Kafli 7: Upphafsgildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Töluleg greining, STÆ405G, 12., 14. og 19. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

7.1

Yfirlit

Kafli 7: Upphafsgildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Kafli	Heiti á viðfangsefni	Bls.	Glærur
7.1	Almenn atriði um upphafsgildisverkefni	533-544	3-13
7.8	Upphafsgildisverkefni fyrir jöfnuhneppi	623-631	5-8
7.2-3	Aðferð Eulers,	546-566	14-15
7.4	Runge Kutta aðferðir	570-578	16-23
7.6	Skekkjumat, samleitni og stöðugleiki	598-607	24-25
7.7	Stýring á skekkju og breytileg skrefastærð	608-621	26-30
7.5	Fjölskrefaaðferðir	583-594	31-39
7.6	Greining á samleitni og stöðugleika	598-607	40-47

7.2

7.1 Almenn atriði

Fyrsta stigs afleiðujafna með upphafsgildi

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Hér er gefið fall f á einhverju svæði U í $\mathbb{R}^2$ sem inniheldur (t_0, x_0).

Við segjum að x sé lausn á þessu verkefni ef x er fall skilgreint á bili I, sem er þannig að

- $t_0 \in I$,
- $(t, x(t)) \in U$ fyrir öll $t \in I$,
- $x'(t) = f(t, x(t))$ fyrir öll $t \in I$, og
- $x(t_0) = x_0$.

7.3

7.1 Tilvist og ótvíræðni lausna

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ef f er samfellt, þá er alltaf til lausn á einhverju bili I. (Setning Peano)

Ef f uppfyllir Lipschitz-skilyrði með tilliti til x, þ.e.a.s. til er fasti C þannig að

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le C|x_1 - x_2|$$

fyrir öll (t, x_1) og (t, x_2) í grennd um (t_0, x_0) þá er lausnin ótvírætt ákvörðuð. (Setning Picard) 7.4

7.1 Upphafsgildisverkefni fyrir hneppi

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n, \qquad U \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in U.$$

Skrifum $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ sem *dálkvigra*,

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T \quad \text{og} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [f_1(t, \mathbf{x}), \ldots, f_n(t, \mathbf{x})]^T$$

7.5

7.1 Jöfnur af stigi > 1 og jafngild hneppi

Jöfnur af hærra stigi má umrita yfir í jafngild hneppi. Ef við höfum m-stigs diffurjöfnu

$$u^{(m)} = g(t, u, \ldots, u^{(m-1)})$$
$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \quad \ldots, \quad u^{m-1}(t_0) = u_{(m-1)}$$

þar sem g er gefið fall og $u_0, \ldots, u_{m-1}$ eru gefnar tölur.

Jafngilt hneppi er fengið með því að setja

$$\begin{aligned} x_1 &= u, \\ x_2 &= u', \\ x_3 &= u'', \\ &\vdots \\ x_m &= u^{(m-1)} \end{aligned}$$

7.6

7.1 Jafngilt hneppi

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 & x_1(t_0) = u_0 \\ x_2' &= x_3 & x_2(t_0 = u_1 \\ \vdots & \vdots & \\ x_{m-1}' &= x_m & x_m(t_0) = u_{m-1} \\ x_m' &= g(t, x_1, \ldots, x_m) & \end{cases}$$

Lausn hneppisins gefur ótvírætt lausn á upprunalegu m-ta stigs afleiðujöfnunni. 7.7

7.1 Tilvist og ótvíræðni lausna á hneppum

Tilvistar- og ótvíræðnisetningar Peanos og Picards eru þær sömu fyrir hneppi

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Við þurfum bara að setja norm $\|\cdot\|$ í stað tölugildis $|\cdot|$ í öllum ójöfnum og þar með talið í Lipschitz-skilyrðinu. 7.8

7.1 Ritháttur

Til einföldunar á rithætti skulum við skrifa lausnarvigurinn $\mathbf{x}$ og vörpunina $\mathbf{f}$ sem x og f og láta eins og við séum að leysa fyrsta stigs afleiðujöfnu.

Við veljum gildi $t_0 < t_1 < \cdots < t_j < \cdots$ og reiknum út nálgunargildi w_j á gildi lausnarinnar $x(t_j)$ í punktinum t_j. Gildið $w_0 = x(t_0)$ er rétta upphafsgildi lausnarinnar

Talan t_j kallast j-ti tímapunkturinn og talan $h_j = t_j - t_{j-1}$ nefnist j-ta tímaskrefið. 7.9

7.1 Heildum lausnina

Ef við heildum lausn afleiðujöfnunnar yfir tímabilið $[t, t+h]$, þá fáum við að hún uppfyllir jöfnuna

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, x(\tau))\, d\tau = x(t) + h\int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds.$$

Ef við setjum $t = t_{j-1}$ inn í þessa jöfnu, þá fáum við

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{h_j} = \int_0^1 f(t_{j-1} + sh_j, x(t_{j-1} + sh_j))\, ds$$

7.10

7.1 Almennt um nálgunaraðferðir

Við leggjum til grundvallar jöfnuna

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{h_j} = \int_0^1 f(t_{j-1} + sh_j, x(t_{j-1} + sh_j))\, ds$$

Nálgunaraðferðirnar snúast allar um að gera einhvers konar nálgun á heildinu í hægri hliðinni

$$\int_0^1 f(t_{j-1} + sh_j, x(t_{j-1} + sh_j))\, ds \approx \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_j)$$

og leysa síðan w_j út úr jöfnunni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_j)$$

7.11

7.1 Beinar og óbeinar aðferðir

Nálgunaraðferð sem byggir á jöfnunni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_j)$$

er nefnist *bein aðferð* (e. explicit method) ef w_j kemur ekki fyrir í í hægri hliðinni.

Annars nefnist hún *óbein aðferð* eða *fólgin aðferð* (e. implicit method).

Ef aðferðin er bein og við höfum reiknað út $w_0, \dots, w_{j-1}$, þá fáum við rakningarformúlu, þannig að $w_j \approx x(t_j)$ er reiknað út

$$w_j = w_{j-1} + h_j\varphi(f, t_0, \dots, t_j, w_0, \dots, w_{j-1})$$

7.12

7.1 Eins skrefs aðferðir og fjölskrefaaðferðir

Nálgunaraðferð sem byggir á jöfnunni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1}, w_j)$$

er nefnist *eins skrefs aðferð* (e. one step method) og er þá vísað til þess að fallið í hægri hliðinni er einungis háð gildum á síðasta tímaskrefinu.

Tveggja skrefa aðferð er af gerðinni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_{j-2}, t_{j-1}, t_j, w_{j-2}, w_{j-1}, w_j)$$

Almennt er *k-skrefa aðferð* af gerðinni

$$\frac{w_j - w_{j-1}}{h_j} = \varphi(f, t_{j-k}, \dots, t_j, w_{j-k}, \dots, w_j)$$

Fjölskrefaaðferð er k-skrefa aðferð með $k \geq 2$. 7.13

7.2 Aðferð Eulers

Rifjum upp að lausnin uppfyllir

$$
\begin{aligned}
x(t+h)-x(t) &= \int_t^{t+h} x'(\tau)\,d\tau = \int_t^{t+h} f(\tau,x(\tau))\,d\tau \\
&= h\int_0^1 f(t+sh,x(t+sh))\,ds
\end{aligned}
$$

Billengdin í síðasta heildinu er 1, svo við tökum einföldustu nálgum sem hugsast getur en það er gildið í vinstri endapunkti $f(t,x(t))$. Fyrir lítil h fæst því

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t,x(t)).$$

Við þekkjum $w_0 = x(t_0)$, svo með þessu getum við fikrað okkur áfram og fengið runu nálgunargilda $w_0, w_1, w_2, \ldots$ þannig að

$$w_j = w_{j-1} + h_j f(t_{j-1}, w_{j-1}).$$

7.14

7.2 Matlab forrit fyrir aðferð Eulers

```
function w = euler(f,t,alpha);
%   function w = euler(f,t,alpha)
% Aðferð Eulers fyrir afleiðujöfnuhneppi
%         x'(t)=f(t,x(t)), x(0)=alpha.
% Inn fara: f - fallið f
%           t - vigur með skiptingu á t-ás.
%           alpha - upphafsgildið í t(1).
% Út koma:  w - fylki með nálgunargildunum.

N = length(t);
m = length(alpha);
w = zeros(m,N);
w(:,1) = alpha;
for j=2:N
   w(:,j) = w(:,j-1)+(t(j)-t(j-1))*f(t(j-1),w(:,j-1));
end
```

7.15

7.4 Runge-Kutta aðferðir – Aðferð Eulers endurbætt

Í aðferð Eulers nálguðum við heildið $\int_0^1 f(t+sh,x(t+sh))\,ds$ með margfeldi af billengdinni og fallgildinu í vinstri endapunkti.

Við getum endurbætt þessa nálgun með því að taka einhverja nákvæmari tölulega nálgun á heildinu til dæmis miðpunktsaðferð

Nálgunarformúlan verður þá

$$\int_0^1 f(t+sh,x(t+sh))\,ds \approx f(t+\tfrac{1}{2}h, x(t+\tfrac{1}{2}h)).$$

Nú er vandamálið að við höfum nálgað $x(t_{j-1})$ með w_{j-1} en höfum ekkert nálgunargildi á $x(t_{j-1}+\frac{1}{2}h_j)$.

Við grípum þá til fyrsta stigs Taylor nálgunar

$$
\begin{aligned}
x(t_j+\tfrac{1}{2}h_j) &= x(t_{j-1}) + x'(t_{j-1})\big(\tfrac{1}{2}h_j\big) + \tfrac{1}{2}x''(\xi)\big(\tfrac{1}{2}h_j\big)^2 \\
&\approx w_{j-1} + \tfrac{1}{2}h_j f(t_{j-1}, w_{j-1}).
\end{aligned}
$$

7.16

7.4 Aðferð Eulers endurbætt

Endurbætt aðferð Eulers er þá í tveim skrefum; við reiknum

$$\tilde{w}_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2}h_j f(t_{j-1}, w_{j-1})$$

og fáum svo nálgunargildið

$$w_j = w_{j-1} + h_j f\left(t_{j-1} + \tfrac{1}{2}h_j, \tilde{w}_j\right)$$

7.17

7.4 Annað afbrigði af aðferð Eulers – Aðferð Heun

Lítum nú á aðra aðferð þar sem við nálgum heildið með trapisuaðferð.

$$\int_0^1 f(t+sh, x(t+sh))\, ds \approx \tfrac{1}{2}\big(f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))\big).$$

Af þessu leiðir að nálgunarformúlan á að vera

$$w_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2}h_j\big(f(t_{j-1}, w_{j-1}) + f(t_j, w_j)\big)$$

Þetta er greinilega óbein aðferð svo við verðum að byrja á nálgun á w_j, með

$$w_j \approx x(t_j) = x(t_{j-1} + h_j) \approx x(t_{j-1}) + h_j x'(t_{j-1}) = x(t_{j-1}) + h_j f(t_{j-1}, w_{j-1})$$

Þetta nýja afbrigði af aðferð Eulers nefnist *aðferð Heun*. Hún er í tveim skrefum: Við reiknum fyrst

$$\tilde{w}_j = w_{j-1} + h_j f(t_{j-1}, w_{j-1})$$

og fáum svo nálgunargildið

$$w_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2}h_j\big(f(t_{j-1}, w_{j-1}) + f(t_j, \tilde{w}_j)\big)$$

7.18

7.4 Forsagnar- og leiðréttingaraðferð

Endurbætt aðferð Eulers og aðferð Heun eru leiðir til þess að vinna úr óbeinum aðferðum, þar sem rakningarformúlan fyrir nálgunargildin er af gerðinni

$$w_j = w_{j-1} + h_j\varphi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1}, w_j)$$

og okkur vantar eitthverja nálgun á w_j til þess að stinga inn í hægri hlið þessarar jöfnu. Við skiptum þessu tvö skref:

Forsagnarskref: Við beitum einhverri beinni aðferð til þess að reikna út

$$\tilde{w}_j = w_{j-1} + h_j\psi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1})$$

Leiðréttingarskref: Setjum

$$w_j = w_{j-1} + h_j\varphi(f, t_{j-1}, t_j, w_{j-1}, \tilde{w}_j).$$

7.19

7.4 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

Lítum aftur á verkefnið

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

og skoðum 2. stigs Taylor liðun á lausninni x í punkti t. Innleiðum fyrst smá rithátt til styttingar, setjum

$$x = x(t), \quad f'_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)), \quad f = f(t, x(t)), \quad f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)).$$

Keðjureglan gefur

$$x''(t) = \frac{d}{dt}f(t, x(t)) = f'_t + f'_x x'(t) = f'_t + f\, f'_x.$$

7.20

7.4 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

Taylor-liðun lausnarinnar er

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + hx'(t) + \frac{1}{2}h^2x''(t) + O(h^3) \\ &= x + hf + \frac{1}{2}h^2(f'_t + ff'_x) + O(h^3) \\ &= x + \frac{1}{2}hf + \frac{1}{2}h(f + hf'_t + (hf)f'_x) + O(h^3) \end{aligned}$$

Nú sjáum við að síðasti liðurinn er 1. stigs Taylor liðun f með miðju (t,x) skoðuð í punktinum $(t+h, x+hf)$, því

$$f(t+h, x+hf) = f + hf'_t + (hf)f'_x + O(h^2)$$

og þar með er

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2}hf(t,x) + \frac{1}{2}hf(t+h, x+hf) + O(h^3)$$

7.21

7.4 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

Við höfum leitt út

$$x(t+h) = x(t) + \tfrac{1}{2}hf(t,x) + \tfrac{1}{2}hf(t+h, x+hf) + O(h^3)$$

Þessi formúla liggur til grundvallar 2. stigs Runge-Kutta-aðferð: Með henni fáum við nálgunarrunu $w_0, w_1, w_2, \ldots$ þannig að $w_0 = x(0)$ og

$$w_j = w_{j-1} + \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2), \quad j = 1, 2, \ldots$$

þar sem

$$F_1 = h_j f(t_{j-1}, w_{j-1}), \quad \text{og} \quad F_2 = h_j f(t_j, w_{j-1} + F_1)$$

og eins og alltaf er $w_j \approx x(t_j)$. 7.22

7.4 Matlab forrit fyrir 2. stigs Runge-Kutta-aðferð

```
function w = runge_kutta_2(f,t,alpha);
%   w = runge_kutta_2(f,t,alpha)
% 2. stigs Runge-Kutta aðferð fyrir afleiðuhneppi
%         x'(t)=f(t,x(t)), x(0)=alpha.
% Inn fara: f - fallið f
%           t - vigur með skiptingu á t-ás.
%           alpha - upphafsgildið í t(1).
% Út koma:  w - fylki með nálgunargildunum.
N = length(t);
m = length(alpha);
w = zeros(m,N);
w(:,1) = alpha;
for j=2:N
  h = t(j)-t(j-1);
  F1 = h*f(t(j-1),w(:,j-1));
  F2 = h*f(t(j),w(:,j-1)+F1);
  w(:,j) = w(:,j-1) + (F1+F2)/2;
end
```

7.23

7.6 Skekkjumat, samleitni og stöðugleiki

Fyrir eins skrefs aðferð skilgreinum við *staðarskekkju* við tímann t_n sem

$$\tau_n = \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - \varphi(f, t_{n-1}, t_n, x(t_{n-1}), x(t_n))$$

Hér er réttu lausninni stungið inn í nálgunarformúluna. Munum að hún uppfyllir

$$\frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} = \int_0^1 f(t_{n-1} + sh_n, x(t_{n-1} + sh_n))\, ds$$

Viljum geta metið τ_n sem fall af h_n, t.d.

$$\tau_n = O(h_n^k)$$

Almennt batna aðferðir eftir því sem veldisvísirinn k í staðarskekkjunni verður stærri. 7.24

7.6 Staðarskekkja í aðferð Eulers

Aðferð Eulers er sett fram með formúlunni

$$w_n = w_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, w_{n-1})$$

Staðarskekkjan er því

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))\\ &= \frac{x(t_n) - x(t_{n-1}) - x'(t_{n-1})h_n}{h_n}\\ &= \frac{\frac{1}{2}x''(\xi_n)h_{n-1}^2}{h_n} = \tfrac{1}{2}x''(\xi_n)h_{n-1} = O(h_n)\end{aligned}$$

Aðferð Eulers er því fyrsta stigs aðferð. 7.25

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Hugsum okkur að við höfum tvær beinar nálgunaraðferðir

$$w_n = w_{n-1} + h_n\varphi(f, t_{n-1}, t_n, w_{n-1})$$

og

$$\tilde{w}_n = w_{n-1} + h_n\tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_n, w_{n-1})$$

Skilgreinum tilsvarandi staðarskekkjur

$$\tau_n(h_n) = k_1 h_n^{\alpha_1} + o(h_i^{\alpha_1})$$

og

$$\tilde{\tau}_n(h_n) = k_2 h_n^{\alpha_2} + o(h_i^{\alpha_2}),$$

þar sem $\alpha_2 > \alpha_1$. Við tímann t_{n-1} hafa nálgunargildin $w_0, \ldots, w_{n-1}$ hafi verið valin samkvæmt fyrri aðferðinni.

Meiningin að velja næsta tímapunkt t_n og þar með tímaskref h_n þannig að $\tau_n(h_n) \leq \delta$, en að $\tau_n(h_n)$ haldi sig sem næst δ, þar sem δ er gefið efra mark á staðarskekkjunni í fyrri aðferðinni.

Stærðin δ er kölluð *þolmörk* (e. tolerance) fyrir staðarskekkjuna og er oft táknuð með TOL. 7.26

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Við byrjum á að setja $h = h_n$ inn í báðar aðferðirnar og bera útkomurnar saman

$$w_n = w_{n-1} + h\varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1} + h, w_{n-1})$$

$$\tilde{w}_n = \tilde{w}_{n-1} + h\tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_{n-1} + h, w_{n-1})$$

Við látum $\hat{w}_n$ tákna rétt gildi lausnarinnar á upphafsgildisverkefninu

- $x'(t) = f(t, x(t))$,
- $x(t_{n-1}) = w_{n-1}$,

í punktinum $t_{n-1} + h$. 7.27

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Þá höfum við

$$\begin{aligned}\tau_n(h) &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1}}{h} - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1}) \\ &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1} - h\varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1})}{h} = \frac{\hat{w}_n - w_n}{h}\end{aligned}$$

og eins fæst

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_n(h) &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1}}{h} - \tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1}) \\ &= \frac{\hat{w}_n - w_{n-1} - h\tilde{\varphi}(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h, w_{n-1})}{h} = \frac{\hat{w}_n - \tilde{w}_n}{h}.\end{aligned}$$

7.28

7.7 Stýring á staðarskekkju og breytileg skrefastærð

Nú tökum við mismuninn og skilgreinum

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left|\frac{\tilde{w}_n - w_n}{h}\right| = |\tau_n(h) - \tilde{\tau}_n(h)| \\ &= |k_1|h^{\alpha_1} + o(h^{\alpha_1}) \approx |k_1|h^{\alpha_1}\end{aligned}$$

Munum að hér er skreflengdin $h = h_n$. Þessi nálgunarformúla gefur okkur möguleika á því að meta fastann

$$|k_1| \approx \frac{\varepsilon}{h_n^{\alpha_1}}.$$

7.29

7.7 Mat á skrefastærð

Segjum nú að við viljum halda staðarskekkjunni innan markanna $\delta/2$ og hafa skreflengdina í næsta skrefi $h_n = qh_{n-1}$, þá höfum við nálgunarjöfnuna

$$|\tau_n(qh_{n-1})| \approx |k_1|(qh_{n-1})^{\alpha_1} = \varepsilon q^{\alpha_1} \approx \frac{\delta}{2}.$$

Við tökum

$$q = \left(\frac{\delta}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha_1}$$

veljum síðan skrefstærðina $h_n = qh_{n-1}$ og reiknum út næsta gildi

$$w_n = w_{n-1} + h_n\varphi(f, t_{n-1}, t_n, w_{n-1})$$

7.30

7.5 Fjölskrefaaðferðir

Þær aðferðir sem við höfum séð eiga allar sameiginlegt að ákvarða nálgunargildi w_n aðeins út frá gildinu w_{n-1} næst á undan. Hægt er að nota fleiri gildi w_{n-1}, w_{n-2}, … og fá þannig betri nákvæmni, en aðferðirnar verða að sama skapi flóknari í notkun.

Eins og alltaf höfum við verkefnið

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = w_0 \end{cases}$$

og viljum nálga gildi lausnarinnar x á bili $[a, b]$ þar sem $a = t_0$ eða $b = t_0$. Látum t_0, t_1, …, t_n vera skiptingu á bilinu $[a, b]$ og gerum til einföldunar ráð fyrir að hún hafi jafna billengd $h = t_j - t_{j-1}$ fyrir $j = 1, \ldots, n$. 7.31

7.5 k-skrefa Adams-Bashforth aðferð

Við vitum að lausnin x uppfyllir

$$x(t_n) - x(t_{n-1}) = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, x(t))\, dt$$

Skrifum nú

$$f(t, x(t)) = P_{k-1}(t) + R_{k-1}(t)$$

þar sem

$$P_{k-1}(t) = \sum_{j=1}^{k} f(t_{n-j}, x(t_{n-j})) \cdot \ell_{k-1,j}(t)$$

er brúunarmargliðan gegnum punktana $(t_{n-k}, x(t_{n-k}))$, $(t_{n+1-k}, x(t_{n+1-k}))$, …, $(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$, þ.e. gegnum síðustu k punkta á undan $(t_n, x(t_n))$.

Þetta eru k punktar og því er aðferðin kölluð k-skrefa aðferð. 7.32

7.5 k-skrefa Adams-Bashforth aðferð

Munum að til er ξ þannig að

$$R_{k-1}(t) = \frac{f^{(k)}(\xi, x(\xi))}{k!} \prod_{j=1}^{m} (t - t_{n-j}).$$

Við nálgum nú heildið af f yfir bilið $[t_{n-1}, t_n]$ með heildi P_{k-1} og fáum

$$w_{i+1} = w_i + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} P_{k-1}(t)\, dt$$

og með beinum útreikningum má sjá að skekkjan í þessari nálgun er $O(h^{k+1})$. Þessir útreikninga flækjast auðvitað eftir því sem k stækkar. 7.33

7.5 k-skrefa Adams-Bashforth aðferð, upphafið

Augljóslega getum við ekki notað k skrefa Adams-Bashforth aðferðir um leið og við sjáum upphafsgildisverkefni, því við þurfum k ágiskunargildi $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$ til að byrja að nota aðferðina. Þessi gildi má fá með hverri sem er af aðferðunum sem við höfum séð hingað til.

Ákveðin sértilfelli Adams-Bashforth aðferðanna eru meira notuð en önnur, það eru tveggja, þriggja og fjögurra skrefa aðferðirnar. Áhugasömum verður ekki skotaskuld úr að leiða út formúlurnar fyrir þær, en við birtum bara niðurstöðurnar.

Til styttingar skilgreinum við $f_j = f(t_j, w_j)$. 7.34

7.5 Tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð

Þegar gildin w_{n-1} og w_{j-2} hafa verið fundin fæst næsta með

$$w_n = w_{n-1} + h\big(\tfrac{3}{2} f_{n-1} - \tfrac{1}{2} f_{n-2}\big)$$

og skekkjan í nálguninni er $O(h^3)$. 7.35

7.5 Forrit fyrir tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð

Aðferðin er útfærð í forritinu hér að neðan; það skýrir sig að mestu sjálft en við skulum taka eftir þrennu:

(i) Við krefjumst þess að notandinn gefi nálgunargildi á `x(t(2))`, þetta gerum við því til eru margar mismunandi aðferðir til að fá slíkt gildi og þær henta mis vel hverju sinni.

(ii) Við gerum ekki sérstaklega ráð fyrir að jafnt bil sé á milli stakanna í vigrinum `t` þó við höfum gert það hingað til. Það var aðeins gert til að einfalda útreikninga; aðferðin virkar nákvæmlega eins ef það er ekki jafnt bil á milli stakanna, svo sjálfsagt er að forrita hana þannig.

(iii) Við lágmörkum fjölda skipta sem við reiknum gildi `f` með að geyma alltaf gildið frá síðustu ítrun og nota það aftur, þetta getur sparað nokkurn tíma í útreikningum ef `f` er flókið fall. 7.36

7.5 Forrit fyrir tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð

```
function w = adams_bashforth_2(f,t,x1,x2)
%   w = adams{_}bashforth{_}2(f,t,x1,x2)
% Nálgar lausn upphafsgildisverkefnisins
%   x' = f(t,x)
%   x(t(1)) = x1
% í punktunum í t með 2ja þrepa Adams-Bashforth aðferð.
% Stakið x2 er nálgunargildi á x(t(2)).

N = length(t);  M = length(x1); w = zeros(M,N);
% Upphafsstillum gildi f(t,x) og w
fx1 = f(t(1),x1); fx2 = f(t(2),x2);
w(:,1) = x1; w(:,2) = x2;
for i=3:N
  % Reiknum nálgunargildi
  h = t(i)-t(i-1);
  w(:,i) = w(:,i-1) + (h/2)*(3*fx2 - fx1);
  fx1 = fx2; fx2 = f(t(i),w(:,i));
end
```

7.37

7.5 Þriggja skrefa Adams-Bashforth

Gefin w_{n-1}, w_{n-2} og w_{n-3} fæst næsta nálgunargildi með

$$w_n = w_{n-1} + h(\tfrac{23}{12} f_{n-1} - \tfrac{16}{12} f_{n-2} + \tfrac{5}{12} f_{n-2})$$

og staðarskekkjan er $O(h^4)$ 7.38

7.5 Fjögurra skrefa Adams-Bashforth

Þegar við þekkjum w_{n-1}, w_{n-2}, w_{n-3} og w_{n-4} reiknum við næsta gildi með

$$w_n = w_{n-1} + h\big(\tfrac{55}{24} f_{n-1} - \tfrac{59}{24} f_{n-2} + \tfrac{37}{24} f_{n-3} - \tfrac{9}{24} f_{n-4}\big)$$

og skekkjan í nálguninni er $O(h^5)$. 7.39

7.6 Greining á samleitni og stöðugleika

Lítum aftur á upphafsgildisverkefnið okkar

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = w_0. \end{cases}$$

Við hugsum okkur að nálgun sé fundin í tímapunktunum

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b.$$

Við táknum nálgunargildi á $x(t_j)$ með w_j. Það er gefið með

$$w_n = w_{n-1} + h_n \varphi(f, t_0, \ldots, t_n, w_0, \ldots, w_n)$$

þar sem fallið $\varphi(f, t_0, \ldots, t_n, w_0, \ldots, w_n)$ er skilgreint með einhverjum hætti.

Við köllum þetta *nálgunaraðferðina sem fallið φ gefur af sér.* 7.40

7.6 Nokkur hugtök

Skekkja

Skekkja (e. error) eða *heildarskekkja* (e. total error) í nálgun á $x(t_n)$ með w_n er

$$e_n = x(t_n) - w_n.$$

Staðarskekkja (e. local truncation error) nálgunaraðferðarinnar við tímann t_n er

$$\tau_n = \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - \varphi(f, t_0, \ldots, t_n, x(t_0), \ldots, x(t_n))$$

Munið að hér er *rétta lausnin* sett inn í nálgunaraðferðina.

7.41

7.6 Samleitni, samræmi og stöðugleiki

Samleitni

Hugsum okkur nú að fjöldi tímapunktanna N stefni á óendanlegt. Við segjum að nálgunaraðferðin φ sé *samleitin* ef

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\le n\le N} |e_n| = 0$$

þar sem $e_n = x(t_n) - w_n$ táknar skekkjuna í n-ta tímaskrefinu.

Samræmi

Við segjum að nálgunaraðferðin φ *samræmist* upphafsgildisverkefninu ef um sérhvern tímapunkt t_{n-1} gildir að

$$\lim_{h_n\to 0} \tau_n = \lim_{t_n\to t_{n-1}} \left(\frac{x(t_n)-x(t_{n-1})}{t_n-t_{n-1}} - \varphi(f,t_0,\dots,t_n,x(t_0),\dots,x(t_n))\right) = 0$$

7.42

7.6 Samræmi endurbættu Euler-aðferðarinnar

Munum að endurbætta Euler-aðferðin er

$$w_n = w_{n-1} + h_n f(t_{n-1} + \tfrac{1}{2}h_n, w_{n-1} + \tfrac{1}{2}hf(t_{n-1}, w_{n-1}))$$

sem gefur staðarskekkjuna

$$\tau_n = \frac{x(t_{n-1}+h_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - f(t_{n-1} + \tfrac{1}{2}h_n, x(t_{n-1}) + \tfrac{1}{2}h_n f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))).$$

Nú hugsum við okkur að t_{n-1} sé haldið föstu og látum billengdina $h_n = t_n - t_{n-1}$ stefna á 0. Þá fæst

$$\lim_{h_n\to 0} \tau_n = x'(t_{n-1}) - f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) = 0$$

Þetta segir okkur að endurbætta Euler-aðferðin **samræmist** upphafsgildisverkefninu.

7.43

7.6 Samræmi beinna eins skrefs aðferða

Þessi röksemdafærla alhæfist á allar beinar eins skrefs aðferðir, því staðarskekkja þeirra er

$$\tau_n = \frac{x(t_{n-1}+h_n) - x(t_{n-1})}{h_n} - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}+h_n, x(t_{n-1}))$$

Nú er eðlilegt að gefa sér að φ sé samfellt fall og þá verður markgildið af staðarskekkjunni

$$x'(t_{n-1}) - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}, x(t_{n-1})) = f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) - \varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}, x(t_{n-1})).$$

Eins skrefs aðferðin sem fallið φ gefur af sér er því stöðug ef og aðeins ef

$$\varphi(f, t_{n-1}, t_{n-1}, x(t_{n-1})) = f(t_{n-1}, x(t_{n-1})).$$

7.44

7.6 Stöðuleiki

Gerum nú ráð fyrir að upphafsgildinu w_0 sé breytt í $\tilde{w}_0$ og að $\tilde{x}(t)$ uppfylli

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t)), \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{w}_0. \end{cases}$$

Lítum síðan á tilsvarandi nálgunarrunu

$$\tilde{w}_n = \tilde{w}_{n-1} + h_n\varphi(f, t_0, \dots, t_n, \tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n).$$

Skilgreining

Við segjum að nálgunaraðferðin sem φ gefur af sér sé *stöðug* ef til er fall $k(t) > 0$ þannig að

$$|\tilde{w}_n - w_n| \le k(t_n)|\tilde{w}_0 - w_0|, \qquad n = 1, 2, 3 \dots.$$

7.45

7.6 Lipschitz-samfelldni

Rifjum nú upp að við gerum ráð fyrir að fallið $f(t,x)$ sé skilgreint á svæði D sem inniheldur

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2\,;\, a \le t \le b, x \in \mathbb{R}\}.$$

Við segjum að f sé *Lipschitz samfellt á D með tilliti til x* ef til er fasti C_f þannig að

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le C_f |x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

Hugsum okkur að $\varphi(f,s,t,x)$ sé fall sem gefur af sér beina eins skrefs nálgunaraðferð fyrir upphafsgildisverkefnið $x'(t) = f(t,x(t))$ með $x(t_0) = w_0$.

Við segjum að φ sé *Lipschitz-samfellt með tilliti til x* ef um sérhvert Lipschitz-samfellt fall f, tölur $s,t \in [a,b]$ og $x,y \in \mathbb{R}$ gildir að til er fasti L_φ þannig að

$$|\varphi(f,s,t,x) - \varphi(f,s,t,y)| \le L_\varphi |x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

7.46

7.6 Setning um stöðugleika og samleitni

Gefum okkur jafna skiptingu á tímabilinu $[a,b]$, $t_n = a + nh$, þar sem $n = 0,1,2,\dots,N$ og $h = (b-a)/N$.

Ef fallið φ er Lipschitz-samfellt með tilliti til x með Lipschitz-fastann L_φ, þá gildir:

(i) Eins skrefs aðferðin sem φ gefur af sér er stöðug,

$$|\tilde{w}_n - w_n| \le e^{L_\varphi(t_n - a)} |\tilde{w}_0 - w_0|, \qquad n = 1,2,3,\dots.$$

(ii) Ef til eru fastar c og p þannig að staðarskekkjan uppfyllir $|\tau_n| \le c\,h^p$, fyrir öll $n = 1,2,3,\dots$ og $h \in]0,h_0]$, þá er aðferðin samleitin og við höfum

$$|e_n| = |x(t_n) - w_n| \le \frac{ch^p}{L_\varphi}\left(e^{L_\varphi(t_n-a)} - 1\right).$$

7.47

Kafli 7: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er hægt að skrifa annars stigs jöfnu $u'' = f(t,u,u')$ sem jafngilt hneppi?
2. Hvað er *bein aðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
3. Hvað er *óbein aðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
4. Hvað er *eins skrefs aðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
5. Hvað er *fjölskrefaaðferð* fyrir upphafsgildisverkefni?
6. Hvernig er *aðferð Eulers*?
7. Hvernig er *aðferð Eulers endurbætt*?
8. Hvað er *forsagnar- og leiðréttingaraðferð*?
9. Hvernig er *2. stigs Runge-Kutta aðferð*?
10. Hvernig er *4. stigs Runge-Kutta aðferð*?
11. Hvernig er staðarskekkja í nálgunaraðferð fyrir upphafsgildisverkefni skilgreind?

7.48

Kafli 7: Fræðilegar spurningar

12. Rökstyðjið að staðarskekkja í aðferð Eulers sé $O(h)$, þar sem h er tímaskrefið.
13. Hvernig er tveggja skrefa Adams-Bashforth-aðferð.
14. Hvað þýðir að nálgunaraðferð fyrir upphafsgildisverkefni sé samleitin?
15. Hvað þýðir a nálgunaraðferð samræmist upphafsgildisverkefni?

7.49