess að teikna ferla í plani.
18. Lýsið aðferð minnstu fervika.
19. Hvernig er jöfnuhneppið sem þarf að leysa í aðferð minnstu fervika?
21. Hvernig er jafna bestu línu gegnum punktastaf fundin?
22. Hvernig er jafna besta fleygboga gegnum punktastaf fundin?

5.95