

16. Hagnýtingar margfaldra heilda

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

25. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Kúluhnit

Skilgreining 16.1

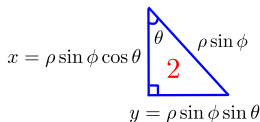
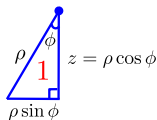
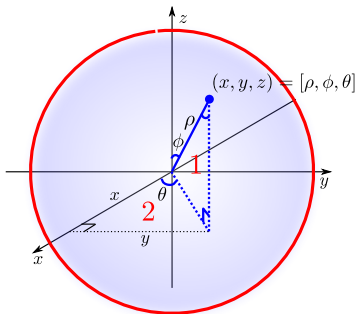
Látum (x, y, z) vera punkt í \mathbb{R}^3 . Kúluhnit (x, y, z) eru þrennd talna ρ, φ, θ þannig að

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi.$$

Punktur sem hefur kúluhnit ρ, φ, θ er táknaður með $[\rho, \varphi, \theta]$.



Umræða 16.2

Eftirfarandi jöfnur gefa aðferð til að finna kúluhnit:

ρ er fjarlægðin frá $(0, 0, 0)$ til (x, y, z) , það er að segja

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

φ er hornið á milli jákvæða hluta z -ásins og línustriksins frá $(0, 0, 0)$ til (x, y, z) . Hornið φ má ákvarða út frá jöfnunni

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

θ er hornið sem jákvæði hluti x -ásins myndar við línustrikið frá $(0, 0, 0)$ til $(x, y, 0)$ (sama horn og notað í sívalningshnitum (og pólhnitum)). Hornið θ má finna út frá jöfnunni

$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Um kúluhnit $[\rho, \varphi, \theta]$ fyrir punkt (x, y, z) gildir að velja má ρ, φ, θ þannig að $0 \leq \rho$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Setning 16.3

Látum R vera rúmskika þannig að þegar notuð eru kúluhnit þá fæst eftirfarandi lýsing

$$R = \{[\rho, \varphi, \theta] \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d, a \leq \rho \leq b\}.$$

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV = \\ \int_{\alpha}^{\beta} \int_c^d \int_a^b f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Regla 16.4

Látum D tákna svæði í plani. Hugsum D sem plötu þ.a. í punkti (x, y) er efnispéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y)$. Massi plötunnar er

$$m = \iint_D \delta(x, y) dA.$$

Vægi plötunnar um línuna $x = 0$ (þ.e. y -ás) og um línuna $y = 0$ (þ.e. x -ás) eru gefin með

$$M_{x=0} = \iint_D x\delta(x, y) dA \quad \text{og} \quad M_{y=0} = \iint_D y\delta(x, y) dA.$$

Hnit *massamiðju* plötunnar eru (\bar{x}, \bar{y}) þar sem

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad \text{og} \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}.$$

Regla 16.5

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x, y, z) er efnispéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y, z)$. Massi hlutarins er

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z) dV.$$

Vægi hlutarins um planið $x = 0$ (þ.e. yz -planið) er

$$M_{x=0} = \iiint_R x \delta(x, y, z) dV.$$

Svipað skilgreinum við

$$M_{y=0} = \iiint_R y \delta(x, y, z) dV \quad \text{og} \quad M_{z=0} = \iiint_R z \delta(x, y, z) dV.$$

Hnit *massamiðju* hlutarins eru $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ þar sem

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad \text{og} \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{og} \quad \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}.$$

Regla 16.6

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x, y, z) er efnispéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y, z)$. Látum L tákna línu (snúningsás) í rúminu. *Hverfitregða* hlutarins um L er

$$I = \iiint_R D^2 \delta dV$$

þar sem $\delta = \delta(x, y, z)$ og $D = D(x, y, z)$ er fjarlægð punktsins (x, y, z) frá L .

Regla 16.7

Látum D vera svæði í plani og $f(x, y)$ diffranlegt fall skilgreint á D . Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ þar sem $(x, y) \in D$ er gefið með formúlunni

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_1(x, y)^2 + f_2(x, y)^2} dA.$$