10. Útgildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 4. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

10.1

Útgildi

Skilgreining 10.1
Látum f vera fall af tveim breytum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f)$.

Sagt er að f hafi *staðbundið lággildi* (e. local minimum) í punkti (a, b) ef til er tala $r > 0$ þannig að $f(a, b) \leq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in B_r(a, b) \cap \mathcal{D}(f)$.

Sagt er að f hafi *staðbundið hágildi* (e. local maximum) í punkti (a, b) ef til er tala $r > 0$ þannig að $f(a, b) \geq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in B_r(a, b) \cap \mathcal{D}(f)$.

Í þeim punktum þar sem f tekur annað hvort staðbundið lággildi eða staðbundið hágildi er sagt að f hafi *staðbundið útgildi* (e. local extreme).

Ef $f(a, b) \leq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ þá er sagt að f taki *lægsta gildi* í (a, b) (e. global minimum). Ef $f(a, b) \geq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ þá er sagt að f taki *hæsta gildi* í (a, b) (e. global maximum).

10.2

Staðbundið útgildi

Upprifjun 10.2
Látum f vera fall af einni breytu skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punkti a þá gildir eitt af þrennu um a:

1. $f'(a) = 0$. (punkturinn a kallast *stöðupunktur* f).
2. Afleiðan $f'(a)$ er ekki skilgreind.
3. Punkturinn a er jaðarpunktur $\mathcal{D}(f)$.

10.3

Staðbundið útgildi

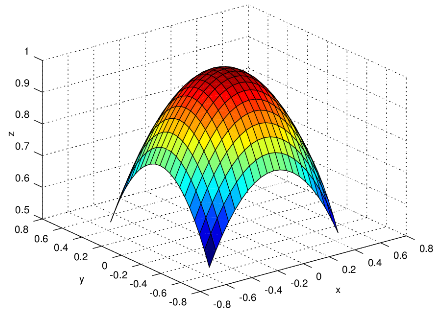
Setning 10.3
Látum f vera fall af tveim breytum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punkti (a, b) þá gildir eitt af þrennu um a

1. $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. (punkturinn (a, b) kallast *stöðupunktur* f)
2. Stigullinn $\nabla f(a, b)$ er ekki skilgreindur.
3. Punkturinn (a, b) er jaðarpunktur $\mathcal{D}(f)$.

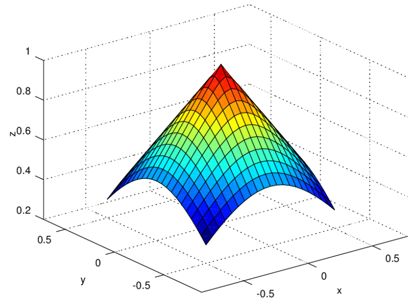
10.4

Dæmi: Föll skilgreind á svæðinu $-0.5 \leq x \leq 0.5$, $-0.5 \leq y \leq 0.5$. Hvar eru staðbundin hágildi?

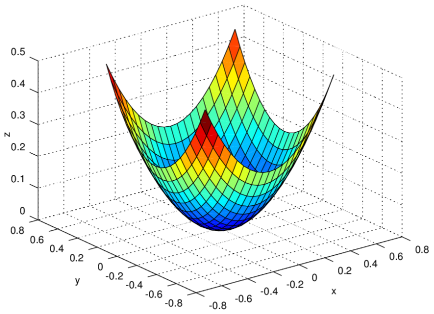
10.5



$z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$



$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$



$z = f(x, y) = x^2 + y^2.$

Tilvist útgilda

Setning 10.4
Látum f vera samfellt fall af tveim breytum skilgreint á lokuðu og takmörkuðu mengi $\mathcal{D}(f)$. Fallið f tekur þá bæði hæsta og lægsta gildi.

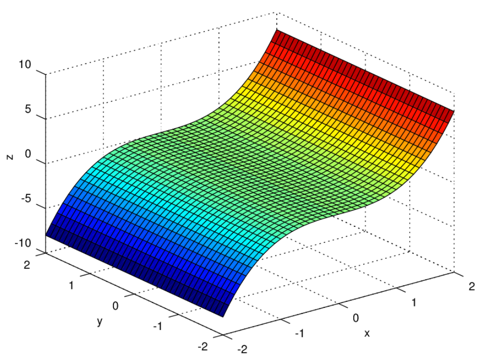
10.6

Söðulpunktur

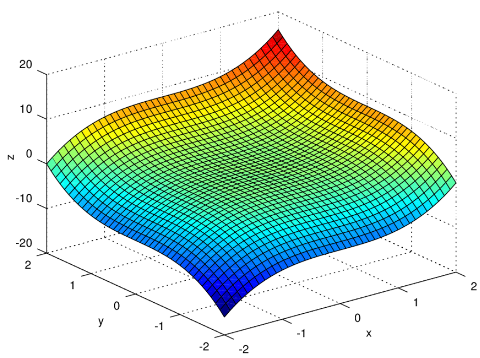
Skilgreining 10.5
Punktur $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ sem er ekki jaðarpunktur kallast *söðulpunktur* ef $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ en f hefur ekki staðbundið útgildi í (x, y).

10.7

Dæmi um föll með söðulpunkta.



$z = f(x, y) = x^3.$



$z = f(x, y) = x^3 + y^3.$

10.8

Staðbundið útgildi

Upprifjun 10.6

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f' sé samfellt fall. Gerum einnig ráð fyrir að $f'(a) = 0$. Þá gildir:

1. Ef $f''(a) > 0$ þá hefur f staðbundið lággildi í a.
2. Ef $f''(a) < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í a.
3. Ef $f''(a) = 0$ þá gæti verið staðbundið lággildi í A, það gæti verið staðbundið hágildi í a eða það gætu verið beygjuskil í a, alltsvo. ekkert hægt að segja.

10.9

Hesse-fylki

Skilgreining 10.7

Látum f vera fall af n breytum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og gerum ráð fyrir að allar 2. stigs hlutafleiður f séu skilgreindar í punktinum $\mathbf{x}$. Skilgreinum *Hesse-fylki* f í punktinum $\mathbf{x}$ sem $n \times n$-fylkið

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

10.10

Ferningsform (sjá kafla 10.7 í Adams)

Upprifjun 10.8

Ferningsform Q af n-breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er einsleit margliða af stigi 2 gefin með

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

þar sem A er samhverft $n \times n$ fylki með tölu a_{ij} í sæti (i, j) og $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T$. 10.11

Ferningsform

Skilgreining 10.9

Ferningsform Q af n-breytum er sagt vera *jákvætt ákvarðað* (e. positive definite) ef $Q(\mathbf{x}) > 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ í $\mathbf{R}^n$.

Sagt að ferningsformið Q sé *neikvætt ákvarðað* (e. negative definite) ef $Q(\mathbf{x}) < 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ í $\mathbf{R}^n$.

Síðan er sagt að ferningsformið Q sé *óákvarðað* (e. indefinite) ef $Q(\mathbf{x}) < 0$ fyrir einhvern vigur $\mathbf{x}$ og $Q(\mathbf{y}) > 0$ fyrir einhvern vigur $\mathbf{y}$.

10.12

Ferningsform

Setning 10.10

Látum Q vera fernings form af n breytum og A samhverft $n \times n$ fylki þannig að $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ fyrir alla vigra $\mathbf{x}$,

1. Ferningsformið er jákvætt ákvarðað ef og aðeins ef öll eigingildi A eru jákvæð.
2. Ferningsformið er neikvætt ákvarðað ef og aðeins ef öll eigingildi A eru neikvæð.
3. Ferningsformið er óákvarðað ef og aðeins ef A hefur bæði jákvæð og neikvæð eigingildi.

10.13

Staðbundið útgildi

Setning 10.11
Látum f vera fall af n breytum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ þannig að allar 1. og 2. stigs hlutafleiður f eru samfelldar. Látum $\mathbf{a}$ vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Þá gildir: Ef $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ er

1. ...jákvætt ákvarðað þá hefur f staðbundið lággildi í $\mathbf{a}$.
2. ...neikvætt ákvarðað þá hefur f staðbundið hágildi í $\mathbf{a}$.
3. ...óákvarðað þá hefur f söðulpunkt í $\mathbf{a}$.
4. ...hvorki jákvætt ákvarðað, neikvætt ákvarðað né óákvarðað þá nægja upplýsingarnar sem felast í jöfnunni $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ og Hesse-fylkinu ekki til að segja til um hvers eðlis stöðupunkturinn $\mathbf{a}$ er.

10.14

Staðbundið útgildi

Fylgisetning 10.12
Látum f vera fall af tveim breytum þannig að 1. og 2. stigs hlutafleiður f eru samfelldar. Látum (a, b) vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. Setjum

$$A = f_{11}(a, b), \qquad B = f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b) \qquad C = f_{22}(a, b).$$

Þá gildir:

1. Ef $B^2 - AC < 0$ og $A > 0$ þá hefur f staðbundið lággildi í (a, b).
2. Ef $B^2 - AC < 0$ og $A < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í (a, b).
3. Ef $B^2 - AC > 0$ þá hefur f söðulpunkt í (a, b).
4. Ef $B^2 - AC = 0$ þá er ekkert hægt að segja.

10.15

Ferningsform

Regla 10.13
Ef A er samhverft $n \times n$ fylki með tölu a_{ij} í sæti (i, j) og

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

þá gildir

1. Ef $D_i > 0$ fyrir $1 \leq i \leq n$ þá er A jákvætt ákvarðað.
2. Ef $D_i > 0$ fyrir slétt i í $\{1, 2, \ldots, n\}$ og $D_i < 0$ fyrir oddatölu i í $\{1, 2, \ldots, n\}$ þá er A neikvætt ákvarðað.
3. Ef $\det(A) = D_n \neq 0$ en hvorki 1 né 2 gilda þá er A óákvarðað.
4. Ef $\det(A) = 0$ þá er A hvorki jákvætt né neikvætt ákvarðað en getur verið óákvarðað.

10.16