24. Sundurleitnisetningin I

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

25. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Setning 24.1 (Sundurleitnisetning I)

Látum **F** vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í $\mathbb{R}^3$. Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði **F** og $\mathcal{S}_\varepsilon$ kúluskel með miðju í P og geisla ε. Látum svo **N** vera einingarþvervigrasvið á $\mathcal{S}_\varepsilon$ þannig að **N** vísar út á við. Þá er

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

þar sem $V_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^3/3$ er rúmmálið innan í $\mathcal{S}_\varepsilon$.

Setning 24.2 (Setning Stokes I)

Látum $\mathbf{F}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í $\mathbb{R}^3$. Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði $\mathbf{F}$ og C_ε vera hring með miðju í P og geisla ε. Látum $\mathbf{N}$ vera einingarþvervigur á planið sem hringurinn liggur í. Áttum hringinn jákvætt. Þá er

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{curl}\, \mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{A_\varepsilon} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

þar sem $A_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$ er flatarmálið sem afmarkast af $\mathcal{C}_\varepsilon$.

Túlkun 24.3

Hugsum **F** sem lýsingu á vökvastreymi í $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F}(P)$ lýsir því hvort vökvinn er að þenjast út eða dragast saman í punktinum P. Sundurleitnisetningin (næsti fyrirlestur) segir að samanlögð útþensla á rúmskika R er jöfn streymi út um jaðar svæðisins $\mathcal{S}$, eða

$$\iiint_R \operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

$\operatorname{\mathbf{curl}} \mathbf{F}(P)$ lýsir hringstreymi í kringum punktinn P. Setning Stokes (þar næsti fyrirlestur) segir að samanlagt hringstreymi á fleti $\mathcal{S}$ er jafnt hringstreymi á jaðri flatarins, sem við táknum með $\mathcal{C}$, eða

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{\mathbf{curl}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Skilgreining 24.4

Látum R vera svæði í $\mathbb{R}^2$ og $\mathcal{C}$ jaðar R. Gerum ráð fyrir að $\mathcal{C}$ samanstandi af endanlega mörgum ferlum $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$. Jákvæð áttun á ferlunum felst í því að velja fyrir hvert i stikun $\mathbf{r}_i$ á $\mathcal{C}_i$ þannig að ef labbað eftir $\mathcal{C}_i$ í stefnu stikunar þá er R á vinstri hönd.

Setning Green 24.5

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R, táknaður með $\mathcal{C}$, samanstendur af endanlega mörgum samfellt diffranlegum ferlum. Áttum $\mathcal{C}$ jákvætt. Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á R. Þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA.$$

Fylgisetning 24.6

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R táknaður með $\mathcal{C}$, samanstendur af endanlega mörgum samfellt diffranlegum ferlum. Áttum $\mathcal{C}$ jákvætt. Þá er

$$\text{Flatarmál } R = \oint_{\mathcal{C}} x\,dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx.$$

Sundurleitnisetningin í tveimur víddum 24.7

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R, táknaður með $\mathcal{C}$, samanstendur af endanlega mörgum samfellt diffranlegum ferlum. Látum $\mathbf{N}$ tákna einingarþvervigrasvið á $\mathcal{C}$ þannig að $\mathbf{N}$ vísar út úr R. Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$ vera samfellt diffranlegt vigursvið skilgreint á R. Þá er

$$\iint_R \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,ds.$$