

Kaflí 6: Töluleg diffrun og heildun

Töluleg greining, STÆ405G, 21., 26. og 28. febrúar, 5., og 7. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

6.1

Yfirlit

Kaflí 6: Töluleg diffrun og heildun

Kaflí	Viðfangsefni	Bls.	Glærur
6.0-6.1	Inngangur	429-437	3-4
6.2	Töluleg deildun	438-445	5-19
6.3	Richardson-útgiskun	447-452	20-31
6.4-6.5	Töluleg heildun	455-478	32-56
6.7	Romberg-heildun	496-502	57-64

6.2

6.0 Inngangur

6.0 Töluleg deildun og heildun

Deildun og heildun eru meginadgerðir stærðfræðigreiningarinnar.

Þess vegna er nauðsynlegt að geta nálgad

$$f'(a), f''(a), f'''(a), \dots \quad \text{og} \quad \int_a^b f(x) dx,$$

þar sem f er fall sem skilgreint er á bili I sem inniheldur a og b .

6.3

6.0 Meginhugmynd í öllum nálgunaraðferðunum

Látum p vera margliðu sem nálgar f , og látum $r(x) = f(x) - p(x)$ tákna skekkjuna í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Þá er

$$f'(x) = p'(x) + r'(x), \quad f''(x) = p''(x) + r''(x), \dots$$

og

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) dx + \int_a^b r(x) dx.$$

Nú þurfum við að gera tvennt:

- (i) Finna heppilegar nálgunarmargliður og reikna út

$$p'(a), p''(a), \dots, \quad \int_a^b p(x) dx$$

- (ii) Meta skekkjurnar

$$r'(a), r''(a), \dots, \quad \int_a^b r(x) dx$$

Byrjum á að leiða út nokkrar nálgunarformúlur með skekkjumati.

6.4

6.2 Töluleg diffnun

6.2 Töluleg deildun

Látum $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall á bili $I \subset \mathbb{R}$ og a vera punkt í I . Afleiða f í punktinum a er skilgreind með

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ef markgildið er til. Við skrifum því oft

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Þessi nálgun er kölluð *frammismunur* því oftast hugsar maður sér að $h > 0$ og þá er $a+h$ lítið skref áfram frá a .

Við þurfum skekkjumat fyrir þessa formúlu ef við eigum að geta notað hana.

6.5

6.2 Frammismunur

Við fáum mat á skekkjuna í nálguninni með að skoða Taylor-margliðu f í a . Samkvæmt setningu Taylors er til ξ á milli a og $a+h$ þannig að

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

Þá fæst að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f[a, a+h]$$

er

$$e = f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Með öðrum orðum

$$\min_{t \in [0, h]} -\frac{1}{2}f''(t)h \leq e \leq \max_{t \in [0, h]} -\frac{1}{2}f''(t)h.$$

Við sjáum því að $e = O(h)$ þegar $h \rightarrow 0$.

6.6

6.2 Bakmismunur

Við getum sett $a-h$ í stað $a+h$ í skilgreininguna á afleiðu. Þá fæst svokallaður *bakmismunur*

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

og ljóst er að sama skekkjumat gengur fyrir þessa nálgun og fyrir nálgun með frammismun.

6.7

6.2 Miðsettur mismunakvóti

Lítum nú á þriðja stigs Taylor nálgun

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\alpha)h^3, \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\beta)h^3, \end{aligned}$$

þar sem α er á milli a og $a+h$ og β er á milli a og $a-h$.

Tökum nú mismuninn og fáum

$$f(a+h) - f(a-h) = f'(a) \cdot 2h + \frac{1}{6}(f'''(\alpha) + f'''(\beta))h^3$$

Ef f''' er samfelld fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er ξ á milli α og β þannig að $f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\alpha) + f'''(\beta))$

6.8

6.2 Miðsettur mismunakvóti

Niðurstaðan verður

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{1}{6}f'''(\xi)h^2.$$

Þannig að skekkjan er

$$e = -\frac{1}{6}f'''(\xi)h^2,$$

og jafnframt er $e = O(h^2)$ þegar $h \rightarrow 0$.

6.9

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Við getum útfært þessa sömu hugmynd til þess að reikna út aðra afleiðu, en þá byrjum við með fjórða stigs Taylor-nálgun

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{6}f'''(a)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\alpha)h^4, \\f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 - \frac{1}{6}f'''(a)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\beta)h^4,\end{aligned}$$

þar sem α er á milli a og $a+h$ og β er á milli a og $a-h$.

Nú leggjum við saman og fáum

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + \frac{1}{24}(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta))h^4.$$

Nú þurfum við að gefa okkur að $f^{(4)}$ sé samfelld fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er ξ á milli α og β þannig að $f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta))$.

6.10

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Niðurstaðan verður

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - \frac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

Með Taylor-margliðum má leiða út fleiri nálgunarformúlur fyrir afleiður.

Við ætlum ekki að halda lengra í þessa átt heldur snúa okkur að almennu aðferðinni.

6.11

6.2 Almenn aðferð til að nálgast afleiður

Ef x_0, \dots, x_n eru punktar í I (hugsanlega með endurtekningum) og p er margliðan sem brúar f í þeim, þá er

$$f(x) = p(x) + r(x),$$

þar sem skekkjuliðurinn $r(x)$ er gefinn með formúlunni

$$r(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Ef við tökum $p'(a)$ sem nálgun á $f'(a)$ er skekkjan

$$r'(a) = f'(a) - p'(a).$$

6.12

6.2 Skekkjumat

Munið að formúlan fyrir afleiðu af margfeldi margra þátta er

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_m)'(a) &= \varphi_1'(a) \varphi_2(a) \varphi_3(a) \cdots \varphi_m(a) + \varphi_1(a) \varphi_2'(a) \varphi_3(a) \cdots \varphi_m(a) + \cdots \\&\quad \cdots + \varphi_1(a) \varphi_2(a) \cdots \varphi_{m-1}(a) \varphi_m'(a)\end{aligned}$$

Horfum nú á skekkjuliðinn $r(x)$. Hann er svona margfeldi með $\varphi_1(x) = f[x_0, \dots, x_n, x]$, $\varphi_2(x) = x - x_0$, $\varphi_3(x) = x - x_1$ o.s.frv.

Athugum nú að ef a er einn af gefnu punktunum x_k , þá er $\varphi_{k+2}(x) = (x - x_k)$ sem gefur $\varphi_{k+2}(x_k) = 0$ og $\varphi_{k+2}'(x_k) = 1$.

Þetta segir okkur að ef við tökum $a = x_k$, þá eru allir liðirnir í summunni í hægri hliðinni 0 nema einn, þ.e. við sitjum eftir með þann sem inniheldur φ_{k+2}' .

6.13

6.2 Skekkjumat frh.

Niðurstaðan verður því að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $p'(a)$ er

$$\begin{aligned} f'(a) - p'(a) &= r'(a) = f[x_0, \dots, x_n, x_k] \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (x_k - x_j) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (a - x_j) \end{aligned}$$

þar sem $a = x_k$.

Hér notuðum við skekkjumatíð fyrir Newton aðferðina (glæra 5.56) sem segir að til er ξ á minnsta bilinu sem inniheldur x_0, \dots, x_n, x_k sem uppfyllir

$$f[x_0, \dots, x_n, x_k] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

6.14

6.2 Frammismunur

Nálgum f með fyrsta stigs brúunarmargliðunni gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ (þ.e. $x_0 = a$ og $x_1 = a+h$),

$$f(x) = f[a] + f[a, a+h](x-a) + f[a, a+h, x](x-a)(x-a-h)$$

Af þessu leiðir formúlan sem við vorum áður komin með

$$f'(a) = f[a, a+h] + f[a, a+h, a](a-a-h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Þar sem ξ er á milli a og $a+h$ og uppfyllir að $f[a, a+h, a] = f[a, a, a+h] = \frac{1}{2}f''(\xi)$. Hér erum við að notafæra okkur aftur skekkjumatíð sem við sönnuðum í kaflanum um brúunarmargliður.

6.15

6.2 Miðsettur mismunakvóti

Tökum þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og a . Þá er

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a-h] + f[a-h, a+h](x-a+h) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \end{aligned}$$

Athugum að afleiðan af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er 0 í punktinum a og því er

$$\begin{aligned} f'(a) &= f[a-h, a+h] + f[a-h, a+h, a](-h^2) \\ &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{1}{6}f'''(\xi)h^2 \end{aligned}$$

Hér nýttum við okkur að til er ξ á milli $a-h$ og $a+h$ þannig að $f[a-h, a+h, a] = \frac{1}{6}f'''(\xi)$.

6.16

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Áfram heldur leikurinn. Nú skulum við leiða aftur út formúluna fyrir nálgun á $f''(a)$ með miðsettum mismunakvóta

Þá tökum við þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og a með a tvöfaldan. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a-h] + f[a-h, a+h](x-a+h) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a, a](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \\ &\quad + f[a-h, a+h, a, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a)^2 \end{aligned}$$

Gætum þess að halda liðnum $(x - a)$. Þá fáum við

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a - h] + f[a - h, a + h](x - a + h) \\ &\quad + f[a - h, a + h, a]((x - a)^2 - h^2) \\ &\quad + f[a - h, a + h, a, a]((x - a)^3 - h^2(x - a)) \\ &\quad + f[a - h, a + h, a, a, x]((x - a)^4 - h^2(x - a)^2) \end{aligned}$$

6.17

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu, frh.

Nú þurfum við að reikna aðra afleiðu í punktinum a . Athugum að önnur afleiða af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x - a + h)(x - a - h) = (x - a)^2 - h^2$$

er fastafallið 2, önnur afleiða af þriðja stigs liðnum

$$x \mapsto (x - a)^3 - h^2(x - a)$$

er 0 í punktinum a og önnur afleiða af fjórða stigs liðnum

$$x \mapsto (x - a)^4 - h^2(x - a)^2$$

er fastafallið $-2h^2$.

6.18

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu, frh.

Við höfum því

$$f''(a) = 2f[a - h, a + h, a] + f[a - h, a + h, a, a](-2h^2)$$

Nú er til punktur ξ á minnsta bili sem inniheldur $a - h$, $a + h$ og a þannig að $f[a - h, a + h, a, a] = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)$.

Við þurfum að reikna út fyrri mismunakvótann

$$\begin{aligned} f[a - h, a + h, a] &= f[a - h, a, a + h] = \frac{f[a, a + h] - f[a - h, a]}{2h} \\ &= \frac{1}{2h} \left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \right) \\ &= \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{2h^2} \end{aligned}$$

Við höfum því leitt aftur út formúluna

$$f''(a) = \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} - \frac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

6.19

6.3 Richardson-útgiskun

6.3 Richardson útgiskun

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin h er lítil eru tölurnar $f(a + h)$, $f(a)$, $f(a - h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Því er ekki hægt að búast við að fá alltaf betri nálgun á $f'(a)$ við að minnka skrefalengdina h .

Leiðin er Richardson útgiskun (e. extrapolation), sem er aðferð til að bæta nálganir.

Til eru mjög almennar útgáfur þessarar aðferðar en við munum aðeins skoða þau sértílfelli sem nýtast okkur mest.

6.20

6.3 Útleiðsla á miðsettum mismunakvóta

Við skulum byrja á að leiða aftur út formúluna fyrir miðsettann mismunakvóta til að fá betri upplýsingar um skekkjuliðinn. Fyrir fall f sem er nógu oft deildanlegt má beita Taylor til að skrifa

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}h^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1} + O(h^{2n+2}) \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \dots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}h^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1} + O(h^{2n+2}) \end{aligned}$$

Ef við drögum seinni jöfnuna frá þeirri fyrri fæst

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + 2\frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + 2\frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

svo ef við einangrum $f'(a)$ sjáum við að

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \dots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_1(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad \text{og} \quad a_k = -\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}, \quad k = 2, 4, \dots, 2n.$$

6.21

6.3 Helmingun á skrefinu

Hér er minnsta veldi í skekkjuliðnum h^2 , svo nálgunin $f'(a) \approx R_1(h)$ er $O(h^2)$, eins og við höfum reyndar séð áður. Helmingun nú skrefalengdina h , þá fæst

$$f'(a) = R_1(h/2) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

6.22

6.3 Helmingun

Nú berum við saman þessi tvö skref:

$$\begin{aligned} f'(a) &= R_1(h/2) + \frac{1}{4}a_2h^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}), \\ f'(a) &= R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \dots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1}) \end{aligned}$$

Margföldum efri jöfnuna með 4 og drögum þá síðari frá. Þá stendur eftir

$$\begin{aligned} 3f'(a) &= 4R_1(h/2) - R_1(h) + a_4\left(\frac{4}{2^4} - 1\right)h^4 \\ &\quad + a_6\left(\frac{4}{2^6} - 1\right)h^6 + \dots + a_{2n}\left(\frac{4}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}) \end{aligned}$$

6.23

6.3 Fjórða stigs nálgun

Nú erum við kominn með nýja formúlu:

$$f'(a) = R_2(h) + b_4h^4 + b_6h^6 + \dots + b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_2(h) = \frac{4R_1(h/2) - R_1(h)}{3} \quad \text{og} \quad b_k = \frac{a_k}{3} \cdot \left(\frac{4}{2^k} - 1\right), \quad k = 4, 6, \dots, 2n.$$

Ef við berum þetta saman við jöfnuna sem við byrjuðum með

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \dots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þá sjáum við að minnsta veldi í skekkjuliðnum er h^4 , svo nálgunin $f'(a) \approx R_2(h)$ uppfyllir

$$f'(a) - R_2(h) = O(h^4)$$

og er því betri nálgun en áður.

Þetta ferli heitir *Richardson útgiskun*.

6.24

6.3 Hægt er að halda áfram útgiskun

Næsta takmark er að eyða liðnum $b_4 h^4$ úr þessari formúlu með því að líta á

$$f'(a) = R_2(h/2) + b_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + b_6 \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots + b_{2n} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Síðan stillum við þessari jöfnu upp með þeirri síðari

$$\begin{aligned} f'(a) &= R_2(h/2) + \frac{1}{16} b_4 h^4 + \frac{1}{64} b_6 h^6 + \dots + \frac{1}{2^{2n}} b_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1}) \\ f'(a) &= R_2(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \dots + b_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1}) \end{aligned}$$

Margföldum fyrri jöfnuna með 16 og drögum þá síðari frá

$$\begin{aligned} 16f'(a) &= 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6 \left(\frac{16}{2^6} - 1\right) h^6 \\ &\quad + b_8 \left(\frac{16}{2^8} - 1\right) h^8 + \dots + b_{2n} \left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right) h^{2n} + O(h^{2n+1}). \end{aligned}$$

6.25

6.3 Sjötta stigs skekkja

$$\begin{aligned} 16f'(a) &= 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6 \left(\frac{16}{2^6} - 1\right) h^6 \\ &\quad + b_8 \left(\frac{16}{2^8} - 1\right) h^8 + \dots + b_{2n} \left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right) h^{2n} + O(h^{2n+1}). \end{aligned}$$

Því er

$$f'(a) = R_3(h) + c_6 h^6 + c_8 h^8 + \dots + c_{2n} h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_3(h) = \frac{16R_2(h/2) - R_2(h)}{15}, \quad \text{og} \quad c_k = \frac{b_k}{15} \cdot \left(\frac{16}{2^k} - 1\right), \quad k = 6, 8, \dots, 2n.$$

Nýja nálgunin uppfyllir

$$f'(a) - R_3(h) = O(h^6)$$

og er því enn betri en áður, en við þurfum líka að reikna út $R_1(h/4)$ til að reikna $R_2(h/2)$.

6.26

6.3 Almenn rakningarformúla

Richardson-útgiskunin heldur áfram og út kemur

$$R_{i+1}(h) = \frac{4^i R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1} = R_i(h/2) + \frac{R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1}$$

fyrir $(i+1)$ -tu Richardson útgiskun og $R_{i+1}(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) - R_{i+1}(h) = O(h^{2i+2}),$$

en á móti kemur að til að reikna út $R_{i+1}(h)$ þurfum við að hafa reiknað út tölurnar

$R_1(h), R_1(h/2), \dots, R_1(h/2^i)$ auk $R_2(h), R_2(h/2), \dots, R_2(h/2^{i-1})$ og svo framvegis að \vdots
 $R_i(h)$ og $R_i(h/2)$.

Eins og áður sagði fara styttingarskekkjur á endanum að segja til sín í útreikningum á $R_1(h)$, svo einhver takmörk eru fyrir hversu margar Richardson útgiskanir er hægt að framkvæma.

6.27

6.3 Reiknirit

Útreikningarnir að ofan eru yfirleitt settir fram í töflu

$$\begin{array}{ccccccc} D(1,1) & & & & & & \\ D(2,1) & D(2,2) & & & & & \\ D(3,1) & D(3,2) & D(3,3) & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ D(n,1) & D(n,2) & D(n,3) & \dots & D(n,n) & & \end{array}$$

þar sem $D(i, j) = R_j(h/2^{i-j})$ og þar með

$$D(i, j) = \begin{cases} \frac{f(a + h/2^{i-1}) - f(a - h/2^{i-1})}{2 \cdot h/2^{i-1}}, & j = 1 \\ D(i, j-1) + \frac{D(i, j-1) - D(i-1, j-1)}{4^{j-1} - 1}, & j > 1 \end{cases}$$

sem gerir auðvelt að forrita Richardson útgiskun.

6.28

6.3 Skekkjumat

Finnur nú eftirámat fyrir $D(i, j)$ með stærðunum $D(i, j-1)$ og $D(i-1, j-1)$. Hér á eftir er $R_j(h/2)$ í hlutverki $D(i, j-1)$ og $R_i(h)$ í hlutverki $D(i-1, j-1)$ (h er helmingað þegar við förum niður um eina línu).

Munum að $R_i(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) = R_j(h) + Kh^{2j} + O(h^{2j+1})$$

fyrir eitthvert K í \mathbb{R} og að

$$f'(a) = R_j(h/2) + K \left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1})$$

Ef við tökum mismun á hægri og vinstri hliðum þessara jafna, þá fáum við

$$0 = R_j(h) - R_j(h/2) + K \left(1 - \frac{1}{2^{2j}}\right) h^{2j} + O(h^{2j+1})$$

og ef við einangrum K fæst

$$K = -\frac{4^j}{h^{2j}} \cdot \frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}).$$

6.29

6.3 Útleiðsla á fyrirframmati

Þá er skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $R_j(h/2)$ jöfn

$$\begin{aligned} e_j(h/2) &= f'(a) - R_j(h/2) \\ &= K \left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1}) \\ &= -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}) \\ &\approx -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1}. \end{aligned}$$

Þar sem $R_j(h/2)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2j+1})$, en $R_{j+1}(h)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2i+3})$ getum við slegið á $e_{j+1}(h)$ með $e_j(h/2)$. Ef við lækkuð vísinn $j+1$ um einn gefur það okkur matið

$$e_j(h) \approx \frac{R_{j-1}(h) - R_{j-1}(h/2)}{4^{j-1} - 1} = \frac{D(i, j-1) - D(i-1, j-1)}{4^{j-1} - 1}$$

sem er einmitt liðurinn í rakningarformúlunni fyrir $D(i, j)$.

6.30

6.3 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2+4}$ og $a = -1$. Með því að byrja á $h = 1$ og prentum út útgiskunartöfluna

h	$D(i, 1)$	$D(i, 2)$	$D(i, 3)$	$D(i, 4)$
1.	0.50000000			
0.5	0.50564632	0.50752843		
0.25	0.50657385	0.50688303	0.50684000	
0.125	0.50676839	0.50683323	0.50682991	0.50682976

Niðustaðan er: $f'(-1) \approx 0.50682976$

með eftirámat á skekkju $-1.6 \cdot 10^{-7}$.

Rétt gildi er 0.50682974129023.

6.31

6.4 Töluleg heildun

6.4 Töluleg heildun

Gerum ráð fyrir að x_0, x_1, \dots, x_n séu punktar á bilinu $[a, b]$ og að við þekkjum gildi f í þessum punktum. Þá getum við fundið brúunarmargliðuna p_n gegnum punktana $(x_k, f(x_k))$ og skrifað

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

þar sem leifin r_n er gefin með

$$r_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Nú er auðvelt að reikna heildi margliða, svo við nálgum heildi f með

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_n(f) := \int_a^b p_n(x) dx$$

og skekkjan í þessari nálgun er gefin með

$$e_n = \int_a^b r_n(x) dx.$$

Þessi aðferð er kölluð *Newton-Cotes-heildun*.

6.32

6.4 Newton-Cotes -heildun

Hugsum okkur að brúunarpunktarnir x_0, \dots, x_n séu ólíkir. Þá getum við skrifað p_n með Lagrange-margliðum

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)},$$

og þá er heildi p_n jafnt

$$\int_a^b p_n(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) A_k, \quad \text{þar sem} \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x) dx.$$

Athugið að gildi A_k veltur aðeins á brúunarpunktunum x_0, \dots, x_n en ekki gildum $f(x_k)$. Ef það á að heilda mörg föll yfir sama bil er því hægt að reikna gildi A_k í eitt skipti fyrir öll og endurnýta þau svo.

6.33

6.4 Sýnidæmi

Metum heildi $f(x) = e^{-x} \cos(x)$ og $g(x) = \sin(\frac{x^2}{2})$ yfir bilið $[0, 2]$ með að nota skiptipunktana $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$. Lagrange-margliðurnar sem við eiga eru

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad \ell_1(x) = -x(x-2), \quad \ell_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

svo við fáum að

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{1}{3}, \quad A_1 = - \int_0^2 x(x-2) dx = \frac{4}{3},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 x(x-1) dx = \frac{1}{3}.$$

6.34

6.4 Sýnidæmi frh.

Nú eru stuðlarnir fundnir og því fáum við

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(0) \frac{1}{3} + f(1) \frac{4}{3} + f(2) \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1 + 4e^{-1} \cos(1) + e^{-2} \cos(2)}{3} \approx 0.59581$$

og

$$\int_0^2 g(x) dx \approx g(0) \frac{1}{3} + g(1) \frac{4}{3} + g(2) \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4 \sin(1/2) + \sin(2)}{3} \approx 0.91972.$$

Gildi heildanna eru $\int_0^2 f(x) dx \approx 0.58969$ og $\int_0^2 g(x) dx \approx 0.99762$ með 5 réttum aukastöfum svo nálgunargildin verða að teljast nokkuð góð miðað við hversu lítið fór í þau.

6.35

6.4 Trapisuregla

Nú ætlum við að leiða út formúlur fyrir helstu reglum fyrir nálgun á heildum. Sú fyrsta er *trapisuregla*.

Veljum $x_0 = a$ og $x_1 = b$ sem skiptipunktana okkar. Þá er graf p_1 línustrikið gegnum $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$,

$$p_1(x) = f(a)\ell_0(x) + f(b)\ell_1(x) = f(a) \frac{b-x}{b-a} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

og vigtirnar eru

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) dx = \frac{b-a}{2} = A_1,$$

svo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Trapisureglan er kölluð þessu nafni því með henni nálgum við heildi f með flatarmáli trapisunnar sem hefur hornpunktana $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$ og $(a, f(a))$.

6.36

6.4 Miðpunktsregla

Enn einfaldari er miðpunktsreglan, þá veljum við aðeins einn skiptipunkt, $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$, og brúunarmargliðan verður fastamargliðan $p_0(x) = f(x_0)$. Þá er

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

6.37

6.4 Regla Simpsons

Nú veljum við þrjá skiptipunkta, $x_0 = a$, $x_1 = b$ og $x_2 = \frac{1}{2}(a+b)$. Til einföldunar skulum við hliðra fallinu f um miðpunkt bilsins $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

Við skilgreinum $\alpha = \frac{1}{2}(b-a)$ og $g(x) = f(x+m)$

Þá hliðrast a , m og b yfir í $-\alpha$, 0 og α og

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

6.38

6.4 Regla Simpsons

Lagrange margliðurnar og vigtirnar eru

$$\begin{aligned}l_0(x) &= \frac{(x-\alpha)x}{(-\alpha-\alpha)(-\alpha-0)} = \frac{(x-\alpha)x}{2\alpha^2} \\A_0 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_0(x) dx = \frac{\alpha}{3} \\l_1(x) &= \frac{(x-(-\alpha))(x-0)}{(\alpha-(-\alpha))(\alpha-0)} = \frac{(x+\alpha)x}{2\alpha^2} \\A_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_1(x) dx = \frac{\alpha}{3} \\l_2(x) &= \frac{(x-\alpha)(x-\alpha)}{0-(-\alpha)(0-\alpha)} = \frac{(x+\alpha)(x-\alpha)}{-\alpha^2} \\A_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_2(x) dx = \frac{4\alpha}{3}\end{aligned}$$

6.39

6.4 Regla Simpsons

Nálgunarformúlan verður þá

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx \approx \frac{\alpha}{3}g(-\alpha) + \frac{\alpha}{3}g(\alpha) + \frac{4\alpha}{3}g(0) \\&= (b-a) \left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b) \right)\end{aligned}$$

6.40

6.4 Regla Simpsons aftur

Ef við tökum brúunarmargliðu gegnum a , b og $\frac{1}{2}(a+b)$ með $\frac{1}{2}(a+b)$ tvöfaldan þá fáum við 3. stigs brúunarmargliðu

$$p_3(x) = p_2(x) + g[-\alpha, \alpha, 0, 0](x+\alpha)(x-\alpha)x$$

Heildið yfir seinni liðinn hægra megin er 0 því margliðan $(x+a)(x-a)x$ er oddstæð, en heildið yfir fyrri liðinn er

$$\frac{\alpha}{3}(g(-\alpha) + 4g(0) + g(\alpha)).$$

Út kemur því Simpson-regla.

6.41

6.4 Samsettu reglurnar

Þar sem Newton-Cotes heildun notar brúunarmargliður fylgja henni nokkur vandamál.

Ef okkur finnst nákvæmnin í nálguninni vera of lítil getum við ekki búist við að hún batni við að fjölga skiptipunktum; þá hækkar stig margliðunnar líklega sem orsakar sveiflukenndari hegðun.

Eins er ekki gott að halda sig við margliður af lægra stigi; ef bilið sem á að heilda yfir er stórt væri mikil tilviljun að 1., 2. eða 3. stigs brúunarmargliða nálgafi fallið vel á öllu bilinu.

6.42

6.4 Samsettu reglurnar

Lausnin á þessu vandamáli er í sama anda og fyrir splæsibrúun. Við veljum skiptingu

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

á bilinu $[a, b]$.

Um heildi gildir að

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

svo við getum nálgað heildi f á sérhverju litlu hlutbili $[x_{k-1}, x_k]$ með að heilda brúunarmargliðu af lágu stigi og lagt öll gildin saman til að fá nálgun á heildi f yfir allt bilið.

Þegar ákveðin regla er notuð til að nálga heildi f á sérhverju hlutbili er þetta kölluð *samsetta* útgáfa reglunnar. Einfalt er að leiða út samsettar útgáfur reglanna að ofan.

6.43

6.4 Samsetta trapisreglan

Á sérhverju hlutbili er

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

svo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k)).$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng og $h = x_k - x_{k-1}$, þá fæst

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right).$$

6.44

6.4 Samsetta miðpunktsreglan

Fljótséð er að

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng verður formúlan

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$$

6.45

6.4 Samsetta Simpson

Hér er venjan að velja $2n + 1$ jafndreifða skiptipunkta og fá n jafn stór hlutbil. Þá er $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_k = a + kh$ fyrir $k = 0, \dots, 2n$ og hlutbilin eru $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ fyrir $k = 1, \dots, n$.

Á hverju hlutbili er

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx 2h \left(\frac{1}{6} f(x_{2k-2}) + \frac{4}{6} f(x_{2k-1}) + \frac{1}{6} f(x_{2k}) \right)$$

svo að

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{h}{3} (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) \right) \\ &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) \\ &\quad + \cdots + 2f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h) + f(b)).\end{aligned}$$

6.46

6.4 Skekkjumat

Rifjum upp grunnhugmyndina að baki nálgunarformúlunum. Við veljum brúunarpunkta x_0, \dots, x_n í $[a, b]$, látum p_n vera tilsvareandi brúunarmargliðu og skrifum

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

þar sem $r_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$. Þá er nálgunin

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx$$

með skekkjuna

$$\int_a^b r_n(x) dx$$

Nú viljum við meta skekkjuheildið.

6.47

6.4 Meðalgildissetningin fyrir heildi

Við skekkjumatið í þessum kafla munum við þurfa að nota eftirafarandi setningu nokkrum sinnum.

Setning (Meðalgildissetningin fyrir heildi):

Ef $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er samfelld fall og φ er heildanlegt fall sem skiptir ekki um formerki á bilinu $[a, b]$ þá er til tala $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\int_a^b G(x)\varphi(x) dx = G(\eta) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

6.48

6.4 Trapisuregla

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x + \alpha)(x - \alpha)$$

Athugum að

$$(x + \alpha)(x - \alpha) = (x^2 - \alpha^2)$$

skiptir ekki um formerki á bilinu $]-\alpha, \alpha[$. Þá gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\begin{aligned}\int_a^b r_1(x) dx &= f[-\alpha, \alpha, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2) dx \\ &= \frac{f''(\eta)}{2!} \left(-\frac{4}{3} \alpha^3 \right) \\ &= \frac{-f''(\eta)}{2!} \frac{(b-a)^3}{6}, \quad \eta \in [a, b]\end{aligned}$$

Niðurstaða:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right) - \frac{1}{12} f''(\eta) (b-a)^3$$

6.49

6.4 Skekkjumat í samsettu reglunni

Ef við lítum á samsettu trapisuregluna með jafna skiptingu þar sem hlutbilin eru $[x_i, x_{i+1}]$, þá fáum við skekkjuna

$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Ef við leggjum saman og beitum milligildissetningunni, þá fáum við

$$\int_a^b f(x) dx = T(h) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

að því gefnu að $f \in C^2[a, b]$.

Ath: Hér er $T(h)$ útkoman úr samsettu Trapisureglunni með jafna skiptingu $h = \frac{b-a}{n}$.

6.50

6.4 Skekkja í miðpunktsreglu

Til einföldunar skoðum við bilið $[-\alpha, \alpha]$. Veljum miðpunktinn tvöfaldan

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(0) + f'(0)x \\ r_1(x) &= f[0, 0, x]x^2 \end{aligned}$$

Athugum að heildið af $f'(0)x$ yfir $[-\alpha, \alpha]$ er 0. Nú skiptir x^2 ekki um formerki og því gefur meðalgildisreglan fyrir heildi að til er $\eta \in [-\alpha, \alpha]$ þannig að

$$\begin{aligned} \int_a^b r_1(x) dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} f[0, 0, x]x^2 dx \\ &= f[0, 0, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!} 2 \frac{\alpha^3}{3} \\ &= \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\xi) \end{aligned}$$

Þar sem ξ fæst úr skekkjumatinu fyrir brúunarmargliður (kaffi 5).

6.51

6.4 Skekkja í samsettu miðpunktsreglu

Fyrir hvert bil fáum við skekkjulið:

$$\frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi_i)$$

Leggjum saman skekkjuliðina og beitum milligildissetningunni, þá fæst að til er ξ þannig að:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{b-a}{24} f''(\xi) h^2$$

6.52

6.4 Skekkja í reglu Simpsons

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \frac{1}{6}f(b) \right)$$

Leiddum út þessa formúlu með því að taka brúunarmargliðu $p_3(x)$ með punktana $-\alpha, \alpha, 0, 0$. Skekkjan er

$$f(x) - p_3(x) = f[-\alpha, \alpha, 0, 0, x](x + \alpha)(x - \alpha)x^2$$

þar með er skekkjan í formúlu Simpsons:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f[-\alpha, \alpha, 0, 0, x](x + \alpha)(x - \alpha)x^2 dx$$

6.53

6.4 Skekkja í reglu Simpsons, frh.

Fallið $x \mapsto (x + \alpha)(x - \alpha)x^2 = (x^2 - \alpha^2)x^2$ er ≤ 0 á $[-\alpha, \alpha]$. Þar með gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [-\alpha, \alpha]$ þannig að skekkjan er

$$\begin{aligned} f[-\alpha, \alpha, 0, 0, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2)x^2 dx \\ = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{(-4)}{15} \cdot \alpha^5 = \frac{-f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5, \quad \xi \in [a, b] \end{aligned}$$

Þar sem ξ fæst úr skekkjumatinu fyrir Newton aðferðina (glæra 5.55).

6.54

6.4 Skekkja samsettu Simpsonreglu

Skiptum $[a, b]$ í n jafnlöng bil og látum h vera helming hlutbillengdarinnar,

$$h = \frac{(b-a)}{2n}.$$

Þá er

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{h}{3} (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) \right) \\ &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) \\ &\quad + \dots + 2f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h) + f(b)) \end{aligned}$$

6.55

6.4 Skekkjumat í samsettu Simpsonreglu

Ef við beitum skekkjumatinu á sérhvert bilanna þá fáum við

$$\frac{-f^{(4)}(\xi_i)}{90} h^5$$

sem skekkju með $\xi_i \in [x_i, x_i + 1]$. Heildarskekkjan verður

$$-\sum_{i=1}^n \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{90} h^5 = \frac{-h^5}{90} \cdot \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú gefur meðalgildisreglan að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú er $nh = \frac{(b-a)}{2}$ þar með er skekkjan:

$$\frac{-h^5}{90} \cdot n f^{(4)}(\xi) = \frac{-(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \cdot h^4$$

6.56

6.4 Skekkjumat á samsettu Simpsonreglunni: Niðurstaða

Ef við táknum útkomuna úr samsettu Simpsonsreglunni fyrir $h = \frac{b-a}{2n}$ með $S(h)$ þá fæst að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$\int_a^b f(x) dx = S(h) - \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) h^4$$

6.57

6.7 Romberg-útgiskun

6.7 Romberg-útgiskun

Á sama hátt og við gátum bætt nálgun okkar á afleiðu falls með að nota Richardson útgiskun getum við bætt nálgun á heildi.

Aðferðin virkar í aðalatriðum eins fyrir heildi og afleiður, en til að fá sem bestar upplýsingar um samleitni hennar skulum við leiða út formúluna fyrir trapisureglunni aftur.

6.58

6.7 Euler-Maclauren-formúlan

Fyrir samfelld fall $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sem er $2n$ -sinnum samfelld deildanlegt gildir Euler-Maclauren formúlan

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} \left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1) \right) - A_{2n} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [0, 1]$$

Hér eru stuðlarnir A_k þannig að $k!A_k$ verði Bernoulli-talan númer k . Þessar tölur eru stuðlar í veldaröðinni

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

(Það þarf að hafa töluvert fyrir því að sanna þessa formúlu)

6.59

6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Látum nú $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vera $2n$ -sinnum samfelld deildanlegt fall. Ef við búum til skiptingu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ með jöfn hlutbil $h = x_{i+1} - x_i$ og beitum síðan Euler-Maclauren formúlunni á $g(t) = f(x_i + ht)$ fæst

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= h \int_0^1 \underbrace{f(x_i + ht)}_{g(t)} dt \\ &= h \left(\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1}) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(x_i) - f^{(2k-1)}(x_{i+1}) \right) \\ &\quad - A_{2n} h^{2n+1} f^{(2n)}(\xi_i), \end{aligned}$$

þar sem $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

6.60

6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Nú innleiðum við

$$\begin{aligned} T(h) &:= \sum_{i=0}^{n-1} h \left(\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1}) \right) \\ &= h \left(\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(a+nh) \right) \end{aligned}$$

og fáum síðan:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= T(h) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b) \right) \\ &\quad - A_{2n} h^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_i) \end{aligned}$$

6.61

6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin

Nú gefur milligildissetningin að til er $\xi \in [a, b]$ þannig að

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_k) = f^{(2n)}(\xi)$$

Notum okkur nú að $nh = b - a$ og fáum að

$$\int_a^b f(x) dx = T(h) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b) \right) - A_{2n} h^{2n} (b-a) f^{(2n)}(\xi).$$

Niðurstaðan er að samsetta trapisureglan er

$$\int_a^b f(x) dx = T(h) + c_2 h^2 + c_4 h^4 + \dots + c_{2m-2} h^{2m-2} + c_{2n} h^{2m} f^{(2m)}(\xi)$$

6.62

6.7 Ítrekun á samsettu trapisureglunni með helmingun

Hugsum okkur nú að við viljum reikna út $T(h_j)$ fyrir $h_j = (b-a)/2^j$, $j = 1, 2, \dots$ og að við viljum nýta öll fallgildi í $T(h_{j-1})$ til að reikna út $T(h_j)$. Rakningarformúlan er

$$T(h_j) = \frac{1}{2} T(h_{j-1}) + h_j \sum_{k=1}^{2^{j-1}} f(a + (2k-1)h_j)$$

Athugið að hér er bilinu $[a, b]$ skipt í 2^j hlutbil.

6.63

6.7 Reikniritið fyrir Romberg-heildun

Romberg-heildun er hugsuð nákvæmlega eins og Richardson-útgiskunin: Við reiknum út línu fyrir línu í töflunni:

$$\begin{array}{ccccccc} & i & & & & & \\ & 1 & R(1, 1) & & & & \\ & 2 & R(2, 1) & R(2, 2) & & & \\ & 3 & R(3, 1) & R(3, 2) & R(3, 3) & & \\ & 4 & R(4, 1) & R(4, 2) & R(4, 3) & R(4, 4) & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

þar sem

$$\begin{aligned} R(i, 1) &= T(h_i) \quad i = 1, 2, \dots \\ R(i, j) &= \frac{4^{j-1} R(i, j-1) - R(i-1, j-1)}{4^{j-1} - 1}. \end{aligned}$$

Með þessu fæst $\int_a^b f(x) dx = R(k, k) + O(h_k^{2k})$, þar sem k er síðasta línan sem við reiknum í töflunni að ofan.

6.64

6.7 Skekkjumat í Romberg heildun

Hægt er að nota síðustu viðbót sem eftirámat fyrir skekkjuna, þetta mat er

$$\frac{1}{4^j - 1} (R(i, j) - R(i-1, j-1))$$

þegar þessi stærð er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk er hætt.

Athugið að það er ekki nauðsynlegt að hafa h_1 sem allt bilið $[a, b]$, það er ekkert sem kemur í veg fyrir það að við byrjum með $h_1 = \frac{b-a}{m}$, og helmingum svo; $h_2 = \frac{b-a}{2m}$, $h_3 = \frac{b-a}{4m}$, Almennt er þá $h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}m}$.

6.65

Fræðilegar spurningar

Kafli 6: Fræðilegar spurningar

1. Hver er meginhugmyndin í tölulegri deildun og heildun?

2. Hvað eru *frammismunur* og *bakmismunur* til þess að nálgast afleiðu?
3. Hvernig er *miðsettur mismunakvóti* fyrir fyrsta stigs afleiðu skilgreindur og hver er skekkjan í nálgun á afleiðu falls með honum?
4. Hvernig er *miðsettur mismunakvóti* fyrir annars stigs afleiðu skilgreindur og hvernig er skekkjan í nálgun á annarri afleiðu með honum?
5. Hvernig eru brúnunarmargliður notaðar til þess að reikna út afleiðu falls f í punkti a og hver er skekkjan í slíkri nálgun?
6. Lýsið fyrsta skrefinu í Richardson-útgiskun þar sem formúlan $f'(a) = R_0(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + O(h^6)$ er endurbætt þannig að út komi skekkja sem er $O(h^4)$.
7. Lýsið Richardson-útgiskunartöflunni.
8. Hvaða skekkjumát er notað í Richardson-útgiskun?

6.66

Kafli 6: Fræðilegar spurningar

9. Hvernig er almenna aðferðin sem notar brúnunarmargliður til þess að nálgast heildi og nefnd er Newton-Cotes-heildun og hvernig er skekkjuformúlan í henni?
10. Hvernig er trapisuregla til þess að nálgast heildi og aðferðarskekkja hennar?
11. Hvernig er miðpunktsregla til þess að nálgast heildi og aðferðarskekkja hennar?
12. Hvernig er Simpson-regla til þess að nálgast heildi og aðferðarskekkja hennar?
13. Hvernig er samsetta trapisureglan og aðferðarskekkja hennar?
14. Hvernig er samsetta miðpunktsreglan og aðferðarskekkja hennar?
15. Hvernig er samsetta Simpson-reglan og aðferðarskekkja hennar?
16. Hvernig er rakningarformúla fyrir samsettu trapisureglunni?
17. Lýsið reikniritinu fyrir Romberg-heildun.
18. Hver er skekkjan í eftirámatinu í Romberg-heildun?

6.67