# Kafli 8: Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Töluleg greining, STÆ405G

26. og 28. mars, 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

# Yfirlit

Kafli 8: Jaðargildisverkefni fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Við ætlum að finna nálgunarlausnir á verkefnum af gerðinni

$$
\begin{gathered}
y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b, \\
\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3, \\
\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3.
\end{gathered}
$$

Við ætlum að finna nálgunarlausnir á verkefnum af gerðinni

$$\begin{gathered} y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3. \end{gathered}$$

Afleiðujafnan er sögð vera línuleg ef hún er á forminu

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

## 8.0 Jaðarskilyrðin nefnast

| | | |
|---|---|---|
| (i) | Dirichlet-jaðarskilyrði: | $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$ |
| | Fallsjaðarskilyrði: | |
| (ii) | Neumann-jaðarskilyrði: | $y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$ |
| | Afleiðujaðarskilyrði: | |
| | Flæðisjaðarskilyrði: | |
| (iii) | Robin-jaðarskilyrði: | $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ |
| | | $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3$ |
| | | $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ |
| | Blandað jaðarskilyrði: | |

Athugið að blandað jaðarskilyrði með $\alpha_2 = 0$ (eða $\beta_2 = 0$) er Dirichlet skilyrði með $\alpha = \alpha_3/\alpha_1$ (eða $\beta = \beta_3/\beta_1$).

Athugið að blandað jaðarskilyrði með $\alpha_1 = 0$ (eða $\beta_1 = 0$) er Neumann skilyrði með $\alpha = \alpha_3/\alpha_2$ (eða $\beta = \beta_3/\beta_2$).

## 8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

## 8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Við nefnum $x_j$ *skiptipunkta* eða *hnútpunkta* skiptingarinnar.

## 8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Við nefnum $x_j$ *skiptipunkta* eða *hnútpunkta* skiptingarinnar.

Punktarnir $a = x_0$ og $b = x_N$ nefnast *endapunktar* skiptingarinnar og $x_j$, með $j = 1, \ldots, N-1$, nefnast *innri punktar* skiptingarinnar.

## 8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Við nefnum $x_j$ *skiptipunkta* eða *hnútpunkta* skiptingarinnar.

Punktarnir $a = x_0$ og $b = x_N$ nefnast *endapunktar* skiptingarinnar og $x_j$, með $j = 1, \dots, N - 1$, nefnast *innri punktar* skiptingarinnar.

Í fyrstu atrennu ætlum vð aðeins að nálga lausnina fyrir línulegar jöfnur,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

Við reiknum út nálgun á réttu lausninni $y(x)$ í hnútpunktunum.

## 8.1 Skiptipunktar / Hnútpunktar

Gefum okkur jafna skiptingu á bilinu $[a, b]$, $x_j = a + hj$, $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Við nefnum $x_j$ *skiptipunkta* eða *hnútpunkta* skiptingarinnar.

Punktarnir $a = x_0$ og $b = x_N$ nefnast *endapunktar* skiptingarinnar og $x_j$, með $j = 1, \ldots, N - 1$, nefnast *innri punktar* skiptingarinnar.

Í fyrstu atrennu ætlum vð aðeins að nálga lausnina fyrir línulegar jöfnur,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad x \in [a, b].$$

Við reiknum út nálgun á réttu lausninni $y(x)$ í hnútpunktunum.

Rétta gildið í punktinum $x_j$ táknum við með $y_j$ og nálgunargildið með $w_j$,

$$y_j = y(x_j) \approx w_j.$$

Eins skrifum við

$$p_j = p(x_j), \qquad q_j = q(x_j), \qquad r_j = r(x_j).$$

Nú leiðum við út nálgunarjöfnur, eina fyrir hvern innri skiptipunkt. Við byrjum á því að stinga punkti $x_j$ inn í afleiðujöfnuna

$$\big\{y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)\big\}_{x=x_j}.$$

Næst skiptum á afleiðum og mismunakvótum i þessari jöfnu,

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Nú leiðum við út nálgunarjöfnur, eina fyrir hvern innri skiptipunkt. Við byrjum á því að stinga punkti $x_j$ inn í afleiðujöfnuna

$$\left\{y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)\right\}_{x=x_j}.$$

Næst skiptum á afleiðum og mismunakvótum i þessari jöfnu,

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Síðan stillum við upp nálgunargildunum í stað réttu gildanna:

Endurtökum réttu jöfnuna

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Endurtökum réttu jöfnuna

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j + r_j + O(h^2).$$

Nú fellum við niður leifarliðina og setjum nálgunargildin í stað réttu gildanna:

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j$$

Hér fáum við eina jöfnu fyrir sérhvern innri skiptipunkt $j = 1, \ldots, N-1$.

Við erum komin með $N-1$ nálgunarjöfnu til þess að finna $N+1$ nálgunargildi $w_0, \dots, w_N$ fyrir $y_0, \dots, y_N$.

Ef við erum að leysa línulegt jaðargildisverkefni með Dirichlet-jaðarskilyrðum,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \le x \le b,$$
$$y(a) = \alpha \quad \text{og} \quad y(b) = \beta,$$

## 8.1 Dirichlet-jaðarskilyrði

Við erum komin með $N-1$ nálgunarjöfnu til þess að finna $N+1$ nálgunargildi $w_0, \dots, w_N$ fyrir $y_0, \dots, y_N$.

Ef við erum að leysa línulegt jaðargildisverkefni með Dirichlet-jaðarskilyrðum,

$$
\begin{gathered}
y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \le x \le b, \\
y(a) = \alpha \quad \text{og} \quad y(b) = \beta,
\end{gathered}
$$

þá fæst nálgunin með því að leysa línulega jöfnuhneppið

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha, \\
\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} &= p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j, \qquad j = 1, \dots, N-1, \\
w_N &= \beta.
\end{aligned}
$$

Við lítum aftur á línulegu nálgunarjöfnurnar

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j.$$

Við lítum aftur á línulegu nálgunarjöfnurnar

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q_j w_j + r_j.$$

Margföldum alla liði með $-h^2$ og röðum síðan óþekktu stærðunum vinstra mengin jafnaðarmerkisins. Þá fæst línulega jöfnuhneppið

$$\big(-1 - \tfrac{1}{2}hp_j\big)w_{j-1} + \big(2 + h^2 q_j\big)w_j + \big(-1 + \tfrac{1}{2}hp_j\big)w_{j+1} = -h^2\, r_j$$

fyrir $j = 1, 2, 3, \ldots, N-1$.

# 8.1 Línulega jöfnuhneppið á fylkjaformi

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ l_1 & d_1 & u_1 & & & & & & \\ & l_2 & d_2 & u_2 & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} & \\ & & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Þar sem stuðlarnir $l_j$, $d_j$ og $u_j$ eru gefnir með

$$l_j = -1 - \tfrac{1}{2}hp_j$$
$$d_j = 2 + h^2 q_j$$
$$u_j = -1 + \tfrac{1}{2}hp_j$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Þetta jöfnuhneppi er leyst og þar með eru nálgunargildin fundin.

## 8.2 Línulega jafna – Blönduð jaðarskilyrði

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Til þess að líkja eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x = a$ þá hugsum við okkur að við bætum einum punkti $x_{-1} = a - h$ við og látum $w_f$ tákna ímyndað gildi lausnarinnar í $x_{-1}$.

## 8.2 Línulega jafna – Blönduð jaðarskilyrði

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Til þess að líkja eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x = a$ þá hugsum við okkur að við bætum einum punkti $x_{-1} = a - h$ við og látum $w_f$ tákna ímyndað gildi lausnarinnar í $x_{-1}$.

Svona punktur $x_{-1}$ utan við skiptinguna er kallaður *felupunktur* við skiptinguna og ímyndað gildi $w_f$ í felupunkti er kallað *felugildi*.

Takið eftir því að lausnin er ekki til í felupunktinum, en við reiknum eins og $w_f$ sé gildi hennar þar.

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Til þess að líkja eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x = a$ þá hugsum við okkur að við bætum einum punkti $x_{-1} = a - h$ við og látum $w_f$ tákna ímyndað gildi lausnarinnar í $x_{-1}$.

Svona punktur $x_{-1}$ utan við skiptinguna er kallaður *felupunktur* við skiptinguna og ímyndað gildi $w_f$ í felupunkti er kallað *felugildi*.

Takið eftir því að lausnin er ekki til í felupunktinum, en við reiknum eins og $w_f$ sé gildi hennar þar.

Mismunajafnan sem líkir eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x_0$ er

$$\big(-1 - \tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f + \big(2 + h^2 q_0\big)w_0 + \big(-1 + \tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1 = -h^2 r_0$$

Við skulum gera ráð fyrir að rétta lausnin $y(x)$ uppfylli blandað jaðarskilyrði í $x = a$,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3.$$

Til þess að líkja eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x = a$ þá hugsum við okkur að við bætum einum punkti $x_{-1} = a - h$ við og látum $w_f$ tákna ímyndað gildi lausnarinnar í $x_{-1}$.

Svona punktur $x_{-1}$ utan við skiptinguna er kallaður *felupunktur* við skiptinguna og ímyndað gildi $w_f$ í felupunkti er kallað *felugildi*.

Takið eftir því að lausnin er ekki til í felupunktinum, en við reiknum eins og $w_f$ sé gildi hennar þar.

Mismunajafnan sem líkir eftir afleiðujöfnunni í punktinum $x_0$ er

$$\left(-1 - \tfrac{1}{2}hp_0\right)w_f + \left(2 + h^2 q_0\right)w_0 + \left(-1 + \tfrac{1}{2}hp_0\right)w_1 = -h^2 r_0$$

Mismunajafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er

$$\alpha_1 w_0 + \alpha_2 \frac{w_1 - w_f}{2h} = \alpha_3.$$

## 8.2 Felugildið leyst út

Jafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er:

$$\alpha_1 w_0 + \alpha_2 \frac{w_1 - w_f}{2h} = \alpha_3.$$

Út úr henni leysum við

$$w_f = w_1 - \frac{2h}{\alpha_2}\left(\alpha_3 - \alpha_1 w_0\right)$$

## 8.2 Felugildið leyst út

Jafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er:

$$\alpha_1 w_0 + \alpha_2 \frac{w_1 - w_f}{2h} = \alpha_3.$$

Út úr henni leysum við

$$w_f = w_1 - \frac{2h}{\alpha_2}\big(\alpha_3 - \alpha_1 w_0\big)$$

Við stingum síðan þessu gildi inn í jöfnuna sem líkir eftir afleiðujöfnunni

$$\big(-1 - \tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f + \big(2 + h^2 q_0\big)w_0 + \big(-1 + \tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1 = -h^2 r_0$$

## 8.2 Felugildið leyst út

Jafnan sem líkir eftir jaðarskilyrðinu er:

$$\alpha_1 w_0 + \alpha_2 \frac{w_1 - w_f}{2h} = \alpha_3.$$

Út úr henni leysum við

$$w_f = w_1 - \frac{2h}{\alpha_2}\big(\alpha_3 - \alpha_1 w_0\big)$$

Við stingum síðan þessu gildi inn í jöfnuna sem líkir eftir afleiðujöfnunni

$$\big(-1 - \tfrac{1}{2}hp_0\big)w_f + \big(2 + h^2 q_0\big)w_0 + \big(-1 + \tfrac{1}{2}hp_0\big)w_1 = -h^2 r_0$$

Útkoman verður:

Fyrsta jafna hneppisins:

$$\left(2 + h^2 q_0 - \left(2 + hp_0\right) h \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) w_0 - 2w_1 = -h^2 r_0 - \left(2 + hp_0\right) h \frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Fyrsta jafna hneppisins:

$$\left(2 + h^2 q_0 - \left(2 + hp_0\right) h\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) w_0 - 2w_1 = -h^2 r_0 - \left(2 + hp_0\right) h\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Með því að innleiða felupunkt $x_{N+1} = b + h$ hægra megin við skiptinguna, tilsvarandi felugildi $w_f$ og leysa saman tvær jöfnur, þá fáum við síðustu jöfnu hneppisins :

$$-2w_{N-1} + \left(2 + h^2 q_N + \left(2 - hp_N\right) h\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) w_N = -h^2 r_N - \left(2 - hp_N\right) h\frac{\beta_3}{\beta_2}$$

Fyrsta jafna hneppisins:

$$\left(2 + h^2 q_0 - (2 + hp_0)\, h\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) w_0 - 2w_1 = -h^2 r_0 - (2 + hp_0)\, h\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Með því að innleiða felupunkt $x_{N+1} = b + h$ hægra megin við skiptinguna, tilsvarandi felugildi $w_f$ og leysa saman tvær jöfnur, þá fáum við síðustu jöfnu hneppisins :

$$-2w_{N-1} + \left(2 + h^2 q_N + (2 - hp_N)\, h\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) w_N = -h^2 r_N - (2 - hp_N)\, h\frac{\beta_3}{\beta_2}$$

Við erum því aftur komin með $(N+1) \times (N+1)$-jöfnuhneppi

# 8.2 Hneppið á fylkjaformi

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & & & \\ l_1 & d_1 & u_1 & & & & & \\ & l_2 & d_2 & u_2 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} & \\ & & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ & & & & & & & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix}$$

Þar sem stuðlarnir $l_j$, $d_j$ og $u_j$ fyrir $j = 1, 2, 3 \ldots, N-1$ eru þeir sömu og áður.

$$l_j = -1 - \tfrac{1}{2}hp_j$$

$$d_j = 2 + h^2 q_j$$

$$u_j = -1 + \tfrac{1}{2}hp_j$$

## 8.2 Fyrsta og síðasta lína hneppisins

$$a_{11} = \begin{cases} 1, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ d_0 & \text{Neumann í } x = a : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \\ d_0 + 2hl_0\alpha_1/\alpha_2 & \text{Robin í } x = a : \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{12} = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ -2, & \text{annars.} \end{cases}$$

$$a_{N+1,N+1} = \begin{cases} 1, & \text{Dirichlet í } x = b : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ d_N & \text{Neumann í } x = b : \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ d_N - 2hu_N\beta_1/\beta_2 & \text{Robin í } x = a : \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$a_{N+1,N} = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet í } x = b : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ -2 & \text{annars.} \end{cases}$$

## 8.2 Hægri hlið hneppisins

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{cases} \alpha = \alpha_3/\alpha_1, & \text{Dirichlet í } x = a : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \\ -h^2 r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Neumann í } x = a : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \\ -h^2 r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Robin í } x = a : \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

$$b_{N+1} = \begin{cases} \beta = \beta_3/\beta_1, & \text{Dirichlet í } x = a : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \\ -h^2 r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Neumann í } x = a : \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ -h^2 r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Robin í } x = a : \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

# 8.2 Samantekt

Gildi lausnarinnar $y(x)$ á línulega jaðargildisverkefninu

$$
\begin{gathered}
y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b, \\
\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3, \\
\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3
\end{gathered}
$$

í punktunum $x_j = a + jh$, þar sem $h = (b-a)/N$ og $j = 0, \ldots, N$, eru nálguð með

$$w_j \approx y(x_j) = y_j$$

## 8.2 Samantekt

Gildi lausnarinnar $y(x)$ á línulega jaðargildisverkefninu

$$\begin{aligned} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3 \end{aligned}$$

í punktunum $x_j = a + jh$, þar sem $h = (b-a)/N$ og $j = 0, \dots, N$, eru nálguð með

$$w_j \approx y(x_j) = y_j$$

Dálkvigurinn

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_N]^T$$

er lausn á línulegu jöfnuhneppi $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$.

Stuðlum $(N+1) \times (N+1)$ fylkisins $A$ og $(N+1)$-dálkvigursins $\mathbf{b}$ hefur verið lýst hér að framan.

## Kafli 8: Fræðilegar spurningar

1. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Dirichlet-jaðarskilyrði*? (Samheiti er *fallsjaðarskilyrði*.)
2. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Neumann-jaðarskilyrði*? (Samheiti eru *afleiðujaðarskilyrði* og *flæðisjaðarskilyrði*.)
3. Hvað er átt við með því að lausn afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ uppfylli *Robin-jaðarskilyrði*? (Samheiti er *blandað jaðarskilyrði*.)
4. Hvernig er nálgunarjafna fyrir línulegu afleiðujöfnuna $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ í innri skiptipunkti á bilinu $[a, b]$ leidd út?
5. Hvernig eru *felupunktur* og *felugildi* notuð til þess að meðhöndla blandað jaðarskilyrði $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ í vinstri endapunkti bilsins $[a, b]$?
6. Hvernig er *felupunktur* og *felugildi* notuð til þess að meðhöndla blandað jaðarskilyrði $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$ í vinstri endapunkti bilsins $[a, b]$ og hvernig verður nálgunarjafnan í punktinum $x = 0$ þegar þetta er gert?