8. Stiglar

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

28. janúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 8.1

Látum $f(x, y)$ vera fall og (x, y) punkt þar sem báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar. Skilgreinum *stigul* f í punktinum (x, y) sem vigurinn

$$\nabla f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}.$$

Stigull f er stundum táknaður með $\mathbf{grad}\, f$.

Stigull

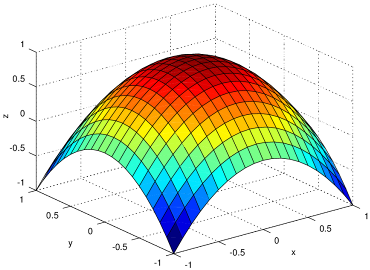
Ritháttur 8.2

Oft hentugt að rita

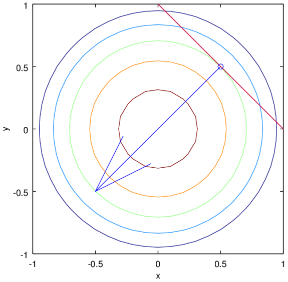
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Þá er litið svo á að ∇ sé *diffurvirki*, þ.e.a.s. ∇ gefur fyrirmæli um hvað á að gera við f til að fá $\nabla f(x, y)$.

Dæmi



Graf $z = 1 - x^2 - y^2$



Jafnhæðarlínur. Stigull og snertilína við jafnhæðarlínuna $z = 0.5$ í $(x, y) = (0.5, 0.5)$.

Setning 8.3

Gerum ráð fyrir að fallið $f(x, y)$ sé diffranlegt í punktinum (a, b) og að $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Þá er vigurinn $\nabla f(a, b)$ hornréttur á þá jafnhæðarlínu f sem liggur í gegnum punktinn (a, b).

Setning 8.4

Gerum ráð fyrir að fallið $f(x, y)$ sé diffranlegt í punktinum (a, b) og að $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Jafna snertilínu við jafnhæðarferil f í punktinum (a, b) er gefin með formúlunni

$$\nabla f(a, b) \cdot (x, y) = \nabla f(a, b) \cdot (a, b),$$

eða

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = 0.$$

Skilgreining 8.5

Látum $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ vera einingarvigur. *Stefnuafleiða* f í punktinum (a, b) í stefnu $\mathbf{u}$ er skilgreind sem

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + hu, b + hv) - f(a, b)}{h}$$

ef markgildið er skilgreint.

Setning 8.6

Gerum ráð fyrir að fallið f sé diffranlegt í (a, b) og $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ sé einingarvigur. Þá er stefnuafleiðan í punktinum (a, b) í stefnu $\mathbf{u}$ skilgreind og gefin með formúlunni

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b).$$

Setning 8.7

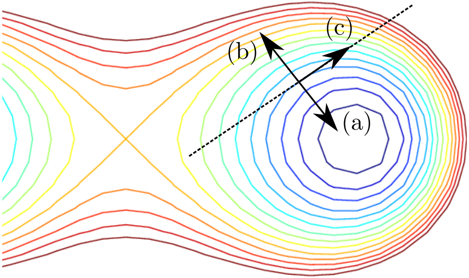
Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b).

(a) Hæsta gildið á stefnuafleiðunni $D_{\mathbf{u}} f(a, b)$ fæst þegar $\mathbf{u}$ er einingarvigur í stefnu $\nabla f(a, b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

(b) Lægsta gildið á stefnuafleiðunni $D_{\mathbf{u}} f(a, b)$ fæst þegar $\mathbf{u}$ er einingarvigur í stefnu $-\nabla f(a, b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

(c) Ef $\mathcal{C}$ er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og $\mathbf{u}$ er einingarsnertivigur við $\mathcal{C}$ í punktinum (a, b) þá er $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = 0$.

Stefnuafleiða



Setning 8.8

Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b).

(a) Í punktinum (a, b) þá vex f hraðast ef haldið er í stefnu $\nabla f(a, b)$.

(b) Í punktinum (a, b) þá minnkar f hraðast ef haldið er í stefnu $-\nabla f(a, b)$.

(c) Ef $\mathcal{C}$ er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og $\mathbf{u}$ er einingarsnertivigur við $\mathcal{C}$ í punktinum (a, b) þá er er vaxtarhraði f í stefnu $\mathbf{u}$ jafn 0.

Skilgreining 8.9

Látum f vera fall af þremur breytistærðum, þannig að allar þrjár fyrsta stigs hlutafleiður f í punktinum (x, y, z) séu skilgreindar. *Stigull* f í punktinum (x, y, z) er skilgreindur sem vigurinn

$$\nabla f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Snertiplan við jafnhæðarflöt

Setning 8.10

Látum f vera fall af þremur breytistærðum þannig að fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b, c). Látum $\mathcal{F}$ tákna þann jafnhæðarflöt f sem liggur um (a, b, c). Stigullinn $\nabla f(a, b, c)$ er hornréttur á flötinn $\mathcal{F}$ í punktinum (a, b, c) og snertiplan (ef $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$) við jafnhæðarflötinn í punktinum (a, b, c) er gefið með jöfnunni

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (x, y, z) = \nabla f(a, b, c) \cdot (a, b, c)$$

eða með umritun

$$f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c) = 0.$$