18. Ferilheildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

4. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Heildi falls yfir feril

Skilgreining 18.1

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$ stikaðan af samfellt diffranlegum stikaferli $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Ritum $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. *Heildi falls $f(x, y)$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$ með tilliti til bogalengdar* er skilgreint sem

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\,ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t))\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Sama aðferð notuð til að skilgreina heildi falls yfir feril í $\mathbb{R}^3$.

Setning 18.2

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ séu tveir samfellt diffranlegir stikaferlar sem báðir stika ferilinn $\mathcal{C}$. Ef fall $f(x, y)$ er heildað yfir $\mathcal{C}$ þá fæst sama útkoma hvort sem stikunin $\mathbf{r}_1$ eða stikunin $\mathbf{r}_2$ er notuð við útreikningana.

Skilgreining 18.3

Ferill $\mathcal{C}$ í plani er sagður *samfellt diffranlegur á köflum* ef til er stikun $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ á $\mathcal{C}$ þannig að til eru punktar $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ þannig að á hverju bili (t_i, t_{i+1}) er $\mathbf{r}$ samfellt diffranlegur ferill og markgildin

$$\lim_{t \to t_i^+} \mathbf{r}'(t) \qquad \text{og} \qquad \lim_{t \to t_{i+1}^-} \mathbf{r}'(t)$$

eru bæði til.
Líka sagt að stikaferillinn $\mathbf{r}$ sé *samfellt diffranlegur á köflum.*

Skilgreining 18.4

Látum $\mathbf{F}(x, y)$ vera vigursvið og $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stikun á ferli $\mathcal{C}$ og gerum ráð fyrir að stikaferillinn $\mathbf{r}$ sé samfellt diffranlegur á köflum. *Heildi vigursviðsins* $\mathbf{F}(x, y)$ *eftir ferlinum* $\mathcal{C}$ er skilgreint sem

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Skilgreining 18.5

Ritum $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$. Ritum líka $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$. Þá má rita $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$. Með því að nota þennan ritháttt fæst að

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x(t),y(t))\,\mathbf{j})\cdot(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_a^b F_1(x(t),y(t))x'(t)\,dt + F_2(x(t),y(t))y'(t)\,dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

Athugasemd 18.6

Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{r}_2 : [a', b'] \to \mathbb{R}^2$ séu tveir samfellt diffranlegir á köflum stikaferlar sem stika $\mathcal{C}$. Gerum ennfremur ráð fyrir að $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(b')$ og $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(a')$ (þ.e.a.s. stikaferlarnir fara í sitthvora áttina eftir $\mathcal{C}$). Þá gildir ef $\mathbf{F}(x, y)$ er vigursvið að

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

(Ef breytt er um stefnu á stikun á breytist formerki þegar vigursvið heildað eftir ferlinum.)