Kafli 5: Brúun

Töluleg greining, STÆ405G

29 og 31 janúar, og 5, 7, 12 og 14 febrúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Yfirlit

Kafli 5: Brúun

Kafli	Viðfangsefni	Bls.	Glærur
5.0	Inngangur	337-341	1-10
5.1	Margliðubrúun og Lagrange-form brúunarmarg.	341-349	11-18
5.3	Newton-form brúunarmargliðu	363-371	19-30
5.X	Brúunarmargliður með margföldum punktum		31-42
5.1	Nálgun á föllum með margliðum og skekkjumat	348-349	43-64
5.5	Splæsibrúun	386-402	65-79
5.8	Aðferð minnstu fervika	418-425	80-93

5.0 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

5.0 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

5.0 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

Við sýnum fram á að það sé alltaf hægt að finna margliðu p af stigi $\leq m$ sem uppfyllir $p(x_i) = y_i$ í öllum punktum og að slík margliða sé ótvírætt ákvörðuð.

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

Við sýnum fram á að það sé alltaf hægt að finna margliðu p af stigi $\leq m$ sem uppfyllir $p(x_i) = y_i$ í öllum punktum og að slík margliða sé ótvírætt ákvörðuð.

Hún nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

5.0 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

Við sýnum fram á að það sé alltaf hægt að finna margliðu p af stigi $\leq m$ sem uppfyllir $p(x_i) = y_i$ í öllum punktum og að slík margliða sé ótvírætt ákvörðuð.

Hún nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Við alhæfum þetta verkefni með því að úthluta sérhverjum punkti jákvæðri heiltölu m_i og krefjast þess graf margliðunnar fari í gegnum alla punktana og til viðbótar að allar afleiður $p^{(j)}$ upp að stigi $m_i - 1$ taki einnig fyrirfram gefin gildi $y_i^{(j)}$.

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig.

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og “brúar“ því gildin milli mælipunktanna.

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og "brúar" því gildin milli mælipunktanna.

Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (reiknirit Horners).

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og "brúar" því gildin milli mælipunktanna.

Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (reiknirit Horners).
- Einfalt að diffra og heilda margliður.

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og "brúar" því gildin milli mælipunktanna.

Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (reiknirit Horners).
- Einfalt að diffra og heilda margliður.
- Margliður eru óendanlega oft diffranlegar.

5.0 Tilgangurinn

Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og "brúar" því gildin milli mælipunktanna.

Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (reiknirit Horners).
- Einfalt að diffra og heilda margliður.
- Margliður eru óendanlega oft diffranlegar.
- *Setning Weierstrass:* Látum f vera samfellt fall á bili $[a, b]$. Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ þá er til margliða p þannig að

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

5.0 Margliður:

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

þar sem m er heiltala og $a_0, \ldots, a_m$ eru tvinntölur nefnist margliða.

5.0 Margliður:

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

þar sem m er heiltala og $a_0, \ldots, a_m$ eru tvinntölur nefnist margliða. Stærsta talan j þannig að $a_j \neq 0$ nefnist *stig* margliðunnar p.

5.0 Margliður:

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

þar sem m er heiltala og $a_0, \ldots, a_m$ eru tvinntölur nefnist margliða.

Stærsta talan j þannig að $a_j \neq 0$ nefnist *stig* margliðunnar p.

Ef allir stuðlarnir eru 0 þá nefnist p *núllmargliðan* og við segjum að stig hennar sé $-\infty$.

5.0 Margliður:

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

þar sem m er heiltala og $a_0, \ldots, a_m$ eru tvinntölur nefnist margliða.
Stærsta talan j þannig að $a_j \neq 0$ nefnist *stig* margliðunnar p.
Ef allir stuðlarnir eru 0 þá nefnist p *núllmargliðan* og við segjum að stig hennar sé $-\infty$.
Munum að stuðullinn a_j við veldið x^j er gefinn með formúlunni

$$a_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

5.0 Mismunandi leiðir á framsetningu

Hægt er að setja sömu margliðuna fram á marga mismunandi vegu, en við nefnum framsetninguna hér að framan *staðalform margliðunnar* p.

Hægt er að setja sömu margliðuna fram á marga mismunandi vegu, en við nefnum framsetninguna hér að framan *staðalform margliðunnar* p.

Ef við veljum okkur einhvern punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, þá getum við skrifað

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_m(x - x_0)^m$$

og stuðlarnir b_j eru gefnir með

$$b_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

5.0 Mismunandi leiðir á framsetningu

Hægt er að setja sömu margliðuna fram á marga mismunandi vegu, en við nefnum framsetninguna hér að framan *staðalform margliðunnar* p.

Ef við veljum okkur einhvern punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, þá getum við skrifað

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_m(x - x_0)^m$$

og stuðlarnir b_j eru gefnir með

$$b_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Þessi formúla er jafngild þeirri staðreynd að ef p er margliða af stigi m. Þá er Taylor-röð p í sérhverjum punkti $x_0 \in \mathbb{R}$ bara margliðan p, og stuðlarnir í Taylor-röðinni eru gefnir með formúlunum fyrir b_j að ofan.

5.0 Newton-form margliðu

Ef við veljum okkur m punkta $x_0, \ldots, x_{m-1}$ þá nefnist framsetning af gerðinni

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

Newton-form margliðunnar p miðað við punktana $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Ef við veljum okkur m punkta $x_0, \ldots, x_{m-1}$ þá nefnist framsetning af gerðinni

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

Newton-form margliðunnar p miðað við punktana $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Við munum mikið fást við margliður á Newton-formi og því er nauðsynlegt að hafa hraðvirkt reiknirit til þess að reikna út fallgildi p út frá þessari framsetningu.

5.0 Newton-form margliðu

Ef við veljum okkur m punkta $x_0, \ldots, x_{m-1}$ þá nefnist framsetning af gerðinni

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

Newton-form margliðunnar p miðað við punktana $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Við munum mikið fást við margliður á Newton-formi og því er nauðsynlegt að hafa hraðvirkt reiknirit til þess að reikna út fallgildi p út frá þessari framsetningu.

Eitt slíkt reiknirit er nefnt *reiknirit Horners*. Það byggir á því að nýta sér að þættirnir $(x - x_j)$ eru endurteknir í liðunum

$$(x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \ldots$$

Þar sem við sleppum við að hefja í veldi þá komumst við af með fáar reikniaðgerðir hér.

Ef $m = 2$ má skrifa Newton-form p sem

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1) \cdot c_2).$$

Ef $m = 2$ má skrifa Newton-form p sem

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1) \cdot c_2).$$

Ef $m = 3$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)c_3))$$

Ef $m = 2$ má skrifa Newton-form p sem

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1) \cdot c_2).$$

Ef $m = 3$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)c_3))$$

og ef $m = 4$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + c_4(x - x_3)))).$$

Reikniritið vinnur á þessari stæðu með því að margfalda upp úr svigunum frá hægri til vinstri.

5.0 Reiknirit Horners

Skilgreinum tölur b_0, b_1, ... á eftirfarandi hátt. Fyrst setjum við

$$b_n = c_n.$$

Fyrir hvert k frá $n-1$ niður í 0 þá setjum við

$$b_k = c_k + (a - x_k)b_{k+1}.$$

5.0 Reiknirit Horners

Skilgreinum tölur b_0, b_1, ... á eftirfarandi hátt. Fyrst setjum við

$$b_n = c_n.$$

Fyrir hvert k frá $n-1$ niður í 0 þá setjum við

$$b_k = c_k + (a - x_k) b_{k+1}.$$

Þá er $b_0 = p(a)$.

5.0 Reiknirit Horners

Skilgreinum tölur b_0, b_1, ... á eftirfarandi hátt. Fyrst setjum við

$$b_n = c_n.$$

Fyrir hvert k frá $n-1$ niður í 0 þá setjum við

$$b_k = c_k + (a - x_k)b_{k+1}.$$

Þá er $b_0 = p(a)$.

Fyrir $m = 4$

$$p(a) = \underbrace{c_0 + (a - x_0)\underbrace{(c_1 + (a - x_1)\underbrace{(c_2 + (a - x_2)\underbrace{(c_3 + (a - x_3)\underbrace{c_4}_{b_4}}_{b_3})}_{b_2})}_{b_1})}_{b_0}.$$

5.0 Matlab-forrit fyrir reiknirit Horners

```
function b = horner(c,x,a);
%
% Fallið reiknar út gildi margliðunnar
%    p(x) = c(1) + c(2)(x-x(1)) + ...
%             + c(m)(x-x(1))*...*(x-x(m-1))
% í punktunum a(1), ..., a(n) úr vigrinum a.

m = length(c);          % stig margliðunnar er m-1
n = length(a);          % fjöldi reiknaðra fallgilda er n
b = c(m)*ones(1,n);     % b_m skilgreint
for i=m-1:-1:1          % i gengur frá m-1 niður í 1
      % b_i reiknað fyrir i < m
      b = c(i) + (a - x(i)) .* b;
end
```

5.0 Matlab-forrit fyrir reiknirit Horners

```
function b = horner(c,x,a);
%
% Fallið reiknar út gildi margliðunnar
%    p(x) = c(1) + c(2)(x-x(1)) + ...
%              + c(m)(x-x(1))*...*(x-x(m-1))
% í punktunum a(1), ..., a(n) úr vigrinum a.

m = length(c);          % stig margliðunnar er m-1
n = length(a);          % fjöldi reiknaðra fallgilda er n
b = c(m)*ones(1,n);     % b_m skilgreint
for i=m-1:-1:1          % i gengur frá m-1 niður í 1
      % b_i reiknað fyrir i < m
      b = c(i) + (a - x(i)) .* b;
end
```

Athugasemd: Hér gengur stikinn i fyrir a_i, b_i, c_i og x_i frá 1 upp í m, en ekki frá 0 eins og í glærunum á undan. Þetta helgast af því að í Matlab þá er fyrsta stak í vigur númer 1.

Látum nú $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Látum nú $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Slík margliða nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$

Látum nú $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Slík margliða nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana
$(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$
eða *brúunarmargliða gegnum punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Augljóslega verðum við að gera ráð fyrir að x-hnitin séu ólík, það er $x_j \neq x_k$ ef $j \neq k$.

Látum nú $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Slík margliða nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana
$(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$
eða *brúunarmargliða gegnum punktana* $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$.

Augljóslega verðum við að gera ráð fyrir að x-hnitin séu ólík, það er $x_j \neq x_k$ ef $j \neq k$.

Verkefnið að finna margliðuna p nefnist *brúunarverkefni fyrir punktana* $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$.

5.1 Brúunarmargliðan er ótvírætt ákvörðuð

Setning

Brúunarmargliðan fyrir $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Setning

Brúunarmargliðan fyrir $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Sönnun

Ef $p(x)$ og $q(x)$ eru tvær brúunarmargliður af stigi $\leq m$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ þá er mismunurinn $r(x) = p(x) - q(x)$ margliða af stigi $\leq m$ með núllstöðvar $x_0, \ldots, x_m$.

Setning

Brúunarmargliðan fyrir $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Sönnun

Ef $p(x)$ og $q(x)$ eru tvær brúunarmargliður af stigi $\leq m$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ þá er mismunurinn $r(x) = p(x) - q(x)$ margliða af stigi $\leq m$ með núllstöðvar $x_0, \ldots, x_m$. Þetta eru $m + 1$ ólíkir punktar og því er $r(x)$ núllmargliðan samkvæmt undirstöðusetningu algebrunnar.

Setning

Brúunarmargliðan fyrir $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Sönnun

Ef $p(x)$ og $q(x)$ eru tvær brúunarmargliður af stigi $\leq m$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ þá er mismunurinn $r(x) = p(x) - q(x)$ margliða af stigi $\leq m$ með núllstöðvar $x_0, \ldots, x_m$. Þetta eru $m + 1$ ólíkir punktar og því er $r(x)$ núllmargliðan samkvæmt undirstöðusetningu algebrunnar. Þar með $p(x) - q(x)$ núllmargliðan, þ.e. $p(x) = q(x)$.

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \ldots \quad p(x_n) = y_n.$$

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Sönnun

Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Sönnun

Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.
Ef $m = 0$, þá erum við aðeins með eitt brúunarskilyrði, $p(x_0) = y_0$, og fastamargliðan $p(x) = y_0$ er lausn af stigi ≤ 0.

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Sönnun

Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.
Ef $m = 0$, þá erum við aðeins með eitt brúunarskilyrði, $p(x_0) = y_0$, og fastamargliðan $p(x) = y_0$ er lausn af stigi ≤ 0.

G.r.f. að við getum leyst öll brúunarverkefnum þar sem fjöldi punkta er m og sýnum að við getum þá leyst verkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

5.1 Brúunarmargliðan er til

Setning

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Sönnun

Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.
Ef $m = 0$, þá erum við aðeins með eitt brúunarskilyrði, $p(x_0) = y_0$, og fastamargliðan $p(x) = y_0$ er lausn af stigi ≤ 0.

G.r.f. að við getum leyst öll brúunarverkefnum þar sem fjöldi punkta er m og sýnum að við getum þá leyst verkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m - 1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m - 1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

5.1 Framhald af sönnun

Vorum með

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

sem er greinilega margliða af stigi $\leq m$.

Vorum með

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

sem er greinilega margliða af stigi $\leq m$.
Skoðum nú gildin á p

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= 1 \cdot q(x_0) + 0 \cdot r(x_0) = y_0, \\
p(x_k) &= \frac{x_k - x_m}{x_0 - x_m} y_k + \frac{x_k - x_0}{x_m - x_0} y_k = y_k, \qquad k = 1, \dots, m-1, \\
p(x_m) &= 0 \cdot q(x_m) + 1 \cdot r(x_m) = y_m.
\end{aligned}$$

5.1 Framhald af sönnun

Vorum með

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

sem er greinilega margliða af stigi $\leq m$.
Skoðum nú gildin á p

$$\begin{aligned} p(x_0) &= 1 \cdot q(x_0) + 0 \cdot r(x_0) = y_0, \\ p(x_k) &= \frac{x_k - x_m}{x_0 - x_m} y_k + \frac{x_k - x_0}{x_m - x_0} y_k = y_k, \qquad k = 1, \ldots, m-1, \\ p(x_m) &= 0 \cdot q(x_m) + 1 \cdot r(x_m) = y_m. \end{aligned}$$

Þar með er p brúunarmargliðan sem uppfyllir $p(x_j) = y_j$ fyrir $j = 0, \ldots, m$ og við höfum leyst brúunarverkefnið fyrir $m + 1$ punkt.

Sönnunin á síðustu glæru er í raun rakningarformúla til þess að reikna út gildi brúunarmargliðunnar p fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Sönnunin á síðustu glæru er í raun rakningarformúla til þess að reikna út gildi brúunarmargliðunnar p fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.
Hægt er að skrifa lausnina niður beint

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_2(x) + \cdots + y_m\ell_m(x),$$

þar sem $\ell_0, \dots, \ell_m$ er ákveðinn grunnur fyrir rúm allra margliða $\mathcal{P}_m$ af stigi $\leq m$ og nefnast *Lagrange-margliður fyrir punktasafnið* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

5.1 Lagrange-margliður, tilfellin $m = 0, 1, 2$

$m = 0$

Ef $m = 0$ þá er $p(x) = y_0$ fastamargliða eins og við höfum séð.

5.1 Lagrange-margliður, tilfellin $m = 0, 1, 2$

$m = 0$

Ef $m = 0$ þá er $p(x) = y_0$ fastamargliða eins og við höfum séð.

$m = 1$

Ef $m = 1$, þá blasir við að lausnin er

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

sem er margliða af stigi ≤ 1 (þ.e. lína) sem leysir brúunarverkefnið.

5.1 Lagrange-margliður, tilfellin $m = 0, 1, 2$

$m = 0$

Ef $m = 0$ þá er $p(x) = y_0$ fastamargliða eins og við höfum séð.

$m = 1$

Ef $m = 1$, þá blasir við að lausnin er

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

sem er margliða af stigi ≤ 1 (þ.e. lína) sem leysir brúunarverkefnið.

$m = 2$

Á hliðstæðan hátt fáum við fyrir $m = 2$ að

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

leysir brúunarverkefnið.

Almennt fæst lausnin

$$p(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + \ldots + y_m\,\ell_m(x) \qquad (1)$$

þar sem

$$\ell_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Almennt fæst lausnin

$$p(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + \ldots + y_m\,\ell_m(x) \tag{1}$$

þar sem

$$\ell_k = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Athugið að

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases} \tag{2}$$

Almennt fæst lausnin

$$p(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + \ldots + y_m\,\ell_m(x) \qquad (1)$$

þar sem

$$\ell_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Athugið að

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases} \qquad (2)$$

Allar margliðurnar ℓ_k eru af stigi m og því er p af stigi $\leq m$. Nú er augljóst útfrá (1) og (2) að p er lausn brúunarverkefnisins.

5.1 Sýnidæmi

Reiknum brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1, 1)$, $(2, 3)$ og $(3, 6)$ með Lagrange-margliðum.

5.1 Sýnidæmi

Reiknum brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$ með Lagrange-margliðum.

Reiknum fyrst margliðurnar ℓ_0, ℓ_1 og ℓ_2:

$$\ell_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$\ell_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

$$\ell_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

5.1 Sýnidæmi

Reiknum brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$ með Lagrange-margliðum.

Reiknum fyrst margliðurnar ℓ_0, ℓ_1 og ℓ_2:

$$\ell_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$
$$\ell_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$
$$\ell_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Þá fæst að brúunarmargliðan p er

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3 \cdot (x-1)(x-3) + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

5.1 Sýnidæmi

Reiknum brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$ með Lagrange-margliðum.

Reiknum fyrst margliðurnar ℓ_0, ℓ_1 og ℓ_2:

$$\ell_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$
$$\ell_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$
$$\ell_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Þá fæst að brúunarmargliðan p er

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3 \cdot (x-1)(x-3) + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Þetta er greinilega annars stigs margliða og auðvelt er að sannfæra sig um að $p(1) = 1$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 6$.

5.3 Newton-form brúunarmargliðu

Formúla fyrir $c_0, \dots, c_m$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum $c_0, \dots, c_m$ í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$.

5.3 Newton-form brúunarmargliðu

Formúla fyrir $c_0, \dots, c_m$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum $c_0, \dots, c_m$ í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$.

Athugum að $c_m = a_m$, þar sem a_m er stuðullinn við veldið x^m í staðalframsetningunni á p.

Formúla fyrir $c_0, \ldots, c_m$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum $c_0, \ldots, c_m$ í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Athugum að $c_m = a_m$, þar sem a_m er stuðullinn við veldið x^m í staðalframsetningunni á p.

Til þess að reikna út $c_0, \ldots, c_m$ þurfum við að reikna út með skipulegum hætti stuðulinn við veldið x^j í brúunarmargliðunni gegnum punktana $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$, fyrir öll $i = 0, \ldots, m$ og $j = 0, \ldots, m - i$. Við táknum þennan stuðul með $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$.

Formúla fyrir $c_0, \dots, c_m$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum $c_0, \dots, c_m$ í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$.

Athugum að $c_m = a_m$, þar sem a_m er stuðullinn við veldið x^m í staðalframsetningunni á p.

Til þess að reikna út $c_0, \dots, c_m$ þurfum við að reikna út með skipulegum hætti stuðulinn við veldið x^j í brúunarmargliðunni gegnum punktana $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+j}, y_{i+j})$, fyrir öll $i = 0, \dots, m$ og $j = 0, \dots, m - i$. Við táknum þennan stuðul með $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$.

Athugasemd

Verkefnið er háð röð punktanna, þ.e. framsetningin (Newton-formið) á margliðunni. Auðvitað er margliðan og gildin á henni alltaf þau sömu (sbr. ótvíræðni glæru 5.12).

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$:

$y[x_i] = y_i$.

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$:

$y[x_i] = y_i$.

$j = 1$:

$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$:

$y[x_i] = y_i$.

$j = 1$:

$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

$j = 2$:

$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$.

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$:

$y[x_i] = y_i$.

$j = 1$:

$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

$j = 2$:

$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$.

$j > 2$:

$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_j] - y[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$.

5.3 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

$j = 0$:

$y[x_i] = y_i$.

$j = 1$:

$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

$j = 2$:

$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$.

$j > 2$:

$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_j] - y[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$.

Athugasemd:

Stærðin $y[x_{n-1}, x_n]$ hefur komið fyrir áður hjá okkur þegar við fjölluðum um sniðilsaðferð, sjá kafla 2.5.

5.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

5.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \ldots, x_m]$.

5.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \ldots, x_m]$.

Við sjáum þá að stuðullinn við veldið x^m í $p(x)$ er

$$\frac{y[x_0, \ldots, x_{m-1}]}{x_0 - x_m} + \frac{y[x_1, \ldots, x_m]}{x_m - x_0}$$

5.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \ldots, x_m]$.

Við sjáum þá að stuðullinn við veldið x^m í $p(x)$ er

$$\frac{y[x_0, \ldots, x_{m-1}]}{x_0 - x_m} + \frac{y[x_1, \ldots, x_m]}{x_m - x_0} = y[x_0, \ldots, x_m]$$

5.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður (glæra 5.13) gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \ldots, x_m]$.

Við sjáum þá að stuðullinn við veldið x^m í $p(x)$ er

$$\frac{y[x_0, \ldots, x_{m-1}]}{x_0 - x_m} + \frac{y[x_1, \ldots, x_m]}{x_m - x_0} = y[x_0, \ldots, x_m]$$

Athugasemd: Fyrir $m = 0$ gildir að $p(x) = y_0 = y[x_0]$.

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 0, 1$

Mismunakvótar eru venjulega reiknaðir út í svokölluðum *mismunakvótatöflum*.

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 0, 1$

Mismunakvótar eru venjulega reiknaðir út í svokölluðum *mismunakvótatöflum*.

Ef $m = 0$ er mismunakvótataflan aðeins ein lína

i	x_i	$y[x_i]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 0, 1$

Mismunakvótar eru venjulega reiknaðir út í svokölluðum *mismunakvótatöflum*.

Ef $m = 0$ er mismunakvótataflan aðeins ein lína

i	x_i	$y[x_i]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$

Ef $m = 1$ er taflan

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	

og

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0).$$

5.3 Mismunakvótatöflur fyrir $m = 2$

Ef $m = 2$ verður taflan

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$		

og margliðan er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Skoðum loks tilfellið $m = 3$

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$			

Skoðum loks tilfellið $m = 3$

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$			

Brúunarmargliðan fæst svo með því að nota stuðlana úr fyrstu línu töflunnar:

$$\begin{aligned} p(x) =& y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

5.3 Sýnidæmi

Við skulum reikna út aftur brúunarmargliðuna gegnum $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$. Stillum fyrst upp mismunakvótatöflu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3		
2	3	6		

5.3 Sýnidæmi

Við skulum reikna út aftur brúunarmargliðuna gegnum $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$. Stillum fyrst upp mismunakvótatöflu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3		
2	3	6		

Fyllum svo út í hana með að ganga á hvern dálk á fætur öðrum

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\dfrac{3-1}{2-1} = 2$	$\dfrac{3-2}{3-1} = 1/2$
1	2	3	$\dfrac{6-3}{3-2} = 3$	
2	3	6		

5.3 Sýnidæmi

Við skulum reikna út aftur brúunarmargliðuna gegnum $(1, 1)$, $(2, 3)$ og $(3, 6)$. Stillum fyrst upp mismunakvótatöflu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3		
2	3	6		

Fyllum svo út í hana með að ganga á hvern dálk á fætur öðrum

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\frac{3-1}{2-1} = 2$	$\frac{3-2}{3-1} = 1/2$
1	2	3	$\frac{6-3}{3-2} = 3$	
2	3	6		

Lesum út brúunarmargliðuna p með að ganga á efstu línuna:

$$p(x) = 1 + 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)(x-2).$$

5.3 Sýnidæmi

Reiknum út brúunarmargliðuna gegnum $(3, 1)$, $(1, -3)$, $(5, 2)$ og $(6, 4)$. Stillum upp og fyllum út í mismunakvótatöflu:

i	x_i	$y[x_i]$,	$y[x_i, x_{i+1}]$,	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$,	$y[x_i, \ldots, x_{i+3}]$
1	3	1	$\frac{-3-1}{1-3} = 2$	$\frac{5/4-2}{5-3} = -3/8$	$\frac{3/20-(-3/8)}{6-3} = 7/40$
2	1	-3	$\frac{2-(-3)}{5-1} = 5/4$	$\frac{2-5/4}{6-1} = 3/20$	
3	5	2	$\frac{4-2}{6-5} = 2$		
4	6	4			

5.3 Sýnidæmi

Reiknum út brúunarmargliðuna gegnum $(3,1)$, $(1,-3)$, $(5,2)$ og $(6,4)$. Stillum upp og fyllum út í mismunakvótatöflu:

i	x_i	$y[x_i]$,	$y[x_i, x_{i+1}]$,	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$,	$y[x_i, \ldots, x_{i+3}]$
1	3	1	$\frac{-3-1}{1-3} = 2$	$\frac{5/4-2}{5-3} = -3/8$	$\frac{3/20-(-3/8)}{6-3} = 7/40$
2	1	-3	$\frac{2-(-3)}{5-1} = 5/4$	$\frac{2-5/4}{6-1} = 3/20$	
3	5	2	$\frac{4-2}{6-5} = 2$		
4	6	4			

Nú getum við lesið brúunarmargliðuna okkar úr töflunni með að ganga á efstu línuna, við fáum

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

5.3 Samantekt

Ef gefnir eru punktar $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ í $\mathbb{R}^2$, þar sem $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$, þá er til nákvæmlega ein margliða p stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, m$$

5.3 Samantekt

Ef gefnir eru punktar $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ í $\mathbb{R}^2$, þar sem $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$, þá er til nákvæmlega ein margliða p stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, m$$

Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna $x_0, \ldots, x_{m-1}$ er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + y[x_0, \ldots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir eru reiknaðir með rakningarformúlunum $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - y[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, \qquad i = 0, \ldots, m,$$

Venja er að setja mismunakvótana upp í töflu og stuðlarnir í Newton-forminu raða sér í fyrstu línu töflunnar:

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$y[x_i, \dots, x_{i+4}]$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\dots$
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_2, x_3, x_4]$	$\dots$	
3	x_3	$y[x_3] = y_3$	$y[x_3, x_4]$	$\dots$		
4	x_4	$y[x_4] = y_4$	$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

Lagrange-form brúunarmargliðunnar er

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} y_k \ell_k(x)$$

þar sem ℓ_k eru Lagrange-margliðurnar með tilliti til punktanna $x_0, \ldots, x_m$,

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_m)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_m)}.$$

Lagrange-form brúunarmargliðunnar er

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} y_k \ell_k(x)$$

þar sem ℓ_k eru Lagrange-margliðurnar með tilliti til punktanna $x_0, \ldots, x_m$,

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_m)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_m)}.$$

En þær uppfylla

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases}$$

5.3 Samantekt

Lagrange-margliður

- Auðvelt að finna margliðuna
- Dýrara að reikna fallgildin

Newton-margliður

- Erfiðara að finna margliðuna
- Auðvelt að finna fallgildin (reiknirit Horners)

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

Látum $a_1, \dots, a_k$ vera ólíka punkta í $\mathbb{R}$, $m_1, \dots, m_k$ vera jákvæðar heiltölur og hugsum okkur að gefnar séu rauntölur

$$y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

Látum $a_1, \dots, a_k$ vera ólíka punkta í $\mathbb{R}$, $m_1, \dots, m_k$ vera jákvæðar heiltölur og hugsum okkur að gefnar séu rauntölur

$$y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Við viljum finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að margliðan $p = p^{(0)}$ og afleiður hennar $p^{(j)}$ uppfylli

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

5.X Brúunarmargliður með margföldum punktum

Látum $a_1, \dots, a_k$ vera ólíka punkta í $\mathbb{R}$, $m_1, \dots, m_k$ vera jákvæðar heiltölur og hugsum okkur að gefnar séu rauntölur

$$y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Við viljum finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að margliðan $p = p^{(0)}$ og afleiður hennar $p^{(j)}$ uppfylli

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Við nefnum verkefnið að finna slíka margliðu p *alhæft brúunarverkefni*, og margliða sem uppfyllir þessi skilyrði nefnist *brúunarmargliða fyrir brúunarverkefnið* sem lýst er með gefnu skilyrðunum.

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.
Við skilgreinum nú töluna

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1.$$

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.
Við skilgreinum nú töluna

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1.$$

Brúunarmargliðan okkar p á að vera af stigi $\leq m$, og fjöldi skilyrða sem við setjum á hana eru $m + 1$.

5.X Margfeldni punktanna

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.
Við skilgreinum nú töluna

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1.$$

Brúunarmargliðan okkar p á að vera af stigi $\leq m$, og fjöldi skilyrða sem við setjum á hana eru $m + 1$. (Athugið að tilfellið $k = m + 1$, $m_j = 1$ er það sem við skoðuðum í köflunum hér á undan).

5.X Tilfellin: (i) allir punktar eins og (ii) einn punktur

(i) Allir punktar eins

Ef allir punktarnir eru einfaldir, þá er alhæfða brúunarverkefnið sama verkefni og brúunarverkefnið sem við leystum í kafla 5.1 og 5.3 með

$$p^{(0)}(a_i) = p(a_i) = y_i^{(0)},$$

og lausnin var leidd út með

$$x_0 = a_1, \ldots, x_m = a_k \quad \text{og} \quad y_0 = y_1^{(0)}, \ldots, y_m = y_k^{(0)}.$$

5.X Tilfellin: (i) allir punktar eins og (ii) einn punktur

(i) Allir punktar eins

Ef allir punktarnir eru einfaldir, þá er alhæfða brúunarverkefnið sama verkefni og brúunarverkefnið sem við leystum í kafla 5.1 og 5.3 með

$$p^{(0)}(a_i) = p(a_i) = y_i^{(0)},$$

og lausnin var leidd út með

$$x_0 = a_1, \dots, x_m = a_k \quad \text{og} \quad y_0 = y_1^{(0)}, \dots, y_m = y_k^{(0)}.$$

(ii) Einn punktur

Ef aftur á móti $k = 1$, þá er lausn gefin með Taylor-margliðunni af röð m í punktinum a_1

$$p(x) = y_1^{(0)} + \frac{y^{(1)}}{1!}(x - a_1) + \dots + \frac{y_1^{(m)}}{m!}(x - a_1)^m.$$

Munum að ef p er margliða og $p(a) = 0$ þá er p deilanleg með $(x - a)$. Það er, hægt er að skrifa

$$p(x) = (x - a)q(x),$$

þar sem q er margliða af stigi sem er einu lægra en stig p.

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.
Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.
Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Af þessu leiðir að $r(x)$ er deilanlegt með $(x - a_i)^{m_i}$ en samanlagt stig þessara þátta er $m_1 + \ldots + m_k = m + 1$.

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.

Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Af þessu leiðir að $r(x)$ er deilanlegt með $(x - a_i)^{m_i}$ en samanlagt stig þessara þátta er $m_1 + \ldots + m_k = m + 1$.

Nú er stig $r(x)$ minna eða jafnt m svo þetta getur aðeins gerst ef $r(x)$ er núllmargliðan.

5.X Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Við athugum fyrst ótvíræðni lausnarinnar með því að gera ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\leq m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.
Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

Af þessu leiðir að $r(x)$ er deilanlegt með $(x - a_i)^{m_i}$ en samanlagt stig þessara þátta er $m_1 + \ldots + m_k = m + 1$.
Nú er stig $r(x)$ minna eða jafnt m svo þetta getur aðeins gerst ef $r(x)$ er núllmargliðan.
Við höfum því að $p(x) = q(x)$ og ályktum að við höfum nákvæmlega eina lausn á brúunarverkefninu ef við getum sýnt fram á tilvist á lausn.

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

Gerum nú ráð fyrir að við getum fundið brúunarmargliðu af stigi $\leq m - 1$ fyrir sérhvert alhæft brúunarverkefni þar sem samanlagður fjöldi skilyrðanna er m.

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

Gerum nú ráð fyrir að við getum fundið brúunarmargliðu af stigi $\leq m-1$ fyrir sérhvert alhæft brúunarverkefni þar sem samanlagður fjöldi skilyrðanna er m.

Lítum nú aftur á upprunalega brúunarverkefnið það sem fjöldi skilyrðanna er $m+1$. Skilgreinum tvær runur af punktum

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_i \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0, y_1, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(m_k-1)})$$

5.X Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í kafla 5.1 til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við þrepum.

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

Gerum nú ráð fyrir að við getum fundið brúunarmargliðu af stigi $\leq m-1$ fyrir sérhvert alhæft brúunarverkefni þar sem samanlagður fjöldi skilyrðanna er m.

Lítum nú aftur á upprunalega brúunarverkefnið það sem fjöldi skilyrðanna er $m+1$. Skilgreinum tvær runur af punktum

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_i \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0, y_1, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(m_k-1)})$$

Við höfum séð að í því tilfelli að við höfum einn punkt, $k = 1$, $x_0 = x_1 = \dots = x_m = a_1$ er lausnin gefin með Taylor-margliðu í a_1.

Við megum því gera ráð fyrir punktarnir séu a.m.k. tveir, $k \geq 2$.
Það gefur að $x_0 \neq x_m$.

Við megum því gera ráð fyrir punktarnir séu a.m.k. tveir, $k \geq 2$. Það gefur að $x_0 \neq x_m$.

Látum $q(x)$ vera margliðuna af stigi $\leq m-1$ sem uppfyllir sömu skilyrði og p, nema það síðasta um að $q^{(m_k-1)}(a_k)$ þurfi að vera $y_k^{(m_k-1)}$.

Við megum því gera ráð fyrir punktarnir séu a.m.k. tveir, $k \geq 2$. Það gefur að $x_0 \neq x_m$.

Látum $q(x)$ vera margliðuna af stigi $\leq m - 1$ sem uppfyllir sömu skilyrði og p, nema það síðasta um að $q^{(m_k-1)}(a_k)$ þurfi að vera $y_k^{(m_k-1)}$.
og látum $r(x)$ vera margliðuna sem uppfyllir öll brúunarskilyrðin, nema síðasta skilyrðið í fyrsta punkti um að $r^{(m_1-1)}(a_1)$ sé jafnt $y_1^{(m_1-1)}$.

5.X Gefin fallgildi eru tekin:

Setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

5.X Gefin fallgildi eru tekin:

Setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Nú þurfum við að staðfesta að öll skilyrðin séu uppfyllt.

5.X Gefin fallgildi eru tekin:

Setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Nú þurfum við að staðfesta að öll skilyrðin séu uppfyllt.

Við byrjum á því að taka $j = 0$ sem svarar til þess að p taki fyrirfram gefin fallgildi,

$$\begin{aligned}
p(a_1) &= \frac{a_1 - a_k}{a_1 - a_k} q(a_1) + \frac{a_1 - a_1}{a_k - a_1} r(a_1) = q(a_1) = y_1^{(0)} \\
p(a_i) &= \frac{a_i - a_k}{a_1 - a_k} q(a_i) + \frac{a_i - a_1}{a_k - a_1} r(a_i) = \left(\frac{a_i - a_k}{a_1 - a_k} + \frac{a_i - a_1}{a_k - a_1} \right) y_i^{(0)} \\
&= y_i^{(0)}, \qquad \text{fyrir } i = 2, \dots, k-1, \\
p(a_k) &= \frac{a_k - a_k}{a_1 - a_k} q(a_k) + \frac{a_k - a_1}{a_k - a_1} r(a_k) = r(a_k) = y_k^{(0)}.
\end{aligned}$$

5.X Gildin á afleiðunum eru tekin

Rifjum upp margliðuna p:

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

5.X Gildin á afleiðunum eru tekin

Rifjum upp margliðuna p:

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Afleiður hennar eru

$$p^{(j)}(x) = \frac{(x - a_k)}{(a_1 - a_k)} q^{(j)}(x) + \frac{(x - a_1)}{(a_k - a_1)} r^{(j)}(x) + j \frac{\left(q^{(j-1)}(x) - r^{(j-1)}(x)\right)}{a_k - a_1}$$

5.X Gildin á afleiðunum eru tekin

Rifjum upp margliðuna p:

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Afleiður hennar eru

$$p^{(j)}(x) = \frac{(x - a_k)}{(a_1 - a_k)} q^{(j)}(x) + \frac{(x - a_1)}{(a_k - a_1)} r^{(j)}(x) + j \frac{\left(q^{(j-1)}(x) - r^{(j-1)}(x)\right)}{a_k - a_1}$$

Ef nú $m_i > 1$ þá er $q^{(j-1)}(a_i) = y^{(j-1)}(a_i) = r^{(j-1)}(a_i)$ fyrir $j = 1, \ldots, m_i - 1$ og því kemur alltaf 0 út úr síðasta liðnum ef við setjum inn $x = a_i$, fyrir öll $i = 1, \ldots, k$.

5.X Gildin á afleiðunum eru tekin

Rifjum upp margliðuna p:

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Afleiður hennar eru

$$p^{(j)}(x) = \frac{(x - a_k)}{(a_1 - a_k)} q^{(j)}(x) + \frac{(x - a_1)}{(a_k - a_1)} r^{(j)}(x) + j \frac{\left(q^{(j-1)}(x) - r^{(j-1)}(x)\right)}{a_k - a_1}$$

Ef nú $m_i > 1$ þá er $q^{(j-1)}(a_i) = y^{(j-1)}(a_i) = r^{(j-1)}(a_i)$ fyrir $j = 1, \ldots, m_i - 1$ og því kemur alltaf 0 út úr síðasta liðnum ef við setjum inn $x = a_i$, fyrir öll $i = 1, \ldots, k$.

Af þessu sést að afleiður p uppfylla skilyrðin

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \qquad \text{fyrir } j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Við höfum því sannað eftirfarandi.

Við höfum því sannað eftirfarandi.

Setning

Ef gefnar eru

- rauntölur $a_1, \ldots, a_k$, með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$,
- jákvæðar heiltölur $m_1, \ldots, m_k$,
- rauntölur $y_i^{(j)}$, fyrir $j = 0, \ldots, m_i - 1$, $i = 1, \ldots, k$,

og talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \qquad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Ef skilgreindar eru runurnar

$$(x_0, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_k, \dots, a_k)$$

þar sem a_1 kemur fyrir m_1 sinnum, a_2 kemur fyrir m_2 sinnum o.s.frv., og

$$(y_0, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, .., y_1^{(m_1-1)}, y_2^{(0)}, .., y_2^{(m_2-1)}, \cdots, y_k^{(0)}, .., y_k^{(m_k-1)}),$$

þá er Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$ gefið með

5.X Brúunarmargliðan fundin

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + y[x_0, \ldots, x_m](x - x_0)\cdots(x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ eru reiknaðir með rakningarformúlu þannig að $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \begin{cases} \dfrac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - y[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, & \text{ef } x_i \neq x_{i+j}, \\[2ex] \dfrac{y_i^{(j)}}{j!}, & \text{ef } x_i = x_{i+j}. \end{cases}$$

Lítum nú aftur á almenna brúunarverkefnið og gefum okkur að tölurnar $y_i^{(j)}$ séu af gerðinni $f^{(j)}(a_i)$ þar sem $f : I \to \mathbb{R}$ er fall á bili I sem inniheldur alla punktana $a_1, \ldots, a_k$.

Lítum nú aftur á almenna brúunarverkefnið og gefum okkur að tölurnar $y_i^{(j)}$ séu af gerðinni $f^{(j)}(a_i)$ þar sem $f : I \to \mathbb{R}$ er fall á bili I sem inniheldur alla punktana $a_1, \dots, a_k$.

Þá snýst brúunarverkefnið um að finna margliðu af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Lítum nú aftur á almenna brúunarverkefnið og gefum okkur að tölurnar $y_i^{(j)}$ séu af gerðinni $f^{(j)}(a_i)$ þar sem $f: I \to \mathbb{R}$ er fall á bili I sem inniheldur alla punktana $a_1, \dots, a_k$.

Þá snýst brúunarverkefnið um að finna margliðu af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Við vitum að lausn þess er ótvírætt ákvörðuð. Ef við notum Newton form lausnarinnar, þá táknum við mismunakvótana með

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}]$$

í stað

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}]$$

Runurnar $(x_0, \ldots, x_m)$ og $(y_0, \ldots, y_m)$ eru skilgreindar með

$$(x_0, x_1, \ldots, x_m) = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{m_i \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \ldots, \underbrace{a_k, \ldots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$\begin{aligned}(y_0, y_1, \ldots, y_m) = (f^{(0)}(a_1), \ldots, f^{(m_1-1)}(a_1), f^{(0)}(a_2), \ldots, f^{(m_2-1)}(a_2)\\ \ldots, f^{(0)}(a_k), \ldots, f^{(m_k-1)}(a_k))\end{aligned}$$

Nú tökum við punkt $x \in I$ og spyrjum um skekkjuna $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Ef x er einn punktana $a_1, \ldots, a_k$, þá er $p(x) = f(x)$ og skekkjan þar með 0, svo við skulum gera ráð fyrir að $x \neq a_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Nú tökum við punkt $x \in I$ og spyrjum um skekkjuna $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Ef x er einn punktana $a_1, \dots, a_k$, þá er $p(x) = f(x)$ og skekkjan þar með 0, svo við skulum gera ráð fyrir að $x \neq a_i$, $i = 1, \dots, k$.

Við bætum nú $(x, f(x))$ sem einföldum brúunarpunkti við alhæfða brúunar verkefnið og fáum sem lausn $q(t)$ á þessu aukna verkefni. Margliðan q er af stigi $\leq m + 1$. Við notum táknið t fyrir breytu, því x er frátekið.

Nú tökum við punkt $x \in I$ og spyrjum um skekkjuna $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Ef x er einn punktana $a_1, \dots, a_k$, þá er $p(x) = f(x)$ og skekkjan þar með 0, svo við skulum gera ráð fyrir að $x \neq a_i$, $i = 1, \dots, k$.

Við bætum nú $(x, f(x))$ sem einföldum brúunarpunkti við alhæfða brúunar verkefnið og fáum sem lausn $q(t)$ á þessu aukna verkefni. Margliðan q er af stigi $\leq m+1$. Við notum táknið t fyrir breytu, því x er frátekið.

Þá uppfyllir $q(t)$ að $q(x) = f(x)$ auk allra skilyrðanna

$$q^{(j)}(a_i) = p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$$

í verkefninu sem við byrjuðum með.

Við getum þá skrifað (sjá glæru 5.27 til hliðsjónar)

$$\begin{aligned} q(t) &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - x_0) \cdots (t - x_m) \\ &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}. \end{aligned}$$

Við getum þá skrifað (sjá glæru 5.27 til hliðsjónar)

$$
\begin{aligned}
q(t) &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - x_0) \cdots (t - x_m) \\
&= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}.
\end{aligned}
$$

Þegar við gefum breytunni t gildið x, þá fáum við $q(x) = f(x)$ og því fæst formúla fyrir skekkjunni

$$
f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}
$$

Við getum þá skrifað (sjá glæru 5.27 til hliðsjónar)

$$\begin{aligned} q(t) &= p(t) + f[x_0, \ldots, x_m, x](t - x_0) \cdots (t - x_m) \\ &= p(t) + f[x_0, \ldots, x_m, x](t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}. \end{aligned}$$

Þegar við gefum breytunni t gildið x, þá fáum við $q(x) = f(x)$ og því fæst formúla fyrir skekkjunni

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \ldots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

Nú ætlum við að finna leið til þess að meta skekkjuliðinn. Til þess þurfum við að gefa okkur að f hafi að minnsta kosti $m + 1$ afleiðu.

5.1 Tilfellið þegar við höfum aðeins einn punkt

Munum nú að í tilfellinu þegar við erum bara með einn punkt a_1, þá erum við með $m+1$ skilyrði

$$p^{(j)}(a_1) = f^{(j)}(a_1), \qquad j = 0, \dots, m$$

og við fáum að p er Taylor-margliða fallsins f í punktinum a_1. Þá er $x_0 = \cdots = x_m = a_1$ og við fáum

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m+1}$$

5.1 Tilfellið þegar við höfum aðeins einn punkt

Munum nú að í tilfellinu þegar við erum bara með einn punkt a_1, þá erum við með $m+1$ skilyrði

$$p^{(j)}(a_1) = f^{(j)}(a_1), \qquad j = 0, \dots, m$$

og við fáum að p er Taylor-margliða fallsins f í punktinum a_1. Þá er $x_0 = \cdots = x_m = a_1$ og við fáum

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m+1}$$

Nú segir setning Taylors okkur að til sé punktur ξ milli a_1 og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a_1)^{m+1}$$

Við getum því dregið þá ályktun að í þessu sértilfelli er

$$f[x_0, \dots, x_m, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Það kemur í ljós að þetta er almenn regla sem gildir fyrir *öll* alhæfðu brúunarverkefnin.

5.1 Tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

Munum að tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

$$f[a_1, x] = \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} = f'(\xi).$$

Samfellt fall φ á bili I er sagt hafa núllstöð *af stigi að minnsta kosti* $m > 0$ í punktinum $a \in I$, ef til er samfellt fall ψ á I þannig að

$$\varphi(x) = (x-a)^m \psi(x)$$

Við segjum að φ hafi núllstöð af *margfeldni* m ef $\psi(a) \neq 0$.

5.1 Margfeldni núllstöðva:

Samfellt fall φ á bili I er sagt hafa núllstöð *af stigi að minnsta kosti* $m > 0$ í punktinum $a \in I$, ef til er samfellt fall ψ á I þannig að

$$\varphi(x) = (x-a)^m \psi(x)$$

Við segjum að φ hafi núllstöð af *margfeldni* m ef $\psi(a) \neq 0$.

Athugið að ef φ er deildanlegt I með samfellda afleiðu, þá er ψ deildanlegt með samfellda afleiðu í $I \setminus \{a\}$ og við höfum

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= m(x-a)^{m-1}\psi(x) + (x-a)^m \psi'(x) \\ &= (x-a)^{m-1}\big(m\psi(x) + (x-a)\psi'(x)\big)\end{aligned}$$

Ef afleiðan ψ' er takmörkuð í grennd um a, þá sjáum við á þessari formúlu að φ' hefur núllstöð af stigi að minnsta kosti $m-1$ í a.

Hugsum okkur nú að við séum með $a_1, \ldots, a_k$ ólíka punkta í bilinu I og að $m_1, \ldots, m_k$ séu jákvæðar náttúrlegar tölur.

Hugsum okkur nú að við séum með $a_1, \dots, a_k$ ólíka punkta í bilinu I og að $m_1, \dots, m_k$ séu jákvæðar náttúrlegar tölur.
Ef fallið φ hefur núllstöðvar í öllum punktunum a_j og núllstöðin a_j er af stigi að minnsta kosti m_j. Við segjum að þá hafi φ *að minnsta kosti*

$$n = m_1 + \cdots + m_k$$

núllstöðvar taldar með margfeldni.

Hugsum okkur nú að við séum með $a_1, \dots, a_k$ ólíka punkta í bilinu I og að $m_1, \dots, m_k$ séu jákvæðar náttúrlegar tölur.
Ef fallið φ hefur núllstöðvar í öllum punktunum a_j og núllstöðin a_j er af stigi að minnsta kosti m_j. Við segjum að þá hafi φ *að minnsta kosti*

$$n = m_1 + \cdots + m_k$$

núllstöðvar taldar með margfeldni.

Eins þá segjum við að φ hafi n núllstöðvar í $\{a_1, \dots, a_k\}$ *taldar með margfeldni* ef φ hefur núllstöðvar í öllum punktum $a_1, \dots, a_k$ og samanlögð margfeldni þeirra er n

5.1 Margfeldni núllstöðva

Hugsum okkur nú að fallið φ hafi núllstöð af stigi m_j í punktunum a_j fyrir öll $j = 1, \dots, k$ og að $n = m_1 + \cdots + m_k$.

Hugsum okkur nú að fallið φ hafi núllstöð af stigi m_j í punktunum a_j fyrir öll $j = 1, \dots, k$ og að $n = m_1 + \cdots + m_k$.

Til einföldunar gerum við ráð fyrir að

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

5.1 Margfeldni núllstöðva

Hugsum okkur nú að fallið φ hafi núllstöð af stigi m_j í punktunum a_j fyrir öll $j = 1, \dots, k$ og að $n = m_1 + \cdots + m_k$.

Til einföldunar gerum við ráð fyrir að

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

Þá gefur meðalgildissetningin að φ' hefur að minnsta kosti eina núllstöð á sérhverju bilanna

$$]a_1, a_2[, \ ]a_2, a_3[, \ \dots \ ]a_{k-1}, a_k[$$

Þau eru samanlagt $k-1$ talsins. Að auki vitum við að φ' hefur núllstöðvar af stigi að minnsta kosti $m_j - 1$ í punktinum a_j. Ef við leggjum þetta saman, þá fáum við að φ' hefur núllstöðvar af margfeldni að minnsta kosti

$$k - 1 + (m_1 - 1) + \cdots + (m_k - 1) = n - 1$$

í minnsta lokaða bilinu sem inniheldur alla punktana $a_1, \dots, a_k$.

5.1 Skekkjumat – aftur

Nú ætlum við að sýna fram á að fyrir föll f sem eru $(m+1)$ sinnum samfellt deildanleg að til sé ξ á minnsta bili sem inniheldur $a_1, \ldots, a_k$ og x þannig að

$$f[x_0, \ldots, x_m, x] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

5.1 Skekkjumat – aftur

Nú ætlum við að sýna fram á að fyrir föll f sem eru $(m+1)$ sinnum samfellt deildanleg að til sé ξ á minnsta bili sem inniheldur $a_1, \ldots, a_k$ og x þannig að

$$f[x_0, \ldots, x_m, x] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Við skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t-a_1)^{m_1} \cdots (t-a_k)^{m_k}$$

og talan λ er valin þannig að $g(x) = 0$.

5.1 Skekkjumat – aftur

Nú ætlum við að sýna fram á að fyrir föll f sem eru $(m+1)$ sinnum samfellt deildanleg að til sé ξ á minnsta bili sem inniheldur $a_1, \dots, a_k$ og x þannig að

$$f[x_0, \dots, x_m, x] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Við skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}$$

og talan λ er valin þannig að $g(x) = 0$.

Nú er $p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$ fyrir $j = 0, \dots, m_i - 1$, þá gefur setning Taylors okkur að g hefur núllstöð af stigi m_i í sérhverjum punktanna a_i. Auk þess hefur g núllstöð í x. Samanlagt eru þetta að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni.

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m+1$ núllstöð talda með margfeldni,

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m+1$ núllstöð talda með margfeldni,

g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m+1$ núllstöð talda með margfeldni,

g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni

og þannig áfram, þar til við ályktum að

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m+2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m+1$ núllstöð talda með margfeldni,

g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni

og þannig áfram, þar til við ályktum að

$g^{(m+1)}$ hefur að minnsta kosti eina núllstöð.

Höfum:

g hefur að minnsta kosti $m + 2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,

g' hefur að minnsta kosti $m + 1$ núllstöð talda með margfeldni,

g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni

og þannig áfram, þar til við ályktum að

$g^{(m+1)}$ hefur að minnsta kosti eina núllstöð.

Tökum eina slíka og köllum ξ.

5.1 Skekkjumat – aftur

Munum að

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k} = t^{m+1} + b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$$

5.1 Skekkjumat – aftur

Munum að

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k} = t^{m+1} + b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$$

Margliðan p hefur stig $\leq m$ svo $p^{(m+1)}(x) = 0$ fyrir öll x

5.1 Skekkjumat – aftur

Munum að

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k} = t^{m+1} + b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$$

Margliðan p hefur stig $\leq m$ svo $p^{(m+1)}(x) = 0$ fyrir öll x og margliðan w er af stigi $m+1$ með stuðul 1 við hæsta veldið, svo $w^{(m+1)}(t) = (m+1)!$. Við höfum því

$$0 = g^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - \lambda \cdot (m+1)!$$

sem jafngildir því að

$$\lambda = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Við setjum nú inn $t = x$ sem gefur

$$0 = g(x) = f(x) - p(x) - \lambda w(x),$$

og við fáum þar með formúlu fyrir skekkjunni á nálgun á $f(x)$ með alhæfðu brúunarmargliðunni $p(x)$,

$$f(x) - p(x) = \lambda w(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}$$

Ef gefið er fall $f : I \to \mathbb{R}$ á bili I, $a_1, \dots, a_k$ í I, með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$, jákvæðar heiltölur $m_1, \dots, m_k$, talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, og gert er ráð fyrir að $f \in C^{m+1}(I)$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \qquad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.1 Samantekt

Newton-form margliðunnar p er gefið með

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $f[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ eru skilgreindir sem $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ út frá gögnunum $y_i^{(j)}$. Fyrir sérhvert x í I er skekkjan $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$ gefin með

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \ldots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}.$$

5.1 Samantekt

Newton-form margliðunnar p er gefið með

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_m](x - x_0)\cdots(x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $f[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ eru skilgreindir sem $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ út frá gögnunum $y_i^{(j)}$. Fyrir sérhvert x í I er skekkjan $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$ gefin með

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \ldots, x_m, x](x - a_1)^{m_1}\cdots(x - a_k)^{m_k}.$$

Fyrir sérhvert $i = 1, \ldots, k$ og $j = 0, \ldots, m - i$ þá gildir að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $x_i \ldots, x_{i+j}$ þannig að

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!},$$

því gildir sérstaklega að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $a_1, \ldots, a_k$ og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k}.$$

5.1 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Setjið upp mismunakvótatöflu til þess að reikna út brúunarmargliðu p af stigi ≤ 3 fyrir fallið f, sem hefur tvo tvöfalda brúunarpunkta $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$. Skrifið upp Newton-form margliðunnar p.

5.1 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Setjið upp mismunakvótatöflu til þess að reikna út brúunarmargliðu p af stigi ≤ 3 fyrir fallið f, sem hefur tvo tvöfalda brúunarpunkta $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$. Skrifið upp Newton-form margliðunnar p.

b) Reiknið út $p(1.3)$. Notið aðferðarskekkju fyrir margliðubrúun til þess að meta skekkjuna $f(1.3) - p(1.3)$ að ofan og neðan og fáið þannig bil þar sem rétta gildið liggur. Veljið miðpunkt bilsins sem nálgunargildi fyrir $f(1.3)$ og afrúnið gildið miðað við mörk bilsins.

5.1 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Setjið upp mismunakvótatöflu til þess að reikna út brúunarmargliðu p af stigi ≤ 3 fyrir fallið f, sem hefur tvo tvöfalda brúunarpunkta $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$. Skrifið upp Newton-form margliðunnar p.

b) Reiknið út $p(1.3)$. Notið aðferðarskekkju fyrir margliðubrúun til þess að meta skekkjuna $f(1.3) - p(1.3)$ að ofan og neðan og fáið þannig bil þar sem rétta gildið liggur. Veljið miðpunkt bilsins sem nálgunargildi fyrir $f(1.3)$ og afrúnið gildið miðað við mörk bilsins.

c) Látum nú q vera brúnunarmargliðuna af stigi ≤ 4 sem uppfyllir sömu skilyrði og gefin eru í **a)** að viðbættu því að $a_2 = 2$ á að vera þrefaldur brúunarpunktur. Sýnið hvernig hægt er að ákvarða mismunakvótatöfluna fyrir q með því að stækka töfluna í **a)**. Ákvarðið síðan q og reiknið út $q(1.3)$.

5.1 Lausn á sýnidæmi

Lausn:

a) (og **c)**). Til þess að spara pláss skulum við reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í **c)**-lið. Punktarnir $x_0, \dots, x_4$ eru þá $1, 1, 2, 2, 2$ og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \qquad \text{og} \qquad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

5.1 Lausn á sýnidæmi

Lausn:

a) (og **c)**). Til þess að spara pláss skulum við reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í **c)**-lið. Punktarnir $x_0, \ldots, x_4$ eru þá $1, 1, 2, 2, 2$ og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \qquad \text{og} \qquad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

Í **a)**-lið eru punktarnir tvöfaldir svo við höfum gefin gildi afleiðunnar $f'(x) = 2x \ln x + x$ í punktunum 1 og 2.

$$f'(1) = f[1,1] = f[x_0, x_1] = 1 \;\; \text{og} \;\; f'(2) = f[2,2] = f[x_2, x_3] = 4\ln 2{+}2.$$

Lausn:

a) (og **c)**). Til þess að spara pláss skulum við reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í **c)**-lið. Punktarnir $x_0, \ldots, x_4$ eru þá $1, 1, 2, 2, 2$ og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \qquad \text{og} \qquad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

Í **a)**-lið eru punktarnir tvöfaldir svo við höfum gefin gildi afleiðunnar $f'(x) = 2x \ln x + x$ í punktunum 1 og 2.

$$f'(1) = f[1, 1] = f[x_0, x_1] = 1 \;\text{ og }\; f'(2) = f[2, 2] = f[x_2, x_3] = 4 \ln 2 + 2.$$

Í **c)**-lið er gildið á 2. afleiðu $f''(x) = 2 \ln x + 3$ gefið í punktinum 2. Það gefur okkur

$$f''(2)/2! = f[2, 2, 2] = f[x_2, x_3, x_4] = \ln 2 + \tfrac{3}{2}.$$

Lausn:

a) (og **c)**). Til þess að spara pláss skulum við reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í **c)**-lið. Punktarnir $x_0, \ldots, x_4$ eru þá $1, 1, 2, 2, 2$ og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \qquad \text{og} \qquad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

Í **a)**-lið eru punktarnir tvöfaldir svo við höfum gefin gildi afleiðunnar $f'(x) = 2x \ln x + x$ í punktunum 1 og 2.

$$f'(1) = f[1,1] = f[x_0, x_1] = 1 \;\text{ og }\; f'(2) = f[2,2] = f[x_2, x_3] = 4 \ln 2 + 2.$$

Í **c)**-lið er gildið á 2. afleiðu $f''(x) = 2 \ln x + 3$ gefið í punktinum 2. Það gefur okkur

$$f''(2)/2! = f[2,2,2] = f[x_2, x_3, x_4] = \ln 2 + \tfrac{3}{2}.$$

Við setjum þessi gildi inn í mismunakvótatöfluna og fyllum hana út með því að taka mismunakvóta milli allra gilda

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
0	1	0	1	$4\ln 2 - 1$	$-4\ln 2 + 3$	$5\ln 2 - \frac{7}{2}$
1	1	0	$4\ln 2$	2	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	
2	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$	$\ln 2 + \frac{3}{2}$		
3	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$			
4	2	$4\ln 2$				

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
0	1	0	1	$4\ln 2 - 1$	$-4\ln 2 + 3$	$5\ln 2 - \frac{7}{2}$
1	1	0	$4\ln 2$	2	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	
2	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$	$\ln 2 + \frac{3}{2}$		
3	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$			
4	2	$4\ln 2$				

Margliðan í (a) lið er

$$p(x) = (x-1) + (4\ln 2 - 1)(x-1)^2 + (-4\ln 2 + 3)(x-1)^2(x-2).$$

en í (c)-lið er hún

$$q(x) = p(x) + (5\ln 2 - \tfrac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

b)

Við stingum gildinu $x = 1.3$ inn í margliðuna og fáum $p(1.3) = 0.445206074$. Skekkjan er

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)^2$$

þar sem ξ er einhver punktur á bilinu $[1, 2]$.

b)

Við stingum gildinu $x = 1.3$ inn í margliðuna og fáum $p(1.3) = 0.445206074$. Skekkjan er

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)^2$$

þar sem ξ er einhver punktur á bilinu $[1, 2]$.

Við þurfum því að meta fjórðu afleiðuna,

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad f'(x) = 2x \ln x + x, \quad f''(x) = 2 \ln x + 3,$$
$$f'''(x) = 2/x, \quad f^{(4)}(x) = -2/x^2.$$

Ef $x \in [1, 2]$, þá höfum við matið $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$.

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

Af ójöfnunum $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$ leiðir síðan að

$$\alpha = \frac{-2 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} \leq f(1.3) - p(1.3) \leq \frac{-0.5 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} = \beta$$

Af ójöfnunum $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$ leiðir síðan að

$$\alpha = \frac{-2 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} \leq f(1.3) - p(1.3) \leq \frac{-0.5 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} = \beta$$

Við reiknum út úr báðum brotunum

$$\alpha = -0.003675 \qquad \text{og} \qquad \beta = -0.00091875.$$

þar með er $f(1.3)$ á bilinu milli $p(1.3) + \alpha = 0.441531$ og $p(1.3) + \beta = 0.444287$.

5.1 Lausn á sýnidæmi – framhald

Af ójöfnunum $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$ leiðir síðan að

$$\alpha = \frac{-2 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} \leq f(1.3) - p(1.3) \leq \frac{-0.5 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} = \beta$$

Við reiknum út úr báðum brotunum

$$\alpha = -0.003675 \qquad \text{og} \qquad \beta = -0.00091875.$$

þar með er $f(1.3)$ á bilinu milli $p(1.3) + \alpha = 0.441531$ og $p(1.3) + \beta = 0.444287$.
Nálgunargildi okkar á að vera miðpunktur þessa bils og algildi skekkjunnar verður þá hálf billengdin. Það færir okkur nálgunina $f(1.3) \approx 0.442909$ og skekkjuna ± 0.0014. Réttur afrúningur er $f(1.3) = 0.44$.

Við eigum aðeins eftir að reikna út gildi margliðunnar q í punktinum 1.3. Út úr mismunakvótatöflunni fáum við

$$q(x) = p(x) + (5\ln 2 - \tfrac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

sem gefur okkur gildið

$$q(1.3) = 0.445206074 - 0.001511046 = 0.4436950278$$

Til samanburðar höfum við rétt gildi

$$f(1.3) = 0.443395606950060\ldots.$$

Látum $(t_0, y_0), \dots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Látum $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i.

Látum $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i.

Ef punktarnir liggja á grafi fallsins f og nota á margliðuna til þess að nálga fallgildi f, þá getur það verið ýmsum erfiðleikum bundið þegar stig hennar stækkar. Þá getur til dæmis komið fram óstöðugleiki í útreikningum þannig að örlítil frávik í x geta leitt til mikilla frávika í $p(x)$.

Látum $(t_0, y_0), \dots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i.

Ef punktarnir liggja á grafi fallsins f og nota á margliðuna til þess að nálga fallgildi f, þá getur það verið ýmsum erfiðleikum bundið þegar stig hennar stækkar. Þá getur til dæmis komið fram óstöðugleiki í útreikningum þannig að örlítil frávik í x geta leitt til mikilla frávika í $p(x)$.

Skoðið mynd á bls. 387 í kennslubók.

5.5 Almennt um splæsibrúun:

Splæsibrúun er leið út úr þessum vandræðum.

5.5 Almennt um splæsibrúun:

Splæsibrúun er leið út úr þessum vandræðum.

Með henni er fundið samfellt fall S sem brúar gefnu punktana, $S(t_i) = y_i$, og er þannig að einskorðun þess við hlutbilin $[t_i, t_{i+1}]$ er gefið með margliðu af stigi $\leq m$, þar sem m er fyrirfram gefin tala.

5.5 Almennt um splæsibrúun:

Splæsibrúun er leið út úr þessum vandræðum.

Með henni er fundið samfellt fall S sem brúar gefnu punktana, $S(t_i) = y_i$, og er þannig að einskorðun þess við hlutbilin $[t_i, t_{i+1}]$ er gefið með margliðu af stigi $\leq m$, þar sem m er fyrirfram gefin tala.

Algengast er að nota $m = 3$.

5.5 Fyrsta stigs splæsibrúun:

Ef stigið m er 1, þá erum við einfaldlega að draga línustrik milli punktanna og sjáum í hendi okkar að lausnin er

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(x - t_0) + y_0, & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(x - t_1) + y_1, & x \in [t_1, t_2], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(x - t_{n-1}) + y_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

5.5 Fyrsta stigs splæsibrúun:

Ef stigið m er 1, þá erum við einfaldlega að draga línustrik milli punktanna og sjáum í hendi okkar að lausnin er

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(x - t_0) + y_0, & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(x - t_1) + y_1, & x \in [t_1, t_2], \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(x - t_{n-1}) + y_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

Þessi aðferð er ekki mikið notuð því hún er ósannfærandi fyrir deildanleg föll.

5.5 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

5.5 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskorðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

5.5 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskorðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Við ætlum að leiða út jöfnur fyrir stuðlunum a_i, b_i, c_i og d_i; við krefjumst þess að:

(i) S verði samfellt tvisvar sinnum deildanlegt á öllu bilinu $[a, b]$

(ii) S taki gildin y_i í punktunum t_i

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskorðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Við ætlum að leiða út jöfnur fyrir stuðlunum a_i, b_i, c_i og d_i; við krefjumst þess að:

(i) S verði samfellt tvisvar sinnum deildanlegt á öllu bilinu $[a, b]$

(ii) S taki gildin y_i í punktunum t_i

Setjum til einföldunar $h_i = t_{i+1} - t_i$ fyrir $i = 0, \ldots, n-1$.

5.5 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskorðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Við ætlum að leiða út jöfnur fyrir stuðlunum a_i, b_i, c_i og d_i; við krefjumst þess að:

(i) S verði samfellt tvisvar sinnum deildanlegt á öllu bilinu $[a, b]$

(ii) S taki gildin y_i í punktunum t_i

Setjum til einföldunar $h_i = t_{i+1} - t_i$ fyrir $i = 0, \ldots, n - 1$.

Þá má þýða þessi skilyrði yfir í jöfnurnar

5.5 Jöfnur fyrir stuðlunum

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

5.5 Jöfnur fyrir stuðlunum

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Skilyrðin tvö þýðast nú yfir í jöfnuhneppi:

$$\begin{aligned}
a_i &= S_i(t_i) &&= y_i, && (1)\\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) &&= a_{i+1}, && (2)\\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) &&= b_{i+1}, && (3)\\
2c_i + 6d_i h_i &= S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) &&= 2c_{i+1}, && (4)
\end{aligned}$$

5.5 Jöfnur fyrir stuðlunum

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Skilyrðin tvö þýðast nú yfir í jöfnuhneppi:

$$\begin{aligned}
a_i &= S_i(t_i) & &= y_i, & (1)\\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) & &= a_{i+1}, & (2)\\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) & &= b_{i+1}, & (3)\\
2c_i + 6d_i h_i &= S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) & &= 2c_{i+1}, & (4)
\end{aligned}$$

Í (1) höfum við $i = 0, \ldots, n$ og í (2)-(4) höfum við $i = 0, \ldots, n - 2$.
Samtals: $(n + 1) + 3(n - 1) = 4n - 2$ línulegar jöfnur til þess að ákvarða $4n$ óþekktar stærðir.

5.5 Jöfnur fyrir stuðlunum

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Skilyrðin tvö þýðast nú yfir í jöfnuhneppi:

$$\begin{aligned}
a_i &= S_i(t_i) &&= y_i, && (1)\\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) &&= a_{i+1}, && (2)\\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) &&= b_{i+1}, && (3)\\
2c_i + 6d_i h_i &= S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) &&= 2c_{i+1}, && (4)
\end{aligned}$$

Í (1) höfum við $i = 0, \ldots, n$ og í (2)-(4) höfum við $i = 0, \ldots, n-2$.

Samtals: $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ línulegar jöfnur til þess að ákvarða $4n$ óþekktar stærðir.

Það er því ljóst að okkur vantar tvö skilyrði til þess að geta fengið ótvírætt ákvarðaða lausn.

5.5 Við verðum að moða úr þessu!!

$$
\begin{aligned}
a_i = \quad & S_i(t_i) & = \quad & y_i, & (1)\\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = \quad & S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) & = \quad & a_{i+1}, & (2)\\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = \quad & S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) & = \quad & b_{i+1}, & (3)\\
2c_i + 6d_i h_i = \quad & S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) & = \quad & 2c_{i+1}, & (4)
\end{aligned}
$$

Fyrstu jöfnurnar gefa strax gildi a_i og (4) gefur að

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0, \ldots, n-2$$

$$
\begin{aligned}
a_i = \quad & S_i(t_i) & = \quad & y_i, & (1) \\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = \quad & S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) & = \quad & a_{i+1}, & (2) \\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = \quad & S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) & = \quad & b_{i+1}, & (3) \\
2c_i + 6d_i h_i = \quad & S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) & = \quad & 2c_{i+1}, & (4)
\end{aligned}
$$

Fyrstu jöfnurnar gefa strax gildi a_i og (4) gefur að

$$
d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0, \ldots, n-2
$$

Ef við setjum þetta inn í (2) og (3) fæst

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{c_{i+1} + c_i}{3} h_i^2, \quad i = 0, \ldots, n-2$$
$$b_{i+1} = b_i + (c_{i+1} + c_i) h_i, \quad i = 0, \ldots, n-2$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{c_{i+1} + c_i}{3} h_i^2, \quad i = 0, \dots, n-2$$
$$b_{i+1} = b_i + (c_{i+1} + c_i) h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Þegar við leysum fyrri jöfnuna fyrir b_i fæst

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3} h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{c_{i+1} + c_i}{3} h_i^2, \quad i = 0, \dots, n-2$$
$$b_{i+1} = b_i + (c_{i+1} + c_i) h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Þegar við leysum fyrri jöfnuna fyrir b_i fæst

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3} h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

og ef við setjum þetta inn í seinni jöfnuna fæst á endanum að

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad i = 1, .$$

5.5 Jöfnuhneppi

$$
\left[\begin{array}{c|ccccc|c}
.?. & .?. & & & & & \\
\hline
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\
 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & & h_{n-1} \\
\hline
 & & & & .?. & & .?.
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
c_0 \\
\hline
c_1 \\
c_2 \\
\vdots \\
c_{n-1} \\
\hline
c_n
\end{array}\right]
$$

$$
= 3\left[\begin{array}{c}
.?. \\
\hline
\dfrac{a_2-a_1}{h_1} - \dfrac{a_1-a_0}{h_0} \\
\dfrac{a_3-a_2}{h_2} - \dfrac{a_2-a_1}{h_1} \\
\vdots \\
\dfrac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - \dfrac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}} \\
\hline
.?.
\end{array}\right]
$$

5.5 Enn vantar í þetta....

... einhver skilyrði á c_0 og c_n.

5.5 Enn vantar í þetta....

... einhver skilyrði á c_0 og c_n.

Þegar þau hafa verið sett, þá getum við leyst þetta hneppi, reiknað svo gildi b_i og d_i og þá höfum við fundið splæsifallið okkar.

5.5 Enn vantar í þetta....

... einhver skilyrði á c_0 og c_n.

Þegar þau hafa verið sett, þá getum við leyst þetta hneppi, reiknað svo gildi b_i og d_i og þá höfum við fundið splæsifallið okkar.

Það eru til margar leiðir til að ákvarða c_0 og c_n, en fjórar eru algengastar.

Ef við höfum engar upplýsingar um fallið f í t_1 og t_{n-1} liggur beint við að krefjast þess að S''' sé samfellt þar, sem þýðir að $d_0 = d_1$ og $d_{n-2} = d_{n-1}$. Með að nota jöfnurnar fyrir d_i má skrifa þetta sem

$$\begin{aligned} h_1 c_0 - (h_0 + h_1) c_1 + h_0 c_2 &= 0 \\ h_{n-1} c_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1}) c_{n-1} + h_{n-2} c_n &= 0 \end{aligned}$$

og þessar jöfnur, ásamt hinum, má leysa til að ákvarða c_i-in.

5.5 Tilfelli 2: Þvinguð endaskilyrði

Ef hallatala fallsins f er þekkt í endapunktum bilsins er eðlilegt að nota þær upplýsingar við ákvörðun splæsifallsins. Gerum því ráð fyrir að $f'(t_0) = A$ og $f'(t_n) = B$. Skilyrðið $S'(t_0) = A$ gefur þá að

$$A = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{2c_0 + c_1}{3} h_0,$$

eða

$$2h_0 c_0 + h_0 c_1 = 3\left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - A\right)$$

og $S'(t_n) = B$ gefur

$$B = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að nota formúlurnar fyrir b_{n-1} og d_{n-1} fæst

$$c_{n-1}h_{n-1} + 2c_n h_{n-1} = 3\left(B - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

5.5 Tilfelli 3: Náttúrleg endaskilyrði

Einfaldasta lausnin er að setja $c_0 = c_n = 0$, en það jafngildir því að $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$.

5.5 Tilfelli 4: Lotubundið endaskilyrði

Hugsum okkur að við viljum framlengja S í tvisvar samfellt deildanlegt $(b-a)$-lotubundið fall á $\mathbb{R}$. Það setur skilyrðin

$$y_0 = S(t_0) = S_(t_n) = y_n, \quad S'(t_0) = S'(t_n), \quad \text{og} \quad S''(t_0) = S''(t_n)$$

Fljótséð er að $S''(t_0) = S''(t_n)$ þýðir að $c_0 = c_n$, eða

$$c_0 - c_n = 0.$$

Þetta er fyrri jafnan sem við þurfum.

Nú gefur $S'(t_0) = S'(t_n)$ að

$$b_0 = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að setja inn formúlurnar fyrir b_0, b_{n-1}, d_{n-1} og nota að $c_0 = c_n$ fæst jafnan

$$h_0c_1 + 2h_{n-1}c_{n-1} + (2h_0 + 2h_{n-1})c_n = 3\left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

(i) Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

$$0 = t_0 < t_1 = 1 < \cdots < t_n = n.$$

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

(i) Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

$$0 = t_0 < t_1 = 1 < \cdots < t_n = n.$$

(ii) Ákveðið er hvaða endaskilyrði eiga við.

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

(i) Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

$$0 = t_0 < t_1 = 1 < \cdots < t_n = n.$$

(ii) Ákveðið er hvaða endaskilyrði eiga við.

(iii) Búin eru til tvö splæsiföll $R(t)$ fyrir punktasafnið $x_0, \ldots, x_n$ og $S(t)$ fyrir punktasafnið $y_0, \ldots, y_n$.

5.5 Teikning á ferlum

Gerum nú ráð fyrir að gefnir punktar $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

(i) Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

$$0 = t_0 < t_1 = 1 < \cdots < t_n = n.$$

(ii) Ákveðið er hvaða endaskilyrði eiga við.

(iii) Búin eru til tvö splæsiföll $R(t)$ fyrir punktasafnið $x_0, \dots, x_n$ og $S(t)$ fyrir punktasafnið $y_0, \dots, y_n$.

(iv) Stikaferillinn $[a, b] \ni t \mapsto (R(t), S(t))$ er síðan teiknaður, en hann uppfyllir $(R(t_j), S(t_j)) = (x_j, y_j)$, $j = 0, \dots, n$.

5.8 Aðferð minnstu fervika

Látum $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ vera safn punkta í plani með $x_j \in [a, b]$ fyrir öll j og látum $f_1, \ldots, f_n$ vera raungild föll á $[a, b]$.

5.8 Aðferð minnstu fervika

Látum $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ vera safn punkta í plani með $x_j \in [a, b]$ fyrir öll j og látum $f_1, \dots, f_n$ vera raungild föll á $[a, b]$. Við viljum finna það fall f af gerðinni

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

með stuðla $c_1, \dots, c_n$ þannig að punktarnir $(x_j, f(x_j))$ nálgi gefna punktasafnið sem best og þá er átt við að ferningssummuna

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - f(x_i)\big)^2$$

verði eins lítil og mögulegt er.

Flestir hafa heyrt talað um bestu línu gegnum punktasafn, hún fæst með að taka hér $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$, en lítið mál er að finna einnig besta fleygboga, bestu margliðu af fyrirfram ákveðnu stigi eða einhverja aðra samantekt falla gegnum punktasafnið.

5.8 Smávegis línuleg algebra

Til þess að finna þessi gildi á stuðlunum c_i er heppilegt að notfæra sér nokkrar niðurstöður úr línulegri algebru. Fyrir gefin gildi á $c_1, \dots, c_n$ setjum við

$$b_i = f(x_i) = c_1 f(x_i) + \cdots + f_n(x_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

5.8 Smávegis línuleg algebra

Til þess að finna þessi gildi á stuðlunum c_i er heppilegt að notfæra sér nokkrar niðurstöður úr línulegri algebru. Fyrir gefin gildi á $c_1, \dots, c_n$ setjum við

$$b_i = f(x_i) = c_1 f(x_i) + \cdots + f_n(x_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

og skilgreinum síðan dálkvigrana

$$b = [b_1, \dots, b_m]^T, \qquad y = [y_1, \dots, y_m]^T, \quad \text{og} \quad c = [c_1, \dots, c_n]^T,$$

5.8 Smávegis línuleg algebra

Til þess að finna þessi gildi á stuðlunum c_i er heppilegt að notfæra sér nokkrar niðurstöður úr línulegri algebru. Fyrir gefin gildi á $c_1, \dots, c_n$ setjum við

$$b_i = f(x_i) = c_1 f(x_i) + \cdots + f_n(x_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

og skilgreinum síðan dálkvigrana

$$b = [b_1, \dots, b_m]^T, \qquad y = [y_1, \dots, y_m]^T, \qquad \text{og} \qquad c = [c_1, \dots, c_n]^T,$$

Þá er $Ac = b$, þar sem A er $m \times n$ fylkið

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{bmatrix}.$$

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Verkefnið snýst nú um að finna þann vigur $c \in \mathbb{R}^n$ sem lágmarkar

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - b_i)^2 = \|y - b\|^2 = \|y - Ac\|^2$$

þar sem $\| \cdot \|$ táknar evklíðska normið (staðalinn) á $\mathbb{R}^m$.

Verkefnið snýst nú um að finna þann vigur $c \in \mathbb{R}^n$ sem lágmarkar

$$\sum_{i=1}^{m} \left(y_i - b_i\right)^2 = \|y - b\|^2 = \|y - Ac\|^2$$

þar sem $\|\cdot\|$ táknar evklíðska normið (staðalinn) á $\mathbb{R}^m$.

Vigrar af gerðinni $b = Ac$ spanna dálkrúm fylkisins A og þá má skrifa sem línulegar samantektir af gerðinni

$$b = c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n$$

þar sem A_j er dálkur númer j.

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Verkefnið snýst um að finna þann vigur í dálkrúminu sem næstur er y. Vigurinn b er næstur y ef og aðeins ef $y - b$ er hornréttur á alla vigra dálkrúmsins.

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Verkefnið snýst um að finna þann vigur í dálkrúminu sem næstur er y. Vigurinn b er næstur y ef og aðeins ef $y - b$ er hornréttur á alla vigra dálkrúmsins.
Þessi skilyrði má fá með innfeldi

$$A_j \cdot (y - b) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Með fylkjarithætti fæst ein jafna

$$A^T(y - b) = 0.$$

5.8 Lýsing á verkefninu með línulegri algebru

Verkefnið snýst um að finna þann vigur í dálkrúminu sem næstur er y. Vigurinn b er næstur y ef og aðeins ef $y - b$ er hornréttur á alla vigra dálkrúmsins.
Þessi skilyrði má fá með innfeldi

$$A_j \cdot (y - b) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Með fylkjarithætti fæst ein jafna

$$A^T(y - b) = 0.$$

Setjum nú inn $b = Ac$. Þá ákvarðast c af hneppinu

$$A^T(y - Ac) = 0$$

sem jafngildir

$$(A^T A)c = A^T y$$

Við þurfum því aðeins að leysa þetta jöfnuhneppi

$$(A^T A)c = A^T y$$

fyrir c til að finna stuðlana okkar. Ef fylkið $A^T A$ hefur andhverfu, þá fæst alltaf ótvírætt ákvörðuð lausn c.

Við þurfum því aðeins að leysa þetta jöfnuhneppi

$$(A^T A)c = A^T y$$

fyrir c til að finna stuðlana okkar. Ef fylkið $A^T A$ hefur andhverfu, þá fæst alltaf ótvírætt ákvörðuð lausn c.

Ef fylkið $A^T A$ hefur ekki andhverfu eða að það hefur ákveðu sem er mjög nálægt 0, þá þurfum við að beita flóknari brögðum. Við komum að því síðar.

5.8 Jafna bestu línu

Algengt er að menn vilji finna beina línu sem best fellur að punktasafninu $(x_1, y_1,) \ldots, (x_m, y_m)$. Þá er $n = 2$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$.

5.8 Jafna bestu línu

Algengt er að menn vilji finna beina línu sem best fellur að punktasafninu $(x_1, y_1,) \dots, (x_m, y_m)$. Þá er $n = 2$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$.

Fylkið er þá

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}.$$

5.8 Jafna bestu línu

Algengt er að menn vilji finna beina línu sem best fellur að punktasafninu $(x_1, y_1,) \ldots, (x_m, y_m)$. Þá er $n = 2$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$.

Fylkið er þá

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}.$$

og þar með

$$A^T A = \begin{bmatrix} m & \sum_{j=1}^m x_j \\ \sum_{j=1}^m x_j & \sum_{j=1}^m x_j^2 \end{bmatrix}. \qquad \text{og} \qquad A^T y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m y_j \\ \sum_{j=1}^m x_j y_j \end{bmatrix}.$$

Ef við viljum finna bestu annars stigs margliðu gegnum punktasafnið, þá er $n = 3$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

Ef við viljum finna bestu annars stigs margliðu gegnum punktasafnið, þá er $n = 3$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

Þetta val gefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}.$$

Fylkið $A^T A$ er þá 3×3 og vigurinn $A^T y$ er dálkvigur með 3 hnit.

Í skránni `adferd_minnstu_fervika.m` á heimasvæði okkar á Uglu finnið þið forrit til þess að finna bestu margliðu af hvaða stigi sem er gegnum gefið punktasafn.

Í skránni `adferd_minnstu_fervika.m` á heimasvæði okkar á Uglu finnið þið forrit til þess að finna bestu margliðu af hvaða stigi sem er gegnum gefið punktasafn.

Það er hægur vandi að breyta þessu forriti ef þið viljið vinna með aðra fallagrunna en margliður.

5.8 Sýnidæmi: besta annars stigs margliða

Gefin eru mæligildin

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.7	-0.5	-1.7	-1.9	-1.5	0.2	2.3

Beitið aðferð minnstu fervika til þess að finna þá annars stigs margliðu sem best fellur að þessum gögnum Teiknið upp gögnin og graf marliðunnar.

5.8 Sýnidæmi: besta annars stigs margliða

Gefin eru mæligildin

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.7	-0.5	-1.7	-1.9	-1.5	0.2	2.3

Beitið aðferð minnstu fervika til þess að finna þá annars stigs margliðu sem best fellur að þessum gögnum Teiknið upp gögnin og graf marliðunnar.

Lausn: Við leitum hér að þremur tölum c_1, c_2 og c_3 þannig að annars stigs margliðan $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$ falli sem best að gögnunum þar sem þar sem grunnföllin þrjú eru $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

5.8 Sýnidæmi: framhald

Í þessu dæmi er fylkið A gefið með

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix}$$

Nú látum við `matlab` um afganginn

5.8 Sýnidæmi: leyst með Matlab

```
%  Matlab forrit sem teiknar upp bestu margliðunálgun á gefr
x=[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6]
y=[2.7; -0.5; -1.7; -1.9; -1.5; 0.2; 2.3 ]
m=length(x);

% Við leitum að bestu margliðu af stigi 2 eða lægri
% og því eru  grunnföllin eru 3 talsins.
n=3;

% Stuðlafylkið er A=(a_{ij}), a_{ij}=x_i^{j-1}
A(1:m,1)=ones(m,1);
A(1:m,2)=x;
for j=3:n
    A(1:m,j)=A(1:m,j-1).*x;
end
% Reiknum úr úr normaljöfnuhneppinu A^TAc=A^Ty:
c=(A'*A)\(A'*y);
```

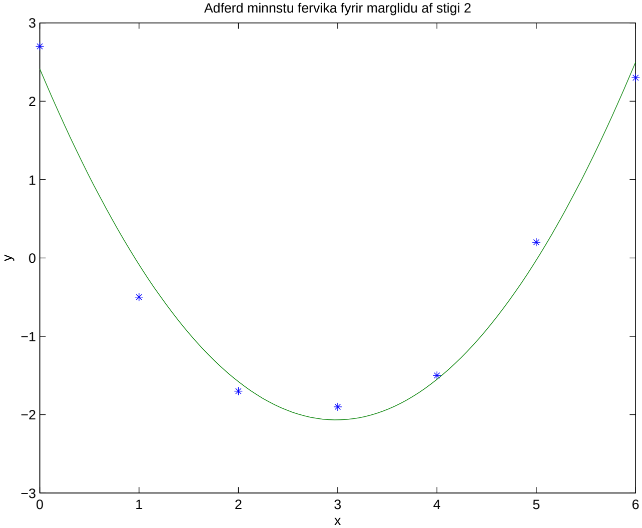
5.8 Sýnidæmi: leyst með Matlab frh.

```
% Teikning undirbúin
N=100;
X=linspace(min(x),max(x),N);

% Hliðrun í reikniriti horners er 0
%
hlidrun=zeros(n,1);
for j=1:N
    Y(j)=horner(c, hlidrun, X(j));
end
figure
plot(x,y,'*',X,Y)
xlabel('x'), ylabel('y')
title('Adferd minnstu fervika fyrir marglidu af stigi 2')
print
```

5.8 Besta annars stigs margliða

Hér kemur myndin sem beðið var um:



Kafli 5: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er reiknirit Horners og hver er tilgangur þess?
2. Hvernig er brúunarverkefnið fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$?
3. Rökstyðjið að einungis sé til ein brúunarmargliða af stigi $\leq m$ fyrir brúunarpunktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$
4. Hvernig er Lagrange form brúunarmargliðu og hvernig eru Lagrange-margliður fyrir gefið punktasafn skilgreindar?
5. Hvernig er Newton-form brúunarmargliðu fyrir fyrir punktana $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ þar sem $x_i \neq x_j$?
6. Hvernig eru mismunakvótarnir $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ skilgreindir?
7. Hvað er alhæft brúunarverkefni?
8. Hvernig er margfeldni brúunarpunkts í alhæfðu brúunarverkefni skilgreind?
9. Rökstyðjið að alhæfða brúunarverkefnið með $m+1$ skilyrði hafi ótvírætt ákvarðaða lausn af stigi $\leq m$.
10. Hvernig er skekkjuformúlan í nálgun á falli $f(x)$ með alhæfðri brúunarmargliðu $p(x)$ sett fram með mismunakvótum?

Kafli 5: Fræðilegar spurningar

11. Hvernig er skekkjuformúlan í nálgun á falli $f(x)$ með alhæfðri brúunarmargliðu $p(x)$ sett fram með $m+1$ afleiðu af f?
12. Hvaða skilyrði þarf þriðja stigs splæsifall að uppfylla og hvað vantar mörg skilyrði upp á að þau gefi ótvírætt ákvarðað fall?
13. Hvernig eru ekki-hnúts endaskilyrði á splæsifalli?
14. Hvernig eru þvinguð endaskilyrði á splæsifalli?
15. Hvernig eru náttúrleg endaskilyrði á splæsifalli?
16. Hvernig eru lotubundin endaskilyrði á splæsifalli?
17. Lýsið því hvernig splæsiferlar eru notaðir til þess að teikna ferla í plani.
18. Lýsið aðferð minnstu fervika.
19. Hvernig er jöfnuhneppið sem þarf að leysa í aðferð minnstu fervika?
21. Hvernig er jafna bestu línu gegnum punktasafn fundin?
22. Hvernig er jafna besta fleygboga gegnum punktasafn fundin?