Kafli 1

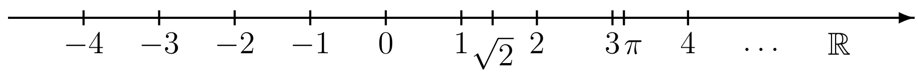
TVINNTÖLUR

1.1 Talnakerfin

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$.

Rauntölur

Til sérhvers punkts á línu svarar nákvæmlega ein tala a. $\mathbb{R}$ táknar mengi allra slíkra talna. Aðgerðirnar samlagning og margföldun eru skilgreindar með færslum á punktum á línunni.



Sérhver rauntala sem ekki er ræð tala nefnist *óræð tala.* Ekki er neitt sérstakt tákn notað fyrir mengi óræðra talna í stærðfræðinni, svo það er oftast táknað $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Rauntölurnar uppfylla allar sömu reiknireglur of ræðar tölur, þannig að fyrir rauntölur a, b og c höfum við

$(a+b)+c = a+(b+c)$	*tengiregla fyrir samlagningu*
$(ab)c = a(bc)$	*tengiregla fyrir margföldun*
$a+b = b+a$	*víxlegra fyrir samlagningu*
$ab = ba$	*víxlegra fyrir margföldun*
$a(b+c) = ab+ac$	*dreifiregla*
$a+0 = a$	0 *er samlagningarhlutleysa*
$1a = a$	1 *er margföldunarhlutleysa*

Sérhver rauntala a á sér samlagningarandhverfu sem er ótvírætt ákvörðuð og við táknum hana með $-a$ og sérhver rauntala $a \neq 0$ á sér margföldunarandhverfu a^{-1} sem er ótvírætt ákvörðuð. Við athugum að $a^{-1} = 1/a$.

Við höfum röðun $<$ á $\mathbb{R}$ sem er þannig að um sérhverjar tvær tölur a og b gildir eitt af þrennu $a < b$, $a = b$ eða $b < a$. Við skrifum einnig $a > b$ ef $b < a$. Við höfum eftirtaldar reglur um röðun rauntalna

ef $a < b$ og $b < c$, þá er $a < c$	*röðun er gegnvirk*
ef $a < b$ þá er $a + c < b + c$	*röðun er óbreytt við samlagningu*
ef $a < b$ og $c > 0$, þá er $ac < bc$	*röðun er óbreytt við margföldun með jákvæðri tölu*
ef $a < b$ og $c < 0$, þá er $bc < ac$	*röðun er viðsnúin við margföldun með neikvæðri tölu*

Við höfum líka *hlutröðun* $\leq$ á $\mathbb{R}$. Við skrifum $a \leq b$ og segjum að *a sé minni eða jafnt b*, ef $a < b$ eða $a = b$. Eins skrifum við $a \geq b$ og segjum að *a sé stærri eða jafnt b* ef $a > b$ eða $a = b$.

Ef $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$, þá skilgreinum við mismunandi bil.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\}$	*opið bil*
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\}$	*lokað bil*
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\}$	*hálf-opið bil*
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\}$	*hálf-opið bil*
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < a\}$	*opin vinstri hálflína*
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq a\}$	*lokuð vinstri hálflína*
$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > a\}$	*opin hægri hálflína*
$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq a\}$	*lokuð hægri hálflína*
$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$	*öll rauntalnalínan*
$[a, a]$	*eins punkts bil*

Stundum er skrifað (a, b) í stað $]a, b[$, $(a, b]$ í stað $]a, b]$ o.s.frv.

Á sérhverju opnu bili eru óendanlega margar ræðar tölur og óendanlega margar óræðar tölur.

Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}$ skilgreinum við *tölugildið* af x með

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Talan $|x|$ mælir fjarlægð milli 0 og x á talnalínunni. Ef gefnar eru tvær rauntölur x og y, þá mælir $|x - y|$ fjarlægðina á milli þeirra. Ef a og ε eru rauntölur og $\varepsilon > 0$, þá er

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

opið bil með miðju í a og þvermálið 2ε.

Takmarkanir rauntalnakerfisins

Við höfum séð að öll talnakerfin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ hafa sínar takmarkanir og það sama á við um rauntölurnar $\mathbb{R}$.

Í $\mathbb{N}$ náttúrlegra talna er frádráttur ófullkomin aðgerð.

Í $\mathbb{Z}$ er deiling ófullkomin aðgerð.

Ræðu tölurnar $\mathbb{Q}$ duga ekki til þess að lýsa lengdum á strikum og ferlum sem koma fyrir í rúmfræðinni.

Við vitum að rauntala í öðru veldi er alltaf stærri eða jöfn núlli svo jafnan $x^2 + 1 = 0$ getur ekki haft lausn.

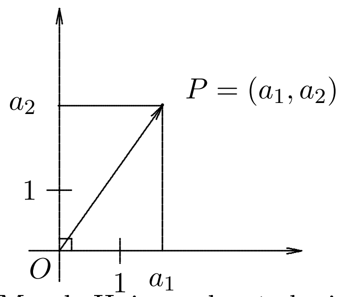
Sama er að segja um annars stigs jöfnuna $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Hún hefur enga lausn ef $D = b^2 - 4ac < 0$. Það er auðvelt að skrifa niður dæmi um margliður sem hafa engar núllstöðvar í $\mathbb{R}$, en stig þeirra þarf að vera slétt tala, því margliður af oddatölustigi hafa alltaf núllstöð.

Nú er eðlilegt að spyrja, hvort hægt sé að stækka rauntalnakerfið yfir í stærra mengi þannig að innan þess mengis sé hægt að finna lausn á annars stigs jöfnunni $x^2 + 1 = 0$ og hvort slíkt talnakerfi gefi af sér lausnir á fleiri jöfnum sem ekki eru leysanlegar í $\mathbb{R}$.

1.2 Tvinntalnaplanið

$\mathbb{C}$ er útvíkkun á $\mathbb{R}$ þar sem til er tala i sem uppfyllir $i^2 = -1$.

Skilgreining á tvinntölum



Mynd: Hnit punkts í plani

Lítum nú á mengi allra vigra í plani. Sérhver vigur hefur hnit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sem segja okkur hvar lokapunktur vigurs er staðsettur ef upphafspunktur hans er settur í upphafspunkt hnitakerfisins. Á mengi allra vigra höfum við tvær aðgerðir, samlagningu og margföldun með tölu. Samlagningunni er lýst með hnitum,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

og margfeldi tölunnar a og vigursins (c, d) er

$$a(c, d) = (ac, ad).$$

Við skilgreinum nú margföldun á $\mathbb{R}^2$ með hliðsjón af formúlunni sem við uppgötvuðum hér að framan,

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Talnaplanið $\mathbb{R}^2$ með venjulegri samlagningu og þessari margföldun nefnist *tvinntölur* og er táknað með $\mathbb{C}$. Nú er auðvelt að sannfæra sig um að víxl-, tengi- og dreifireglur gildi um þessa margföldun

$\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)$	*tengiregla fyrir samlagningu*
$\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) = (a, b)\big((c, d)(e, f)\big)$	*tengiregla fyrir margföldun*
$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$	*víxlregla fyrir samlagningu*
$(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$	*víxlregla fyrir margföldun*
$(a, b)\big((c, d) + (e, f)\big) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$	*dreifiregla*
$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$	$(0, 0)$ *er samlagningarhlutleysa*
$(1, 0)(a, b) = (a, b)$	$(1, 0)$ *er margföldunarhlutleysa*

Talan $(-a, -b)$ er samlagningarandhverfa (a, b).

Jafnan $(a,b)(a,-b)=(a^2+b^2,0)$ segir okkur að talan $(a,b)\neq(0,0)$ eigi sér margföldunarandhverfuna

$$(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}).$$

Við tökum eftir að

$$(a,0)(c,d)=(ac,ad)=a(c,d).$$

sem segir okkur að margföldun með vigrinum $(a,0)$ sé það sama og margföldun með tölunni a.

Vigrar af gerðinni $(a,0)$ haga sér eins og rauntölur því

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0) \qquad \text{og} \qquad (a,0)(b,0)=(ab,0).$$

Í $\mathbb{C}$ gerum við því ekki greinarmun á rauntölunni a og vigrinum $(a,0)$ og lítum á lárétta hnitaásinn $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\,;\,x\in\mathbb{R}\}$ sem rauntalnalínuna $\mathbb{R}$. Við skrifum þá sérstaklega 1 í stað $(1,0)$ og 0 í stað $(0,0)$

Lítum nú á vigurinn $(0,1)$ sem við táknum með i. Um hann gildir

$$i^2=(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Sérhvern vigur (a,b) má skrifa sem samantekt $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$ Við skrifum a og b í stað $(a,0)$ og $(b,0)$ og erum þar með komin með framsetninguna

$$(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)=a+ib.$$

Veldareglur

Ef z er tvinntala þá getum við skilgreint heiltöluveldi þannig að $z^0=1$, $z^1=z$, og $z^n=z\cdots z$ þar sem allir þættirnir eru eins og fjöldi þeirra er $n\geq 2$. Fyrir $z\neq 0$ eru neikvæðu veldin skilgreind þannig að z^{-1} er margföldunarandhverfan af z og fyrir neikvæð n er $z^n=(z^{-1})^{|n|}$. Með þessu fást sömu veldareglur og gilda um rauntölur

$$\begin{aligned} z^n\cdot z^m &= z^{n+m}\\ \frac{z^n}{z^m} &= z^{n-m}\\ z^n\cdot w^n &= (zw)^n\\ (z^n)^m &= z^{nm} \end{aligned}$$

Tvíliðureglan

Tvíliðureglan er eins fyrir tvinntölur og rauntölur,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

þar sem *tvíliðustuðlarnir* eru gefnir með

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!},$$

fyrir $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ og $k = 0, \ldots, n$.

Við köllum þennan stuðul n *yfir* k.

Tvíliðustuðlarnir eru samhverfir í þeim skilningi að

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tvíliðustuðlarnir uppfylla

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

fyrir $n = 0, 1, 2, \ldots$ og rakningarformúluna

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

fyrir $n = 2, 3, 4, \ldots$ og $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Þessari rakningu er best lýst í þríhyrningi Pascals, en línurnar í honum geyma alla tvíliðurstuðlana. Fyrstu 7 línurnar, $n = 0, \ldots, 6$, í honum eru

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Raunhluti, þverhluti og samok

Sérhverja tvinntölu z má rita sem $z = x + iy$ þar sem x og y eru rauntölur. Talan x nefnist þá *raunhluti* tölunnar z og talan y nefnist *þverhluti* hennar. Við táknum raunhlutann með $\mathrm{Re}\, z$ og þverhlutann með $\mathrm{Im}\, z$.

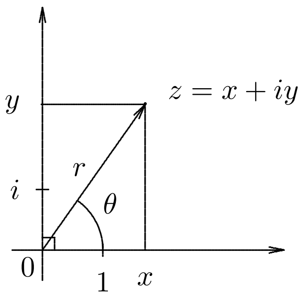
Tvinntala z er sögð vera *rauntala* ef $\mathrm{Im}\, z = 0$ og hún er sögð vera *hrein þvertala* ef $\mathrm{Re}\, z = 0$.

Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \mathrm{Re}\, z$ og $y = \mathrm{Im}\, z$, þá nefnist talan $\bar{z} = x - iy$ *samok* tölunnar z. Athugið að $\bar{z}$ er spegilmynd z í raunásnum og því er $\bar{\bar{z}} = z$. Við höfum nokkrar reiknireglur um samok

$$\begin{aligned}
z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \\
z + \bar{z} &= 2x = 2\,\mathrm{Re}\ z, \\
z - \bar{z} &= 2iy = 2i\mathrm{Im}\ z. \\
\overline{z+w} &= \bar{z} + \bar{w} \\
\overline{z-w} &= \bar{z} - \bar{w} \\
\overline{zw} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\
\overline{z/w} &= \bar{z}/\bar{w} \\
|\bar{z}| &= |z|
\end{aligned}$$

Við höfum að z er rauntala þá og því aðeins að $z = \bar{z}$ og að z er hrein þvertala þá og því aðeins að $z = -\bar{z}$.

Lengd og stefnuhorn



Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \operatorname{Re} z$ og $y = \operatorname{Im} z$, þá nefnist talan

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

lengd, *tölugildi* eða *algildi* tvinntölunnar z. Ef $\theta \in \mathbb{R}$ og hægt er að skrifa tvinntöluna z á forminu

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

þá nefnist talan θ *stefnuhorn* eða *horngildi* tvinntölunnar z og stærðtáknið í hægri hliðinni nefnist *pólform tvinntölunnar* z. Hornaföllin cos og sin eru lotubundin með lotuna 2π og því eru allar tölur af gerðinni $\theta + 2\pi k$ með $k \in \mathbb{Z}$ einnig stefnuhorn fyrir z. Raðtvenndin $(|z|, \theta)$ er nefnd *pólhnit* eða *skauthnit* tölunnar z.

Við höfum að

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

og af því leiðir að hornið er gefið með formúlunni

$$\theta(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Athugið að það eru miklar takmarkanir á þessri formúlu, því hún gildir aðeins fyrir $x > 0$, því fallið arctan gefur okkur gildi á bilinu $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$.

Nú skulum við leiða út formúlu fyrir stefnuhorni tvinntölunnar z sem gefur okkur samfellt fall af z á $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ sem tekur gildi á bilinu $]-\pi, \pi[$. Þetta er gert úr frá formúlunni fyrir tangens af hálfu horni,

$$\begin{aligned}
\tan(\tfrac{1}{2}\theta) &= \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta)}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} = \frac{2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)}{2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\
&= \frac{|z|\sin\theta}{|z| + |z|\cos\theta} = \frac{y}{|z| + x}.
\end{aligned}$$

Formúlan sem við endum með er

$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{|z| + x}\right).$$

Þetta fall sem gefur okkur horngildið af tvinntölunni $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ á bilinu $]-\pi, \pi[$ nefnist *höfuðgrein hornsins* og er það táknað með $\operatorname{Arg} z$

Við höfum nokkrar reiknireglur um lengd tvinntalna,

$$\begin{aligned}
z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2, \\
|\bar{z}| &= |z|, \\
|zw| &= |z||w|.
\end{aligned}$$

Fyrsta jafnan gefur okkur formúlu fyrir margföldunarandhverfunni

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad z \neq 0.$$

Fjarlægð milli punkta

Fjarlægð milli tveggja punkta $z = x + iy$ og $w = u + iv$ er gefin með

$$|z - w| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Ef α og β eru tvinntölur og $\alpha \neq \beta$, þá er

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - \alpha| = |z - \beta|\}$$

mengi allra punkta z í $\mathbb{C}$ sem eru í sömu fjarlægð frá báðum punktum α og β. Það er augljóst að miðpunktur striksins $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ milli α og β er í fjarlægðinni $\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$ frá báðum punktum. Ef við drögum línuna gegnum miðpunktinn sem liggur hornrétt á strikið, þá fáum við mengi allra punkta sem eru í sömu fjarlægð frá α og β.

Innfeldi og krossfeldi

Innfeldi tveggja vigra $z = (x, y)$ og $w = (u, v)$ er skilgreint sem rauntalan $z{\cdot}w = xu + yv$. Ef við lítum á z og w sem tvinntölur og skrifum $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ og $w = u + iv = s(\cos\beta + i\sin\beta)$, þá fáum við formúluna

$$\operatorname{Re}\big(z\bar{w}\big) = \operatorname{Re}\big(\bar{z}w\big) = \tfrac{1}{2}\big(z\bar{w} + \bar{z}w\big) = xu + yv = (x, y)\cdot(u, v) = rs\cos(\alpha - \beta).$$

Þverhluti þessarar stærðar er *krossfeldi* z og w,

$$\operatorname{Im}\big(\bar{z}w\big) = -\operatorname{Im}\big(z\bar{w}\big) = xv - yu = \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = -rs\sin(\alpha - \beta)$$

en tölugildi þess $|\operatorname{Im}\big(z\bar{w}\big)|$ er flatarmál samsíðungsins, sem tölurnar z og w spanna.

Jafna línu og jafna hrings

Bein lína í $\mathbb{C}$ er gefin sem mengi allra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu af gerðinni

$$ax + by + c = 0.$$

Við getum greinilega snúið þessu yfir í jöfnuna

$$2\operatorname{Re}\big(\bar{\beta}z\big) + c = \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0,$$

þar sem $\beta = \frac{1}{2}(a + ib)$. Tvinntalan β er hornrétt á línuna og $i\beta$ er í stefnu hennar.

Hringur í $\mathbb{C}$ með miðju m og geisla r er mengi allra punkta z sem eru í fjarlægðinni r frá m, $|z - m| = r$. Við getum greinilega tjáð þessa jöfnu með jafngildum hætti,

$$|z - m|^2 - r^2 = (z - m)(\bar{z} - \bar{m}) - r^2 = |z|^2 - \bar{m}z - m\bar{z} + |m|^2 - r^2 = 0.$$

Við getum auðveldlega flokkað öll mengi sem gefin eru með jöfnu af gerðinni

$$\alpha|z|^2 + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0, \tag{1.2.1}$$

þar sem α og γ eru rauntölur og β er tvinntala.

Tilfellin eru:
(i) *Lína*: $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.
(ii) *Hringur*: $\alpha \neq 0$, $|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$. Ef miðjan er m og geislinn r, þá er

$$m = -\beta/\alpha \qquad \text{og} \qquad r = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}\,/|\alpha|.$$

(iii) *Einn punktur*: $\alpha \neq 0$ og $|\beta|^2 - \alpha\gamma = 0$. Punkturinn er $m = -\beta/\alpha$.
(iv) *Tóma mengið*: $\alpha \neq 0$, $|\beta|^2 - \alpha\gamma < 0$ eða $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$.
(v) *Allt planið* $\mathbb{C}$: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Einingarhringurinn

Einingarhringurinn $\mathbb{T}$ er hringurinn með miðju í 0 og geislann 1. Hann samanstendur af öllum tvinntölum með tölugildi 1. Sérhvert z í $\mathbb{T}$ má því skrifa á forminu $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Tökum nú aðra slíka tölu $w = \cos\beta + i\sin\beta$ og margföldum saman

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Í síðustu jöfnunni notuðum við samlagningarformúlur fyrir cos og sin

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Formúla de Movire

$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Rúmfræðileg túlkun á margföldun

Látum nú z og w vera tvær tvinntölur með lengdir $|z|$ og $|w|$ og stefnuhornin α og β. Þá fáum við

$$zw = |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big).$$

sem segir okkur að lengd margfeldisins sé margfeldi lengda z og w og að stefnuhorn margfeldisins sé summa stefnuhorna z og w.

Ef nú $u \in \mathbb{T}$ er tala á einingarhringnum með stefnuhornið β, þá er uz snúningur á z um hornið β.

Þríhyrningsójafnan

Tökum tvær tvinntölur z og w og reiknum smávegis

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2\end{aligned}$$

Athugum nú að

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \qquad \text{og} \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$$

Af fyrri ójöfnunni leiðir að

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.$$

Ef við tökum kvaðratrót beggja vegna ójöfnumerkisins, þá fáum við *þríhyrningsójöfnuna*

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Ef henni er beitt á liðina $z - w$ og w í stað z og w, þá fáum við $|z| = |(z-w) + w| \leq |z-w| + |w|$, svo $|z| - |w| \leq |z-w|$. Ef við skiptum á hlutverkum z og w, þá fæst $|w| - |z| \leq |w-z| = |z-w|$. Þessar tvær ójöfnu gefa okkur annað afbrigði af þríhyrningsójöfnunni

$$||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

1.3 Rætur

Látum nú w vera gefna tvinntölu og $n \geq 2$ vera náttúrlega tölu.

Tvinntala z kallast *n-ta rót* tvinntölunnar w ef hún uppfyllir jöfnuna $z^n = w$

Einingarrætur

Lítum á jöfnuna $z^n = 1$, þar sem $n \geq 2$ er náttúrleg tala.

Lausnir hennar nefnast *n-tu einingarrætur* eða *n-tu rætur af einum.* Ef z er lausn, þá er $1 = |z^n| = |z|^n$ sem segir okkur að $|z| = 1$ og að við getum skrifað $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Regla de Moivres segir nú að

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = z^n = 1$$

Talan 1 hefur horngildi $2\pi k$ þar sem $k \in \mathbb{Z}$ getur verið hvaða tala sem er og þessi jafna segir okkur því að $n\theta$ sé heiltölumargfeldi af 2π og þar með eru möguleg horngildi

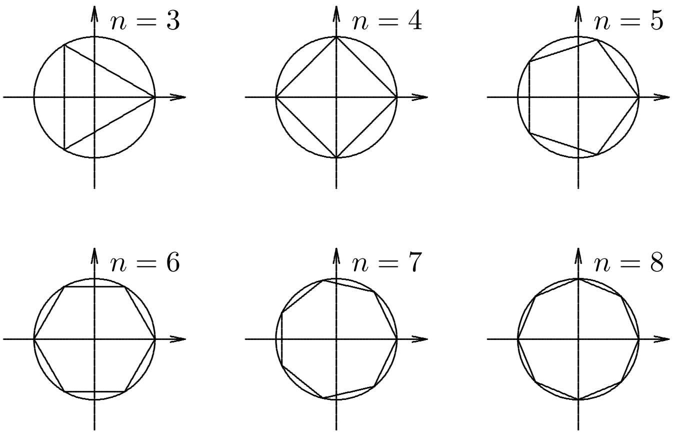
$$\theta = 2\pi k/n, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ef tvær heiltölur k_1 og k_2 hafa sama afgang við heiltöludeilingu með n, þá er $\cos(2\pi k_1/n) = \cos(2\pi k_2/n)$ og $\sin(2\pi k_1/n) = \sin(2\pi k_2/n)$. Þetta gefur okkur að jafnan $z^n = 1$ hefur n ólíkar lausnir $u_0, \dots, u_{n-1}$, sem nefnast *n-tu rætur af* 1 og eru gefnar með formúlunni

$$u_k = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Þessar tölur eru allar á einingarhringnum.

Athugið að $u_0 = 1$, $u_k = u_1^k$ fyrir $k = 0, \dots, n-1$, og að þær raða sér í hornin á reglulegum n-hyrningi, þar sem tvíhyrningur er strikið $[-1, 1]$.



Mynd: Einingarrætur

Útreikningur á n-tu rótum

Látum nú $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ vera gefna tvinntölu af lengd $s \geq 0$ og með stefnuhornið α og leitum að lausnum á jöfnunni $z^n = w$.

Ef z er slík lausn og u er n-ta einingarrót, þá er $(zu)^n = z^n u^n = z^n = w$ og því er zu einnig lausn. Nú eru einingarræturnar n talsins og þetta segir okkur að um leið og við finnum eina lausn z_0 þá fáum við n ólíkar lausnir $z_0 u$ með því að stinga inn öllum mögulegum n-tu rótum fyrir u.

Látum nú z_0 vera tvinntöluna, sem gefin er með formúlunni

$$z_0 = s^{\frac{1}{n}}\big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)$$

og færum hana síðan í n-ta veldi,

$$\begin{aligned} z_0^n &= \big(s^{\frac{1}{n}}\big)^n\big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)^n \\ &= s\big(\cos(n\alpha/n) + i\sin(n\alpha/n)\big) = w \end{aligned}$$

Þar með erum við komin með formúlu fyrir einni lausn.

Með því að nota formúluna fyrir n-tu einingarrótunum, þá fáum við upptalningu á öllum lausnum jöfnunnar $z^n = w = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

$$z_k = \varrho^{\frac{1}{n}}\big(\cos((\alpha + 2\pi k)/n) + i\sin((\alpha + 2\pi k)/n)\big), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Þessari formúlu má lýsa þannig að n-tu ræturnar eru fundnar þannig að fyrst er fundin ein rót z_0. Henni er snúið um hornið $2\pi/n$ með því að margfalda með u_1 yfir í $z_1 = u_1 z_0$. Næst er z_1 snúið um hornið $2\pi/n$ í $z_2 = u_1 z_1$ og þannig er haldið áfram þar til n ólíkar rætur eru fundnar.

Ferningsrætur

Ef w er tvinntala og z uppfyllir $z^2 = w$, þá er z sögð vera *ferningsrót* eða *kvaðratrót* tölunnar w.

Munið að ef w er jákvæð rauntala, þá táknar $\sqrt{w}$ alltaf jákvæðu rauntöluna töluna sem uppfyllir $(\sqrt{w})^2 = \alpha$. Að sjálfsögðu er $\sqrt{0} = 0$.

Ef $w \neq 0$ er tvinntala og w er ekki jákvæð rauntala, þá er hefur $\sqrt{w}$ enga staðlaða merkingu. Við vitum bara að w hefur tvær ferningsrætur z_0 og z_1. Ef við skrifum $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, þá gefa reikningar okkar hér að framan að við getum við tekið

$$z_0 = \sqrt{s}(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))$$

og

$$z_1 = \sqrt{s}(\cos(\alpha/2 + \pi) + i\sin(\alpha/2 + \pi)) = -z_0.$$

Ef $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv = w$, þá fæst með því að bera saman raun- og þverhluta í þessari jöfnu að formúlur $x^2 - y^2 = u$ og $2xy = v$.

Formúlan $|w| = |z^2| = |w|^2 = x^2 + y^2$ gefur okkur eina jöfnu til viðbótar og við getum leyst út x^2 og y^2,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w|, \\ x^2 - y^2 = u, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(|w| + u), \\ y^2 = \frac{1}{2}(|w| - u). \end{cases}$$

Við gáfum okkur að $x > 0$ og því er formerkið á y það sama og formerkið á $v = 2xy$.

Formerkisfallið sign er skilgreint með

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Ef $v \neq 0$, þá gefur þessi formúla okkur kost á að við skrifa lausina á einföldu formi

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + u)} + i\operatorname{sign}(v)\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - u)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re} w)} + i\operatorname{sign}(\operatorname{Im} w)\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re} w)}. \end{aligned}$$

Ef $v = 0$ og $u > 0$, þá er $w = u$ og við fáum jákvæðu rótina $z = \sqrt{w}$ út úr þessari formúlu.

1.4 Margliður

Margliða með tvinntölustuðlum er stærðtákn af gerðinni

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

þar sem $a_0, \ldots, a_n$ eru tvinntölur og z er breyta sem tekur gildi í tvinntölunum.

Við getum litið á P sem fall sem skilgreint er á $\mathbb{C}$ og tekur gildi í $\mathbb{C}$.

Núllmargliðan er margliðan sem hefur alla stuðla $a_j = 0$. Við táknum hana með 0. Stig margliðunnar $P \neq 0$ er skilgreint eins og áður sem stærsta heiltala j þannig að $a_j \neq 0$.

Margliðudeiling er alveg eins fyrir margliður með tvinntölustuðla og margliður með rauntölustuðla.

Ef P er margliða og Q er margliða af stigi m, þá eru til margliða R af stigi minna en m og margliða S, þannig að

$$P(z) = Q(z)S(z) + R(z)$$

Margliðan R nefnist þá *leif* eða *afgangur við deilingu á P með Q* og S nefnist *kvóti P og Q*. Við segjum að Q *deili* P eða að Q *gangi upp í* P ef R er núllmargliðan.

Þáttaregla

Ef $\alpha \in \mathbb{C}$, þá er $z - \alpha$ fyrsta stigs margliða og við fáum að leifin við deilingu á $P(z)$ með $(z - \alpha)$ verður fastamargliðan $P(\alpha)$,

$$P(z) = (z - \alpha)S(z) + P(\alpha).$$

Tvinntalan α er sögð vera *núllstöð* eða *rót* margliðunnar P ef $P(\alpha) = 0$.

Setning 1.4.1 (Þáttaregla) *Margliða P af stigi ≥ 1 hefur núllstöð α þá og því aðeins að $z - \alpha$ gangi upp í P.* □

Núllstöðvar annars stigs margliðu

Nú viljum við leysa jöfnuna $az^2 + bz + c = 0$ og ganga út frá því að stuðlarnir a, b og c séu tvinntölur og að $a \neq 0$.

Fyrsta skref er að deila báðum hliðum með a og fá þannig jafngilda jöfnu $z^2 + Bz + C = 0$, þar sem $B = b/a$ og $C = c/a$.

Næsta skref er að líta á tvo fyrstu liðina $z^2 + Bz$ og skrifa þá sem ferning að viðbættum fasta. Með orðinu ferningur er átt við fyrsta stigs stærðtákni í öðru veldi, $(z + \alpha)^2$. Ferningsreglan fyrir fyrir summu segir að $(z + \alpha)^2 = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2$. Því er

$$0 = z^2 + Bz + C = (z + \frac{B}{2})^2 - \frac{B^2}{4} + C.$$

Þetta segir okkur að upphaflega jafnan jafngildi

$$0 = (az^2 + bz + c)/a = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

Með því að draga töluna $-b^2/(4a^2) + c/a$ frá báðum hliðum, þá fáum við jafngilda jöfnu

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tvinntalan $D = b^2 - 4ac$ nefnist *aðgreinir* eða *aðskilja* jöfnunnar. Ef $D \neq 0$, þá hefur D tvær kvaðratrætur. Látum $\sqrt{D}$ tákna aðra þeirra. Þá er hin jöfn $-\sqrt{D}$ og við fáum tvær ólíkar lausnir

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Ef $D = 0$, fæst ein lausn

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

Ef D er rauntala og $D < 0$ þá getum við valið $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$ og lausnarformúlan verður

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Undirstöðusetning algebrunnar

Setning 1.4.2 *Sérhver margliða af stigi ≥ 1 með stuðlum í $\mathbb{C}$ hefur núllstöð í $\mathbb{C}$.* □

Segjum nú að P sé margliða af stigi $m \geq 1$ og að α_1 sé núllstöð hennar. Við getum þá skrifað

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z)$$

samkvæmt þáttareglunni. Þá er Q_1 af stigi $m - 1$ og samkvæmt undirstöðusetningunni hefur Q_1 núllstöð α_2 ef $m \geq 2$. Við þáttum Q_1 með $z - \alpha_2$ og fáum þannig

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2(z)$$

þar sem Q_2 er margliða af stigi $m - 2$.

Þessu er unnt að halda áfram þar til við endum með fullkomna þáttun á P í fyrsta stigs liði

$$P(z) = A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_m)$$

þar sem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ er upptalning á öllum núllstöðvum P með hugsanlegum endurtekningum og $A \neq 0$ er stuðullinn í veldið z^m í margliðunni P.

Ef α er núllstöð margliðu P og hægt er að þátta P í $P(z) = (z - \alpha)^j Q(z)$ þar sem Q er margliða og $Q(\alpha) \neq 0$ þá segjum við að α sé *j-föld núllstöð P* og köllum töluna j *margfeldni núllstöðvarinnar α í P.*

Ef P er af stigi m og $\beta_1, \dots, \beta_k$ er upptalning á ólíkum núllstöðvum margliðunnar P og þær hafa margfeldni $m_1, \dots, m_k$, þá getum við skrifað

$$P(z) = A(z - \beta_1)^{m_1} \cdots (z - \beta_k)^{m_k}$$

og

$$m = m_1 + \cdots + m_k.$$

Margliður með rauntölustuðla

Við lítum allaf á rauntölurnar sem hluta af tvinntölunum og því er sérhver margliða með rauntölustuðla jafnframt margliða með tvinntölustuðla.

Undirstöðusetning algebrunnar á því við um þessar margliður einnig.

Hugsum okkur nú að $P(z)$ sé margliða af stigi $m \geq 1$ með rauntölustuðla $a_0, \dots, a_m$ og að $\alpha \in \mathbb{C}$ sé núllstöð hennar og gerum ráð fyrir að α sé ekki rauntala. Með því að beita reiknireglunum fyrir samok og þá sérstaklega að $\bar{a}_j = a_j$, þá fáum við

$$0 = P(\alpha) = \overline{P(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k}\,\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} a_k (\overline{\alpha})^k = P(\bar{\alpha})$$

Við höfum því sýnt að $\bar{\alpha}$ er einnig núllstöð P. Við getum því þáttað út $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$ Athugum að

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - 2(\mathrm{Re}\ \alpha)z + |\alpha|^2$$

Nú beitum við þáttareglunni og sjáum að í þessu tilfelli fæst þáttun á $P(z)$ í tvær rauntalnamargliður

$$P(z) = \big(z^2 - 2(\mathrm{Re}\ \alpha)z + |\alpha|^2\big)Q(z).$$

Afleiður af margliðum

Tvíliðustuðlarnir eru dálítið fyrirferðarmiklir í útskrift svo við skulum tákna n yfir k með $c_{n,k}$. Við fáum þá

$$(z+h)^n = z^n + nz^{n-1}h + c_{n,2}z^{n-2}h^2 + \cdots + c_{n,n-2}z^{n-2}h^2 + nzh^{n-1} + h^n.$$

Við fáum því formúluna

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + c_{n,2}z^{n-2}h + \cdots + nzh^{n-2} + h^{n-1}.$$

Nú látum við h stefana á 0 og fáum

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right) = nz^{n-1}.$$

Við skilgreinum afleiðuna af einliðunni $z \mapsto z^n$ sem fallið $z \mapsto nz^{n-1}$ fyrir $n = 0, 1, 2, \dots$ og almennt skilgreinum við afleiðu af margliðu $P(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ með

$$P'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{P(z+h) - P(z)}{h} = \sum_{n=0}^{m} na_n z^{n-1}.$$

Það er enginn vandi að sýna fram á að venjulegu reiknireglurnar fyrir afleiður gildi,

$$(P+Q)'(z) = P'(z) + Q'(z)$$

og

$$(PQ)'(z) = P'(z)Q(z) + P(z)Q'(z).$$

1.5 Ræð föll

Rætt fall er kvóti tveggja margliða $R = P/Q$. Það er skilgreint í öllum punktum $z \in \mathbb{C}$ þar sem $Q(z) \neq 0$. Við skilgreinum afleiðuna af R með hliðstæðum hætti og fyrir margliður og fáum venjulega reiknireglu

$$R'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{R(z+h) - R(z)}{h} = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

Stofnbrotaliðun

Ef P og Q eru margliður, $Q \neq 0$ og $\text{stig}P \geq \text{stig}Q$, þá getum við alltaf framkvæmt deilingu með afgangi og fengið að

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \frac{P_2(z)}{Q(z)}$$

þar sem P_1 og P_2 eru margliður, $\text{stig}P_1 = \text{stig}P - \text{stig}Q$ og $\text{stig}P_2 < \text{stig}Q$.

Nú ætlum við að líta á rætt fall $R = P/Q$ þar sem P og Q eru margliður og $\text{stig}P < \text{stig}Q$. Þá er alltaf hægt að liða ræða fallið í stofnbrot.

Einfaldar núllstöðvar

Við gerum fyrst ráð fyrir því að að allar núllstöðvar Q séu einfaldar. Þá getum við skrifað

$$Q(z) = a(z - \alpha_1)\cdots(z - \alpha_m), \qquad z \in \mathbb{C},$$

þar sem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eru hinar ólíku núllstöðvar Q. Stofnbrotaliðun R er

$$R(z) = \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_m}{z - \alpha_m}.$$

Við munum sanna þessa formúlu í kafla 4. Nú þarf að reikna stuðlana $A_1, \dots, A_m$ út. Við athugum að

$$\lim_{z\to\alpha_1} (z - \alpha_1)R(z) = A_1 + \lim_{z\to\alpha_1} (z - \alpha_1)\left(\frac{A_2}{z - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_m}{z - \alpha_m}\right) = A_1.$$

Á hinn bóginn er $Q(\alpha_1) = 0$, svo

$$\lim_{z\to\alpha_1} (z - \alpha_1)R(z) = \lim_{z\to\alpha_1} \frac{(z - \alpha_1)P(z)}{Q(z) - Q(\alpha_1)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.$$

Ef við meðhöndlum hinar núllstöðvarnar með sama hætti, þá fáum við formúluna

$$A_j = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$

Við notum nú þáttunina á Q í fyrsta stigs liði til þess að reikna út afleiðuna af Q í α_j,

$$Q'(\alpha_j) = a \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m} (\alpha_j - \alpha_k).$$

Þessi formúla segir okkur að $Q'(\alpha_j)$ sé fundið með því að taka þáttunina á Q í fyrsta stigs liði, deila út þættinum $z-\alpha_j$ og stinga síðan inn α_j fyrir z. Í sumum tilfellum getur verið einfaldast að nota þessa formúlu til þess að reikna út gildin á afleiðum margliðunnar Q í núllstöðvunum.

Margfaldar núllstöðvar

Gerum nú ráð fyrir að Q hafi ólíkar núllstöðvar $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ af stigi $m_1, \dots, m_k$, og stig$Q = m = m_1 + \cdots + m_k$. Við getum þáttað út núllstöðina α_j með því að skrifa $Q(z) = (z-\alpha_j)^{m_j} q_j(z)$, þar sem q_j er margliða af stigi $m - m_j$ og $q_j(\alpha_j) \neq 0$. Stofnbrotaliðunin verður nú af gerðinni

$$
\begin{aligned}
\frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{A_{1,0}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{1,m_1-1}}{(z-\alpha_1)} \\
&+ \frac{A_{2,0}}{(z-\alpha_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{A_{2,m_2-1}}{(z-\alpha_2)} \\
&\quad\;\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{A_{k,0}}{(z-\alpha_k)} + \cdots + \frac{A_{k,m_k-1}}{(z-\alpha_k)^{m_k}}
\end{aligned} \tag{1.5.1}
$$

þar sem stuðlarnir eru gefnir með formúlunni

$$
A_{j,\ell} = \frac{1}{\ell!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell} \left(\frac{P(z)}{q_j(z)}\right)\Bigg|_{z=\alpha_j},
$$

fyrir $j = 1, \dots, k$ og $\ell = 0, \dots, m_k - 1$.

1.6 Veldisvísisfallið og skyld föll

Við höfum séð hvernig skilgreiningarmengi margliða er útvíkkað frá því að vera rauntalnaásinn $\mathbb{R}$ yfir í það að vera allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$. Þetta er hægt að gera á eðlilegan máta fyrir mörg föll sem skilgreind eru á hlutmengjum á rauntalnalínunni þannig að þau fái náttúrlegt skilgeiningarsvæði í $\mathbb{C}$.

Framlenging á veldisvísisfallinu

Veldisvísisfallið $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er andhverfa náttúrlega lograns sem skilgreindur er með heildinu

$$
\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0.
$$

Talan e er skilgreind með $e = \exp(1)$. Nú útvíkkum við skilgreiningarsvæði exp þannig að það verði allt $\mathbb{C}$ með formúlunni

$$
\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}
$$

Við skrifum $e^z = \exp z$ fyrir $z \in \mathbb{C}$.

Fyrst hornaföllin cos og sin eru lotubundin með lotuna 2π, þá fáum við beint út frá skilgreiningunni á veldisvísisfallinu að það er lotubundið með lotuna $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Jöfnur Eulers

Stingum nú hreinni þvertölu $i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ inn í veldisvísisfallið $e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{T}$. Þetta segir okkur að vörpunin $\theta \mapsto e^{i\theta}$ varpi rauntalnalínunni á einingarhringinn. Stillum nú upp tveimur jöfnum

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

Tökum nú summu af hægri hliðum og vinstri hliðum. Þá fæst $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Tökum síðan mismun af því sama. Þá fæst $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. Út úr þessu fæst samband milli veldisvísisfallsins og hornafallanna sem nefnt er *jöfnur Eulers*,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \text{og} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Samlagningarformúla veldisvísisfallsins

Munum að veldisvísisfallið $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, uppfyllir regluna $e^{a+b} = e^a e^b$ fyrir allar rauntölur a og b. Hún er nefnd *samlagningarformúla* eða *samlagningarregla* veldisvísisfallsins.

tökum tvær tvinntölur $z = x + iy$ og $w = u + iv$

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i\sin y)e^u(\cos v + i\sin v) \\ &= (e^x e^u)(\cos y + i\sin y)(\cos v + i\sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\ &= e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Þetta segir að samlagningarformúlan alhæfist

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Reglurnar um reikning með samoka tvinntölum gefa okkur

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

og síðan

$$|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{x+iy}e^{x-iy} = e^{2x}$$

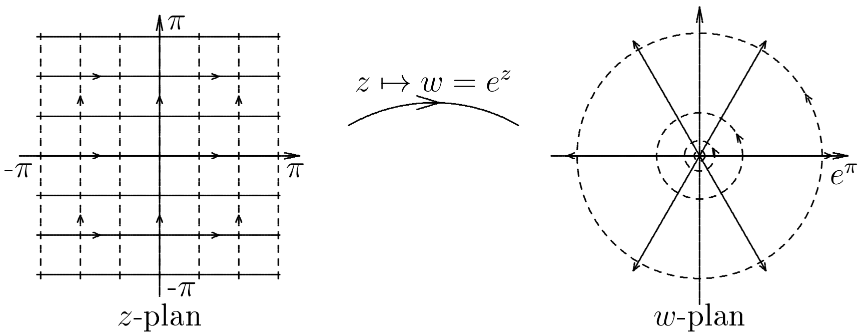
Þar með er

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

og sérstaklega gildir

$$|e^{iy}| = 1, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Af þessu leiðir að veldisvísisfallið hefur enga núllstöð $e^z = e^x e^{iy}$ og hvorugur þátturinn í hægri hliðinni getur verið núll. Við sjáum einnig að veldisvísisfallið varpar lóðréttu línunni sem gefin er með jöfnunni $x = \operatorname{Re} z = a$ í z-plani á hringinn sem gefinn er með jöfnununni $|w| = e^a$ í w-plani og það varpar láréttu línunni sem gefin er með jöfnunni $y = \operatorname{Im} z = b$ á hálflínuna út frá 0 með stefnuvigur e^{ib}.



Mynd: Veldisvísisfallið

Framlenging á hornaföllum og breiðbogaföllum

Um leið og við höfum framlengt veldisvísisfallið yfir á allt tvinntalnaplanið, þá framlengjast hornaföllin sjálfkrafa yfir á allt planið með Euler formúlunum,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \text{og} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

og sama er að segja um breiðbogaföllin

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Tilsvarandi tangens- og kótangens-föll eru skilgreind þar sem nefnararnir eru frábrugðnir 0

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{og} \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Gömlu góðu reglurnar gilda áfram, eins og til dæmis

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad \text{og} \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

sem gilda um öll $z \in \mathbb{C}$. Sama er að segja um allar samlagningarformúlurnar fyrir hornaföll og breiðbogaföll til dæmis

$$\cos(z - w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Nú kemur líka í ljós samband milli hornafallanna og breiðboga fallanna, því

$$\cosh z = \cos(iz) \qquad \text{og} \qquad \sinh z = -i \sin(iz)$$

gildir um öll $z \in \mathbb{Z}$.

1.7 Varpanir á tvinntöluplaninu

Í þessum kafla ætlum við að fjalla um föll $f : X \to \mathbb{C}$, sem skilgreind eru á hlutmengi X í $\mathbb{C}$ og taka gildi í $\mathbb{C}$. Til þess að einfalda útreikninga okkar, þá skiptum við frjálslega milli tvinntalnarithháttar og vigurrithháttar á punktum $z \in X$. Þannig skrifum við

$$z = x + iy = re^{i\theta} = (x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

og segjum að z hafi *raunhlutann* x, *þverhlutann* y, *lengdina* r og *horngildið* θ.

Hér er $x + iy$ tvinntöluframsetning á z í rétthyrndum hnitum, $re^{i\theta}$ framsetning í pólhnitum, (x, y) er línuvigurframsetning á z og $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ er dálkvigurframsetning á z. Með þessu erum við að líta framhjá þeim greinarmun sem gerður er á vigrunum $(1, 0)$ og $(0, 1)$ annars vegar og tvinntölunum 1 og i hins vegar.

Fallgildið $f(z)$ skrifum við ýmist sem $f(x + iy)$ eða $f(x, y)$.

Við getum skrifað $f = u+iv$, þar sem $u = \operatorname{Re} f$ er raunhluti f og $v = \operatorname{Im} f$ er þverhluti f. Við horfum oft framhjá þeim greinarmun sem gerður er á $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{C}$ og skrifum þá vigra ýmist sem línu- eða dálkvigra. Þannig getum við skrifað

$$f(z) = u(z) + iv(z) = (u(x, y), v(x, y)) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad z = x + iy = (x, y).$$

Línulegar varpanir

Við skulum byrja á því að skoða *línulegar varpanir*, en það eru föll af gerðinni $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sem uppfylla

$$L(z + w) = L(z) + L(w) \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

og

$$L(cz) = cL(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ef við lítum á L sem vörpun $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, þá vitum við að hægt er að skrifa hana sem

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy),$$

þar sem a, b, c og d eru rauntölur. Við getum líka lýst vörpuninni L með fylkjamargföldun sem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Þá nefnist 2×2 fylkið sem hér stendur *fylki vörpunarinnar L miðað við staðalgrunninn á $\mathbb{R}^2$*

Nú skulum við snúa þessum framsetningum yfir í tvinntalnaframsetningu. Eins og við höfum áður rifjað upp þá svarar tvinntalan 1 til vigursins $(1, 0)$ og tvinntalan i svarar til vigursins $(0, 1)$. Við skrifum því $L(1)$ í stað $L(1, 0)$ og $L(i)$ í stað $L(0, 1)$. Við fáum þá $L(1) = (a, c) = a + ic$ og $L(i) = (b, d) = b + id$ og þar með

$$L(z) = L(x + iy) = xL(1) + yL(i).$$

Nú notfærum við okkur að $x = (z+\bar{z})/2$ og $y = -i(z-\bar{z})/2$ og fáum formúluna

$$L(z) = Az + B\bar{z},$$

þar sem

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\big(L(1) - iL(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big((a+ic) - i(b+id)\big), \\ B &= \tfrac{1}{2}\big(L(1) + iL(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big((a+ic) + i(b+id)\big). \end{aligned}$$

Niðurstaða útreikninga okkar er:

Setning 1.7.1 *Sérhverja línulega vörpun $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má setja fram sem $L(z) = Az + B\bar{z}$, þar sem stuðlarnir A og B eru tvinntölur. Ef*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er fylki L miðað við staðalgrunninn á $\mathbb{R}^2$, þá er

$$A = \tfrac{1}{2}((a+d) + i(c-b)) \qquad \text{og} \qquad B = \tfrac{1}{2}((a-d) + i(c+b))$$

□

Hugsum okkur næst að við þekkjum stuðlana A og B og að við viljum ákvarða stuðlana a, b, c og d í fylki vörpunarinnar út frá þeim. Sambandið þarna á milli er

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re}\big(L(1)\big) = \operatorname{Re}\big(A+B\big), \\ b &= \operatorname{Re}\big(L(i)\big) = \operatorname{Re}\big(i(A-B)\big) = -\operatorname{Im}\big(A-B\big), \\ c &= \operatorname{Im}\big(L(1)\big) = \operatorname{Im}\big(A+B\big), \\ d &= \operatorname{Im}\big(L(i)\big) = \operatorname{Im}\big(i(A-B)\big) = \operatorname{Re}\big(A-B\big). \end{aligned}$$

Í tvinnfallagreiningu þarf oft að gera greinarmun á $\mathbb{R}$-*línulegum* vörpunum, en það eru nákvæmlega þær línulegu varpanir sem við höfum verið að fjalla um, og $\mathbb{C}$-*línulegum* vörpunum, en þær uppfylla

$$L(z+w) = L(z) + L(w) \quad \text{og} \quad L(cz) = cL(z), \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Það er greinilegt að sérhver $\mathbb{C}$-línuleg vörpun er $\mathbb{R}$-línuleg, því ef seinna skilyrðið gildir um sérhverja tvinntölu, þá gildir það sérstaklega um sérhverja rauntölu. Það er einnig augljóst að sérhver vörpun af gerðinni $L(z) = Az$ þar sem A er gefin tvinntala er $\mathbb{C}$-línuleg.

Hugsum okkur nú að L sé $\mathbb{C}$-línuleg og skrifum $L(z) = Az + B\bar{z}$ eins og lýst er hér að framan. Þá er $L(i) = iL(1)$ og því er

$$B = \tfrac{1}{2}\big(L(1) + iL(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big(L(1) + i^2L(1)\big) = 0,$$

svo $L(z) = Az$. Niðustaðan er því

Setning 1.7.2 *Sérhver $\mathbb{C}$-línuleg vörpun $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er af gerðinni*

$$L(z) = Az, \qquad z \in \mathbb{C},$$

þar sem A er tvinntala. □

Myndræn framsetning á vörpunum

Til þess að lýsa hegðun raungildra falla á myndrænan hátt, þá teiknum við upp gröf þeirra. Graf tvinngilda fallsins $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{C}$, er hlutmengið í $\mathbb{C}^2$ sem skilgreint er með

$$\operatorname{graf} f = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2; z \in X\}.$$

Nú er $\mathbb{C}^2$ fjórvítt rúm yfir $\mathbb{R}$, en rúmskynjun flestra manna takmarkast við þrjár víddir, svo við getum ekki teiknað upp myndir af gröfum tvinnfalla. Við getum vissulega teiknað upp gröf raungildu fallanna $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ í þrívíðu rúmi og gert okkur hugmynd um $\operatorname{graf} f$ út frá þeim, en það hefur takmarkaða þýðingu. Til þess að lýsa tvinnföllum á myndrænan hátt er því oft brugðið á það ráð að skoða hvernig þau færa til punktana í $\mathbb{C}$ og lýsa á mynd afstöðunni millli z og $f(z)$. Vert er að geta þess að í þessu samhengi eru orðin *vörpun*, *færsla*, *ummyndun* o.fl. oft notuð sem samheiti fyrir orðið fall. Við skulum nú taka nokkur dæmi um þetta

Vörpun $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ af gerðinni $z \mapsto z + a$, þar sem $a \in \mathbb{C}$ nefnist *hliðrun.*

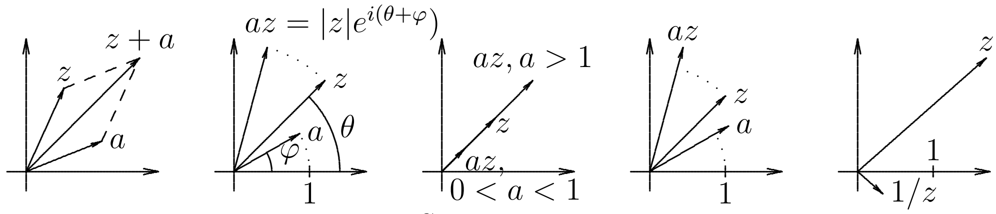
Vörpun af gerðinni $z \mapsto az$, nefnist *snúningur*, ef $a \in \mathbb{C}$ og $|a| = 1$,

hún nefnist *stríkkun* ef $a \in \mathbb{R}$ og $|a| > 1$ og

herping, ef $a \in \mathbb{R}$ og $|a| < 1$,

en almennt nefnist hún *snústríkkun* ef $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vörpunin $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto 1/z$ nefnist *umhverfing.*



Hliðrun | Snúningur | Stríkkun og herping | Snústríkkun | Umhverfing

Brotnar línulegar varpanir

Hliðranir, snústríkkanir og umhverfing eru hluti af almennum flokki varpana, en fall af gerðinni

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

kallast *brotin línuleg vörpun*, *brotin línuleg færsla* eða *Möbiusarvörpun.*

Við sjáum að $f(z)$ er skilgreint fyrir öll $z \in \mathbb{C}$, ef $c = 0$, en fyrir öll $z \neq -d/c$, ef $c \neq 0$.

Eðlilegt er að útvíkka skilgreningarsvæði með því að bæta einum punkti, *óendanleikapunkti* ∞, við planið $\mathbb{C}$ og skilgreina þannig *útvíkkaða talnaplanið*

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Þá getum við litið á f sem vörpun

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

með því að setja

$$\begin{gathered} f(\infty) = \infty, \qquad \text{ef} \quad c = 0, \qquad \text{en} \\ f(-d/c) = \infty \quad \text{og} \quad f(\infty) = \lim_{|z|\to+\infty} f(z) = a/c, \qquad \text{ef} \quad c \neq 0. \end{gathered}$$

Með þessari viðbót verður f gagntæk vörpun. Andhverfuna $f^{[-1]}$ er létt að reikna út, því

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

og það segir okkur að varpanirnar

$$f^{[-1]}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Ef við stillum stuðlum vörpunarinnar f upp í fylkið

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

þá eru stuðlar andhverfunnar $f^{[-1]}$ lesnir út úr andhverfa fylkinu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Athugið að ákveðan $ad - bc$ styttist þegar brotið er myndað.

Ef f_1 og f_2 eru tvær brotnar línulegar varpanir, þá er samskeyting þeirra f_3, $f_1 \circ f_2 = f_3$, einnig brotin línuleg vörpun. Ef

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{og} \quad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \quad \text{þá er} \quad f_3(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3},$$

þar sem stuðlarnir a_3, b_3, c_3 og d_3 fást með fylkjamargföldun,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Það er ljóst að hliðranir, snústríkkanir og umhvernig eru brotnar línulegar varpanir og þar af leiðandi eru allar samskeytingar af vörpunum af þessum þremur mismunandi gerðum einnig brotnar línulegar varpanir.

Í ljós kemur að sérhver brotin línuleg vörpun er samskeyting af hliðrunum, snústríkkunum og umhverfingu. Til þess að sjá þetta athugum við fyrst tilfellið $c = 0$, en þá er

$$f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d},$$

samsett úr snústríkkun og hliðrun. Ef $c \neq 0$, þá getum við skrifað

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{az+b}{z+d/c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a(z+d/c) - ad/c + b}{z+d/c} = \frac{a}{c} + \frac{-ad/c+b}{cz+d},$$

og sjáum að f er samsett úr snústríkkun,

$$z \mapsto cz = z_1,$$

hliðrun

$$z_1 \mapsto z_1 + d = cz + d = z_2,$$

umhverfingu

$$z_2 \mapsto 1/z_2 = \frac{1}{cz+d} = z_3,$$

snústríkkun

$$z_3 \mapsto (-ad/c + b)z_3 = \frac{-ad/c+b}{cz+d} = z_4$$

og hliðrun

$$z_4 \mapsto z_4 + a/c = a/c + \frac{-ad/c+b}{cz+d}.$$

Fastapunktar

Ef $F : M \to M$ er vörpun á einhverju mengi M, þá nefnist $p \in M$ *fastapunktur* vörpunarinnar F ef $F(p) = p$. Allir punktar í M eru fastapunktar *samsemdarvörpunarinnar* $x \mapsto x$.

Nú látum við M vera útvíkkaða talnaplanið $\widehat{\mathbb{C}}$ og f vera brotna línulega vörpun á $\widehat{\mathbb{C}}$, sem gefin er með

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ef $c = 0$, þá er $f(\infty) = \infty$ svo punkturinn ∞ er fastapunktur í þessu tilfelli. Gerum nú ráð fyrir að $p \in \mathbb{C}$ sé fastapunktur. Þá fullnægir p jöfnunni

$$\frac{a}{d}p + \frac{b}{d} = p$$

sem jafngildir

$$(a-d)p = -b.$$

Ef $a = d$, þá er f vörpunin $z \mapsto z + b/d$, en þessi vörpun hefur fastapunkt aðeins ef $b = 0$ og þá er hún samsemdarvörpunin. Ef $a \neq d$, þá fæst nákvæmlega einn fastapunktur til viðbótar við ∞ og hann er gefinn með

$$p = \frac{-b}{a-d}.$$

Þá höfum við afgreitt tilfellið $c = 0$. Gerum því ráð fyrir að $c \neq 0$. Þá eru ∞ og $-d/c$ ekki fastapunktar, svo fastapunktarnir p uppfylla

$$\frac{ap+b}{cp+d} = p,$$

sem jafngildir því að p uppfylli annars stigs jöfnu,

$$cp^2 + (d-a)p - b = 0.$$

Hún hefur í mesta lagi tvær lausnir. Niðurstaða okkar er því:

Setning 1.7.3 *Brotin línuleg vörpun, sem er ekki samsemdarvörpunin $z \mapsto z$, hefur í mesta lagi tvo fastapunkta.* □

Þriggja punkta reglan

Látum nú z_1, z_2 og z_3 vera þrjá ólíka punkta í $\mathbb{C}$ og lítum á brotnu línulegu vörpunina

$$f(z) = \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} \cdot \frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}.$$

Við fáum þá að $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ og $f(z_3) = \infty$. Það er hægt að alhæfa skilgreininguna þannig að einn punktanna z_1, z_2 eða z_3 megi vera ∞. Þá tökum við bara markgildi $|z_j| \to +\infty$ í hægri hliðinni.

Ef $z_1 = \infty$, þá skilgreinum við

$$f(z) = \lim_{|\tilde{z}_1| \to +\infty} \frac{(z-\tilde{z}_1)}{(z-z_3)} \cdot \frac{(z_2-z_3)}{(z_2-\tilde{z}_1)} = \frac{(z_2-z_3)}{(z-z_3)}.$$

Það er ljóst að hægri hliðin skilgreinir vörpun með $f(\infty) = 0$, $f(z_2) = 1$ og $f(z_3) = \infty$. Ef $z_2 = \infty$, þá setjum við

$$f(z) = \lim_{|\tilde{z}_2| \to +\infty} \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} \cdot \frac{(\tilde{z}_2-z_3)}{(\tilde{z}_2-z_1)} = \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}.$$

og út kemur vörpun sem uppfyllir $f(z_1) = 0$, $f(\infty) = 1$ og $f(z_3) = \infty$. Ef við viljum að $z_3 = \infty$, þá setjum við

$$f(z) = \lim_{|\tilde{z}_3| \to +\infty} \frac{(z-z_1)}{(z-\tilde{z}_3)} \cdot \frac{(z_2-\tilde{z}_3)}{(z_2-z_1)} = \frac{(z-z_1)}{(z_2-z_1)}.$$

og við höfum $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ og $f(\infty) = \infty$.

Látum nú z_1, z_2 og z_3 vera ólíka punkta í $\widehat{\mathbb{C}}$ og setjum

$$f(z) = \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} \cdot \frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}.$$

Niðurstaðan af því að taka markgildin þrjú hér að framan er sú að við eigum að skipta út svigum sem innihalda z_j og tölunni 1, ef $z_j = \infty$. Í öllum tilfellum varpast z_1 á 0, z_2 á 1 og z_3 á ∞.

Nú skulum við breyta til og taka einhverja þrjá ólíka punkta w_1, w_2 og w_3 í $\widehat{\mathbb{C}}$ í staðinn fyrir punktana 0, 1 og ∞ og spyrja okkur hvernig við finnum brotna línulega vörpun sem uppfyllir $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ og $f(z_3) = w_3$.

Þetta er leyst þannig að við finnum fyrst tvær brotnar línulegar varpanir F og G með forskriftinni hér að framan sem uppfylla $F(w_1) = 0$, $F(w_2) = 1$, $F(w_3) = \infty$, $G(z_1) = 0$, $G(z_2) = 1$ og $G(z_3) = \infty$. Þá uppfyllir samskeytingin

$$f(z) = F^{-1} \circ G(z)$$

skilyrðin $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ og $f(z_3) = w_3$.

Hugsum okkur nú að g sé önnur brotin línuleg vörpun sem uppfyllir $g(z_1) = w_1$, $g(z_2) = w_2$ og $g(z_3) = w_3$. Þá hefur vörpunin $f^{-1} \circ g(z)$ þrjá fastapunkta z_1, z_2 og z_3. Setning 1.7.3 segir nú að $f^{-1} \circ g(z) = z$ fyrir öll $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ og þar með er $f(z) = g(z)$ fyrir öll $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Niðurstaðan er því:

Setning 1.7.4 (*Þriggja punkta reglan*) *Ef gefnir eru þrír ólíkir punktar z_1, z_2 og z_3 í $\widehat{\mathbb{C}}$ og þrír ólíkir punktar w_1, w_2 og w_3 í $\widehat{\mathbb{C}}$, þá er til nákvæmlega ein brotin línuleg vörpun f sem varpar z_1 á w_1, z_2 á w_2 og z_3 á w_3. Hún er gefin með formúlunni $f = F^{-1} \circ G$ þar sem*

$$F(w) = \frac{(w - w_1)}{(w - w_3)} \cdot \frac{(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)} \quad \text{og} \quad G(z) = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}.$$

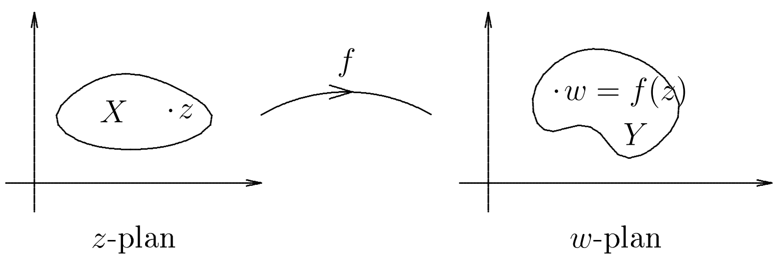
Þetta má einnig orða þannig að fallgildin $w = f(z)$ eru leyst úr úr jöfnunni

$$\frac{(w - w_1)}{(w - w_3)} \cdot \frac{(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}.$$

Þessi stærðtákn á að túlka þannig að ef $z_j = \infty$ eða $w_k = \infty$ kemur fyrir innan einhverra sviga, þá á að skipta þættinum sem inniheldur z_j eða w_k út fyrir töluna 1. □

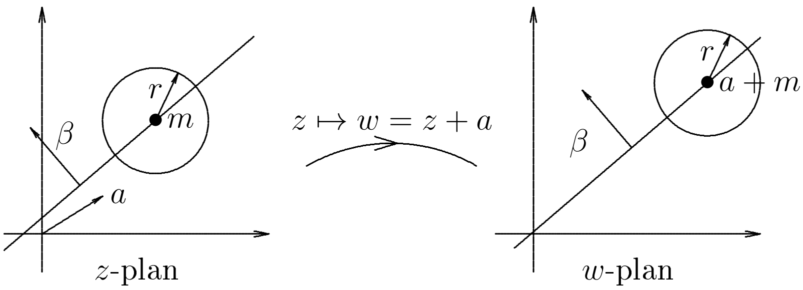
Myndir af línum og hringum

Ein leið til þess að setja tvinngild föll $f : X \to \mathbb{C}$ fram á myndrænan hátt er að líta á þau sem varpanir sem taka punkta í einu afriti af tvinntöluplaninu $\mathbb{C}$ yfir í annað afrit. Þá er X teiknað upp í z-plani og myndmengið $Y = \{w = f(z); z \in X\}$ teiknað upp í w-plani og síðan er sýnt hvernig f varpar punktum $z \in X$ á punkta $w = f(z) \in Y$. Oft er litið á einhverja fjölskyldu af ferlum í X og sýnt hvernig hún varpast yfir í Y.



Mynd: Varpanir

Hliðrun $z \mapsto z + a$ varpar línu gegnum punktinn m með þvervigur β á línuna gegnum $m + a$ með þvervigur β og hún varpar hring með miðju m og geislann r á hring með miðju $m + a$ og geislann r.

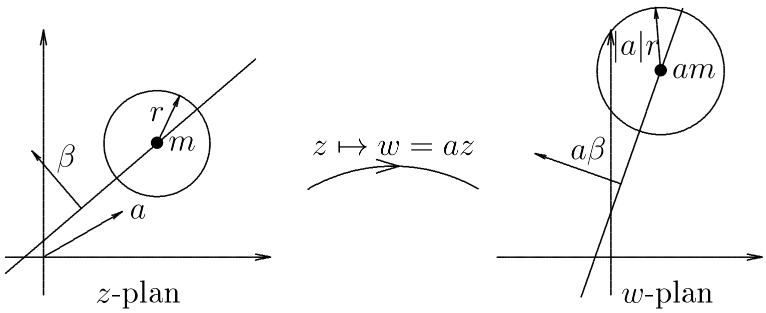


Mynd: Hliðrun

Snústríkkun $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, varpar línu gegnum punktinn m með þvervigur β á línuna gegnum am með þvervigur $a\beta$.

Til þess að sjá þetta athugum við að jafna línunnar er af gerðinni $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$ og ef við stingum $z = w/a$, þar sem $w = az$ er myndpunktur z, inn í þessa jöfnu, þá sjáum við að w verður að uppfylla $(\bar{\beta}/a)w + (\beta/\bar{a})\bar{w} + c = 0$ og þar með $\bar{a}\bar{\beta}w + a\beta\bar{w} + c|a|^2 = 0$.

Snústríkkun varpar hring með miðju í m og geislann r á hring með miðju í am og geislann $|a|r$.



Mynd: Snústríkkun

Umhverfing er gefin með $z \mapsto 1/z$, $0 \to \infty$, $\infty \to 0$. Til þess að sjá hvernig hún varpar hringum og línum, þá lítum við á mengi allra punkta z sem gefnir eru með formúlunni

$$\alpha|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \tag{1.7.1}$$

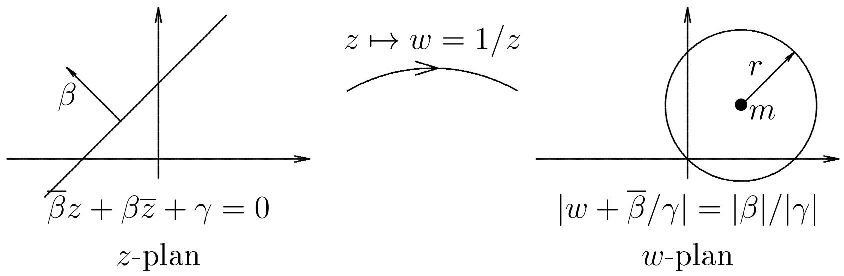
en við höfum lýst öllum þeim mengjum sem svona jafna skilgreinir.

Við stingum myndpunktinum w, en hann uppfyllir $z = 1/w$, inn í þessa jöfnu og fáum að hann verður að uppfylla

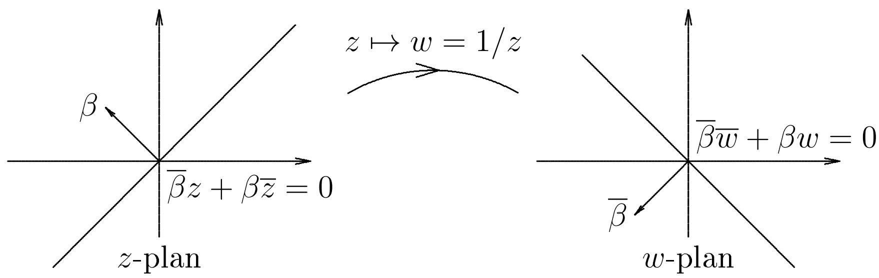
$$\gamma|w|^2 + \beta w + \bar{\beta}\bar{w} + \alpha = 0. \tag{1.7.2}$$

Ef (1.7.1) er jafna línu gegnum 0 með þvervigur β, þá er $\alpha = \gamma = 0$ og við fáum að w liggur á línu gegnum 0 með þvervigur $\bar{\beta}$.

Ef (1.7.1) er jafna línu sem fer ekki gegnum 0 og hefur þvervigur β, þá er $\alpha = 0$ og $\gamma \neq 0$. Við fáum því að myndmengið er hringur með miðju $m = -\bar{\beta}/\gamma$ og geislann $r = |\beta|/|\gamma|$.



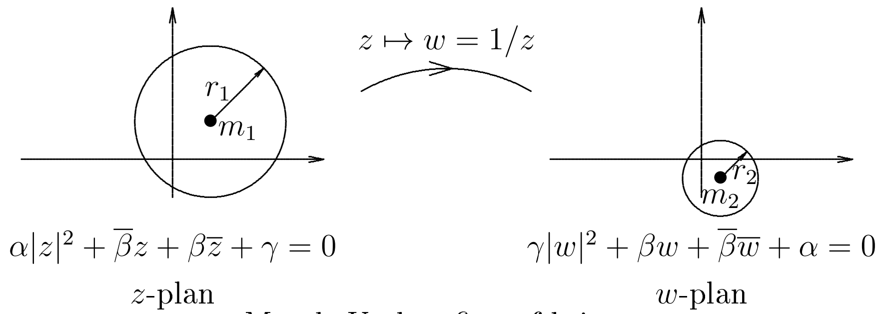
Mynd: Umhverfing af línu.



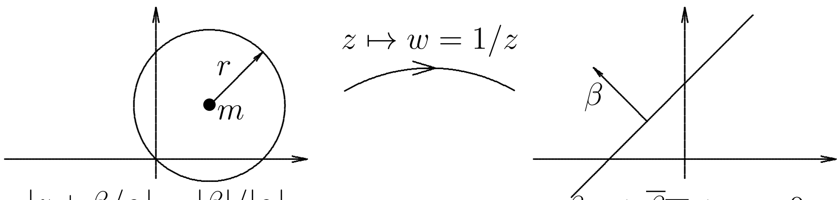
Mynd: Umhverfing af línu.

Ef (1.7.1) er jafna hrings gegnum 0, þá er $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$, miðjan er $m = -\beta/\alpha$ og geislinn er $r = |\beta|/|\alpha|$. Athugum að punkturinn $-2\beta/\alpha$ er á hringnum og því er myndmengi hans línan með þvervigur $\bar{\beta}$ gegnum punktinn $-\alpha/2\beta = -\alpha\bar{\beta}/2|\beta|^2$.

Ef (1.7.1) er jafna hrings, sem inniheldur ekki 0, þá er $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, miðjan er $m = -\beta/\alpha$ og geislinn er $r = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}\,/|\alpha|$. Myndmengið er hringur með miðju $-\bar{\beta}/\gamma$ og geislann $\sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}\,/|\gamma|$.



Mynd: Umhverfing af hring.



Mynd: Umhverfing af hring.

Eins og við höfum séð, þá er sérhver brotin línuleg vörpun samsett úr hliðrunum, snústríkkunum og umhverfingu, svo niðurstaða útreikninga okkar er:

Setning 1.7.5 *Sérhver brotin línuleg vörpun varpar hring í $\mathbb{C}$ á hring eða línu og hún varpar línu á hring eða línu.* $\square$