11. Lagrange-margfaldarar

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

9. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Útgildi falla þar sem breytur uppfylla skorðujöfnur

Sértækar aðferðir 11.1

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

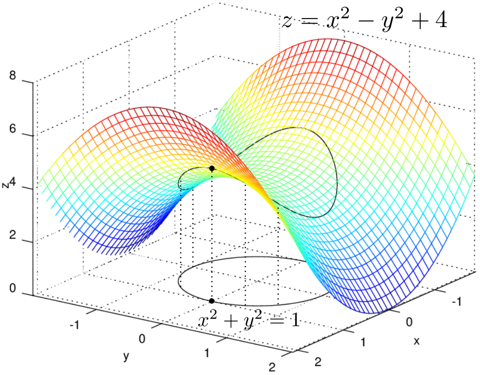
1. Er mögulegt að einangra x eða y í jöfnunni $g(x, y) = 0$?

   Ef hægt er að einangra y og rita $y = h(x)$ þá snýst verkefnið nú um að finna útgildi falls $f(x, h(x))$ af einni breytu x.

2. Er hægt að stika ferilinn $g(x, y) = 0$?

   Ef $\mathbf{r}$ er stikun á ferlinum þá þurfum við að leita að útgildum fallsins $f(\mathbf{r}(t))$ þar sem er bara ein breyta.

Dæmi

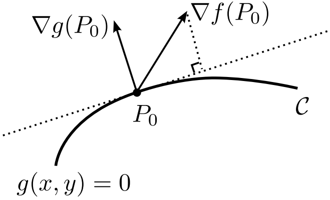


Hver eru hæstu og lægstu gildi fallsins $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ á menginu $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$?

Útgildi falla þar sem breytur uppfylla skorðujöfnur

Setning 11.2

Látum f og g vera föll sem eru bæði diffranleg í punktinum $P_0 = (x_0, y_0)$ sem liggur á ferlinum $g(x, y) = 0$, og er ekki endapunktur ferilsins. Gerum ráð fyrir að $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Gerum líka ráð fyrir að ef við einskorðum fallið f við ferilinn $g(x, y) = 0$ þá hafi f staðbundið útgildi í P_0. Þá eru stiglarnir $\nabla f(x_0, y_0)$ og $\nabla g(x_0, y_0)$ samsíða.



Ef stiglarnir $\nabla g(P_0)$ og $\nabla f(P_0)$ eru ekki samsíða þá vex f eða minnkar þegar farið er eftir $\mathcal{C}$ út frá punktinum P_0.

Lagrange-margfaldarar

Reikniaðferð 11.3

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

Búum til *Lagrange-fallið*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Stöðupunktar L, þ.e.a.s. punktar (x_0, y_0, λ_0) þar sem $\nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$, gefa mögulega punkta (x_0, y_0) þar sem f tekur útgildi.

Þessir punktar finnast með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Talan λ nefnist *Lagrange-margfaldari*.

Regla 11.4

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.
Athuga þarf punkta sem uppfylla eitt af eftirfarandi skilyrðum:

1. Stöðupunktar $L(x, y, \lambda)$.
2. Punktar (x, y) þar sem $\nabla g(x, y) = \mathbf{0}$.
3. Punktar (x, y) þar sem annar eða báðir stiglanna $\nabla g(x, y)$ og $\nabla f(x, y)$ eru ekki skilgreindir.
4. „Endapunktar“ ferilsins $g(x, y) = 0$.

Reikniaðferð 11.5

Finna skal útgildi falls $f(x, y, z)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y, z) sem uppfylla jöfnurnar $g(x, y, z) = 0$ og $h(x, y, z) = 0$.

Búum til Lagrange-fallið

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

Stöðupunktar L, þ.e.a.s. punktar $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ þar sem $\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \mathbf{0}$ gefa mögulega punkta (x_0, y_0, z_0) þar sem f tekur útgildi.

Þessir punktar finnast með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu h_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) + \lambda g_2(x, y, z) + \mu h_2(x, y, z) &= 0 \\ f_3(x, y, z) + \lambda g_3(x, y, z) + \mu h_3(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$