12. Tvöföld heildi

Stærðfræðigreining IIB, STÆ205G

11. febrúar 2015

Sigurður Örn Stefánsson, sigurdur@hi.is
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands

Skilgreining 12.1

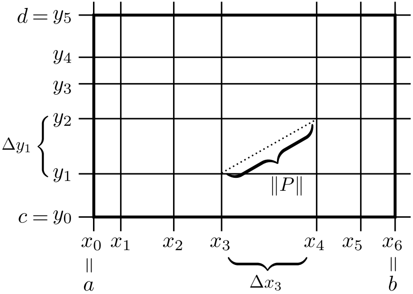
Látum $R = [a, b] \times [c, d]$ vera rétthyrning í planinu. *Skipting* P á rétthyrningnum R felst í því að taka skiptingar

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \qquad \text{og} \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

á bilunum $[a, b]$ og $[c, d]$ og nota þær skiptingar til að skipta R upp í rétthyrninga $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Ritum $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ og $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. *Norm* skiptingarinnar P, táknað með $\|P\|$, er skilgreint sem lengd lengstu hornalínu í rétthyrningunum $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Skiptingar

Skipting P á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$.

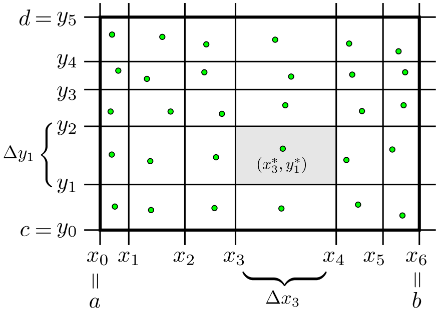


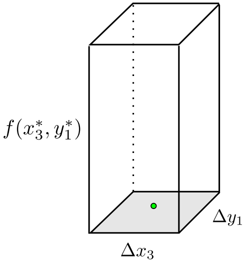
Riemann-summa

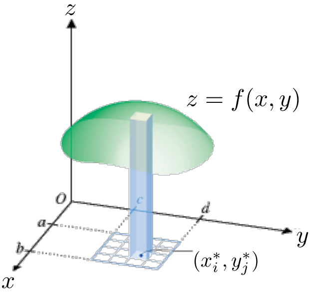
Skilgreining 12.2

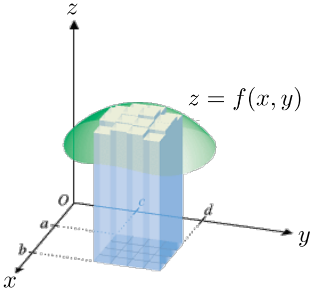
Látum f vera fall skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ og látum P vera skiptingu á R. Veljum úr hverjum rétthyrningi $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ punkt (x_i^*, y_j^*). Skilgreinum *Riemann-summuna*

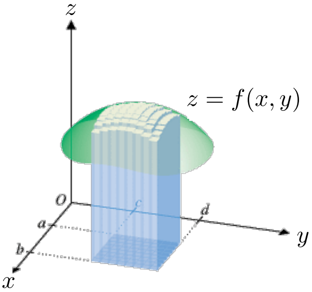
$$\mathcal{R}(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j.$$






z
$z = f(x, y)$
O
c
d
a
b
y
x
(x_i^*, y_j^*)


z
$z = f(x, y)$
O
c
d
a
b
y
x


z
$z = f(x, y)$
O
c
d
a
b
y
x

Skilgreining 12.3

Sagt er að fall f skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ sé *heildanlegt yfir* R með heildi I (hér stendur I fyrir tölu) ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að $|\mathcal{R}(f, P) - I| < \varepsilon$ fyrir allar skiptingar P með $\|P\| < \delta$ óháð vali á punktunum (x_i^*, y_j^*). Ritum þá

$$\iint_R f(x, y)dA = I.$$

Skilgreining 12.4

Látum D vera takmarkað svæði í planinu. Fall f er sagt heildanlegt yfir D ef til er rétthyrningur R sem inniheldur D og fallið

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{ef } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{ef } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

er heildanlegt yfir R.

Setning 12.5

Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu og takmörkuðu svæði D í planinu $\mathbb{R}^2$. Gerum ráð fyrir að jaðar D samanstandi af endanlega mörgum ferlum sem hafa endanlega lengd. Þá er fallið f heildanlegt yfir D.

Setning 12.6

Látum D vera svæði í planinu og f takmarkað fall skilgreint á D og heildanlegt yfir D. Þá gildir:

1. $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$ ef flatarmál D er 0.
2. $\iint_D 1\,dA =$ flatarmál D.
3. Ef $f(x,y) \geq 0$ fyrir alla punkta (x,y) í D þá er $\iint_D f(x,y)\,dA$ jafnt rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x,y)$.
4. Ef $f(x,y) \leq 0$ fyrir alla punkta (x,y) í D þá er $\iint_D f(x,y)\,dA$ jafnt mínus rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x,y)$.

Setning 12.7

Ef D er svæði í planinu og f og g heildanleg föll yfir D þá gildir:

1. Ef L og M eru fastar þá er
$$\iint_D Lf(x,y)+Mg(x,y)\,dA = L\iint_D f(x,y)\,dA + M\iint_D g(x,y)\,dA.$$
2. Ef $f(x,y) \leq g(x,y)$ þá er
$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA.$$
3. Þríhyrningsójafna: $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA.$
4. Ritum D sem sammengi af svæðum $D_1,\ldots,D_k$ sem skarast ekki nema mögulega í jaðarpunktum þá er
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{k}\iint_{D_i} f(x,y)\,dA.$$

Setning Fubinis 12.8

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir rétthyrning $R = [a, b] \times [c, d]$. Setjum

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \qquad (x \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}).$$

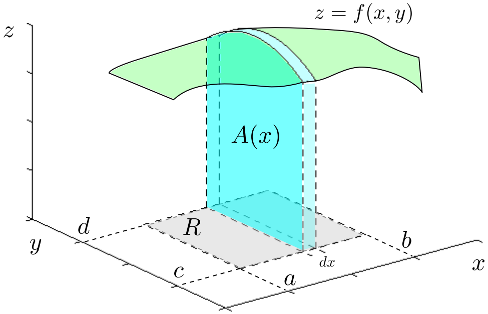
Þá gildir að

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Sömuleiðis gildir þegar við setjum

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \qquad (y \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}) \qquad \text{að}$$

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$


$z = f(x, y)$
z
$A(x)$
d
R
y
b
dx
x
c
a