Kafli 4: Eigingildisverkefni

Töluleg greining, STÆ405G, 24. janúar 2014

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

4.1

Yfirlit

Kafli 4: Eigingildisverkefni

4.2

4.0 Eigingildi og eiginvigrar

4. Nálgun á eigingildum og eiginvigrum

Skilgreining
Látum A vera $n \times n$ fylki. Munum að $\lambda \in \mathbb{C}$ nefnist *eigingildi* fylkisins A ef til er $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ þannig að

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Vigurinn $\mathbf{v}$ nefnist þá *eiginvigur* fylkisins A og við segjum að hann svari til eigingildisins λ.

Athugasemd
Eigingildi fylkisins A eru nákvæmlega núllstöðvar kennimargliðunnar

$$p_A(z) = \det(zI - A), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Athugasemd
Ef $\mathbf{v}$ er eiginvigur fylkisins A, þá er $\alpha\mathbf{v}$ einnig eiginvigur fyrir sérhvert $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

4.3

4.0 Gróf staðsetning á eigingildum

Skífusetning Gerschgorins
Skilgreinum

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

sem er summan af tölugildum stakanna í línu i *utan hornalínunnar* og látum

$$C_i = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

tákna skífuna með miðju í a_{ii} og geislann r_i. Þá gildir

(i) Öll eigingildi A liggja í sammengi skífanna C_i.
(ii) Ef k af skífunum C_i mynda samanhangandi svæði R í $\mathbb{C}$ sem er sundlægt við hinar $n-k$ skífurnar, þá inniheldur R nákvæmlega k eigingildi.

4.4

4.0 Eiginvigragrunnar

Nokkrar staðreyndir um eigingildi og eiginvigra:

(i) Eiginvigrar sem svara til ólíkra eigingilda eru línulega óháðir.

(ii) Eiginvigrar sem svara til eins ákveðins eigingildis λ spanna hlutrúm í $\mathbb{C}^n$.

(iii) Við segjum að fylkið A sé *hornalínugeranlegt* ef til eru eigingildi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ og tilsvarandi eiginvigrar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sem mynda grunn í $\mathbb{R}^n$.Þá er hægt að skrifa

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

þar sem Λ er hornalínufylki með eigingildin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ á hornalínunni og T er $n \times n$ fylki þannig að dálkur nr. k í því samanstendur af hnitum $\mathbf{v}_k$ miðað við staðalgrunninn í $\mathbb{R}^n$.

(iv) Ef fylkið A er samhverft, þá er það hornalínugeranlegt.

4.5

4.1 Veldaaðferð

Hugsum okkur nú að við A sé hornalínugeranlegt og að við röðum eigingildunum á hornalínu Λ í minnkandi röð eftir tölugildi

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Tökum einhvern vigur $\mathbf{x}^{(0)}$ og lítum á liðun hans í eiginvigra

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Skilgreinum síðan rununa $\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)$ með ítruninni

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = A\mathbf{x}^{(m)}.$$

4.6

4.1 Veldaaðferð

Við fáum þá

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} &= \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n A\mathbf{v}_n \\
&= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} &= \alpha_1 \lambda_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n A\mathbf{v}_n, \\
&= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{v}_n \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\mathbf{x}^{(m)} &= \alpha_1 \lambda_1^m \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^m \mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

Síðasti vigurinn er

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m \big(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^m \alpha_2 \mathbf{v}_+ \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m \alpha_n \mathbf{v}_n\big)$$

4.7

4.1 Veldaaðferð

Við vorum komin með

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m \big(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^m \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m \alpha_n \mathbf{v}_n\big)$$

Hnit númer i í þessum vigri er:

$$x_i^{(m)} = \lambda_1^m \big(\alpha_1 v_{1,i} + (\lambda_2/\lambda_1)^m \alpha_2 v_{2,i} + \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m \alpha_n v_{n,i}\big)$$

Hugsum okkur nú að $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Þá fæst:

$$\frac{x_i^{(m)}}{x_i^{(m-1)}} = \frac{\lambda_1^m \big(\alpha_1 v_{1,i} + O((\lambda_2/\lambda_1)^m)\big)}{\lambda_1^{m-1} \big(\alpha_1 v_{1,i} + O((\lambda_2/\lambda_1)^{m-1})\big)}$$

Ef við höfum $\alpha_1 v_{1,i} \neq 0$, þá er niðurstaðan

$$\frac{x_i^{(m)}}{x_i^{(m-1)}} = \lambda_1 \frac{\big(1 + O((\lambda_2/\lambda_1)^m)\big)}{\big(1 + O((\lambda_2/\lambda_1))^{m-1}\big)} \to \lambda_1 \quad \text{þegar} \quad m \to \infty.$$

4.8

4.1 Veldaaðferð

Skoðum aftur

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m\big(\alpha_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^m\alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n/\lambda_1)^m\alpha_n\mathbf{v}_n\big)$$

Ef $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, þá gildir fyrir $j > 1$ að $(\lambda_j/\lambda_1)^m \to 0$ þegar $m \to \infty$ og

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{x}^{(m)}}{\lambda_1^m} = \alpha_1\mathbf{v}_1.$$

Þannig að ef $\mathbf{x}^{(0)}$ var valinn í upphafi þannig að $\alpha_1 \neq 0$, þá skilar þetta eiginvigrinum $\alpha_1\mathbf{v}_1$ fyrir eigingildið λ_1. 4.9

4.1 Reiknirit til þess að ákvarða stærsta eigingildi fylkis

Þegar við reiknum $\mathbf{x}^m$ eins og hér að framan þá er ekki ólíklegt að við lendum í undir- eða yfirflæðisvillum ef lengd $\mathbf{x}$ (skv. einhverjum staðli) stefnir á 0 eða $+\infty$. Til þess að ráða bót á þessu þá stöðlum við vigurinn í hverju skrefi á eftirfarandi hátt.

Við veljum $\mathbf{x}^{(0)}$ með einhverjum hætti og skilgreinum síðan

$$\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}, \qquad \text{og svo } \mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y_{p_m}^{(m)}}$$

þar sem p_m er númerið á því hniti í $\mathbf{y}^{(m)}$ sem hefur stærst tölugildi, sem þýðir að það hnit p_m uppfyllir

$$|y_{p_m}^{(m)}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |y_j^{(m)}|.$$

Ef mörg númer uppfylla þetta skilyrði, þá tökum við bara p_m sem lægsta gildið á j þar sem jafnaðarmerki gildir (enda skiptir það ekki máli fyrir skilgreininguna á $\mathbf{x}^{(m)}$). 4.10

4.1 Samleitnin

Nú kemur í ljós að $y_{p_{m-1}}^{(m)}$ stefnir á λ_1. Auk þess stefnir $\mathbf{x}^{(m)}$ á eiginvigur sem svarar til λ_1 og hefur lengdina 1 í l_∞ staðlinum.

Í útreikningum skilgreinum við því rununa $\lambda^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)}$. Við gefum okkur síðan þolmörk á skekkju TOL og reiknum úr runurnar þar til eitt af stoppskilyrðunum gildir:

$$\begin{aligned}
|\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}| &< TOL \qquad \text{eða}\\
\|\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)}\| &< TOL \qquad \text{eða}\\
\|A\mathbf{x}^{(m)} - \lambda^{(m)}\mathbf{x}^{(m)}\| &< TOL.
\end{aligned}$$

4.11

4.1 Samhverf fylki

Munum að ef A er samhverft, þá hefur A eiginvigragrunn og eiginvigrar sem svara til ólíkra eigingilda eru hornréttir.

Í þessu tilfelli er einfaldara að smíða reiknirit svona:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(m)} &= A\mathbf{x}^{(m-1)}\\
\lambda^{(m)} &= \mathbf{x}^{(m-1)^T}\mathbf{y}^{(m)}\\
\mathbf{x}^{(m)} &= \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{\sqrt{(\mathbf{y}^{(m)})^T\mathbf{y}^{(m)}}}
\end{aligned}$$

Samleitnin verður sú sama: $\lambda^{(m)}$ stefnir á stærsta eigingildið og $\mathbf{x}^{(m)}$ stefnir á tilsvarandi eiginvigur. 4.12

4.2 Meira um eigingildi og eiginvigra

Setning

Látum sem fyrr A vera $n \times n$ fylki, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vera eigingildi og $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vera tilsvarandi eiginvigra.

(i) Látum $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ vera margliðu og skilgreinum $n \times n$ fylkið B með því að stinga A inn í p,

$$B = p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

Þá eru tölurnar $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ eigingildi fylkisins $B = p(A)$ með tilsvarandi eiginvigrum $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

(ii) Ef A er andhverfanlegt þá eru $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ eigingildi A^{-1} með tilsvarandi eiginvigrum $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

4.13

4.2 Andhverf veldaaðferð

Af síðustu setningu leiðir að fylkið $B = (A - qI)^{-1}$ hefur eigingildin

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - q}, \ \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2 - q}, \ \cdots \ \mu_n = \frac{1}{\lambda_n - q}.$$

Hugsum okkur nú að við viljum finna nálgunargildi fyrir eigingildið λ_k og að við vitum út frá setningu Gerschgorins skífunum nokkurn veginn hvar það er staðsett.

Ef við erum með q nógu nálægt λ_k, þá verður μ_k stærsta eigingildi fylkisins $B = (A - qI)^{-1}$

Þá getum við beitt veldaaðferðinni til þess að búa til runu $\mu^{(m)} \to \mu_k$ og við fáum að

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{\mu^{(m)}} + q \to \lambda_k.$$

4.14

4.2 Andhverf veldaaðferð

Ef veldaaðferðinni er beitt á fylkið $B = (A - qI)^{-1}$ þá þurfum við að reikna út $\mathbf{y}^{(m)} = (A - qI)^{-1}\mathbf{x}^{(m-1)}$ í hverju skrefi.

Þetta er gert þannig að fyrst framkvæmum við LU-þáttun á fylkinu $LU = (A - qI)$ og framkvæmum síðan for- og endurinnsetningu til þess að leysa $LU\mathbf{y}^{(m)} = x^{(m-1)}$.

Tölulegar aðferðir fyrir LU-þáttun eru í kafla 3, og verður fjallað um síðar. 4.15

4.2 Reiknirit til þess að nálga eigingildi og eiginvigra

Takmarkið er að finna nálgun á eigingildinu λ_k.

(i) Finnum $q \in \mathbb{R}$ sem liggur næst eigingildinu λ_k af öllum eigingildum A

(ii) Þáttum $LU = A - qI$.

(iii) Við veljum $\mathbf{x}^{(0)}$ með einhverjum hætti og leysum síðan $\mathbf{y}^{(m)}$ út úr jöfnunni

$$LU\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m-1)}.$$

(iv) Skilgreinum $\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{y}^{(m)}/y_{p_m}^{(m)}$ þar sem p_m er númerið á því hniti í $\mathbf{y}^{(m)}$ sem hefur stærst tölugildi, sem þýðir að það hnit uppfyllir

$$|y_{p_m}^{(m)}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |y_j^{(m)}|.$$

Ef mörg númer uppfylla þetta skilyrði, þá tökum við bara p_m sem lægsta gildið á j þar sem jafnaðarmerki gildir.

4.16

4.2 Reiknirit til þess að ákvarða eigingildi

Niðurstaðan verður að

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{y_{p_{m-1}}^{(m)}} + q \to \lambda_k$$

og $\mathbf{x}^{(m)}$ stefnir á tilsvarandi eiginvigur. 4.17

Kafli 4: Fræðilegar spurningar

1. Hvernig er setning Gerschgorins um staðsetningu eigingilda fylkis?
2. Hvernig er veldaaðferð til þess að nálga það eigingildi fylkis sem hefur stærst tölugildi?
3. Afhverju skilgreinum $\mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}}$ þar sem $\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}$, en ekki bara $\mathbf{x}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}$?
4. Hvernig er andhverf veldaaðferð til þess að nálga eigingildi fylkis?
5. Hvernig er skynsamlegast að velja q í andhverfu veldaaðferðinni ef við viljum finna eigingildið λ_k?

4.18