Vika 1: Hvað er töluleg greining? Skekkjur og mat á þeim

Töluleg greining, STÆ405G, 8., 10. og 15. janúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

1.1

Námskeiðið

Yfirlit

Vika 1: Lagt af stað

Nr.	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
1.1	Hvað er töluleg greining?	1-16	1-5
1.2	Skekkjur		6-7
1.3	Nokkur atriði um samleitni runa	20-24	8-10
1.4	Fleytitalnakerfið	30-50	11-15
1.5	Vítt og breitt um skekkjumat		16-23
1.6	Ástandsgildi falla		24-31
1.7	Úrlausn annars stigs jöfnu		32
1.8	Ritháttur fyrir deildanleg föll		33
1.9	Nálgun með Taylor-margliðu	25-27	34-38
1.10	Áhrif gagnaskekkju		39-43
1.11	O- og o- ritháttur	20-24	44-48

1.2

1.1 Hvað er töluleg greining?

Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að finna nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.
- Aðferðirnar eru settar fram með reikniritum sem síðan eru forrituð og það þarf góðan skilning á eiginleikum lausnanna sem verið er að nálga til þess að geta greint hvernig forritin munu virka.
- Greining á reikniritum er aðallega fólgin í skekkjumati og mati á þeim aðgerðafjölda sem þarf til þess að ná að nálga lausn með fyrirfram gefinni nákvæmni, þ.e. hagkvæmni og nákvæmni reikniritsins.

1.3

1.1 Dæmi

Í hvaða hæð er eldflaug þegar eldsneytið klárast

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi gildi um eldflaug sem við höfum undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0,1v^2$.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$
- Massi eldsneytisins $m = 180 - 10t$.
- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$.

Úr öðru lögmáli Newtons fæst að $F = (Mv)'$. Kraftarnir sem verka á eldflaugina er T upp á við og loftmótstaðan og þyngdarkrafturinn niður á við. Þannig fæst

$$(Mv)' = F = T - Mg - d$$

það er

$$M'v + Mv' = T - Mg - d.$$

1.4

1.1 Dæmi

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t}, \tag{1}$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma t gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\,ds$. Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s)\,ds$.

Verkefnið er því að finna v, og reikna svo heildið.

Diffurjafnan (1) er ólínuleg þannig að við getum ekki vænst þess finna lausn með þeim aðferðum sem við höfum þegar lært. Eins er ekki víst að við getum auðveldlega fundið stofnfall h fyrir v, ef við höfum v.

Hins vegar getum við leyst diffurjöfnuna tölulega með Runge-Kutta aðferð (Kafli 7) og heildið reiknum við svo tölulega (Kafli 6).

1.5

1.2 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Við fáum *gagnaskekkjur* vegna þess að við þurfum að nota ónákvæm inntaksgildi.
- Gögn eru oft niðurstöður mælinga og þá fylgja þeim *mæliskekkjur*.
- Við nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum verða til *aðferðarskekkjur*. Þær verða til þegar reikniritin eru hönnuð og greining á reikniritum snýst fyrst og fremst um mat á aðferðarskekkjum.
- *Reikningsskekkjur* verða til í tölvum á öllum stigum, jafnvel þegar tölur eru lesnar inn í tugakerfi og þeim snúið yfir í tvíundarkerfi. Þær verða líka til vegna þess að tölvur geta einungis unnið með endanlegt mengi af tölum og allar útkomur þarf að nálga innan þess mengis. Þessar skekkjur nefnast oft *afrúningsskekkjur*.

1.6

1.2 Skekkja í nálgun á rauntölu r

Við stillum alltaf upp jöfnunum okkar þannig að

$$\text{rétt gildi} = \text{nálgunargildi} + \text{skekkja}.$$

Ef talan x er nálgun á tölunni r þá nefnist

$$e = r - x$$

skekkja í nálgun á r með x eða bara *skekkja*.

Algildi skekkju er tölugildið

$$|e| = |r - x|$$

Ef vitað er að $r \neq 0$, þá nefnist

$$\frac{|e|}{|r|} = \frac{|r - x|}{|r|}$$

hlutfallsleg skekkja í nálgun á r með x. 1.7

1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

Skilgreining

Rauntalnaruna (x_n) er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* r ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

Þetta er táknað með

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r \qquad \text{og} \qquad x_n \to r \text{ ef } n \to \infty.$$

Ef runan (x_n) er samleitin að markgildinu r þá segjum við einnig að hún *stefni á r*.

Hugsum okkur nú að (x_n) sé gefin runa sem stefnir á r og táknum skekkjuna með $e_n = r - x_n$. 1.8

1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in]0, 1[$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

ofurlínulega samleitin (e. superlinear convergence), ef

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0,$$

ferningssamleitin (e. quadratic convergence) ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lambda,$$

og *samleitin af stigi α* (e. convergence of order α), þar sem $\alpha > 1$, ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda.$$

1.9

1.3 Nokkur atriði um samleitni runa

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið λ og α nákvæmlega).

Þannig segjum við að runan (x_n) sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ef til er $\lambda \in]0,1[$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|, \qquad n \geq N,$$

að minnsta kosti ferningssamleitin ef til er $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|^2, \qquad n \geq N,$$

og *að minnsta kosti samleitin af stigi* α, þar sem $\alpha > 1$, ef til eru $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq \lambda |e_n|^\alpha, \qquad n \geq N.$$

1.10

1.4 Fleytitalnakerfið – Framsetning á tölum

Ef r er rauntala frábrugðin 0 og β er náttúrleg tala, 2 eða stærri, þá er til einhlýtt ákvörðuð framsetning á r af gerðinni

$$r = \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta \times \beta^e$$

þar sem e er heiltala og d_j eru heiltölur

- $1 \leq d_1 < \beta$,
- $0 \leq d_j < \beta$, $j = 2, 3, 4, \dots$.

Tölvur reikna ýmist í *tvíundarkerfi* með $\beta = 2$ eða í *sextánundarkerfi* með $\beta = 16$, en við mannfólkið með okkar tíu fingur reiknum í *tugakerfi* með $\beta = 10$. 1.11

1.4 Mantissa

Formerkið og runan

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$$

nefnist *mantissa* tölunnar r.

Við skrifum

$$(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j}{\beta^j}$$

ef $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = 0$ og segjum þá að talan r hafi k-stafa mantissu. 1.12

1.4 Marktækir β-stafir

Ef rauntalan x er nálgun á r, þá segjum við að x sé nálgun á r með *að minnsta kosti t marktækum β-stöfum* ef

$$\frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

Ef við höfum að auki að

$$\beta^{-t-1} < \frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

þá segjum við að x sé nálgun á r með t *marktækum β-stöfum.*

Athugið að ef e er minnsta heila talan þannig að $|r| < \beta^e$, þá gefur seinni ójafnan matið

$$|r - x| = (0.0\dots 0a_t a_{t+1}\dots)_\beta \times \beta^e,$$

þar sem núllin aftan við punkt eru t talsins. 1.13

1.4 Afrúningur talna

Ef r er sett fram á stöðluðu β-fleytitöluformi, þá nefnist talan

$$x = (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

afskurður tölunnar r við k-ta aukastaf r, en talan

$$x = \begin{cases} \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e, & d_{k+1} < \beta/2, \\ \pm((0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta + \beta^{-k}) \times \beta^e, & d_{k+1} \geq \beta/2. \end{cases}$$

nefnist *afrúningur tölunnar r við k-ta aukastaf.*

Við köllum þessar aðgerðir *afskurð* (e. chopping) og *afrúning* (e. rounding). 1.14

1.4 Fleytitölukerfi

Fleytitölukerfi er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem d_j eru heiltölur eins og áður var lýst, k er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.

Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.

Eftir hverja aðgerð í tölvunni þarf að nálga útkomuna með *afskurði* eða *afrúningu.*

Ef við förum ekki varlega þá getur þetta magnað upp skekkju.

IEEE staðlar

- Single: $\beta = 2, k = 24, m = -125$ og $M = 128$,
- Double: $\beta = 2, k = 53, m = -1021$ og $M = 1024$.

Sjá nánar bls. 37 í kennslubók.

1.15

1.5 Vítt og breitt um skekkjumat

Fyrirframmat á skekkju

Metið er áður en reikningar hefjast hversu umfangsmikla reikninga þarf að framkvæma til þess að nálgunin náist innan fyrirfram gefinna skekkjumarka.

Ef lausnin er fundin með ítrekunaraðferð er yfirleitt metið hversu margar ítrekarnir þarf til þess að nálgun verði innan skekkjumarka.

Eftirámat á skekkju

Um leið og reikningar eru framkvæmdir er lagt mat á skekkju og reikningum er hætt þegar matið segir að nálgun sé innan skekkjumarka.

1.16

1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (ofurlínuleg samleitni)

Hugsum okkur að við séum að nálga töluna r með gildum rununnar x_n, að við höfum reiknað út $x_0, \ldots, x_n$ og viljum fá mat á skekkjunni $e_n = r - x_n$ í n-ta skrefi.

Við reiknum næst út x_{n+1} og skrifum $e_{n+1} = \lambda_n e_n$. Þá er

$$x_{n+1} - x_n = (r - x_n) - (r - x_{n+1}) = e_n - e_{n+1} = (1 - \lambda_n)e_n$$

og við fáum

$$e_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \lambda_n}.$$

Ef við vitum að runan er *ofurlínulega samleitin*, þá stefnir λ_n á 0 og þar með er

$$e_n \approx x_{n+1} - x_n.$$

Við hættum því útreikningi þegar $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ þar sem ε er fyrirfram gefin tala, sem lýsir þeirri nákvæmni sem við viljum ná. 1.17

1.5 Eftirámat á skekkju samleitinnar runu (amk. línuleg samleitni)

Ef við vitum ekki meira en að runan x_n sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ; segjum $|e_{n+1}| \leq c|e_n|$, $n \geq N$, þar sem $c \in (0, 1)$, þá á λ_n að stefna á fasta λ og $|\lambda| \leq c$. Við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1 - \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \approx \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út $x_0, \ldots, x_n$ og viljum fá mat á e_n. Við reiknum þá út x_{n+1} og x_{n+2} og síðan hlutfallið $\kappa_n = (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n)$ sem við notum sem mat á λ_n. Eftirámatið á skekkjunni í ítrekunarskrefi númer n verður síðan

$$e_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \kappa_n}.$$

Ef stærðin í hægri hliðinni er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk ε, þá stöðvum við útreikningana. 1.18

1.5 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitin:

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\frac{\lvert x_{n+1}-x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert^2}$
0	3.00000000000000		
1	2.73251570951922	0.10052257507862	1.404
2	2.63199313444060	0.01373904283351	1.359
3	2.61825409160709	0.00024006192208	1.273
4	2.61801402968501	0.00000007236005	1.256
5	2.61801395732496	0.00000000000001	1.272

Við metum $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$ og þar af leiðandi $e_n/e_{n-1}^2 \approx |x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$.

Við sjáum að hlutfallið $|x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$ helst stöðugt og því ályktum við að aðferðin sé ferningssamleitin. 1.19

1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Skoðum lítið dæmi um útreikninga á samleitnistigi.

Dæmi

Eftirfarandi runa stefnir á $\sqrt{3}$.

n	x_n
0	2.000000000000000
1	1.666666666666667
2	1.727272727272727
3	1.732142857142857
4	1.732050680431722
5	1.732050807565499

Er samleitnistigið 1.618?

Ef ekki, hvert er þá samleitnistigið?

1.20

1.5 Útreikningur á samleitnistigi *Lausn:*

Ef miðað er við að runan (x_n) sé ofurlínulega samleitin, þá er eðlilegt að taka $e_n \approx x_{n+1} - x_n$ sem mat á skekkjunni $e_n = \sqrt{3} - x_n$ í n-ta ítrekunarskrefinu.

Við byrjum á því að kanna hvernig tilgátan um að samleitnistigið kemur út á þessum tölum með $e_n = x_{n+1} - x_n$:

n	x_n	$\|e_n\|$	$\|e_n\|/\|e_{n-1}\|^{1.618}$
0	2.000000000000000	$3.3333 \cdot 10^{-1}$	
1	1.666666666666667	$6.0606 \cdot 10^{-2}$	$3.5851 \cdot 10^{-1}$
2	1.727272727272727	$4.8701 \cdot 10^{-3}$	$4.5439 \cdot 10^{-1}$
3	1.732142857142857	$9.2177 \cdot 10^{-5}$	$5.0837 \cdot 10^{-1}$
4	1.732050680431722	$1.2713 \cdot 10^{-7}$	$4.3004 \cdot 10^{-1}$
5	1.732050807565499		

Tveimur síðustu tölunum í aftasta dálki ber ekki nógu vel saman, svo það er vafasamt hvort talan 1.618 er rétta samleitnistigið.

1.21

1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Ef (x_n) er samleitin af stigi α, þá gildir $\lim_{n\to\infty} |e_{n+1}|/|e_n|^\alpha = \lambda$, þar sem $\lambda > 0$. Þar með höfum við nálgunarjöfnu ef n er nógu stórt,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \approx \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^\alpha} \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad \frac{|e_{n+1}|}{|e_{n+2}|} \approx \left|\frac{e_n}{e_{n+1}}\right|^\alpha.$$

Ef við lítum á þetta sem jöfnu og leysum út α, þá fáum við

$$\alpha_n = \frac{\ln(|e_{n+1}|/|e_{n+2}|)}{\ln(|e_n|/|e_{n+1}|)}.$$

1.22

1.5 Útreikningur á samleitnistigi

Við getum reiknað út þrjú gildi á α úr þeim gögnum sem við höfum, $\alpha_0 = 1.479$, $\alpha_1 = 1.573$ og $\alpha_2 = 1.660$.

Ef við endurtökum útreikninga okkar hér að framan með 1.660 í stað 1.618, þá fæst

n	p_n	$\lvert e_n\rvert$	$\lvert e_n\rvert/\lvert e_{n-1}\rvert^{1.660}$
0	2.000000000000000	$3.3333{\cdot}10^{-1}$	
1	1.666666666666667	$6.0606{\cdot}10^{-2}$	$3.7551{\cdot}10^{-1}$
2	1.727272727272727	$4.8701{\cdot}10^{-3}$	$5.1143{\cdot}10^{-1}$
3	1.732142857142857	$9.2177{\cdot}10^{-5}$	$6.3639{\cdot}10^{-1}$
4	1.732050680431722	$1.2713{\cdot}10^{-7}$	$6.3639{\cdot}10^{-1}$
5	1.732050807565499		

Tölunum neðst í aftasta dálki ber saman með fimm réttum stöfum og því ályktum við að 1.660 sé rétta samleitnistigið. 1.23

1.6 Ástandsgildi falla

Hugsum okkur nú að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall sem skilgreint er á hlutmengi $I \subset \mathbb{R}$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$ og að $r \in I$.

Gerum ráð fyrir að x sé nálgun á r og að við viljum nota $f(x)$ sem nálgun á $f(r)$.

Skekkjan í nálguninni á $f(r)$ með $f(x)$ er þá

$$f(r) - f(x) = f(x+e) - f(x) \approx f'(x)e.$$

Ef við vitum að $f(r) \neq 0$, þá er hlutfallsleg skekkja í nálgun á $f(r)$ með $f(x)$

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \frac{|f'(x)e|}{|f(r)|} \approx \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|} \cdot \frac{|e|}{|r|}.$$

1.24

1.6 Ástandsgildi

Við skilgreinum *ástandsgildi fallsins* f *í punktinum* x sem

$$\operatorname{astand}_x(f) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

Ef $\operatorname{astand}_x(f) \leq 1$ og x er nálgun á r með m marktækum stöfum, þá segir nálgunarjafnan

$$\frac{|f(r) - f(x)|}{|f(r)|} \approx \operatorname{astand}_x(f) \cdot \frac{|e|}{|r|}$$

okkur að við getum búist við því að $f(x)$ sé nálgun á $f(r)$ með jafn mörgum marktækum stöfum.

Athugasemd

Niðurstöðuna að ofan má orða svona, hlutfallsleg skekkja á fallgildinu $f(x)$ er ástandsgildið sinnum hlutfallsleg skekkja x. 1.25

1.6 Ástand er gott eða slæmt

Skilgreining
Ef $\operatorname{astand}_x(f) \leq 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *gott* eða að verkefnið sé *reikningslega stöðugt* eða einfaldlega að *ástand fallsins f sé gott í punktinum x*.

Skilgreining
Ef hins vegar $\operatorname{astand}_x(f) > 10$, þá segjum við að ástand verkefnisins að reikna út $f(x)$ sé *slæmt* eða að það sé *reikningslega óstöðugt*.

Athugasemd
Ef ástandið er gott þá getum við búist við því að það tapist í mesta lagi einn marktækur stafur í hlutfallslegri skekkju við útreikning á $f(x)$. Ef hins vegar $\operatorname{astand}_x(f) \approx 10^q$ og x er nálgun á r með m marktækum stöfum, þá er ekki ástæða til þess að ætla að $f(x)$ sé betri nálgun á $f(r)$ en að við höfum $m - q$ marktæka stafi. 1.26

1.6 Ástandsgildi falla af mörgum breytistærðum

Ef $f : D \to \mathbb{R}$ er deildanlegt fall af mörgum breytistærðum sem skilgreint er á hlutmengi $D \subset \mathbb{R}^n$ og tekur gildi í $\mathbb{R}$, þá skilgreinum við ástandsgildi f í punktinum x með tilliti til allra breytistærðanna x_i með formúlunni

$$\operatorname{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) = \frac{|x_i f'_{x_i}(\mathbf{x})|}{|f(\mathbf{x})|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

þar sem ritháttur okkar fyrir hlutafleiður er

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f.$$

Ef $\operatorname{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) \leq 10$ fyrir öll i, þá segjum við að ástand þess verkefnis að ákvarða fallgildið $f(\mathbf{x})$ sé gott, en að það sé slæmt ef $\operatorname{astand}_{x_i}(f(\mathbf{x})) > 10$ fyrir eitthvert i. 1.27

1.6 Ástandsgildi kvaðratrótar

Lítum á kvaðratrótarfallið á jákvæða raunásnum

$$\operatorname{astand}_x(\sqrt{x}) = \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}, \qquad x > 0,$$

svo ástand verkefnisins að ákvarða kvaðratrót er gott á öllum ásnum. 1.28

1.6 Ástandsgildi lograns

Lítum næst á náttúrlega logrann á sama mengi

$$\operatorname{astand}_x(\ln x) = \frac{x \cdot 1/x}{|\ln x|} = \frac{1}{|\ln x|}, \qquad x > 0.$$

Ástandsgildið er til fyrir öll $x \neq 1$. Ástand verkefnisins að reikna út $\ln x$ er gott ef $1/|\ln x| \leq 10$, sem jafngildir því að $0 < x \leq e^{-\frac{1}{10}}$ eða $x \geq e^{\frac{1}{10}}$, og það er slæmt ef $e^{-\frac{1}{10}} < x < e^{\frac{1}{10}}$ og fer versnandi þegar við nálgumst 1. 1.29

1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Við getum litið á grunnaðgerðirnar fjórar, samlagningu $(x,y) \mapsto x+y$, frádrátt $(x,y) \mapsto x-y$, margföldun $(x,y) \mapsto xy$ og deilingu $(x,y) \mapsto x/y$ sem föll af tveimur breytistærðum og reiknað út ástandsgildi þeirra,

$$\begin{aligned}
\text{astand}_x(x \pm y) &= \frac{|x \cdot 1|}{|x \pm y|} = \frac{1}{|1 \pm y/x|}, \\
\text{astand}_y(x \pm y) &= \frac{|y \cdot 1|}{|x \pm y|} = \frac{1}{|1 \pm x/y|},
\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand samlagningar er gott nema þegar $x \approx -y$ og ástand frádráttar er gott nema þegar $x \approx y$. 1.30

1.6 Ástandsgildi grunnaðgerðanna fjögurra

Eins höfum við

$$\begin{aligned}
\text{astand}_x(xy) &= \frac{|x \cdot y|}{|xy|} = 1 \\
\text{astand}_x(xy) &= \frac{|y \cdot x|}{|xy|} = 1,
\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand margföldunar er alltaf gott, og

$$\begin{aligned}
\text{astand}_x(x/y) &= \frac{|x \cdot 1/y|}{|x/y|} = 1 \\
\text{astand}_y(x/y) &= \frac{|y \cdot (-x/y^2)|}{|x/y|} = 1,
\end{aligned}$$

sem sýnir okkur að ástand deilingar er einnig alltaf gott.

Hlutfallsleg skekkja sem verður til þegar frádráttur er framkvæmdur á tveimr álíka stórum stærðum er oft nefnd *styttingarskekkja*. Þegar við hönnum reiknirit og forritum þau verðum við að forðast styttingarskekkjur. 1.31

1.7 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef b^2 er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x - x_1)(x - x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar x_1 og x_2 uppfylla $x_1 x_2 = c/a$.

Ef $b > 0$, þá reiknum við x_1 fyrst út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{og síðan} \qquad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef aftur á móti $b < 0$, þá reiknum við fyrst x_1 út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{og síðan} \qquad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef $b^2 \approx 4ac$ þá lendum við í styttingarskekkjum, en við neyðumst til þess að lifa með þeim. 1.32

1.8 Ritháttur fyrir deildanleg föll

Látum nú $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall á bili I sem tekur gildi í tvinntölunum. Ef f er deildanlegt í sérhverjum punkti í I, þá táknum við afleiðuna með f'. Ef f' er deildanlegt í sérhverjum punkti í I, þá táknum við *aðra afleiðu* f með f'', og svo framvegis.

Við skilgreinum með þrepun $f^{(k)}$ fyrir $k = 0, 1, 2, \dots$ þannig að $f^{(0)} = f$ og ef $f^{(k-1)}$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í I, þá er $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Við látum $C^k(I)$ tákna línulega rúmið sem samanstendur af öllum föllum $f : I \to \mathbb{C}$ þannig að $f', \dots, f^{(k)}$ eru til í sérhverjum punkti í I og $f^{(k)}$ er samfellt fall á I. 1.33

1.9 Nálgun með Taylor-margliðu

Ef $a \in I$, m er jákvæð heiltala og $f \in C^{m-1}$ og $f^{(m)}(x)$ er til í sérhverjum punkti $x \in I$, þá nefnist margliðan

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

Taylor-margliða fallsins f í punktinum a af röð m.

Athugið að stig margliðunnar p er $\leq m$. 1.34

1.9 Skekkja í nálgun með Taylor-margliðu

Setning Taylors

Látum $I \subseteq \mathbb{R}$ vera bil, $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall, $m \geq 0$ vera heiltölu og gerum ráð fyrir að $f \in C^m(I)$ og að $f^{(m+1)}(x)$ sé til í sérhverjum innri punkti bilsins I. Þá er til punktur ξ á milli a og x þannig að

$$f(x) - T_m f(x; a) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}.$$

Hægri hliðin er oft táknuð $R_m(x)$.

Viðbót

Ef $f^{(m+1)}$ er samfellt á lokaða bilinu með endapunkta a og x, þá er

$$\begin{aligned} f(x) - T_m f(x; a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)dt \\ &= (x-a)^{m+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^m}{m!} f^{(m+1)}(a + s(x-a))ds \\ &= (x-a)^{m+1} g_m(x) \end{aligned}$$

1.35

1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef x er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni. Hún gefur

$$\sin 0.1 = 0.09933417$$

Af því leiðir

$$0.1 - \sin 0.1 = 1.66583 \cdot 10^{-4}$$

Við höfum tapað tveimur marktækum stöfum í nákvæmni.

Ef við notum Taylor-nálgunina fyrir $\sin(x)$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

og tökum fyrstu þrjá liðina, þ.e. skoðum 6. stigs Taylor-margliðu fallsins.

$x - \sin(x)$ er þá u.þ.b.

$$x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}.$$

1.36

1.9 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$, framh.

Fallgildið er þá

$$\frac{0.1^3}{3!} - \frac{0.1^5}{5!} = 1.6658334 \cdot 10^{-10}.$$

Skekkjan er gefin með

$$|R_6(0.1)| = \left|\frac{\sin^{(7)}(\xi)}{7!}0.1^7\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{7!}0.1^7\right| \leq \frac{1}{7!}0.1^7 < 0.2 \cdot 10^{-10}.$$

Sem þýðir að við höfum enn 8 marktæka stafi.

Ritháttur

$\sin^{(7)}$ hér að ofan táknar 7. afleiðu sin, sem er $-\cos$. 1.37

1.9 Sýnidæmi: Nálgun á $x - \sin x$

Ef við tökum $x = 0.01$ er þetta enn greinilegra. Reiknivélin gefur

$$\sin(0.01) = 0.0099998333$$

Þannig að

$$0.01 - \sin 0.01 = 0.1667 \cdot 10^{-7}$$

og við erum bara með 4 marktæka stafi.

Hér dugir að taka aðeins þriðja stigs liðinn í Taylor-formúlunni

$$0.01 - \sin(0.01) = \frac{0.01^3}{3!} = 0.16666667 \cdot 10^{-7},$$

því skekkjan er

$$R_4(0.01) \leq \frac{0.01^5}{5!} < 10^{-12}$$

1.38

1.10 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur að við séum að finna nálgun á núllstöð falls $x \mapsto f(x, \alpha)$. Við viljum finna nálgun x á lausninni $r = r(\alpha)$ sem uppfyllir

$$f(r, \alpha) = 0$$

og við lítum á α sem stika.

Gerum ráð fyrir að α_0 sé nálgun á α og að við þekkjum nálgun á $r(\alpha_0)$ sem er lausn á jöfnunni $f(x, \alpha_0) = 0$.

Við viljum athuga hversu mikil áhrif þessi nálgun á α hefur á lausnina okkar, þ.e. við þurfum að meta skekkjuna $r(\alpha) - r(\alpha_0)$. 1.39

1.10 Áhrif gagnaskekkju

Ef við gefum okkur að f sé samfellt deildanlegt í grennd um punktinn (x_0, α_0), þar sem $x_0 = r(\alpha_0)$ og $\partial_x f(x_0, \alpha_0) \neq 0$, þá segir setningin um fólgin föll að til sé grennd I um punktinn α_0 í $\mathbb{R}$ og samfellt deildanlegt fall $r : I \to \mathbb{R}$, þannig að $r(\alpha_0) = x_0$ og $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ fyrir öll $\alpha \in I$.

Með öðrum orðum má segja að við getum alltaf leyst jöfnuna $f(x, \alpha) = 0$ með tilliti til x þannig að út komi lausn $x = r(\alpha)$ sem er samfellt diffranlegt fall af α. 1.40

1.10 Áhrif gagnaskekkju

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ leiðir að

$$f'_x(r(\alpha), \alpha) \cdot r'(\alpha) + f'_\alpha(r(\alpha), \alpha) = 0.$$

Þetta gefur

$$r'(\alpha) = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha), \alpha)}{f'_x(r(\alpha), \alpha)}.$$

Nú látum við e tákna skekkjuna í nálguninni á α með α_0, $e = \alpha - \alpha_0$. Þá fáum við skekkjumatið

$$r(\alpha) - r(\alpha_0) \approx r'(\alpha_0) \cdot e = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha_0), \alpha_0)}{f'_x(r(\alpha_0), \alpha_0)} \cdot e$$

og jafnframt mat á hlutfallslegri skekkju

$$\frac{|r(\alpha) - r(\alpha_0)|}{|r(\alpha)|} \approx \text{astand}_\alpha(r(\alpha)) \cdot \frac{|e|}{|\alpha|}.$$

þar sem mat okkar á ástandstölunni er

$$\text{astand}_\alpha(r(\alpha)) \approx \frac{|\alpha_0 f'_\alpha(r(\alpha_0), \alpha_0)|}{|r(\alpha_0) f'_x(r(\alpha_0), \alpha_0)|}.$$

1.41

1.10 Sýnidæmi

Við skulum nú líta á það verkefni að finna nálgun á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$, þar sem við gerum ráð fyrir því að þurfa að nálga π með 3.14.

Okkur eru gefnar niðurstöður úr nálguninni með einhverri aðferð. Við setjum $f(x, \alpha) = 1 - e^{-x} - \sin(\alpha x)$ og fáum

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\frac{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert^2}$
0			0.8
1	0.81276894538752	0.00014017936338	0.8597
2	0.81262876602414	0.00000001621651	0.8253
3	0.81262874980763	0.00000000000000	0.8444

1.42

1.10 Sýnidæmi

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.

Hlutafleiðurnar eru $f'_x(x, \alpha) = e^{-x} - \alpha \cos(\alpha x)$ og $f'_\alpha(x, \alpha) = -x \cos(\alpha x)$.

Við stingum tölunum okkar inn í matið og notum punktinn $(x_3, \alpha_0) = (0.8126, 3.14)$. Það gefur

$$
\begin{aligned}
r(\pi) - r(3.14) &\approx r'(3.14)e \\
&\approx \frac{0.8126 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)}{|e^{-0.8126} - 3.14 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)|} 0.0016 \approx 0.4 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

Þetta mat segir okkur að við eigum að gera ráð fyrir að áhrif gagnaskekkjunnar séu þau að við fáum lausn með þremur réttum stöfum, 0.813. Nálgun okkar á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$ er 0.813. 1.43

1.11 O- og o- ritháttur

Látum f og g vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum c vera tölu á I eða annan hvorn endapunkt I.

Við segjum að $f(t)$ *sé stórt O af* $g(t)$ og skrifum

$$f(t) = O(g(t)), \qquad t \to c,$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|f(t)| \leq C|g(t)|$$

gildi fyrir öll t í einhverri grennd um c.

Athugið að grennd um $c = +\infty$ er bil af gerðinni $]\alpha, +\infty[$ og grennd um $c = -\infty$ er bil af gerðinni $]-\infty, \alpha[$.

Við skrifum

$$f(t) = o(g(t)), \quad t \to c$$

og segjum að $f(t)$ sé *óvera* af $g(t)$ þegar t stefnir á c ef til er fall h á I þ.a. $h(t) \to 0$ ef $t \to c$ og ójafnan

$$|f(t)| \leq |h(t)||g(t)|,$$

gildi fyrir öll t í einhverri grennd um c. 1.44

1.11 O- og o- ritháttur og skekkja í Taylor-nálgnum

Oft er O-ritháttur notaður þegar fjallað er um skekkjur í Taylor-nálgunum,

$$f(x) - f(c) - f'(x-c) - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = O\big((x-c)^{n+1}\big), \quad x \to c$$

1.45

1.11 Nokkur sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

Dæmi

Við vitum að $t^\alpha e^{-t} \to 0$ ef $t \to \infty$. Þannig að

$$h(t) := e^{-t} t^\alpha = \frac{e^{-t}}{t^{-\alpha}},$$

stefnir á 0 þegar t stefnir á ∞. Það er

$$e^{-x} = o(x^{-\alpha}), \qquad x \to \infty \quad \text{fyrir öll } \alpha > 0.$$

Dæmi

Setning Taylors gefur okkur:

$$x - \sin x = O(x^3), \quad x \to 0$$
$$x - \frac{x^3}{3!} - \sin x = O(x^5), \quad x \to 0$$

1.46

1.11 O- og o- ritháttur fyrir runur

Látum nú (a_n) og (b_n) vera tvær talnarunur. Við segjum að a_n *sé stórt O af* b_n og skrifum

$$a_n = O(b_n),$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \leq C|b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Við segjum að a_n sé *óvera* af b_n og skrifum

$$a_n = o(b_n),$$

ef til er runa $\varepsilon_n \searrow 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \leq \varepsilon_n |b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

1.47

1.11 Tvö sýnidæmi

- Út frá Taylor-röðinni fyrir $\cos x$ fáum við að

$$\cos(1/n) - 1 + 1/(2n^2) = O(1/n^4)$$

- Út frá

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

  sjáum við að

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

1.48

Kafli 1: Fræðilegar spurningar

1. Hverjar eru helstu tegundir af skekkjum sem þarf að taka tillit til í tölulegum útreikningum?
2. Hvernig eru *skekkja* og *hlutfallsleg skekkja* í nálgun á rauntölu skilgreindar?
3. Hver er skilgreiningin á því að *rauntalnaruna* (x_n) er sögð vera *samleitin* að *markgildinu* r?
4. Ef (x_n) er gefin runa sem stefnir á r og skekkjan er $e_n = r - x_n$, hvað þýðir þá að runan sé *að minnsta kosti línulega samleitin*, *að minnsta kosti ferningssamleitin* og *að minnsta kosti samleitin af stigi* α
5. Eftir hvaða reglum eru tölur afrúnaðar í tugakerfi?
6. Hvernig er fyrirframmat á skekkju framkvæmt?
7. Útskýrið hvernig er eftirámat á skekkju framkvæmt við nálgun á rauntölu r er aðferðin er ofurlínulega samleitin?
8. Útskýrið hvernig er eftirámat á skekkju framkvæmt við nálgun á rauntölu r ef aðferðin er að minnsta kosti línulega samleitin.

1.49

Kafli 1: Fræðilegar spurningar

9. Útskýrið hvernig samleitnistig runu er metið.
10. Hvernig eru ástandsgildi falla af einni og mörgum breytistærðum skilgreint og hvernig eru þau notuð?
11. Útskýrið hvernig forðast á styttingarskekkjur þegar núllstöðvar annars stigs margliðu $ax^2 + bx + c$ eru reiknaðar
12. Hvernig er setning Taylors og hvernig er skekkjan í Taylor-nálgun?
13. Útskýrið hvernig hægt er að meta hlutfallslega skekkju í núllstöð $r(\alpha)$ fallsins $x \mapsto f(x, \alpha)$ ef gefið er að það er skekkja í gildinu sem notað er fyrir α.
14. Hvað þýðir að $f(t) = O(g(t))$ ef $t \to c$ þar sem f og g eru föll sem skilgreind eru á bili sem inniheldur c eða á hálfás $x > a$ í tilfellinu þegar $c = +\infty$?
15. Hvað þýðir að $f(t) = o(g(t))$ ef $t \to c$ þar sem f og g eru föll sem skilgreind eru á bili sem inniheldur c eða á hálfás $x > a$ í tilfellinu þegar $c = +\infty$?

1.50

Kafli 1: Fræðilegar spurningar

16. Hvað þýðir að $a_n = O(b_n)$ ef $n \to \infty$ þegar (a_n) og (b_n) eru tvær talnarunur?
17. Hvað þýðir að $a_n = o(b_n)$ ef $n \to \infty$ þegar (a_n) og (b_n) eru tvær talnarunur?

1.51

Vika 2: Núllstöðvar; helmingunaraðferð, fastapunktsaðferð, sniðilsaðferð og aðferð Newtons

Töluleg greining, STÆ405G, 17. og 22. janúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

2.1

Yfirlit

Vika 2: Núllstöðvar

Nr.	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
2.1	Helmingunaraðferð	58-68	3-7
2.3	Fastapunktsaðferð	81-93	8-15
2.5	Sniðilsaðferð	107-111	16-23
2.4	Newton-aðferð	95-104	24-29
2.4	Samanburður á aðferðunum		30
2.4	Matlab-forrit fyrir aðferð Newtons		31-35

2.2

2.1 Nálgun á núllstöð $f(x) = 0$:

Upprifjun
Munum að talan $p \in I$ sögð vera *núllstöð* fallsins $f : I \to \mathbb{R}$ ef

$$f(p) = 0.$$

Milligildissetningin úr stærðfræðigreiningu segir:

> Ef f er samfellt á $[a, b]$ og y er einhver tala á milli $f(a)$ og $f(b)$, þá er til c þannig að $a < c < b$ og $f(c) = y$.

Afleiðing
Svo ef við höfum a og b þannig að $a < b$ og þannig að $f(a)$ og $f(b)$ hafi ólík formerki, þá hefur f núllstöð p á bilinu $[a, b]$.

2.3

2.1 Helmingunaraðferð (e. bisection method):

Notum okkur þetta til þess að finna rætur.

(1) Látum $x = \frac{1}{2}(a + b)$ vera miðpunkt $[a, b]$.
(2) Reiknum $f(x)$, þá geta þrjú tilvik komið upp:

 (i) $f(x) = 0$ og leitinni að rót er lokið.
 (ii) $f(a)$ og $f(x)$ hafa sama formerki, þannig að við leitum að rót á bilinu $[x, b]$.
 (iii) $f(x)$ og $f(b)$ hafa sama formerki, þannig að við leitum að rót á bilinu $[a, x]$.

Í tilviki (ii) segir milligildissetningin að f hafi rót á bilinu $[x, b]$, og í tilviki (iii) er rótin á bilinu $[a, x]$. Þá getum við farið aftur í skref 1, nema með helmingi minna bil en áður.

Með því að ítreka þetta ferli n sinnum fáum við minnkandi runu af bilum

$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n].$$

Billengdin helmingast í hverju skrefi og milligildissetningin segir okkur að það sé núllstöð á öllum bilunum. 2.4

2.1 Helmingunaraðferð, nánar:

Rununa af bilunum

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

skilgreinum við með ítrun og notum til þess rununa $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

Upphafsskref: Setjum $a_0 = a$, $b_0 = b$, og $x_0 = \frac{1}{2}(a + b)$.

Ítrekunarskref: Gefið er $x_0, \ldots, x_n$. Reiknum $f(x_n)$.

(i) Ef $f(x_n) = 0$, þá er núllstöð fundin og við hættum.

(ii) Ef $f(x_n)$ og $f(a_n)$ hafa sama formerki, þá setjum við $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$, og $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$

(iii) annars setjum við $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$, og $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$. 2.5

2.1 Skekkjumat í helmingunaraðferð:

Ef við látum miðpunktinn $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ vera nálgunargildi okkar fyrir núllstöð fallsins f í bilinu $[a_n, b_n]$, þá er skekkjan í nálguninni

$$e_n = p - p_n$$

og við höfum skekkjumatið

$$|e_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^n},$$

það er

$$|e_n| < \frac{b - a}{2^n}.$$

2.6

2.1. Fyrirframmat á skekkju

Nú er auðvelt að meta hversu margar ítrekanir þarf að framkvæma til þess að nálgunin lendi innan gefinna skekkjumarka.

Ef $\varepsilon > 0$ er gefið og við viljum að $|e_n| < \varepsilon$, þá dugir að

$$|e_n| \leq \frac{b - a}{2^n} < \varepsilon.$$

Seinni ójafnan jafngildir því að

$$n > \frac{\ln\big((b - a)/\varepsilon\big)}{\ln 2}.$$

2.7

2.3 Fastapunktsaðferð (e. fixed point method)

Skilgreining

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Punktur $r \in [a, b]$ þannig að

$$f(r) = r$$

kallast *fastapunktur* fallsins f.

Athugasemd

Athugum að í fastapunktum skerast graf fallsins $y = f(x)$ og línan $y = x$. Verkefnið að ákvarða fastapunkta fallsins r er því jafngilt því að athuga hvar graf f sker línuna $y = x$.

Tengin við núllstöðvar

Verkefnið að finna fastapunkta fallsins $f(x)$ er jafngilt því að finna núllstöðvar fallsins $g(x) = f(x) - x$. 2.8

2.3 Fastapunktsaðferð

Upphafsskref: Valin er tala $x_0 \in [a, b]$.

Ítrekunarskref: Ef $x_0, \ldots, x_n$ hafa verið valin, þá setjum við

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Athugasemd
Til þess að þetta sé vel skilgreind runa, þá verðum við að gera ráð fyrir að $f(x) \in [a, b]$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Þetta skilyrði er einnig skrifað

$$f([a, b]) \subset [a, b].$$

Athugasemd
Ef f er samfellt og runan er samleitin með markgildið r, þá er

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(r).$$

Þetta segir okkur að **ef** við getum séð til þess að runan verði samleitin, þá er markgildið fastapunktur.

2.9

2.3 Herping

Skilgreining
Fall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er sagt vera *herping* ef til er fasti $\lambda \in [0, 1[$ þannig að

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y| \qquad \text{fyrir öll } x, y \in [a, b].$$

Athugasemd
Sérhver herping er samfellt fall.

Athugasemd
Ef f er deildanlegt fall á $]a, b[$, þá gefur meðalgildissetningin okkur til er ξ milli x og y þannig að

$$f(x) - f(y)) = f'(\xi)(x - y).$$

Ef til er $\lambda \in [0, 1[$ þannig að $|f'(x)| \leq \lambda$ fyrir öll $x \in [a, b]$, þá er greinilegt að f er herping.

2.10

2.3 Fastapunktssetning

Setning
Látum $f : [a, b] \to [a, b]$ vera herpingu. Þá hefur f nákvæmlega einn fastapunkt r á bilinu $[a, b]$ og runan (x_n) þar sem

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a, b] \quad \text{getur verið hvaða tala sem er og} \\ x_{n+1} &= f(x_n), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

stefnir á fastapunktinn.

Sönnunina brjótum við upp í nokkur skref.

2.11

2.3 Sönnun: 1. skref, herping hefur í mesta lagi einn fastapunkt

Sönnum þetta með mótsögn.

Gerum ráð fyrir að r og s séu tveir ólíkir fastapunktar á $[a, b]$. Þá er

$$|r - s| = |f(r) - f(s)| \leq \lambda|r - s| < |r - s|$$

því $\lambda < 1$. Þetta fær ekki staðist, þannig að fjöldi fastapunkta er í mesta lagi einn 2.12

2.3 Sönnun: 2. skref, fallið f hefur fastapunkt:

Látum $g(x) = f(x) - x$, þá eru núllstöðvar g nákvæmlega fastapunktar f.

Þar sem $a \leq f(x) \leq b$ fyrir öll $x \in [a, b]$ er

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$$

Ef annað hvort $g(a) = 0$ eða $g(b) = 0$ höfum við fundið fastapunkt fallsins f og við getum hætt.

Ef hins vegar $g(a) > 0$ og $g(b) < 0$ þá hefur g ólík formerki í endapunktum bilsins $[a, b]$ og hefur því núllstöð r á bilinu skv. milligildissetningunni. Þá er r jafnframt fastapunktur f.

Skref 1 og 2 sýna því að fallið f hefur nákvæmlega einn fastapunkt á bilinu. 2.13

2.3 Sönnun: 3. skref, runan (x_n) er samleitin

Látum r vera ótvírætt ákvarðaða fastapunktinn á $[a, b]$.

Við notfærum okkur að f er herping og að r er fastapunktur f, þá fæst að fyrir sérhvert $k \in \mathbb{N}$ þá er

$$|r - x_k| = |f(r) - f(x_{k-1})| \leq \lambda |r - x_{k-1}|$$

það er $|r - x_k| \leq \lambda |r - x_{k-1}|$.

Með því að nota þetta n-sinnum þá fæst að

$$\begin{aligned} |r - x_n| &\leq \lambda |r - x_{n-1}| && (k = n) \\ &\leq \lambda^2 |r - x_{n-2}| && (k = n-1) \\ &\vdots && \vdots \\ &\leq \lambda^n |r - x_0| && (k = 1). \end{aligned}$$

Þar sem $\lambda < 1$ er því

$$\lim_{n \to +\infty} |r - x_n| = \lim_{n \to +\infty} \lambda^n |r - x_0| = 0,$$

það er runan x_n stefnir á r. 2.14

2.3 Fastapunktsaðferð er að minnsta kosti línulega samleitin

Af skilgreiningunni á rununni x_n leiðir beint að

$$|e_{n+1}| = |r - x_{n+1}| = |f(r) - f(x_n)| \leq \lambda |r - x_n| = \lambda |e_n|$$

sem segir okkur að fastapunktsaðferð sé að minnsta kosti línulega samleitin ef f er herping. 2.15

2.5 Sniðilsaðferð

Gefið er fallið $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Við ætlum að ákvarða núllstöð f, þ.e.a.s. $p \in [a, b]$ þannig að

$$f(p) = 0.$$

Rifjum upp að *sniðill* við graf f gegnum punktana $(\alpha, f(\alpha))$ og $(\beta, f(\beta))$ er gefinn með jöfnunni

$$y = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](x - \alpha)$$

þar sem hallatalan er

$$f[\alpha, \beta] = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

Sniðillinn sker x-ásinn í punkti s þar sem

$$0 = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](s - \alpha) \quad \text{sem jafngildir því að} \quad s = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f[\alpha, \beta]}.$$

2.16

2.5 Sniðilsaðferð

Byrjunarskref: Giskað er á tvö gildi x_0 og x_1.

Ítrekunarskref: Gefin eru $x_0, \dots, x_n$. Punkturinn x_{n+1} er skurðpunktur sniðilsins gegnum $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$ við x-ás,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

2.17

2.5 Samleitin runa stefnir á núllstöð f

Gefum okkur að runan (x_n) sé samleitin að markgildinu r. Meðalgildissetningin segir okkur þá að til sé punktur η_n á milli x_{n-1} og x_n þannig að

$$f[x_n, x_{n-1}] = f'(\eta_n),$$

og greinilegt er að $\eta_n \to r$.

Við fáum því

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\eta_n)} \right) = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

Þessi jafna jafngildir því að $f(r) = 0$.

2.18

2.5 Skekkjumat í nálgun á $f(x)$ með $p_n(x)$

Sniðilinn sem við notum er graf 1. stigs margliðunnar

$$p_n(x) = f(x_n) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}(x - x_n) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n)$$

Samkvæmt skilgreiningu er $p_n(x_{n+1}) = 0$ svo x_{n+1} uppfyllir jöfnuna

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

Við þurfum að vita hver skekkjan er á því að nálga $f(x)$ með $p_n(x)$.

Við munum sýna fram á: Til er ξ_n sem liggur í minnsta bilinu sem inniheldur x, x_n og x_{n-1} þannig að

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

2.19

2.5 Skekkjumat í sniðilsaðferð

Gefum okkur að þessi staðhæfing sé rétt og skoðum hvað af henni leiðir:

Nú er $f(r) = 0$ og því

$$-p_n(r) = \frac{1}{2} f''(\xi_n) e_n \cdot e_{n-1}.$$

Eins er $p_n(x_{n+1}) = 0$ og því

$$-p_n(r) = p_n(x_{n+1}) - p_n(r) = -f[x_n, x_{n-1}] e_{n+1} = -f'(\eta_n) e_{n+1},$$

þar sem η_n fæst úr meðalgildissetningunni og liggur á milli x_n og x_{n+1}. Niðurstaðan verður því

$$e_{n+1} = \frac{-\frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f[x_n, x_{n+1}]} e_n e_{n-1} = \frac{-\frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)} e_n e_{n-1}$$

2.20

2.5 Sniðilsaðferð er ofurlínuleg

Það er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)} = \frac{-\frac{1}{2} f''(r)}{f'(r)}.$$

Setning

Ef sniðilsaðferð er samleitin, $f \in C^2([a, b])$ (tvisvar diffranlegt) og $f'(r) \neq 0$, þá er sniðilsaðferðin ofurlínuleg.

Sönnun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1} e_{n-1}|}{|e_n e_{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n-1} \frac{1}{2} f''(r)|}{|f'(r)|} = 0$$

Athugasemd

Nánar tiltekið þá er sniðilsaðferðin samleitin af stigi $\alpha = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$ og með $\lambda = \left(\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right)^{\alpha-1}$, sjá kennslubók bls. 110.

2.21

2.5 Skekkjumat í nálgun á $f(x)$ með $p_n(x)$

Við megum ekki gleyma að sanna skekkjumatið.

Hjálparsetning

Til er ξ_n sem liggur í minnsta bilinu sem inniheldur x, x_n og x_{n-1} þannig að

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

Sönnun

Ljóst er að matið gildir ef $x = x_{n-1}$ eða $x = x_n$.

Festum því punktinn x og gerum ráð fyrir að $x \neq x_n$ og $x \neq x_n$.

Skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - \lambda(t - x_n)(t - x_{n-1})$$

þar sem λ er valið þannig að $g(x) = 0$.

2.22

Látum nú $\alpha < \beta < \gamma$ vera uppröðun á punktunum x_{n-1}, x_n og x.

Fallið

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - \lambda(t - x_n)(t - x_{n-1})$$

hefur núllstöð í öllum punktunum þremur.

Meðalgildissetningin gefur þá að $g'(t)$ hefur eina núllstöð í punkti á bilinu $]\alpha, \beta[$ og aðra í $]\beta, \gamma[$.

Af því leiðir aftur að $g''(t)$ hefur núllstöð, ξ_n, í $[\alpha, \gamma]$, sem er minnsta bilið sem inniheldur alla punktana x_{n-1}, x_n og x.

Af þessu leiðir

$$0 = g''(\xi_n) = f''(\xi_n) - 2\lambda \quad \text{þþaa} \quad \lambda = \tfrac{1}{2} f''(\xi_n).$$

Nú var λ upprunalega valið þannig að $g(x) = 0$. Þar með er

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}).$$

2.23

2.4 Aðferð Newtons

Í sniðilsaðferðinni létum við x_{n+1} vera skurðpunkt sniðils gegnum $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$ við x-ás og fengum við rakningarformúluna

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

Aðferð Newtons er nánast eins, nema í stað sniðils tökum við snertil í punktinum $(x_n, f(x_n))$.

Rakningarformúlan er eins, nema hallatalan verður $f'(x_n)$ í stað $f[x_n, x_{n-1}]$ 2.24

2.4 Aðferð Newtons

Byrjunarskref: Giskað er á eitt gildi x_0.

Ítrekunarskref: Gefin eru $x_0, \ldots, x_n$. Punkturinn x_{n+1} er skurðpunktur snertils gegnum $(x_n, f(x_n))$ við x-ás,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Upprifjun
Munum að snertill við graf f í punktinum x_n er

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

þessi lína sker x-ásinn $(y = 0)$ þegar $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2.25

2.4 Samleitin runa stefnir á núllstöð f

Gefum okkur að runan (x_n) sé samleitin með markgildið r. Við fáum því

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

Þessi jafna jafngildir því að $f(r) = 0$.

Þannig að ef runan er samleitin þá fáum við núllstöð.

2.26

2.4 Skekkjumat í nálgun á $f(x)$ með $p_n(x)$

Fallið sem hefur snertilinn fyrir graf er 1. stigs margliðan

$$p_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Samkvæmt skilgreiningu er $p_n(x_{n+1}) = 0$ svo x_{n+1} uppfyllir jöfnuna

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Athugum að p_n er fyrsta Taylor nálgunin við fallið f kringum x_n. Setning Taylors gefur að til er ξ_n sem liggur á milli x og x_n þannig að

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2}f''(\xi_n)(x - x_n)^2.$$

2.27

2.4 Skekkjumat í aðferð Newtons

Nú er $f(r) = 0$ og því

$$-p_n(r) = \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2.$$

Eins er $p_n(x_{n+1}) = 0$ og því

$$-p_n(r) = p_n(x_{n+1}) - p_n(r) = -f'(x_n)e_{n+1}$$

Niðurstaðan verður því

$$e_{n+1} = \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2$$

2.28

2.4 Aðferð Newtons er að minnsta kosti ferningssamleitin

Setning
Ef aðferð Newtons fyrir fallið f er samleitin, $f \in C^2([a,b])$ og $f'(r) \neq 0$, þá fáum við:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{-\frac{1}{2}f''(r)}{f'(r)}$$

Það er, aðferð Newtons er ferningssamleitin.

Sönnun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f'(x_n)} = \frac{-\frac{1}{2}f''(r)}{f'(r)}$$

Athugasemd
Athugið að það er ekki sjálfgefið að aðferð Newtons sé samleitin.

Auðvelt er að finna dæmi þar sem vond upphafságiskun x_0 skilar runu sem er ekki samleitin. 2.29

2.4 Samanburður á aðferðum

Bók	Aðferð	Samleitin	Stig samleitni
2.1	Helmingunaraðferð (bisection method)	Já, ef $f(a)f(b) < 0$	1, línuleg
2.2	Rangstöðuaðferð (false position m.)	Já, ef $f(a)f(b) < 0$	1, línuleg
2.3	Fastapunktsaðferð (fixed point iteration)	Ekki alltaf. En saml. ef f er herping	amk 1
2.4	Aðferð Newtons (Newtons method)	Ekki alltaf	2, ef $f'(r) \neq 0$
2.5	Sniðilsaðferð (secant method)	Ekki alltaf	$\approx 1,618$, ef $f'(r) \neq 0$

Athugasemd
Þó að aðferð Newtons sé samleitin af stigi 2, en sniðilsaðferðin af stigi u.þ.b. 1,618, þá er í vissum tilfellum hagkvæmara að nota sniðilsaðferðina ef það er erfitt að reikna gildin á afleiðunni f'. 2.30

2.4 Matlab-forrit fyrir Aðferð Newtons

Þegar við forritum Newton aðferðina gerum við ráð fyrir að $f'(r) \neq 0$. Þá er aðferðin a.m.k. ferningssamleitin, og við notum matið

$$|e_{n+1}| = |x_{n+1} - x_n|$$

sem stöðvunarskilyrði. Við athugum þó að

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - x_n\right| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|$$

og notum hægri hliðina sem villumat til að forðast reikniskekkjur. 2.31

2.4 Matlab-forrit fyrir Aðferð Newtons

```
function x = newtonNull(f,df,x0,epsilon)
%   newtonNull(f,df,x0,epsilon)
%
% Nálgar núllstöð fallsins f : R --> R með aðferð Newtons.
% Fallið df er afleiða f, x0 er upphafságiskun á núllstöð
% og epsilon er tilætluð nákvæmni.
```

```
x = x0;
mis = f(x)/df(x);

% Ítrum meðan tilefni er til
while (abs(mis) >= epsilon)
   x = x - mis;
   mis = f(x)/df(x);
end
```

2.32

2.4 Matlab-forrit fyrir aðferð Newtons

Athugasemd
Athugið að við þurfum ekki að skoða sérstaklega hvort `x` sé núllstöð `f`, því ef svo er er `abs(mis) = 0` sem er vissulega minna en öll skynsamlega valin `epsilon` og því hættir forritið sjálfkrafa.

Athugasemd
Athugið að forritið geymir ekki x_n, heldur uppfærir bara ágiskunina x í hvert skipti sem ítrunin er keyrð.

Athugasemd
Forritið athugar ekki hversu oft það er búið að ítra, þannig að ef aðferðin er ekki samleitin þá hættir forritið aldrei. Þetta er ekki skynsamlegt.

2.33

2.4 Sýnidæmi

Við skulum nálga 9. rót tölunnar 1381 með nákvæmni upp á $\varepsilon = 10^{-8}$ með aðferð Newtons. Köllum rótina r, þá uppfyllir r jöfnuna

$$r^9 - 1381 = 0$$

Verkefnið snýst því um að nálga núllstöð fallsins $f(x) = x^9 - 1381$. Athugið að f er margliða af oddatölustigi og hefur því virkilega núllstöð. Nú er $2^9 = 512$, svo $x_0 = 2$ er ágætis upphafságiskun á r. 2.34

2.4 Sýnidæmi:

Þegar við ítrum með forritinu okkar fæst

n	x_n	$\lvert e_{n-1}\rvert \approx \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2	
1	2.377170138888889	0.377170138888889
2	2.263516747674327	0.113653391214562
3	2.234695019689070	0.028821727985257
4	2.233115984281294	0.001579035407775
5	2.233111503379273	0.000004480902021
6	2.233111503343308	0.000000000035965

Eftir sex ítranir er skekkjan orðin minni en ε, og við nálgum því r með 2.233111503.

Áhrif upphafságiskana sjást ágætlega með að prófa til dæmis $x_0 = 0.5$, þá skilar aðferðin alveg jafn góðri nálgun en þarf um 90 ítranir til þess. 2.35

Kafli 2: Fræðilegar spurningar:

1. Hvernig er ítrekunarskrefið í helmingunaraðferð?
2. Hvernig er skekkjumatið í helmingunaraðferð?
3. Hvað þýðir að punkturinn p sé fastapunktur fallsins f?
4. Hvernig er ítrekunarskrefið í fastapunktsaðferð?
5. Hvað þýðir að fall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sé *herping*?
6. Setjið fram fastapunktssetninguna.
7. Rökstyðjið að fastapunktsaðferð sé a.m.k. línulega samleitin.
8. Hvernig er ítrekunarskrefið í sniðilsaðferð?
9. Hvernig er skekkjuformúlan í sniðilsaðferð?

10. Rökstyðjið að hægt sé að nota $|x_{n+1} - x_n|$ fyrir mat á skekkju í sniðilsaðferð.
11. Hvernig er ítrekunarskrefið í aðferð Newtons?
12. Hvernig er skekkjumatið í aðferð Newtons?
13. Rökstyðjið að aðferð Newtons sé a.m.k. ferningssamleitin.

2.36

Kafli 4: Eigingildisverkefni

Töluleg greining, STÆ405G, 24. janúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

4.1

Yfirlit

Kafli 4: Eigingildisverkefni

Nr.	Viðfangsefni	Bls.	Glærur
4.0	Eigingildi og eiginvigrar	261-264	3-5
4.1	Veldaaðferð	265-280	6-12
4.2	Öfug veldaaðferð	281-295	13-17

4.2

4.0 Eigingildi og eiginvigrar

4. Nálgun á eigingildum og eiginvigrum

Skilgreining
Látum A vera $n \times n$ fylki. Munum að $\lambda \in \mathbb{C}$ nefnist *eigingildi* fylkisins A ef til er $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ þannig að

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vigurinn $\mathbf{v}$ nefnist þá *eiginvigur* fylkisins A og við segjum að hann svari til eigingildisins λ.

Athugasemd
Eigingildi fylkisins A eru nákvæmlega núllstöðvar kennimargliðunnar

$$p_A(z) = \det(zI - A), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Athugasemd
Ef $\mathbf{v}$ er eiginvigur fylkisins A, þá er $\alpha\mathbf{v}$ einnig eiginvigur fyrir sérhvert $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

4.3

4.0 Gróf staðsetning á eigingildum

Skífusetning Gerschgorins
Skilgreinum

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

sem er summan af tölugildum stakanna í línu i *utan hornalínunnar* og látum

$$C_i = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - a_{ii}| \le r_i\}$$

tákna skífuna með miðju í a_{ii} og geislann r_i. Þá gildir

(i) Öll eigingildi A liggja í sammengi skífanna C_i.
(ii) Ef k af skífunum C_i mynda samanhangandi svæði R í $\mathbb{C}$ sem er sundlægt við hinar $n-k$ skífurnar, þá inniheldur R nákvæmlega k eigingildi.

4.4

4.0 Eiginvigragrunnar

Nokkrar staðreyndir um eigingildi og eiginvigra:

(i) Eiginvigrar sem svara til ólíkra eigingilda eru línulega óháðir.

(ii) Eiginvigrar sem svara til eins ákveðins eigingildis λ spanna hlutrúm í $\mathbb{C}^n$.

(iii) Við segjum að fylkið A sé *hornalínugeranlegt* ef til eru eigingildi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ og tilsvarandi eiginvigrar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sem mynda grunn í $\mathbb{R}^n$.Þá er hægt að skrifa

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

þar sem Λ er hornalínufylki með eigingildin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ á hornalínunni og T er $n \times n$ fylki þannig að dálkur nr. k í því samanstendur af hnitum $\mathbf{v}_k$ miðað við staðalgrunninn í $\mathbb{R}^n$.

(iv) Ef fylkið A er samhverft, þá er það hornalínugeranlegt. 4.5

4.1 Veldaaðferð

Hugsum okkur nú að við A sé hornalínugeranlegt og að við röðum eigingildunum á hornalínu Λ í minnkandi röð eftir tölugildi

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Tökum einhvern vigur $\mathbf{x}^{(0)}$ og lítum á liðun hans í eiginvigra

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

Skilgreinum síðan rununa $\big(\mathbf{x}^{(m)}\big)$ með ítruninni

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = A\mathbf{x}^{(m)}.$$

4.6

4.1 Veldaaðferð

Við fáum þá

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} &= \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n A\mathbf{v}_n \\ &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{v}_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} &= \alpha_1\lambda_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n A\mathbf{v}_n, \\ &= \alpha_1\lambda_1^2\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^2\mathbf{v}_n \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} &= \alpha_1\lambda_1^m\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^m\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

Síðasti vigurinn er

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m\big(\alpha_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^m\alpha_2\mathbf{v}_+ \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m\alpha_n\mathbf{v}_n\big)$$

4.7

4.1 Veldaaðferð

Við vorum komin með

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m\big(\alpha_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^m\alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m\alpha_n\mathbf{v}_n\big)$$

Hnit númer i í þessum vigri er:

$$x_i^{(m)} = \lambda_1^m\big(\alpha_1 v_{1,i} + (\lambda_2/\lambda_1)^m\alpha_2 v_{2,i} + \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m\alpha_n v_{n,i}\big)$$

Hugsum okkur nú að $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Þá fæst:

$$\frac{x_i^{(m)}}{x_i^{(m-1)}} = \frac{\lambda_1^m\big(\alpha_1 v_{1,i} + O((\lambda_2/\lambda_1)^m)\big)}{\lambda_1^{m-1}\big(\alpha_1 v_{1,i} + O((\lambda_2/\lambda_1)^{m-1})\big)}$$

Ef við höfum $\alpha_1 v_{1,i} \neq 0$, þá er niðurstaðan

$$\frac{x_i^{(m)}}{x_i^{(m-1)}} = \lambda_1\frac{\big(1 + O((\lambda_2/\lambda_1)^m)\big)}{\big(1 + O((\lambda_2/\lambda_1))^{m-1}\big)} \to \lambda_1 \quad \text{þegar} \quad m \to \infty.$$

4.8

4.1 Veldaaðferð

Skoðum aftur

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m\big(\alpha_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^m\alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m\alpha_n\mathbf{v}_n\big)$$

Ef $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, þá gildir fyrir $j > 1$ að $(\lambda_j/\lambda_1)^m \to 0$ þegar $m \to \infty$ og

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{x}^{(m)}}{\lambda_1^m} = \alpha_1\mathbf{v}_1.$$

Þannig að ef $\mathbf{x}^{(0)}$ var valinn í upphafi þannig að $\alpha_1 \neq 0$, þá skilar þetta eiginvigrinum $\alpha_1\mathbf{v}_1$ fyrir eigingildið λ_1.

4.9

4.1 Reiknirit til þess að ákvarða stærsta eigingildi fylkis

Þegar við reiknum $\mathbf{x}^m$ eins og hér að framan þá er ekki ólíklegt að við lendum í undir- eða yfirflæðisvillum ef lengd $\mathbf{x}$ (skv. einhverjum staðli) stefnir á 0 eða $+\infty$. Til þess að ráða bót á þessu þá stöðlum við vigurinn í hverju skrefi á eftirfarandi hátt.

Við veljum $\mathbf{x}^{(0)}$ með einhverjum hætti og skilgreinum síðan

$$\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}, \qquad \text{og svo } \mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}}$$

þar sem p_m er númerið á því hniti í $\mathbf{y}^{(m)}$ sem hefur stærst tölugildi, sem þýðir að það hnit p_m uppfyllir

$$|y^{(m)}_{p_m}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |y^{(m)}_j|.$$

Ef mörg númer uppfylla þetta skilyrði, þá tökum við bara p_m sem lægsta gildið á j þar sem jafnaðarmerki gildir (enda skiptir það ekki máli fyrir skilgreininguna á $\mathbf{x}^{(m)}$).

4.10

4.1 Samleitnin

Nú kemur í ljós að $y^{(m)}_{p_{m-1}}$ stefnir á λ_1. Auk þess stefnir $\mathbf{x}^{(m)}$ á eiginvigur sem svarar til λ_1 og hefur lengdina 1 í l_∞ staðlinum.

Í útreikningum skilgreinum við því rununa $\lambda^{(m)} = y^{(m)}_{p_{m-1}}$. Við gefum okkur síðan þolmörk á skekkju TOL og reiknum úr runurnar þar til eitt af stoppskilyrðunum gildir:

$$\begin{aligned} |\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}| &< TOL \qquad \text{eða} \\ \|\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)}\| &< TOL \qquad \text{eða} \\ \|A\mathbf{x}^{(m)} - \lambda^{(m)}\mathbf{x}^{(m)}\| &< TOL. \end{aligned}$$

4.11

4.1 Samhverf fylki

Munum að ef A er samhverft, þá hefur A eiginvigragrunn og eiginvigrar sem svara til ólíkra eigingilda eru hornréttir.

Í þessu tilfelli er einfaldara að smíða reiknirit svona:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(m)} &= A\mathbf{x}^{(m-1)} \\ \lambda^{(m)} &= \mathbf{x}^{(m-1)^T}\mathbf{y}^{(m)} \\ \mathbf{x}^{(m)} &= \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{\sqrt{(\mathbf{y}^{(m)})^T\mathbf{y}^{(m)}}} \end{aligned}$$

Samleitnin verður sú sama: $\lambda^{(m)}$ stefnir á stærsta eigingildið og $\mathbf{x}^{(m)}$ stefnir á tilsvarandi eiginvigur.

4.12

4.2 Meira um eigingildi og eiginvigra

Setning

Látum sem fyrr A vera $n \times n$ fylki, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vera eigingildi og $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vera tilsvarandi eiginvigra.

(i) Látum $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ vera margliðu og skilgreinum $n \times n$ fylkið B með því að stinga A inn í p,

$$B = p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

Þá eru tölurnar $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ eigingildi fylkisins $B = p(A)$ með tilsvarandi eiginvigrum $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

(ii) Ef A er andhverfanlegt þá eru $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ eigingildi A^{-1} með tilsvarandi eiginvigrum $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

4.13

4.2 Andhverf veldaaðferð

Af síðustu setningu leiðir að fylkið $B = (A - qI)^{-1}$ hefur eigingildin

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - q}, \ \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2 - q}, \ \cdots \ \mu_n = \frac{1}{\lambda_n - q}.$$

Hugsum okkur nú að við viljum finna nálgunargildi fyrir eigingildið λ_k og að við vitum út frá setningu Gerschgorins skífunum nokkurn veginn hvar það er staðsett.

Ef við erum með q nógu nálægt λ_k, þá verður μ_k stærsta eigingildi fylkisins $B = (A - qI)^{-1}$

Þá getum við beitt veldaaðferðinni til þess að búa til runu $\mu^{(m)} \to \mu_k$ og við fáum að

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{\mu^{(m)}} + q \to \lambda_k.$$

4.14

4.2 Andhverf veldaaðferð

Ef veldaaðferðinni er beitt á fylkið $B = (A - qI)^{-1}$ þá þurfum við að reikna út $\mathbf{y}^{(m)} = (A - qI)^{-1}\mathbf{x}^{(m-1)}$ í hverju skrefi.

Þetta er gert þannig að fyrst framkvæmum við LU-þáttun á fylkinu $LU = (A - qI)$ og framkvæmum síðan for- og endurinnsetningu til þess að leysa $LU\mathbf{y}^{(m)} = x^{(m-1)}$.

Tölulegar aðferðir fyrir LU-þáttun eru í kafla 3, og verður fjallað um síðar. 4.15

4.2 Reiknirit til þess að nálga eigingildi og eiginvigra

Takmarkið er að finna nálgun á eigingildinu λ_k.

(i) Finnum $q \in \mathbb{R}$ sem liggur næst eigingildinu λ_k af öllum eigingildum A

(ii) Þáttum $LU = A - qI$.

(iii) Við veljum $\mathbf{x}^{(0)}$ með einhverjum hætti og leysum síðan $\mathbf{y}^{(m)}$ út úr jöfnunni

$$LU\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m-1)}.$$

(iv) Skilgreinum $\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{y}^{(m)}/y^{(m)}_{p_m}$ þar sem p_m er númerið á því hniti í $\mathbf{y}^{(m)}$ sem hefur stærst tölugildi, sem þýðir að það hnit uppfyllir

$$|y^{(m)}_{p_m}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |y^{(m)}_j|.$$

Ef mörg númer uppfylla þetta skilyrði, þá tökum við bara p_m sem lægsta gildið á j þar sem jafnaðarmerki gildir.

4.16

4.2 Reiknirit til þess að ákvarða eigingildi

Niðurstaðan verður að

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{y^{(m)}_{p_{m-1}}} + q \to \lambda_k$$

og $\mathbf{x}^{(m)}$ stefnir á tilsvarandi eiginvigur. 4.17

Kafli 4: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er setning Gerschgorins um staðsetningu eigingilda fylkis?
2. Hvernig er veldaaðferð til þess að nálga það eigingildi fylkis sem hefur stærst tölugildi?
3. Afhverju skilgreinum $\mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y_{p_m}^{(m)}}$ þar sem $\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}$, en ekki bara $\mathbf{x}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}$?
4. Hvernig er andhverf veldaaðferð til þess að nálga eigingildi fylkis?
5. Hvernig er skynsamlegast að velja q í andhverfu veldaaðferðinni ef við viljum finna eigingildið λ_k?

4.18

Kafli 5: Brúun

Töluleg greining, STÆ405G, 29 og 31 janúar, og 5, 7, 12 og 14 febrúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

5.1

Yfirlit

Kafli 5: Brúun

Kafli	Viðfangsefni	Bls.	Glærur
5.0	Inngangur	337-341	1-10
5.1	Margliðubrúun og Lagrange-form brúunarmarg.	341-349	11-18
5.3	Newton-form brúunarmargliðu	363-371	19-30
5.X	Brúunarmargliður með margföldum punktum		31-42
5.1	Nálgun á föllum með margliðum og skekkjumat	348-349	43-64
5.5	Splæsibrúun	386-402	65-79
5.8	Aðferð minnstu fervika	418-425	80-93

5.2

5.0 Inngangur

5.0 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

Við sýnum fram á að það sé alltaf hægt að finna margliðu p af stigi $\leq m$ sem uppfyllir $p(x_i) = y_i$ í öllum punktum og að slík margliða sé ótvírætt ákvörðuð.

Hún nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Við alhæfum þetta verkefni með því að úthluta sérhverjum punkti jákvæðri heiltölu m_i og krefjast þess graf margliðunnar fari í gegnum alla punktana og til viðbótar að allar afleiður $p^{(j)}$ upp að stigi $m_i - 1$ taki einnig fyrirfram gefin gildi $y_i^{(j)}$. 5.3

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og "brúar" því gildin milli mælipunktanna.

Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (reiknirit Horners).
- Einfalt að diffra og heilda margliður.
- Margliður eru óendanlega oft diffranlegar.
- *Setning Weierstrass:* Látum f vera samfellt fall á bili $[a, b]$. Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ þá er til margliða p þannig að
$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

5.4

5.0 Margliður:

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

þar sem m er heiltala og $a_0, \ldots, a_m$ eru tvinntölur nefnist margliða.

Stærsta talan j þannig að $a_j \neq 0$ nefnist *stig* margliðunnar p.

Ef allir stuðlarnir eru 0 þá nefnist p *núllmargliðan* og við segjum að stig hennar sé $-\infty$.

Munum að stuðullinn a_j við veldið x^j er gefinn með formúlunni

$$a_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

5.5

5.0 Mismunandi leiðir á framsetningu

Hægt er að setja sömu margliðuna fram á marga mismunandi vegu, en við nefnum framsetninguna hér að framan *staðalform margliðunnar* p.

Ef við veljum okkur einhvern punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, þá getum við skrifað

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_m(x - x_0)^m$$

og stuðlarnir b_j eru gefnir með

$$b_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Þessi formúla er jafngild þeirri staðreynd að ef p er margliða af stigi m. Þá er Taylor-röð p í sérhverjum punkti $x_0 \in \mathbb{R}$ bara margliðan p, og stuðlarnir í Taylor-röðinni eru gefnir með formúlunum fyrir b_j að ofan. 5.6

5.0 Newton-form margliðu

Ef við veljum okkur m punkta $x_0, \ldots, x_{m-1}$ þá nefnist framsetning af gerðinni

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

Newton-form margliðunnar p miðað við punktana $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Við munum mikið fást við margliður á Newton-formi og því er nauðsynlegt að hafa hraðvirkt reiknirit til þess að reikna út fallgildi p út frá þessari framsetningu.

Eitt slíkt reiknirit er nefnt *reiknirit Horners*. Það byggir á því að nýta sér að þættirnir $(x - x_j)$ eru endurteknir í liðunum

$$(x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \ldots$$

Þar sem við sleppum við að hefja í veldi þá komumst við af með fáar reikniaðgerðir hér. 5.7

5.0 Reiknirit Horners

Ef $m = 2$ má skrifa Newton-form p sem

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1) \cdot c_2).$$

Ef $m = 3$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)c_3))$$

og ef $m = 4$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + c_4(x - x_3)))).$$

Reikniritið vinnur á þessari stæðu með því að margfalda upp úr svigunum frá hægri til vinstri. 5.8

5.0 Reiknirit Horners

Skilgreinum tölur b_0, b_1, ... á eftirfarandi hátt. Fyrst setjum við

$$b_n = c_n.$$

Fyrir hvert k frá $n-1$ niður í 0 þá setjum við

$$b_k = c_k + (a - x_k)b_{k+1}.$$

Þá er $b_0 = p(a)$.

Fyrir $m = 4$

$$p(a) = \underbrace{c_0 + (a-x_0)(\underbrace{c_1 + (a-x_1)(\underbrace{c_2 + (a-x_2)(\underbrace{c_3 + (a-x_3)\underbrace{c_4}_{b_4}}_{b_3})}_{b_2})}_{b_1})}_{b_0}.$$

5.9

5.0 Matlab-forrit fyrir reiknirit Horners

```
function b = horner(c,x,a);
%
% Fallið reiknar út gildi margliðunnar
%    p(x) = c(1) + c(2)(x-x(1)) + ...
%           + c(m)(x-x(1))*...*(x-x(m-1))
% í punktunum a(1), ..., a(n) úr vigrinum a.

m = length(c);         % stig margliðunnar er m-1
n = length(a);         % fjöldi reiknaðra fallgilda er n
b = c(m)*ones(1,n);    % b_m skilgreint
for i=m-1:-1:1         % i gengur frá m-1 niður í 1
      % b_i reiknað fyrir i < m
      b = c(i) + (a - x(i)) .* b;
end
```

Athugasemd: Hér gengur stikinn i fyrir a_i, b_i, c_i og x_i frá 1 upp í m, en ekki frá 0 eins og í glærunum á undan. Þetta helgast af því að í Matlab þá er fyrsta stak í vigur númer 1. 5.10

5.1 Margliðubrúun og Lagrange-form brúunarmargliðunnar

5.1 Margliðubrúun

Látum nú $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Slík margliða nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$
eða *brúunarmargliða gegnum punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Augljóslega verðum við að gera ráð fyrir að x-hnitin séu ólík, það er $x_j \neq x_k$ ef $j \neq k$.

Verkefnið að finna margliðuna p nefnist *brúunarverkefni fyrir punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$. 5.11

5.1 Brúunarmargliðan er ótvírætt ákvörðuð

Setning
Brúunarmargliðan fyrir $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Sönnun
Ef $p(x)$ og $q(x)$ eru tvær brúunarmargliður af stigi $\leq m$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ þá er mismunurinn $r(x) = p(x) - q(x)$ margliða af stigi $\leq m$ með núllstöðvar $x_0, \dots, x_m$. Þetta eru $m+1$ ólíkir punktar og því er $r(x)$ núllmargliðan samkvæmt undirstöðusetningu algebrunnar. Þar með $p(x) - q(x)$ núllmargliðan, þ.e. $p(x) = q(x)$.

5.12

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning
Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Sönnun
Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.

Ef $m = 0$, þá erum við aðeins með eitt brúunarskilyrði, $p(x_0) = y_0$, og fastamargliðan $p(x) = y_0$ er lausn af stigi ≤ 0.

G.r.f. að við getum leyst öll brúunarverkefnum þar sem fjöldi punkta er m og sýnum að við getum þá leyst verkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m - 1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m - 1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

5.13

5.1 Framhald af sönnun

Vorum með

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

sem er greinilega margliða af stigi $\leq m$.

Skoðum nú gildin á p

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= 1 \cdot q(x_0) + 0 \cdot r(x_0) = y_0, \\
p(x_k) &= \frac{x_k - x_m}{x_0 - x_m} y_k + \frac{x_k - x_0}{x_m - x_0} y_k = y_k, \qquad k = 1, \dots, m - 1, \\
p(x_m) &= 0 \cdot q(x_m) + 1 \cdot r(x_m) = y_m.
\end{aligned}$$

Þar með er p brúunarmargliðan sem uppfyllir $p(x_j) = y_j$ fyrir $j = 0, \dots, m$ og við höfum leyst brúunarverkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

5.14

5.1 Lagrange-form brúunarmargliðunnar

Sönnunin á síðustu glæru er í raun rakningarformúla til þess að reikna út gildi brúunarmargliðunnar p fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Hægt er að skrifa lausnina niður beint

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_2(x) + \cdots + y_m \ell_m(x),$$

þar sem $\ell_0, \dots, \ell_m$ er ákveðinn grunnur fyrir rúm allra margliða $\mathcal{P}_m$ af stigi $\leq m$ og nefnast *Lagrange-margliður fyrir punktasafnið* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

5.15

5.1 Lagrange-margliður, tilfellin $m = 0, 1, 2$

$m = 0$
Ef $m = 0$ þá er $p(x) = y_0$ fastamargliða eins og við höfum séð.

$m = 1$
Ef $m = 1$, þá blasir við að lausnin er

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

sem er margliða af stigi ≤ 1 (þ.e. lína) sem leysir brúunarverkefnið.

$m = 2$
Á hliðstæðan hátt fáum við fyrir $m = 2$ að

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

leysir brúunarverkefnið.

5.16

5.1 Lagrange-margliður almenna tilfellið

Almennt fæst lausnin

$$p(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + \ldots + y_m\,\ell_m(x) \tag{1}$$

þar sem

$$\ell_k = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

Athugið að

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases} \tag{2}$$

Allar margliðurnar ℓ_k eru af stigi m og því er p af stigi $\leq m$. Nú er augljóst útfrá (1) og (2) að p er lausn brúunarverkefnisins.

5.17

5.1 Sýnidæmi

Reiknum brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$ með Lagrange-margliðum.

Reiknum fyrst margliðurnar ℓ_0, ℓ_1 og ℓ_2:

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}\\
\ell_1 &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)\\
\ell_2 &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}
\end{aligned}$$

Þá fæst að brúunarmargliðan p er

$$p(x) = 1\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3\cdot(x-1)(x-3) + 6\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Þetta er greinilega annars stigs margliða og auðvelt er að sannfæra sig um að $p(1) = 1$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 6$.

5.18

5.3 Newton-form brúunarmargliðu

5.3 Newton-form brúunarmargliðu

Formúla fyrir $c_0, \ldots, c_m$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum $c_0, \ldots, c_m$ í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Athugum að $c_m = a_m$, þar sem a_m er stuðullinn við veldið x^m í staðalframsetningunni á p.

Til þess að reikna út $c_0, \ldots, c_m$ þurfum við að reikna út með skipulegum hætti stuðulinn við veldið x^j í brúunarmargliðunni gegnum punktana $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$, fyrir öll $i = 0, \ldots, m$ og $j = 0, \ldots, m-i$. Við táknum þennan stuðul með $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$.

Athugasemd

Verkefnið er háð röð punktanna, þ.e. framsetningin (Newton-formið) á margliðunni. Auðvitað er margliðan og gildin á henni alltaf þau sömu (sbr. ótvíræðni glæru 5.12).

5.19

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$**:**
$y[x_i] = y_i$.

$j = 1$**:**

$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$

$j = 2$**:**
$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1},x_{i+2}]-y[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$.

$j > 2$**:**
$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1},\ldots,x_j]-y[x_i,\ldots,x_{i+j-1}]}{x_{i+j}-x_i}$.

Athugasemd:
Stærðin $y[x_{n-1}, x_n]$ hefur komið fyrir áður hjá okkur þegar við fjölluðum um sniðilsaðferð, sjá kafla 2.5.

5.20

5.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \ldots, x_m]$.

Við sjáum þá að stuðullinn við veldið x^m í $p(x)$ er

$$\frac{y[x_0, \ldots, x_{m-1}]}{x_0 - x_m} + \frac{y[x_1, \ldots, x_m]}{x_m - x_0} = y[x_0, \ldots, x_m]$$

Athugasemd: Fyrir $m = 0$ gildir að $p(x) = y_0 = y[x_0]$.

5.21

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 0, 1$

Mismunakvótar eru venjulega reiknaðir út í svokölluðum *mismunakvótatöflum*.

Ef $m = 0$ er mismunakvótataflan aðeins ein lína

i	x_i	$y[x_i]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$

Ef $m = 1$ er taflan

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	

og

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0).$$

5.22

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 2$

Ef $m = 2$ verður taflan

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$		

og margliðan er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

5.23

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 3$

Skoðum loks tilfellið $m = 3$

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$			

Brúunarmargliðan fæst svo með því að nota stuðlana úr fyrstu línu töflunnar:

$$\begin{aligned} p(x) =& y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

5.24

5.3 Sýnidæmi

Við skulum reikna út aftur brúunarmargliðuna gegnum $(1, 1)$, $(2, 3)$ og $(3, 6)$. Stillum fyrst upp mismunakvótatöflu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3		
2	3	6		

Fyllum svo út í hana með að ganga á hvern dálk á fætur öðrum

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\dfrac{3-1}{2-1} = 2$	$\dfrac{3-2}{3-1} = 1/2$
1	2	3	$\dfrac{6-3}{3-2} = 3$	
2	3	6		

Lesum út brúunarmargliðuna p með að ganga á efstu línuna:

$$p(x) = 1 + 2 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot (x - 1)(x - 2).$$

5.25

5.3 Sýnidæmi

Reiknum út brúunarmargliðuna gegnum $(3, 1)$, $(1, -3)$, $(5, 2)$ og $(6, 4)$. Stillum upp og fyllum út í mismunakvótatöflu:

i	x_i	$y[x_i]$,	$y[x_i, x_{i+1}]$,	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$,	$y[x_i, \dots, x_{i+3}]$
1	3	1	$\frac{-3-1}{1-3} = 2$	$\frac{5/4-2}{5-3} = -3/8$	$\frac{3/20-(-3/8)}{6-3} = 7/40$
2	1	-3	$\frac{2-(-3)}{5-1} = 5/4$	$\frac{2-5/4}{6-1} = 3/20$	
3	5	2	$\frac{4-2}{6-5} = 2$		
4	6	4			

Nú getum við lesið brúunarmargliðuna okkar úr töflunni með að ganga á efstu línuna, við fáum

$$p(x) = 1 + 2(x - 3) - \frac{3}{8}(x - 3)(x - 1) + \frac{7}{40}(x - 3)(x - 1)(x - 5)$$

5.26

5.3 Samantekt

Ef gefnir eru punktar $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ í $\mathbb{R}^2$, þar sem $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$, þá er til nákvæmlega ein margliða p stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m$$

Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$ er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + y[x_0, \dots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir eru reiknaðir með rakningarformúlunum $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - y[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, \qquad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m - i.$$

5.27

5.3 Samantekt – Newton-form

Venja er að setja mismunakvótana upp í töflu og stuðlarnir í Newton-forminu raða sér í fyrstu línu töflunnar:

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$y[x_i, \ldots, x_{i+4}]$	$\ldots$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\ldots$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\ldots$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_2, x_3, x_4]$	$\ldots$		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$	$y[x_3, x_4]$	$\ldots$			
4	x_4	$y[x_4] = y_4$	$\ldots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					

5.28

5.3 Samantekt – Lagrange-margliður

Lagrange-form brúunarmargliðunnar er

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} y_k \ell_k(x)$$

þar sem ℓ_k eru Lagrange-margliðurnar með tilliti til punktanna $x_0, \ldots, x_m$,

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_m)}.$$

En þær uppfylla

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases}$$

5.29

5.3 Samantekt

Lagrange-margliður

- Auðvelt að finna margliðuna
- Dýrara að reikna fallgildin

Newton-margliður

- Erfiðara að finna margliðuna
- Auðvelt að finna fallgildin (reiknirit Horners)

5.30

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

Látum $a_1, \ldots, a_k$ vera ólíka punkta í $\mathbb{R}$, $m_1, \ldots, m_k$ vera jákvæðar heiltölur og hugsum okkur að gefnar séu rauntölur

$$y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Við viljum finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að margliðan $p = p^{(0)}$ og afleiður hennar $p^{(j)}$ uppfylli

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Við nefnum verkefnið að finna slíka margliðu p *alhæft brúunarverkefni*, og margliða sem uppfyllir þessi skilyrði nefnist *brúunarmargliða fyrir brúunarverkefnið* sem lýst er með gefnu skilyrðunum. 5.31

5.X Margfeldni punktanna

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.

Við skilgreinum nú töluna

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1.$$

Brúunarmargliðan okkar p á að vera af stigi $\leq m$, og fjöldi skilyrða sem við setjum á hana eru $m + 1$. (Athugið að tilfellið $k = m + 1$, $m_j = 1$ er það sem við skoðuðum í köflunum hér á undan). 5.32

5.X Tilfellin: (i) allir punktar eins og (ii) einn punktur

(i) Allir punktar eins
Ef allir punktarnir eru einfaldir, þá er alhæfða brúunarverkefnið sama verkefni og brúunarverkefnið sem við leystum í kafla 5.1 og 5.3 með

$$p^{(0)}(a_i) = p(a_i) = y_i^{(0)},$$

og lausnin var leidd út með

$$x_0 = a_1, \dots, x_m = a_k \quad \text{og} \quad y_0 = y_1^{(0)}, \dots, y_m = y_k^{(0)}.$$

(ii) Einn punktur
Ef aftur á móti $k = 1$, þá er lausn gefin með Taylor-margliðunni af röð m í punktinum a_1

$$p(x) = y_1^{(0)} + \frac{y^{(1)}}{1!}(x - a_1) + \dots + \frac{y_1^{(m)}}{m!}(x - a_1)^m.$$

5.33

5.X Upprifjun

Munum að ef p er margliða og $p(a) = 0$ þá er p deilanleg með $(x - a)$. Það er, hægt er að skrifa

$$p(x) = (x - a)q(x),$$

þar sem q er margliða af stigi sem er einu lægra en stig p. 5.34

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.

Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Af þessu leiðir að $r(x)$ er deilanlegt með $(x - a_i)^{m_i}$ en samanlagt stig þessara þátta er $m_1 + \dots + m_k = m + 1$.

Nú er stig $r(x)$ minna eða jafnt m svo þetta getur aðeins gerst ef $r(x)$ er núllmargliðan.

Við höfum því að $p(x) = q(x)$ og ályktum að við höfum nákvæmlega eina lausn á brúunarverkefninu ef við getum sýnt fram á tilvist á lausn. 5.35

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

Gerum nú ráð fyrir að við getum fundið brúunarmargliðu af stigi $\leq m - 1$ fyrir sérhvert alhæft brúunarverkefni þar sem samanlagður fjöldi skilyrðanna er m.

Lítum nú aftur á upprunalega brúunarverkefnið það sem fjöldi skilyrðanna er $m + 1$. Skilgreinum tvær runur af punktum

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_i \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0, y_1, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(m_1 - 1)}, \dots, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(m_k - 1)})$$

Við höfum séð að í því tilfelli að við höfum einn punkt, $k = 1$, $x_0 = x_1 = \dots = x_m = a_1$ er lausnin gefin með Taylor-margliðu í a_1. 5.36

5.X Tilvist á lausn

Við megum því gera ráð fyrir punktarnir séu a.m.k. tveir, $k \geq 2$. Það gefur að $x_0 \neq x_m$.

Látum $q(x)$ vera margliðuna af stigi $\leq m-1$ sem uppfyllir sömu skilyrði og p, nema það síðasta um að $q^{(m_k-1)}(a_k)$ þurfi að vera $y_k^{(m_k-1)}$.

og látum $r(x)$ vera margliðuna sem uppfyllir öll brúunarskilyrðin, nema síðasta skilyrðið í fyrsta punkti um að $r^{(m_1-1)}(a_1)$ sé jafnt $y_1^{(m_1-1)}$. 5.37

5.X Gefin fallgildi eru tekin:

Setjum síðan

$$p(x) = \frac{x-x_m}{x_0-x_m}q(x) + \frac{x-x_0}{x_m-x_0}r(x) = \frac{x-a_k}{a_1-a_k}q(x) + \frac{x-a_1}{a_k-a_1}r(x)$$

Nú þurfum við að staðfesta að öll skilyrðin séu uppfyllt.

Við byrjum á því að taka $j=0$ sem svarar til þess að p taki fyrirfram gefin fallgildi,

$$\begin{aligned}
p(a_1) &= \frac{a_1-a_k}{a_1-a_k}q(a_1) + \frac{a_1-a_1}{a_k-a_1}r(a_1) = q(a_1) = y_1^{(0)} \\
p(a_i) &= \frac{a_i-a_k}{a_1-a_k}q(a_i) + \frac{a_i-a_1}{a_k-a_1}r(a_i) = \left(\frac{a_i-a_k}{a_1-a_k} + \frac{a_i-a_1}{a_k-a_1}\right)y_i^{(0)} \\
&= y_i^{(0)}, \qquad \text{fyrir } i = 2, \dots, k-1, \\
p(a_k) &= \frac{a_k-a_k}{a_1-a_k}q(a_k) + \frac{a_k-a_1}{a_k-a_1}r(a_k) = r(a_k) = y_k^{(0)}.
\end{aligned}$$

5.38

5.X Gildin á afleiðunum eru tekin

Rifjum upp margliðuna p:

$$p(x) = \frac{x-x_m}{x_0-x_m}q(x) + \frac{x-x_0}{x_m-x_0}r(x) = \frac{x-a_k}{a_1-a_k}q(x) + \frac{x-a_1}{a_k-a_1}r(x)$$

Afleiður hennar eru

$$p^{(j)}(x) = \frac{(x-a_k)}{(a_1-a_k)}q^{(j)}(x) + \frac{(x-a_1)}{(a_k-a_1)}r^{(j)}(x) + j\frac{\left(q^{(j-1)}(x) - r^{(j-1)}(x)\right)}{a_k-a_1}$$

Ef nú $m_i > 1$ þá er $q^{(j-1)}(a_i) = y^{(j-1)}(a_i) = r^{(j-1)}(a_i)$ fyrir $j = 1, \dots, m_i - 1$ og því kemur alltaf 0 út úr síðasta liðnum ef við setjum inn $x = a_i$, fyrir öll $i = 1, \dots, k$.

Af þessu sést að afleiður p uppfylla skilyrðin

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \qquad \text{fyrir } j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.39

5.X Samantekt

Við höfum því sannað eftirfarandi.

Setning
Ef gefnar eru

- rauntölur $a_1, \dots, a_k$, með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$,
- jákvæðar heiltölur $m_1, \dots, m_k$,
- rauntölur $y_i^{(j)}$, fyrir $j = 0, \dots, m_i - 1$, $i = 1, \dots, k$,

og talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \qquad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.40

5.X Brúunarmargliðan fundin

Ef skilgreindar eru runurnar

$$(x_0,\dots,x_m) = (a_1,\dots,a_1,a_2,\dots,a_2,\dots,a_k,\dots,a_k)$$

þar sem a_1 kemur fyrir m_1 sinnum, a_2 kemur fyrir m_2 sinnum o.s.frv., og

$$(y_0,\dots,y_m) = (y_1^{(0)},\cdot\cdot,y_1^{(m_1-1)},y_2^{(0)},\cdot\cdot,y_2^{(m_2-1)},\cdots,y_k^{(0)},\cdot\cdot,y_k^{(m_k-1)}),$$

þá er Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna $x_0,\dots,x_{m-1}$ gefið með 5.41

5.X Brúunarmargliðan fundin

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + y[x_0,\dots,x_m](x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $y[x_i,\dots,x_{i+j}]$ eru reiknaðir með rakningarformúlu þannig að $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i,\dots,x_{i+j}] = \begin{cases} \dfrac{y[x_{i+1},\dots,x_{i+j}] - y[x_i,\dots,x_{i+j-1}]}{x_{i+j}-x_i}, & \text{ef } x_i \neq x_{i+j}, \\ \dfrac{y_i^{(j)}}{j!}, & \text{ef } x_i = x_{i+j}. \end{cases}$$

5.42

Nálgun á föllum með margliðum og skekkjumat

5.1 Nálgun á föllum með margliðum

Lítum nú aftur á almenna brúunarverkefnið og gefum okkur að tölurnar $y_i^{(j)}$ séu af gerðinni $f^{(j)}(a_i)$ þar sem $f : I \to \mathbb{R}$ er fall á bili I sem inniheldur alla punktana $a_1,\dots,a_k$.

Þá snýst brúunarverkefnið um að finna margliðu af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \quad j = 0,\dots,m_i-1, \quad i = 1,\dots,k.$$

Við vitum að lausn þess er ótvírætt ákvörðuð. Ef við notum Newton form lausnarinnar, þá táknum við mismunakvótana með

$$f[x_i,\dots,x_{i+j}]$$

í stað

$$y[x_i,\dots,x_{i+j}]$$

5.43

5.1 Nálgun á fallgildum

Runurnar $(x_0,\dots,x_m)$ og $(y_0,\dots,y_m)$ eru skilgreindar með

$$(x_0,x_1,\dots,x_m) = (\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{m_i \text{ sinnum}},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{m_2 \text{ sinnum}},\dots,\underbrace{a_k,\dots,a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0,y_1,\dots,y_m) = (f^{(0)}(a_1),\dots,f^{(m_1-1)}(a_1),f^{(0)}(a_2),\dots,f^{(m_2-1)}(a_2)$$
$$\dots,f^{(0)}(a_k),\dots,f^{(m_k-1)}(a_k))$$

5.44

5.1 Skekkjumat

Nú tökum við punkt $x \in I$ og spyrjum um skekkjuna $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Ef x er einn punktana $a_1,\dots,a_k$, þá er $p(x) = f(x)$ og skekkjan þar með 0, svo við skulum gera ráð fyrir að $x \neq a_i$, $i = 1,\dots,k$.

Við bætum nú $(x, f(x))$ sem einföldum brúunarpunkti við alhæfða brúunar verkefnið og fáum sem lausn $q(t)$ á þessu aukna verkefni. Margliðan q er af stigi $\leq m+1$. Við notum táknið t fyrir breytu, því x er frátekið.

Þá uppfyllir $q(t)$ að $q(x) = f(x)$ auk allra skilyrðanna

$$q^{(j)}(a_i) = p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$$

í verkefninu sem við byrjuðum með. 5.45

5.1 Skekkjumat

Við getum þá skrifað (sjá glæru 5.27 til hliðsjónar)

$$\begin{aligned} q(t) &= p(t) + f[x_0, \ldots, x_m, x](t - x_0) \cdots (t - x_m) \\ &= p(t) + f[x_0, \ldots, x_m, x](t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}. \end{aligned}$$

Þegar við gefum breytunni t gildið x, þá fáum við $q(x) = f(x)$ og því fæst formúla fyrir skekkjunni

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \ldots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

Nú ætlum við að finna leið til þess að meta skekkjuliðinn. Til þess þurfum við að gefa okkur að f hafi að minnsta kosti $m + 1$ afleiðu. 5.46

5.1 Tilfellið þegar við höfum aðeins einn punkt

Munum nú að í tilfellinu þegar við erum bara með einn punkt a_1, þá erum við með $m + 1$ skilyrði

$$p^{(j)}(a_1) = f^{(j)}(a_1), \qquad j = 0, \ldots, m$$

og við fáum að p er Taylor-margliða fallsins f í punktinum a_1. Þá er $x_0 = \cdots = x_m = a_1$ og við fáum

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \ldots, x_m, x](x - a_1)^{m+1}$$

Nú segir setning Taylors okkur að til sé punktur ξ milli a_1 og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a_1)^{m+1}$$

Við getum því dregið þá ályktun að í þessu sértilfelli er

$$f[x_0, \ldots, x_m, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Það kemur í ljós að þetta er almenn regla sem gildir fyrir *öll* alhæfðu brúunarverkefnin. 5.47

5.1 Tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

Munum að tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

$$f[a_1, x] = \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} = f'(\xi).$$

5.48

5.1 Margfeldni núllstöðva:

Samfellt fall φ á bili I er sagt hafa núllstöð *af stigi að minnsta kosti* $m > 0$ í punktinum $a \in I$, ef til er samfellt fall ψ á I þannig að

$$\varphi(x) = (x - a)^m \psi(x)$$

Við segjum að φ hafi núllstöð af *margfeldni* m ef $\psi(a) \neq 0$.

Athugið að ef φ er deildanlegt I með samfellda afleiðu, þá er ψ deildanlegt með samfellda afleiðu í $I \setminus \{a\}$ og við höfum

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= m(x - a)^{m-1}\psi(x) + (x - a)^m \psi'(x) \\ &= (x - a)^{m-1}\big(m\psi(x) + (x - a)\psi'(x)\big) \end{aligned}$$

Ef afleiðan ψ' er takmörkuð í grennd um a, þá sjáum við á þessari formúlu að φ' hefur núllstöð af stigi að minnsta kosti $m - 1$ í a. 5.49

5.1 Núllstöðvar taldar með margfeldni

Hugsum okkur nú að við séum með $a_1, \ldots, a_k$ ólíka punkta í bilinu I og að $m_1, \ldots, m_k$ séu jákvæðar náttúrlegar tölur.

Ef fallið φ hefur núllstöðvar í öllum punktunum a_j og núllstöðin a_j er af stigi að minnsta kosti m_j. Við segjum að þá hafi φ *að minnsta kosti*

$$n = m_1 + \cdots + m_k$$

núllstöðvar taldar með margfeldni.

Eins þá segjum við að φ hafi n núllstöðvar í $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *taldar með margfeldni* ef φ hefur núllstöðvar í öllum punktum $a_1, \ldots, a_k$ og samanlögð margfeldni þeirra er n 5.50

5.1 Margfeldni núllstöðva

Hugsum okkur nú að fallið φ hafi núllstöð af stigi m_j í punktunum a_j fyrir öll $j = 1, \dots, k$ og að $n = m_1 + \cdots + m_k$.

Til einföldunar gerum við ráð fyrir að

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

Þá gefur meðalgildissetningin að φ' hefur að minnsta kosti eina núllstöð á sérhverju bilanna

$$]a_1, a_2[, \ ]a_2, a_3[, \ \dots \ ]a_{k-1}, a_k[$$

Þau eru samanlagt $k-1$ talsins. Að auki vitum við að φ' hefur núllstöðvar af stigi að minnsta kosti $m_j - 1$ í punktinum a_j. Ef við leggjum þetta saman, þá fáum við að φ' hefur núllstöðvar af margfeldni að minnsta kosti

$$k - 1 + (m_1 - 1) + \cdots + (m_k - 1) = n - 1$$

í minnsta lokaða bilinu sem inniheldur alla punktana $a_1, \dots, a_k$. 5.51

5.1 Skekkjumat – aftur

Nú ætlum við að sýna fram á að fyrir föll f sem eru $(m+1)$ sinnum samfellt deildanleg að til sé ξ á minnsta bili sem inniheldur $a_1, \dots, a_k$ og x þannig að

$$f[x_0, \dots, x_m, x] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Við skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}$$

og talan λ er valin þannig að $g(x) = 0$.

Nú er $p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$ fyrir $j = 0, \dots, m_i - 1$, þá gefur setning Taylors okkur að g hefur núllstöð af stigi m_i í sérhverjum punktanna a_i. Auk þess hefur g núllstöð í x. Samanlagt eru þetta að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni. 5.52

5.1 Skekkjumat – aftur

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m+1$ núllstöð talda með margfeldni,

g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni

og þannig áfram, þar til við ályktum að

$g^{(m+1)}$ hefur að minnsta kosti eina núllstöð.

Tökum eina slíka og köllum ξ. 5.53

5.1 Skekkjumat – aftur

Munum að

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k} = t^{m+1} + b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$$

Margliðan p hefur stig $\leq m$ svo $p^{(m+1)}(x) = 0$ fyrir öll x

og margliðan w er af stigi $m+1$ með stuðul 1 við hæsta veldið, svo $w^{(m+1)}(t) = (m+1)!$. Við höfum því

$$0 = g^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - \lambda \cdot (m+1)!$$

sem jafngildir því að

$$\lambda = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

5.54

5.1 ... og nú er þetta loksins búið

Við setjum nú inn $t = x$ sem gefur

$$0 = g(x) = f(x) - p(x) - \lambda w(x),$$

og við fáum þar með formúlu fyrir skekkjunni á nálgun á $f(x)$ með alhæfðu brúunarmargliðunni $p(x)$,

$$f(x) - p(x) = \lambda w(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}$$

5.55

5.1 Samantekt

Ef gefið er fall $f : I \to \mathbb{R}$ á bili I, $a_1, \dots, a_k$ í I, með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$, jákvæðar heiltölur $m_1, \dots, m_k$, talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, og gert er ráð fyrir að $f \in C^{m+1}(I)$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \qquad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.56

5.1 Samantekt

Newton-form margliðunnar p er gefið með

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots, x_m](x - x_0)\cdots(x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $f[x_i, \dots, x_{i+j}]$ eru skilgreindir sem $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ út frá gögnunum $y_i^{(j)}$. Fyrir sérhvert x í I er skekkjan $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$ gefin með

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}.$$

Fyrir sérhvert $i = 1, \dots, k$ og $j = 0, \dots, m - i$ þá gildir að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $x_i \dots, x_{i+j}$ þannig að

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!},$$

5.57

5.1 Samantekt

því gildir sérstaklega að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $a_1, \dots, a_k$ og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}.$$

5.58

5.1 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Setjið upp mismunakvótatöflu til þess að reikna út brúunarmargliðu p af stigi ≤ 3 fyrir fallið f, sem hefur tvo tvöfalda brúunarpunkta $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$. Skrifið upp Newton-form margliðunnar p.

b) Reiknið út $p(1.3)$. Notið aðferðarskekkju fyrir margliðubrúun til þess að meta skekkjuna $f(1.3) - p(1.3)$ að ofan og neðan og fáið þannig bil þar sem rétta gildið liggur. Veljið miðpunkt bilsins sem nálgunargildi fyrir $f(1.3)$ og afrúnið gildið miðað við mörk bilsins.

c) Látum nú q vera brúnunarmargliðuna af stigi ≤ 4 sem uppfyllir sömu skilyrði og gefin eru í **a)** að viðbættu því að $a_2 = 2$ á að vera þrefaldur brúunarpunktur. Sýnið hvernig hægt er að ákvarða mismunakvótatöfluna fyrir q með því að stækka töfluna í **a)**. Ákvarðið síðan q og reiknið út $q(1.3)$. 5.59

5.1 Lausn á sýnidæmi **Lausn:**

a) (og **c)**). Til þess að spara pláss skulum við reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í **c)**-lið. Punktarnir $x_0, \dots, x_4$ eru þá $1, 1, 2, 2, 2$ og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \qquad \text{og} \qquad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

Í **a)**-lið eru punktarnir tvöfaldir svo við höfum gefin gildi afleiðunnar $f'(x) = 2x \ln x + x$ í punktunum 1 og 2.

$$f'(1) = f[1,1] = f[x_0, x_1] = 1 \;\; \text{og} \;\; f'(2) = f[2,2] = f[x_2, x_3] = 4\ln 2 + 2.$$

Í **c)**-lið er gildið á 2. afleiðu $f''(x) = 2\ln x + 3$ gefið í punktinum 2. Það gefur okkur

$$f''(2)/2! = f[2,2,2] = f[x_2, x_3, x_4] = \ln 2 + \tfrac{3}{2}.$$

Við setjum þessi gildi inn í mismunakvótatöfluna og fyllum hana út með því að taka mismunakvóta milli allra gilda 5.60

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
0	1	0	1	$4\ln 2 - 1$	$-4\ln 2 + 3$	$5\ln 2 - \frac{7}{2}$
1	1	0	$4\ln 2$	2	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	
2	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$	$\ln 2 + \frac{3}{2}$		
3	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$			
4	2	$4\ln 2$				

Margliðan í (a) lið er

$$p(x) = (x-1) + (4\ln 2 - 1)(x-1)^2 + (-4\ln 2 + 3)(x-1)^2(x-2).$$

en í (c)-lið er hún

$$q(x) = p(x) + (5\ln 2 - \tfrac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

5.61

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald **b)**

Við stingum gildinu $x = 1.3$ inn í margliðuna og fáum $p(1.3) = 0.445206074$. Skekkjan er

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)^2$$

þar sem ξ er einhver punktur á bilinu $[1, 2]$.

Við þurfum því að meta fjórðu afleiðuna,

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad f'(x) = 2x\ln x + x, \quad f''(x) = 2\ln x + 3,$$
$$f'''(x) = 2/x, \quad f^{(4)}(x) = -2/x^2.$$

Ef $x \in [1, 2]$, þá höfum við matið $-2 \le f^{(4)}(x) \le -\frac{1}{2}$. 5.62

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

Af ójöfnunum $-2 \le f^{(4)}(x) \le -\frac{1}{2}$ leiðir síðan að

$$\alpha = \frac{-2 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} \le f(1.3) - p(1.3) \le \frac{-0.5 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} = \beta.$$

Við reiknum út úr báðum brotunum

$$\alpha = -0.003675 \qquad \text{og} \qquad \beta = -0.00091875.$$

þar með er $f(1.3)$ á bilinu milli $p(1.3) + \alpha = 0.441531$ og $p(1.3) + \beta = 0.444287$.

Nálgunargildi okkar á að vera miðpunktur þessa bils og algildi skekkjunnar verður þá hálf billengdin. Það færir okkur nálgunina $f(1.3) \approx 0.442909$ og skekkjuna ± 0.0014. Réttur afrúningur er $f(1.3) = 0.44$. 5.63

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

Við eigum aðeins eftir að reikna út gildi margliðunnar q í punktinum 1.3. Út úr mismunakvótatöflunni fáum við

$$q(x) = p(x) + (5\ln 2 - \tfrac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

sem gefur okkur gildið

$$q(1.3) = 0.445206074 - 0.001511046 = 0.4436950278$$

Til samanburðar höfum við rétt gildi

$$f(1.3) = 0.443395606950060\ldots.$$

5.64

5.5 Splæsibrúun

5.5 Splæsibrúun

Látum $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i.

Ef punktarnir liggja á grafi fallsins f og nota á margliðuna til þess að nálga fallgildi f, þá getur það verið ýmsum erfiðleikum bundið þegar stig hennar stækkar. Þá getur til dæmis komið fram óstöðugleiki í útreikningum þannig að örlítil frávik í x geta leitt til mikilla frávika í $p(x)$.

Skoðið mynd á bls. 387 í kennslubók. 5.65

5.5 Almennt um splæsibrúun:

Splæsibrúun er leið út úr þessum vandræðum.

Með henni er fundið samfellt fall S sem brúar gefnu punktana, $S(t_i) = y_i$, og er þannig að einskorðun þess við hlutbilin $[t_i, t_{i+1}]$ er gefið með margliðu af stigi $\leq m$, þar sem m er fyrirfram gefin tala.

Algengast er að nota $m = 3$. 5.66

5.5 Fyrsta stigs splæsibrúun:

Ef stigið m er 1, þá erum við einfaldlega að draga línustrik milli punktanna og sjáum í hendi okkar að lausnin er

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(x - t_0) + y_0, & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(x - t_1) + y_1, & x \in [t_1, t_2], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(x - t_{n-1}) + y_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

Þessi aðferð er ekki mikið notuð því hún er ósannfærandi fyrir deildanleg föll. 5.67

5.5 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskorðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Við ætlum að leiða út jöfnur fyrir stuðlunum a_i, b_i, c_i og d_i; við krefjumst þess að:

(i) S verði samfellt tvisvar sinnum deildanlegt á öllu bilinu $[a, b]$
(ii) S taki gildin y_i í punktunum t_i

Setjum til einföldunar $h_i = t_{i+1} - t_i$ fyrir $i = 0, \ldots, n-1$.

Þá má þýða þessi skilyrði yfir í jöfnurnar 5.68

5.5 Jöfnur fyrir stuðlunum

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Skilyrðin tvö þýðast nú yfir í jöfnuhneppi:

$$\begin{aligned}
a_i &= & S_i(t_i) &= & y_i, \quad (1)\\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= & S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) &= & a_{i+1}, \quad (2)\\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= & S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) &= & b_{i+1}, \quad (3)\\
2c_i + 6d_i h_i &= & S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) &= & 2c_{i+1}, \quad (4)
\end{aligned}$$

Í (1) höfum við $i = 0, \dots, n$ og í (2)-(4) höfum við $i = 0, \dots, n-2$.

Samtals: $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ línulegar jöfnur til þess að ákvarða $4n$ óþekktar stærðir.

Það er því ljóst að okkur vantar tvö skilyrði til þess að geta fengið ótvírætt ákvarðaða lausn. 5.69

5.5 Við verðum að moða úr þessu!!

$$\begin{aligned}
a_i &= & S_i(t_i) &= & y_i, \quad (1)\\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= & S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) &= & a_{i+1}, \quad (2)\\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= & S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) &= & b_{i+1}, \quad (3)\\
2c_i + 6d_i h_i &= & S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) &= & 2c_{i+1}, \quad (4)
\end{aligned}$$

Fyrstu jöfnurnar gefa strax gildi a_i og (4) gefur að

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Ef við setjum þetta inn í (2) og (3) fæst 5.70

5.5 Meira moð

$$\begin{aligned}
a_{i+1} &= a_i + b_i h_i + \frac{c_{i+1} + c_i}{3} h_i^2, \quad i = 0, \dots, n-2\\
b_{i+1} &= b_i + (c_{i+1} + c_i) h_i, \quad i = 0, \dots, n-2
\end{aligned}$$

Þegar við leysum fyrri jöfnuna fyrir b_i fæst

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3} h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

og ef við setjum þetta inn í seinni jöfnuna fæst á endanum að

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

5.71

5.5 Jöfnuhneppi

$$\begin{bmatrix} .?. & .?. & & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & .?. & .?. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} .?. \\ \frac{a_2-a_1}{h_1} - \frac{a_1-a_0}{h_0} \\ \frac{a_3-a_2}{h_2} - \frac{a_2-a_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ .?. \end{bmatrix}$$

5.72

5.5 Enn vantar í þetta....

... einhver skilyrði á c_0 og c_n.

Þegar þau hafa verið sett, þá getum við leyst þetta hneppi, reiknað svo gildi b_i og d_i og þá höfum við fundið splæsifallið okkar.

Það eru til margar leiðir til að ákvarða c_0 og c_n, en fjórar eru algengastar. 5.73

5.5 Tilfelli 1: Ekki-hnúts endaskilyrði

Ef við höfum engar upplýsingar um fallið f í t_1 og t_{n-1} liggur beint við að krefjast þess að S''' sé samfellt þar, sem þýðir að $d_0 = d_1$ og $d_{n-2} = d_{n-1}$. Með að nota jöfnurnar fyrir d_i má skrifa þetta sem

$$\begin{aligned} h_1 c_0 - (h_0 + h_1)c_1 + h_0 c_2 &= 0 \\ h_{n-1} c_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} + h_{n-2} c_n &= 0 \end{aligned}$$

og þessar jöfnur, ásamt hinum, má leysa til að ákvarða c_i-in. 5.74

5.5 Tilfelli 2: Þvinguð endaskilyrði

Ef hallatala fallsins f er þekkt í endapunktum bilsins er eðlilegt að nota þær upplýsingar við ákvörðun splæsifallsins. Gerum því ráð fyrir að $f'(t_0) = A$ og $f'(t_n) = B$. Skilyrðið $S'(t_0) = A$ gefur þá að

$$A = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{2c_0 + c_1}{3} h_0,$$

eða

$$2h_0 c_0 + h_0 c_1 = 3\left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - A\right)$$

og $S'(t_n) = B$ gefur

$$B = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að nota formúlurnar fyrir b_{n-1} og d_{n-1} fæst

$$c_{n-1}h_{n-1} + 2c_n h_{n-1} = 3\left(B - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

5.75

5.5 Tilfelli 3: Náttúrleg endaskilyrði

Einfaldasta lausnin er að setja $c_0 = c_n = 0$, en það jafngildir því að $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$. 5.76

5.5 Tilfelli 4: Lotubundið endaskilyrði

Hugsum okkur að við viljum framlengja S í tvisvar samfellt deildanlegt $(b-a)$-lotubundið fall á $\mathbb{R}$. Það setur skilyrðin

$$y_0 = S(t_0) = S_(t_n) = y_n, \quad S'(t_0) = S'(t_n), \quad \text{og} \quad S''(t_0) = S''(t_n)$$

Fljótséð er að $S''(t_0) = S''(t_n)$ þýðir að $c_0 = c_n$, eða

$$c_0 - c_n = 0.$$

Þetta er fyrri jafnan sem við þurfum. 5.77

5.5 Tilfelli 4: Lotubundið endaskilyrði – frh.

Nú gefur $S'(t_0) = S'(t_n)$ að

$$b_0 = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að setja inn formúlurnar fyrir b_0, b_{n-1}, d_{n-1} og nota að $c_0 = c_n$ fæst jafnan

$$h_0c_1 + 2h_{n-1}c_{n-1} + (2h_0 + 2h_{n-1})c_n = 3\left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

5.78

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

(i) Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

$$0 = t_0 < t_1 = 1 < \cdots < t_n = n.$$

(ii) Ákveðið er hvaða endaskilyrði eiga við.

(iii) Búin eru til tvö splæsiföll $R(t)$ fyrir punktasafnið $x_0, \ldots, x_n$ og $S(t)$ fyrir punktasafnið $y_0, \ldots, y_n$.

(iv) Stikaferillinn $[a, b] \ni t \mapsto (R(t), S(t))$ er síðan teiknaður, en hann uppfyllir $(R(t_j), S(t_j)) = (x_j, y_j)$, $j = 0, \ldots, n$.

5.79

5.8 Aðferð minnstu fervika

5.8 Aðferð minnstu fervika

Látum $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ vera safn punkta í plani með $x_j \in [a, b]$ fyrir öll j og látum $f_1, \ldots, f_n$ vera raungild föll á $[a, b]$.

Við viljum finna það fall f af gerðinni

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

með stuðla $c_1, \ldots, c_n$ þannig að punktarnir $(x_j, f(x_j))$ nálgi gefna punktasafnið sem best og þá er átt við að ferningssummuna

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - f(x_i)\big)^2$$

verði eins lítil og mögulegt er. 5.80

5.8 Jafna bestu línu

Flestir hafa heyrt talað um bestu línu gegnum punktasafn, hún fæst með að taka hér $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$, en lítið mál er að finna einnig besta fleygboga, bestu margliðu af fyrirfram ákveðnu stigi eða einhverja aðra samantekt falla gegnum punktasafnið. 5.81

5.8 Smávegis línuleg algebra

Til þess að finna þessi gildi á stuðlunum c_i er heppilegt að notfæra sér nokkrar niðurstöður úr línulegri algebru. Fyrir gefin gildi á $c_1, \dots, c_n$ setjum við

$$b_i = f(x_i) = c_1 f(x_i) + \cdots + f_n(x_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

og skilgreinum síðan dálkvigrana

$$b = [b_1, \dots, b_m]^T, \qquad y = [y_1, \dots, y_m]^T, \quad \text{og} \quad c = [c_1, \dots, c_n]^T,$$

Þá er $Ac = b$, þar sem A er $m \times n$ fylkið

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{bmatrix}.$$

5.82

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Verkefnið snýst nú um að finna þann vigur $c \in \mathbb{R}^n$ sem lágmarkar

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - b_i\big)^2 = \|y - b\|^2 = \|y - Ac\|^2$$

þar sem $\| \cdot \|$ táknar evklíðska normið (staðalinn) á $\mathbb{R}^m$.

Vigrar af gerðinni $b = Ac$ spanna dálkrúm fylkisins A og þá má skrifa sem línulegar samantektir af gerðinni

$$b = c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n$$

þar sem A_j er dálkur númer j. 5.83

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Verkefnið snýst um að finna þann vigur í dálkrúminu sem næstur er y. Vigurinn b er næstur y ef og aðeins ef $y - b$ er hornréttur á alla vigra dálkrúmsins.

Þessi skilyrði má fá með innfeldi

$$A_j \cdot (y - b) = 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

Með fylkjarithætti fæst ein jafna

$$A^T(y - b) = 0.$$

Setjum nú inn $b = Ac$. Þá ákvarðast c af hneppinu

$$A^T(y - Ac) = 0$$

sem jafngildir

$$(A^T A)c = A^T y$$

5.84

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Við þurfum því aðeins að leysa þetta jöfnuhneppi

$$(A^T A)c = A^T y$$

fyrir c til að finna stuðlana okkar. Ef fylkið $A^T A$ hefur andhverfu, þá fæst alltaf ótvírætt ákvörðuð lausn c.

Ef fylkið $A^T A$ hefur ekki andhverfu eða að það hefur ákveðu sem er mjög nálægt 0, þá þurfum við að beita flóknari brögðum. Við komum að því síðar. 5.85

5.8 Jafna bestu línu

Algengt er að menn vilji finna beina línu sem best fellur að punktasafninu $(x_1, y_1,) \dots, (x_m, y_m)$. Þá er $n = 2$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$.

Fylkið er þá

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}.$$

og þar með

$$A^T A = \begin{bmatrix} m & \sum_{j=1}^m x_j \\ \sum_{j=1}^m x_j & \sum_{j=1}^m x_j^2 \end{bmatrix}. \qquad \text{og} \qquad A^T y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m y_j \\ \sum_{j=1}^m x_j y_j \end{bmatrix}.$$

5.86

5.8 Jafna bestu annars stigs margliðu

Ef við viljum finna bestu annars stigs margliðu gegnum punktasafnið, þá er $n = 3$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

Þetta val gefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}.$$

Fylkið $A^T A$ er þá 3×3 og vigurinn $A^T y$ er dálkvigur með 3 hnit. 5.87

5.8 Nokkur forrit

Í skránni `adferd_minnstu_fervika.m` á heimasvæði okkar á Uglu finnið þið forrit til þess að finna bestu margliðu af hvaða stigi sem er gegnum gefið punktasafn.

Það er hægur vandi að breyta þessu forriti ef þið viljið vinna með aðra fallagrunna en margliður. 5.88

5.8 Sýnidæmi: besta annars stigs margliða

Gefin eru mæligildin

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.7	-0.5	-1.7	-1.9	-1.5	0.2	2.3

Beitið aðferð minnstu fervika til þess að finna þá annars stigs margliðu sem best fellur að þessum gögnum Teiknið upp gögnin og graf marliðunnar.

Lausn: Við leitum hér að þremur tölum c_1, c_2 og c_3 þannig að annars stigs margliðan $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$ falli sem best að gögnunum þar sem þar sem grunnföllin þrjú eru $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$. 5.89

5.8 Sýnidæmi: framhald

Í þessu dæmi er fylkið A gefið með

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix}$$

Nú látum við `matlab` um afganginn 5.90

5.8 Sýnidæmi: leyst með Matlab

```
%  Matlab forrit sem teiknar upp bestu margliðunálgun á gefnum gögnum
x=[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6]
y=[2.7; -0.5; -1.7; -1.9; -1.5; 0.2; 2.3 ]
m=length(x);

% Við leitum að bestu margliðu af stigi 2 eða lægri
% og því eru  grunnföllin eru 3 talsins.
n=3;

% Stuðlafylkið er A=(a_{ij}), a_{ij}=x_i^{j-1}
A(1:m,1)=ones(m,1);
A(1:m,2)=x;
for j=3:n
    A(1:m,j)=A(1:m,j-1).*x;
end
% Reiknum úr úr normaljöfnuhneppinu A^TAc=A^Ty:
c=(A'*A)\(A'*y);
```

5.91

5.8 Sýnidæmi: leyst með Matlab frh.

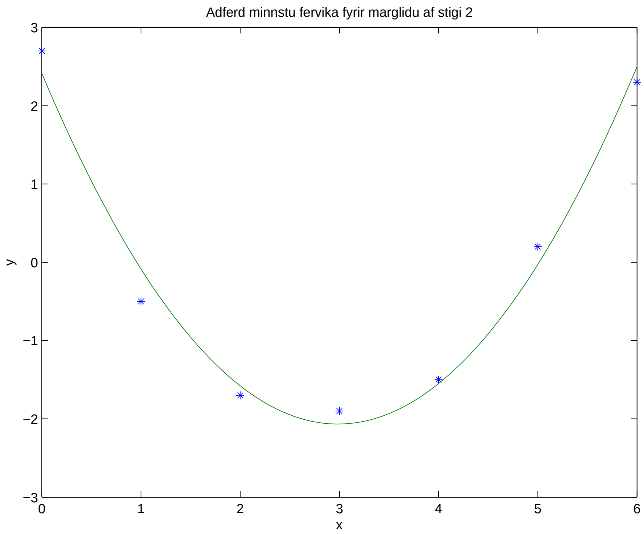
```
% Teikning undirbúin
N=100;
X=linspace(min(x),max(x),N);

% Hliðrun í reikniriti horners er 0
%
hlidrun=zeros(n,1);
for j=1:N
    Y(j)=horner(c, hlidrun, X(j));
end
figure
plot(x,y,'*',X,Y)
xlabel('x'), ylabel('y')
title('Adferd minnstu fervika fyrir marglidu af stigi 2')
print
```

5.92

5.8 Besta annars stigs margliða

Hér kemur myndin sem beðið var um:



5.93

Kafli 5: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er reiknirit Horners og hver er tilgangur þess?
2. Hvernig er brúunarverkefnið fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$?
3. Rökstyðjið að einungis sé til ein brúunarmargliða af stigi $\leq m$ fyrir brúunarpunktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$
4. Hvernig er Lagrange form brúunarmargliðu og hvernig eru Lagrange-margliður fyrir gefið punktasafn skilgreindar?
5. Hvernig er Newton-form brúunarmargliðu fyrir fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ þar sem $x_i \neq x_j$?
6. Hvernig eru mismunakvótarnir $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ skilgreindir?
7. Hvað er alhæft brúunarverkefni?
8. Hvernig er margfeldni brúunarpunkts í alhæfðu brúunarverkefni skilgreind?
9. Rökstyðjið að alhæfða brúunarverkefnið með $m+1$ skilyrði hafi ótvírætt ákvarðaða lausn af stigi $\leq m$.
10. Hvernig er skekkjuformúlan í nálgun á falli $f(x)$ með alhæfðri brúunarmargliðu $p(x)$ sett fram með mismunakvótum?

5.94

Kafli 5: Fræðilegar spurningar

11. Hvernig er skekkjuformúlan í nálgun á falli $f(x)$ með alhæfðri brúunarmargliðu $p(x)$ sett fram með $m + 1$ afleiðu af f?
12. Hvaða skilyrði þarf þriðja stigs splæsifall að uppfylla og hvað vantar mörg skilyrði upp á að þau gefi ótvírætt ákvarðað fall?
13. Hvernig eru ekki-hnúts endaskilyrði á splæsifalli?
14. Hvernig eru þvinguð endaskilyrði á splæsifalli?
15. Hvernig eru náttúrleg endaskilyrði á splæsifalli?
16. Hvernig eru lotubundin endaskilyrði á splæsifalli?
17. Lýsið því hvernig splæsiferlar eru notaðir til þess að teikna ferla í plani.
18. Lýsið aðferð minnstu fervika.
19. Hvernig er jöfnuhneppið sem þarf að leysa í aðferð minnstu fervika?
21. Hvernig er jafna bestu línu gegnum punktasafn fundin?
22. Hvernig er jafna besta fleygboga gegnum punktasafn fundin?

5.95

Kafli 6: Töluleg diffrun og heildun

Töluleg greining, STÆ405G, 21., 26. og 28. febrúar, 5., og 7. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

6.1

Yfirlit

Kafli 6: Töluleg diffrun og heildun

Kafli	Viðfangsefni	Bls.	Glærur
6.0-6.1	Inngangur	429-437	3-4
6.2	Töluleg deildun	438-445	5-19
6.3	Richardson-útgiskun	447-452	20-31
6.4-6.5	Töluleg heildun	455-478	32-56
6.7	Romberg-heildun	496-502	57-64

6.2

6.0 Inngangur

6.0 Töluleg deildun og heildun

Deildun og heildun eru meginaðgerðir stærðfræðigreiningarinnar.
Þess vegna er nauðsynlegt að geta nálgað

$$f'(a), f''(a), f'''(a), \dots \qquad \text{og} \qquad \int_a^b f(x)\,dx,$$

þar sem f er fall sem skilgreint er á bili I sem inniheldur a og b. 6.3

6.0 Meginhugmynd í öllum nálgunaraðferðunum

Látum p vera margliðu sem nálgar f, og látum $r(x) = f(x) - p(x)$ tákna skekkjuna í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Þá er

$$f'(x) = p'(x) + r'(x), \quad f''(x) = p''(x) + r''(x), \dots$$

og

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx.$$

Nú þurfum við að gera tvennt:

(i) Finna heppilegar nálgunarmargliður og reikna út

$$p'(a),\ p''(a), \dots, \qquad \int_a^b p(x)\,dx$$

(ii) Meta skekkjurnar

$$r'(a),\ r''(a), \dots \int_a^b r(x)\,dx$$

Byrjum á að leiða út nokkrar nálgunarformúlur með skekkjumati. 6.4

6.2 Töluleg diffrun

6.2 Töluleg deildun

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall á bili $I \subset \mathbb{R}$ og a vera punkt í I. Afleiða f í punktinum a er skilgreind með

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ef markgildið er til. Við skrifum því oft

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Þessi nálgun er kölluð *frammismunur* því oftast hugsar maður sér að $h > 0$ og þá er $a + h$ lítið skref áfram frá a.

Við þurfum skekkjumat fyrir þessa formúlu ef við eigum að geta notað hana. 6.5

6.2 Frammismunur

Við fáum mat á skekkjuna í nálguninni með að skoða Taylor-margliðu f í a. Samkvæmt setningu Taylors er til ξ á milli a og $a + h$ þannig að

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(\xi)h^2.$$

Þá fæst að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f[a, a+h]$$

er

$$e = f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{2} f''(\xi)h$$

Með öðrum orðum

$$\min_{t \in [0,h]} -\frac{1}{2} f''(t)h \leq e \leq \max_{t \in [0,h]} -\frac{1}{2} f''(t)h.$$

Við sjáum því að $e = O(h)$ þegar $h \to 0$. 6.6

6.2 Bakmismunur

Við getum sett $a - h$ í stað $a + h$ í skilgreininguna á afleiðu. Þá fæst svokallaður *bakmismunur*

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

og ljóst er að sama skekkjumat gengur fyrir þessa nálgun og fyrir nálgun með frammismun. 6.7

6.2 Miðsettur mismunakvóti

Lítum nú á þriðja stigs Taylor nálgun

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2} f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6} f'''(\alpha)h^3, \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2} f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6} f'''(\beta)h^3, \end{aligned}$$

þar sem α er á milli a og $a + h$ og β er á milli a og $a - h$.

Tökum nú mismuninn og fáum

$$f(a+h) - f(a-h) = f'(a) \cdot 2h + \tfrac{1}{6}\big(f'''(\alpha) + f'''(\beta)\big)h^3$$

Ef f''' er samfellt fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er ξ á milli α og β þannig að $f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\alpha) + f'''(\beta))$ 6.8

6.2 Miðsettur mismunakvóti

Niðurstaðan verður

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \tfrac{1}{6} f'''(\xi)h^2.$$

Þannig að skekkjan er

$$e = -\frac{1}{6} f'''(\xi)h^2,$$

og jafnframt er $e = O(h^2)$ þegar $h \to 0$. 6.9

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Við getum útfært þessa sömu hugmynd til þess að reikna út aðra afleiðu, en þá byrjum við með fjórða stigs Taylor-nálgun

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\alpha)h^4,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\beta)h^4,$$

þar sem α er á milli a og $a+h$ og β er á milli a og $a-h$.

Nú leggjum við saman og fáum

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + \tfrac{1}{24}\big(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta)\big)h^4.$$

Nú þurfum við að gefa okkur að $f^{(4)}$ sé samfellt fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er ξ á milli α og β þannig að $f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta))$. 6.10

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Niðustaðan verður

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

Með Taylor-margliðum má leiða út fleiri nálgunarformúlur fyrir afleiður.

Við ætlum ekki að halda lengra í þessa átt heldur snúa okkur að almennu aðferðinni. 6.11

6.2 Almenn aðferð til að nálga afleiður

Ef $x_0, \ldots, x_n$ eru punktar í I (hugsanlega með endurtekningum) og p er margliðan sem brúar f í þeim, þá er

$$f(x) = p(x) + r(x),$$

þar sem skekkjuliðurinn $r(x)$ er gefinn með formúlunni

$$r(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Ef við tökum $p'(a)$ sem nálgun á $f'(a)$ er skekkjan

$$r'(a) = f'(a) - p'(a).$$

6.12

6.2 Skekkjumat

Munið að formúlan fyrir afleiðu af margfeldi margra þátta er

$$\begin{aligned}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_m)'(a)& \\ &= \varphi_1'(a)\varphi_2(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a) + \varphi_1(a)\varphi_2'(a)\varphi_3(a)\cdots\varphi_m(a) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \varphi_1(a)\varphi_2(a)\cdots\varphi_{m-1}(a)\varphi_m'(a)\end{aligned}$$

Horfum nú á skekkjuliðinn $r(x)$. Hann er svona margfeldi með $\varphi_1(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x]$, $\varphi_2(x) = x - x_0$, $\varphi_3(x) = x - x_1$ o.s.frv.

Athugum nú að ef a er einn af gefnu punktunum x_k, þá er $\varphi_{k+2}(x) = (x - x_k)$ sem gefur $\varphi_{k+2}(x_k) = 0$ og $\varphi_{k+2}'(x_k) = 1$.

Þetta segir okkur að ef við tökum $a = x_k$, þá eru allir liðirnir í summunni í hægri hliðinni 0 nema einn, þ.e. við sitjum eftir með þann sem inniheldur φ_{k+2}'. 6.13

6.2 Skekkjumat frh.

Niðurstaðan verður því að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $p'(a)$ er

$$\begin{aligned} f'(a) - p'(a) = r'(a) &= f[x_0, \dots, x_n, x_k] \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} (x_k - x_j) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} (a - x_j) \end{aligned}$$

þar sem $a = x_k$.

Hér notuðum við skekkjumatið fyrir Newton aðferðina (glæra 5.56) sem segir að til er ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $x_0, \dots, x_n, x_k$ sem uppfyllir

$$f[x_0, \dots, x_n, x_k] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

6.14

6.2 Frammismunur

Nálgum f með fyrsta stigs brúunarmargliðunni gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ (þ.e. $x_0 = a$ og $x_1 = a+h$),

$$f(x) = f[a] + f[a, a+h](x-a) + f[a, a+h, x](x-a)(x-a-h)$$

Af þessu leiðir formúlan sem við vorum áður komin með

$$f'(a) = f[a, a+h] + f[a, a+h, a](a-a-h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \tfrac{1}{2} f''(\xi) h$$

Þar sem ξ er á milli a og $a+h$ og uppfyllir að $f[a, a+h, a] = f[a, a, a+h] = \frac{1}{2} f''(\xi)$. Hér erum við að notafæra okkur aftur skekkjumatið sem við sönnuðum í kaflanum um brúunarmargliður. 6.15

6.2 Miðsettur mismunakvóti

Tökum þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og a. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) = f[a-h] &+ f[a-h, a+h](x-a+h) \\ &+ f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ &+ f[a-h, a+h, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \end{aligned}$$

Athugum að afleiðan af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er 0 í punktinum a og því er

$$\begin{aligned} f'(a) &= f[a-h, a+h] + f[a-h, a+h, a, a](-h^2) \\ &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \tfrac{1}{6} f'''(\xi) h^2 \end{aligned}$$

Hér nýttum við okkur að til er ξ á milli $a-h$ og $a+h$ þannig að $f[a-h, a+h, a, a] = \frac{1}{6} f'''(\xi)$. 6.16

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Áfram heldur leikurinn. Nú skulum við leiða aftur út formúluna fyrir nálgun á $f''(a)$ með miðsettum mismunakvóta

Þá tökum við þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og a með a tvöfaldan. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) = f[a-h] &+ f[a-h, a+h](x-a+h) \\ &+ f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ &+ f[a-h, a+h, a, a](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \\ &+ f[a-h, a+h, a, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a)^2 \end{aligned}$$

Gætum þess að halda liðnum $(x-a)$. Þá fáum við

$$\begin{aligned} f(x) = f[a-h] &+ f[a-h,a+h](x-a+h) \\ &+ f[a-h,a+h,a]\big((x-a)^2-h^2)\big) \\ &+ f[a-h,a+h,a,a]\big((x-a)^3-h^2(x-a))\big) \\ &+ f[a-h,a+h,a,a,x]\big((x-a)^4-h^2(x-a)^2)\big) \end{aligned}$$

6.17

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu, frh.

Nú þurfum við að reikna aðra afleiðu í punktinum a. Athugum að önnur afleiða af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er fastafallið 2, önnur afleiða af þriðja stigs liðnum

$$x \mapsto (x-a)^3 - h^2(x-a)$$

er 0 í punktinum a og önnur afleiða af fjórða stigs liðnum

$$x \mapsto (x-a)^4 - h^2(x-a)^2$$

er fastafallið $-2h^2$. 6.18

6.2 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu, frh.

Við höfum því

$$f''(a) = 2f[a-h,a+h,a] + f[a-h,a+h,a,a,a](-2h^2)$$

Nú er til punktur ξ á minnsta bili sem inniheldur $a-h$, $a+h$ og a þannig að $f[a-h,a+h,a,a,a] = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)$.

Við þurfum að reikna út fyrri mismunakvótann

$$\begin{aligned} f[a-h,a+h,a] = f[a-h,a,a+h] &= \frac{f[a,a+h]-f[a-h,a]}{2h} \\ &= \frac{1}{2h}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right) \\ &= \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{2h^2} \end{aligned}$$

Við höfum því leitt aftur út formúluna

$$f''(a) = \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

6.19

6.3 Richardson-útgiskun

6.3 Richardson útgiskun

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin h er lítil eru tölurnar $f(a+h), f(a), f(a-h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Því er ekki hægt að búast við að fá alltaf betri nálgun á $f'(a)$ við að minnka skrefalengdina h.

Leiðin er Richardson útgiskun (e. extrapolation), sem er aðferð til að bæta nálganir.

Til eru mjög almennar útgáfur þessarar aðferðar en við munum aðeins skoða þau sértilfelli sem nýtast okkur mest. 6.20

6.3 Útleiðsla á miðsettum mismunakvóta

Við skulum byrja á að að leiða aftur út formúluna fyrir miðsettann mismunakvóta til að fá betri upplýsingar um skekkjuliðinn. Fyrir fall f sem er nógu oft deildanlegt má beita Taylor til að skrifa

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

Ef við drögum seinni jöfnuna frá þeirri fyrri fæst

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + 2\frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \ldots + 2\frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

svo ef við einangrum $f'(a)$ sjáum við að

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_1(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad \text{og} \quad a_k = -\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}, \quad k = 2, 4, \ldots, 2n.$$

6.21

6.3 Helmingun á skrefinu

Hér er minnsta veldi í skekkjuliðnum h^2, svo nálgunin $f'(a) \approx R_1(h)$ er $O(h^2)$, eins og við höfum reyndar séð áður. Helmingum nú skrefalengdina h, þá fæst

$$f'(a) = R_1(h/2) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

6.22

6.3 Helmingun

Nú berum við saman þessi tvö skref:

$$f'(a) = R_1(h/2) + \tfrac{1}{4}a_2h^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}),$$
$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Margföldum efri jöfnuna með 4 og drögum þá síðari frá. Þá stendur eftir

$$\begin{aligned}3f'(a) = 4R_1(h/2) - R_1(h) + a_4\left(\frac{4}{2^4} - 1\right)h^4 \\ + a_6\left(\frac{4}{2^6} - 1\right)h^6 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{4}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1})\end{aligned}$$

6.23

6.3 Fjórða stigs nálgun

Nú erum við komin með nýja formúlu:

$$f'(a) = R_2(h) + b_4h^4 + b_6h^6 + \ldots + b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_2(h) = \frac{4R_1(h/2) - R_1(h)}{3} \quad \text{og} \quad b_k = \frac{a_k}{3} \cdot \left(\frac{4}{2^k} - 1\right), \; k = 4, 6, \ldots, 2n.$$

Ef við berum þetta saman við jöfnuna sem við byrjuðum með

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þá sjáum við að minnsta veldi í skekkjuliðnum er h^4, svo nálgunin $f'(a) \approx R_2(h)$ uppfyllir

$$f'(a) - R_2(h) = O(h^4)$$

og er því betri nálgun en áður.

Þetta ferli heitir *Richardson útgiskun.* 6.24

6.3 Hægt er að halda áfram útgiskun

Næsta takmark er að eyða liðnum b_4h^4 úr þessari formúlu með því að líta á

$$f'(a) = R_2(h/2) + b_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + b_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Síðan stillum við þessari jöfnu upp með þeirri síðari

$$f'(a) = R_2(h/2) + \tfrac{1}{16}b_4h^4 + \tfrac{1}{64}b_6h^6 + \ldots + \tfrac{1}{2^{2n}}b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$
$$f'(a) = R_2(h) + b_4h^4 + b_6h^6 + \ldots + b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Margföldum fyrri jöfnuna með 16 og drögum þá síðari frá

$$\begin{aligned}15f'(a) &= 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6\\ &\quad + b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}).\end{aligned}$$

6.25

6.3 Sjötta stigs skekkja

$$\begin{aligned}15f'(a) &= 16R_2(h/2) - R_2(h) + b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6\\ &\quad + b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}).\end{aligned}$$

Því er

$$f'(a) = R_3(h) + c_6h^6 + c_8h^8 \ldots + c_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_3(h) = \frac{16R_2(h/2) - R_2(h)}{15}, \quad \text{og} \quad c_k = \frac{b_k}{15}\cdot\left(\frac{16}{2^k} - 1\right), \quad k = 6, 8, \ldots, 2n.$$

Nýja nálgunin uppfyllir

$$f'(a) - R_3(h) = O(h^6)$$

og er því enn betri en áður, en við þurfum líka að reikna út $R_1(h/4)$ til að reikna $R_2(h/2)$. 6.26

6.3 Almenn rakningarformúla

Richardson-útgiskunin heldur áfram og út kemur

$$R_{i+1}(h) = \frac{4^iR_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1} = R_i(h/2) + \frac{R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1}$$

fyrir $(i+1)$-tu Richardson útgiskun og $R_{i+1}(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) - R_{i+1}(h) = O(h^{2i+2}),$$

en á móti kemur að til að reikna út $R_{i+1}(h)$ þurfum við að hafa reiknað út tölurnar

$R_1(h)$, $R_1(h/2)$, …, $R_1(h/2^i)$ auk $R_2(h)$, $R_2(h/2)$, …, $R_2(h/2^{i-1})$ og svo framvegis að $\vdots$ $R_i(h)$ og $R_i(h/2)$.

Eins og áður sagði fara styttingarskekkjur á endanum að segja til sín í útreikningum á $R_1(h)$, svo einhver takmörk eru fyrir hversu margar Richardson útgiskanir er hægt að framkvæma. 6.27

6.3 Reiknirit

Útreikningarnir að ofan eru yfirleitt settir fram í töflu

$$\begin{array}{lllll} D(1,1) & & & & \\ D(2,1) & D(2,2) & & & \\ D(3,1) & D(3,2) & D(3,3) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D(n,1) & D(n,2) & D(n,3) & \dots & D(n,n) \end{array}$$

þar sem $D(i,j) = R_j(h/2^{i-j})$ og þar með

$$D(i,j) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h/2^{i-1}) - f(a-h/2^{i-1})}{2 \cdot h/2^{i-1}}, & j = 1 \\ D(i,j-1) + \dfrac{D(i,j-1) - D(i-1,j-1)}{4^{j-1}-1}, & j > 1 \end{cases}$$

sem gerir auðvelt að forrita Richardson útgiskun. 6.28

6.3 Skekkjumat

Finnum nú eftirámat fyrir $D(i,j)$ með stærðunum $D(i,j-1)$ og $D(i-1,j-1)$. Hér á eftir er $R_j(h/2)$ í hlutverki $D(i,j-1)$ og $R_i(h)$ í hlutverki $D(i-1,j-1)$ (h er helmingað þegar við förum niður um eina línu).

Munum að $R_i(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) = R_j(h) + Kh^{2j} + O(h^{2j+1})$$

fyrir eitthvert K í $\mathbb{R}$ og að

$$f'(a) = R_j(h/2) + K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1})$$

Ef við tökum mismun á hægri og vinstri hliðum þessara jafna, þá fáum við

$$0 = R_j(h) - R_j(h/2) + K\left(1 - \frac{1}{2^{2j}}\right)h^{2j} + O(h^{2j+1})$$

og ef við einangrum K fæst

$$K = -\frac{4^j}{h^{2j}} \cdot \frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}).$$

6.29

6.3 Útleiðsla á fyrirframmati

Þá er skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $R_j(h/2)$ jöfn

$$\begin{aligned} e_j(h/2) &= f'(a) - R_j(h/2) \\ &= K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1}) \\ &= -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}) \\ &\approx -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1}. \end{aligned}$$

Þar sem $R_j(h/2)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2j+1})$, en $R_{j+1}(h)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2i+3})$ getum við slegið á $e_{j+1}(h)$ með $e_j(h/2)$. Ef við lækkum vísinn $j+1$ um einn gefur það okkur matið

$$e_j(h) \approx \frac{R_{j-1}(h) - R_{j-1}(h/2)}{4^{j-1} - 1} = \frac{D(i,j-1) - D(i-1,j-1)}{4^{j-1} - 1}$$

sem er einmitt liðurinn í rakningarformúlunni fyrir $D(i,j)$. 6.30

6.3 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2+4}$ og $a = -1$. Með því að byrja á $h = 1$ og prentum út útgiskunartöfluna

h	$D(i,1)$	$D(i,2)$	$D(i,3)$	$D(i,4)$
1.	0.50000000			
0.5	0.50564632	0.50752843		
0.25	0.50657385	0.50688303	0.50684000	
0.125	0.50676839	0.50683323	0.50682991	0.50682976

Niðustaðan er: $f'(-1) \approx 0.50682976$
með eftirámat á skekkju $-1.6 \cdot 10^{-7}$.

Rétt gildi er 0.50682974129023. 6.31

6.4 Töluleg heildun

6.4 Töluleg heildun

Gerum ráð fyrir að $x_0, x_1, \ldots, x_n$ séu punktar á bilinu $[a, b]$ og að við þekkjum gildi f í þessum punktum. Þá getum við fundið brúunarmargliðuna p_n gegnum punktana $(x_k, f(x_k))$ og skrifað

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

þar sem leifin r_n er gefin með

$$r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Nú er auðvelt að reikna heildi margliða, svo við nálgum heildi f með

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_n(f) := \int_a^b p_n(x)dx$$

og skekkjan í þessari nálgun er gefin með

$$e_n = \int_a^b r_n(x)dx.$$

Þessi aðferð er kölluð *Newton-Cotes-heildun*. 6.32

6.4 Newton-Cotes -heildun

Hugsum okkur að brúunarpunktarnir $x_0, \ldots, x_n$ séu ólíkir. Þá getum við skrifað p_n með Lagrange-margliðum

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)},$$

og þá er heildi p_n jafnt

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k, \quad \text{þar sem} \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x)dx.$$

Athugið að gildi A_k veltur aðeins á brúunarpunktunum $x_0, \ldots, x_n$ en ekki gildum $f(x_k)$. Ef það á að heilda mörg föll yfir sama bil er því hægt að reikna gildi A_k í eitt skipti fyrir öll og endurnýta þau svo. 6.33

6.4 Sýnidæmi

Metum heildi $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ og $g(x) = \sin(\frac{x^2}{2})$ yfir bilið $[0, 2]$ með að nota skiptipunktana $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$. Lagrange-margliðurnar sem við eiga eru

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad \ell_1(x) = -x(x-2), \quad \ell_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

svo við fáum að

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)(x-2)dx = \frac{1}{3}, \qquad A_1 = -\int_0^2 x(x-2)dx = \frac{4}{3},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x(x-1)dx = \frac{1}{3}.$$

6.34

6.4 Sýnidæmi frh.

Nú eru stuðlarnir fundnir og því fáum við

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &\approx f(0)\frac{1}{3} + f(1)\frac{4}{3} + f(2)\frac{1}{3} \\ &= \frac{1 + 4e^{-1}\cos(1) + e^{-2}\cos(2)}{3} \approx 0.59581\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)dx &\approx g(0)\frac{1}{3} + g(1)\frac{4}{3} + g(2)\frac{1}{3} \\ &= \frac{4\sin(1/2) + \sin(2)}{3} \approx 0.91972.\end{aligned}$$

Gildi heildanna eru $\int_0^2 f(x)dx \approx 0.58969$ og $\int_0^2 g(x)dx \approx 0.99762$ með 5 réttum aukastöfum svo nálgunargildin verða að teljast nokkuð góð miðað við hversu lítið fór í þau. 6.35

6.4 Trapisuregla

Nú ætlum við að leiða út formúlur fyrir helstu reglum fyrir nálgun á heildum. Sú fyrsta er *trapisuregla*.

Veljum $x_0 = a$ og $x_1 = b$ sem skiptipunktana okkar. Þá er graf p_1 línustrikið gegnum $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$,

$$p_1(x) = f(a)\ell_0(x) + f(b)\ell_1(x) = f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

og vigtirnar eru

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) = \frac{b-a}{2} = A_1,$$

svo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Trapisureglan er kölluð þessu nafni því með henni nálgum við heildi f með flatarmáli trapisunnar sem hefur hornpunktana $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$ og $(a, f(a))$. 6.36

6.4 Miðpunktsregla

Enn einfaldari er miðpunktsreglan, þá veljum við aðeins einn skiptipunkt, $x_0 = \frac{1}{2}(a + b)$, og brúunarmargliðan verður fastamargliðan $p_0(x) = f(x_0)$. Þá er

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

6.37

6.4 Regla Simpsons

Nú veljum við þrjá skiptipunkta, $x_0 = a$, $x_1 = b$ og $x_2 = \frac{1}{2}(a+b)$. Til einföldunar skulum við hliðra fallinu f um miðpunkt bilsins $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

Við skilgreinum $\alpha = \frac{1}{2}(b-a)$ og $g(x) = f\big(x+m\big)$

Þá hliðrast a, m og b yfir í $-\alpha$, 0 og α og

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

6.38

6.4 Regla Simpsons

Lagrange margliðurnar og vigtirnar eru

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-\alpha)x}{(-\alpha-\alpha)(-\alpha-0)} = \frac{(x-\alpha)x}{2\alpha^2} \\
A_0 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_0(x)\,dx = \frac{\alpha}{3} \\
l_1(x) &= \frac{(x-(-\alpha))(x-0)}{(\alpha-(-\alpha))(\alpha-0)} = \frac{(x+\alpha)x}{2\alpha^2} \\
A_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} l_1(x)\,dx = \frac{\alpha}{3} \\
l_2(x) &= \frac{(x-(\alpha))(x-\alpha)}{0-(-\alpha)(0-\alpha)} = \frac{(x+\alpha)(x-\alpha)}{-\alpha^2} \\
A_2 &= \int_{\alpha}^{\alpha} l_2(x)\,dx = \frac{4\alpha}{3}
\end{aligned}$$

6.39

6.4 Regla Simpsons

Nálgunarformúlan verður þá

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx &\approx \frac{\alpha}{3}g(-\alpha) + \frac{\alpha}{3}g(\alpha) + \frac{4\alpha}{3}g(0) \\
&= (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)
\end{aligned}$$

6.40

6.4 Regla Simpsons aftur

Ef við tökum brúunarmargliðu gegnum a, b og $\frac{1}{2}(a+b)$ með $\frac{1}{2}(a+b)$ tvöfaldan þá fáum við 3. stigs brúunarmargliðu

$$p_3(x) = p_2(x) + g[-\alpha, \alpha, 0, 0](x+\alpha)(x-\alpha)x$$

Heildið yfir seinni liðinn hægra megin er 0 því margliðan $(x+a)(x-a)x$ er oddstæð, en heildið yfir fyrri liðinn er

$$\frac{\alpha}{3}(g(-\alpha) + 4g(0) + g(\alpha)).$$

Út kemur því Simpson-regla. 6.41

6.4 Samsettu reglurnar

Þar sem Newton-Cotes heildun notar brúunarmargliður fylgja henni nokkur vandamál.

Ef okkur finnst nákvæmnin í nálguninni vera of lítil getum við ekki búist við að hún batni við að fjölga skiptipunktum; þá hækkar stig margliðunnar líklega sem orsakar sveiflukenndari hegðun.

Eins er ekki gott að halda sig við margliður af lægra stigi; ef bilið sem á að heilda yfir er stórt væri mikil tilviljun að 1., 2. eða 3. stigs brúunarmargliða nálgaði fallið vel á öllu bilinu. 6.42

6.4 Samsettu reglurnar

Lausnin á þessu vandamáli er í sama anda og fyrir splæsibrúun. Við veljum skiptingu

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

á bilinu $[a,b]$.

Um heildi gildir að

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

svo við getum nálgað heildi f á sérhverju litlu hlutbili $[x_{k-1}, x_k]$ með að heilda brúunarmargliðu af lágu stigi og lagt öll gildin saman til að fá nálgun á heildi f yfir allt bilið.

Þegar ákveðin regla er notuð til að nálga heildi f á sérhverju hlutbili er þetta kölluð *samsetta* útgáfa reglunnar. Einfalt er að leiða út samsettar útgáfur reglanna að ofan. 6.43

6.4 Samsetta trapisureglan

Á sérhverju hlutbili er

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

svo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)).$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng og $h = x_k - x_{k-1}$, þá fæst

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx h\left(\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b)\right).$$

6.44

6.4 Samsetta miðpunktsreglan

Fljótséð er að

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

Ef öll hlutbilin eru jafn löng verður formúlan

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

6.45

6.4 Samsetta Simpson

Hér er venjan að velja $2n+1$ jafndreifða skiptipunkta og fá n jafn stór hlutbil. Þá er $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_k = a + kh$ fyrir $k = 0, \ldots, 2n$ og hlutbilin eru $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ fyrir $k = 1, \ldots, n$.

Á hverju hlutbili er

$$\int_{t_{2k-2}}^{t_{2k}} f(x)\,dx \approx 2h\left(\frac{1}{6}f(x_{2k-2}) + \frac{4}{6}f(x_{2k-1}) + \frac{1}{6}f(x_{2k})\right)$$

svo að

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{3} \Big(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \Big) \right)$$
$$= \frac{h}{3} \Big(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h)$$
$$+ \cdots + 2f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h) + f(b). \Big)$$

6.46

6.4 Skekkjumat

Rifjum upp grunnhugmyndina að baki nálgunarformúlunum. Við veljum brúunarpunkta $x_0, \ldots, x_n$ í $[a, b]$, látum p_n vera tilsvarandi brúunarmargliðu og skrifum

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

þar sem $r_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$. Þá er nálgunin

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx$$

með skekkjuna

$$\int_a^b r_n(x)\,dx$$

Nú viljum við meta skekkjuheildið.

6.47

6.4 Meðalgildissetningin fyrir heildi

Við skekkjumatið í þessum kafla munum við þurfa að nota eftirafarandi setningu nokkrum sinnum.

Setning (Meðalgildissetningin fyrir heildi):
Ef $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ er samfellt fall og φ er heildanlegt fall sem skiptir ekki um formerki á bilinu $[a, b]$ þá er til tala $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\int_a^b G(x)\varphi(x)\,dx = G(\eta) \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6.48

6.4 Trapisuregla

$$r_1(x) = f[-\alpha, \alpha, x](x + \alpha)(x - \alpha)$$

Athugum að

$$(x + \alpha)(x - \alpha) = (x^2 - \alpha^2)$$

skiptir ekki um formerki á bilinu $]-\alpha, \alpha[$. Þá gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [a, b]$ þannig að

$$\int_a^b r_1(x)\,dx = f[-\alpha, \alpha, \eta] \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2)\,dx$$
$$= \frac{f''(\xi)}{2!} \left(-\frac{4}{3}\alpha^3 \right)$$
$$= \frac{-f''(\xi)}{2!} \frac{(b-a)^3}{6}, \qquad \xi \in [a, b]$$

Niðurstaða:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right) - \frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3$$

6.49

6.4 Skekkjumat í samsettu reglunni

Ef við lítum á samsettu trapisuregluna með jafna skiptingu þar sem hlutbilin eru $[x_i, x_{i+1}]$, þá fáum við skekkjuna

$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Ef við leggjum saman og beitum milligildissetningunni, þá fáum við

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in [a,b]$$

að því gefnu að $f \in C^2[a,b]$.

Ath: Hér er $T(h)$ útkoman úr samsettu Trapisureglunni með jafna skiptingu $h = \frac{b-a}{n}$. 6.50

6.4 Skekkja í miðpunktsreglu

Til einföldunar skoðum við bilið $[-\alpha, \alpha]$. Veljum miðpunktinn tvöfaldan

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x$$
$$r_1(x) = f[0,0,x]x^2$$

Athugum að heildið af $f'(0)x$ yfir $[-\alpha,\alpha]$ er 0. Nú skiptir x^2 ekki um formerki og því gefur meðalgildisreglan fyrir heildi að til er $\eta \in [-\alpha, \alpha]$ þannig að

$$\begin{aligned}\int_a^b r_1(x)\,dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} f[0,0,x]x^2\,dx \\ &= f[0,0,\eta]\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\,dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!}2\frac{\alpha^3}{3} \\ &= \frac{(b-a)^3}{24}\cdot f''(\xi)\end{aligned}$$

Þar sem ξ fæst úr skekkjumatinu fyrir brúunarmargliður (kafli 5). 6.51

6.4 Skekkja í samsettu miðpunktsreglu

Fyrir hvert bil fáum við skekkjulið:

$$\frac{h^3}{24}\cdot f''(\xi_i)$$

Leggjum saman skekkjuliðina og beitum milligildissetningunni, þá fæst að til er ξ þannig að:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-\frac{1}{2})h\right) + \frac{b-a}{24}f''(\xi)h^2$$

6.52

6.4 Skekkja í reglu Simpsons

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

Leiddum út þessa formúlu með því að taka brúunarmargliðu $p_3(x)$ með punktana $-\alpha, \alpha, 0, 0$. Skekkjan er

$$f(x) - p_3(x) = f[-\alpha,\alpha,0,0,x](x+\alpha)(x-\alpha)x^2$$

þar með er skekkjan í formúlu Simpsons:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f[-\alpha,\alpha,0,0,x](x+\alpha)(x-\alpha)x^2\,dx$$

6.53

6.4 Skekkja í reglu Simpsons, frh.

Fallið $x \mapsto (x+\alpha)(x-\alpha)x^2 = (x^2-\alpha^2)x^2$ er ≤ 0 á $[-\alpha,\alpha]$. Þar með gefur meðalgildissetningin fyrir heildi að til er $\eta \in [-\alpha,\alpha]$ þannig að skekkjan er

$$f[-\alpha,\alpha,0,0,\eta]\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^2-\alpha^2)x^2\,dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\frac{(-4)}{15}\cdot\alpha^5 = \frac{-f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5, \qquad \xi \in [a,b]$$

Þar sem ξ fæst úr skekkjumatinu fyrir Newton aðferðina (glæra 5.55). 6.54

6.4 Skekkja samsettu Simpsonreglu

Skiptum $[a,b]$ í n jafnlöng bil og látum h vera helming hlutbillengdarinnar,

$$h = \frac{(b-a)}{2n}.$$

Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{3}\Big(f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})\Big)\right)$$

$$=\frac{h}{3}\Big(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)$$
$$+\cdots+2f(a+(2n-2)h)+4f(a+(2n-1)h)+f(b)\Big)$$

6.55

6.4 Skekkjumat í samsettu Simpsonreglu

Ef við beitum skekkjumatinu á sérhvert bilanna þá fáum við

$$\frac{-f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5$$

sem skekkju með $\xi_i \in [x_i, x_i+1]$. Heildarskekkjan verður

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{90}h^5 = \frac{-h^5}{90}\cdot\sum_{i=1}^{n}f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú gefur meðalgildisreglan að til er $\xi \in [a,b]$ þannig að

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f^{(4)}(\xi_i)$$

Nú er $nh = \frac{(b-a)}{2}$ þar með er skekkjan:

$$\frac{-h^5}{90}\cdot nf^{(4)}(\xi) = \frac{-(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi)\cdot h^4$$

6.56

6.4 Skekkjumat á samsettu Simpsonreglunni: Niðurstaða

Ef við táknum útkomuna úr samsettu Simpsonsreglunni fyrir $h=\frac{b-a}{2n}$ með $S(h)$ þá fæst að til er $\xi \in [a,b]$ þannig að

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(h) - \frac{(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi)h^4$$

6.57

6.7 Romberg-útgiskun

6.7 Romberg-útgiskun

Á sama hátt og við gátum bætt nálgun okkar á afleiðu falls með að nota Richardson útgiskun getum við bætt nálgun á heildi.

Aðferðin virkar í aðalatriðum eins fyrir heildi og afleiður, en til að fá sem bestar upplýsingar um samleitni hennar skulum við leiða út formúluna fyrir trapisureglunni aftur. 6.58

6.7 Euler-Maclauren-formúlan

Fyrir samfellt fall $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sem er $2n$-sinnum samfellt deildanlegt gildir Euler-Maclauren formúlan

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt =& \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}\left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right)\\ &- A_{2n} f^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in [0,1]\end{aligned}$$

Hér eru stuðlarnir A_k þannig að $k!A_k$ verði Bernoulli-talan númer k. Þessar tölur eru stuðlar í veldaröðinni

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

(Það þarf að hafa töluvert fyrir því að sanna þessa formúlu) 6.59

6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Látum nú $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vera $2n$-sinnum samfellt deildanlegt fall. Ef við búum til skiptingu $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ með jöfn hlutbil $h = x_{i+1} - x_i$ og beitum síðan Euler-Maclauren formúlunni á $g(t) = f(x_i + ht)$ fæst

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx =& h\int_0^1 \underbrace{f(x_i+ht)}_{g(t)}\,dt\\ =& h\left(\frac{1}{2}f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_{i+1})\right)\\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}h^{2k}\left(f^{(2k-1)}(x_i) - f^{(2k-1)}(x_{i+1})\right)\\ &- A_{2n}h^{2n+1} f^{(2n)}(\xi_i),\end{aligned}$$

þar sem $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. 6.60

6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin-formúlu

Nú innleiðum við

$$\begin{aligned}T(h) :=& \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{1}{2}f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_{i+1})\right)\\ =& h\left(\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(a+nh)\right)\end{aligned}$$

og fáum síðan:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx =& T(h) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}h^{2k}\left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)\right)\\ &- A_{2n}h^{2n+1}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_i)\end{aligned}$$

6.61

6.7 Afleiðing af Euler-Maclaurin

Nú gefur milligildissetningin að til er $\xi \in [a,b]$ þannig að

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(2n)}(\xi_i) = f^{(2n)}(\xi)$$

Notum okkur nú að $nh = b - a$ og fáum að

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + \sum_{k=1}^{n-1} A_{2k}h^{2k}\left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)\right) - A_{2n}h^{2n}(b-a)f^{(2n)}(\xi).$$

Niðurstaðan er að samsetta trapisureglan er

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + c_2h^2 + c_4h^4 + \cdots + c_{2m-2}h^{2m-2} + c_{2n}h^{2m}f^{(2m)}(\xi)$$

6.62

6.7 Ítrekun á samsettu trapisureglunni með helmingun

Hugsum okkur nú að við viljum reikna út $T(h_j)$ fyrir $h_j = (b-a)/2^j$, $j = 1, 2, \ldots$ og að við viljum nýta öll fallgildi í $T(h_{j-1})$ til að reikna út $T(h_j)$. Rakningarformúlan er

$$T(h_j) = \frac{1}{2}T(h_{j-1}) + h_j \sum_{k=1}^{2^{j-1}} f(a + (2k-1)h_j)$$

Athugið að hér er bilinu $[a, b]$ skipt í 2^j hlutbil. 6.63

6.7 Reikniritið fyrir Romberg-heildun

Romberg-heildun er hugsuð nákvæmlega eins og Richardson-útgiskunin: Við reiknum út línu fyrir línu í töflunni:

$$\begin{array}{llllll}
i & & & & & \\
1 & R(1,1) & & & & \\
2 & R(2,1) & R(2,2) & & & \\
3 & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & & \\
4 & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

þar sem

$$R(i,1) = T(h_i) \qquad i = 1, 2, \ldots$$
$$R(i,j) = \frac{4^{j-1}R(i,j-1) - R(i-1,j-1)}{4^{j-1}-1}.$$

Með þessu fæst $\int_a^b f(x)\,dx = R(k,k) + O(h_k^{2k})$, þar sem k er síðasta línan sem við reiknum í töflunni að ofan. 6.64

6.7 Skekkjumat í Romberg heildun

Hægt er að nota síðustu viðbót sem eftirámat fyrir skekkjuna, þetta mat er

$$\frac{1}{4^j - 1}\left(R(i,j-1) - R(i-1,j-1)\right)$$

þegar þessi stærð er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk er hætt.

Athugið að það er ekki nauðsynlegt að hafa h_1 sem allt bilið $[a, b]$, það er ekkert sem kemur í veg fyrir það að við byrjum með $h_1 = \frac{b-a}{m}$, og helmingum svo; $h_2 = \frac{b-a}{2m}$, $h_3 = \frac{b-a}{4m}$, ... Almennt er þá $h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}m}$. 6.65

Fræðilegar spurningar

Kafli 6: Fræðilegar spurningar

1. Hver er meginhugmyndin í tölulegri deildun og heildun?

2. Hvað eru *frammismunur* og *bakmismunur* til þess að nálga afleiðu?
3. Hvernig er *miðsettur mismunakvóti* fyrir fyrsta stigs afleiðu skilgreindur og hver er skekkjan í nálgun á afleiðu falls með honum?
4. Hvernig er *miðsettur mismunakvóti* fyrir annars stigs afleiðu skilgreindur og hvernig er skekkjan í nálgun á annarri afleiðu með honum?
5. Hvernig eru brúnunarmargliður notaðar til þess að reikna út afleiðu falls f í punkti a og hver er skekkjan í slíkri nálgun?
6. Lýsið fyrsta skrefinu i Richardson-útgiskun þar sem formúlan $f'(a) = R_0(h)+a_2h^2+a_4h^4+O(h^6)$ er endurbætt þannig að út komi skekkja sem er $O(h^4)$.
7. Lýsið Richardson-útgiskunartöflunni.
8. Hvaða skekkjumat er notað í Richardson-útgiskun?

6.66

Kafli 6: Fræðilegar spurningar

9. Hvernig er almenna aðferðin sem notar brúunarmargliður til þess að nálga heildi og nefnd er Newton-Cotes-heildun og hvernig er skekkjuformúlan í henni?
10. Hvernig er trapisuregla til þess að nálga heildi og aðferðarskekkja hennar?
11. Hvernig er miðpunktsregla til þess að nálga heildi og aðferðarskekkja hennar?
12. Hvernig er Simpson-regla til þess að nálga heildi og aðferðarskekkja hennar?
13. Hvernig er samsetta trapisureglan og aðferðarskekkja hennar?
14. Hvernig er samsetta miðpunktsreglan og aðferðarskekkja hennar?
15. Hvernig er samsetta Simpson-reglan og aðferðarskekkja hennar?
16. Hvernig er rakningarformúla fyrir samsettu trapisureglunni?
17. Lýsið reikniritinu fyrir Romberg-heildun.
18. Hver er skekkjan í eftirámatinu í Romberg-heildun?

6.67

Kafli 7: Upphafsgildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Töluleg greining, STÆ405G, 12., 14. og 19. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

7.1

Yfirlit

Kafli 7: Upphafsgildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Kafli	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
7.1	Almenn atriði um upphafsgildisverkefni	533-544	3-13
7.8	Upphafsgildisverkefni fyrir jöfnuhneppi	623-631	5-8
7.2-3	Aðferð Eulers,	546-566	14-15
7.4	Runge Kutta aðferðir	570-578	16-23
7.6	Skekkjumat, samleitni og stöðugleiki	598-607	24-25
7.7	Stýring á skekkju og breytileg skrefastærð	608-621	26-30
7.5	Fjölskrefaaðferðir	583-594	31-39
7.6	Greining á samleitni og stöðugleika	598-607	40-47

7.2

7.1 Almenn atriði

Fyrsta stigs afleiðujafna með upphafsgildi

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Hér er gefið fall f á einhverju svæði U í $\mathbb{R}^2$ sem inniheldur (t_0, x_0).

Við segjum að x sé lausn á þessu verkefni ef x er fall skilgreint á bili I, sem er þannig að

- $t_0 \in I$,
- $(t, x(t)) \in U$ fyrir öll $t \in I$,
- $x'(t) = f(t, x(t))$ fyrir öll $t \in I$, og
- $x(t_0) = x_0$.

7.3

7.1 Tilvist og ótvíræðni lausna

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ef f er samfellt, þá er alltaf til lausn á einhverju bili I. (Setning Peano)

Ef f uppfyllir Lipschitz-skilyrði með tilliti til x, þ.e.a.s. til er fasti C þannig að

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$$

fyrir öll (t, x_1) og (t, x_2) í grennd um (t_0, x_0) þá er lausnin ótvírætt ákvörðuð. (Setning Picard) 7.4

7.1 Upphafsgildisverkefni fyrir hneppi

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n, \qquad U \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in U.$$

Skrifum $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ sem *dálkvigra*,

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad \text{og} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x})]^T$$

7.5

7.1 Jöfnur af stigi > 1 og jafngild hneppi

Jöfnur af hærra stigi má umrita yfir í jafngild hneppi. Ef við höfum m-stigs diffurjöfnu

$$\begin{aligned} &u^{(m)} = g(t, u, \dots, u^{(m-1)}) \\ &u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{m-1}(t_0) = u_{(m-1)} \end{aligned}$$

þar sem g er gefið fall og $u_0, \dots, u_{m-1}$ eru gefnar tölur.

Jafngilt hneppi er fengið með því að setja

$$\begin{aligned} x_1 &= u, \\ x_2 &= u', \\ x_3 &= u'', \\ &\vdots \\ x_m &= u^{(m-1)} \end{aligned}$$

7.6

7.1 Jafngilt hneppi

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \qquad x_1(t_0) = u_0 \\ x_2' &= x_3 \qquad x_2(t_0 = u_1 \\ \vdots & \ \ \vdots \\ x_{m-1}' &= x_m \qquad x_m(t_0) = u_{m-1} \\ x_m' &= g(t, x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

Lausn hneppisins gefur ótvírætt lausn á upprunalegu m-ta stigs afleiðujöfnunni. 7.7

7.1 Tilvist og ótvíræðni lausna á hneppum

Tilvistar- og ótvíræðnisetningar Peanos og Picards eru þær sömu fyrir hneppi

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Við þurfum bara að setja norm $\|\cdot\|$ í stað tölugildis $|\cdot|$ í öllum ójöfnum og þar með talið í Lipschitz-skilyrðinu. 7.8

7.1 Ritháttur

Til einföldunar á rithætti skulum við skrifa lausnarvigurinn $\mathbf{x}$ og vörpunina $\mathbf{f}$ sem x og f og láta eins og við séum að leysa fyrsta stigs afleiðujöfnu.

Við veljum gildi $t_0 < t_1 < \cdots < t_j < \cdots$ og reiknum út nálgunargildi w_j á gildi lausnarinnar $x(t_j)$ í punktinum t_j. Gildið $w_0 = x(t_0)$ er rétta upphafsgildi lausnarinnar

Talan t_j kallast j-ti tímapunkturinn og talan $h_j = t_j - t_{j-1}$ nefnist j-ta tímaskrefið. 7.9

7.1 Heildum lausnina

Ef við heildum lausn afleiðujöfnunnar yfir tímabilið $[t, t+h]$, þá fáum við að hún uppfyllir jöfnuna

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, x(\tau))\, d\tau = x(t) + h\int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds.$$

Ef við setjum $t = t_{j-1}$ inn í þessa jöfnu, þá fáum við

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{h_j} = \int_0^1 f(t_{j-1} + sh_j, x(t_{j-1} + sh_j))\, ds$$

7.10

7.1 Almennt um nálgunaraðferðir

Við leggjum til grundvallar jöfnuna

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{h_j} = \int_0^1 f(t_{j-1} + sh_j, x(t_{j-1} + sh_j))\, ds$$

Nálgunaraðferðirnar snúast allar um að gera einhvers konar nálgun á heildinu í hægri hliðinni

$$\int_0^1 f(t_{j-1} + sh_j, x(t_{j-1} + sh_j))\, ds \approx \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_j)$$

og leysa síðan w_j út úr jöfnunni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_j)$$

7.11

7.1 Beinar og óbeinar aðferðir

Nálgunaraðferð sem byggir á jöfnunni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_j)$$

er nefnist *bein aðferð* (e. explicit method) ef w_j kemur ekki fyrir í í hægri hliðinni.

Annars nefnist hún *óbein aðferð* eða *fólgin aðferð* (e. implicit method).

Ef aðferðin er bein og við höfum reiknað út $w_0, \dots, w_{j-1}$, þá fáum við rakningarformúlu, þannig að $w_j \approx x(t_j)$ er reiknað út

$$w_j = w_{j-1} + h_j \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_{j-1})$$

7.12

7.1 Eins skrefs aðferðir og fjölskrefaaðferðir

Nálgunaraðferð sem byggir á jöfnunni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1}, w_j)$$

er nefnist *eins skrefs aðferð* (e. one step method) og er þá vísað til þess að fallið í hægri hliðinni er einungis háð gildum á síðasta tímaskrefinu.

Tveggja skrefa aðferð er af gerðinni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_{j-2}, t_{j-1}, t_j, w_{j-2}, w_{j-1}, w_j)$$

Almennt er *k-skrefa aðferð* af gerðinni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_{j-k}, \dots, t_j, w_{j-k}, \dots, w_j)$$

Fjölskrefaaðferð er k-skrefa aðferð með $k \geq 2$. 7.13

7.2 Aðferð Eulers

Rifjum upp að lausnin uppfyllir

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= \int_t^{t+h} x'(\tau)\, d\tau = \int_t^{t+h} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \\ &= h \int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds \end{aligned}$$

Billengdin í síðasta heildinu er 1, svo við tökum einföldustu nálgum sem hugsast getur en það er gildið í vinstri endapunkti $f(t, x(t))$. Fyrir lítil h fæst því

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t, x(t)).$$

Við þekkjum $w_0 = x(t_0)$, svo með þessu getum við fikrað okkur áfram og fengið runu nálgunargilda $w_0, w_1, w_2, \ldots$ þannig að

$$w_j = w_{j-1} + h_j f(t_{j-1}, w_{j-1}).$$

7.14

7.2 Matlab forrit fyrir aðferð Eulers

```
function w = euler(f,t,alpha);
%   function w = euler(f,t,alpha)
% Aðferð Eulers fyrir afleiðujöfnuhneppi
%         x'(t)=f(t,x(t)), x(0)=alpha.
% Inn fara: f - fallið f
%           t - vigur með skiptingu á t-ás.
%           alpha - upphafsgildið í t(1).
% Út koma:  w - fylki með nálgunargildunum.

N = length(t);
m = length(alpha);
w = zeros(m,N);
w(:,1) = alpha;
for j=2:N
   w(:,j) = w(:,j-1)+(t(j)-t(j-1))*f(t(j-1),w(:,j-1));
end
```

7.15

7.4 Runge-Kutta aðferðir – Aðferð Eulers endurbætt

Í aðferð Eulers nálguðum við heildið $\int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds$ með margfeldi af billengdinni og fallgildinu í vinstri endapunkti.

Við getum endurbætt þessa nálgun með því að taka einhverja nákvæmari tölulega nálgun á heildinu til dæmis miðpunktsaðferð

Nálgunarformúlan verður þá

$$\int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds \approx f(t + \tfrac{1}{2}h, x(t + \tfrac{1}{2}h)).$$

Nú er vandamálið að við höfum nálgað $x(t_{j-1})$ með w_{j-1} en höfum ekkert nálgunargildi á $x(t_{j-1} + \frac{1}{2}h_j)$.

Við grípum þá til fyrsta stigs Taylor nálgunar

$$\begin{aligned} x(t_j + \tfrac{1}{2}h_j) &= x(t_{j-1}) + x'(t_{j-1})\big(\tfrac{1}{2}h_j\big) + \tfrac{1}{2}x''(\xi)\big(\tfrac{1}{2}h_j\big)^2 \\ &\approx w_{j-1} + \tfrac{1}{2}h_j f(t_{j-1}, w_{j-1}). \end{aligned}$$

7.16

7.4 Aðferð Eulers endurbætt

Endurbætt aðferð Eulers er þá í tveim skrefum; við reiknum

$$\tilde{w}_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2} h_j f(t_{j-1}, w_{j-1})$$

og fáum svo nálgunargildið

$$w_j = w_{j-1} + h_j f\left(t_{j-1} + \tfrac{1}{2} h_j, \tilde{w}_j\right)$$

7.17

7.4 Annað afbrigði af aðferð Eulers – Aðferð Heun

Lítum nú á aðra aðferð þar sem við nálgum heildið með trapisuaðferð.

$$\int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds \approx \tfrac{1}{2}\big(f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))\big).$$

Af þessu leiðir að nálgunarformúlan á að vera

$$w_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2} h_j \big(f(t_{j-1}, w_{j-1}) + f(t_j, w_j)\big)$$

Þetta er greinilega óbein aðferð svo við verðum að byrja á nálgun á w_j, með

$$w_j \approx x(t_j) = x(t_{j-1} + h_j) \approx x(t_{j-1}) + h_j x'(t_{j-1}) = x(t_{j-1}) + h_j f(t_{j-1}, w_{j-1})$$

Þetta nýja afbrigði af aðferð Eulers nefnist *aðferð Heun*. Hún er í tveim skrefum: Við reiknum fyrst

$$\tilde{w}_j = w_{j-1} + h_j f(t_{j-1}, w_{j-1})$$

og fáum svo nálgunargildið

$$w_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2} h_j \big(f(t_{j-1}, w_{j-1}) + f(t_j, \tilde{w}_j)\big)$$

7.18

7.4 Forsagnar- og leiðréttingaraðferð

Endurbætt aðferð Eulers og aðferð Heun eru leiðir til þess að vinna úr óbeinum aðferðum, þar sem rakningarformúlan fyrir nálgunargildin er af gerðinni

$$w_j = w_{j-1} + h_j \varphi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1}, w_j)$$

og okkur vantar eitthverja nálgun á w_j til þess að stinga inn í hægri hlið þessarar jöfnu. Við skiptum þessu tvö skref:

Forsagnarskref: Við beitum einhverri beinni aðferð til þess að reikna út

$$\tilde{w}_j = w_{j-1} + h_j \psi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1})$$

Leiðréttingarskref: Setjum

$$w_j = w_{j-1} + h_j \varphi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1}, \tilde{w}_j).$$

7.19

7.4 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

Lítum aftur á verkefnið

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

og skoðum 2. stigs Taylor liðun á lausninni x í punkti t. Innleiðum fyrst smá ritháatt til styttingar, setjum

$$x = x(t), \quad f_t' = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)), \quad f = f(t, x(t)), \quad f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)).$$

Keðjureglan gefur

$$x''(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = f_t' + f_x' x'(t) = f_t' + f\, f_x'.$$

7.20

7.4 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

Taylor-liðun lausnarinnar er

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + hx'(t) + \frac{1}{2}h^2x''(t) + O(h^3) \\ &= x + hf + \frac{1}{2}h^2(f'_t + ff'_x) + O(h^3) \\ &= x + \frac{1}{2}hf + \frac{1}{2}h(f + hf'_t + (hf)f'_x) + O(h^3) \end{aligned}$$

Nú sjáum við að síðasti liðurinn er 1. stigs Taylor liðun f með miðju (t,x) skoðuð í punktinum $(t+h, x+hf)$, því

$$f(t+h, x+hf) = f + hf'_t + (hf)f'_x + O(h^2)$$

og þar með er

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2}hf(t,x) + \frac{1}{2}hf(t+h, x+hf) + O(h^3)$$

7.21

7.4 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

Við höfum leitt út

$$x(t+h) = x(t) + \tfrac{1}{2}hf(t,x) + \tfrac{1}{2}hf(t+h, x+hf) + O(h^3)$$

Þessi formúla liggur til grundvallar 2. stigs Runge-Kutta-aðferð: Með henni fáum við nálgunarrunu $w_0, w_1, w_2, \ldots$ þannig að $w_0 = x(0)$ og

$$w_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2), \quad j = 1, 2, \ldots$$

þar sem

$$F_1 = h_j f(t_{j-1}, w_{j-1}), \quad \text{og} \quad F_2 = h_j f(t_j, w_{j-1} + F_1)$$

og eins og alltaf er $w_j \approx x(t_j)$. 7.22

7.4 Matlab forrit fyrir 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

```
function w = runge_kutta_2(f,t,alpha);
%   w = runge_kutta_2(f,t,alpha)
% 2. stigs Runge-Kutta aðferð fyrir afleiðuhneppi
%         x'(t)=f(t,x(t)), x(0)=alpha.
% Inn fara: f - fallið f
%           t - vigur með skiptingu á t-ás.
%           alpha - upphafsgildið í t(1).
% Út koma:  w - fylki með nálgunargildunum.
N = length(t);
m = length(alpha);
w = zeros(m,N);
w(:,1) = alpha;
for j=2:N
  h = t(j)-t(j-1);
  F1 = h*f(t(j-1),w(:,j-1));
  F2 = h*f(t(j),w(:,j-1)+F1);
  w(:,j) = w(:,j-1) + (F1+F2)/2;
end
```

7.23

7.6 Skekkjumat, samleitni og stöðugleiki

Fyrir eins skrefs aðferð skilgreinum við *staðarskekkju* við tímann t_n sem

$$\tau_n = \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - \varphi(f, t_{n-1}, t_n, x(t_{n-1}), x(t_n))$$

Hér er réttu lausninni stungið inn í nálgunarformúluna. Munum að hún uppfyllir

$$\frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} = \int_0^1 f(t_{n-1} + sh_n, x(t_{n-1} + sh_n))\, ds$$

Viljum geta metið τ_n sem fall af h_n, t.d.

$$\tau_n = O(h_n^k)$$

Almennt batna aðferðir eftir því sem veldisvísirinn k í staðarskekkjunni verður stærri. 7.24

7.6 Staðarskekkja í aðferð Eulers

Aðferð Eulers er sett fram með formúlunni

$$w_n = w_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, w_{n-1})$$

Staðarskekkjan er því

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) \\ &= \frac{x(t_n) - x(t_{n-1}) - x'(t_{n-1})h_n}{h_n} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x''(\xi_n)h_{n-1}^2}{h_n} = \tfrac{1}{2}x''(\xi_n)h_{n-1} = O(h_n)\end{aligned}$$

Aðferð Eulers er því fyrsta stigs aðferð. 7.25

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Hugsum okkur að við höfum tvær beinar nálgunaraðferðir

$$w_n = w_{n-1} + h_n\varphi(f, t_{n-1}, t_n, w_{n-1})$$

og

$$\tilde{w}_n = w_{n-1} + h_n\tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_n, w_{n-1})$$

Skilgreinum tilsvarandi staðarskekkjur

$$\tau_n(h_n) = k_1 h_n^{\alpha_1} + o(h_i^{\alpha_1})$$

og

$$\tilde{\tau}_n(h_n) = k_2 h_n^{\alpha_2} + o(h_i^{\alpha_2}),$$

þar sem $\alpha_2 > \alpha_1$. Við tímann t_{n-1} hafa nálgunargildin $w_0, \dots, w_{n-1}$ hafi verið valin samkvæmt fyrri aðferðinni.

Meiningin að velja næsta tímapunkt t_n og þar með tímaskref h_n þannig að $\tau_n(h_n) \le \delta$, en að $\tau_n(h_n)$ haldi sig sem næst δ, þar sem δ er gefið efra mark á staðarskekkjunni í fyrri aðferðinni.

Stærðin δ er kölluð *þolmörk* (e. tolerance) fyrir staðarskekkjuna og er oft táknuð með TOL. 7.26

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Við byrjum á að setja $h = h_n$ inn í báðar aðferðirnar og bera útkomurnar saman

$$w_n = w_{n-1} + h\varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1} + h, w_{n-1})$$

$$\tilde{w}_n = \tilde{w}_{n-1} + h\tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_{n-1} + h, w_{n-1})$$

Við látum $\hat{w}_n$ tákna rétt gildi lausnarinnar á upphafsgildisverkefninu

- $x'(t) = f(t, x(t))$,
- $x(t_{n-1}) = w_{n-1}$,

í punktinum $t_{n-1} + h$. 7.27

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Þá höfum við

$$\begin{aligned}\tau_n(h) &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1}}{h} - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1}) \\ &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1} - h\varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1})}{h} = \frac{\hat{w}_n - w_n}{h}\end{aligned}$$

og eins fæst

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_n(h) &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1}}{h} - \tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1}) \\ &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1} - h\tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1})}{h} = \frac{\hat{w}_n - \tilde{w}_n}{h}.\end{aligned}$$

7.28

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Nú tökum við mismuninn og skilgreinum

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left|\frac{\tilde{w}_n - w_n}{h}\right| = |\tau_n(h) - \tilde{\tau}_n(h)| \\ &= |k_1|h^{\alpha_1} + o(h^{\alpha_1}) \approx |k_1|h^{\alpha_1}\end{aligned}$$

Munum að hér er skreflengdin $h = h_n$. Þessi nálgunarformúla gefur okkur möguleika á því að meta fastann

$$|k_1| \approx \frac{\varepsilon}{h_n^{\alpha_1}}.$$

7.29

7.7 Mat á skrefastærð

Segjum nú að við viljum halda staðarskekkjunni innan markanna $\delta/2$ og hafa skreflengdina í næsta skrefi $h_n = qh_{n-1}$, þá höfum við nálgunarjöfnuna

$$|\tau_n(qh_{n-1})| \approx |k_1|(qh_{n-1})^{\alpha_1} = \varepsilon q^{\alpha_1} \approx \frac{\delta}{2}.$$

Við tökum

$$q = \left(\frac{\delta}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha_1}$$

veljum síðan skrefstærðina $h_n = qh_{n-1}$ og reiknum út næsta gildi

$$w_n = w_{n-1} + h_n\varphi(f, t_{n-1}, t_n, w_{n-1})$$

7.30

7.5 Fjölskrefaaðferðir

Þær aðferðir sem við höfum séð eiga allar sameiginlegt að ákvarða nálgunargildi w_n aðeins út frá gildinu w_{n-1} næst á undan. Hægt er að nota fleiri gildi w_{n-1}, w_{n-2}, $\ldots$ og fá þannig betri nákvæmni, en aðferðirnar verða að sama skapi flóknari í notkun.

Eins og alltaf höfum við verkefnið

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = w_0 \end{cases}$$

og viljum nálga gildi lausnarinnar x á bili $[a, b]$ þar sem $a = t_0$ eða $b = t_0$. Látum t_0, t_1, $\ldots$, t_n vera skiptingu á bilinu $[a, b]$ og gerum til einföldunar ráð fyrir að hún hafi jafna billengd $h = t_j - t_{j-1}$ fyrir $j = 1, \ldots, n$.

7.31

7.5 k-skrefa Adams-Bashforth aðferð

Við vitum að lausnin x uppfyllir

$$x(t_n) - x(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, x(t))\, dt$$

Skrifum nú

$$f(t, x(t)) = P_{k-1}(t) + R_{k-1}(t)$$

þar sem

$$P_{k-1}(t) = \sum_{j=1}^{k} f(t_{n-j}, x(t_{n-j})) \cdot \ell_{k-1,j}(t)$$

er brúunarmargliðan gegnum punktana $(t_{n-k}, x(t_{n-k}))$, $(t_{n+1-k}, x(t_{n+1-k}))$, $\ldots$, $(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$, þ.e. gegnum síðustu k punkta á undan $(t_n, x(t_n))$.

Þetta eru k punktar og því er aðferðin kölluð k-skrefa aðferð. 7.32

7.5 k-skrefa Adams-Bashforth aðferð

Munum að til er ξ þannig að

$$R_{k-1}(t) = \frac{f^{(k)}(\xi, x(\xi))}{k!} \prod_{j=1}^{m} (t - t_{n-j}).$$

Við nálgum nú heildið af f yfir bilið $[t_{n-1}, t_n]$ með heildi P_{k-1} og fáum

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{k-1}(t)\, dt$$

og með beinum útreikningum má sjá að skekkjan í þessari nálgun er $O(h^{k+1})$. Þessir útreikninga flækjast auðvitað eftir því sem k stækkar. 7.33

7.5 k-skrefa Adams-Bashforth aðferð, upphafið

Augljóslega getum við ekki notað k skrefa Adams-Bashforth aðferðir um leið og við sjáum upphafsgildisverkefni, því við þurfum k ágiskunargildi $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$ til að byrja að nota aðferðina. Þessi gildi má fá með hverri sem er af aðferðunum sem við höfum séð hingað til.

Ákveðin sértilfelli Adams-Bashforth aðferðanna eru meira notuð en önnur, það eru tveggja, þriggja og fjögurra skrefa aðferðirnar. Áhugasömum verður ekki skotaskuld úr að leiða út formúlurnar fyrir þær, en við birtum bara niðurstöðurnar.

Til styttingar skilgreinum við $f_j = f(t_j, w_j)$. 7.34

7.5 Tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð

Þegar gildin w_{n-1} og w_{j-2} hafa verið fundin fæst næsta með

$$w_n = w_{n-1} + h\big(\tfrac{3}{2} f_{n-1} - \tfrac{1}{2} f_{n-2}\big)$$

og skekkjan í nálguninni er $O(h^3)$. 7.35

7.5 Forrit fyrir tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð

Aðferðin er útfærð í forritinu hér að neðan; það skýrir sig að mestu sjálft en við skulum taka eftir þrennu:

(i) Við krefjumst þess að notandinn gefi nálgunargildi á `x(t(2))`, þetta gerum við því til eru margar mismunandi aðferðir til að fá slíkt gildi og þær henta mis vel hverju sinni.

(ii) Við gerum ekki sérstaklega ráð fyrir að jafnt bil sé á milli stakanna í vigrinum `t` þó við höfum gert það hingað til. Það var aðeins gert til að einfalda útreikninga; aðferðin virkar nákvæmlega eins ef það er ekki jafnt bil á milli stakanna, svo sjálfsagt er að forrita hana þannig.

(iii) Við lágmörkum fjölda skipta sem við reiknum gildi `f` með að geyma alltaf gildið frá síðustu ítrun og nota það aftur, þetta getur sparað nokkurn tíma í útreikningum ef `f` er flókið fall. 7.36

7.5 Forrit fyrir tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð

```
function w = adams_bashforth_2(f,t,x1,x2)
%   w = adams{_}bashforth{_}2(f,t,x1,x2)
% Nálgar lausn upphafsgildisverkefnisins
%   x' = f(t,x)
%   x(t(1)) = x1
% í punktunum í t með 2ja þrepa Adams-Bashforth aðferð.
% Stakið x2 er nálgunargildi á x(t(2)).

N = length(t);  M = length(x1); w = zeros(M,N);
% Upphafsstillum gildi f(t,x) og w
fx1 = f(t(1),x1); fx2 = f(t(2),x2);
w(:,1) = x1; w(:,2) = x2;
for i=3:N
  % Reiknum nálgunargildi
  h = t(i)-t(i-1);
  w(:,i) = w(:,i-1) + (h/2)*(3*fx2 - fx1);
  fx1 = fx2; fx2 = f(t(i),w(:,i));
end
```

7.37

7.5 Þriggja skrefa Adams-Bashforth

Gefin w_{n-1}, w_{n-2} og w_{n-3} fæst næsta nálgunargildi með

$$w_n = w_{n-1} + h(\tfrac{23}{12} f_{n-1} - \tfrac{16}{12} f_{n-2} + \tfrac{5}{12} f_{n-2})$$

og staðarskekkjan er $O(h^4)$ 7.38

7.5 Fjögurra skrefa Adams-Bashforth

Þegar við þekkjum w_{n-1}, w_{n-2}, w_{n-3} og w_{n-4} reiknum við næsta gildi með

$$w_n = w_{n-1} + h\big(\tfrac{55}{24} f_{n-1} - \tfrac{59}{24} f_{n-2} + \tfrac{37}{24} f_{n-3} - \tfrac{9}{24} f_{n-4}\big)$$

og skekkjan í nálguninni er $O(h^5)$. 7.39

7.6 Greining á samleitni og stöðugleika

Lítum aftur á upphafsgildisverkefnið okkar

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = w_0. \end{cases}$$

Við hugsum okkur að nálgun sé fundin í tímapunktunum

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b.$$

Við táknum nálgunargildi á $x(t_j)$ með w_j. Það er gefið með

$$w_n = w_{n-1} + h_n \varphi(f, t_0, \dots, t_n, w_0, \dots, w_n)$$

þar sem fallið $\varphi(f, t_0, \dots, t_n, w_0, \dots, w_n)$ er skilgreint með einhverjum hætti.

Við köllum þetta *nálgunaraðferðina sem fallið φ gefur af sér.* 7.40

7.6 Nokkur hugtök

Skekkja

Skekkja (e. error) eða *heildarskekkja* (e. total error) í nálgun á $x(t_n)$ með w_n er

$$e_n = x(t_n) - w_n.$$

Staðarskekkja (e. local truncation error) nálgunaraðferðarinnar við tímann t_n er

$$\tau_n = \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - \varphi(f, t_0, \dots, t_n, x(t_0), \dots, x(t_n))$$

Munið að hér er *rétta lausnin* sett inn í nálgunaraðferðina.

7.41

7.6 Samleitni, samræmi og stöðugleiki

Samleitni
Hugsum okkur nú að fjöldi tímapunktanna N stefni á óendanlegt. Við segjum að nálgunaraðferðin φ sé *samleitin* ef

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\le n\le N} |e_n| = 0$$

þar sem $e_n = x(t_n) - w_n$ táknar skekkjuna í n-ta tímaskrefinu.

Samræmi
Við segjum að nálgunaraðferðin φ *samræmist* upphafsgildisverkefninu ef um sérhvern tímapunkt t_{n-1} gildir að

$$\lim_{h_n\to 0} \tau_n = \lim_{t_n\to t_{n-1}} \left(\frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} - \varphi(f, t_0, \dots, t_n, x(t_0), \dots, x(t_n)) \right) = 0$$

7.42

7.6 Samræmi endurbættu Euler-aðferðarinnar

Munum að endurbætta Euler-aðferðin er

$$w_n = w_{n-1} + h_n f(t_{n-1} + \tfrac{1}{2}h_n, w_{n-1} + \tfrac{1}{2}hf(t_{n-1}, w_{n-1}))$$

sem gefur staðarskekkjuna

$$\tau_n = \frac{x(t_{n-1} + h_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - f(t_{n-1} + \tfrac{1}{2}h_n, x(t_{n-1}) + \tfrac{1}{2}h_n f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))).$$

Nú hugsum við okkur að t_{n-1} sé haldið föstu og látum billengdina $h_n = t_n - t_{n-1}$ stefna á 0. Þá fæst

$$\lim_{h_n\to 0} \tau_n = x'(t_{n-1}) - f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) = 0$$

Þetta segir okkur að endurbætta Euler-aðferðin **samræmist** upphafsgildisverkefninu. 7.43

7.6 Samræmi beinna eins skrefs aðferða

Þessi röksemdafærla alhæfist á allar beinar eins skrefs aðferðir, því staðarskekkja þeirra er

$$\tau_n = \frac{x(t_{n-1} + h_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1} + h_n, x(t_{n-1}))$$

Nú er eðlilegt að gefa sér að φ sé samfellt fall og þá verður markgildið af staðarskekkjunni

$$x'(t_{n-1}) - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}, x(t_{n-1})) = f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}, x(t_{n-1})).$$

Eins skrefs aðferðin sem fallið φ gefur af sér er því stöðug ef og aðeins ef

$$\varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}, x(t_{n-1})) = f(t_{n-1}, x(t_{n-1})).$$

7.44

7.6 Stöðuleiki

Gerum nú ráð fyrir að upphafsgildinu w_0 sé breytt í $\tilde{w}_0$ og að $\tilde{x}(t)$ uppfylli

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t)), \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{w}_0. \end{cases}$$

Lítum síðan á tilsvarandi nálgunarrunu

$$\tilde{w}_n = \tilde{w}_{n-1} + h_n \varphi(f, t_0, \dots, t_n, \tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n).$$

Skilgreining
Við segjum að nálgunaraðferðin sem φ gefur af sér sé *stöðug* ef til er fall $k(t) > 0$ þannig að

$$|\tilde{w}_n - w_n| \le k(t_n)|\tilde{w}_0 - w_0|, \qquad n = 1, 2, 3 \dots.$$

7.45

7.6 Lipschitz-samfelldni

Rifjum nú upp að við gerum ráð fyrir að fallið $f(t,x)$ sé skilgreint á svæði D sem inniheldur

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2\,;\, a \le t \le b, x \in \mathbb{R}\}.$$

Við segjum að f sé *Lipschitz samfellt á D með tilliti til x* ef til er fasti C_f þannig að

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le C_f|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

Hugsum okkur að $\varphi(f,s,t,x)$ sé fall sem gefur af sér beina eins skrefs nálgunaraðferð fyrir upphafsgildisverkefnið $x'(t) = f(t,x(t))$ með $x(t_0) = w_0$.

Við segjum að φ sé *Lipschitz-samfellt með tilliti til x* ef um sérhvert Lipschitz-samfellt fall f, tölur $s,t \in [a,b]$ og $x,y \in \mathbb{R}$ gildir að til er fasti L_φ þannig að

$$|\varphi(f,s,t,x) - \varphi(f,s,t,y)| \le L_\varphi|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

7.46

7.6 Setning um stöðugleika og samleitni

Gefum okkur jafna skiptingu á tímabilinu $[a,b]$, $t_n = a + nh$, þar sem $n = 0,1,2,\dots,N$ og $h = (b-a)/N$.

Ef fallið φ er Lipschitz-samfellt með tilliti til x með Lipschitz-fastann L_φ, þá gildir:

(i) Eins skrefs aðferðin sem φ gefur af sér er stöðug,

$$|\tilde{w}_n - w_n| \le e^{L_\varphi(t_n-a)}|\tilde{w}_0 - w_0|, \qquad n = 1,2,3,\dots.$$

(ii) Ef til eru fastar c og p þannig að staðarskekkjan uppfyllir $|\tau_n| \le c\,h^p$, fyrir öll $n = 1,2,3,\dots$ og $h \in]0,h_0]$, þá er aðferðin samleitin og við höfum

$$|e_n| = |x(t_n) - w_n| \le \frac{ch^p}{L_\varphi}\left(e^{L_\varphi(t_n-a)} - 1\right).$$

7.47

Kafli 7: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er hægt að skrifa annars stigs jöfnu $u'' = f(t,u,u')$ sem jafngilt hneppi?
2. Hvað er *bein aðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
3. Hvað er *óbein aðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
4. Hvað er *eins skrefs aðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
5. Hvað er *fjölskrefaaðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
6. Hvernig er *aðferð Eulers*?
7. Hvernig er *aðferð Eulers endurbætt*?
8. Hvað er *forsagnar- og leiðréttingaraðferð*?
9. Hvernig er *2. stigs Runge-Kutta aðferð*?
10. Hvernig er *4. stigs Runge-Kutta aðferð*?
11. Hvernig er staðarskekkja í nálgunaraðferð fyrir upphafsgildisverkefni skilgreind?

7.48

Kafli 7: Fræðilegar spurningar

12. Rökstyðjið að staðarskekkja í aðferð Eulers sé $O(h)$, þar sem h er tímaskrefið.
13. Hvernig er tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð.
14. Hvað þýðir að nálgunaraðferð fyrir upphafsgildisverkefni sé samleitin?
15. Hvað þýðir a nálgunaraðferð samræmist upphafsgildisverkefni?

7.49

Kafli 8: Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Töluleg greining, STÆ405G, 26. og 28. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

8.1

Yfirlit

Kafli 8: Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Kafli	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
8.0	Almenn atriði um jaðargildisverkefni	656-660	3-4
8.1	Línulegar jöfnur – Dirichlet-jaðarskilyrði	660-670	5-11
8.2	Línulegar jöfnur – Blönduð jaðarskilyrði	673-683	12-18

8.2

8.0 Almenn atriði um jaðargildisverkefni

8.0 Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Við ætlum að finna nálgunarlausnir á verkefnum af gerðinni

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= \alpha_3, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \beta_3. \end{aligned}$$

Afleiðujafnan er sögð vera línuleg ef hún er á forminu

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

8.3

8.0 Jaðarskilyrðin nefnast

(i) Dirichlet-jaðarskilyrði: $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$
Fallsjaðarskilyrði:

(ii) Neumann-jaðarskilyrði: $y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$
Afleiðujaðarskilyrði:
Flæðisjaðarskilyrði:

(iii) Robin-jaðarskilyrði: $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$
$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3$
$(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$
Blandað jaðarskilyrði:

Athugið að blandað jaðarskilyrði með $\alpha_2 = 0$ (eða $\beta_2 = 0$) er Dirichlet skilyrði með $\alpha = \alpha_3/\alpha_1$ (eða $\beta = \beta_3/\beta_1$).

Athugið að blandað jaðarskilyrði með $\alpha_1 = 0$ (eða $\beta_1 = 0$) er Neumann skilyrði með $\alpha = \alpha_3/\alpha_2$ (eða $\beta = \beta_3/\beta_2$).

8.4

8.1 Línulegar jöfnur – Dirichlet-jaðarskilyrði

8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Við nefnum x_j *skiptipunkta* eða *hnútpunkta* skiptingarinnar.

Punktarnir $a = x_0$ og $b = x_N$ nefnast *endapunktar* skiptingarinnar og x_j, með $j = 1, \ldots, N-1$, nefnast *innri punktar* skiptingarinnar.

Í fyrstu atrennu ætlum við aðeins að nálga lausnina fyrir línulegar jöfnur,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

Við reiknum út nálgun á réttu lausninni $y(x)$ í hnútpunktunum.

Rétta gildið í punktinum x_j táknum við með y_j og nálgunargildið með w_j,

$$y_j = y(x_j) \approx w_j.$$

Eins skrifum við

$$p_j = p(x_j), \qquad q_j = q(x_j), \qquad r_j = r(x_j).$$

8.5

8.1 Línulegar afleiðujöfnur:

Nú leiðum við út nálgunarjöfnur, eina fyrir hvern innri skiptipunkt. Við byrjum á því að stinga punkti x_j inn í afleiðujöfnuna

$$\big\{y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)\big\}_{x=x_j}.$$

Næst skiptum á afleiðum og mismunakvótum i þessari jöfnu,

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Síðan stillum við upp nálgunargildunum í stað réttu gildanna: 8.6

8.1 Skipt á afleiðum og mismunakvótum

Endurtökum réttu jöfnuna

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Nú fellum við niður leifarliðina og setjum nálgunargildin í stað réttu gildanna:

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j$$

Hér fáum við eina jöfnu fyrir sérhvern innri skiptipunkt $j = 1, \ldots, N-1$. 8.7

8.1 Dirichlet-jaðarskilyrði

Við erum komin með $N-1$ nálgunarjöfnu til þess að finna $N+1$ nálgunargildi $w_0, \ldots, w_N$ fyrir $y_0, \ldots, y_N$.

Ef við erum að leysa línulegt jaðargildisverkefni með Dirichlet-jaðarskilyrðum,

$$\begin{gathered} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \le x \le b, \\ y(a) = \alpha \quad \text{og} \quad y(b) = \beta, \end{gathered}$$

þá fæst nálgunin með því að leysa línulega jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} &= p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j, \qquad j = 1, \ldots, N-1, \\ w_N &= \beta. \end{aligned}$$

8.8

8.1 Jafngild framsetning á hneppinu

Við lítum aftur á línulegu nálgunarjöfnurnar

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j.$$

Margföldum alla liði með $-h^2$ og röðum síðan óþekktu stærðunum vinstra mengin jafnaðarmerkisins. Þá fæst línulega jöfnuhneppið

$$\big(-1 - \tfrac{1}{2}hp_j\big)w_{j-1} + \big(2 + h^2 q_j\big)w_j + \big(-1 + \tfrac{1}{2}hp_j\big)w_{j+1} = -h^2 r_j$$

fyrir $j = 1, 2, 3, \ldots, N-1$. 8.9

8.1 Línulega jöfnuhneppið á fylkjaformi

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ l_1 & d_1 & u_1 & & & & & \\ & l_2 & d_2 & u_2 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} & \\ & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Þar sem stuðlarnir l_j, d_j og u_j eru gefnir með

$$\begin{aligned} l_j &= -1 - \tfrac{1}{2}hp_j \\ d_j &= 2 + h^2 q_j \\ u_j &= -1 + \tfrac{1}{2}hp_j \end{aligned}$$

8.10

8.1 Óþekktar stærðir og hægri hlið

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Þetta jöfnuhneppi er leyst og þar með eru nálgunargildin fundin. 8.11

8.2 Línulegar jöfnur – Blönduð jaðarskilyrði

8.2 Línulega jafna – Blönduð jaðarskilyrði

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Til þess að líkja eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x = a$ þá hugsum við okkur að við bætum einum punkti $x_{-1} = a - h$ við og látum w_f tákna ímyndað gildi lausnarinnar í x_{-1}.

Svona punktur x_{-1} utan við skiptinguna er kallaður *felupunktur* við skiptinguna og ímyndað gildi w_f í felupunkti er kallað *felugildi*.

Takið eftir því að lausnin er ekki til í felupunktinum, en við reiknum eins og w_f sé gildi hennar þar.

Mismunajafnan sem líkir eftir afleiðujöfnunni í punktinum x_0 er

$$\big(-1-\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f+\big(2+h^2q_0\big)w_0+\big(-1+\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1=-h^2r_0$$

Mismunajafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er

$$\alpha_1 w_0+\alpha_2\frac{w_1-w_f}{2h}=\alpha_3.$$

8.12

8.2 Felugildið leyst út

Jafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er:

$$\alpha_1 w_0+\alpha_2\frac{w_1-w_f}{2h}=\alpha_3.$$

Út úr henni leysum við

$$w_f=w_1-\frac{2h}{\alpha_2}(\alpha_3-\alpha_1 w_0)$$

Við stingum síðan þessu gildi inn í jöfnuna sem líkir eftir afleiðujöfnunni

$$\big(-1-\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f+\big(2+h^2q_0\big)w_0+\big(-1+\tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1=-h^2r_0$$

Útkoman verður:

8.13

8.2 Jöfnur fyrir gildin í endapunktum

Fyrsta jafna hneppisins:

$$\left(2+h^2q_0-\big(2+hp_0\big)h\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)w_0-2w_1=-h^2r_0-\big(2+hp_0\big)h\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Með því að innleiða felupunkt $x_{N+1}=b+h$ hægra megin við skiptinguna, tilsvarandi felugildi w_f og leysa saman tvær jöfnur, þá fáum við síðustu jöfnu hneppisins :

$$-2w_{N-1}+\left(2+h^2q_N+\big(2-hp_N\big)h\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)w_N=-h^2r_N-\big(2-hp_N\big)h\frac{\beta_3}{\beta_2}$$

Við erum því aftur komin með $(N+1)\times(N+1)$-jöfnuhneppi

8.14

8.2 Hneppið á fylkjaformi

$$A\mathbf{w}=\mathbf{b}$$

$$A=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & & & & & & \\
l_1 & d_1 & u_1 & & & & & \\
 & l_2 & d_2 & u_2 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} & \\
 & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\
 & & & & & & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1}
\end{bmatrix}$$

Þar sem stuðlarnir l_j, d_j og u_j fyrir $j=1,2,3\dots,N-1$ eru þeir sömu og áður.

$$\begin{aligned}
l_j&=-1-\tfrac{1}{2}hp_j\\
d_j&=2+h^2q_j\\
u_j&=-1+\tfrac{1}{2}hp_j
\end{aligned}$$

8.15

8.2 Fyrsta og síðasta lína hneppisins

$$a_{11} = \begin{cases} 1, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ d_0 & \text{Neumann í } x = a : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \\ d_0 + 2hl_0\alpha_1/\alpha_2 & \text{Robin í } x = a : \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{12} = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ -2, & \text{annars.} \end{cases}$$

$$a_{N+1,N+1} = \begin{cases} 1, & \text{Dirichlet í } x = b : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ d_N & \text{Neumann í } x = b : \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ d_N - 2hu_N\beta_1/\beta_2 & \text{Robin í } x = a : \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{N+1,N} = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet í } x = b : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ -2 & \text{annars.} \end{cases}$$

8.16

8.2 Hægri hlið hneppisins

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{cases} \alpha = \alpha_3/\alpha_1, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ -h^2 r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Neumann í } x = a : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \\ -h^2 r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Robin í } x = a : \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$b_{N+1} = \begin{cases} \beta = \beta_3/\beta_1, & \text{Dirichlet í } x = a : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ -h^2 r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Neumann í } x = a : \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ -h^2 r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Robin í } x = a : \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

8.17

8.2 Samantekt

Gildi lausnarinnar $y(x)$ á línulega jaðargildisverkefninu

$$\begin{gathered} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3 \end{gathered}$$

í punktunum $x_j = a + jh$, þar sem $h = (b-a)/N$ og $j = 0, \ldots, N$, eru nálguð með

$$w_j \approx y(x_j) = y_j$$

Dálkvigurinn

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_N]^T$$

er lausn á línulegu jöfnuhneppi $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$.

Stuðlum $(N+1) \times (N+1)$ fylkisins A og $(N+1)$-dálkvigursins $\mathbf{b}$ hefur verið lýst hér að framan. 8.18

Kafli 8: Fræðilegar spurningar

1. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Dirichlet-jaðarskilyrði*? (Samheiti er *fallsjaðarskilyrði*.)
2. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Neumann-jaðarskilyrði*? (Samheiti eru *afleiðujaðarskilyrði* og *flæðisjaðarskilyrði*.)
3. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Robin-jaðarskilyrði*? (Samheiti er *blandað jaðarskilyrði*.)
4. Hvernig er nálgunarjafna fyrir línulegu afleiðujöfnuna $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ í innri skiptipunkti á bilinu $[a, b]$ leidd út?
5. Hvernig eru *felupunktur* og *felugildi* notuð til þess að meðhöndla blandað jaðarskilyrði $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ í vinstri endapunkti bilsins $[a, b]$?
6. Hvernig er *felupunktur* og *felugildi* notuð til þess að meðhöndla blandað jaðarskilyrði $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ í vinstri endapunkti bilsins $[a, b]$ og hvernig verður nálgunarjafnan í punktinum $x = 0$ þegar þetta er gert?

8.19

Kafli 3: Línuleg algebra, Gauss-eyðing, fylkjastaðll, skekkjumat, ástandstala, LU-þáttun og fastapunktsaðferðir

Töluleg greining, STÆ405G, 2., 4. og 9. apríl 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

3.1

Yfirlit

Kafli 3: Jöfnuhneppi

Kafli	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
3.1	Línuleg algebra	149-159	3-5
3.2	Vending (pivoting)	160-170	6-9
3.3	Fylkjastaðall (matrix norm)	171-180	10-17
3.4	Skekkjumat og ástandstala (condition numb.)	181-190	18-23
3.5	LU-þáttun	191-204	24-39
3.8	Fastapunktsaðferðir (fixed point iteration)	223-236	40-49
3.10	Newton-aðferð fyrir jöfnuhneppi	249-258	50-55
3.8	Fastapunktssetning fyrir jöfnuhneppi		56

3.2

3.1 Línuleg algebra

3.1 Línuleg jöfnuhneppi

Línuleg jöfnuhneppi
Gefið $n \times n$ fylki A og n-vigur $\mathbf{b}$ þá leitum við að vigri $\mathbf{x}$ þannig að

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Lausnir
Við höfum almennt tvær leiðir til þess að leysa línuleg jöfnuhneppi:

- Gauss-eyðing og innsetning.
- Reikna andhverfu A, A^{-1}. Þá er
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

3.3

3.1 Fjöldi aðgerða

- Gauss-eyðing fyrir $n \times n$ fylki krefst $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ reikniaðgerða. Innsetningin krefst svo n^2 aðgerða til viðbótar. Samanlagður fjöldi aðgerða er því
$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$
- Það að reikna A^{-1} krefst hins vegar $2n^3 - 2n^2 + n$ aðgerða og margföldunin $A^{-1}b$, krefst $2n^2 - n$ aðgerða til viðbótar. Samanlagður fjöldi aðgerða er því
$$2n^3.$$

Hér er greinilega gáfulegra að nota Gauss-eyðingu. Almennt þá forðumst við eins og mögulegt er að reikna A^{-1}.

3.4

3.1 Vandamál með stöðugleika

Einfalt dæmi
Skoðum jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nákvæm lausn er $x_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, x_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Ef hins vegar ε er minna en nákvæmnin í tölvunni sem erum að vinna á, þá gefur Gauss-eyðing í tölvu, þar sem eytt er með 1. línu, svarið $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Ef línunum væri víxlað, þá gæfi tölvan hins vegar $x_1 = 1, x_2 = 1$ sem er miklu nær réttu svari. Sjá nánar skrána `tg14_03synidaemi.pdf` á Uglu.

Athugasemd
Það er alveg ljóst að megum ekki framkvæma Gauss-eyðingu blindandi því þá getur magnast upp styttingarskekkja sem skemmir lausnina okkar.

3.5

3.2 Vending

3.2 Vending (e. pivoting)

Vandamálið
Það sem olli vandræðum í dæminu hér á undan var það að forystustuðull fyrstu línurnar var hlutfallslega miklu minni en forystustuðull annarrar línu.

Lausnin
Lausnin felst í því að víxla á línum þannig að við þurfum ekki að notast við litla forystustuðla.

3.6

3.2 Hlutvending (e. partial pivoting)

Í grófum dráttum: Í umferð i í Gauss-eyðingunni þá athugum við hvort tölugildi forystustuðla línanna fyrir neðan línu i eru stærri en forystustuðull línu i, ef svo er þá víxlum við á þeirri línu og línu i.

Það er, í i-tu ítrun Gauss-eyðingar þá látum við $M_i = \max_{i \le j \le n} |a_{ji}|$. Ef $|a_{ii}| < M_i$ þá víxlum við á línu i og fyrstu línunni fyrir neðan sem hefur forystustuðul með tölugildi jafnt og M_i. (Þetta þýðir að ef $j_0 = \min\{j; i \le j \le n \text{ og } a_{ji} = M_i\}$ þá víxlum við á línu i og j_0).

Vankantar
Hlutvending virkar oft vel en getur búið til skekkju þar sem hún tekur bara tillit til forystustuðlanna í hverri línu, sjá dæmi kafla 3.2 (bls. 165).

3.7

3.2 Sköluð hlutvending (e. scaled partial pivoting)

Skilgreinum vigurinn $\mathbf{s}$ sem heldur utan um "stærð" línanna í A,

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|.$$

Látum dálkvigurinn $\mathbf{r}$ halda utan um það hvernig við umröðum línunum í A. Byrjum með

$$\mathbf{r} = [1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ n]^T.$$

Athugasemd
Við munum uppfæra $\mathbf{r}$ eftir þörfum en breytum ekki $\mathbf{s}$ (of dýrt ef n stórt).

3.8

3.2 Sköluð hlutvending, framh.

Í ítrun i þá látum við

$$M_i = \max_{i \leq j \leq n} \frac{|a_{r_j i}|}{s_{r_j}},$$

og látum j_0 vera minnsta j þannig að hámarkinu er náð,

$$\frac{|a_{r_{j_0} i}|}{s_{r_{j_0}}} = M_i.$$

Ef $i < j_0$ þá skiptum við á línum i og j_0, þ.e.

$$\mathbf{r} = [\ldots \; i \; \ldots \; j_0 \; \ldots]^T \text{ breytist í } \mathbf{r} = [\ldots \; j_0 \; \ldots \; i \; \ldots]^T.$$

3.9

3.3 Fylkjastaðall

3.3 Inngangur

Að mæla fjarlægð milli hluta

Á rauntalnalínunni þá mælum við fjarlægð með tölugildinu, þannig að fjarlægðin á milli x og y er gefin með $d(x, y) = |x - y|$.

Í $\mathbb{R}^n$ þá finnst okkur evklíðski staðallinn náttúrulegur, enda svarar hann til þess að mæla fjarlægð milli punkta með beinni reglustiku;

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Þetta er hins vegar ekki eina leiðin til þess mæla fjarlægð í $\mathbb{R}^n$, eins og við sjáum fljótlega, og ekki endalega réttari en aðrar aðferðir.

Almennt viljum við geta mælt ”fjarlægð“ á milli allra þeirra hluta sem við erum skoða, hvort sem það eru margliður, föll eða fylki. Tilgangurinn er að geta metið hversu langt nálgunin okkar er frá réttu gildi og hversu stór skekkjan er í samanburði við ”stærð“ hlutarins sem við erum að vinna með.

3.10

3.3 Vigurstaðall

Skilgreining

Fall $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kallast *vigurstaðall* (e. vector norm) ef fyrir öll $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ gildir eftirfarandi:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{x} = 0$
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Athugasemd

Tölugildisfallið á $\mathbb{R}$ er greinilega staðall.

3.11

3.3 Dæmi um staðla

ℓ_2 staðallinn

Einnig kallaður evklíðska fjarlægðin, er gefinn með

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

ℓ_∞ staðallinn

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

ℓ_p staðlar

Almennt, ef $1 \leq p < \infty$, þá skilgreinum við

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3.12

3.3 Fylkjastaðall

Skilgreining
Fylkjastaðall (e. matrix norm) er fall $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, þannig að fyrir öll $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ gildir

1. $\|A\| \geq 0$
2. $\|A\| = 0$ ef og aðeins ef $A = 0$
3. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
5. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Athugasemd
Ef þessi skilgreining er borin saman við skilgreininguna á staðli fyrir vigurrúm þá sjáum við að eini raunverulegi munurinn er skilyrði 5.

3.13

3.3 Fylkjastaðall skilgreindur út frá vigurstaðli

Skilgreining
Látum $\|\cdot\|$ vera vigurstaðal. Fallið $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ sem skilgreint er með

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

kallast *náttúrulegi fylkjastaðallinn* sem $\|\cdot\|$ gefur af sér.

Athugasemd
Það þarf að sýna, og er ekki mjög erfitt, að þessi fylkjastaðall uppfyllir öll skilyrðin í skilgreiningu hér á undan og er því sannarlega fylkjastaðall.

Athugasemd
Ef $\|\cdot\|$ er náttúrulegur fylkjastaðall þá gildir að fyrir öll fylki A og alla vigra $\mathbf{x}$ að

$$\underbrace{\|A\mathbf{x}\|}_{\text{vigurstaðll}} \leq \underbrace{\|A\|}_{\text{fylkjastaðall}} \underbrace{\|\mathbf{x}\|}_{\text{vigurstaðall}}.$$

3.14

3.3 Dæmi um fylkjastaðal

Athugasemd
Fyrir sérhvern ℓ_p staðal fáum við fylkjastaðal $\|\cdot\|_p$.

$\|\cdot\|_\infty$
Einfaldastur er staðallinn sem tilheyrir ℓ_∞, en hann uppfyllir

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

3.15

3.3 Eigingildi

Skilgreining
Látum A vera fylki. Ef tala λ (hugsanlega tvinntala) og vigur $\mathbf{x}$ uppfylla

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

þá kallast λ *eigingildi* A, og $\mathbf{x}$ *eiginvigur* A.

Athugið að eigingildi A eru nákvæmlega rætur kennimargliðu A, $t \mapsto \det(A - It)$.

3.16

3.3 Róf og eiginleikar þess

Skilgreining
Mengi allra eigingilda A er kallað *róf* A (e. spectrum) og er táknað með $\sigma(A)$.

Rófgeisli (e. spectral radius) fylkisins A er talan

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Setning
Látum A vera fylki, þá gildir eftirfarandi

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
- $\rho(A) \leq \|A\|$ fyrir sérhvern náttúrulegan fylkjastaðal $\|\cdot\|$
- Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ þá er til náttúrulegur fylkjastaðall $\|\cdot\|$ þannig að $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

3.17

3.4 Skekkjumat og ástandstala

3.4 Hvernig á að mæla skekkju

Gerum ráð fyrir að A sé andhverfanlegt fylki, $\mathbf{b}$ einhver vigur og að við séum að leita að lausn $\mathbf{x}$ á

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ef við höfum nálgun $\tilde{\mathbf{x}}$ þannig að *leifin* (e. residual) $\mathbf{r} = A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ er lítil, hvað getum við þá sagt um *skekkjuna* (e. error) $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$? Er hún endilega lítil?

Sjáum að svo er ekki, skekkjan getur verið hlutfallslega miklu meiri heldur en leifin (Example 3.11).

3.18

3.4 Skekkjumat

Við höfum fjórar jöfnur

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{r} = A(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = A\mathbf{e}, \quad \text{og} \quad \mathbf{e} = A^{-1}\mathbf{r}$$

og þær gefa okkur fjórar ójöfnur fyrir tilsvarandi staðal:

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{b}\|, \quad \|\mathbf{r}\| \leq \|A\|\|\mathbf{e}\|, \quad \|\mathbf{e}\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{r}\|$$

Við getum tengt tvær síðustu ójöfnurnar saman í mat á skekkjunni

$$\frac{1}{\|A\|} \cdot \|\mathbf{r}\| \leq \|\mathbf{e}\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{r}\|$$

og með því að nota fyrstu tvær ójöfnurnar fæst mat á hlutfallslegri skekkju

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Nú skilgreinum við *ástandstölu fylkisins* A með

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

3.19

3.4 Ástandstala fylkis og mat á hlutfallslegri skekkju

Matið
Með ástandstölunni verður mat okkar á hlutfallslegu skekkjunum að

$$\frac{1}{\kappa(A)} \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Athugasemd
Athugið að skilgreiningin

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

er *mjög* háð því hvaða staðal við veljum, en við höfum þó að

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

3.20

3.4 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur nú að við viljum leysa jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en vegna skekkju í stuðlum jöfnuhneppisins leysum við annað hneppi $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$.

Við skilgreinum *gagnaskekkjur* $\delta A = \tilde{A} - A$ og $\delta\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$ og ætlum að nota þær til þess að meta skekkjuna $\mathbf{e} = \delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$.

Við verðum að gera ráð fyrir að $\|\delta A\| \leq 1/\|A^{-1}\|$ sem tryggir að fylkið $\tilde{A}$ sé andhverfanlegt.

Nú stillum við upp jöfnuhneppinu $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ á forminu

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$$

sem jafngildir

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\big(\delta\mathbf{b} - (\delta A)\mathbf{x} - (\delta A)(\delta x)\big)$$

3.21

3.4 Áhrif gagnaskekkju

Við vorum komin með jöfnuna

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\big(\delta\mathbf{b} - (\delta A)\mathbf{x} - (\delta A)(\delta x)\big).$$

Af henni leiðir ójafnan

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\big(\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta A\|\|\mathbf{x}\| + \|\delta A\|\|\delta\mathbf{x}\|\big)$$

Einangrum nú $\|\delta\mathbf{x}\|$,

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \cdot \big(\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta A\|\|\mathbf{x}\|\big)$$

deilum með $\|\mathbf{x}\|$ báðum megin, margföldum síðan með $\|A\|$ í teljara og nefnara í hægri hliðinni,

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|A\|\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

3.22

3.4 Áhrif gagnaskekkju

Við vorum komin með

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|A\|\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Samkvæmt skilgreiningu er $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ og við höfum auk þess ójöfnuna $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$, en það gefur matið á hlutfallslegu skekkjunni sem við sækjumst eftir

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot (\|\delta A\|/\|A\|)} \cdot \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

3.23

3.5 LU-þáttun

3.5 Nokkrar skilgreiningar um fylki

(i) Fylkið A nefnist *neðra þríhyrningsfylki* ef öll stök fyrir ofan hornalínuna í A eru 0, þ.e. $a_{ij} = 0$ ef $i < j$.
(ii) Fylkið A nefnist *efra þríhyrningsfylki* ef öll stökin neðan við hornalínuna eru 0, þ.e. $a_{ij} = 0$ ef $i > j$.
(iii) Fylkið A nefnist *bandfylki* (e. striped matrix) ef til er $\beta \leq n - 2$ þannig að $a_{ij} = 0$ ef $|i - j| > \beta$. Minnsta talan β sem uppfyllir þetta skilyrði kallst á *bandvídd* fylkisins A.
(iv) Ef A er bandfylki með bandvíddina 1, þá nefnist A *þríhornalínufylki*.
(v) Fylkið A er sagt vera *samhverft* ef $a_{ij} = a_{ji}$ fyrir öll i og j.
(vi) Fylkið A er sagt vera *jákvætt ákvarðað* ef $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ gildir fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq 0$ í $\mathbb{R}^n$.

3.24

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með neðra þríhyrningsfylki

Ef A er neðra þríhyrningsfylki, þá er úrlausn jöfnuhneppisins $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auðveld, því hneppið er þá af gerðinni

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 && = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 && = b_2, \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 && = b_3, \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots && \vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \cdots + a_{nn}x_n && = b_n,
\end{aligned}$$

3.25

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með neðra þríhyrningsfylki

Við getum rakið okkur niður línurnar og leyst úr stærðirnar $x_1, \dots, x_n$ hverja á eftir annarri

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1/a_{11}, \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}, \\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \\
\vdots \qquad &\vdots \qquad \vdots \\
x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}.
\end{aligned}$$

3.26

3.5 Talning á aðgerðunum við úrlausnina

Nú skulum við telja saman fjölda reikningsaðgerða sem þarf til þess að framkvæma þessa útreikninga.

Við lítum á samlagningu og frádrátt sem sömu aðgerðina. Við þurfum enga samlagningu til að reikna út x_1, eina til þess að reikna út x_2, tvær til þess að reikna x_3 og þannig áfram upp í $n-1$ samlagningu til þess að reikna út x_n.

Heildarfjöldinn er því

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \tfrac{1}{2}n(n-1) = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n.$$

Fjöldi margfaldana er sá sami.

Við þurfum hins vegar aðeins eina deilingu til þess að reikna út hverja af stærðunum $x_1, \dots, x_n$.

Heildarfjöldi reikniaðgerða við úrlausn á línulegu jöfnuhneppi $Ax = b$, þar sem A er neðra þríhyrningsfylki er því

$$\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + n = n^2.$$

3.27

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með efra þríhyrningsfylki

Hugsum okkur nú að A sé efra þríhyrningsfylki. Þá verður jöfnuhneppið

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\
\vdots \quad &\vdots \\
a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}$$

3.28

3.5 Úrlausn á jöfnuhneppi með efra þríhyrningsfylki

Við getum rakið okkur upp línurnar og fundið $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ hverja af annarri

$$\begin{aligned}
x_n &= b_n/a_{nn}, \\
x_{n-1} &= (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}, \\
\vdots \quad &\vdots \qquad \vdots \\
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1,n}x_n)/a_{11}.
\end{aligned}$$

Aðgerðafjöldinn er sá sami og í úrlausn neðra þríhyrningshneppisins. 3.29

3.5 Línuaðgerðir

Gerum ráð fyrir að við séum að ryðja 4×4 fylki með Gauss-eyðingu og að við séum búin með fyrsta dálkinn. Næsta skref er að nota línu 2 til þess að losna við stökin í sætum (3,2) og (4,2).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a & \cdot & \cdot \\ 0 & b & \cdot & \cdot \\ 0 & c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Lína 3, l_3, verður þá að $l_3 - \frac{b}{a} l_2$, og líne 4, l_4, verður að $l_4 - \frac{c}{a} l_2$.

Þessar tvær aðgerðir má einnig framkvæma með því að margfalda fylkið að ofan frá vinstri með fylkinu

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.30

3.5 Ný sýn á Gauss-eyðingu

Það að ryðja fylkið eins og hér á undan, felst því í því að margfalda A frá vinstri með þremur fylkjum M_1, M_2 og M_3 sem eru þannig að M_i er einingafylkið nema í sætum $(i+1, i), \ldots, (n, i)$ eru tölur sem eru hugsanlega frábrugðnar 0.

Athugum að Gauss-eyðing skilar fylki U á efra þríhyrningsformi.

Við getum því skrifað

$$M_3 M_2 M_1 A = U$$

Almennt, fyrir $n \times n$ fylki þá getum við skrifað

$$M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A = U,$$

þar sem M_i eru fylki eins og lýst er hér að ofan.

3.31

3.5 Nánar um M_i

Við sjáum að ef

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & & \\ & & \cdot & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \cdot & \\ & & m_{n,i} & & & & 1 \end{bmatrix},$$

þá er

$$M_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & & \\ & & \cdot & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \cdot & \\ & & -m_{n,i} & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

3.32

3.5 Nánar um M_i

Eins þá er auðvelt að sjá að

$$M_i^{-1} M_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & -m_{i+1,i} & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & 1 & & & \\ & & \cdot & & -m_{j+1,j} & \cdot & & \\ & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & & -m_{n,i} & & -m_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Það er

$$M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -m_{2,1} & 1 & & & & \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 & & & \\ & -m_{4,2} & -m_{4,3} & 1 & & \\ & . & & & . & \\ -m_{n,1} & -m_{n,2} & -m_{n,3} & . & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

3.33

3.5 LU-þáttun

Þetta hefur í för með sér að ef við skilgreinum $L = M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}$ þá er

$$A = LU$$

eða

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ -m_{2,1} & 1 & & & & & & \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 & & & & & \\ & -m_{4,2} & -m_{4,3} & 1 & & & & \\ & . & & & . & & & \\ & . & & & & . & & \\ & . & & & & & . & \\ -m_{n,1} & -m_{n,2} & -m_{n,3} & . & . & . & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} U$$

Þannig að með því að framkvæma Gauss-eyðingu á A og halda utanum um aðgerðirnar (M_i'in) og niðurstöðuna U þá fæst LU-þáttun á A. 3.34

3.5 LU-þáttun og sköluð hlutvending

Vandamálið
Aðferðin hér að framan gerði ráð fyrir að stak $a_{i,i}$ yrði aldrei 0 (þá getum við ekki notað þá línu til þess að eyða). Eins hugsuðum við ekkert út í styttingarskekkjur sem við búum til.

Lausnin
Ef við framkvæmum Gauss-eyðinguna með skalaðri hlutvendingu þá ráðum við bót á báðum þessum atriðum, því þá veljum við aldrei línu með forystustuðul 0 og við minnkum skekkjuna eins og hefur komið fram áður.

Athugasemd
Þegar við notum skalaða hlutvendingu þá uppfylla fylkin L og U ekki endilega $LU = A$ (sjá dæmi bls. 196). Þess í stað fæst

$$LU = PA$$

þar sem fylkið P umraðar línunum í A í samræmi við umröðunarvigrinn $\mathbf{r}$. Það er, stökin í P eru 0, nema $p_{i,r_i} = 1$.

3.35

3.5 Úrlausn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

Við skiptum nú úrlausnarferlinu á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ í þrjú skref

(i) LU**-þáttun:** Reiknum út neðra þríhyrningsfylki L og efra þríhyrningsfylki U með skalaðri hlutvendingu. Höldum utanum $\mathbf{r}$ (og þar með P). Þá er

$$LU = PA.$$

(ii) **Forinnsetning:** Leysum $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$.
(iii) **Endurinnsetning:** Leysum $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
Lausnin sem við leitum að er þá $\mathbf{x}$, því

$$P\mathbf{b} = L\mathbf{y} = UL\mathbf{x} = PA\mathbf{x},$$

sem er jafngilt því að $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ 3.36

3.5 Fjöldi reikniaðgerða fyrir LU-þáttun

Heildarfjöldi reikningsaðgerða til þess að framkvæma LU-þáttunina er

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Liðir (ii) og (iii) krefjast svo $n^2 + n^2 = 2n^2$ aðgerða til viðbótar. Samanlagður fjöldi aðgerða er því

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Ef n er stór tala, segjum $n = 1000$, þá er fyrsti liðurinn lang stærstur og við getum slegið á aðgerðafjöldann með $\frac{2}{3}n^3$.

Þetta er töluvert betra heldur en að reikna A^{-1} og svo $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, en þá er heildafjöldi aðgerða $2n^3$. 3.37

3.5 Mörg jöfnuhneppi

Ef við þurfum að leysa mörg jöfnuhneppi með sama stuðlafylkið þá koma kostir LU-þáttunar vel í ljós.

Gefið A og $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ þá leitum við að vigrum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ þannig að

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i, \qquad \text{fyrir } i = 1, \ldots, m.$$

Við þurfum bara að framkvæma LU-þáttunina einu sinni, en innsetningarnar í lið (ii) og (iii) framkvæmum við m-sinnum. Heildar fjöldi aðgerða er þá

$$\frac{2}{3}n^3 + (2m - \frac{1}{2})n^2 - (m - \frac{1}{6})n.$$

3.38

3.8 Fastapunktsaðferðir fyrir línuleg jöfnuhneppi

3.8 Ítrekunaraðferðir til þess að leysa línuleg jöfnuhneppi

Munum að samanlagður fjöldi reikniaðgerða sem þarf til þess að leysa $n \times n$ línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ með Gauss-eyðingu, for- og endurinnsetningu er $\sim \frac{2}{3}n^3$.

Ef jöfnuhneppið er jafngilt hneppinu

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

þá getum við sett upp fastapunktsferð til þess að leysa þetta hneppi með því að giska á eitthvert nálgunargildi $\mathbf{x}^{(0)}$ fyrir lausnina og ítra síðan með formúlunni

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

í þeirri von að runan $(\mathbf{x}^{(k)})$ stefni á réttu lausnina $\mathbf{x}$ á upprunalega jöfnuhneppinu.

Það þarf $n^2 - n$ aðgerðir til þess að reikna út margfeldið $T\mathbf{v}$ fyrir vigur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og því getum við komist upp með að taka $\approx \frac{2}{3}n$ ítrekanir áður en heildaraðgerðafjöldinn er kominn upp fyrir aðgerðafjöldann í Gauss-eyðingu, ásamt for- og endurinnsetningu. 3.39

3.8 Fastapunktsítrekun til þess að leysa línuleg jöfnuhneppi

Við ætlum nú að gera ráð fyrir að jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sé jafngild

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

giskum á eitthvert nálgunargildi $\mathbf{x}^{(0)}$ fyrir lausnina $\mathbf{x}$ og skilgreinum síðan rununa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Allt er nú undir því komið að $n \times n$ fylkið T sé vel valið. 3.40

3.8 Fastapunktsítrekun - skekkjumat

Við skilgreinum nú skekkjuna í k-ta ítrekunarskrefinu $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$. Þá gildir formúlan

$$\mathbf{e}^{(k)} = T\mathbf{e}^{(k-1)} = T^2\mathbf{e}^{(k-2)} = \cdots = T^k\mathbf{e}^{(0)}$$

sem við höfum áður séð í athugun okkar á fastapunktsaðferðinni.

Nú beitum við

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \|T^k\|\|\mathbf{e}^{(0)}\| \leq \|T\|^k\|\mathbf{e}^{(0)}\|$$

Við höfum $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = T\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} - \mathbf{x}^{(0)}$ og $\mathbf{c} = \mathbf{x} - T\mathbf{x}$ og þar með

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = T(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}) = -(\mathbf{e}^{(0)} - T\mathbf{e}^{(0)}) = -(I-T)\mathbf{e}^{(0)}.$$

Þetta gefur jöfnuna:

$$\mathbf{e}^{(0)} = -(I-T)^{-1}\big(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\big).$$

3.41

3.8 Fastapunktsítrekun - skekkjumat

Með smá útreikningi má sýna fram á að ef $\|T\| < 1$, þá er

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Við vorum komin með ójöfnurnar

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \|T\|^k\|\mathbf{e}^{(0)}\|$$

og niðurstaðan verður því

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

Sem þýðir að fastapunktsaðferðin er samleitin þegar $\|T\| < 1$. 3.42

3.8 Skilyrði fyrir samleitni

Munum nú að $\rho(T)$ er rófgeisli fylkisins T sem er samkvæmt skilgreiningu tölugildi á stærsta eigingildi fylkisins T.

Rifjum líka upp að fyrir sérhvern náttúrlegan fylkjastaðal $\|\cdot\|$ þá er $\rho(T) \leq \|T\|$, og að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að hægt er að finna náttúrlegan fylkjastaðal þannig að

$$\|T\| \leq \rho(T) + \varepsilon.$$

Sérstaklega gildir í tilfellinu $\rho(T) < 1$ að til er náttúrlegur fylkjastaðall $\|\cdot\|$ þannig að $\|T\| < 1$. Þetta þýðir að fastapunktsaðferðin er samleitin ef $\rho(T) < 1$. 3.43

3.8 Skiptingaraðferð (e. splitting method)

Við viljum setja upp fastapunktsaðferð til þess að leysa línulega jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ með því að umrita jöfnuna yfir í jafngilda línulega jöfnu

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

Gerum ráð fyrir að $A = M - N$ þar sem M er andhverfanlegt fylki. Þá jafngildir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jöfnunni $M\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$ og fastapunktsjafnan er

$$\mathbf{x} = M^{-1}N\mathbf{x} + M^{-1}\mathbf{b},$$

þar sem $T = M^{-1}N$ og $\mathbf{c} = M^{-1}\mathbf{b}$.

Þessi leið til þess að umrita línulega jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yfir í jafngilda hneppið $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ nefnist *skiptingaraðferð* fyrir línulega jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 3.44

3.8 Jacobi-aðferð

Við skrifum $A = D - L - U$, þar sem D er hornalínufylkið með hornalínu A, L er neðra þríhyrningsfylki og U er efra þríhyrningsfylki

Við tökum $M = D$ og $N = L + U$ og fáum þá $T = D^{-1}(L + U)$ og $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$.

Þessi skiptingaraðferð er nefnd *Jacobi-aðferð.*

Rakningarformúlan er
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}.$$
Ef við skrifum hana hnit fyrir hnit, þá fáum við fyrir $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)$$

3.45

3.8 Gauss-Seidel-aðferð

Augljós endurbót á Jacobi-aðferðinni er að nota gildið $x_i^{(k+1)}$ fyrir $i < j$ um leið og það hefur verið reiknað.

Við það breytist rakningarformúlan í Jacobi-aðferð í

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)$$

Þetta svarar til þess að við veljum skiptingu á A með $M = D - L$ og $N = U$ og þar með að

$$T = (D - L)^{-1}U \qquad \text{og} \qquad \mathbf{c} = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

3.46

3.8 SOR-aðferð (e. successive over-relaxation)

Það er hægt að hraða samleitni í Gauss-Seidel-aðferð með því að taka vegið meðaltal af gildinu $x_i^{(k+1)}$ sem kemur út úr Gauss-Seidel reikniritinu og næsta gildi á undan með vægisstuðli sem við táknum með ω.

Formúlan verður

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)$$

Þetta svarar til þess að við veljum

$$M = \frac{1}{\omega}D - L \quad og \quad N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U$$

og þar með að

$$T = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right) \quad \text{og} \quad \mathbf{c} = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\mathbf{b}$$

3.47

3.8 Samleitni Gauss-Seidel-aðferðar

Setning

- Gerum ráð fyrir að A sé samhverft rauntölufylki með öll hornalínustökin jákvæð. Þá er Gauss-Seidel aðferðin samleitin ef og aðeins ef A er jákvætt ákvarðað.
- Ef fylkið A er jákvætt ákvarðað, þá er Gauss-Seidel-aðferð samleitin fyrir sérhvert val á upphafságiskun $\mathbf{x}^{(0)}$.

3.48

3.10 Newton-aðferð fyrir jöfnuhneppi

3.10 Aðferð Newtons fyrir jöfnuhneppi

Látum $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, þar sem I er svæði í $\mathbb{R}^n$ vera samfelld föll. Það getur komið sér vel að geta leyst ólínuleg jöfnuhneppi af gerðinni

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Svo heppilega vill til að aðferð Newtons virkar næstum óbreytt fyrir slík hneppi. 3.49

3.10 Jacobi-fylki

Skilgreinum $\mathbf{f} : I \to R^n$ með

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \quad \dots \quad , f_n(\mathbf{x})\big)$$

og gerum ráð fyrir að allar hlutafleiðurnar $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$ séu til og séu samfelldar.

Táknum Jacobi-fylki $\mathbf{f}$ með $\mathbf{f}'$, það er

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

3.50

3.10 Aðferð Newtons fyrir hneppi

Lausn á hneppinu er því vigur $\mathbf{r}$ þannig að $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0$.

Ef $\mathbf{r}$ er lausn hneppisins og $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ er upphafságiskun á $\mathbf{r}$ má sjá að runan $(\mathbf{x}_n)$, þar sem

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_n^T$$

og $\mathbf{h}_n^T$ er lausn á jöfnuhneppinu

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}_n^T = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

stefnir á lausnina $\mathbf{r}$.

Við getum metið skekkjuna með

$$\mathbf{e}_{n+1} \approx \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|$$

og forritið okkar helst næstum óbreytt, við þurfum aðeins að skipta `abs` út fyrir skipunina `norm`. 3.51

3.10 Matlab-forrit fyrir hneppi

```
function x = newtonNullHneppi(f,df,x0,epsilon)
%
%   x = newtonNullHneppi(f,df,x0,epsilon)
%
% Nálgar núllstöð fallsins f:Rn --> Rn með aðferð Newtons.
% Fallið df er Jacobi-fylki f, x0 er upphafságiskun
% á núllstöð og epsilon er tilætluð nákvæmni.
% x0 verður að vera dálkvigur og f verður að
% skila dálkvigrum

x = x0; mis = -df(x)\f(x);
% Ítrum meðan ástæða er til
while (norm(mis) >= epsilon)
    x = x + mis;
    mis = -df(x)\f(x);
end
```

3.52

3.10 Sýnidæmi

Grafið $y = e^x$ sker lokaða ferilinn sem gefinn er með jöfnunni $x^4 + y^2 = 1$ í tveimur punktum. Notið aðferð Newtons til þess að nálga hnit þeirra með 5 aukastafa nákvæmni.

Lausn: Það er alveg augljóst að punkturinn $\mathbf{r} = (0, 1)$ gefur lausn á jöfnuhneppinu. Við látum eins og ekkert sé og giskum á $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 0.75)$

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|$
0	0.50000000000000	0.75000000000000	
1	0.17270262414568	1.10909912528477	0.18447541668198
2	0.01946538693088	1.00638822766059	0.02028257413953
3	0.00020831857772	1.00002048613263	0.00020930163934
4	0.00000002190660	1.00000000020984	0.00000002190761
5	0.00000000000000	1.00000000000000	0.00000000000000
6	-0.00000000000000	1.00000000000000	0.00000000000000

3.53

3.10 Sýnidæmi framhald

Við tökum fyrir hinn skurðpunktinn:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|$
0	-0.80000000000000	0.25000000000000	
1	-1.03486380522268	0.34379785380788	0.07380487278262
2	-0.96968875917544	0.37842981331349	0.00919771982977
3	-0.96137076039507	0.38235523639344	0.00014098927991
4	-0.96124395918305	0.38241687590740	0.00000003252214
5	-0.96124392995056	0.38241689016050	0.00000000000000
6	-0.96124392995055	0.38241689016050	0.00000000000000

Nálgun okkar á skurðpunkti ferlanna í vinstra hálfplaninu er $(-0.96124392995055, 0.38241689016050)$

Í töfluna var ekki hægt að koma fyrir athugun á samleitnistiginu en hlutfallið

$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|} \approx \frac{\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|}{\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|^2} = 1.6$$

fyrir fjögur síðustu gildin. 3.54

3.8 Fastapunktssetningi fyrir jöfnuhneppi

3.8 Fastapunktssetning

Munum að mengi X í $\mathbb{R}^n$ er sagt vera *kúpt* ef strikið sem tengir sérhverja tvo punkta í X liggur alltaf í X.

Fastapunktssetning:

Látum X vera lokað og takmarkað kúpt hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{f} : X \to X$ vera herpingu, þ.e.a.s. til er $\lambda \in [0, 1[$ þannig að

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \le \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Þá hefur $\mathbf{f}$ nákvæmlega einn fastapunkt $\mathbf{r}$ í menginu X og runan $(\mathbf{x}_n)$ þar sem

$$\mathbf{x}_0 \in X,$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n \ge 0$$

stefnir á hann. 3.55

Kafli 3: Fræðilegar spurningar:

1. Lýsið því hvernig línulegt jöfnuhneppi er leyst með LU-þáttun, for- og endurinnsetningu.
2. Hvað þýðir að A sé efra þríhyrningsfylki og hvað þýðir að A sé neðra þríhyrningsfylki?
3. Hvað er bandfylki og hvað er þríhornalínufylki?
4. Hvað þýðir að A sé samhverft og hvað þýðir að A sé jákvætt ákvarðað?

5. Hver er heildarfjöldi reikniaðgerða sem þarf til þess að leysa $n \times n$ línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ef A er efra eða neðra þríhyrningsfylki?
6. Hvað er LU-þáttun á $n \times n$ fylki A?
7. Hver er stærðargráðan $\approx an^k$ á fjölda langra reikningsaðgerða sem þarf til þess að framkvæma LU-þáttun á $n \times n$ fylki?

3.56

Kafli 3: Fræðilegar spurningar:

8. Hvað er PLU-þáttun á fylki A og til hvers er henni beitt?
9. Hvað er fylkjastaðall og hvernig er fylkjastaðall sem staðall $\|\cdot\|_v$ á $\mathbb{R}^n$ gefur af sér? (Þetta er einnig nefnt náttúrlegur fylkjastaðall.)
10. Hvað er rófgeisli fylkis og hvernig tengist hann fylkjastöðlum?
11. Hvernig er ástandstala fylkis skilgreind og hvernig er hún notuð til þess að meta hlutfallslega skekkju í nálgunarlausn á línulegu jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
12. Hvernig er skiptingaraðferð til þess að finna nálgun á línulegu jöfnuhneppi?
13. Jacobi-aðferð er dæmi um skiptingaraðferð. Hvernig er hún?
14. Gauss-Seidel-aðferð er annað dæmi um skiptingaraðferð. Hvernig er hún?
15. Hvernig er ítrekunarskrefið í aðferð Newtons fyrir hneppi?

3.57