4. Föll af mörgum breytistærðum

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G, 14. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is

4.1

Graf falls

Skilgreining 4.1
Látum $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vera fall. *Graf* fallsins er skilgreint sem mengið

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

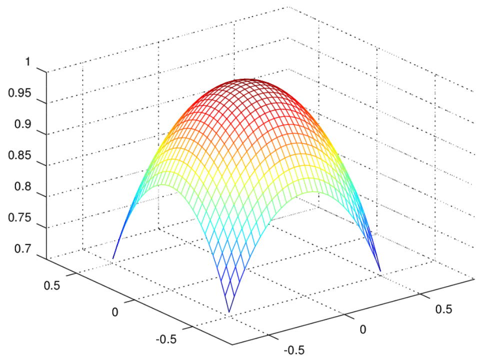
Ef $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er fall, þá er *graf* fallsins skilgreint sem mengið

$$\{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

4.2

Graf falls

Dæmi: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.



4.3

Jafnhæðarlínur

Skilgreining 4.2
Látum $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vera fall. Ef c er fasti þá er mengið

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kallað *jafnhæðarlína* eða *jafnhæðarferill* (e. level curve) fallsins f fyrir fastann c.

Látum $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vera fall. Ef c er fasti þá er mengið

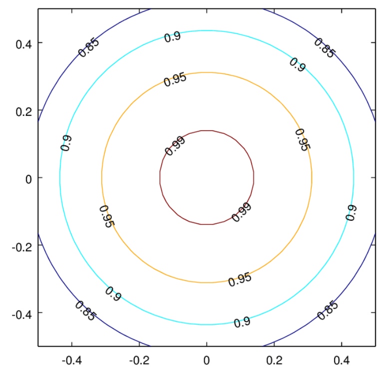
$$\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = c\}$$

kallað *jafnhæðarflötur* (e. level surface) fallsins f fyrir fastann c.

4.4

Jafnhæðarlínur

Dæmi: $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $-0.5 \le x, y \le 0.5$.



4.5

Fjarlægð milli punkta

Skilgreining 4.3
Fjarlægðin milli tveggja punkta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ í $\mathbf{R}^n$ er skilgreind sem talan

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

4.6

Opnar kúlur

Skilgreining 4.4
Látum $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vera punkt í $\mathbf{R}^n$. Skilgreinum *opnu kúluna* með miðju í P og geisla r sem mengið

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid |Q - P| < r\}.$$

Í $\mathbb{R}^2$ er eðlilegra að tala um *opna skífu* eða *opinn disk* í stað opinnar kúlu og í $\mathbb{R}$ þá er talað um opin bil.

4.7

Opin mengi

Skilgreining 4.5
Látum U vera hlutmengi í $\mathbf{R}^n$.

Sagt er að U sé *opið mengi* ef um sérhvern punkt P í U gildir að til er tala $r > 0$ þannig að $B_r(P) \subseteq U$.

Mengið U er sagt *lokað* ef fyllimengið er opið. (*Fyllimengi* U er skilgreint sem mengið $\mathbf{R}^n \setminus U = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid Q \notin U\}$.)

4.8

Jaðarpunktur

Skilgreining 4.6
Látum U vera mengi í $\mathbf{R}^n$. Punktur P í $\mathbf{R}^n$ er sagður *jaðarpunktur* U ef sérhver opin kúla $B_r(P)$ með $r > 0$ inniheldur bæði punkt úr U og punkt úr $\mathbf{R}^n \setminus U$. (Athugið að bæði er mögulegt að jaðarpunktur U sé í U og að hann sé ekki í U.)

4.9

Skilgreiningarmengi

Skilgreining 4.7
Fyrir fall $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ þá táknar $\mathcal{D}(f)$ skilgreiningarmengi fallsins f. Ef fallið er gefið með formúlu og ekkert sagt um $\mathcal{D}(f)$ þá lítum við svo á að $\mathcal{D}(f)$ sé mengi allra punkta í $\mathbf{R}^n$ þannig að formúlan gefi vel skilgreinda tölu.

4.10

Markgildi

Skilgreining 4.8
Látum $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vera fall af n breytistærðum með skilgreiningarmengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbf{R}^n$. Látum $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vera punkt í $\mathbf{R}^n$ þannig að sérhver opin kúla um P inniheldur meira en einn punkt úr $\mathcal{D}(f)$.

Segjum að $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stefni á tölu L þegar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stefnir á $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ef eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhverja tölu $\varepsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að ef $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)$ og

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n)| < \delta$$

þá er

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L| < \varepsilon.$$

4.11

Markgildi

Ritháttur 4.9
Ef $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stefnir á tölu L þegar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stefnir á $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ þá er ritað

$$\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(p_1,p_2,\dots,p_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L.$$

4.12

Markgildi

Skilgreining 4.10 (Skilgreining 4.8 sett fram fyrir föll af tveimur breytum.)

Látum $f(x, y)$ vera fall skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum (a, b) vera punkt í $\mathbb{R}^2$ þannig að sérhver opin skífa um (a, b) inniheldur meira en einn punkt úr $\mathcal{D}(f)$.

Segjum að $f(x, y)$ stefni á tölu L þegar (x, y) stefnir á (a, b) ef eftirfarandi gildir:

fyrir sérhverja tölu $\varepsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að ef $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ og

$$\delta > |(x, y) - (a, b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

þá er

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

4.13

Reglur um markgildi

Setning 4.11
Látum f og g vera föll af tveimur breytum. Gerum ráð fyrir að

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{og} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M,$$

og að sérhver grennd um (a,b) innihaldi fleiri en einn punkt þar sem bæði föllin f og g eru skilgreind. Þá gildir

(a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, svo framarlega sem $M \neq 0$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$ ef F er fall af einni breytistærð sem er samfellt í punktinum L.

4.14

Samfelldni

Skilgreining 4.12
Látum f vera fall af n breytistærðum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f)$ í $\mathbf{R}^n$. Fallið f er sagt *samfellt í punkti* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ í $\mathcal{D}(f)$ ef

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(p_1,p_2,\ldots,p_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Sagt er að fallið sé *samfellt* ef það er samfellt í öllum punktum skilgreiningarmengis síns.

4.15