20. Fletir

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

11. mars 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Óformleg skilgreining 20.1

Flötur $\mathcal{S}$ í $\mathbb{R}^3$ er „tvívítt“ hlutmengi í $\mathbb{R}^3$.

Lýsing 20.2

Flötum er aðallega lýst með formúlum á þrjá vegu:

1. Gefið er fall $f(x, y, z)$. Fletinum $\mathcal{S}$ er lýst með jöfnu $f(x, y, z) = C$ (þ.e.a.s. $\mathcal{S}$ er jafnhæðarflötur fallsins f). Þá er
$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = C\}.$$
2. Gefið er fall skilgreint á ferilsamanhangandi svæði D í $\mathbb{R}^2$. Fletinum $\mathcal{S}$ er lýst sem grafi fallsins f. Þá er
$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ og } z = f(x, y)\}.$$
3. Með stikafleti (sjá næstu glæru).

Skilgreining 20.3

Látum D vera ferilsamanhangandi hlutmengi í $\mathbb{R}^2$. Samfelld vörpun $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3; \mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ þannig að

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

er flötur kallast *stikaflötur*. Segjum að $\mathbf{r}$ sé *stikun á fletinum* $\mathcal{S}$. Viljum að $\mathbf{r}$ sé eintæk vörpun, nema hugsanlega á jaðri D. Ritum einnig

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Setning 20.4

1. Látum $\mathcal{S}$ vera flöt sem er gefinn sem jafnhæðarflötur $f(x, y, z) = C$. Ef (a, b, c) er punktur á fletinum og fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b, c) þá er vigurinn $\mathbf{n} = \nabla f(a, b, c)$ hornréttur á flötinn í punktinum (a, b, c) og ef $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ þá hefur flöturinn snertiplan í punktinum. Jafna snertiplansins er

$$f_1(a, b, c)x + f_2(a, b, c)y + f_3(a, b, c)z = D$$

þar sem

$$D = f_1(a, b, c)a + f_2(a, b, c)b + f_3(a, b, c)c.$$

Setning 20.4, frh.

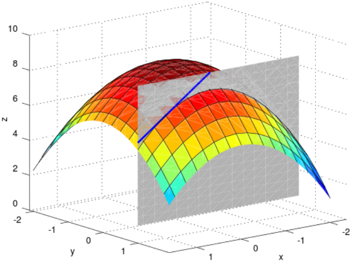
2. Látum $\mathcal{S}$ vera flöt sem er gefinn sem graf falls $z = f(x, y)$. Ef $(a, b, f(a, b))$ er punktur á fletinum og fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b) þá er vigurinn

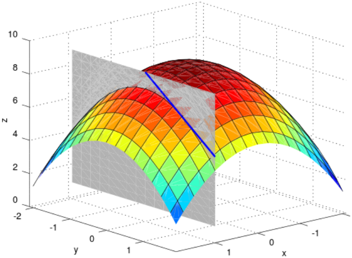
$$\mathbf{n} = \big(0, 1, f_2(a, b)\big) \times \big(1, 0, f_1(a, b)\big) = \big(f_1(a, b), f_2(a, b), -1\big)$$

hornréttur á flötinn í punktinum $(a, b, f(a, b))$ og flöturinn hefur snertiplan í punktinum. Jafna snertiplansins er

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Snertiplön





Snertivigur við skurðferil sléttunnar $y = b$ og yfirborðsins $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er $\mathbf{T}_1 = (1, 0, f_1(a, b))$.

Snertivigur við skurðferil sléttunnar $x = a$ og yfirborðsins $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er $\mathbf{T}_2 = (0, 1, f_2(a, b))$.

Setning 20.4, frh.

3. Látum $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vera stikaflöt. Ef $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ er punktur á fletinum sem $\mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ stikar og föllin $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ eru diffranleg í punktinum (x_0, y_0) þá er vigurinn
$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$
reiknaður með $u = u_0$ og $v = v_0$ þvervigur á flötinn í punktinum (x_0, y_0, z_0).

Skilgreining 20.5

Ef vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ eru óháðir fyrir alla punkta $(u, v) \in D$ þá er sagt að stikunin sé *regluleg*.

Athugasemd 20.6

Ef vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ eru óháðir þá spanna þeir snertiplan við flötinn í punktinum $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Snertiplanið hefur stikun

$$\Pi(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + u\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + v\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Verkefni 20.7

1. Flatarmál flata – sambærilegt við bogalengd ferla.
2. Heildi falls yfir flöt með tilliti til flatarmáls – sambærilegt við heildi falls eftir ferli með tilliti til bogalengdar.
3. Heildi vigursviðs yfir flöt – svipar til heildis vigursviðs eftir ferli.

Flatarmál flata

Skilgreining 20.8

Látum $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^2$ vera reglulegan stikaflöt sem stikar flöt $\mathcal{S}$. Flatarmál $\mathcal{S}$ er

$$A = \iint_D dS = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

Flatarmál flata

Formúla 20.9

Látum $f(x, y)$ vera diffranlegt fall skilgreint á mengi D í $\mathbb{R}^2$. Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ er gefið með formúlunni

$$A = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$