Tvinnfallagreining, afleiðujöfnur, Fourier-greining og hlutafleiðujöfnur

Ragnar Sigurðsson

Verkfræði og -náttúruvísindasvið
Háskóla Íslands
Handrit frá janúar 2017

Formáli

Þær megingreinar stærðfræðinnar sem taldar eru upp í titli þessarar bókar eiga sér ótal hagnýtingar í raunvísindum og verkfræði. Þær eru því eðlilegur hluti af þeirri stærðfræði sem nemendur í þessum fögum þurfa að hafa á valdi sínu.

Þetta handrit er kennsluefni í námskeiðanna Stærðfræðigreining III og IV við Háskóla Íslands og koma vonandi að nemendum í Stærðfræðigreiningu IIIA og Tvinnfallagreiningu I einnig að gagni. Ég byrjaði á þessu viðfangsefni þegar ég kenndi stærðfræðigreiningar III og IV á árunum 1991-4, en þá skrifaði ég tvær bækur og gaf út hjá Háskólaútgáfunni. Ég hef endurskoðað bækurnar nokkrum sinnum, ýmist fellt niður eða bætt við efni þeirra.

Allt frá upphafi hafa nokkrir samkennarar mínir sýnt þessu verki mínu áhuga, nýtt sér það við kennslu og komið með góðar ábendingar um margt sem mátti betur fara. Einn þeirra var Kjartan G. Magnússon, sem lést langt fyrir aldur fram árið 2006 og er enn sárt saknað. Aðrir eru Sven Þ. Sigurðsson, Þorvaldur Búason, Rögnvaldur G. Möller, Stefán Ingi Valdimarsson, Birgir Hrafnkelsson og Auðunn Skúta Snæbjarnarson. Ég naut einnig aðstoðar nokkurra nemenda minna við ritvinnslu og myndasmíð. Meðal þeirra eru Kristinn Johnsen, Frosti Pétursson og Hersir Sigurgeirsson. Sonur minn Björgvin tók að sér ritvinnsluverkefni fyrir mig á unglingsárum sínum og það kom honum vonandi að gangi þegar hann las bókina á háskólaárum sínum. Ég þakka öllum þessum góðu mönnum fyrir aðstoð og hvatningu. Almanakssjóður og Kennslumálasjóður veittu mér styrki fyrir launum aðstoðarmanna og er ég ákaflega þakklátur fyrir þá. Ég þakka öllum nemendum mínum sem lögðu eitthvað af mörkum, bæði stórt og smátt, til þess að bæta efnið.

Þetta efni er enn í deiglunni hjá mér og svo verður líklega meðan ég hef ánægju af að skrifa um það og finnst að ég geti gert betur. Allar ábendinga um endurbætur eru vel þegnar.

Háskóla Íslands

19. janúar 2017

Ragnar Sigurðsson
ragnar@hi.is

Efnisyfirlit

Kafli 1

TVINNTÖLUR

1.1 Talnakerfin

Náttúrlegar tölur

Tölurnar $1, 2, 3, 4, \ldots$ mynda mengi náttúrlegra talna sem við táknum með $\mathbb{N}$. Á þessu mengi höfum við skilgreindar tvær aðgerðir, *samlagningu* og *margföldun*, þannig að fyrir sérhvert par (a, b) af náttúrlegum tölum a og b er úthlutað nákvæmlega einni tölu $a + b$ sem nefnist *summa* a og b og annarri tölu ab sem nefnist *margfeldi* a og b. Við táknum margfeldið einnig með $a \cdot b$. Um þessar aðgerðir gilda nokkrar reiknireglur

$(a+b)+c = a+(b+c)$	*tengiregla fyrir samlagningu*
$(ab)c = a(bc)$	*tengiregla fyrir margföldun*
$a+b = b+a$	*víxlregla fyrir samlagningu*
$ab = ba$	*víxlregla fyrir margföldun*
$a(b+c) = ab+ac$	*dreifiregla*
$1a = a$	1 *er margföldunarhlutleysa*

Við höfum *röðun* þannig að um sérhverjar tvær tölur a og b gildir eitt af þrennu: a *er minni en* b, táknað $a < b$, a *er jafnt og* b, táknað $a = b$ eða a *er stærra en* b, táknað $a > b$. Þetta er skilgreint þannig að a er sagt vera *minna en* b, ef til er náttúrleg tala c þannig að $a + c = b$, og a er sagt vera *stærra en* b, ef b er minni en a.

Um röðun *náttúrlegra talna* gilda tvær mikilvægar reglur

ef $a < b$ þá er $a + c < b + c$	*röðun er óbreytt við samlagningu*
ef $a < b$ þá er $ac < bc$	*röðun er óbreytt við margföldun*

Ef $a < b$ og $a + c = b$, þá nefnist talan c *mismunur* b og a, táknað $c = b - a$. Aðgerðin að finna mismun nefnist *frádráttur*.

Náttúrleg tala $a \in \mathbb{N}$ er sögð vera *deilanleg* með tölunni $b \in \mathbb{N}$ ef til er $c \in \mathbb{N}$ þannig að $a = bc$. Allar tölur a eru deilanlegar með 1 og sjálfri sér, því $a = 1 \cdot a$. Þær nátturlegu tölur ≥ 2 sem aðeins eru deilanlegar með 1 og sjálfri sér nefnast *frumtölur* (*prímtölur*). Fyrstu frumtölurnar eru

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$$

Sérhverja náttúrlega tölu $a \geq 2$ má skrifa sem margfeldi frumtalna

$$a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_m$$

þar sem sumar frumtölur p_j geta verið endurteknar og í þessari framsetningu hafa frumtölurnar sjálfar aðeins einn þátt. Sem dæmi getum við tekið

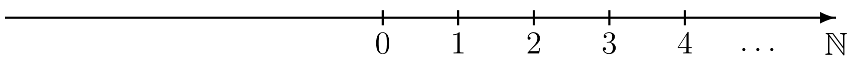
$$7 = 7, \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3, \quad 250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3.$$

Þáttun á náttúrlegum tölum í frumtölur nefnist *frumþáttun*.

Til þess að gera okkur mynd af náttúrlegu tölunum þurfum við fyrst að bæta *núlli* 0 við talnakerfið. Við setjum $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ og útvíkkum reikniaðgerðirnar. Allar reiknireglurnar gilda áfram og við fáum eina reglu til viðbótar:

$$0 + a = a + 0 = a \quad 0 \textit{ er samlagningarhlutleysa}$$

Fyrri röðurnareglan gildir áfram en sú síðari aðeins ef $c \neq 0$.



Til þess að gera okkur mynd af náttúrlegu tölunum veljum við okkur viðmiðunarpunkt á beinni línu og setjum 0 í hann. Síðan veljum við einingarlengd á línunni og mörkum punkt til hægri við 0 í einingarfjarlægð og táknum hann með 1. Síðan eru haldið áfram eins og myndin sýnir. Þá höfum við að $a < b$ ef og aðeins ef b er hægra megin við a á talnalínunni. Nú er hægt að lýsa reikningsaðgerðunum á $\mathbb{N}_0$ sem færslum á talnalínunni.

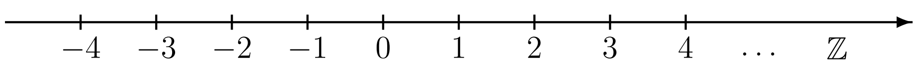
Heilar tölur

Reikningur með náttúrlegar tölur er ófullkominn meðal annars vegna þess að ekki er alltaf hægt að framkvæma *frádrátt* þ.e.a.s. að finna náttúrlega tölu x þannig að $a = b + x$. Þetta er aðeins hægt ef $a > b$. Talan x nefnist þá mismunur a og b og er táknuð með $a - b$.

Til þess að ráða bót á þessu er talnakerfið stækkað þannig að bætt er við tölunni 0, sem nefnist *núll*, og síðan er bætt við tölunum $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Þetta stækkaða kerfi nefnist *heilar tölur* og er táknað með $\mathbb{Z}$.

Á $\mathbb{Z}$ er skilgreind samlagning og margföldun. Um þessar aðgerðir gilda sömu reglur og fyrir náttúrlegar tölur. Að auki höfum við að sérhver tala á sér samlagningarandhverfu, en það þýðir að fyrir sérhvert $a \in \mathbb{Z}$ er til $b \in \mathbb{Z}$, sem nefnist *samlagningarandhverfa* tölunnar a, þannig að $a + b = 0$. Samlagningarandhverfan er táknuð með $-a$.

Við gerum okkur einnig mynd af heilum tölum með því að marka þær á talnalínu.



Ræðar tölur

Deiling er ófullkomin aðgerð í heilu tölunum. Til þess að bæta úr því er talnakerfið stækkað með því að innleiða ræðar tölur. *Ræðar tölur* samanstanda af öllum brotum $\dfrac{p}{q}$ þar sem p og q eru heilar tölur og $q \neq 0$. Við táknum brot einnig með p/q og $p : q$.

Tvö brot $\dfrac{p}{q}$ og $\dfrac{r}{s}$ skilgreina sömu ræðu töluna ef til er heiltala $t \neq 0$ þannig að $r = tp$ og $s = tq$ eða $p = tr$ og $q = ts$. Þannig er til dæmis

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9} = \frac{-3}{-9} = \cdots .$$

Á ræðum tölum höfum við tvær reikningsaðgerðir samlagningu og margföldun. Þær eru skilgreindar með brotunum

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

Við hugsum okkur að heilu tölurnar séu hlutmengi í ræðu tölunum, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ með því að gera ekki greinarmun á heilu tölunni n og ræðu tölunni $\dfrac{n}{1}$. Núll 0 er samlagningarhlutleysa, $a + 0 = a$ fyrir öll $a \in \mathbb{Q}$, og 1 er margföldunarhlutleysa, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ fyrir öll $a \in \mathbb{Q}$.

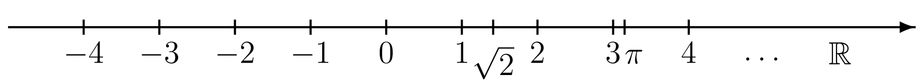
Við fáum nákvæmlega sömu reiknireglur fyrir ræðar tölur og fyrir heilar tölur en til viðbótar kemur að sérhver ræð tala $a \neq 0$ á sér margföldunarandhverfu, sem við táknum með a^{-1}. Ef $a = \dfrac{p}{q}$ þar sem $p \neq 0$ og $q \neq 0$ eru heiltölur, þá er $a^{-1} = \dfrac{q}{p}$.

Hægt er að úthluta sérhverri ræðri tölu punkti á talnalínunni, þannig að sérhver jákvæð ræð tala svari til lengdar á striki. Með þessu er hægt að túlka reikningsaðgerðirnar sem færslur á talnalínunni. Það er töluvert mál að útfæra þetta í smáatriðum, en þið þekkið þetta efni öll úr grunn- og framhaldsskóla.

Rauntölur

Það er eðlilegt að spyrja sig hvort sérhver punktur á talnalínunni sé gefinn með ræðri tölu. Það er jafngilt því að spyrja hvort sérhver lengd á striki sé gefin með ræðri tölu. Forn-Grikkir hugsuðu mikið um þetta vandamál og sáu að svarið við spurningunni er neikvætt. Regla Pýþagórasar segir okkur að langhlið c í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðar af lengd 1 uppfyllir $c^2 = 2$. Það er síðan einfalt að sýna fram á að ekki er hægt að skrifa c sem ræða tölu. Þessi tala er venjulega nefnd kvaðratrótin af 2 og er táknuð með $\sqrt{2}$.

Rauntölurnar $\mathbb{R}$ eru upp fundnar til þess meðal annars að leysa úr þeim vandræðum að geta ekki tjáð lengdir á strikum og ferlum í rúmfræði með ræðum tölum. Við lítum á talnakerfið $\mathbb{Q}$ sem punkta á talnalínunni og stækkum það þannig að til sérhvers punkts á línunni svari tala a og látum $\mathbb{R}$ tákna mengi allra slíkra talna. Aðgerðirnar samlagning og margföldun eru síðan skilgreindar með sams konar færslum og fyrir ræðar tölur. Þetta er raunar ekki einfalt að gera í smáatriðum.



Sérhver rauntala sem ekki er ræð tala nefnist *óræð tala*. Ekki er neitt sérstakt tákn notað fyrir mengi óræðra talna í stærðfræðinni, svo það er oftast táknað $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Rauntölurnar uppfylla allar sömu reiknireglur of ræðar tölur, þannig að fyrir rauntölur a, b og c höfum við

$(a + b) + c = a + (b + c)$	*tengiregla fyrir samlagningu*
$(ab)c = a(bc)$	*tengiregla fyrir margföldun*
$a + b = b + a$	*víxlegra fyrir samlagningu*
$ab = ba$	*víxlegra fyrir margföldun*
$a(b + c) = ab + ac$	*dreifiregla*
$a + 0 = a$	0 *er samlagningarhlutleysa*
$1a = a$	1 *er margföldunarhlutleysa*

Sérhver rauntala a á sér samlagningarandhverfu sem er ótvírætt ákvörðuð og við táknum hana með $-a$ og sérhver rauntala $a \neq 0$ á sér margföldunarandhverfu a^{-1} sem er ótvírætt ákvörðuð. Við athugum að $a^{-1} = 1/a$.

Við höfum röðun $<$ á $\mathbb{R}$ sem er þannig að um sérhverjar tvær tölur a og b gildir eitt af þrennu $a < b$, $a = b$ eða $b < a$. Við skrifum einnig $a > b$ ef $b < a$. Við höfum eftirtaldar reglur um röðun rauntalna

ef $a < b$ og $b < c$, þá er $a < c$	*röðun er gegnvirk*
ef $a < b$ þá er $a + c < b + c$	*röðun er óbreytt við samlagningu*
ef $a < b$ og $c > 0$, þá er $ac < bc$	*röðun er óbreytt við margföldun með jákvæðri tölu*
ef $a < b$ og $c < 0$, þá er $bc < ac$	*röðun er viðsnúin við margföldun með neikvæðri tölu*

Við höfum líka *hlutröðun* $\leq$ á $\mathbb{R}$. Við skrifum $a \leq b$ og segjum að *a sé minni eða jafnt b*, ef $a < b$ eða $a = b$. Eins skrifum við $a \geq b$ og segjum að *a sé stærri eða jafnt b* ef $a > b$ eða $a = b$.

Ef $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$, þá skilgreinum við mismunandi bil.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\}$	*opið bil*
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\}$	*lokað bil*
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\}$	*hálf-opið bil*
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\}$	*hálf-opið bil*
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < a\}$	*opin vinstri hálflína*
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq a\}$	*lokuð vinstri hálflína*
$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > a\}$	*opin hægri hálflína*
$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq a\}$	*lokuð hægri hálflína*
$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$	*öll rauntalnalínan*
$[a, a]$	*eins punkts bil*

Stundum er skrifað (a, b) í stað $]a, b[$, $(a, b]$ í stað $]a, b]$ o.s.frv.

Á sérhverju opnu bili eru óendanlega margar ræðar tölur og óendanlega margar óræðar tölur.

Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}$ skilgreinum við *tölugildið* af x með

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Talan $|x|$ mælir fjarlægð milli 0 og x á talnalínunni. Ef gefnar eru tvær rauntölur x og y, þá mælir $|x - y|$ fjarlægðina á milli þeirra. Ef a og ε eru rauntölur og $\varepsilon > 0$, þá er

$$\{x \in \mathbb{R}\,; \, |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

opið bil með miðju í a og þvermálið 2ε.

Takmarkanir rauntalnakerfisins

Við höfum séð að öll talnakerfin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ hafa sínar takmarkanir og það sama á við um rauntölurnar $\mathbb{R}$. Í mengi náttúrlegra talna er frádráttur ófullkomin aðgerð. Í mengi heilla talna er deiling ófullkomin aðgerð. Ræðu tölurnar duga ekki til þess að lýsa lengdum á strikum og ferlum sem koma fyrir í rúmfræðinni.

Við vitum að rauntala í öðru veldi er alltaf stærri eða jöfn núlli svo jafnan $x^2 + 1 = 0$ getur ekki haft lausn. Sama er að segja um annars stigs jöfnuna $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Hún hefur enga lausn ef $D = b^2 - 4ac < 0$. Það er auðvelt að skrifa niður dæmi um margliður sem hafa engar núllstöðvar í $\mathbb{R}$, en stig þeirra þarf að vera slétt tala, því margliður af oddatölustigi hafa alltaf núllstöð.

Nú er eðlilegt að spyrja, hvort hægt sé að stækka rauntalnakerfið yfir í stærra mengi þannig að innan þess mengis sé hægt að finna lausn á annars stigs jöfnunni $x^2 + 1 = 0$ og hvort slíkt talnakerfi gefi af sér lausnir á fleiri jöfnum sem ekki eru leysanlegar í $\mathbb{R}$.

Ímyndum okkur nú augnablik að til sé talnakerfi sem inniheldur rauntölurnar sem hlutmengi og að þar sé stak i sem uppfyllir $i^2 = -1$. Þá er i að sjálfsögðu ekki rauntala. Við gefum okkur að allar reiknireglur fyrir rauntölur gildi áfram. Víxlreglan fyrir margföldun segir okkur þá að $ia = ai$ fyrir allar rauntölur a. Tökum nú rauntölur a, b, c og d og athugum hvað reiknireglurnar segja um summu og margfeldi talnanna $a + ib$ og $c + id$,

$$(a + ib) + (c + id) = a + (c + ib) + id = (a + c) + i(b + d)$$

og

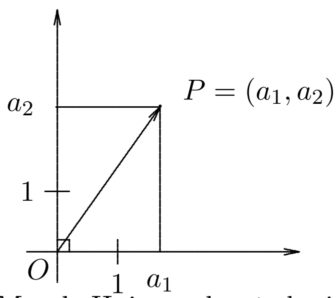
$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + ibc + aid + ibid \\ &= ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Þessar tvær formúlur gefa okkur forskrift að því hvernig leggja á saman og margfalda saman tölur af gerðinni $a + ib$ þannig að út komi tölur af sömu gerð.

1.2 Tvinntalnaplanið

Nú snúum við okkur að spurningunni um það hvort hægt sé að skilgreina útvíkkun á $\mathbb{R}$ þar sem til er tala i sem uppfyllir $i^2 = -1$. Það kemur í ljós að slíkt kerfi er til og að sérhverja tölu í því má skrifa sem $a + ib$ þar sem a og b eru rauntölur.

Skilgreining á tvinntölum



Mynd: Hnit punkts í plani

Lítum nú á mengi allra vigra í plani. Sérhver vigur hefur hnit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sem segja okkur hvar lokapunktur vigurs er staðsettur ef upphafspunktur hans er settur í upphafspunkt hnitakerfisins. Á mengi allra vigra höfum við tvær aðgerðir, samlagningu og margföldun með tölu. Samlagningunni er lýst með hnitum,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

og margfeldi tölunnar a og vigursins (c, d) er

$$a(c, d) = (ac, ad).$$

Við skilgreinum nú margföldun á $\mathbb{R}^2$ með hliðsjón af formúlunni sem við uppgötvuðum hér að framan,

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Talnaplanið $\mathbb{R}^2$ með venjulegri samlagningu og þessari margföldun nefnist *tvinntölur* og er táknað með $\mathbb{C}$. Nú er auðvelt að sannfæra sig um að víxl-, tengi- og dreifireglur gildi um þessa margföldun

$\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)$	*tengiregla fyrir samlagningu*
$\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) = (a, b)\big((c, d)(e, f)\big)$	*tengiregla fyrir margföldun*
$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$	*víxlregla fyrir samlagningu*
$(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$	*víxlregla fyrir margföldun*
$(a, b)\big((c, d) + (e, f)\big) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$	*dreifiregla*
$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$	$(0, 0)$ *er samlagningarhlutleysa*
$(1, 0)(a, b) = (a, b)$	$(1, 0)$ *er margföldunarhlutleysa*

Ljóst er að $(-a, -b)$ er samlagningarandhverfa (a, b). Við athugum að jafnan $(a, b)(a, -b) = (a^2 + b^2, 0)$ segir okkur að talan $(a, b) \neq (0, 0)$ eigi sér margföldunarandhverfuna

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Við tökum eftir að

$$(a, 0)(c, d) = (ac, ad) = a(c, d).$$

sem segir okkur að margföldun með vigrinum $(a, 0)$ sé það sama og margföldun með tölunni a. Eins sjáum við að vigrar af gerðinni $(a, 0)$ haga sér eins og rauntölur því

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \qquad \text{og} \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Í mengi tvinntalna gerum við því ekki greinarmun á rauntölunni a og vigrinum $(a, 0)$ og lítum á lárétta hnitaásinn $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \in \mathbb{R}\}$ sem rauntalnalínuna $\mathbb{R}$. Við skrifum þá sérstaklega 1 í stað $(1, 0)$ og 0 í stað $(0, 0)$

Lítum nú á vigurinn $(0, 1)$ sem við táknum með i. Um hann gildir

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Sérhvern vigur (a, b) má skrifa sem samantekt $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ Við skrifum a og b í stað $(a, 0)$ og $(b, 0)$ og erum þar með komin með framsetninguna

$$(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + ib.$$

Veldareglur

Ef z er tvinntala þá getum við skilgreint heiltöluveldi þannig að $z^0 = 1$, $z^1 = z$, og $z^n = z \cdots z$ þar sem allir þættirnir eru eins og fjöldi þeirra er $n \geq 2$. Fyrir $z \neq 0$ eru neikvæðu veldin skilgreind þannig að z^{-1} er margföldunarandhverfan af z og fyrir neikvæð n er $z^n = (z^{-1})^{|n|}$. Með þessu fást sömu veldareglur og gilda um rauntölur

$$\begin{aligned} z^n \cdot z^m &= z^{n+m} \\ \frac{z^n}{z^m} &= z^{n-m} \\ z^n \cdot w^n &= (zw)^n \\ (z^n)^m &= z^{nm} \end{aligned}$$

Tvíliðureglan

Okkar gamli kunningi, tvíliðureglan, er eins fyrir tvinntölur og rauntölur,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

þar sem *tvíliðustuðlarnir* eru gefnir með

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

fyrir $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ og $k = 0, \ldots, n$. Við köllum þennan stuðul n *yfir* k og sjáum beint frá formúlunni að tvíliðustuðlarnir eru samhverfir í þeim skilningi að

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tvíliðustuðlarnir uppfylla

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

fyrir $n = 0, 1, 2, \ldots$ og rakningarformúluna

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

fyrir $n = 2, 3, 4, \ldots$ og $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Þessari rakningu er best lýst í þríhyrningi Pascals, en línurnar í honum geyma alla tvíliðurstuðlana. Fyrstu 7 línurnar, $n = 0, \ldots, 6$, í honum eru

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& 1 && 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 2 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 3 && 3 && 1 &&& \\ && 1 && 4 && 6 && 4 && 1 && \\ & 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 & \\ 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 \end{array}$$

Raunhluti, þverhluti og samok

Sérhverja tvinntölu z má rita sem $z = x+iy$ þar sem x og y eru rauntölur. Talan x nefnist þá *raunhluti* tölunnar z og talan y nefnist *þverhluti* hennar. Við táknum raunhlutann með $\operatorname{Re} z$ og þverhlutann með $\operatorname{Im} z$.

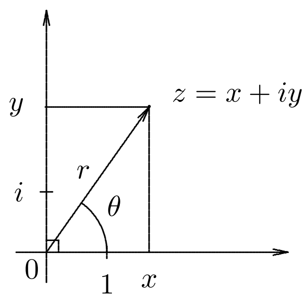
Tvinntala z er sögð vera *rauntala* ef $\operatorname{Im} z = 0$ og hún er sögð vera *hrein þvertala* ef $\operatorname{Re} z = 0$.

Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \operatorname{Re} z$ og $y = \operatorname{Im} z$, þá nefnist talan $\bar{z} = x - iy$ *samok* tölunnar z. Athugið að $\bar{z}$ er spegilmynd z í raunásnum og því er $\bar{\bar{z}} = z$. Við höfum nokkrar reiknireglur um samok

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \\
z + \bar{z} &= 2x = 2\operatorname{Re} z, \\
z - \bar{z} &= 2iy = 2i\operatorname{Im} z. \\
\overline{z+w} &= \bar{z} + \bar{w} \\
\overline{z-w} &= \bar{z} - \bar{w} \\
\overline{zw} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\
\overline{z/w} &= \bar{z}/\bar{w} \\
|\bar{z}| &= |z|
\end{aligned}
$$

Við höfum að z er rauntala þá og því aðeins að $z = \bar{z}$ og að z er hrein þvertala þá og því aðeins að $z = -\bar{z}$.

Lengd og stefnuhorn



Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \operatorname{Re} z$ og $y = \operatorname{Im} z$, þá nefnist talan

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

lengd, *tölugildi* eða *algildi* tvinntölunnar z. Ef $\theta \in \mathbb{R}$ og hægt er að skrifa tvinntöluna z á forminu

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

þá nefnist talan θ *stefnuhorn* eða *horngildi* tvinntölunnar z og stærðtáknið í hægri hliðinni nefnist *pólform tvinntölunnar* z. Hornaföllin cos og sin eru lotubundin með lotuna 2π og því eru allar tölur af gerðinni $\theta + 2\pi k$ með $k \in \mathbb{Z}$ einnig stefnuhorn fyrir z. Raðtvenndin $(|z|, \theta)$ er nefnd *pólhnit* eða *skauthnit* tölunnar z.

Við höfum að

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

og af því leiðir að hornið er gefið með formúlunni

$$\theta(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Athugið að það eru miklar takmarkanir á þessri formúlu, því hún gildir aðeins fyrir $x > 0$, því fallið arctan gefur okkur gildi á bilinu $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$.

Nú skulum við leiða út formúlu fyrir stefnuhorni tvinntölunnar z sem gefur okkur samfellt fall af z á $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ sem tekur gildi á bilinu $]-\pi,\pi[$. Þetta er gert úr frá formúlunni fyrir tangens af hálfu horni,

$$\begin{aligned}\tan(\tfrac{1}{2}\theta) &= \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta)}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} = \frac{2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)}{2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\ &= \frac{|z|\sin\theta}{|z|+|z|\cos\theta} = \frac{y}{|z|+x}.\end{aligned}$$

Formúlan sem við endum með er

$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{|z|+x}\right).$$

Þetta fall sem gefur okkur horngildið af tvinntölunni $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ á bilinu $]-\pi,\pi[$ nefnist *höfuðgrein hornsins* og er það táknað með $\operatorname{Arg} z$

Við höfum nokkrar reiknireglur um lengd tvinntalna,

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2,\\ |\bar{z}| &= |z|,\\ |zw| &= |z||w|.\end{aligned}$$

Fyrsta jafnan gefur okkur formúlu fyrir margföldunarandhverfunni

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad z \neq 0.$$

Fjarlægð milli punkta

Fjarlægð milli tveggja punkta $z = x+iy$ og $w = u+iv$ er gefin með

$$|z-w| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}.$$

Ef α og β eru tvinntölur og $\alpha \neq \beta$, þá er

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-\alpha| = |z-\beta|\}$$

mengi allra punkta z í $\mathbb{C}$ sem eru í sömu fjarlægð frá báðum punktum α og β. Það er augljóst að miðpunktur striksins $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ milli α og β er í fjarlægðinni $\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$ frá báðum punktum. Ef við drögum línuna gegnum miðpunktinn sem liggur hornrétt á strikið, þá fáum við mengi allra punkta sem eru í sömu fjarlægð frá α og β.

Sýnidæmi 1.2.1 Ákvarðið mengi allra punkta $z = x + iy$ sem uppfylla

a) $|z-1| = |z+2|$, **b)** $|z+1+i| = |z-1-i|$

Lausn: (a) Hér lítum við á mengi allra punkta sem eru í sömu fjarlægð frá $\alpha = 1$ og $\beta = -2$. Miðpunktur striksins á milli þeirra er $m = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}$ og línan gegnum hann hornrétt á strikið er gefin með jöfnunni $x = \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$.

Þá má líka komast að þessari niðurstöðu með því að líta á eftirfarandi jafngildu jöfnur:

$$\begin{aligned} |z-1| &= |z+2| \\ |z-1|^2 &= |z+2|^2 \\ (z-1)(\bar{z}-1) &= (z+2)(\bar{z}+2) \\ |z|^2 - z - \bar{z} + 1 &= |z|^2 + 2z + 2\bar{z} + 4 \\ -3(z+\bar{z}) &= 3 \\ -6\operatorname{Re} z &= 3 \\ \operatorname{Re} z = x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Þetta segir okkur að mengið samanstandi af öllum punktum í z-plani sem uppfylla $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$.

(b) Í þessu tilfelli eru punktarnir $\alpha = -1 - i$ og $\beta = 1 + i$. Miðpunkturinn á strikinu á milli þeirra er 0. Þeir liggja greinilega báðir á línunni sem gefin er með jöfnunni $y = x$. Jafnan fyrir línuna sem er hornrétt á hana og liggur gegnum 0 er $y = -x$.

Leysum þetta líka með algebru eins og í fyrri lið dæmisins. Við höfum jafngildar jöfnur:

$$\begin{aligned} |z+1+i| &= |z-1-i| \\ |z+1+i|^2 &= |z-1-i|^2 \\ (z+(1+i))(\bar{z}+(1-i)) &= (z-(1+i))(\bar{z}-(1-i)) \\ |z|^2 + (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 2 &= |z|^2 - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 2 \\ 2((1-i)z + (1+i)\bar{z}) &= 0 \\ \operatorname{Re}((1-i)z) = x + y &= 0 \end{aligned}$$

Þetta er lína sem gefin er í xy-hnitakerfi með jöfnunni $y = -x$. □

Innfeldi og krossfeldi

Innfeldi tveggja vigra $z = (x, y)$ og $w = (u, v)$ er skilgreint sem rauntalan $z \cdot w = xu + yv$. Ef við lítum á z og w sem tvinntölur og skrifum $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ og $w = u + iv = s(\cos\beta + i\sin\beta)$, þá fáum við formúluna

$$\operatorname{Re}\big(z\bar{w}\big) = \operatorname{Re}\big(\bar{z}w\big) = \tfrac{1}{2}\big(z\bar{w} + \bar{z}w\big) = xu + yv = (x, y)\cdot(u, v) = rs\cos(\alpha - \beta).$$

Þverhluti þessarar stærðar er *krossfeldi* z og w,

$$\operatorname{Im}\big(\bar{z}w\big) = -\operatorname{Im}\big(z\bar{w}\big) = xv - yu = \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = -rs\sin(\alpha - \beta)$$

en tölugildi þess $|\operatorname{Im}\big(z\bar{w}\big)|$ er flatarmál samsíðungsins, sem tölurnar z og w spanna.

Jafna línu og jafna hrings

Bein lína í $\mathbb{C}$ er gefin sem mengi allra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu af gerðinni

$$ax + by + c = 0.$$

Við getum greinilega snúið þessu yfir í jöfnuna

$$2\mathrm{Re}\left(\bar{\beta}z\right) + c = \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0,$$

þar sem $\beta = \frac{1}{2}(a + ib)$. Tvinntalan β er hornrétt á línuna og $i\beta$ er í stefnu hennar.

Hringur í $\mathbb{C}$ með miðju m og geisla r er mengi allra punkta z sem eru í fjarlægðinni r frá m, $|z - m| = r$. Við getum greinilega tjáð þessa jöfnu með jafngildum hætti,

$$|z - m|^2 - r^2 = (z - m)(\bar{z} - \bar{m}) - r^2 = |z|^2 - \bar{m}z - m\bar{z} + |m|^2 - r^2 = 0.$$

Við getum auðveldlega flokkað öll mengi sem gefin eru með jöfnu af gerðinni

$$\alpha|z|^2 + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0, \tag{1.2.1}$$

þar sem α og γ eru rauntölur og β er tvinntala. Tilfellin eru:
(i) *Lína*: $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.
(ii) *Hringur*: $\alpha \neq 0$, $|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$. Ef miðjan er m og geislinn r, þá er

$$m = -\beta/\alpha \qquad \text{og} \qquad r = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}\,/|\alpha|.$$

(iii) *Einn punktur*: $\alpha \neq 0$ og $|\beta|^2 - \alpha\gamma = 0$. Punkturinn er $m = -\beta/\alpha$.
(iv) *Tóma mengið*: $\alpha \neq 0$, $|\beta|^2 - \alpha\gamma < 0$ eða $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$.
(v) *Allt planið* $\mathbb{C}$: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Einingarhringurinn

Einingarhringurinn $\mathbb{T}$ er hringurinn með miðju í 0 og geislann 1. Hann samanstendur af öllum tvinntölum með tölugildi 1. Sérhvert z í $\mathbb{T}$ má því skrifa á forminu $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Tökum nú aðra slíka tölu $w = \cos\beta + i\sin\beta$ og margföldum saman

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Í síðustu jöfnunni notuðum við samlagningarformúlur fyrir cos og sin

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Af formúlunni fyrir margfeldi leiðir regla sem kennd er við de Movire

$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Rúmfræðileg túlkun á margföldun

Látum nú z og w vera tvær tvinntölur með lengdir $|z|$ og $|w|$ og stefnuhornin α og β. Þá fáum við

$$zw = |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big).$$

sem segir okkur að lengd margfeldisins sé margfeldi lengda z og w og að stefnuhorn margfeldisins sé summa stefnuhorna z og w.

Ef nú $u \in \mathbb{T}$ er tala á einingarhringnum með stefnuhornið β, þá er uz snúningur á z um hornið β.

Þríhyrningsójafnan

Tökum tvær tvinntölur z og w og reiknum smávegis

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \end{aligned}$$

Athugum nú að

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \qquad \text{og} \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$$

Af fyrri ójöfnunni leiðir að

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.$$

Ef við tökum kvaðratrót beggja vegna ójöfnumerkisins, þá fáum við *þríhyrningsójöfnuna*

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Ef henni er beitt á liðina $z-w$ og w í stað z og w, þá fáum við $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$, svo $|z| - |w| \leq |z-w|$. Ef við skiptum á hlutverkum z og w, þá fæst $|w| - |z| \leq |w-z| = |z-w|$. Þessar tvær ójöfnu gefa okkur annað afbrigði af þríhyrningsójöfnunni

$$||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

1.3 Rætur

Látum nú w vera gefna tvinntölu og $n \geq 2$ vera náttúrlega tölu. Tvinntalan z kallast þá *n-ta rót* tvinntölunnar w ef hún uppfyllir jöfnuna $z^n = w$

Einingarrætur

Lítum á jöfnuna $z^n = 1$, þar sem $n \geq 2$ er náttúrleg tala. Lausnir hennar nefnast *n-tu einingarrætur* eða *n-tu rætur af einum*. Ef z er lausn, þá er $1 = |z^n| = |z|^n$ sem segir okkur að $|z| = 1$ og að við getum skrifað $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Regla de Moivres segir nú að

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = z^n = 1$$

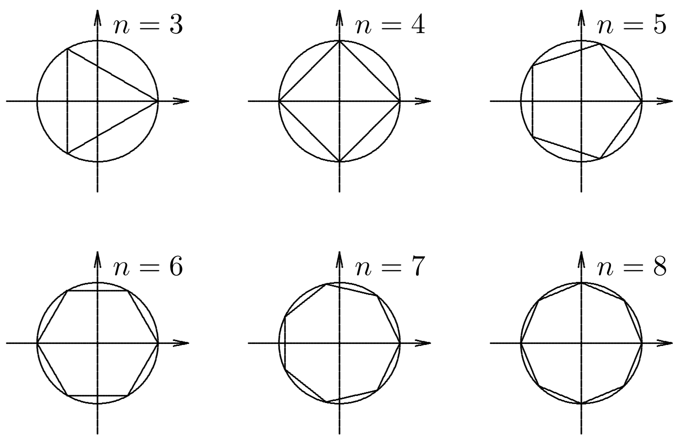
Talan 1 hefur horngildi $2\pi k$ þar sem $k \in \mathbb{Z}$ getur verið hvaða tala sem er og þessi jafna segir okkur því að $n\theta$ sé heiltölumargfeldi af 2π og þar með eru möguleg horngildi

$$\theta = 2\pi k/n, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ef tvær heiltölur k_1 og k_2 hafa sama afgang við heiltöludeilingu með n, þá er $\cos(2\pi k_1/n) = \cos(2\pi k_2/n)$ og $\sin(2\pi k_1/n) = \sin(2\pi k_2/n)$. Þetta gefur okkur að jafnan $z^n = 1$ hefur n ólíkar lausnir $u_0, \dots, u_{n-1}$, sem nefnast *n-tu rætur af* 1 og eru gefnar með formúlunni

$$u_k = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Þessar tölur eru allar á einingarhringnum. Athugið að $u_0 = 1$, $u_k = u_1^k$ fyrir $k = 0, \dots, n-1$, og að þær raða sér í hornin á reglulegum n-hyrningi, þar sem tvíhyrningur er strikið $[-1, 1]$.



Mynd: Einingarrætur

Útreikningur á n-tu rótum

Látum nú $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ vera gefna tvinntölu af lengd $s \geq 0$ og með stefnuhornið α og leitum að lausnum á jöfnunni $z^n = w$. Ef z er slík lausn og u er n-ta einingarrót, þá er $(zu)^n = z^n u^n = z^n = w$ og því er zu einnig lausn. Nú eru einingarræturnar n talsins og þetta segir okkur að um leið og við finnum eina lausn z_0 þá fáum við n ólíkar lausnir $z_0 u$ með því að stinga inn öllum mögulegum n-tu rótum fyrir u. Látum nú z_0 vera tvinntöluna, sem gefin er með formúlunni

$$z_0 = s^{\frac{1}{n}}\big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)$$

og færum hana síðan í n-ta veldi,

$$\begin{aligned} z_0^n &= \big(s^{\frac{1}{n}}\big)^n\big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)^n \\ &= s\big(\cos(n\alpha/n) + i\sin(n\alpha/n)\big) = w \end{aligned}$$

Þar með erum við komin með formúlu fyrir einni lausn. Með því að nota formúluna fyrir n-tu einingarrótunum, þá fáum við upptalningu á öllum lausnum jöfnunnar $z^n = w = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

$$z_k = \varrho^{\frac{1}{n}}\big(\cos((\alpha+2\pi k)/n) + i\sin((\alpha+2\pi k)/n)\big), \qquad k = 0,\dots,n-1.$$

Þessari formúlu má lýsa þannig að n-tu ræturnar eru fundnar þannig að fyrst er fundin ein rót z_0. Henni er snúið um hornið $2\pi/n$ með því að margfalda með u_1 yfir í $z_1 = u_1 z_0$. Næst er z_1 snúið um hornið $2\pi/n$ í $z_2 = u_1 z_1$ og þannig er haldið áfram þar til n ólíkar rætur eru fundnar.

Ferningsrætur

Ef w er tvinntala og z uppfyllir $z^2 = w$, þá er z sögð vera *ferningsrót* eða *kvaðratrót* tölunnar w. Munið að ef w er jákvæð rauntala, þá táknar $\sqrt{w}$ alltaf jákvæðu rauntöluna töluna sem uppfyllir $(\sqrt{w})^2 = \alpha$. Að sjálfsögðu er $\sqrt{0} = 0$.

Ef $w \neq 0$ er tvinntala og w er ekki jákvæð rauntala, þá er hefur $\sqrt{w}$ enga staðlaða merkingu. Við vitum bara að w hefur tvær ferningsrætur z_0 og z_1. Ef við skrifum $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, þá gefa reikningar okkar hér að framan að við getum við tekið

$$z_0 = \sqrt{s}(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))$$

og

$$z_1 = \sqrt{s}(\cos(\alpha/2+\pi) + i\sin(\alpha/2+\pi)) = -z_0.$$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir ferningsrótum $w = u + iv$, sem er sett fram með raunhluta u og þverhluta v, en ekki lengd og stefnuhorni. Við takmörkum okkur við tölur w sem liggja ekki á neikvæða raunásnum $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\}$. Skrifum rótina sem $z_0 = z = x + iy$ og veljum z_0 sem þá rót sem hefur $x > 0$.

Þá er $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv = w$. Með því að bera saman raun- og þverhluta í þessari jöfnu, þá fáum við tvær formúlur $x^2 - y^2 = u$ og $2xy = v$. Formúlan $|w| = |z^2| = |w|^2 = x^2 + y^2$ gefur okkur eina jöfnu til viðbótar og við getum leyst út x^2 og y^2,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w|, \\ x^2 - y^2 = u, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(|w| + u), \\ y^2 = \frac{1}{2}(|w| - u). \end{cases}$$

Við gáfum okkur að $x > 0$ og því er formerkið á y það sama og formerkið á $v = 2xy$. *Formerkisfallið* sign er skilgreint með

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Ef $v \neq 0$, þá gefur þessi formúla okkur kost á að við skrifa lausina á einföldu formi

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + u)} + i\operatorname{sign}(v)\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - u)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re} w)} + i\operatorname{sign}(\operatorname{Im} w)\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re} w)}. \end{aligned}$$

Ef $v = 0$ og $u > 0$, þá er $w = u$ og við fáum jákvæðu rótina $z = \sqrt{w}$ út úr þessari formúlu.

Sýnidæmi 1.3.1 Reiknum út formúlur fyrir $\cos(\pi/8)$ og $\sin(\pi/8)$ með því að notfæra okkur að formúluna fyrir kvaðratrót tvinntölu og þá staðreynd að $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 = \sin(\pi/4)$.

Lausn: Talan $z = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$ er ferningsrótin af tölunni $w = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$ sem gefin er með formúlunni hér að framan. Við höfum því

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}/2)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}/2)} = \frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}).$$

Þar með er

$$\cos(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \text{og} \qquad \sin(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

□

1.4 Margliður

Við getum skilgreint margliður með tvinntölustuðlum á nákvæmlega sama hátt og fyrr, en það eru stærðtákn af gerðinni

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

þar sem $a_0, \ldots, a_n$ eru tvinntölur og z er breyta sem tekur gildi í tvinntölunum. Við getum litið á P sem fall sem skilgreint er á $\mathbb{C}$ og tekur gildi í $\mathbb{C}$. *Núllmargliðan* er margliðan sem hefur alla stuðla $a_j = 0$. Við táknum hana með 0. Stig margliðunnar $P \neq 0$ er skilgreint eins og áður sem stærsta heiltala j þannig að $a_j \neq 0$.

Margliðudeiling er alveg eins fyrir margliður með tvinntölustuðla og margliður með rauntölustuðla. Ef P er margliða og Q er margliða af stigi m, þá eru til margliða R af stigi minna en m og margliða S, þannig að

$$P(z) = Q(z)S(z) + R(z)$$

Margliðan R nefnist þá *leif* eða *afgangur við deilingu á P með Q* og S nefnist *kvóti P og Q*. Við segjum að Q *deili* P eða að Q *gangi upp í* P ef R er núllmargliðan.

Ef $\alpha \in \mathbb{C}$, þá er $z - \alpha$ fyrsta stigs margliða og við fáum að leifin við deilingu á $P(z)$ með $(z-\alpha)$ verður fastamargliðan $P(\alpha)$,

$$P(z) = (z-\alpha)S(z) + P(\alpha).$$

Tvinntalan α er sögð vera *núllstöð* eða *rót* margliðunnar P ef $P(\alpha) = 0$. Við höfum nú *þáttaregluna*.

Setning 1.4.1 *Margliða P af stigi ≥ 1 hefur núllstöð α þá og því aðeins að $z - \alpha$ gangi upp í P.* □

Núllstöðvar annars stigs margliðu

Nú viljum við leysa jöfnuna $az^2 + bz + c = 0$ og ganga út frá því að stuðlarnir a, b og c séu tvinntölur og að $a \neq 0$. Þetta er gert nánast eins og fyrir rauntölur, en niðurstaðan verður almennari. Fyrsta verkið er að deila báðum hliðum með a og fá þannig jafngilda jöfnu $z^2 + Bz + C = 0$, þar sem $B = b/a$ og $C = c/a$. Næsta skref er að líta á tvo fyrstu liðina $z^2 + Bz$ og skrifa þá sem ferning að viðbættum fasta. Með orðinu ferningur er átt við fyrsta stigs stærðtákni í öðru veldi, $(z + \alpha)^2$. Ferningsreglan fyrir fyrir summu segir að $(z + \alpha)^2 = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2$. Því er

$$0 = z^2 + Bz + C = (z + \frac{B}{2})^2 - \frac{B^2}{4} + C.$$

Þetta segir okkur að upphaflega jafnan jafngildi

$$0 = (az^2 + bz + c)/a = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

Með því að draga töluna $-b^2/(4a^2) + c/a$ frá báðum hliðum, þá fáum við jafngilda jöfnu

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tvinntalan $D = b^2 - 4ac$ nefnist *aðgreinir* eða *aðskilja* jöfnunnar. Ef $D \neq 0$, þá hefur D tvær kvaðratrætur. Látum $\sqrt{D}$ tákna aðra þeirra. Þá er hin jöfn $-\sqrt{D}$ og við fáum tvær ólíkar lausnir

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Ef $D = 0$, fæst ein lausn

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

Ef D er rauntala og $D < 0$ þá getum við valið $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$ og lausnarformúlan verður

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Undirstöðusetning algebrunnar

Við byrjuðum á því að innleiða tvinntölurnar með það fyrir augum að geta leyst jöfnur sem hafa engar rauntölulausnir og lögðum upp með það að finna lausn á jöfnunni $z^2 + 1 = 0$. Það er því ekki hægt að segja annað en að útvíkkun talnakerfisins frá rauntölum yfir í tvinntölur sé vel heppnuð:

Setning 1.4.2 *(Undirstöðusetning algebrunnar) Sérhver margliða af stigi ≥ 1 með tvinntölustuðlum hefur núllstöð í $\mathbb{C}$.* $\square$

Sönnunin á undirstöðusetningunni kemur síðar í námskeiðinu, en við skulum taka hana trúanlega og athuga nokkrar merkilegar afleiðingar hennar.

Segjum nú að P sé margliða af stigi $m \geq 1$ og að α_1 sé núllstöð hennar. Við getum þá skrifað

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z)$$

samkvæmt þáttareglunni. Þá er Q_1 af stigi $m - 1$ og samkvæmt meginsetningunni hefur Q_1 núllstöð α_2 ef $m \geq 2$. Við þáttum Q_1 með $z - \alpha_2$ og fáum þannig

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2(z)$$

þar sem Q_2 er margliða af stigi $m - 2$. Þessu er unnt að halda áfram þar til við endum með fullkomna þáttun á P í fyrsta stigs liði

$$P(z) = A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_m)$$

þar sem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ er upptalning á öllum núllstöðvum P með hugsanlegum endurtekningum og $A \neq 0$ er stuðullinn í veldið z^m í margliðunni P.

Ef α er núllstöð margliðu P og hægt er að þátta P í $P(z) = (z - \alpha)^j Q(z)$ þar sem Q er margliða og $Q(\alpha) \neq 0$ þá segjum við að α sé *j-föld núllstöð P* og köllum töluna *j margfeldni núllstöðvarinnar α í P*. Ef P er af stigi m og $\beta_1, \ldots, \beta_k$ er upptalning á ólíkum núllstöðvum margliðunnar P og þær hafa margfeldni $m_1, \ldots, m_k$, þá getum við skrifað

$$P(z) = A(z - \beta_1)^{m_1} \cdots (z - \beta_k)^{m_k}$$

og

$$m = m_1 + \cdots + m_k.$$

Margliður með rauntölustuðla

Við lítum allaf á rauntölurnar sem hluta af tvinntölunum og því er sérhver margliða með rauntölustuðla jafnframt margliða með tvinntölustuðla. Meginsetning algebrunnar á því við um þessar margliður einnig. Hugsum okkur nú að $P(z)$ sé margliða af stigi $m \geq 1$ með rauntölustuðla $a_0, \ldots, a_m$ og að $\alpha \in \mathbb{C}$ sé núllstöð hennar og gerum ráð fyrir að α sé ekki rauntala. Með því að beita reiknireglunum fyrir samok og þá sérstaklega að $\bar{a}_j = a_j$, þá fáum við

$$0 = P(\alpha) = \overline{P(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k}\,\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} a_k (\overline{\alpha})^k = P(\bar{\alpha})$$

Við höfum því sýnt að $\bar{\alpha}$ er einnig núllstöð P. Við getum því þáttað út $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$ Athugum að

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - 2(\mathrm{Re}\ \alpha)z + |\alpha|^2$$

Nú beitum við þáttareglunni og sjáum að í þessu tilfelli fæst þáttun á $P(z)$ í tvær rauntalnamargliður

$$P(z) = \big(z^2 - 2(\mathrm{Re}\ \alpha)z + |\alpha|^2\big)Q(z).$$

Afleiður af margliðum

Tvíliðustuðlarnir eru dálítið fyrirferðarmiklir í útskrift svo við skulum tákna n yfir k með $c_{n,k}$. Við fáum þá

$$(z+h)^n = z^n + nz^{n-1}h + c_{n,2}z^{n-2}h^2 + \cdots + c_{n,n-2}z^{n-2}h^2 + nzh^{n-1} + h^n.$$

Við fáum því formúluna

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + c_{n,2}z^{n-2}h + \cdots + nzh^{n-2} + h^{n-1}.$$

Nú látum við $h \to 0$ og fáum

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right) = nz^{n-1}.$$

Við skilgreinum afleiðuna af einliðunni $z \mapsto z^n$ sem fallið $z \mapsto nz^{n-1}$ fyrir $n = 0, 1, 2, \ldots$ og almennt skilgreinum við afleiðu af margliðu $P(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$ með

$$P'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{P(z+h) - P(z)}{h} = \sum_{n=0}^m n a_n z^{n-1}.$$

Það er enginn vandi að sýna fram á að venjulegu reiknireglurnar fyrir afleiður gildi,

$$(P+Q)'(z) = P'(z) + Q'(z)$$

og

$$(PQ)'(z) = P'(z)Q(z) + P(z)Q'(z).$$

1.5 Ræð föll

Rætt fall er kvóti tveggja margliða $R = P/Q$. Það er skilgreint í öllum punktum $z \in \mathbb{C}$ þar sem $Q(z) \neq 0$. Við skilgreinum afleiðuna af R með hliðstæðum hætti og fyrir margliður og fáum venjulega reiknireglu

$$R'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{R(z+h) - R(z)}{h} = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

Stofnbrotaliðun

Ef P og Q eru margliður, $Q \neq 0$ og $\text{stig}P \geq \text{stig}Q$, þá getum við alltaf framkvæmt deilingu með afgangi og fengið að

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \frac{P_2(z)}{Q(z)}$$

þar sem P_1 og P_2 eru margliður, $\text{stig}P_1 = \text{stig}P - \text{stig}Q$ og $\text{stig}P_2 < \text{stig}Q$.

Nú ætlum við að líta á rætt fall $R = P/Q$ þar sem P og Q eru margliður og stig$P <$ stig$Q$. Þá er alltaf hægt að liða ræða fallið í stofnbrot. Við gerum fyrst ráð fyrir því að að allar núllstöðvar Q séu einfaldar. Þá getum við skrifað

$$Q(z) = a(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_m), \qquad z \in \mathbb{C},$$

þar sem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eru hinar ólíku núllstöðvar Q. Stofnbrotaliðun R er þá einfaldlega

$$R(z) = \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_m}{z - \alpha_m}.$$

Við munum sanna þessa formúlu í kafla 4. Nú þarf að reikna stuðlana $A_1, \dots, A_m$ út. Við athugum að

$$\lim_{z \to \alpha_1} (z - \alpha_1) R(z) = A_1 + \lim_{z \to \alpha_1} (z - \alpha_1) \left(\frac{A_2}{z - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right) = A_1.$$

Á hinn bóginn er $Q(\alpha_1) = 0$, svo

$$\lim_{z \to \alpha_1} (z - \alpha_1) R(z) = \lim_{z \to \alpha_1} \frac{(z - \alpha_1) P(z)}{Q(z) - Q(\alpha_1)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.$$

Ef við meðhöndlum hinar núllstöðvarnar með sama hætti, þá fáum við formúluna

$$A_j = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$

Við notum nú þáttunina á Q í fyrsta stigs liði til þess að reikna út afleiðuna af Q í α_j,

$$Q'(\alpha_j) = a \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (\alpha_j - \alpha_k).$$

Þessi formúla segir okkur að $Q'(\alpha_j)$ sé fundið með því að taka þáttunina á Q í fyrsta stigs liði, deila út þættinum $z - \alpha_j$ og stinga síðan inn α_j fyrir z. Í sumum tilfellum getur verið einfaldast að nota þessa formúlu til þess að reikna út gildin á afleiðum margliðunnar Q í núllstöðvunum.

Sýnidæmi 1.5.1 Reiknum út stofnbrotaliðun á ræða fallinu

$$R(z) = \frac{1}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2}.$$

Lausn: Við verðum að byrja á því að ákvarða fullkomna þáttun á margliðunni $Q(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$. Með ágiskun finnum við að $\alpha_1 = 1$ er núllstöð. Það gefur okkur þáttunina $Q(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$. Við finnum síðan hinar núllstöðvarnar $\alpha_2 = 1 + i$ og $\alpha_3 = 1 - i$ með því að stinga inn í lausnarformúluna fyrir annars stigs jöfnu. Þáttun á $Q(z)$ í fyrsta stigs þætti er

$$Q(z) = (z - 1)(z - 1 - i)(z - 1 + i).$$

Afleiðan verður því

$$Q'(z) = (z-1-i)(z-1+i) + (z-1)(z-1+i) + (z-1)(z-1-i).$$

Gildin sem við sækjumst eftir eru

$$Q'(1) = 1, \qquad Q'(1+i) = i(2i) = -2 \quad \text{og} \quad Q'(1-i) = -i(-2i) = -2.$$

Stofnbrotaliðunin er því

$$R(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{-1/2}{z-1-i} + \frac{-1/2}{z-1+i}$$

Margliðan Q hefur rauntölustuðla, svo það getur verið eðlilegt að skrifa stofnbrotaliðunina með nefnurum sem eru annars stigs og óþáttanlegar yfir rauntölurnar. Þá leggjum við saman tvo síðustu liðina í þessari formúlu og fáum

$$R(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{-z+1}{z^2-2z+2}.$$

□

Sýnidæmi 1.5.2 Reiknið út stofnbrotaliðun ræða fallsins

$$R(z) = \frac{120}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2+9)}.$$

Lausn: Við vitum að hægt er að skrifa

$$\frac{120}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{Cz+D}{z^2+4} + \frac{Ez+F}{z^2+9}$$

Þar sem stuðlarnir A, B, C, D, E og F eru rauntölur. Til þess að ákvarða A og B margföldum við gegnum jöfnuna með z^2+1 og setjum síðan $s = i$. Þá fæst

$$\frac{120}{(i^2+4)(i^2+9)} = Ai + B, \quad 5 = Ai + B, \quad A = 0, \quad B = 5.$$

Næst margföldum við jöfnuna með z^2+4 og setum síðan $z = 2i$. Þá fæst

$$\frac{120}{((2i)^2+1)((2i)^2+9)} = 2Ci + D, \quad -8 = 2Ci + D, \quad C = 0, \quad D = -8.$$

Að lokum margföldum við í gegnum jöfnuna með z^2+9 og setjum síðan $s = 3i$. Það gefur

$$\frac{120}{((3i)^2+1)((3i)^2+4)} = 3Ei + F, \quad 3 = 3Ei + F, \quad E = 0, \quad F = 3.$$

Niðurstaðan verður því

$$\frac{120}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{5}{z^2+1} - \frac{8}{z^2+4} + \frac{3}{z^2+9}.$$

□

Gerum nú ráð fyrir að Q hafi ólíkar núllstöðvar $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ af stigi $m_1, \dots, m_k$, og stig$Q = m = m_1 + \cdots + m_k$. Við getum þáttað út núllstöðina α_j með því að skrifa $Q(z) = (z-\alpha_j)^{m_j} q_j(z)$, þar sem q_j er margliða af stigi $m - m_j$ og $q_j(\alpha_j) \neq 0$. Stofnbrotaliðunin verður nú af gerðinni

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{A_{11}}{(z-\alpha_1)} + \cdots + \frac{A_{m_1 1}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{12}}{(z-\alpha_2)} + \cdots + \frac{A_{m_2 2}}{(z-\alpha_2)^{m_2}} \\ &\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &+ \frac{A_{1k}}{(z-\alpha_k)} + \cdots + \frac{A_{m_k k}}{(z-\alpha_k)^{m_k}}\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

þar sem stuðlarnir eru gefnir með formúlunni

$$A_{lj} = \frac{1}{(m_j - l)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m_j - l}\left(\frac{P(z)}{q_j(z)}\right)\bigg|_{z=\alpha_j}.$$

Þessa formúlu munum við sanna síðar, en það er fínt að æfa sig í því að nota hana.

Sýnidæmi 1.5.3 Liðið ræða fallið

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

í stofnbrot.

Lausn: Margliðan Q hefur núllstöðvarnar $\alpha_1 = i$ og $\alpha_2 = -i$ og eru þær báðar af stigi 2. Við höfum

$$\begin{aligned} q_1(z) = (z+i)^2, &\qquad \frac{P(i)}{q_1(i)} = \frac{1}{4}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right) &= \frac{2z(z+i)^2 - z^2 2(z+i)}{(z+i)^4}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{P(z)}{q_1(z)}\right)\bigg|_{z=i} &= \frac{-i}{4}, \\ q_2(z) = (z-i)^2, &\qquad \frac{P(-i)}{q_2(-i)} = \frac{1}{4}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-i)^2}\right) &= \frac{2z(z-i)^2 - z^2 2(z-i)}{(z-i)^4}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{P(z)}{q_2(z)}\right)\bigg|_{z=-i} &= \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Svarið verður því

$$\frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{-i/4}{(z-i)} + \frac{1/4}{(z-i)^2} + \frac{i/4}{(z+i)} + \frac{1/4}{(z+i)^2}.$$

□

1.6 Veldisvísisfallið og skyld föll

Við höfum séð hvernig skilgreiningarmengi margliða er útvíkkað frá því að vera rauntalnaásinn $\mathbb{R}$ yfir í það að vera allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$. Þetta er hægt að gera á eðlilegan máta fyrir mörg föll sem skilgreind eru á hlutmengjum á rauntalnalínunni þannig að þau fái náttúrlegt skilgeiningarsvæði í $\mathbb{C}$.

Framlenging á veldisvísisfallinu

Veldisvísisfallið $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er andhverfa náttúrlega lograns sem skilgreindur er með heildinu

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0.$$

Talan e er skilgreind með $e = \exp(1)$. Nú útvíkkum við skilgreiningarsvæði exp þannig að það verði allt $\mathbb{C}$ með formúlunni

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Við skrifum $e^z = \exp z$ fyrir $z \in \mathbb{C}$.

Fyrst hornaföllin cos og sin eru lotubundin með lotuna 2π, þá fáum við beint út frá skilgreiningunni á veldisvísisfallinu að það er lotubundið með lotuna $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Jöfnur Eulers

Stingum nú hreinni þvertölu $i\theta$ þar sem $\theta \in \mathbb{R}$ inn í veldisvísisfallið $e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{T}$. Þetta segir okkur að vörpunin $\theta \mapsto e^{i\theta}$ varpi rauntalnalínunni á einingarhringinn. Stillum nú upp tveimur jöfnum

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

Tökum nú summu af hægri hliðum og vinstri hliðum. Þá fæst $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Tökum síðan mismun af því sama. Þá fæst $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. Út úr þessu fæst samband milli veldisvísisfallsins og hornafallanna sem nefnt er *jöfnur Eulers*,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \text{og} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Samlagningarformúla veldisvísisfallsins

Munum að veldisvísisfallið $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, uppfyllir regluna $e^{a+b} = e^a e^b$ fyrir allar rauntölur a og b. Hún er nefnd *samlagningarformúla* eða *samlagningarregla* veldisvísisfallsins. Nú skulum við taka tvær tvinntölur $z = x + iy$ og $w = u + iv$ og sjá hvernig þessi regla alhæfist þegar við erum búin að framlengja skilgreiningarsvæði veldisvísisfallsins yfir í allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i\sin y)e^u(\cos v + i\sin v) \\ &= (e^x e^u)(\cos y + i\sin y)(\cos v + i\sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\ &= e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Við höfum því að samlagningarformúlan gildir áfram

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Reglurnar um reikning með samoka tvinntölum gefa okkur

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

og síðan

$$|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{x+iy}e^{x-iy} = e^{2x}$$

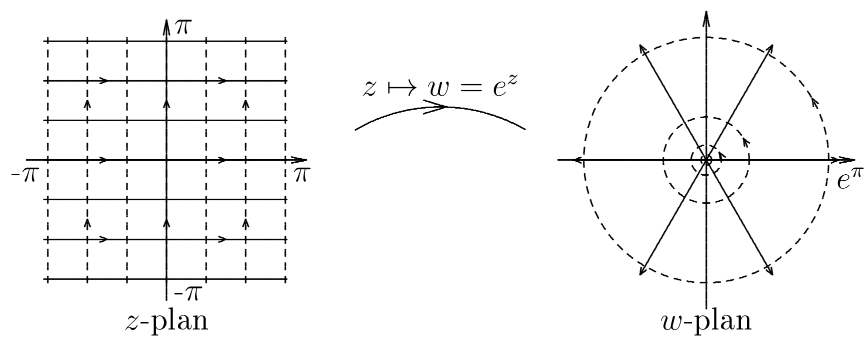
Þar með er

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

og sérstaklega gildir

$$|e^{iy}| = 1, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Af þessu leiðir að veldisvísisfallið hefur enga núllstöð $e^z = e^x e^{iy}$ og hvorugur þátturinn í hægri hliðinni getur verið núll. Við sjáum einnig að veldisvísisfallið varpar lóðréttu línunni sem gefin er með jöfnunni $x = \operatorname{Re} z = a$ í z-plani á hringinn sem gefinn er með jöfnununni $|w| = e^a$ í w-plani og það varpar láréttu línunni sem gefin er með jöfnunni $y = \operatorname{Im} z = b$ á hálflínuna út frá 0 með stefnuvigur e^{ib}.



Mynd: Veldisvísisfallið

Framlenging á hornaföllum og breiðbogaföllum

Um leið og við höfum framlengt veldisvísisfallið yfir á allt tvinntalnaplanið, þá framlengjast hornaföllin sjálfkrafa yfir á allt planið með Euler formúlunum,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \text{og} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

og sama er að segja um breiðbogaföllin

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Tilsvarandi tangens- og kótangens-föll eru skilgreind þar sem nefnararnir eru frábrugðnir 0

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{og} \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Gömlu góðu reglurnar gilda áfram, eins og til dæmis

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad \text{og} \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

sem gilda um öll $z \in \mathbb{C}$. Sama er að segja um allar samlagningarformúlurnar fyrir hornaföll og breiðbogaföll til dæmis

$$\cos(z - w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Nú kemur líka í ljós samband milli hornafallanna og breiðboga fallanna, því

$$\cosh z = \cos(iz) \qquad \text{og} \qquad \sinh z = -i \sin(iz)$$

gildir um öll $z \in \mathbb{Z}$.

Sýnidæmi 1.6.1 Sýnið að engar núllstöðvar bætast við þegar skilgreiningarsvæði cos er útvíkkað frá $\mathbb{R}$ yfir á $\mathbb{C}$.

Lausn: Núllstöðvar cos uppfylla $\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0$. Ef við margföldum í gegnum þessa jöfnu með $2e^{iz}$, þá fáum við jafngilda jöfnu

$$e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}.$$

Lausnir þessarar jöfnu eru $2iz = i\pi + i2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ og þar með fáum við að

$$z = \tfrac{1}{2}\pi + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

eru einu núllstöðvar cos og að þær liggja allar á rauntalnalínunni. Fallið cos hefur því engar núllstöðvar í $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\square$

Sýnidæmi 1.6.2 Sýnið að

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

gildi um allar rauntölur x og y.

Lausn: Við beitum samlagningarformúlu cos,

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy).$$

Nú er

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \tfrac{1}{2}\big(e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}\big) = \tfrac{1}{2}\big(e^{-y} + e^{y}\big) = \cosh y, \\ \sin(iy) &= \tfrac{1}{2i}\big(e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}\big) = \tfrac{-i}{2}\big(e^{-y} - e^{y}\big) = i \sinh y. \end{aligned}$$

Þar með er

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

$\square$

1.7 Varpanir á tvinntöluplaninu

Í þessum kafla ætlum við að fjalla um föll $f : X \to \mathbb{C}$, sem skilgreind eru á hlutmengi X í $\mathbb{C}$ og taka gildi í $\mathbb{C}$. Til þess að einfalda útreikninga okkar, þá skiptum við frjálslega milli tvinntalnarithάttar og vigurrithάttar á punktum $z \in X$. Þannig skrifum við

$$z = x + iy = re^{i\theta} = (x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

og segjum að z hafi *raunhlutann* x, *þverhlutann* y, *lengdina* r og *horngildið* θ. Hér er $x+iy$ tvinntöluframsetning á z í rétthyrndum hnitum, $re^{i\theta}$ framsetning í pólhnitum, (x, y) er línuvigurframsetning á z og $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ er dálkvigurframsetning á z. Með þessu erum við að líta framhjá þeim greinarmun sem gerður er á vigrunum $(1, 0)$ og $(0, 1)$ annars vegar og tvinntölunum 1 og i hins vegar. Fallgildið $f(z)$ skrifum við ýmist sem $f(x+iy)$ eða $f(x, y)$.

Nú skulum við líta á fall $f : X \to \mathbb{C}$ sem skilgreint er á einhverju hlutmengi X í $\mathbb{C}$ með gildi í $\mathbb{C}$. Við getum skrifað það sem $f = u + iv$, þar sem $u = \operatorname{Re} f$ er raunhluti f og $v = \operatorname{Im} f$ er þverhluti f. Við horfum oft framhjá þeim greinarmun sem gerður er á $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{C}$ og skrifum þá vigra ýmist sem línu- eða dálkvigra. Þannig getum við skrifað

$$f(z) = u(z) + iv(z) = (u(x, y), v(x, y)) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad z = x + iy = (x, y).$$

Línulegar varpanir

Við skulum byrja á því að skoða *línulegar varpanir*, en það eru föll af gerðinni $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sem uppfylla

$$L(z + w) = L(z) + L(w) \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

og

$$L(cz) = cL(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ef við lítum á L sem vörpun $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, þá vitum við að hægt er að skrifa hana sem

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy),$$

þar sem a, b, c og d eru rauntölur. Við getum líka lýst vörpuninni L með fylkjamargföldun sem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Þá nefnist 2×2 fylkið sem hér stendur *fylki vörpunarinnar L miðað við staðalgrunninn á $\mathbb{R}^2$*

Nú skulum við snúa þessum framsetningum yfir í tvinntalnaframsetningu. Eins og við höfum áður rifjað upp þá svarar tvinntalan 1 til vigursins $(1, 0)$ og tvinntalan i svarar til vigursins $(0, 1)$. Við skrifum því $L(1)$ í stað $L(1, 0)$ og $L(i)$ í stað $L(0, 1)$. Við fáum þá $L(1) = (a, c) = a + ic$ og $L(i) = (b, d) = b + id$ og þar með

$$L(z) = L(x + iy) = xL(1) + yL(i).$$

Nú notfærum við okkur að $x = (z + \bar{z})/2$ og $y = -i(z - \bar{z})/2$ og fáum formúluna

$$L(z) = Az + B\bar{z},$$

þar sem

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\big(L(1) - iL(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big((a + ic) - i(b + id)\big), \\ B &= \tfrac{1}{2}\big(L(1) + iL(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big((a + ic) + i(b + id)\big). \end{aligned}$$

Niðurstaða útreikninga okkar er:

Setning 1.7.1 *Sérhverja línulega vörpun $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má setja fram sem $L(z) = Az + B\bar{z}$, þar sem stuðlarnir A og B eru tvinntölur. Ef*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er fylki L miðað við staðalgrunninn á $\mathbb{R}^2$, þá er

$$A = \tfrac{1}{2}((a + d) + i(c - b)) \qquad \textit{og} \qquad B = \tfrac{1}{2}((a - d) + i(c + b))$$

$\square$

Hugsum okkur næst að við þekkjum stuðlana A og B og að við viljum ákvarða stuðlana a, b, c og d í fylki vörpunarinnar út frá þeim. Sambandið þarna á milli er einfalt, því

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re}\big(L(1)\big) = \operatorname{Re}\big(A + B\big), \\ b &= \operatorname{Re}\big(L(i)\big) = \operatorname{Re}\big(i(A - B)\big) = -\operatorname{Im}\big(A - B\big), \\ c &= \operatorname{Im}\big(L(1)\big) = \operatorname{Im}\big(A + B\big), \\ d &= \operatorname{Im}\big(L(i)\big) = \operatorname{Im}\big(i(A - B)\big) = \operatorname{Re}\big(A - B\big). \end{aligned}$$

Í tvinnfallagreiningu þarf oft að gera greinarmun á $\mathbb{R}$-*línulegum* vörpunum, en það eru nákvæmlega þær línulegu varpanir sem við höfum verið að fjalla um, og $\mathbb{C}$-*línulegum* vörpunum, en þær uppfylla

$$L(z + w) = L(z) + L(w) \quad \text{og} \quad L(cz) = cL(z), \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Það er greinilegt að sérhver $\mathbb{C}$-línuleg vörpun er $\mathbb{R}$-línuleg, því ef seinna skilyrðið gildir um sérhverja tvinntölu, þá gildir það sérstaklega um sérhverja rauntölu. Það er einnig augljóst að sérhver vörpun af gerðinni $L(z) = Az$ þar sem A er gefin tvinntala er $\mathbb{C}$-línuleg.

Hugsum okkur nú að L sé $\mathbb{C}$-línuleg og skrifum $L(z) = Az + B\bar{z}$ eins og lýst er hér að framan. Þá er $L(i) = iL(1)$ og því er

$$B = \tfrac{1}{2}\big(L(1) + iL(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big(L(1) + i^2L(1)\big) = 0,$$

svo $L(z) = Az$. Niðustaðan er því

Setning 1.7.2 *Sérhver $\mathbb{C}$-línuleg vörpun $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er af gerðinni*

$$L(z) = Az, \qquad z \in \mathbb{C},$$

þar sem A er tvinntala. □

Sýnidæmi 1.7.3 Finnið nauðsynleg og nægjanleg skilyrði, sem tvinntölurnar A og B verða að uppfylla til þess að línulega vörpunin $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sem skilgreind er með $L(z) = Az + B\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, sé gagntæk.

Lausn: Við skulum skrifa $A = \alpha + i\beta$ og $B = \gamma + i\delta$, þar sem α, β, γ og δ eru rauntölur. Þá er

$$\begin{aligned} L(z) &= Az + B\overline{z} = (\alpha + i\beta)(x + iy) + (\gamma + i\delta)(x - iy) \\ &= (\alpha + \gamma)x + (-\beta + \delta)y + i(\beta + \delta)x + i(\alpha - \gamma)y. \end{aligned}$$

Fylki vörpunarinnar L miðað við staðalgrunninn $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ í $\mathbb{R}^2$ er því

$$\begin{bmatrix} (\alpha + \gamma) & (-\beta + \delta) \\ (\beta + \delta) & (\alpha - \gamma) \end{bmatrix},$$

og ákveða þess er

$$(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) - (-\beta + \delta)(\beta + \delta) = \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 - \delta^2 = |A|^2 - |B|^2.$$

Vörpunin L er gagntæk þá og því aðeins að ákveðan sé $\neq 0$, svo svarið verður: Vörpunin L er gagntæk þá og því aðeins að $|A| \neq |B|$. □

Myndræn framsetning á vörpunum

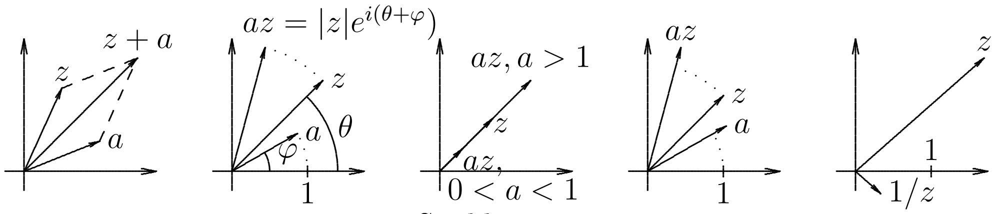
Til þess að lýsa hegðun raungildra falla á myndrænan hátt, þá teiknum við upp gröf þeirra. Graf tvinngilda fallsins $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{C}$, er hlutmengið í $\mathbb{C}^2$ sem skilgreint er með

$$\operatorname{graf} f = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2; z \in X\}.$$

Nú er $\mathbb{C}^2$ fjórvítt rúm yfir $\mathbb{R}$, en rúmskynjun flestra manna takmarkast við þrjár víddir, svo við getum ekki teiknað upp myndir af gröfum tvinnfalla. Við getum vissulega teiknað upp gröf raungildu fallanna $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ í þrívíðu rúmi og gert okkur hugmynd um $\operatorname{graf} f$ út frá þeim, en það hefur takmarkaða þýðingu. Til þess að lýsa tvinnföllum á myndrænan hátt er því oft brugðið á það ráð að skoða hvernig þau færa til punktana í $\mathbb{C}$ og lýsa á mynd afstöðunni millli z og $f(z)$. Vert er að geta þess að í þessu samhengi eru orðin *vörpun*, *færsla*, *ummyndun* o.fl. oft notuð sem samheiti fyrir orðið fall. Við skulum nú taka nokkur dæmi um þetta

Vörpun $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ af gerðinni $z \mapsto z + a$, þar sem $a \in \mathbb{C}$ nefnist *hliðrun*. Vörpun af gerðinni $z \mapsto az$, nefnist *snúningur*, ef $a \in \mathbb{C}$ og $|a| = 1$, hún nefnist *stríkkun* ef $a \in \mathbb{R}$ og

$|a| > 1$ og *herping*, ef $a \in \mathbb{R}$ og $|a| < 1$, en almennt nefnist hún *snústríkkun* ef $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vörpunin $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto 1/z$ nefnist *umhverfing*.



Hliðrun   Snúningur   Stríkkun og herping   Snústríkkun   Umhverfing

Brotnar línulegar varpanir

Hliðranir, snústríkkanir og umhverfing eru hluti af almennum flokki varpana, en fall af gerðinni

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

kallast *brotin línuleg vörpun*, *brotin línuleg færsla* eða *Möbiusarvörpun*. Við sjáum að $f(z)$ er skilgreint fyrir öll $z \in \mathbb{C}$, ef $c = 0$, en fyrir öll $z \neq -d/c$, ef $c \neq 0$. Eðlilegt er að útvíkka skilgreningarsvæði með því að bæta einum punkti, *óendanleikapunkti* ∞, við planið $\mathbb{C}$ og skilgreina þannig *útvíkkaða talnaplanið*

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Þá getum við litið á f sem vörpun

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

með því að setja

$$f(\infty) = \infty, \qquad \text{ef} \quad c = 0, \qquad \text{en}$$
$$f(-d/c) = \infty \quad \text{og} \quad f(\infty) = \lim_{|z| \to +\infty} f(z) = a/c, \qquad \text{ef} \quad c \neq 0.$$

Með þessari viðbót verður f gagntæk vörpun. Andhverfuna $f^{[-1]}$ er létt að reikna út, því

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

og það segir okkur að varpanirnar

$$f^{[-1]}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Ef við stillum stuðlum vörpunarinnar f upp í fylkið

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

þá eru stuðlar andhverfunnar $f^{[-1]}$ lesnir út úr andhverfa fylkinu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Athugið að ákveðan $ad - bc$ styttist þegar brotið er myndað.

Ef f_1 og f_2 eru tvær brotnar línulegar varpanir, þá er samskeyting þeirra f_3, $f_1 \circ f_2 = f_3$, einnig brotin línuleg vörpun. Ef

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{og} \quad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \quad \text{þá er} \quad f_3(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3},$$

þar sem stuðlarnir a_3, b_3, c_3 og d_3 fást með fylkjamargföldun,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Það er ljóst að hliðranir, snústríkkanir og umhvernig eru brotnar línulegar varpanir og þar af leiðandi eru allar samskeytingar af vörpunum af þessum þremur mismunandi gerðum einnig brotnar línulegar varpanir.

Í ljós kemur að sérhver brotin línuleg vörpun er samskeyting af hliðrunum, snústríkkunum og umhverfingu. Til þess að sjá þetta athugum við fyrst tilfellið $c = 0$, en þá er

$$f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d},$$

samsett úr snústríkkun og hliðrun. Ef $c \neq 0$, þá getum við skrifað

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{az + b}{z + d/c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a(z + d/c) - ad/c + b}{z + d/c} = \frac{a}{c} + \frac{-ad/c + b}{cz + d},$$

og sjáum að f er samsett úr snústríkkun,

$$z \mapsto cz = z_1,$$

hliðrun

$$z_1 \mapsto z_1 + d = cz + d = z_2,$$

umhverfingu

$$z_2 \mapsto 1/z_2 = \frac{1}{cz + d} = z_3,$$

snústríkkun

$$z_3 \mapsto (-ad/c + b) z_3 = \frac{-ad/c + b}{cz + d} = z_4$$

og hliðrun

$$z_4 \mapsto z_4 + a/c = a/c + \frac{-ad/c + b}{cz + d}.$$

Fastapunktar

Ef $F : M \to M$ er vörpun á einhverju mengi M, þá nefnist $p \in M$ *fastapunktur* vörpunarinnar F ef $F(p) = p$. Allir punktar í M eru fastapunktar *samsemdarvörpunarinnar* $x \mapsto x$.

Nú látum við M vera útvíkkaða talnaplanið $\widehat{\mathbb{C}}$ og f vera brotna línulega vörpun á $\widehat{\mathbb{C}}$, sem gefin er með

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ef $c = 0$, þá er $f(\infty) = \infty$ svo punkturinn ∞ er fastapunktur í þessu tilfelli. Gerum nú ráð fyrir að $p \in \mathbb{C}$ sé fastapunktur. Þá fullnægir p jöfnunni

$$\frac{a}{d}p + \frac{b}{d} = p$$

sem jafngildir

$$(a-d)p = -b.$$

Ef $a = d$, þá er f vörpunin $z \mapsto z + b/d$, en þessi vörpun hefur fastapunkt aðeins ef $b = 0$ og þá er hún samsemdarvörpunin. Ef $a \neq d$, þá fæst nákvæmlega einn fastapunktur til viðbótar við ∞ og hann er gefinn með

$$p = \frac{-b}{a-d}.$$

Þá höfum við afgreitt tilfellið $c = 0$. Gerum því ráð fyrir að $c \neq 0$. Þá eru ∞ og $-d/c$ ekki fastapunktar, svo fastapunktarnir p uppfylla

$$\frac{ap+b}{cp+d} = p,$$

sem jafngildir því að p uppfylli annars stigs jöfnu,

$$cp^2 + (d-a)p - b = 0.$$

Hún hefur í mesta lagi tvær lausnir. Niðurstaða okkar er því:

Setning 1.7.4 *Brotin línuleg vörpun, sem er ekki samsemdarvörpunin $z \mapsto z$, hefur í mesta lagi tvo fastapunkta.* □

Þriggja punkta reglan

Látum nú z_1, z_2 og z_3 vera þrjá ólíka punkta í $\mathbb{C}$ og lítum á brotnu línulegu vörpunina

$$f(z) = \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} \cdot \frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}.$$

Við fáum þá að $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ og $f(z_3) = \infty$. Það er hægt að alhæfa skilgreininguna þannig að einn punktanna z_1, z_2 eða z_3 megi vera ∞. Þá tökum við bara markgildi $|z_j| \to +\infty$ í hægri hliðinni.

Ef $z_1 = \infty$, þá skilgreinum við

$$f(z) = \lim_{|\tilde{z}_1| \to +\infty} \frac{(z - \tilde{z}_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - \tilde{z}_1)} = \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)}.$$

Það er ljóst að hægri hliðin skilgreinir vörpun með $f(\infty) = 0$, $f(z_2) = 1$ og $f(z_3) = \infty$. Ef $z_2 = \infty$, þá setjum við

$$f(z) = \lim_{|\tilde{z}_2| \to +\infty} \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(\tilde{z}_2 - z_3)}{(\tilde{z}_2 - z_1)} = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)}.$$

og út kemur vörpun sem uppfyllir $f(z_1) = 0$, $f(\infty) = 1$ og $f(z_3) = \infty$. Ef við viljum að $z_3 = \infty$, þá setjum við

$$f(z) = \lim_{|\tilde{z}_3| \to +\infty} \frac{(z - z_1)}{(z - \tilde{z}_3)} \cdot \frac{(z_2 - \tilde{z}_3)}{(z_2 - z_1)} = \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)}.$$

og við höfum $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ og $f(\infty) = \infty$.

Látum nú z_1, z_2 og z_3 vera ólíka punkta í $\widehat{\mathbb{C}}$ og setjum

$$f(z) = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}.$$

Niðurstaðan af því að taka markgildin þrjú hér að framan er sú að við eigum að skipta út svigum sem innihalda z_j og tölunni 1, ef $z_j = \infty$. Í öllum tilfellum varpast z_1 á 0, z_2 á 1 og z_3 á ∞.

Nú skulum við breyta til og taka einhverja þrjá ólíka punkta w_1, w_2 og w_3 í $\widehat{\mathbb{C}}$ í staðinn fyrir punktana 0, 1 og ∞ og spyrja okkur hvernig við finnum brotna línulega vörpun sem uppfyllir $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ og $f(z_3) = w_3$.

Þetta er leyst þannig að við finnum fyrst tvær brotnar línulegar varpanir F og G með forskriftinni hér að framan sem uppfylla $F(w_1) = 0$, $F(w_2) = 1$, $F(w_3) = \infty$, $G(z_1) = 0$, $G(z_2) = 1$ og $G(z_3) = \infty$. Þá uppfyllir samskeytingin

$$f(z) = F^{-1} \circ G(z)$$

skilyrðin $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ og $f(z_3) = w_3$.

Hugsum okkur nú að g sé önnur brotin línuleg vörpun sem uppfyllir $g(z_1) = w_1$, $g(z_2) = w_2$ og $g(z_3) = w_3$. Þá hefur vörpunin $f^{-1} \circ g(z)$ þrjá fastapunkta z_1, z_2 og z_3. Setning 1.7.4 segir nú að $f^{-1} \circ g(z) = z$ fyrir öll $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ og þar með er $f(z) = g(z)$ fyrir öll $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Niðurstaðan er því:

Setning 1.7.5 (*Þriggja punkta reglan*) *Ef gefnir eru þrír ólíkir punktar z_1, z_2 og z_3 í $\widehat{\mathbb{C}}$ og þrír ólíkir punktar w_1, w_2 og w_3 í $\widehat{\mathbb{C}}$, þá er til nákvæmlega ein brotin línuleg vörpun f sem varpar z_1 á w_1, z_2 á w_2 og z_3 á w_3. Hún er gefin með formúlunni $f = F^{-1} \circ G$ þar sem*

$$F(w) = \frac{(w - w_1)}{(w - w_3)} \cdot \frac{(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)} \quad \text{og} \quad G(z) = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}.$$

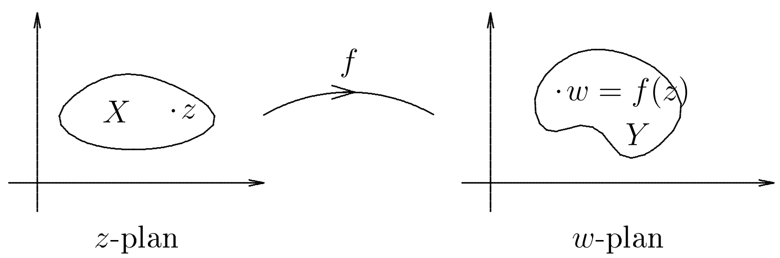
Þetta má einnig orða þannig að fallgildin $w = f(z)$ eru leyst úr úr jöfnunni

$$\frac{(w-w_1)}{(w-w_3)} \cdot \frac{(w_2-w_3)}{(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} \cdot \frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}.$$

Þessi stærðtákn á að túlka þannig að ef $z_j = \infty$ eða $w_k = \infty$ kemur fyrir innan einhverra sviga, þá á að skipta þættinum sem inniheldur z_j eða w_k út fyrir töluna 1. □

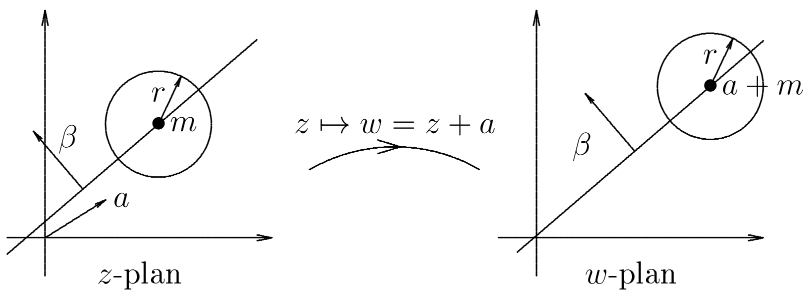
Myndir af línum og hringum

Ein leið til þess að setja tvinngild föll $f : X \to \mathbb{C}$ fram á myndrænan hátt er að líta á þau sem varpanir sem taka punkta í einu afriti af tvinntöluplaninu $\mathbb{C}$ yfir í annað afrit. Þá er X teiknað upp í z-plani og myndmengið $Y = \{w = f(z); z \in X\}$ teiknað upp í w-plani og síðan er sýnt hvernig f varpar punktum $z \in X$ á punkta $w = f(z) \in Y$. Oft er litið á einhverja fjölskyldu af ferlum í X og sýnt hvernig hún varpast yfir í Y.



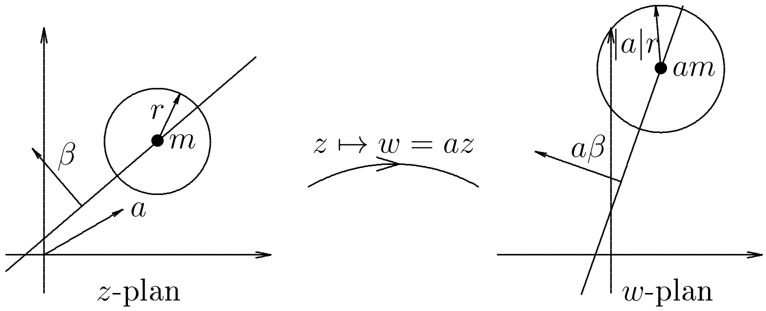
Mynd: Varpanir

Hliðrun $z \mapsto z + a$ varpar línu gegnum punktinn m með þvervigur β á línuna gegnum $m+a$ með þvervigur β og hún varpar hring með miðju m og geislann r á hring með miðju $m + a$ og geislann r.



Mynd: Hliðrun

Snústríkkun $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, varpar línu gegnum punktinn m með þvervigur β á línuna gegnum am með þvervigur $a\beta$. Til þess að sjá þetta athugum við að jafna línunnar er af gerðinni $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$ og ef við stingum $z = w/a$, þar sem $w = az$ er myndpunktur z, inn í þessa jöfnu, þá sjáum við að w verður að uppfylla $(\bar{\beta}/a)w + (\beta/\bar{a})\bar{w} + c = 0$ og þar með $\bar{a}\bar{\beta}w + a\beta\bar{w} + c|a|^2 = 0$. Snústríkkun varpar hring með miðju í m og geislann r á hring með miðju í am og geislann $|a|r$.



Mynd: Snústríkkun

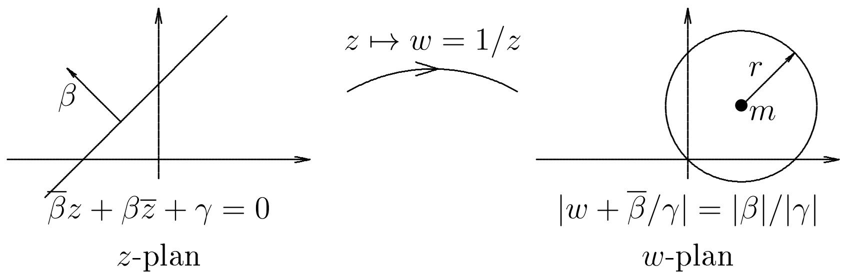
Umhverfing er gefin með $z \mapsto 1/z$, $0 \to \infty$, $\infty \to 0$. Til þess að sjá hvernig hún varpar hringum og línum, þá lítum við á mengi allra punkta z sem gefnir eru með formúlunni

$$\alpha|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \tag{1.7.1}$$

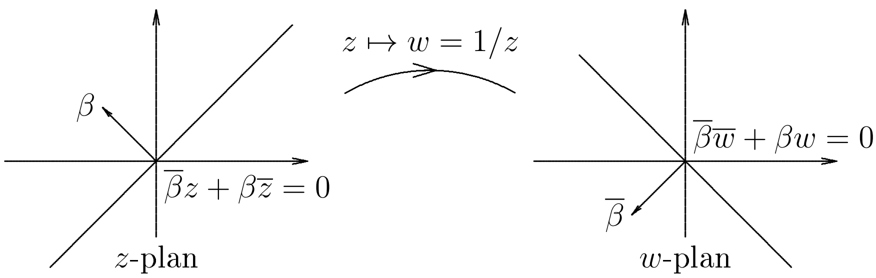
en við höfum lýst öllum þeim mengjum sem svona jafna skilgreinir. Við stingum myndpunktinum w, en hann uppfyllir $z = 1/w$, inn í þessa jöfnu og fáum að hann verður að uppfylla

$$\gamma|w|^2 + \beta w + \bar{\beta}\bar{w} + \alpha = 0. \tag{1.7.2}$$

Ef (1.7.1) er jafna línu gegnum 0 með þvervigur β, þá er $\alpha = \gamma = 0$ og við fáum að w liggur á línu gegnum 0 með þvervigur $\bar{\beta}$. Ef (1.7.1) er jafna línu sem fer ekki gegnum 0 og hefur þvervigur β, þá er $\alpha = 0$ og $\gamma \neq 0$. Við fáum því að myndmengið er hringur með miðju $m = -\bar{\beta}/\gamma$ og geislann $r = |\beta|/|\gamma|$.

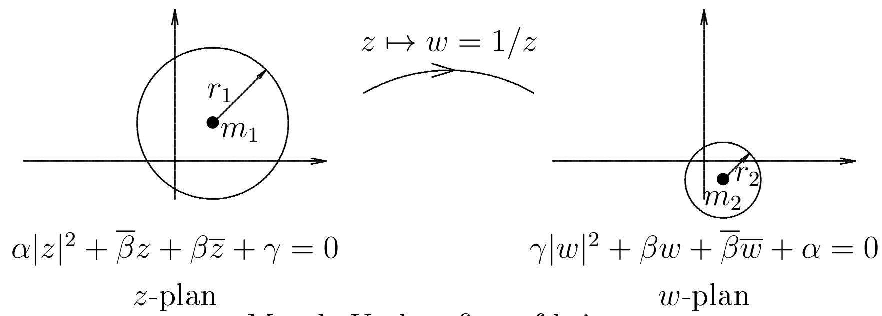


Mynd: Umhverfing af línu.

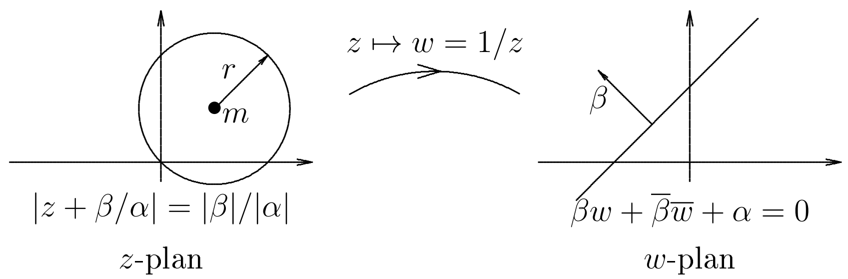


Mynd: Umhverfing af línu.

Ef (1.7.1) er jafna hrings gegnum 0, þá er $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$, miðjan er $m = -\beta/\alpha$ og geislinn er $r = |\beta|/|\alpha|$. Athugum að punkturinn $-2\beta/\alpha$ er á hringnum og því er myndmengi hans línan með þvervigur $\bar{\beta}$ gegnum punktinn $-\alpha/2\beta = -\alpha\bar{\beta}/2|\beta|^2$. Ef (1.7.1) er jafna hrings, sem inniheldur ekki 0, þá er $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, miðjan er $m = -\beta/\alpha$ og geislinn er $r = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}/|\alpha|$. Myndmengið er hringur með miðju $-\bar{\beta}/\gamma$ og geislann $\sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}/|\gamma|$.



Mynd: Umhverfing af hring.



Mynd: Umhverfing af hring.

Eins og við höfum séð, þá er sérhver brotin línuleg vörpun samsett úr hliðrunum, snústríkkunum og umhverfingu, svo niðurstaða útreikninga okkar er:

Setning 1.7.6 *Sérhver brotin línuleg vörpun varpar hring í $\mathbb{C}$ á hring eða línu og hún varpar línu á hring eða línu.* □

Sýnidæmi 1.7.7 Sýnið að sérhver brotin línuleg vörpun af gerðinni

$$z \mapsto u\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad |u| = 1, \quad |a| < 1,$$

varpi einingarhringnum $\mathbb{T}$ á sjálfan sig og einingarskífunni $\mathbb{D}$ á sjálfa sig.

Lausn: Ef z er á einingarhringnum þá er $|z| = |\bar{z}| = z\bar{z} = 1$ og við fáum því

$$|w| = \frac{|z-a|}{|z\bar{z} - \bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|z(\bar{z} - \bar{a})|} = \frac{|z-a|}{|z||(\bar{z} - \bar{a})|} = \frac{|z-a|}{|z-a|} = 1$$

Vörpunin varpar punktinum $a \in \mathbb{D}$ á $0 \in \mathbb{D}$ og af því leiðir að allir punktar í einingarskífunni lendi í $\mathbb{D}$. □

Sýnidæmi 1.7.8 Sýnið að sérhver brotin línuleg vörpun sem varpar efra hálfplaninu $\{z \in \mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z > 0\}$ á sjálft sig, sé af gerðinni

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc > 0.$$

Lausn: Gerum fyrst ráð fyrir að f sé vörpun af þessari gerð og sýnum að hún varpi efra hálfplaninu á sjálft sig. Fyrst allir stuðlarnir eru rauntölur, þá gildir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,w = \frac{1}{2i}(w-\bar{w}) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)-(a\bar{z}+b)(cz+d)}{|c\bar{z}+d|^2}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{ac|z|^2+adz+bc\bar{z}+bd-ac|z|^2-bcz-ad\bar{z}-bd)}{|c\bar{z}+d|^2}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|c\bar{z}+d|^2}\right) = \frac{\mathrm{Im}\,z(ad-bc)}{|c\bar{z}+d|^2}.
\end{aligned}$$

Fyrst $ad-bc > 0$, þá er $\mathrm{Im}\,w > 0$ ef og aðeins ef $\mathrm{Im}\,z > 0$. Þar með varpar f efra hálfplaninu á sjálft sig.

Gerum nú ráð fyrir að $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ sé brotin línuleg vörpun, þar sem $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$, og að f varpi efra hálfplaninu á sjálft sig. Við þurfum að sanna að alltaf sé hægt að velja alla stuðlana í $\mathbb{R}$ og að $ad-bc > 0$.

Fyrst f varpar efra hálfplaninu á sjálft sig, þá er

$$\mathrm{Im}\,f(x) = \lim_{y\to 0+} f(x+iy) \geq 0, \qquad \text{ef } x \in \mathbb{R} \text{ og } \; cx+d \neq 0.$$

Fyrst f er gagntæk og varpar efra hálfplaninu á sjálft sig, þá getur $\mathrm{Im}\,f(x) > 0$ ekki gilt og því er $f(x) \in \mathbb{R}$ þá og því aðeins að $x \in \mathbb{R}$ og $cx+d \neq 0$. Nú þurfum við að sanna að af þessu leiði að alltaf megi velja a, b, c og d í $\mathbb{R}$.

Ef $c = 0$, þá getum við sett a/d og b/d í stað a og b og þar með valið $d = 1$. Þá er $b = f(0) \in \mathbb{R}$ og $a = f(1) - b \in \mathbb{R}$. Ef hins vegar $c \neq 0$, þá getum við sett a/c, b/c og d/c í stað a, b og d og þar með gert ráð fyrir að $c = 1$. Þá er

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b}{x+d} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+b/x}{1+d/x} \in \mathbb{R}.$$

Nú veljum við tvær tölur $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ þannig að $t_2 = t_1 + 1$. Látum $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vera þannig að $f(x_1) = t_1$ og $f(x_2) = t_2$. Þá gilda jöfnurnar $ax_1 + b = t_1(x_1 + d)$ og $ax_2 + b = t_2(x_2 + d)$ og af þeim leiðir að $d = a(x_2 - x_1) + t_1x_1 - t_2x_2 \in \mathbb{R}$. Að lokum fáum við að $b = t_1(x_1 + d) - ax_1 \in \mathbb{R}$.

Í útreikningi okkar hér í byrjun sönnuðum við að $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ hefur í för með sér jöfnuna $\mathrm{Im}\,w = \mathrm{Im}\,f(z) = \mathrm{Im}\,z(ad-bc)/|cz+d|^2$. Nú varpar f efra hálfplaninu á sjálft sig og af því drögum við þá ályktun að $ad-bc > 0$. □

1.8 Æfingardæmi

1. Finnið allar lausnir jöfnunnar $(3+4i)^2 - 2(x-iy) = x+iy$ með $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Finnið allar lausnir jöfnunanr $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$ með $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Teiknið alla punkta $z = x+iy$ sem uppfylla eftirfarandi skilyrði.
a) $|z| < 2$ b) $|z-3| = 2$ c) $|z-2+i| < 1$
d) $|z+1| \geq |z|$ e) $|z+1| = |z-i|$

4. Sannið að

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

fyrir $n = 2, 3, 4, \ldots$ og $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

5. Notið reiknivél til þess að finna horngildi talnanna $-1+2i$, $-1-3i$ og $3-4i$ í radíönum og í gráðum.

6. Hvert er mengi allra punkta $z = x+iy$ í $\mathbb{C}$ með $x, y \in \mathbb{R}$ sem uppfylla $|z| + x = 0$?

7. Skrifið eftirfarandi tölur á pólformi $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
a) $(1+\sqrt{3}\cdot i)^2$ b) $\frac{1+i}{1-i}$ c) $(2+3i)(1-2i)$

8. Sýnið að $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ og $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$.

9. Sýnið að $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$.

10. Sýnið að $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$ og $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$.

11. Teiknið upp mengi allra punkta $z = x+iy$ í $\mathbb{C}$ sem uppfylla:
a) $|z-i| = |z+1|$, b) $|z-2i| = |z-4-2i|$,
c) $\mathrm{Re}\,\big(z+1/z\big) = \alpha x$, $\alpha > 1$, d) $\mathrm{Im}\,\big(z+1/z\big) = \alpha y$, $\alpha < 1$.

12. Notið tvinntalnareikning til þess að reikna út flatarmál þríhyrningsins með hornpunkta $1+i$, $3+4i$ og $-2-2i$.

13. Hvaða línur eru gefnar með jöfnunum:
a) $z - \bar{z} = 0$ og b) $z + \bar{z} = 0$?

14. Hvaða línur eru gefnar með jöfnunum:
a) $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0$ og b) $(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 0$?
Teiknið þær í tvinntalnaplaninu

15. Hvaða hringur er gefinn með jöfnunni $|z|^2 + (1-i)z + (1+i)\bar{z} = 0$?
Teiknið hann í tvinntalnaplaninu.

16. Finnið jöfnu línunnar sem gengur gegnum punktana $1+2i$ og $3-4i$ skrifið hana á forminu $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$.

17. Sýnið að mengi allra punkta sem uppfylla jöfnuna

$$\alpha|z|^2 + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0,$$

þar sem α og γ eru rauntölur og β er tvinntala, sé hringur þá og því aðeins að $\alpha \neq 0$ og $|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$. Sýnið jafnframt að miðja hringsins m og geislinn r séu gefin með

$$m = -\beta/\alpha \qquad \text{og} \qquad r = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}\,/|\alpha|.$$

18. (*Speglun í línu*) Látum $\ell = \{z \in \mathbb{C}; \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0\}$ vera beina línu í $\mathbb{C}$ og gerum ráð fyrir að z_1 og z_2 séu tveir punktar í $\mathbb{C}$, sem uppfylla

$$\bar{\beta}z_1 + \beta\bar{z}_2 + c = 0.$$

Sýnið að z_1 og z_2 séu spegilmyndir hvor annars í línunni ℓ.

19. (*Speglun í hring*) Látum $H = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}$ vera hringinn með miðju í a og geislann r. Við segjum að tveir punktar z_1 og z_2 séu spegilmyndir hvor annars í hringnum H, ef þeir liggja á sömu hálflínunni út frá punktinum a og margfeldi fjarlægða þeirra frá a er r^2. Sýnið að z_1 og z_2 uppfylli jöfnuna

$$(z_1 - a)\overline{(z_2 - a)} = z_1\overline{z}_2 - \overline{a}z_1 + a\overline{z}_2 + |a|^2 = r^2.$$

20. Notið reglu De Moivre og tvíliðuregluna til þess að tákna:

(a) $\cos(3\theta)$ og $\sin(3\theta)$ með $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

(b) $\cos(4\theta)$ og $\sin(4\theta)$ með $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

(c) $\cos(5\theta)$ og $\sin(5\theta)$ með $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

21. Hvenær gilda jafnaðarmerki í þríhyrningsójöfnunum $|z+w| \leq |z|+|w|$ og $||z|-|w|| \leq |z - w|$?

22. Finnið allar þriðju rætur af -1.

23. Finnið allar þriðju rætur af i.

24. Finnið allar þriðju rætur af tölunni $-2 - 2i$.

25. Finnið allar fjórðu rætur af i.

26. Finnið allar fimmtu rætur af -32.

27. Sýnið með útreikningi að formúlan

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re} w)} + i\,\operatorname{sign}(\operatorname{Im} w)\,\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re} w)}$$

gefi ferningsrót af tvinntölunni w, ef gert er ráð fyrir að w liggi ekki á neikvæða raunásnum.

28. Notið formúluna í sýnidæmi 1.3.1 til þess að reikna út $\cos(\pi/16)$ og $\sin(\pi/16)$. Finnið formúlu fyrir $\cos(\pi/2^n)$ fyrir $n \geq 2$ og sannið hana með þrepun.

29. Notið þá staðreynd að $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ og formúluna fyrir ferningsrót til þess að finna formúlu fyrir $\cos(\pi/12)$ og $\sin(\pi/12)$. Hver verður síðan formúlan fyrir $\cos(\pi/(3{\cdot}2^n))$ fyrir $n = 1, 2, 3, \ldots$?

30. Finnið allar núllstöðvar margliðanna

a) $z^2 - 2z + 8$, b) $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i$,
c) $z^2 - 4z + 3 + iz - i$, d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

31. Finnið stofnbrotaliðun á ræðu föllunum:
a) $\dfrac{5z + 1}{z^3 + z^2 - 2z}$, b) $\dfrac{3iz + (7 + 2i)}{(z^2 + 1)(z + 2)}$, c) $\dfrac{6z + 7}{4z^2 + 13z + 3}$,
d) $\dfrac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$, e) $\dfrac{3z}{(z - 1)(z + 1)^2}$, f) $\dfrac{1}{z^3 - 2z^2 + z}$,
g) $\dfrac{2z^6}{(z^3 + 1)(z^2 - 1)}$.

32. Ákvarðið allar fjórðu rætur af -1. Notið síðan ræturnar til þess að fullþátta margliðuna $z^4 + 1$ og liðið að lokum ræða fallið $z^2/(z^4 + 1)$ í stofnbrot.

33. Ákvarðið allar sjöttu rætur af -1. Notið síðan ræturnar til þess að fullþátta margliðuna $z^6 + 1$ og liðið að lokum ræða fallið $z^4/(z^6 + 1)$ í stofnbrot.

34. Finnið allar sjöttu rætur af 64, finnið fullkomna þáttun á margliðunni $z^6 - 64$ í fyrsta stigs liði og notið þáttunina til þess að finna stofnbrotaliðun á ræða fallinu $z^3/(z^6 - 64)$.

35. Skrifið $e^z = u + iv$, þar sem:

a)$z = 1 + \frac{1}{4}i\pi$, b) $z = 2 + i\pi$, c) $\frac{1}{6}(1 - i)\pi$.

36. Látum $z = x + iy$. Finnið raunhluta og þverhluta eftirtalinna stærða sem fall af x og y:

a)e^{z^2}, b) $e^{1/z}$, c) $\cos z^2$, d) $\tan z$, e) $\sinh z^2$, f) $\tanh z$.

37. Notið skilgreininguna á framlengingu hornafallanna cos og sin til þess að sýna að jafnan $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ gildir fyrir öll $z \in \mathbb{C}$.

38. Notið skilgreininguna á breiðbogaföllunum til þess að sýna að jafnan $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ gildir fyrir öll $z \in \mathbb{C}$.

39. Finnið núllstöðvar og lotur fallanna

a) $\cos z$, b) $\sin z$, c) $\tan z$, d) $\cosh z$, e) $\sinh z$, f) $\tanh z$.

40. Látum $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Sýnið að

a) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$,
b) $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x$,
c) $|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$.

41. Sýnið að fyrir allar tvinntölur z og w gildi:

a) $\cos(z - w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w$,
b) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$,
c) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,
d) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$,

42. Ákvarðið fastapunkta varpananna:

a) $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ b) $f(z) = \dfrac{3z+4}{2z-1}$ c) $f(z) = z^4$

d) $f(z) = z^2 - 1$ e) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ f) $f(z) = \dfrac{z}{z+i}$

43. Ákvarðið allar brotnar línulega varpanir f sem hafa eftirtalda eiginleika:

a) f hefur aðeins einn fastapunkt 0.

b) f hefur aðeins einn fastapunkt ∞.

c) f hefur tvo fastapunkta 1 og -1

d) f hefur tvo fastapunkta 0 og 1

e) f hefur tvo fastapunkta 0 og ∞.

44. Ákvarðið brotna línulega vörpun sem varpar 1 á 0, i á 1 og -1 á ∞. Punktarnir 1, i og -1 eru allir á einingarhringnum $\mathbb{T}$. Hvert er myndmengi hans? Hvert er myndmengi einingarskífunnar $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$?

45. Ákvarðið brotna línulega vörpun sem varpar i á $-i$, -1 á 0 og $-i$ á i. Punktarnir i, -1 og $-i$ eru allir á einingarhringnum $\mathbb{T}$. Hvert er myndmengi hans? Hvert er myndmengi einingarskífunnar $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$?

46. Ákvarðið brotna línulega vörpun sem varpar $-i$ á 0, 1 á i og i á ∞. Punktarnir $-i$, 1 og i eru allir á einingarhringnum $\mathbb{T}$. Hvert er myndmengi hans? Hvert er myndmengi einingarskífunnar $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$?

47. Ákvarðið myndir eftirtalinna varpana af einingarhringnum $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ og einingarskífunni $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$:

a) $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$, b) $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$, c) $z \mapsto \dfrac{z-1/2}{z+2}$.

48. Finnið allar brotnar línulegar varpanir sem varpa jákvæða raunásnum $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 0\}$ á sjálfan sig.

49. Finnið allar brotnar línulegar varpanir sem varpa opna jákvæða raunásnum $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 0\}$ á sjálfan sig.

Kafli 2

FÁGUÐ FÖLL

2.1 Markgildi og samfelld föll

Skífur og hringir

Áður en lengra er haldið skulum við innleiða ritháatt fyrir skífur. *Opna skífu* með miðju α og geisla ϱ táknum við með

$$S(\alpha,\varrho) = \{z \in \mathbb{C}; |z-\alpha| < \varrho\},$$

lokaða skífu með miðju α og geisla ϱ táknum við með

$$\overline{S}(\alpha,\varrho) = \{z \in \mathbb{C}; |z-\alpha| \leq \varrho\}$$

og *gataða opna skífu* með miðju α og geisla ϱ táknum við með

$$S^*(\alpha,\varrho) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z-\alpha| < \varrho\}.$$

Athugið að fallið $[a,b] \ni \theta \mapsto \alpha + \varrho e^{i\theta}$ stikar hringboga með miðju α og geislann ϱ frá punktinum $\alpha + \varrho e^{ia}$ til punktsins $\alpha + \varrho e^{ib}$ og að það stikar heilan hring ef $b - a = 2\pi$.

Opin og lokuð mengi

Hlutmengi X í $\mathbb{C}$ er sagt vera *opið* ef um sérhvern punkt $a \in X$ gildir að til er opin skífa $S(a,r)$ sem er innihaldin í X. Hlutmengi X í $\mathbb{C}$ er sagt vera *lokað* ef fyllimengi þess $\mathbb{C} \setminus X$ er opið. Þá er ljóst að mengi X er lokað þá og því aðeins að um sérhvern punkt a í fyllimenginu $\mathbb{C} \setminus X$ gildir að til er $r > 0$ þannig að $S(a,r) \subset \mathbb{C} \setminus X$.

Jaðar hlutmengis X í $\mathbb{C}$ samanstendur af öllum punktum $a \in \mathbb{C}$ þannig að sérhver opin skífa $S(a,r)$ með $r > 0$ sker bæði X og $\mathbb{C} \setminus X$. Við táknum jaðar X með ∂X. Ef X er opið, þá er $\partial X \subset \mathbb{C} \setminus X$. Ef X er lokað, þá er $\partial X \subset X$.

Punktur $a \in \mathbb{C}$ nefnist *þéttipunktur* mengisins X ef um sérhvert $r > 0$ gildir að gataða opna skífan $S^*(a,r)$ inniheldur punkta úr X.

Hlutmengi X í $\mathbb{C}$ er sagt vera *samanhangangi* ef um sérhverja tvo punkta a og b í X gildir að til er samfelldur ferill $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$ sem er innihaldinn í X. Opið samanhangandi mengi nefnist *svæði*.

Athugið að sérhver opin skífa er svæði, því sérhverja tvo punkta í henni má tengja saman með línustriki. Lokaðar skífur eru ferilsamanhangandi, og sama er að segja um gataðar skífur.

Markgildi

Látum nú X vera hlutmengi í $\mathbb{C}$ og $f : X \to \mathbb{C}$ vera fall. Við segjum að $f(z)$ stefni á tvinntöluna L þegar z stefnir á a, ef a er þéttipunktur í X og fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $\delta > 0$ þannig að

$$|f(z) - L| < \varepsilon \qquad \text{fyrir öll } z \in X \cap S^*(a, \delta).$$

Við köllum þá töluna L *markgildi f þegar z stefnir á a* og skrifum

$$\lim_{z\to a} f(z) = L \qquad \text{eða} \quad f(z) \to L \text{ ef } z \to a.$$

Við höfum nokkrar reiknireglur fyrir markgildi: Ef f og g eru tvinngild föll sem skilgreind eru á menginu X, $\lim_{z\to a} f(z) = L$ og $\lim_{z\to a} g(z) = M$, þá er

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}(f(z) + g(z)) &= \lim_{x\to a} f(z) + \lim_{x\to a} g(z) = L + M, \\
\lim_{z\to a}(f(z) - g(z)) &= \lim_{x\to a} f(z) - \lim_{x\to a} g(z) = L - M, \\
\lim_{z\to a}(f(z)g(z)) &= \big(\lim_{x\to a} f(z)\big)\big(\lim_{x\to a} g(z)\big) = LM \\
\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{x\to a} f(z)}{\lim_{x\to a} g(z)} = \frac{L}{M}.
\end{aligned}$$

Í síðustu formúlunni þarf að gera ráð fyrir að $M \neq 0$.

Samfelldni

Fallið $f : X \to \mathbb{C}$ er sagt vera samfellt í punktinum $a \in X$ ef

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Af reiknireglunum fyrir markgildi leiðir að ef f og g eru föll á mengi X með gildi í $\mathbb{C}$ sem eru samfelld í punktinum $a \in X$, þá eru $f + g$, $f - g$, fg og f/g samfelld í a og

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f(z) + g(z)) &= f(a) + g(a), \\
\lim_{x\to a}(f(z) - g(z)) &= f(a) - g(a), \\
\lim_{x\to a}(f(z)g(z)) &= f(a)g(a), \\
\lim_{x\to a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{f(a)}{g(a)}, \qquad \text{ef } \; g(a) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ef $f : X \to \mathbb{C}$ og $g : Y \to \mathbb{C}$ eru föll, $f(X) \subset Y$, a er þéttipunkur X, $b = \lim_{z\to a} f(z)$ er þéttipunktur mengisins Y og g er samfellt í b, þá er

$$\lim_{z\to a} g \circ f(z) = g(\lim_{z\to a} f(z)).$$

Ritháttur fyrir hlutafleiður

Ef f er fall af breytistærðunum $x, y, z, \dots$, þá skrifum við

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z}, \ \dots$$

og hærri afleiður táknum við með

$$\partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \partial_{xy}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \partial_{xxy}^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \ \dots .$$

Í mörgum bókum eru hlutafleiður skrifaðar sem f_x, f_y o.s.frv. Þessi ritháttur hentar okkur illa, því við notum lágvísinn til þess að tákna ýmislegt annað en hlutafleiður. Mun skýrari ritháttur, sem við notum þó ekki, er að tákna hlutafleiður með f'_x, f'_y o.s.frv.

Samfellt deildanleg föll

Við fjöllum mikið um samfelld og deildanleg föll og þess vegna er mjög hagkvæmt að innleiða ritháttt fyrir mengi allra falla sem eru samfelld á einhverju mengi. Ef X er opið hlutmengi í $\mathbb{C}$ þá látum við $C(X)$ tákna mengi allra samfelldra falla $f : X \to \mathbb{C}$. Það er til mikilla þæginda að gera frá byrjun ráð fyrir að föllin séu tvinntölugild. Við látum $C^m(X)$ tákna mengi allra m sinnum samfellt deildanlegra falla. Hér er átt við að allar hlutafleiður fallsins f af stigi $\leq m$ eru til og þar að auki samfelldar. Við skrifum $C^0(X) = C(X)$ og táknum mengi óendanlega oft deildanlegra falla með $C^\infty(X)$.

2.2 Fáguð föll

Látum $f : X \to \mathbb{C}$ vera fall á opnu hlutmengi X af $\mathbb{C}$. Ef við látum z tákna tvinnbreytistærð með gildi í X, þá getum við skrifað

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy = (x, y) \in X,$$

þar sem föllin $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$ eru raunhluti og þverhluti fallsins f. Við getum þá jafnframt litið á f sem vigurgilt fall af tveimur raunbreytistærðum

$$f : X \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Hugtök eins og samfelldni, deildanleiki og heildanleiki eru skilgreind eins og venjulega fyrir vigurgild föll. Þetta þýðir að f er samfellt á X, $f \in C(X)$, þá og því aðeins að föllin u og v séu samfelld á X, $u, v \in C(X)$. Eins er f k–sinnum samfellt deildanlegt á X, $f \in C^k(X)$ þá og því aðeins að $u, v \in C^k(X)$ og við skilgreinum hlutafleiður af f sem tvinnföllin

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v, \qquad \partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v,$$
$$\partial_x^2 f = \partial_x^2 u + i\partial_x^2 v, \qquad \partial_{xy}^2 f = \partial_{xy}^2 u + i\partial_{xy}^2 v, \qquad \partial_y^2 f = \partial_y^2 u + i\partial_y^2 v.$$

Þannig er síðan haldið áfram eftir því sem deildanleiki u og v endist. Nú ætlum við að innleiða nýtt deildanleikahugtak, þar sem við lítum á breytistærðina sem *tvinntölu* en ekki sem vigur:

$\mathbb{C}$-deildanleg föll

Skilgreining 2.2.1 Látum $f : X \to \mathbb{C}$ vera fall á opnu hlutmengi X af $\mathbb{C}$. Við segjum að f sé $\mathbb{C}$–*deildanlegt* í punktinum $a \in X$ ef markgildið

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

er til. Markgildið táknum við með $f'(a)$ og köllum það $\mathbb{C}$–*afleiðu* fallsins f í punktinum a. Fall $f : X \to \mathbb{C}$ er sagt vera *fágað* á opna menginu X ef $f \in C^1(X)$ og f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í sérhverjum punkti í X. Við látum $\mathcal{O}(X)$ tákna mengi allra fágaðra falla á X. Við segjum að f sé *fágað í punktinum* a ef til er opin grennd U um a þannig að f sé fágað í U. Fallið f er sagt vera *heilt fall* ef það er fágað á öllu $\mathbb{C}$. □

Þessi skilgreining er eins og skilgreiningin af afleiðu falls af einni raunbreytistærð.

Setning 2.2.2 *Ef f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a, þá er f samfellt í a.* □

Reiknireglur fyrir $\mathbb{C}$-afleiður

Reiknireglurnar fyrir $\mathbb{C}$-afleiður eru nánast þær sömu og reiknireglurnar fyrir afleiður falla af einni raunbreytistærð. Við tökum sannanirnar á þeim fyrir aftast í kaflanum:

Setning 2.2.3 *Látum $f, g : X \to \mathbb{C}$ vera föll, $a \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ og gerum ráð fyrir að f og g séu $\mathbb{C}$–deildanleg í a. Þá gildir*
(i) $\alpha f + \beta g$ er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(ii) (Leibniz-regla). fg er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) Ef $g(a) \neq 0$, þá er f/g $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

□

Fylgisetning 2.2.4 *$\mathcal{O}(X)$ er línulegt rúm yfir $\mathbb{C}$.* □

Ef $f_1, f_2, \ldots, f_n$ eru $\mathbb{C}$–deildanleg í a og $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, þá fáum við með þrepun að $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$f'(a) = \alpha_1 {f_1}'(a) + \cdots + \alpha_n {f_n}'(a).$$

Eins fáum við með þrepun að margfeldið $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{n} f_j{}'(a)\bigg(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} f_k(a)\bigg).$$

Athugið að af þessu leiðir formúlan

$$\frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{f_1{}'(a)}{f_1(a)} + \cdots + \frac{f_n{}'(a)}{f_n(a)}.$$

Sýnidæmi 2.2.5 (i) Allar margliður

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m, \qquad z \in \mathbb{C},$$

eru fáguð föll á öllu $\mathbb{C}$ og afleiðan er

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + m a_m z^{m-1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Til þess að sjá þetta, þá athugum við fyrst að sérhvert fastafall $f(z) = c$ er $\mathbb{C}$–deildanlegt í z og

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 0,$$

sem gefur að $f'(z) = 0$ fyrir öll $z \in \mathbb{C}$. Næst athugum við fallið $g(z) = z$. Jafnan

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = 1$$

gefur að g er $\mathbb{C}$–deildanlegt í sérhverjum punkti og $g'(z) = 1$. Með því að beita setningu 2.2.3 (ii) og þrepun fáum við síðan að fallið $h(z) = z^n$ er $\mathbb{C}$–deildanlegt í sérhverjum punkti $z \in \mathbb{C}$ og að afleiða þess er $h'(z) = nz^{n-1}$. Að lokum fæst að sérhver margliða er fágað fall, því línulegar samantektir af fáguðum föllum eru fáguð föll.

(ii) Sérhvert rætt fall $R = P/Q$, þar sem P og Q eru margliður, er fágað fall á menginu $\{z \in \mathbb{C}; Q(z) \neq 0\}$ og

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

□

Keðjureglan fyrir $\mathbb{C}$–deildanleg föll er eins og keðjureglan fyrir raunföll:

Setning 2.2.6 *Látum X og Y vera opin hlutmengi af $\mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ og $g : Y \to \mathbb{C}$ vera föll, þannig að $f(X) \subset Y$, $a \in X$, $b \in Y$, $b = f(a)$ og setjum*

$$h = g \circ f.$$

(i) Ef f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og g er $\mathbb{C}$–deildanlegt í b, þá er h $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$h'(a) = g'(b) f'(a).$$

(ii) Ef g er $\mathbb{C}$–deildanlegt í b, $g'(b) \neq 0$, h er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og f er samfellt í a, þá er f $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$f'(a) = h'(a)/g'(b)$$

.

□

Mikilvæg afleiðing af þessari setningu er:

Fylgisetning 2.2.7 *Látum X og Y vera opin hlutmengi af $\mathbb{C}$, $f : X \to Y$ vera gagntækt fall. Ef f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og $f'(a) \neq 0$, þá er andhverfa fallið $f^{[-1]}$ $\mathbb{C}$–deildanlegt í $b = f(a)$ og*

$$\big(f^{[-1]}\big)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Cauchy-Riemann-jöfnur

Nú skulum við gera ráð fyrir því að f sé $\mathbb{C}$–deildanlegt í punktinum a og huga að sambandinu milli $f'(a)$, $\partial_x f(a)$ og $\partial_y f(a)$. Ef við skrifum $a = \alpha + i\beta = (\alpha, \beta)$ og látum $h \to 0$ eftir rauntölunum, þá fáum við

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(\alpha+h,\beta)-u(\alpha,\beta)}{h} + i\frac{v(\alpha+h,\beta)-v(\alpha,\beta)}{h} \\ &= \partial_x u(a) + i\partial_x v(a) = \partial_x f(a). \end{aligned}$$

Ef við látum hins vegar $h \to 0$ eftir þvertölum, $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$, þá fáum við

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{u(\alpha,\beta+k)-u(\alpha,\beta)}{ik} + i\frac{v(\alpha,\beta+k)-v(\alpha,\beta)}{ik} \\ &= -i(\partial_y u(a) + i\partial_y v(a)) = -i\partial_y f(a). \end{aligned}$$

Við höfum því:

Setning 2.2.8 *Látum $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$ vera fall af $z = x + iy$ á opnu hlutmengi X í $\mathbb{C}$. Ef f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í $a \in X$, þá eru báðar hlutafleiðurnar $\partial_x f(a)$ og $\partial_y f(a)$ til og*

$$f'(a) = \partial_x f(a) = -i\partial_y f(a).$$

Þar með gildir Cauchy–Riemann–jafnan

$$\tfrac{1}{2}\big(\partial_x f(a) + i\partial_y f(a)\big) = 0, \tag{2.2.1}$$

og hún jafngildir hneppinu

$$\partial_x u(a) = \partial_y v(a), \qquad \partial_y u(a) = -\partial_x v(a). \tag{2.2.2}$$

□

Hlutafleiðujafnan (2.2.1) nefnist Cauchy–Riemann–jafna eins og áður er getið. Venja er að tala um jafngilda jöfnuhneppið (2.2.2) sem Cauchy–Riemann–jöfnur, í fleirtölu.

Sýnidæmi 2.2.9 Kannið hvort fallið

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 + x - 4) + i(3x^2y - y^3 + y)$$

er fágað með því að athuga hvort Cauchy-Riemann-jöfnurnar séu uppfylltar
Lausn: Við höfum

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x - 4, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x,y) = 3x^2y - y^3 + y, \end{aligned}$$

Lítum nú á hlutafleiðurnar

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 + 1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 + 1. \end{aligned}$$

Greinilegt er að Cauchy-Riemann-jöfnurnar eru uppfylltar, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ og $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, og þar með er f fágað fall. Athugið að $f(z) = z^3 + z - 4$, sem er margliða og þar með $\mathbb{C}$-deildanlegt fall. $\square$

Wirtinger-afleiður

Til þess að glöggva okkur betur á Cauchy–Riemann–jöfnunni, þá skulum við rifja það upp að fall $f : X \to \mathbb{R}^2$ er sagt vera deildanlegt í punktinum a, ef til er línuleg vörpun $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ þannig að

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}^2}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0, \tag{2.2.3}$$

þar sem $\|z\|$ táknar lengd vigursins z. Vörpunin L er ótvírætt ákvörðuð. Hún nefnist afleiða f í punktinum a og er oftast táknuð með $d_a f$, df_a eða $Df(a)$. Með því að velja vigurinn h af gerðinni $t(1,0)$ og $t(0,1)$ og láta síðan $t \to 0$, þá sjáum við að hlutafleiðurnar $\partial_x u(a)$, $\partial_y u(a)$, $\partial_x v(a)$ og $\partial_y v(a)$ eru allar til og að fylki vörpunarinnar $d_a f$ miðað við grunninn $\{(1,0),(0,1)\}$ er

$$\begin{bmatrix} \partial_x u(a) & \partial_y u(a) \\ \partial_x v(a) & \partial_y v(a) \end{bmatrix}.$$

Þetta fylki nefnist *Jacobi–fylki* f í punktinum a. Nú skrifum við $z = (x,y)$, $a = (\alpha,\beta)$ og sjáum að (2.2.3) jafngildir því að hægt sé að rita

$$f(z) = \begin{bmatrix} u(a) \\ v(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_x u(a) \\ \partial_x v(a) \end{bmatrix} (x-\alpha) + \begin{bmatrix} \partial_y u(a) \\ \partial_y v(a) \end{bmatrix} (y-\beta) + \|z-a\| F_a(z),$$

þar sem $F_a : X \to \mathbb{R}^2$ er samfellt í a og $F_a(a) = 0$. Nú skulum við líta á f sem tvinngilt fall $f = u + iv$. Þá er þessi jafna jafngild

$$f(z) = f(a) + \partial_x f(a)(x-\alpha) + \partial_y f(a)(y-\beta) + (z-a)\varphi_a(z), \tag{2.2.4}$$

þar sem $\varphi_a : X \to \mathbb{C}$ er samfellt í a og $\varphi_a(a) = 0$. Nú skrifum við

$$x - \alpha = \big((z-a) + \overline{(z-a)}\big)/2, \qquad y - \beta = \big((z-a) - \overline{(z-a)}\big)/2i$$

og fáum því

$$\begin{aligned}
&\partial_x f(a)(x-\alpha) + \partial_y f(a)(y-\beta) \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f(a) - i\partial_y f(a)\big)(z-a) + \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f(a) + i\partial_y f(a)\big)\overline{(z-a)}.
\end{aligned}$$

Skilgreining 2.2.10 Við skilgreinum fyrsta stigs hlutafleiðuvirkjana $\partial_z = \partial/\partial z$ og $\partial_{\bar z} = \partial/\partial \bar z$ með

$$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f - i\partial_y f\big) \quad \text{og} \quad \partial_{\bar z} f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f + i\partial_y f\big)$$

Tölurnar $\partial_z f(a)$ og $\partial_{\bar z} f(a)$ nefnast *Wirtinger–afleiður* fallsins f í punktinum a og virkinn $\partial_{\bar z}$ nefnist *Cauchy–Riemann–virki* □

Nú höfum við umritað (2.2.4) yfir í

$$f(z) = f(a) + \partial_z f(a)(z-a) + \partial_{\bar z} f(a)\overline{(z-a)} + (z-a)\varphi_a(z). \tag{2.2.5}$$

Hugsum okkur nú að $f : X \to \mathbb{C}$ sé eitthvert fall og að til séu tvinntölur A, B og fall $\varphi_a : X \to \mathbb{C}$, samfellt í a með $\varphi_a(a) = 0$, þannig að

$$f(z) = f(a) + A(z-a) + B\overline{(z-a)} + (z-a)\varphi_a(z). \tag{2.2.6}$$

Þá er greinilegt að f er deildanlegt í a með afleiðuna $d_a f(h) = Ah + B\bar h$ og

$$\begin{aligned}
\partial_x f(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} A + B + \varphi_a(a+h) = A + B, \\
\partial_y f(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} iA - iB + \varphi_a(a+ih) = i(A-B).
\end{aligned}$$

Ef við leysum A og B út úr þessum jöfnum, þá fáum við

$$\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f(a) - i\partial_y f(a)\big) = \partial_z f(a), \\
B &= \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f(a) + i\partial_y f(a)\big) = \partial_{\bar z} f(a).
\end{aligned}$$

Við höfum nú sannað:

Setning 2.2.11 *Látum X vera opið hlutmengi í $\mathbb{C}$, $a \in X$ og $f : X \to \mathbb{C}$ vera fall. Þá gildir:*

(i) f er deildanlegt í a þá og því aðeins að til séu tvinntölur A, B og fall $\varphi_a : X \to \mathbb{C}$, samfellt í a og með $\varphi(a) = 0$, þannig að (2.2.6) sé uppfyllt.

(ii) f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a þá og því aðeins að f sé deildanlegt í a og $\partial_{\bar{z}} f(a) = 0$. Þá er $f'(a) = \partial_z f(a)$.

(iii) f er fágað í X þá og því aðeins að f sé samfellt deildanlegt í X og uppfylli Cauchy–Riemann–jöfnuna $\partial_{\bar{z}} f = 0$ í X. Við höfum þá

$$f' = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

□

Reikningur með hlutafleiðunum með tilliti til z og $\bar{z}$ er alveg eins of reikningur með óháðu breytunum x og y. Ef fallið $f(z) = f(x+iy)$ er gefið með formúlu í x og y, þá notum við formúlurnar $x = (z+\bar{z})/2$ og $y = (z-\bar{z})/(2i)$ til þess að skipta á óháðu breytunum x og y yfir í breyturnar z og $\bar{z}$. Til þess að kanna hvort fall er fágað þá deildum við eins og þetta séu óháðar breytur og könnum hvort

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Ef $\bar{z}$ kemur alls ekki fyrir í formúlunni, þá er f fágað.

Sýnidæmi 2.2.12 Kannið hvort fallið $f(z) = |z|^2$ er fágað og reiknið út $\mathbb{C}$-afleiðuna ef hún er til.

Lausn: Við skrifum $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ og sjáum að $\partial f/\partial \bar{z} = z$. Cauchy-Riemann-jafnan er aðeins uppfyllt í punktinum $z = 0$ og því er fallið f ekki fágað í grennd við neinn punkt. □

Sýnidæmi 2.2.13 Kannið hvort fallið $f(z) = \operatorname{Re} z + i$ er fágað og reiknið út $\mathbb{C}$-afleiðuna ef hún er til.

Lausn: Hér er $f(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) + i$ og $\partial f/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}$. Fallið f er því ekki fágað. □

Sýnidæmi 2.2.14 (*Cauchy-Riemann-jöfnur á pólformi*): Leiðið út jöfnurnar

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

frá jöfnunum

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Lausn: Samkvæmt skilgreiningu á afleiðunni $\partial u/\partial r$ er

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\theta = \nabla u\cdot\mathbf{e}_r$$

þar sem $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ er einingarvigurinn í r-stefnu, og

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\theta = \nabla u\cdot\mathbf{e}_\theta$$

þar sem $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ er einingarvigurinn í θ-stefnu. Cauchy-Riemann-jöfnurnar segja að $\nabla u = (\partial v/\partial y, -\partial v/\partial x)$. Þar með er

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\sin\theta = \nabla v\cdot\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

og

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y}\cdot(-\sin\theta) - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\cos\theta = -\nabla v\cdot\mathbf{e}_r = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Auðvelt er að snúa röksemdafærslunni við til þess að sanna að af jöfnunum $\partial u/\partial r = (1/r)\partial v/\partial\theta$ og $(1/r)\partial u/\partial\theta = -\partial v/\partial r$, leiði Cauchy-Riemann-jöfnurnar.

$\square$

Sýnidæmi 2.2.15 Það er áhugaverð staðreynd að $f(z) = e^z$ er ótvírætt ákvarðað af tveimur eiginleikum:

(i) $f(x + i0) = \lim_{y\to 0} f(x + iy) = e^x$,

(ii) $f'(z) = f(z)$,

þar sem gert er ráð fyrir að f sé heilt fágað fall. Sannið þetta með því að nota Cauchy-Riemann-jöfnurnar.

Lausn: Gefur okkur að f sé heilt fágað fall, þ.e.a.s. fágað fall á öllu $\mathbb{C}$, sem uppfyllir (i) og (ii). Við ætlum að sanna að þá sé $f(z) = e^z$. Setjum $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ og $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ þar sem $z = x + iy$ og $x, y \in \mathbb{R}$. Fyrst f er $\mathbb{C}$-deildanlegt, þá fáum við jöfnurar $f'(z) = \partial f/\partial x = -i\partial f/\partial y$ þetta gefur ásamt jöfnunni $f'(z) = f(z)$ að

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = u + iv.$$

Við getum eins skrifað þetta sem tvær raunjöfnur

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = u \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -v.$$

(Athugið að fyrri hlutinn af þessum jöfnum er Cauchy-Riemann jöfnurnar.) Nú ætlum við að sýna fram á að þessar jöfnur ásamt skilyrðinu $f(x+i0) = e^x$ gefi okkur að $u(x,y) = e^x \cos y$ og $v(x,y) = e^x \sin y$. Til þess reiknum við út $\partial^2 u/\partial y^2$ og $\partial^2 v/\partial y^2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial y} = -u \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = -v.$$

Við höfum því sýnt að fyrir fast x uppfylla u og v afleiðujöfnu sem föll af y. Við vitum hvernig lausnin á þessari jöfnu er

$$u(x,y) = A(x)\cos y + B(x)\sin y \qquad \text{og} \qquad v(x,y) = C(x)\cos y + D(x)\sin y.$$

Skilyrðið $f(x+i0) = e^x$ gefur okkur að $u(x,0) = A(x) = e^x$ og $v(x,0) = C(x) = 0$. Skilyrðið $\partial u(x,0)/\partial y = -v(x,0) = 0$ gefur okkur að $B(x) = 0$ og skilyrðið $\partial v(x,0)/\partial y = u(x,0) = e^x$ gefur okkur $D(x) = e^x$. Niðurstaðan er því að

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

□

2.3 Samleitnar veldaraðir

Einu dæmin um fáguð föll sem við höfum nefnt til þessa eru margliður P, en þær eru fágaðar á öllu $\mathbb{C}$, og ræð föll $R = P/Q$, en þau eru fáguð á $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; Q(z) = 0\}$. Nú ætlum við að bæta verulega við dæmaforðann með því að sanna að öll föll, sem unnt er að setja fram með samleitnum veldaröðum, séu fáguð á samleitniskífu raðarinnar.

Ef fallið f er skilgreint á einhverju opnu mengi Y á $\mathbb{R}$ og er gefið með samleitinni veldaröð á $]a-\varrho, a+\varrho[\subset Y$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad x \in]a-\varrho, a+\varrho[,$$

þá er röðin samleitin á opnu skífunni $S(a,\varrho) \subseteq \mathbb{C}$ og við getum framlengt skilgreiningarsvæði f yfir á $S(a,\varrho)$ með því að setja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad z \in S(a,\varrho).$$

Skilgreining 2.3.1 Fall sem skilgreint er á opnu mengi U á rauntalnaásnum er sagt vera *raunfágað* ef það hefur þann eiginleika að í grennd um sérhvern punkt í U er hægt að setja f fram með samleitinni veldaröð. □

Fallið $z \mapsto 1/(1-z)$ er fágað á $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ og það gefið með geómetrísku röðinni

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad z \in S(0,1).$$

Veldisvísisfallið, hornaföllin og breiðbogaföllin eru öll gefin með samleitnum veldaröðum á $\mathbb{R}$ og fáguðu framlengingar þeirra eru því gefnar með sömu röðum á öllu $\mathbb{C}$

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$
$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$
$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Setning 2.3.2 *Gerum ráð fyrir að X sé opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, $S(\alpha, \varrho) \subset X$, að $f : X \to \mathbb{C}$ sé fall, sem gefið er á $S(\alpha, \varrho)$ með samleitinni veldaröð,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha, \varrho).$$

Þá er f fágað á $S(\alpha, \varrho)$ og

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-\alpha)^{n-1}, \qquad z \in S(\alpha, \varrho).$$

□

Sönnunina tökum við fyrir í grein 2.6. Ef $\sum_{n=0} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eru tvær samleitnar veldaraðir með samleitnigeisla ϱ_a og ϱ_b, þá höfum við fáguð föll f og g í $S(\alpha, \varrho_a)$ og $S(\alpha, \varrho_b)$ sem gefin eru með

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \qquad \text{og} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n.$$

Ef við setjum $\varrho = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$, þá eru fáguðu föllin $f+g$ og fg einnig gefin veldaröðum á skífunni $S(\alpha, \varrho)$ með

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-\alpha)^n \qquad \text{og} \qquad f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n,$$

þar sem stuðlarnir c_n eru gefnir með

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Eftirfarandi setning nefnist *samsemdarsetning fyrir samleitnar veldaraðir*:

Setning 2.3.3 *Gerum ráð fyrir að $f, g \in \mathcal{O}(S(\alpha, \varrho))$ séu gefin með samleitnum veldaröðum*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha, \varrho),$$

og gerum ráð fyrir að til sé runa $\{\alpha_j\}$ af ólíkum punktum í $S(\alpha, \varrho)$ þannig að $\alpha_j \to \alpha$ og $f(\alpha_j) = g(\alpha_j)$ fyrir öll j. Þá er $a_n = b_n$ fyrir öll n og þar með $f(z) = g(z)$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varrho)$. □

Sönnun: Fallið $h = f - g \in \mathcal{O}(S(\alpha, \varrho))$ hefur veldaraðarframsetninguna

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha, \varrho),$$

þar sem $c_n = a_n - b_n$. Við þurfum að sanna að $c_n = 0$ fyrir öll n. Gerum ráð fyrir að til sé N þannig að $c_N \neq 0$ og veljum N eins lítið og kostur er. Þá er

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = (z-\alpha)^N \sum_{n=0}^{\infty} c_{N+n}(z-\alpha)^n \\ &= (z-\alpha)^N k(z), \qquad k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{N+n}(z-\alpha)^n. \end{aligned}$$

Fallið k er fágað á $S(\alpha, \varrho)$ og þar með er það samfellt, $k(\alpha) = c_N$, svo til er opin grennd U um α þar sem $k(z) \neq 0$. Fyrst $\alpha_j \to \alpha$, þá er $\alpha_j \in U$ ef j er nógu stórt og þar með er $h(\alpha_j) = (\alpha_j - \alpha)^N k(\alpha_j) \neq 0$. Þetta er hins vegar í mótsögn við forsendu okkar að $h(\alpha_j) = 0$. ■

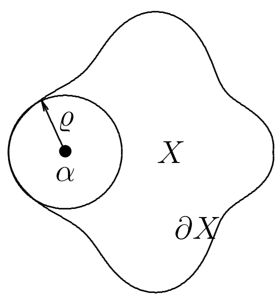
Fylgisetning 2.3.4 *Ef $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er samleitin veldaröð, I er opið bil sem inniheldur 0 og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er $a_n = 0$ fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots$.* □

Í setningu 2.3.2 sönnuðum við að sérhvert fall sem gefið er með veldaraðaframsetningu á einhverri skífu sé fágað. Nú hugum við að andhverfu þessarar staðhæfingar:

Setning 2.3.5 *Látum $X \subset \mathbb{C}$ vera opið og $f \in \mathcal{O}(X)$. Ef $\alpha \in X$, $0 < \varrho < d(\alpha, \partial X)$, þar sem $d(\alpha, \partial X)$ táknar fjarlægð punktsins α frá jaðrinum ∂X á menginu X, þá er hægt að setja f fram í $S(\alpha, \varrho)$ með samleitinni veldaröð*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha, \varrho).$$

□



Mynd: Skífa í skilgreiningarsvæði f

Þessa setningu sönnum við ekki fyrr en í kafla 3, en við skulum skoða nokkrar afleiðingar hennar.

Fylgisetning 2.3.6 *Ef $f \in \mathcal{O}(X)$, þá er $f' \in \mathcal{O}(X)$.* □

Sönnun: Ef f er sett fram með veldaröðinni $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varrho)$, þá er f' sett fram með veldaröðinni $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-\alpha)^{n-1}$, samkvæmt setningu 2.3.2, og er því fágað. ■

Nú sjáum við að fallið f' er fágað og afleiða þess f'' er einnig fáguð og þannig áfram út í hið óendanlega. Fyrir sérhvert fágað fall $f \in \mathcal{O}(X)$ skilgreinum við hærri afleiður $f^{(k)}$ með þrepun $f^{(0)} = f$ og $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$, fyrir $k \geq 1$. Við fáum síðan:

Setning 2.3.7 *Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(X)$, $\alpha \in X$ og $0 < \varrho < d(\alpha, \partial X)$. Þá er*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha, \varrho).$$

Þessi veldaröð kallast Taylor–röð fallsins f í punktinum α. □

Ef við byrjum með raunfágað fall á bili á rauntalnaásnum, þá vitum við að við getum stækkað skilgreiningarmengi þess yfir í opið mengi í $\mathbb{C}$. Sú aðgerð fellur undir eftirfarandi almenna skilgreiningu:

Skilgreining 2.3.8 Látum $f : Y \to \mathbb{C}$ vera raunfágað fall á opnu mengi Y á $\mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að $F : X \to \mathbb{C}$ sé fágað fall á opnu hlutmengi X af $\mathbb{C}$, þannig að $Y \subset X$ og $F(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in Y$. Þá kallast F *fáguð framlenging* eða *fáguð útvíkkun* á fallinu f. □

Í kafla 3 eigum við eftir sjá, að ef mengið X er samanhangandi, þá er fáguð framlenging F á f ótvírætt ákvörðuð. Við megum því nota sama tákn f fyrir upprunalega fallið og fyrir útvíkkunina.

2.4 Veldaröð veldisvísisfallsins

Enginn vafi leikur á því að veldisvísisfallið er merkilegasta fall stærðfræðigreiningarinnar. Við skilgreindum það með formúlunni

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Við hefðum eins getað notað veldaraðarframsetninguna á $x \mapsto e^x$ til þess að skilgreina fágaða framlengingu veldisvísisfallsins. Við skulum nú kanna nokkra eiginleika veldisvísisfallsins út frá veldaröðinni.

Með því að deilda röðina lið fyrir lið fáum við

$$\exp' z = \exp z, \qquad \text{eða} \qquad \frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Undirstöðueiginleiki veldisvísisfallsins er *samlagningarformúla* þess

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Hún leiðir af tvíliðureglunni ,

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = e^z e^w.
\end{aligned}$$

Flestir eiginleikar veldisvísisfallsins er leiddir út frá samlagningarformúlunni. Til dæmis sjáum við að

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Á rauntalnaásnum er veldisvísisfallið $x \mapsto e^x$ stranglega vaxandi því afleiða þess er e^x og hún er jákvæð. Við höfum líka $e^x \to +\infty$ ef $x \to \infty$, því sérhver liður í veldaröðinni með númer $n \geq 1$ er stranglega vaxandi og stefnir á óendanlegt. Af þessu leiðir síðan að $e^x = 1/e^{-x} \to 0$ ef $x \to -\infty$. Milligildissetningin segir okkur nú að veldisvísisfallið tekur öll jákvæð gildi á rauntalnaásnum.

Snúum okkur þá að gildunum á þverásnum $\{ix \in \mathbb{C}; x \in \mathbb{R}\}$. Reglurnar um reikning með samoka tvinntölum gefa okkur

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

og síðan

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{x+iy} e^{x-iy} = e^{2x}$$

Þar með er

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

og sérstaklega gildir

$$|e^{iy}| = 1, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Af þessu leiðir að veldisvísisfallið hefur enga núllstöð $e^z = e^x e^{iy}$ og hvorugur þátturinn í hægri hliðinni getur verið núll.

Með því að stinga iz inn í veldaröðina fyrir veldisvísisfallið sjáum við að formúlan $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ gildir áfram um tvinntölur $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \cos z + i \sin z.$$

Allir liðirnir í kósínus–röðinni hafa jöfn veldi og allir liðirnir í sínus–röðinni hafa oddatöluveldi, svo cos er jafnstætt, en sin er oddstætt. Þar með er

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Við leysum nú $\cos z$ og $\sin z$ út úr síðustu tveimur jöfnunum og fáum *jöfnur Eulers*

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Afleiðurnar af cos og sin getum við annað hvort reiknað með því að deilda veldaraðirnar eða með því að deilda jöfnur Eulers,

$$\cos' z = -\sin z, \qquad \sin' z = \cos z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

2.5 Lograr, rætur og horn

Veldisvísisfallið e^z er lotubundið með lotuna $2\pi i$,

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Þetta leiðir beint af þeirri staðreynd að kósínus og sínus eru lotubundin með lotuna 2π. Þar með getur exp ekki haft neina andhverfu á öllu menginu $\mathbb{C}$. Veldisföllin z^n, $n \geq 2$ geta ekki heldur haft neina andhverfu á öllu $\mathbb{C}$. Hins vegar hafa þessi föll andhverfur *frá hægri* á minni hlutmengjum í $\mathbb{C}$:

Skilgreining 2.5.1 Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{C}$. Samfellt fall $\lambda : X \to \mathbb{C}$ kallast *logri á X* ef

$$e^{\lambda(z)} = z, \qquad z \in X.$$

Samfellt fall $\varrho : X \to \mathbb{C}$ kallast *n–ta rót* á X ef

$$\big(\varrho(z)\big)^n = z, \qquad z \in X.$$

Samfellt fall $\theta : X \to \mathbb{R}$ kallast *horn á X* ef

$$z = |z|e^{i\theta(z)}, \qquad z \in X.$$

□

Helstu eiginleikar logra, róta og horna eru:

Setning 2.5.2 *(i) Ef λ er logri á X, þá er $0 \notin X$, $\lambda \in \mathcal{O}(X)$ og*

$$\lambda'(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \in X.$$

Föllin $\lambda(z) + i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ eru einnig lograr á X.

(ii) Ef λ er logri á X, þá er

$$\lambda(z) = \ln|z| + i\theta(z), \qquad z \in X,$$

þar sem $\theta : X \to \mathbb{R}$ er horn á X. Öfugt, ef $\theta : X \to \mathbb{R}$ er horn á X, þá er $\lambda(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ logri á X.
(iii) Ef ϱ er n–ta rót á X þá er $\varrho \in \mathcal{O}(X)$ og

$$\varrho'(z) = \frac{\varrho(z)}{nz}, \qquad z \in X.$$

(iv) Ef λ er logri á X, þá er $\varrho(z) = e^{\lambda(z)/n}$ n–ta rót á X. $\square$

Sönnun: (i) Veldisvísisfallið tekur ekki gildið 0, svo $z = \exp(\lambda(z)) \neq 0$ fyrir öll $z \in X$. Setning 4.2.6 (ii) gefur að λ er fágað og af jöfnunni $z = \exp(\lambda(z))$, leiðir $1 = \exp(\lambda(z))\lambda'(z) = z\lambda'(z)$. Þar með er $\lambda'(z) = 1/z$. Síðasta staðhæfingin er augljós, því veldisvísisfallið hefur lotuna $2\pi i$.

(ii) Við höfum $|z| = |e^{\lambda(z)}| = e^{\mathrm{Re}\,\lambda(z)}$ fyrir öll $z \in X$. Þetta gefur $\mathrm{Re}\,\lambda(z) = \ln|z|$ og þar með að $z = |z|e^{i\mathrm{Im}\,\lambda(z)}$. Samkvæmt skilgreiningu segir þetta að $\theta(z) = \mathrm{Im}\,\lambda(z)$ sé horn á X. Öfugt, ef θ er horn á X og við setjum $\lambda(z) = \ln|z| + i\theta(z)$, þá er $\exp(\lambda(z)) = \exp(\ln|z|)\exp(i\theta(z)) = |z|e^{i\theta(z)} = z$, fyrir öll $z \in X$.

(iii) Við höfum að $(\varrho(z))^n = z$ fyrir öll $z \in X$, svo setning 4.2.6 (ii) gefur okkur að $\varrho \in \mathcal{O}(X)$. Ef við deildum þessa jöfnu, fáum við $n(\varrho(z))^{n-1}\varrho'(z) = 1$. Við margföldum nú í gegn með $\varrho(z)$ og fáum $\varrho(z) = n(\varrho(z))^n\varrho'(z) = nz\varrho'(z)$.

(iv) $\varrho(z)^n = (\exp(\lambda(z)/n))^n = \exp(\lambda(z)) = z$, $z \in X$. $\blacksquare$

Athugið að fyrir sérhverja tvinntölu α getum við skilgreint fágað *veldisfall með veldisvísi* α með

$$z^\alpha = \exp(\alpha\lambda(z)), \qquad z \in X,$$

þar sem λ er gefinn logri á X og við fáum að

$$\frac{d}{dz}z^\alpha = \frac{d}{dz}e^{\alpha\lambda(z)} = e^{\lambda(z)}\frac{\alpha}{z} = \alpha e^{\alpha\lambda(z)}e^{-\lambda(z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\lambda(z)} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

Þetta er sem sagt gamalkunn regla, sem gildir áfram fyrir $\mathbb{C}$–afleiður. Hér verðum við að hafa í huga að skilgreiningin er algerlega háð því hvernig logrinn er skilgreindur. Ef við skiptum til dæmis á logranum $\lambda(z)$ og $\lambda(z) + 2\pi i$, þá verður

$$e^{\alpha(\lambda(z)+2\pi i)} = e^{\alpha\lambda(z)}e^{2\pi i\alpha}.$$

Ef α er heiltala þá er z^α samkvæmt þessari skilgreinininingu það sama og fæst út úr veldareglunum með heiltöluveldi, en ef α er ekki heiltala, þá er skilgreiningin háð valinu á logranum.

Ef $\alpha \in X$, þá skilgreinum við *veldisvísisfall með grunntölu* α sem fágaða fallið á $\mathbb{C}$, sem gefið er með

$$\alpha^z = e^{z\lambda(\alpha)}.$$

Athugið að skilgreiningin er háð valinu á logranum. Keðjureglan gefur

$$\frac{d}{dz}\alpha^z = \frac{d}{dz}e^{z\lambda(\alpha)} = e^{z\lambda(\alpha)} \cdot \lambda(\alpha) = \alpha^z \lambda(\alpha).$$

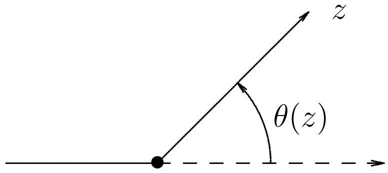
Sýnidæmi 2.5.3 Hvernig er i^i skilgreint?

Lausn: Talan i hefur lengdina 1 og horngildið $\frac{1}{2}\pi + 2\pi k$, þar sem $k \in \mathbb{Z}$. Ef X er svæði sem inniheldur i og λ er logri á X, þá er $\lambda(i) = i(\frac{1}{2}\pi + 2\pi k)$ fyrir eitthvert $k \in \mathbb{Z}$. Með þessu vali á λ verður

$$i^i = e^{i\lambda(i)} = e^{-(\frac{1}{2}\pi + 2\pi k)}.$$

Gildið i^i er því háð því hvaða logra við veljum og við höfum óendanlega marga valmöguleika. $\square$

Lítum nú á mengið $X = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sem fæst með því að skera neikvæða raunásinn og 0 út úr tvinntalnaplaninu. Við skilgreinum síðan pólhnit í X eins og myndin sýnir og veljum hornið $\theta(z)$ þannig að $-\pi < \theta(z) < \pi$, $z \in X$. Fallið



Mynd: Höfuðgrein hornsins

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Arg} z = \theta(z), \quad z \in X$$

er kallað *höfuðgrein hornsins* og við reiknuðum út formúlu fyrir því í kafla 1,

$$\mathrm{Arg}\, z = 2 \arctan\left(\frac{y}{|z| + x}\right), \qquad z = x + iy \in X.$$

Fallið

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Log} z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z), \quad z \in X,$$

er kallað *höfuðgrein lografallsins.* Fallið

$$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log} z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,$$

kallast *höfuðgrein veldisfallsins með veldisvísi* α. Tvö síðastnefndu föllin eru fágaðar framlengingar á föllunum $\ln x$ og x^α frá jákvæða raunásnum yfir í opna mengið $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ í tvinntalnaplaninu.

Sýnidæmi 2.5.4 Skrifið eftirfarandi tvinntölur á forminu $x + iy$, þar sem x og y eru rauntölur.

a) $\mathrm{Log}(-i)$. **b)** $\mathrm{Log}(1 + i)$. **c)** $\mathrm{Log}((1 + i)^{\pi i})$.

Lausn: **a)** Höfuðgrein lograns er $\mathrm{Log} z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$, $\ln|-i| = \ln 1 = 0$ og $\mathrm{Arg}(-i) = -\pi/2$. Svarið verður því $\mathrm{Log}(-i) = -i\pi/2$.

b) Við höfum $\ln|1+i| = \ln\sqrt{2}$ og $\text{Arg}(1+i) = \pi/4$ og því er $\text{Log}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$.
c) Við notum niðurstöðuna úr síðasta lið til þess að reikna $(1+i)^{i\pi} = e^{i\pi(\ln\sqrt{2}+i\pi/4)} = e^{-\pi^2/4+i\pi\ln\sqrt{2}}$. Af því leiðir að $\ln|(1+i)^{i\pi}| = \ln e^{-\pi^2/4} = -\pi^2/4$ og þar sem $0 < \pi\ln\sqrt{2} < \pi$, þá fáum við einnig $\text{Arg}((1+i)^{i\pi}) = \pi\ln\sqrt{2}$. Niðurstaðan verður því

$$\text{Log}((1+i)^{i\pi}) = -\pi^2/4 + i\pi\ln\sqrt{2} = i\pi(\ln\sqrt{2} + i\pi/4) = i\pi\text{Log}(1+i)$$

□

Athugið að gamla góða lograreglan $\text{Log}(z^\alpha) = \alpha\text{Log}z$, gildir ekki almennt.

Sýnidæmi 2.5.5 Sýnið að $\text{Log}(1+\sqrt{3}i)^4 \neq 4\text{Log}(1+\sqrt{3}i)$.
Lausn: Við byrjum á að setja töluna $1+\sqrt{3}$ fram á pólformi með horngildi á bilinu $]-\pi,\pi[$, sem er $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$. Því er

$$4\text{Log}(1+\sqrt{3}i) = 4(\ln 2 + i\pi/3) = 4\ln 2 + i4\pi/3.$$

Á hinn bóginn er $(1+\sqrt{3}i)^4 = 2^4e^{i4\pi/3} = 2^4e^{-i2\pi/3}$ og því er

$$\text{Log}(1+\sqrt{3}i)^4 = \ln 2^4 - i2\pi/3 = 4\ln 2 - i2\pi/3.$$

Niðurstaðan er að jafnaðarmerki gildir ekki. □

Sýnidæmi 2.5.6 Í pólhnitum verður höfuðgrein lograns

$$\text{Log}z = \ln r + i\theta, \qquad z = re^{i\theta},\ -\pi < \theta < \pi.$$

Þar með eru raun- og þverhluti $\text{Log}z$ gefin í pólhnitum með $u(x,y) = \ln r$ og $v(x,y) = \theta$. Við getum því auðveldlega staðfest að Log sé fágað fall, með því að beita niðurstöðunni í sýnidæmi 2.2.14

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Það er aðeins meiri fyrirhöfn að sýna fram á að Log sé fágað með því að deilda með tilliti til x og y. □

Sýnidæmi 2.5.7 Nú ætlum við að finna fágaða framlengingu á fallinu $f(x) = \arccos x$ frá bilinu $]-1,1[$ yfir á opið mengi X í $\mathbb{C}$ þannig að $f(z)$ verði andhverfa tvinngilda cos–fallsins, $\cos f(z) = z$. Við þurfum þá að byrja á því að leysa jöfnuna $z = \cos w$,

$$\begin{gathered} z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}), \\ e^{iw} - 2z + e^{-iw} = 0, \\ e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = (e^{iw} - z)^2 - z^2 + 1 = 0, \\ (e^{iw} - z)^2 = -(1 - z^2). \end{gathered}$$

Nú þurfum við að taka kvaðratrót, svo við látum Log tákna höfuðgrein lografallsins. Þá er höfuðgrein kvaðratrótarinnar fallið

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z^{\frac{1}{2}} = \exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{Log} z).$$

Þar með er

$$(1-z^2)^{1/2} = \exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(1-z^2)), \qquad z \in X = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\},$$

Mynd: Skilgreiningarsvæði arccos

því $z \in X$ þá og því aðeins að $1 - z^2 \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$. Við höldum nú áfram með útreikningana,

$$e^{iw} = z \pm i(1-z^2)^{1/2}.$$

Til þess að sjá hvort formerkið á að taka, þá athugum við að $\cos \pi/2 = 0$ segir að $z = 0$ svari til $w = \pi/2$, svo $-$ er útilokað og við sjáum jafnframt að

$$f(z) = w = -i\lambda(z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}), \qquad z \in X,$$

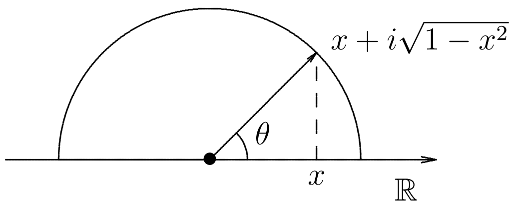
þar sem λ er einhver logri. Til þess að sýna að við megum taka λ sem höfuðgrein lografallsins, þá þurfum við að vita að myndmengið af vörpuninni

$$X \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}},$$

sé í skilgreiningarsvæði höfuðgreinarinnar. Við sjáum að þessi vörpun varpar $x \in]-1,1[$ á $x + i\sqrt{1-x^2}$ sem er punktur í efra hálfplaninu $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Nú kemur í ljós að engin rauntala liggur í myndmenginu. Það sjáum við með því að gera ráð fyrir að $z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = t \in \mathbb{R}$ og fáum

$$i(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = t - z, \qquad -(1-z^2) = t^2 + z^2 - 2tz, \qquad z = \frac{t^2+1}{2t} \in \mathbb{R}.$$



Mynd: $\theta = \arccos x$

Jafnan $z^2 = 1 + (t-z)^2$ segir okkur að $|z| \geq 1$. Við höfum því $z \notin X$.

Þar sem mengið X er samanhangandi, þá er myndmengi þess við vörpunina (2.5.7) hlutmengi í efra hálfplaninu $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\, z > 0\}$, en það er aftur hlutmengi af skilgreiningarmengi Log. Við höfum því

$$f(z) = -i\mathrm{Log}(z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}.$$

Til þess að staðfesta að þessi formúla gefi okkur virkilega fágaða framlengingu á arccos–fallinu, þá setjum við $z = x \in]-1,1[$ inn í formúluna og við sjáum á myndinni að

$$\begin{aligned} f(x) &= -i\mathrm{Log}(x + i(1-x^2)^{1/2}) \\ &= \mathrm{Arg}(x + i\sqrt{1-x^2}) - i \ln|\sqrt{1-x^2} + ix| \\ &= \mathrm{Arg}(x + i\sqrt{1-x^2}) = \arccos x, \qquad x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 2.5.8 Með sama hætti getum við fundið fágaða framlengingu á fallinu $f(x) = \arcsin x$ frá bilinu $]-1,1[$ yfir á opið mengi X í $\mathbb{C}$, þannig að $f(z)$ verði andhverfa tvinngilda sin–fallsins, $\sin f(z) = z$. Eins og í síðasta dæmi, þá byrjum við á því að leysa jöfnuna $z = \sin w$,

$$\begin{aligned} z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}), \\ e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0, \\ e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = (e^{iw} - iz)^2 + z^2 - 1 = 0, \\ (e^{iw} - iz)^2 = 1 - z^2. \end{aligned}$$

Nú þurfum við að taka kvaðratrót. Það gerum við með sama hætti og í síðasta sýndæmi og við skilgreinum X eins og þar. Þá gildir

$$e^{iw} - iz = \pm(1 - z^2)^{1/2}.$$

Til þess að sjá hvort formerkið á að taka, þá athugum við að $\sin 0 = 0$ segir að $z = 0$ svari til $w = 0$, svo $-$ er útilokað og við sjáum jafnframt að

$$f(z) = w = -i\lambda((1 - z^2)^{1/2} + iz), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\},$$

þar sem λ er einhver logri. Nú er eftir að sýna λ sé höfuðgrein lograns. Til þess þurfum við að vita að myndmengið af vörpuninni

$$X \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + iz, \tag{2.5.1}$$

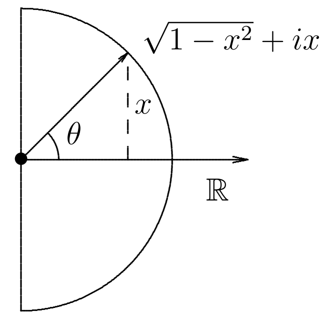
sé í skilgreiningarsvæði höfuðgreinarinnar.

Nú kemur í ljós að engin hrein þvertala liggur í myndmenginu. Það sjáum við með því að gera ráð fyrir að $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + iz = it$, $t \in \mathbb{R}$ og fáum

$$(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = i(t - z), \qquad (1 - z^2) = -(t^2 + z^2 - 2tz), \qquad z = \frac{-t^2 - 1}{2t}.$$

Þar með er z rauntala og jafnan $z^2 = 1 + (t - z)^2$ segir okkur að $|z| \geq 1$. Þar með höfum við að $z \notin X$.

Við sjáum að vörpunin 2.5.1 varpar $x \in]-1,1[$ á $\sqrt{1 - x^2} + ix$ sem er punktur í hægra hálfplaninu $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$. Þar sem mengið X er samanhangandi þá er myndmengi vörpunarinnar hlutmengi í hægra hálfplaninu $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$, en það er aftur hlutmengi af skilgreiningarmengi Log. Við höfum því



Mynd: $\theta = \arcsin x$

$$f(z) = -i\mathrm{Log}((1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + iz), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}.$$

Til þess að staðfesta að þessi formúla gefi okkur útvíkkun á arcsin–fallinu, þá setjum við $z = x \in]-1,1[$ inn í formúluna og fáum

$$f(x) = -i\mathrm{Log}((1-x^2)^{1/2} + ix) = \mathrm{Arg}(\sqrt{1-x^2} + ix) - i\ln|\sqrt{1-x^2} + ix|.$$

Við sjáum á myndinni að $\mathrm{Arg}(\sqrt{1-x^2}+ix) = \arcsin x$ og við höfum einnig að $|\sqrt{1-x^2}+ix| = 1$, svo

$$\arcsin x = -i\mathrm{Log}((1-x^2)^{1/2} + ix), \qquad x \in]-1,1[.$$

□

Sýnidæmi 2.5.9 Að lokum skulum við líta á fágaða útvíkkun á fallinu $\arctan x$, en það er raunfágað á öllu menginu $\mathbb{R}$. Við byrjum á því að leysa jöfnuna $z = \tan w$, en hún gefur

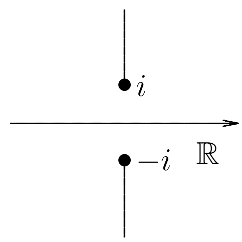
$$z = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = \frac{e^{2iw} - 1}{i(e^{2iw} + 1)}, \qquad e^{2iw} = \frac{iz+1}{-iz+1} = \frac{i-z}{i+z}.$$

Nú skulum við kanna fyrir hvaða mengi X formúlan

$$f(z) = \frac{-i}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right), \qquad z \in X,$$

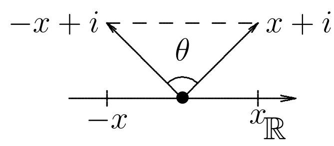
gildir. Hún gildir um öll z þannig að $(i-z)/(i+z) = t$ er ekki á neikvæða raunásnum. Við skulum taka $t \le 0$ og sjá hvaða punktar z eru þar með útilokaðir. Við leysum z út, $z = i(1-t)/(1+t)$ og sjáum þar með að z er hrein þvertala og

$$|z| = (1+|t|)/(1-|t|) \ge 1.$$



Mynd: Svæði arctan

Hér með höfum við séð að fallið f er vel skilgreint með formúlunni hér að framan ef $X = \mathbb{C} \setminus \{ix; x \in \mathbb{R}, |x| \ge 1\}$. Nú er einungis eftir að sýna fram á að $f(x) = \arctan x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Við athugum fyrst að



Mynd: $\theta = \arctan x$

$$f(x) = \frac{-i}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{i-x}{i+x}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{i-x}{i+x}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

því $|i-x| = |i+x|$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, svo $\ln(|i-x|/|i+x|) = 0$. Talan $\theta = \mathrm{Arg}((i-x)/(i+x))$ er hornið milli tvinntalnanna $i-x$ og $i+x$ og greinilega gildir $\tan(\theta/2) = x$. Þar með er niðurstaðan $f(x) = \theta/2 = \arctan x$. □

Sýnidæmi 2.5.10 Sýnið að $\dfrac{d}{dz}\arcsin z = \dfrac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| \geq 1\}.$

Lausn: Skrifum $w = \arcsin z$. Þá er $z = \sin w$. Ef við setjum $f(w) = \sin w$, þá er

$$f'(w) = \cos w = (1 - \sin^2 w)^{\frac{1}{2}} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hér er höfuðgrein kvaðratrótarinnar tekin. Í sýnidæmi 2.5.7 vorum við búin að sannfæra okkur um að $1 - z^2$ væri punktur í $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sem er skilgreiningarsvæði höfuðgreinarinnar. Samkvæmt reiknireglunni um afleiður af andhverfu falls er

$$\frac{d}{dz}\arcsin z = \big(f^{[-1]}\big)'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

□

2.6 Sannanir á nokkrum niðurstöðum

Nú tökum við fyrir sannanir á nokkrum niðurstöðum sem sleppt var í fyrr í kaflanum. Það er hyggilegt að byrja á því að setja fram skilyrðið um $\mathbb{C}$-deildanleika fram á nýjan hátt:

Hjálparsetning 2.6.1 *Látum X vera opið mengi í $\mathbb{C}$, $a \in X$ og $f : X \to \mathbb{C}$ vera fall. Þá gildir:*

(i) f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í punktinum a þá og því aðeins að til sé tvinntala A og fall $\varphi_a : X \to \mathbb{C}$, samfellt í a og með $\varphi_a(a) = 0$, þannig að

$$f(z) = f(a) + A(z-a) + (z-a)\varphi_a(z), \qquad z \in X. \tag{2.6.1}$$

Talan A er ótvírætt ákvörðuð, $A = f'(a)$.

(ii) f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í punktinum a þá og því aðeins að til sé fall $F_a : X \to \mathbb{C}$, sem er samfellt í a, þannig að

$$f(z) = f(a) + (z-a)F_a(z), \qquad z \in X.$$

Fallið F_a er ótvírætt ákvarðað og $F_a(a) = f'(a)$. □

Sönnun: (i) Ef f er $\mathbb{C}$–deildanlegt í a, þá skilgreinum við

$$\varphi_a(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} - f'(a), & z \neq a, \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Þá er ljóst að (2.6.1) gildir og $\lim_{z\to a}\varphi(z) = \varphi(a) = 0$. Öfugt, ef (2.6.1) gildir, þá er

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} A + \varphi_a(a+h) = A$$

og því er f $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og $f'(a) = A$.

(ii) leiðir beint af (i). Við tökum $F_a(z) = A + \varphi_a(z)$. ■

Sönnun á setningu 2.2.2: Samkvæmt hjálparsetningu 2.6.1 (ii) er

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a) + \lim_{z\to a}(z-a)F_a(z) = f(a).$$

■

Sönnun á setningu 2.2.3: Við beitum hjálparsetningu 2.6.1 í öllum liðunum. Látum því $F_a, G_a : X \to \mathbb{C}$ vera föll sem eru samfelld í a og uppfylla

$$f(z) = f(a) + (z-a)F_a(z), \quad g(z) = g(a) + (z-a)G_a(z), \qquad z \in X. \tag{2.6.2}$$

(i) Setjum $h = \alpha f + \beta g$. Samkvæmt hjálparsetningu 2.6.1 dugir að sanna að til sé fall H_a, sem er samfellt í a, þannig að $h(z) = h(a) + (z-a)H_a(z)$. Af (2.6.2) leiðir að $H_a = \alpha F_a + \beta G_a$ og að við fáum $h'(a) = H_a(a) = \alpha F_a(a) + \beta G_a(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

(ii) Setjum nú $h = fg$. Hér dugir að sanna að $h(z) = h(a) + (z-a)H_a(z)$ þar sem H_a er samfellt í a. Samkvæmt (2.6.2) er

$$h(z) = h(a) + (z-a)\left(F_a(z)g(a) + f(a)G_a(z) + (z-a)F_a(z)G_a(z)\right).$$

Þar með er

$$H_a(z) = F_a(z)g(a) + f(a)G_a(z) + (z-a)F_a(z)G_a(z)$$

sem er samfellt í a og $H_a(a) = F_a(a)g(a) + f(a)G_a(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) Fyrst $g(a) \neq 0$ og g er samfellt í a, þá er mengið $Y = \{z \in X; g(z) \neq 0\}$ grennd um punktinn a og við athugum að

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(a)} + (z-a)\frac{-G_a(z)}{g(a)g(z)}, \qquad z \in Y.$$

Fyrst $g(a) \neq 0$ og g er samfellt í a, þá sjáum við að fallið

$$z \mapsto \frac{-G_a(z)}{g(a)g(z)}, \qquad z \in Y,$$

er samfellt í a og þar með er $1/g$ $\mathbb{C}$–deildanlegt í a og

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-G_a(a)}{g(a)^2} = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

Reglan leiðir nú af þessari formúlu og (ii). ■

Sönnun á setningu 2.2.6: (i) Við ætlum að beita hjálparsetningu 2.6.1 (ii) og látum því $F_a : X \to \mathbb{C}$ vera samfellt í a og $G_b : Y \to \mathbb{C}$ vera samfellt í b þannig að

$$f(z) = f(a) + (z-a)F_a(z), \quad z \in X, \qquad g(w) = g(b) + (w-b)G_b(w), \quad w \in Y.$$

Þá er

$$\begin{aligned} h(z) = g(f(z)) &= g(b) + (f(z)-b)G_b(f(z)) \\ &= g(f(a)) + (f(z)-f(a))G_b(f(z)) \\ &= h(a) + (z-a)F_a(z)G_b(f(z)) \\ &= h(a) + (z-a)H_a(z). \end{aligned}$$

þar sem fallið $H_a(z) = G_b(f(z))F_a(z)$ er greinilega samfellt í a, því F_a er samfellt í a, f er samfellt í a og G_b er samfellt í $b = f(a)$. Við höfum $H_a(a) = G_b(b)F_a(a) = g'(b)f'(a)$.

(ii) Látum nú $G_b : Y \to \mathbb{C}$ vera samfellt í b, $H_a : X \to \mathbb{C}$ vera samfellt í a og gerum ráð fyrir að

$$g(w) = g(b) + (w-b)G_b(w), \quad w \in Y, \qquad h(z) = h(a) + (z-a)H_a(z), \quad z \in X.$$

Ef við stingum $w = f(z)$ inn í fyrri jöfnuna og notum að $g(f(z)) = h(z)$, þá fáum við

$$(f(z) - f(a))G_b(f(z)) = (z-a)H_a(z), \qquad z \in X.$$

Fyrst G_b er samfellt í b, $G_b(b) = g'(b) \neq 0$ og f er samfellt í a, þá er til grennd U um a þannig að $G_b(f(z)) \neq 0$ fyrir öll $z \in U$. Nú setjum við

$$F_a(z) = \begin{cases} \dfrac{H_a(z)}{G_b(f(z))}, & z \in U, \\ \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \in X \setminus U. \end{cases}$$

Þá gefur (2.6) að $f(z) = f(a) + (z-a)F_a(z)$. Greinilega er F_a samfellt í punktinum a og

$$F_a(a) = \frac{H_a(a)}{G_b(f(a))} = \frac{h'(a)}{g'(b)}.$$

■

Sönnun á fylgisetningu 2.2.7: Setjum $h(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$. Þá er h fágað á $\mathbb{C}$ og

$$z = h(z) = f \circ f^{[-1]}(z), \qquad z \in Y.$$

Hér er f í hlutverki g og $f^{[-1]}$ í hlutverki f í setningu 2.2.6 (ii). Þar með er $f^{[-1]}$ $\mathbb{C}$–deildanlegt í b og formúlan $(f^{[-1]})'(b) = 1/f'(a)$ gildir. ■

Sönnun á setningu 2.3.2: Við sönnum setninguna í sértilfellinu $\alpha = 0$. Almenna tilfellið fæst síðan með því að skipta á fallinu $f(z)$ og $f(z+\alpha)$. Við tökum $a \in S(0, \varrho)$. Samkvæmt hjálparsetningu 2.6.1 (ii) dugir að sanna að til sé fall $F_a : X \to \mathbb{C}$, þannig að $f(z) = f(a) + (z-a)F_a(z)$, F_a samfellt í a og $F_a(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}$. Við athugum fyrst að

$$\begin{aligned} z^n - a^n &= (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}), \\ \lim_{z\to a}&(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Af fyrri formúlunni leiðir

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - a^n) \\ &= f(a) + (z-a)\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \end{aligned}$$

þar sem síðasta röðin er samleitin fyrir öll $z \in S(0,\varrho)$. Við setjum því

$$F_a(z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}), & z \in S(0,\varrho), \\ \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \in X \setminus S(0,\varrho). \end{cases}$$

Við þurfum nú einungis að sanna að

$$\lim_{z\to a} F_a(z) = F_a(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}.$$

Til þess að gera það, þá tökum við r sem uppfyllir $|a| < r < \varrho$, og athugum að

$$|a_n(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1})| \leq n|a_n|r^{n-1}, \qquad |z| \leq r,$$

og jafnframt að

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < +\infty,$$

því samleitnigeisli raðarinnar er $\geq \varrho > r$. Samleitnipróf Weierstrass (setning 3.5.3) segir okkur nú að röðin sem skilgreinir F_a sé samleitin í jöfnum mæli á menginu $\overline{S}(0,r)$. Þar með er F_a samfellt í $S(0,\varrho)$ og

$$\begin{aligned} F_a(a) &= \lim_{z\to a} F_a(z) \\ &= \lim_{z\to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}. \end{aligned}$$

■

2.7 Æfingardæmi

1. Staðfestið að fallið $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ sé fágað með því að sýna að Cauchy-Riemann-jöfnurnar séu uppfylltar.

2. Sýnið að einungis sé til eitt fall $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ sem uppfyllir $f(z+w) = f(z)f(w)$ fyrir öll $z, w \in \mathbb{C}$ og $f(x) = e^x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

3. Hver eftirtalinna falla eru fáguð föll af $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$? Reiknið út Wirtinger-afleiðurnar $\partial_z f$ og $\partial_{\bar z} f$.

a) $f(z) = 1/(z-2)$, b) $f(z) = z + 1/z$,
c) $f(z) = 1/(z^2-1)$, d) $f(z) = z^2|z|^2$,
e) $f(z) = (\operatorname{Im} z)^2$, f) $f(z) = r(\cos\theta - i\sin\theta)$,

4. Kannið hvort eftirtalin föll eru fáguð með því að athuga hvort Cauchy-Riemann-jöfnurnar séu uppfylltar

a) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$,
b) $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan(y/x)$,
c) $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\mathrm{arccot}(x/y)$.

5. Látum $f : X \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ vera fágað fall þar sem $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$ tákna raun- og þverhluta. Sýnið að stiglarnir ∇u og ∇v séu innbyrðis hornréttir í sérhverjum punkti $z \in X$.

6. Hlutafleiðuvirkinn

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

nefnist *Laplace-virki*, óhliðraða hlutafleiðujafnan $\Delta u = 0$ nefnist *Laplace-jafna* og lausn $u : X \to \mathbb{C}$ á henni er sögð vera *þýtt fall* á X. Látum $f : X \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ vera fágað fall þar sem $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$ tákna raun- og þverhluta. Sýnið að bæði u og v séu þýð föll, þ.e. að þau uppfylli Laplace–jöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

7. Sýnið að $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}$.

8. Sýnið að í pólhnitum $z = re^{i\theta}$ séu hlutafleiðuvirkjarnir $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar z$ og Δ gefnir með formúlunum:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{e^{-i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

9. Sýnið að um sérhvert fágað fall $f : X \to \mathbb{C}$ gildi

$$\Big(\partial_x |f(z)|\Big)^2 + \Big(\partial_y |f(z)|\Big)^2 = |f'(z)|^2,$$

fyrir öll z þannig að $f(z) \neq 0$.

10. Látum $f : X \to \mathbb{C}$ vera fágað fall á opnu hlutmengi X í $\mathbb{C}$. Sýnið að Jacobi-ákveðan af fallinu f í punktinum z sé $|f'(z)|^2$. Látum M vera lokað og takmarkað hlutmengi af $\mathbb{C}$ og gerum ráð fyrir að f varpi einhverri opinni grennd um M gagntækt á opna grennd um $N = f(M)$. Notið formúluna fyrir breytuskipti í tvöföldu heildi til þess að sýna að

$$\iint_N \varphi(\zeta)\, d\xi d\eta = \iint_M \varphi(f(z))|f'(z)|^2\, dxdy,$$

fyrir sérhvert fall sem er samfellt í grennd um N, $\zeta = \xi + i\eta$ og $z = x + iy$.

11. Leiðið út eftirfarandi formúlur fyrir andhverfur breiðbogafallanna og finnið heppilegt mengi þar sem þær gilda:

a) $\text{arcsinh} z = \text{Log}\big(z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}}\big)$,
b) $\text{arccosh} z = \text{Log}\big(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\big)$,
c) $\text{arctanh} z = \dfrac{1}{2}\text{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

12. Leiðið út eftirfarandi formúlur fyrir afleiður andhverfu hornafallanna og breiðbogafallanna:

a) $\dfrac{d}{dz}\arcsin z = \dfrac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$, b) $\dfrac{d}{dz}\arccos z = \dfrac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$,
c) $\dfrac{d}{dz}\arctan z = \dfrac{1}{1+z^2}$, d) $\dfrac{d}{dz}\text{arcsinh} z = \dfrac{1}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$,
e) $\dfrac{d}{dz}\text{arccosh} z = \dfrac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$, f) $\dfrac{d}{dz}\text{arctanh} z = \dfrac{1}{1-z^2}$.

13. Skilgreinum $\alpha^z = e^{z\text{Log}\alpha}$. Skrifið eftirfarandi tvinntölur á forminu $x+iy$, þar sem x og y eru rauntölur, og teiknið þær á mynd:

a) $\text{Log}(-i)$, b) $(-i)^i$, c) $2^{\pi i}$, d) $(1+i)^{(1+i)}$, e) $(1+i)^i(1+i)^{-i}$.

14. Finnið allar lausnir jafnanna:

a) $\text{Log} z = \pi/4$, b) $e^z = i$, c)* $\sin z = i$, d) $\tan^2 z = -1$.

Kafli 3

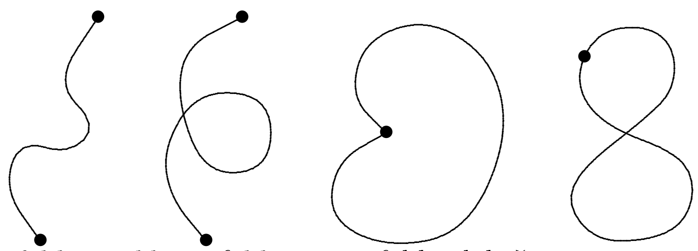
CAUCHY-SETNINGIN OG CAUCHY-FORMÚLAN

Samantekt. Við höldum nú áfram með umfjöllun okkar um fáguð föll, sem við hófum í síðasta kafla. Við rifjum fyrst upp nokkur atriði um vegheildun í tvinntalnaplaninu og setningu Greens. Síðan sönnum við undirstöðusetningu tvinnfallagreiningarinnar, sem kennd er við Cauchy. Það sem eftir er kaflans fjöllum við um afleiðingar hennar, en þær eru ótalmargar. Við beitum Cauchy-setningunni meðal annars til þess að sanna undirstöðusetningu algebrunnar og til þess að reikna út ýmis ákveðin heildi.

3.1 Vegheildun

Ferlar og vegir

Við byrjum á því að rifja upp helstu hugtök um vegheildun í tvinntöluplaninu $\mathbb{C}$. Ferill í $\mathbb{C}$ er myndmengi samfellds falls $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, þar sem gefin er stefnan frá *upphafspunkti* $u_\gamma = \gamma(a)$ til *lokapunkts* $e_\gamma = \gamma(b)$ ferilsins. Ef $u_\gamma = e_\gamma$, þá segjum við að ferilinn sé *lokaður*. Við segjum að ferillinn sé *einfaldur* ef $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ fyrir $t_1 \neq t_2$, með hugsanlegri undantekningu að $\gamma(a) = \gamma(b)$. Að ferillinn sé einfaldur þýðir nákvæmlega að hann skeri ekki sjálfan sig, hugsanlega með þeirri undantekningu að upphafs- og lokapunkturinn sé sá sami. Þó svo að ferillinn sé myndmengi samfellda fallsins γ, þá lítum við oft svo á að ferilinn sé fallið sjálft og köllum hann þá *stikaferil.* Stöku sinnum viljum við þó gera greinarmun á þessu tvennu og þá notum við táknið $\mathrm{mynd}(\gamma) = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$ til að tákna ferilinn og segjum að ferillinn sé *stikaður* með γ.



Mynd: Vegir.

Ferill sem er samfellt deildanlegur á köflum kallast *vegur*. Þetta þýðir að til er skipting $a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b$ á bilinu $[a, b]$ þannig að γ sé samfellt deildanlegt á opnu bilunum $]t_{j-1}, t_j[$, $j = 1, \dots, n$ og að í endapunktum bilanna séu bæði hægri og vinstri afleiða til,

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\gamma(t_j + h) - \gamma(t_j)}{h}, \qquad j = 0, \dots, n-1,$$
$$\lim_{h \to 0-} \frac{\gamma(t_j + h) - \gamma(t_j)}{h}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Lengd vega

Ef γ er vegur, þá er unnt að skilgreina lengd hans sem

$$L(\gamma) = \lim \sum_{j=1}^{N} |\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})|,$$

þar sem markgildið er tekið þegar fínleiki skiptingarinnar $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = b$ stefnir á núll. Með því að líta á hægri hliðina í þessari jöfnu sem Riemann-summu, þá fáum við

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Heildið er vel skilgreint, því γ er samfellt deildanlegt á köflum og því er afleiðan samfelld alls staðar nema í endanlega mörgum punktum, en í grennd um þá punkta er γ' takmarkað.

Heildi með tilliti til bogalengdar

Látum nú C vera veg og f vera samfellt fall á C. Við skilgreinum heildið af f yfir C með tilliti til bogalengdar sem

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt.$$

Við notum líka táknin

$$\int_\gamma f\, ds, \quad \int_C f\, |dz| \quad \text{og} \quad \int_\gamma f\, |dz|$$

fyrir þetta heildi, ef vegurinn C er stikaður með γ. Við sjáum að heildið er óháð stikuninni, því ef við stikum veginn með $\gamma_1 = \gamma \circ h$, þar sem $h : [c, d] \to [a, b]$, þá fáum við

$$\begin{aligned}\int_c^d f(\gamma_1(t))|\gamma_1{}'(t)|\,dt &= \int_c^d f(\gamma(h(t)))|\gamma'(h(t))h'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau))|\gamma'(\tau)|\,d\tau.\end{aligned}$$

Á þessari sömu formúlu sjáum við að heildið er jafnframt óháð stefnunni á veginum.

Vegheildi

Ef f er skrifað sem fall af $z = x + iy$ og $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, þá skilgreinum við heildið af f yfir C með tilliti til x sem

$$\int_C f\,dx = \int_\gamma f\,dx = \int_a^b f(\gamma(t))\alpha'(t)\,dt$$

og heildið af f yfir C með tilliti til y sem

$$\int_C f\,dy = \int_\gamma f\,dy = \int_a^b f(\gamma(t))\beta'(t)\,dt.$$

Ef f og g eru samfelld föll á C, þá setjum við

$$\int_C f\,dx + g\,dy = \int_C f\,dx + \int_C g\,dy.$$

Eðlilegt er að skilgreina heildið af f yfir veginn C með tilliti til z og $\bar{z}$ með formúlunum

$$\begin{aligned}\int_C f\,dz &= \int_\gamma f\,dz = \int_\gamma f\,dx + if\,dy = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt, \\ \int_C f\,d\bar{z} &= \int_\gamma f\,d\bar{z} = \int_\gamma f\,dx - if\,dy = \int_a^b f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}\,dt.\end{aligned}$$

Við athugum nú að öll þessi heildi eru háð stefnunni á C.

Heildi yfir öfugan veg

Við skilgreinum *öfuga veginn* γ_- við γ með formúlunni

$$\gamma_-(t) = \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a, b].$$

Öfugi vegurinn γ_- við γ stikar sama mengi og γ, en farið er yfir mengið í öfuga stefnu, þ.e. $u_{\gamma_-} = e_\gamma$ og $e_{\gamma_-} = u_\gamma$. Við fáum því

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\gamma_-(t))\alpha_-{}'(t)\,dt &= \int_a^b f(\gamma(a + b - t))(-\alpha'(a + b - t))\,dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(t))\alpha'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Þar með er

$$\int_{\gamma_-} f\,dx = -\int_\gamma f\,dx,$$

og á sama hátt fáum við

$$\int_{\gamma_-} f\,dy = -\int_\gamma f\,dy, \quad \int_{\gamma_-} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz \quad \text{og} \quad \int_{\gamma_-} f\,d\bar{z} = -\int_\gamma f\,d\bar{z}.$$

Mat á heildum

Við þurfum oft að meta heildi og notfærum okkur þá oftast formúluna

$$|\int_C f(z)\,dz| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leq \max_{z\in C}|f(z)|\int_\gamma |dz| = \max_{z\in C}|f(z)|L(C).$$

Sýnidæmi 3.1.1 Við höfum

$$\Big|\int_{\partial S(0,r)} \frac{dz}{1+z^2}\Big| \leq \begin{cases} \dfrac{2\pi r}{r^2-1}, & r>1,\\ \dfrac{2\pi r}{1-r^2}, & r<1. \end{cases}$$

Þetta sjáum við með því að athuga fyrst að lengd hringsins $\partial S(0,r)$ er $2\pi r$ og nota þríhyrningsójöfnuna til þess að meta heildisstofninn, $|1+z^2| \geq |1-r^2|$, ef $|z| = r$, sem gefur $1/|1+z^2| \leq 1/|1-r^2|$. □

Heildi yfir línustrik og hringboga

Mikilvægustu vegheildin, sem við þurfum að reikna út, eru tekin yfir hringboga og línustrik. Við skulum líta á stikanir á þessum ferlum. Ef α og β eru tveir punktar í $\mathbb{C}$, þá látum við $\langle\alpha,\beta\rangle$ tákna línustrikið á milli þeirra. Það er gefið með stikuninni

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = (1-t)\alpha + t\beta, \qquad \gamma'(t) = (\beta-\alpha), \qquad t \in [0,1],$$

og þar með er

$$\int_{\langle\alpha,\beta\rangle} f\,dz = (\beta-\alpha)\int_0^1 f((1-t)\alpha+t\beta)\,dt.$$

Boginn af hringnum $\partial S(\alpha,r)$, sem liggur milli horngildanna $t=a$ og $t=b$, $b-a\leq 2\pi$, er stikaður með

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \alpha + re^{it}, \qquad \gamma'(t) = ire^{it}, \qquad t \in [a,b],$$

og við fáum

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\alpha+re^{it})ire^{it}\,dt = ir\int_a^b f(\alpha+re^{it})e^{it}\,dt.$$

Auðvelt er að sýna fram á, að opið mengi X er svæði þá og því aðeins að hægt sé að tengja sérhverja tvo punkta saman með vegi, sem samanstendur af línustrikum. Einnig er auðvelt að sýna að alltaf sé hægt að velja ferilinn einfaldan og strikin samsíða hnitaásunum.

Stofnföll

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar gefur okkur

Setning 3.1.2 *Gerum ráð fyrir að X sé opið mengi og $f \in C(X)$. Ef f hefur stofnfall F, þ.e.a.s. ef til er fall $F \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $F' = f$ þá er*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(e_\gamma) - F(u_\gamma)$$

fyrir sérhvern veg γ í X. Sérstaklega gildir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

fyrir sérhvern lokaðan veg γ í X. Ef X er svæði og $f'(z) = 0$ fyrir öll $z \in X$, þá er f fastafall. □

Sönnun: Keðjureglan og undirstöðusetningin gefa okkur

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(e_\gamma) - F(u_\gamma).\end{aligned}$$

Ef X er svæði og $f' = 0$, þá tökum við tvo punkta α og β í X og veg γ með $u_\gamma = \alpha$ og $e_\gamma = \beta$. Þá er

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\gamma f'\,dz = 0,$$

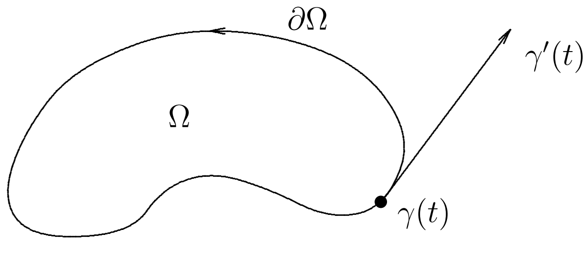
og þar með er $f(\beta) = f(\alpha)$. Þetta segir okkur að f sé fastafall. ■

3.2 Green-setningin

Nú skulum við rifja upp Green-setninguna. Við látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, Ω vera opið hlutmengi af X þannig að jaðarinn $\partial\Omega$ á Ω sé í X og gerum ráð fyrir að $\partial\Omega$ sé einfaldur lokaður vegur sem stikaður er í *jákvæða stefnu* miðað við Ω. Þetta þýðir að

$$\partial\Omega = \text{mynd}(\gamma) = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$$

þar sem $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ ef $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in]a,b[$ og í punktum þar sem γ er deildanlegt, þá liggur Ω á vinstri hönd ef staðið er í $\gamma(t)$ og horft er í stefnu $\gamma'(t)$.



Mynd: Stikun á jaðri

Þá segir Green-setningin að um sérhver $f, g \in C^1(X)$ gildi

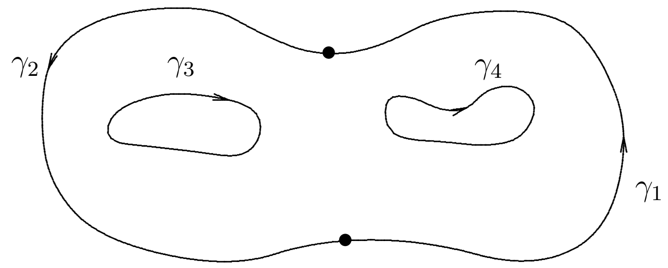
$$\int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy = \iint_{\Omega} (\partial_x g - \partial_y f)\,dxdy.$$

Þegar þessi regla hefur verið sönnuð fyrir raungild föll f og g, þá er alveg ljóst að hún gildir fyrir tvinnföll einnig, því við tökum heildin af raun- og þverhlutum fyrir hvort um sig.

Green-setningin gildir fyrir almennari svæði en þetta, nefnilega svæði Ω þar sem jaðarinn $\partial\Omega$ samanstendur af einföldum vegum $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$, sem skerast einungis í endapunktum og hafa jákvæða stefnu miðað við Ω. Þetta þýðir að

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \text{mynd}(\gamma_j) = \bigcup_{j=1}^{N} \{\gamma_j(t); t \in [a_j, b_j]\},$$

og að í punktunum $\gamma_j(t)$, þar sem vegirnir eru deildanlegir, er Ω á vinstri hönd ef staðið er í $\gamma(t)$ og horft er í stefnu $\gamma'(t)$.



Mynd: Stikun á jaðri sem myndaður er úr fjórum vegum

Við skilgreinum heildið af f með tilliti til x og g með tilliti til y yfir jaðarinn $\partial\Omega$ með formúlunni

$$\int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy = \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} f\,dx + g\,dy$$

og Green-setningin fær þá sama form og áður

$$\int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy = \iint_{\Omega} (\partial_x g - \partial_y f)\,dxdy.$$

3.3 Cauchy-setningin og Cauchy-formúlan

Cauchy-setningin

Nú skulum við gera ráð fyrir því að X sé opið hlutmengi í $\mathbb{C}$ og að $\Omega \subset X$ uppfylli forsendur Green-setningarinnar. Við tökum $f \in C^1(X)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, þar sem u og v eru raun- og þverhluti f. Þá gefur Green-setningin,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f\,dz &= \int_{\partial\Omega} (u+iv)\,(dx+idy) \\
&= \int_{\partial\Omega} u\,dx - v\,dy + i\int_{\partial\Omega} v\,dx + u\,dy \\
&= \iint_{\Omega} \big(-\partial_x v - \partial_y u\big)\,dxdy + i\iint_{\Omega} \big(\partial_x u - \partial_y v\big)\,dxdy \\
&= \iint_{\Omega} i\big(\partial_x u + i\partial_x v\big) - \big(\partial_y u + i\partial_y v\big)\,dxdy \\
&= i\iint_{\Omega} \big(\partial_x f + i\partial_y f\big)\,dxdy.
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

Nú erum við komin að undirstöðusetningu tvinnfallagreiningarinnar:

Setning 3.3.1 (*Cauchy-setningin*). *Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, $\Omega \subset X$ vera opið, þannig að $\partial\Omega \subset X$ og gerum ráð fyrir að $\partial\Omega$ samanstandi af endanlega mörgum vegum, sem skerast aðeins í endapunktum og hafa jákvæða stefnu miðað við Ω. Ef $f \in C^1(X)$, þá er*

$$\int_{\partial\Omega} f\,dz = i\iint_{\Omega} (\partial_x f + i\partial_y f)\,dxdy. \tag{3.3.2}$$

Ef $f \in \mathcal{O}(X)$, þá er

$$\int_{\partial\Omega} f\,dz = 0. \tag{3.3.3}$$

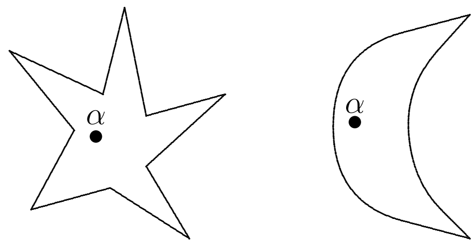
□

Sönnun: Við sönnuðum (3.3.2) með útreikningi okkar í (3.3.1). Ef $f \in \mathcal{O}(X)$, þá segir Cauchy-Riemann-jafnan, sem sett er fram í setningu 2.2.8, að $\partial_x f + i\partial_y f = 0$, svo (3.3.3) leiðir beint af (3.3.2). ■

Stjörnusvæði

Á sumum tegundum svæða fáum við miklu almennari útgáfu af Cauchy-setningunni en hér hefur verið sönnuð:

Skilgreining 3.3.2 Opið mengi X kallast *stjörnusvæði með tilliti til punktsins* $\alpha \in X$, ef línustrikið $\langle \alpha, z\rangle$ er innihaldið í X fyrir sérhvert $z \in X$. Við segjum að X sé *stjörnusvæði* ef það er stjörnusvæði með tilliti til einhvers punkts í X. □



Mynd: Dæmi um stjörnusvæði.

Setning 3.3.3 *Ef X er stjörnusvæði með tilliti til punktsins α, þá hefur sérhvert $f \in \mathcal{O}(X)$ stofnfall, sem gefið er með formúlunni*

$$F(z) = \int_{\langle \alpha, z\rangle} f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in X. \tag{3.3.4}$$

og þar með gildir

$$\int_\gamma f\, dz = 0 \tag{3.3.5}$$

fyrir sérhvern lokaðan veg γ í X. □

Sönnun: Látum $h \in \mathbb{C}$ og Ω vera þríhyrningssvæðið með hornpunktana α, z og $z+h$. Ef h er nógu lítið, þá er $z+h \in X$. Fyrst X er stjörnusvæði með tilliti til α, þá hefur þetta í för með sér að $\Omega \cup \partial\Omega \subset X$. Cauchy-setningin gefur okkur að heildið af $f(\zeta)$ með tilliti til $d\zeta$ yfir jaðarinn á Ω sé 0, en það jafngildir

$$\int_{\langle \alpha, z\rangle} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\langle z, z+h\rangle} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\langle z+h, \alpha\rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Þessa jöfnu notum við síðan til að fá

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\bigg(\int_{\langle \alpha, z+h\rangle} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\langle \alpha, z\rangle} f(\zeta)\, d\zeta\bigg) \\ &= \frac{1}{h}\int_{\langle z, z+h\rangle} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^1 f(z+ht)\, dt. \end{aligned}$$

Nú látum við $h \to 0$ og fáum þá að $F' = f$. Setning 3.1.2 gefur nú (3.3.5). ■

Cauchy-formúlan

Nú ætlum við að beita Cauchy setningunni á fallið $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ þar sem z er punktur í svæðinu Ω. Þá fæst:

Setning 3.3.4 (*Cauchy-formúlan*). *Gerum ráð fyrir sömu forsendum og í Cauchy -setningunni. Ef $f \in C^1(X)$, þá gildir um sérhvert $z \in \Omega$ að*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} \frac{(\partial_\xi + i\partial_\eta)f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta, \tag{3.3.6}$$

þar sem breytan í heildinu er $\zeta = \xi + i\eta$. Ef $f \in \mathcal{O}(X)$, þá er

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.3.7}$$

□

Sönnun: Látum $z \in \Omega$, veljum ε svo lítið að $\bar{S}(z,\varepsilon) \subset \Omega$ og setjum $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{S}(z,\varepsilon)$. Þá er $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial S(z,\varepsilon)$. Við stikum hringinn $\partial S(z,\varepsilon)$ með

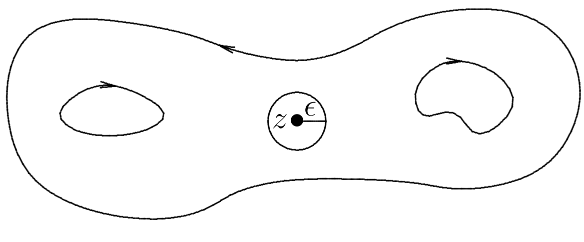
$$\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}.$$

Nú skulum við taka $f \in C^1(X)$ og beita Cauchy-setningunni á fallið

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

með tilliti til tvinnbreytunnar $\zeta = \xi + i\eta$ á svæðinu Ω_ε. Hún gefur

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \iint_{\Omega_\varepsilon} i(\partial_\xi + i\partial_\eta)\Big(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\Big)\, d\xi d\eta. \tag{3.3.8}$$



Mynd: Skífa skorin úr svæði

Nú er $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial S(z,\varepsilon)$ og öfugi vegurinn við γ_ε stikar $\partial S(z,\varepsilon)$ í jákvæða stefnu miðað við Ω_ε. Þar með er

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nú stikum við síðara heildið með $\zeta = \gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$, $d\zeta = \gamma_\varepsilon{}'(t)\, dt = i\varepsilon e^{it}\, dt$ og fáum

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - i\int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\, dt. \tag{3.3.9}$$

Fyrst fallið $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ er fágað á $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, þá gefur Leibniz-reglan okkur

$$i(\partial_\xi + i\partial_\eta)\Big(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\Big) = \frac{i(\partial_\xi f(\zeta) + i\partial_\eta f(\zeta))}{\zeta - z}. \tag{3.3.10}$$

Ef við notum nú (3.3.10) og (3.3.9), þá fáum við að (3.3.8) jafngildir

$$i\int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\, dt = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - i\iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{(\partial_\xi + i\partial_\eta)f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Ef við látum $\varepsilon \to 0$, þá fáum við markgildið $2\pi i f(z)$ í vinstri hliðinni, en tvöfalda heildið í hægri hliðinni stefnir á heildið yfir Ω. Við höfum því sannað (3.3.6) og (3.3.7) leiðir nú af Cauchy-Riemann-jöfnunni. ■

Meðalgildissetning

Í sértilfellinu að Ω sé hringskífa, þá gefur Cauchy-formúlan:

Setning 3.3.5 (*Meðalgildissetning*). *Látum X vera opið mengi í $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(X)$, $z \in X$ og gerum ráð fyrir að $\overline{S}(z, r) \subset X$. Þá gildir*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt.$$

□

Sönnun: Við beitum Cauchy-formúlunni með $\Omega = S(z, r)$. Hringinn $\partial S(z, r)$ stikum við með $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\zeta = \gamma(t) = z + re^{it}$, $d\zeta = ire^{it}\, dt$. Þá er

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt.$$

■

Setningin segir okkur að meðalgildi fágaðs falls yfir jaðar hringskífu er jafnt gildi fallsins í miðpunkti skífunnar.

Útreikningur á heildum

Nú skulum við kanna, hvernig hægt er að beita Cauchy-formúlunni til þess að reikna út ýmis ákveðin heildi. Til undirbúnings á því hugsum við okkur að forsendurnar í Cauchy-setningunni séu uppfylltar og að $Q(z)$ sé margliða af stigi m með einfaldar núllstöðvar $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ og að engin þeirra liggi á $\partial\Omega$. Við skrifum upp stofnbrotaliðun á $1/Q(z)$, sem við fjölluðum um í grein 1.5, og fáum

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{Q'(\alpha_1)(z - \alpha_1)} + \cdots + \frac{1}{Q'(\alpha_m)(z - \alpha_m)}.$$

Þá getum við liðað heildið

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{Q(z)}\,dz = \frac{1}{Q'(\alpha_1)}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\alpha_1}\,dz + \cdots + \frac{1}{Q'(\alpha_m)}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\alpha_m}\,dz.$$

Ef $\alpha_j \in \Omega$, þá gefur Cauchy-formúlan

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\alpha_j}\,dz = 2\pi i f(\alpha_j).$$

Ef aftur á móti $\alpha_j \notin \Omega$, þá er fallið $f(z)/(z-\alpha_j)$ fágað í grennd um $\Omega \cup \partial\Omega$, svo Cauchy-setningin segir okkur að heildi þess með tilliti til z yfir $\partial\Omega$ sé 0. Niðurstaða þessa útreiknings er því:

Setning 3.3.6 *Gerum ráð fyrir að forsendur Cauchy-setningarinnar séu uppfylltar og að Q sé margliða með einfaldar núllstöðvar $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ og að engin þeirra liggi á $\partial\Omega$. Þá er*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{\alpha_j \in \Omega} \frac{f(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}. \tag{3.3.11}$$

□

Heildi yfir hring

Látum nú $R(x,y) = p(x,y)/q(x,y)$ vera rætt fall af tveimur raunbreytistærðum og gerum ráð fyrir að $q(x,y) \neq 0$ ef $x^2+y^2=1$. Lítum á heildið

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta. \tag{3.3.12}$$

Við athugum að ef z er á einingarhringnum og við skrifum $z = e^{i\theta}$, þá er

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+1}{2z}, \tag{3.3.13}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{z^2-1}{2iz}, \tag{3.3.14}$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \qquad d\theta = \frac{1}{iz}dz. \tag{3.3.15}$$

Við getum því litið á heildið (3.3.12) sem vegheildi,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int_{\partial S(0,1)} R\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\Big)\frac{1}{iz}\,dz.$$

Það er alltaf hægt að umrita heildisstofninn í síðasta heildinu yfir á $f(z)/Q(z)$, þar sem Q er margliða. Í því tilfelli að Q hefur einungis einfaldar núllstöðvar, þá getum við beitt setningu 3.3.6.

Sýnidæmi 3.3.7

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \qquad a > 1.$$

Lausn: Við táknum heildið með I og getum umskrifað það sem

$$I = \int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{a+(z^2+1)/(2z)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{\partial S(0,1)} \frac{2/i}{z^2+2az+1}\, dz.$$

Nefnarinn er $Q(z) = z^2+2az+1 = (z+a)^2-(a^2-1)$ og núllstöðvar hans eru $-a\pm\sqrt{a^2-1}$. Aðeins önnur þeirra liggur innan einingarhringsins $S(0,1)$, $\alpha = -a+\sqrt{a^2-1}$. Nú er $Q'(z) = 2(z+a)$ og þar með $Q'(\alpha) = 2\sqrt{a^2-1}$. Niðurstaðan er því

$$I = 2\pi i \frac{2/i}{Q'(\alpha)} = 2\pi i \frac{2/i}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

□

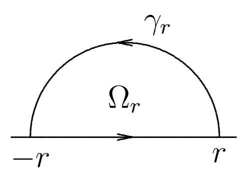
Heildi yfir rauntalnalínuna

Nú skulum við líta á heildi af gerðinni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{Q(x)}\, dx,$$

þar sem f er fágað í grennd um $\mathbb{R}\cup H_+$, þar sem $H_+ = \{z\in\mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ táknar efra hálfplanið og $Q(z)$ er margliða sem hefur einungis einfaldar núllstöðvar í efra hálfplaninu og engar núllstöðvar á $\mathbb{R}$. Nú lítum við á svæðið $\Omega_r = \{z\in\mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, |z| < r\}$, sem er hálf hringskífa. Jaðar hennar samanstendur af línustrikinu $\langle -r, r\rangle$ og hálfhringnum $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t\in[0,\pi]$. Ef við veljum nú r það stórt að allar núllstöðvar Q í H_+ séu innihaldnar í Ω_r, þá gefur setning 3.3.6 okkur að

$$\int_{\partial\Omega_r} \frac{f(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{-r}^{r} \frac{f(x)}{Q(x)}\, dx + \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{\alpha_j\in H_+} \frac{f(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$



Mynd: Lokuð hálfskífa

Ef heildið yfir γ_r stefnir á 0 þegar $r\to+\infty$, þá fæst niðurstaðan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{\alpha_j\in H_+} \frac{f(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$

Við skulum fyrst beita þessari aðferð á þekkt heildi:

Sýnidæmi 3.3.8 Notið Cauchy-formúluna til þess að sýna að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Lausn: Hér er $f(z) = 1$ og $Q(z) = 1 + z^2$. Margliðan Q hefur eina núllstöð $\alpha = i$ í H_+ og

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1} \to 0, \qquad r \to +\infty.$$

Heildið verður því $I = 2\pi i / Q'(i) = 2\pi i / 2i = \pi$. □

Sýnidæmi 3.3.9 Notið Cauchy-formúluna til þess að sýna að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq b.$$

Lausn: Hér er $f(z) = 1$ og $Q(z) = (a^2 + z^2)(b^2 + z^2)$, sem er margliða með tvær einfaldar núllstöðvar ia og ib í H_+. Við höfum $Q'(ia) = 2ia(b^2 - a^2)$ og $Q'(ib) = 2ib(a^2 - b^2)$ og því er gildi heildisins

$$I = \frac{2\pi i}{Q'(ia)} + \frac{2\pi i}{Q'(ib)} = \frac{2\pi i}{2i(b^2 - a^2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi (b-a)}{ab(b^2 - a^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

□

3.4 Cauchy-formúlan fyrir afleiður

Cauchy-formúlan fyrir afleiður

Hugsum okkur nú að forsendur Cauchy-setningarinnar séu uppfylltar og að $\partial\Omega$ sé stikað af vegunum $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$. Ef við beitum Cauchy-formúlunni og skrifum upp stikunina á heildinu, þá fæst

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - x - iy} \gamma_j{}'(t)\, dt, \qquad f \in \mathcal{O}(X).$$

Nú er heildisstofninn óendanlega oft deildanlegt fall af (x, y) á Ω, samfelldur á köflum sem fall af t á $[a_j, b_j]$ og þar að auki fágað fall af $z = x + iy$. Við megum því deilda fallið f með því að taka afleiður undir heildið,

$$f'(z) = \partial_x f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{(\gamma_j(t) - x - iy)^2} \gamma_j{}'(t)\, dt \tag{3.4.1}$$

fyrir öll $z \in \Omega$. Á þessari formúlu sjáum við síðan að f' er fágað fall og að við megum beita hlutafleiðunum undir heildið og fáum að afleiðan f'' af f' er

$$f''(z) = \partial_x^2 f(z) = \frac{2}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{(\gamma_j(t) - x - iy)^3} \gamma_j{}'(t)\, dt. \tag{3.4.2}$$

Með því að velja Ω sem opnar skífur sem þekja X, þá fáum við að $f \in C^\infty(X)$ og að allar afleiður af f eru fáguð föll. Þegar við fjölluðum um Taylor-raðir í setningu 2.3.7, þá skilgreindum við hærri $\mathbb{C}$-afleiður $f^{(n)}$ af f með

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)', \quad n \geq 1.$$

Með þrepun fáum við nú:

Setning 3.4.1 (*Cauchy-formúlan fyrir afleiður*). *Látum X og Ω vera eins og í Cauchy-setningunni og tökum $z \in \Omega$. Þá er sérhvert f í $\mathcal{O}(X)$ óendanlega oft deildanlegt á X, allar hlutafleiður af f eru fáguð föll og*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{3.4.3}$$

□

Cauchy-ójöfnur

Með því að skrifa Ω sem hringskífu, þá fáum við:

Fylgisetning 3.4.2 (*Cauchy-ójöfnur*). *Ef X er opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, $\bar{S}(\alpha, \varrho) \subset X$, $f \in \mathcal{O}(X)$ og $|f(z)| \leq M$ fyrir öll $z \in \partial S(\alpha, \varrho)$, þá er*

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq Mn!/\varrho^n.$$

□

Sönnun: Cauchy-formúlan fyrir afleiður gefur okkur

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial S(\alpha,\varrho)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - \alpha|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{n!M}{2\pi \varrho^{n+1}} \int_{\partial S(\alpha,\varrho)} |d\zeta| = \frac{Mn!}{\varrho^n}.$$

■

Útreikningur á heildum

Cauchy-formúluna fyrir afleiður er hægt að nota til þess að reikna út ákveðin heildi:

Sýnidæmi 3.4.3 Sýnið að

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}, \qquad a>1.$$

Lausn: Við notum sömu aðferð og við beittum í sýnidæmi 3.3.7 og byrjum á því að umskrifa heildið yfir í vegheildi

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{(a+(z^2+1)/(2z))^2}\cdot\frac{dz}{iz} = \int_{\partial S(0,1)} \frac{4z/i}{(z^2+2az+1)^2}\,dz \\ &= \int_{\partial S(0,1)} \frac{4z/i}{(z-\beta)^2(z-\alpha)^2}\,dz = \int_{\partial S(0,1)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz. \end{aligned}$$

Í næst síðasta heildinu höfum við þáttað $z^2+2az+1=(z-\alpha)(z-\beta)$ þar sem núllstöðvarnar eru $\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$ og $\beta=-a-\sqrt{a^2-1}$. Aðeins önnur þeirra α er innan einingarhringsins $S(0,1)$. Í síðasta heildinu höfum við sett $f(z)=4z/i(z-\beta)^2$ og Cauchy-setningin fyrir afleiður gefur okkur því

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i f'(\alpha) = 8\pi\left(\frac{1}{(z-\beta)^2}-\frac{2z}{(z-\beta)^3}\right)\Bigg|_{z=\alpha} \\ &= 8\pi\frac{-\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)^3} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 3.4.4 Sýnið að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Lausn: Við látum Ω_r tákna hálfu hringskífuna $\Omega_r=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im} z>0, |z|<r\}$. Þá er

$$\int_{-r}^{r}\frac{dx}{(1+x^2)^2}+\int_{\gamma_r}\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_{\partial\Omega_r}\frac{dz}{(z-i)^2(z+i)^2} = \int_{\partial\Omega_r}\frac{f(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i f'(i),$$

þar sem $f(z)=1/(z+i)^2$ og $f'(z)=-2/(z+i)^3$. Við sjáum að heildið yfir γ_r stefnir á 0 ef $r\to+\infty$, svo $I=2\pi i(-2)/(2i)^3=\pi/2$. □

Setning Morera

Eftirfarandi setning er andhverfa Cauchy-setningarinnar:

Setning 3.4.5 (*Morera*). *Látum X vera opið mengi í $\mathbb{C}$, $f\in C(X)$ og gerum ráð fyrir að*

$$\int_{\partial\Omega} f\,dz = 0$$

fyrir sérhvert þríhyrningssvæði Ω þannig að $\Omega\cup\partial\Omega\subset X$. Þá er $f\in\mathcal{O}(X)$. □

Sönnun: Látum $S(\alpha,r)$ vera einhverja opna hringskífu sem er innihaldin í X. Allar hringskífur eru stjörnusvæði, svo með sömu röksemdafærslu og í sönnuninni á setningu 3.3.3, þá sjáum við að til er fall $F\in\mathcal{O}(S(\alpha,r))$, þannig að $F'=f$ í $S(\alpha,r)$. Samkvæmt setningu 3.4.1 er f fágað. ■

Undirstöðusetning algebrunnar

Ein áhugaverð afleiðing af Cauchy-ójöfnunum er:

Setning 3.4.6 (*Liouville*). *Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ og gerum ráð fyrir að f sé takmarkað fall. Þá er f fasti.* □

Sönnun: Gerum ráð fyrir að $|f(z)| \leq M$ fyrir öll $z \in \mathbb{C}$. Látum $z \in \mathbb{C}$ og $\varrho > 0$. Ójöfnur Cauchy gefa $|f'(z)| \leq M/\varrho$. Við látum $\varrho \to +\infty$ og fáum að $f'(z) = 0$. Þar með er f fastafall. ■

Sem afleiðingu af setningu Liouville fáum við:

Setning 3.4.7 (*Undirstöðusetning algebrunnar*). *Sérhver margliða af af stigi $n \geq 1$ með stuðla í $\mathbb{C}$ hefur núllstöð í $\mathbb{C}$.* □

Sönnun: Gerum ráð fyrir að P hafi enga núllstöð og skilgreinum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ með $f(z) = 1/P(z)$. Fyrst P er af stigi $n \geq 1$, þá er $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$ og þar með er f takmarkað fall. Setning Liouville segir okkur að f sé fastafall og þar með er P fastafall. Þetta er mótsögn, því margliða af stigi $n \geq 1$ er ekki fastafall. ■

3.5 Samleitni í jöfnum mæli

Í útreikningum okkar þurfum við oft að vita hvort formúlur eins og

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \alpha} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) &= \lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to \alpha} f_n(t), \\
\lim_{t \to \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \to \alpha} f_n(t) \\
\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt &= \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(t)\, dt, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt, \\
\frac{d}{dt} \lim_{n \to \infty} f_n(t) &= \lim_{n \to \infty} \frac{d}{dt} f_n(t), \\
\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} f_n(t),
\end{aligned}$$

gildi, þar sem $\{f_n\}$ er runa af föllum sem skilgreind eru á bilinu $[a, b]$. Eins getum við þurft að vita hvort markfall samleitinnar fallarunu sé samfellt eða deildanlegt. Við ætlum nú að fjalla almennt um skilyrði á rununa $\{f_n\}$ sem tryggja að þessar formúlur gildi.

Skilgreiningar og einfaldar afleiðingar þeirra

Við byrjum á því að rifja upp skilgreininguna á samleitni fallaruna. Látum A vera mengi og $\{f_n\}$ vera runu af föllum $f_n : A \to \mathbb{C}$. Við segjum að runan $\{f_n\}$ stefni á fallið f, og táknum það með

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{og} \qquad f_n \to f,$$

ef talnarunan $\{f_n(a)\}$ stefnir á $f(a)$ fyrir öll $a \in A$. Þetta þýðir að fyrir sérhvert $a \in A$ og sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $N > 0$ þannig að

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll} \quad n \geq N.$$

Talan N getur verið háð bæði a og ε, $N = N(a, \varepsilon)$. Ef hægt er að velja töluna N *óháð* a, þá segjum við að fallarunan $\{f_n\}$ stefni á fallið f *í jöfnum mæli á* A:

Skilgreining 3.5.1 Látum A vera mengi og $\{f_n\}$ vera runu af föllum á A með gildi í $\mathbb{C}$. Við segjum að $\{f_n\}$ stefni á fallið f *í jöfnum mæli* á A, ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til N þannig að

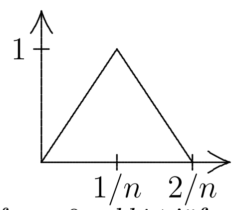
$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og öll } a \in A.$$

Við segjum að $\{f_n\}$ sé *samleitin í jöfnum mæli á* A, ef til er fall f þannig að $\{f_n\}$ stefni á f í jöfnum mæli á A. Við segjum að fallaröðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé *samleitin í jöfnum mæli* ef runan af hlutsummum $\{\sum_{k=0}^{n} f_k\}$ er samleitin í jöfnum mæli. Ef fallaröðin $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$ er samleitin í jöfnum mæli á A, þá segjum við að $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé *alsamleitin í jöfnum mæli* á menginu A. $\square$

Í því tilfelli að f_n og f eru raungild föll má einnig orða skilgreininguna svo, að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ sé til $N = N(\varepsilon)$, þannig fyrir öll $n \geq N$ er graf fallsins f_n innihaldið í menginu

$$\{(a, y); a \in A, f(a) - \varepsilon < y < f(a) + \varepsilon\}.$$

Sýnidæmi 3.5.2 Myndin sýnir runu $\{f_n\}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sem stefnir á núllfallið f, en gerir það ekki í jöfnum mæli, því $|f_n(1/n) - f(1/n)| = 1$ fyrir öll n.



Mynd: $f_n \to 0$, *ekki* í jöfnum mæli

$\square$

Samleitnipróf Weierstrass

Við höfum samanburðarpróf fyrir samleitni í jöfnum mæli:

Setning 3.5.3 (*Weierstrass–próf*). *Gerum ráð fyrir að $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé fallaröð á menginu A, $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ sé samleitin röð af jákvæðum rauntölum og*

$$0 \leq |f_k(a)| \leq M_k \qquad \text{fyrir öll } k \geq 1 \text{ og öll } a \in A.$$

Þá er röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ samleitin í jöfnum mæli á A. □

Sönnun: Venjulega samanburðarprófið gefur að röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ er alsamleitin í sérhverjum punkti og þar með samleitin. Við setjum $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$, $a \in A$. Þá er

$$|f(a) - \sum_{k=0}^{n} f_k(a)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(a)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Fyrst talnarunan $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ er samleitin, þá gildir um sérhvert $\varepsilon > 0$ að til er N þannig að

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Þetta sýnir að

$$|f(a) - \sum_{k=0}^{n} f_k(a)| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og öll } a \in A.$$

Þar með stefnir röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ á f í jöfnum mæli á A. ■

Setning Abels

Við skulum nú sjá hvernig Weierstrass-prófinu er beitt:

Setning 3.5.4 (*Abel*). *Ef $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er veldaröð með samleitnigeisla ϱ, þá er hún samleitin í jöfnum mæli á sérhverri hringskífu með miðju í 0 og geisla $r < \varrho$.* □

Sönnun: Við skilgreinum $f_n(z) = a_n z^n$ og tökum $s \in \mathbb{R}$, þannig að $r < s < \varrho$. Þá er röðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ samleitin og því eru liðir hennar takmarkaðir. Það þýðir að til er fasti $C > 0$, þannig að $|a_n s^n| \leq C$. Ef nú $|z| \leq r$, þá gildir

$$|f_n(z)| = |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq C\left(\frac{r}{s}\right)^n, \qquad n \geq 0.$$

Ef við skilgreinum $M_n = C(r/s)^n$, þá er $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ samleitin, því þetta er einfaldlega kvótaröð með kvótann $r/s < 1$. Weierstrass–prófið gefur okkur nú að veldaröðin er samleitin í jöfnum mæli á hringskífunni $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$. ■

Samleitni í jöfnum mæli og samfelldni

Nú ætlum við að kanna formúluna

$$\lim_{t\to\alpha}\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to\alpha} f_n(t). \tag{3.5.1}$$

Setning 3.5.5 *Látum A vera hlutmengi af $\mathbb{R}^m$ og $\{f_n\}$ vera runu af samfelldum föllum sem stefnir á fallið f í jöfnum mæli á A. Þá er f samfellt.* □

Sönnun: Látum $a \in A$ og $\varepsilon > 0$. Við þurfum að sýna að til sé $\delta > 0$ þannig að

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad |x-a| < \delta.$$

Fyrst $f_n \to f$ í jöfnum mæli, þá er til N þannig að

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3, \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og } x \in A.$$

Nú er fallið f_N samfellt, svo til er $\delta > 0$ þannig að $|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$ fyrir öll x sem uppfylla $|x-a| < \delta$. Við fáum því

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,\end{aligned}$$

fyrir öll x sem uppfylla $|x-a| < \delta$. Þar með er fallið f samfellt í a. ■

Af setningunni leiðir að (B.2.1) gildir fyrir runu af samfelldum föllum sem er samleitin í jöfnum mæli og jafnframt:

Fylgisetning 3.5.6 *Látum A vera hlutmengi af $\mathbb{R}^m$ og $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ vera röð af samfelldum föllum sem er samleitin í jöfnum mæli á A. Þá er*

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to a} f_k(x), \qquad \textit{fyrir öll } a \in A.$$

□

Þegar verið er að sýna fram á að markfall f samleitinnar runu af samfelldum föllum $\{f_n\}$ sé samfellt, þá dugir að sýna fram á að fyrir sérhvert $a \in A$ megi velja opna kúlu $B(a,\varepsilon_a) = \{x \in A; |x-a| < \varepsilon_a\}$ þannig að $f_n \to f$ í jöfnum mæli á $B(a,\varepsilon_a)$. Þetta gildir vegna þess að setning 3.5.5 segir okkur að f sé samfellt í $B(a,\varepsilon_a)$ fyrir öll $a \in A$ og þar með er f samfellt á öllu menginu A.

Samleitni í jöfnum mæli og heildun

Næsta viðfangsefni er formúlan

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt. \tag{3.5.2}$$

Setning 3.5.7 *Gerum ráð fyrir að $\{f_n\}$ sé runa af heildanlegum föllum á $[a,b]$, að $f_n \to f$ í jöfnum mæli á bilinu $[a,b]$. Setjum*

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt, \qquad \text{og} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Þá stefnir g_n á g í jöfnum mæli á $[a,b]$. □

Sönnun: Látum $\varepsilon > 0$. Þá er til N þannig að

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/(b-a), \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og öll } t \in [a,b].$$

Þar með gildir fyrir sérhvert $x \in [a,b]$

$$|g_n(x) - g(x)| = |\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt < \varepsilon,$$

og þar með stefnir $\{g_n\}$ á g í jöfnum mæli á $[a,b]$. ■

Hliðstæða þessarar setningar fyrir raðir er:

Fylgisetning 3.5.8 *Gerum ráð fyrir að $\{f_k\}$ sé runa af heildanlegum föllum á bilinu $[a,b]$ og að röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé samleitin í jöfnum mæli á bilinu $[a,b]$. Þá er*

$$\int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

□

Með því að skipta á stærðinni $(b-a)$ og rúmmáli mengisins $A \subset \mathbb{R}^m$ í sönnuninni á setningu 3.5.7, þá fáum við með sömu röksemdarfærslu:

Setning 3.5.9 *Látum A vera takmarkað hlutmengi í $\mathbb{R}^m$ og $\{f_n\}$ vera runu af heildanlegum föllum á A. Ef $f_n \to f$ í jöfnum mæli á A, þá er*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

□

Hliðstæðar setningar gilda einnig um vegheildi með tilliti til bogalengdar og heildi yfir svæði með endanlegt flatarmál.

Setning 3.5.10 *Látum X vera opið hlutmengi í $\mathbb{C}$ og $\{f_n\}$ vera runu af samfelldum föllum á X. Ef $f_n \to f$ í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu og takmörkuðu hlutmengi í X og γ er vegur í X, þá er*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

□

Samleitni í jöfnum mæli og deildun

Nú snúum við okkur að formúlunni

$$\frac{d}{dt}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt} f_n(t). \tag{3.5.3}$$

Setning 3.5.11 *Látum $\{f_n\}$ vera runu af föllum í $C^1([a,b])$, gerum ráð fyrir að runan $\{f_n{}'\}$ sé samleitin í jöfnum mæli á $[a,b]$ og að til sé $c \in [a,b]$ þannig runan $\{f_n(c)\}$ sé samleitin. Þá er stefnir $\{f_n\}$ á fall $f \in C^1([a,b])$ í jöfnum mæli á $[a,b]$ og*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x), \qquad x \in [a,b].$$

□

Sönnun: Ef við setjum $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ og $\alpha = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$, þá gefur (B.2.1) okkur að $g \in C([a,b])$ og setning (B.3.1) gefur okkur að

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n{}'(t)\,dt \to \alpha + \int_c^x g(t)\,dt = f(x),$$

þar sem síðasta jafnan er skilgreining á fallinu f. Auk þess vitum við að samleitnin er í jöfnum mæli á $[a,b]$. Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar gefur að $f \in C^1[a,b]$ og $f' = g$. ■

Með þrepun fáum við hliðstæða setningu fyrir hærri afleiður:

Fylgisetning 3.5.12 *Látum $\{f_n\}$ vera runu af föllum í $C^m([a,b])$ og gerum ráð fyrir því að runurnar $\{f_n^{(k)}\}$, $0 \le k \le m$, séu samleitnar í jöfnum mæli á $[a,b]$ og táknum markgildi $\{f_n\}$ með f. Þá er $f \in C^m([a,b])$ og*

$$f^{(k)}(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(t), \qquad t \in [a,b].$$

□

Raðaútgáfan ef þessari setningu er:

Fylgisetning 3.5.13 *Látum $\sum_{n=0}^\infty f_n$ vera röð með liði f_n í $C^m([a,b])$ og gerum ráð fyrir því að raðirnar $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(k)}$, $0 \le k \le m$, séu samleitnar í jöfnum mæli á $[a,b]$ og setjum $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$. Þá er $f \in C^m([a,b])$ og*

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^\infty f_n^{(k)}(t), \qquad t \in [a,b].$$

□

Runur af fáguðum föllum

Ef $\{f_n\}$ er runa af samfelldum föllum á opnu mengi X, sem er samleitin í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu og takmörkuðu hlutmengi af X, þá gefur setning 3.5.5 okkur að markfallið f er samfellt á X. Setning Morera gefur okkur meira ef föllin eru fáguð:

Setning 3.5.14 *Ef $\{f_n\}$ er runa af fáguðum föllum á opnu hlutmengi X af $\mathbb{C}$, sem er samleitin í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu og takmörkuðu hlutmengi af X, þá er markfallið f fágað og*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z) \qquad z \in X.$$

$\square$

Sönnun: Látum $\Omega \subset X$ vera þríhyrningssvæði með $\partial\Omega \subset X$. Þríhyrningurinn $\partial\Omega$ er lokað og takmarkað mengi og því stefnir f_n á f í jöfnum mæli á $\partial\Omega$. Við megum því skipta á markgildi og vegheildinu yfir $\partial\Omega$, svo Cauchy-setningin gefur okkur

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial\Omega} f_n(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Nú segir setning Morera, að f sé fágað. Tökum skífu $\overline{S}(\alpha, r) \subset X$ og lítum á minni skífu með geislann $s < r$. Nú gefa Cauchy-ójöfnurnar að fyrir sérhvert $z \in \overline{S}(\alpha, s)$

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot \max_{\zeta\in\overline{S}(\alpha,r)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$$

Fyrst $\{f_n\}$ stefnir á f í jöfnum mæli á lokuðu skífunni $\overline{S}(\alpha, r)$, þá segir þetta okkur að $\{f_n'\}$ stefnir á jöfnum mæli á f'. $\blacksquare$

Við getum eins tekið fyrir óendanlegar raðir $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ af fáguðum föllum og fáum að markfallið

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad z \in X,$$

er fágað, ef hlutsummurnar $s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ eru samleitnar í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu og takmörkuðu hlutmengi af X og þá má reikna út f' með því að deilda röðina lið fyrir lið,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z), \qquad z \in X.$$

3.6 Samleitnar veldaraðir

Liðun í veldaröð

Látum X vera opið mengi í $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(X)$, $\varrho > 0$ vera þannig að $\overline{S}(\alpha, \varrho) \subset X$ og $f \in \mathcal{O}(X)$. Þá gefur Cauchy-formúlan okkur

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\alpha,\varrho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in S(\alpha, \varrho). \tag{3.6.1}$$

Við athugum að

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{1}{\zeta-\alpha}\cdot\frac{1}{1-(z-\alpha)/(\zeta-\alpha)}.$$

Nú er $|z-\alpha|/|\zeta-\alpha| < 1$ ef $z \in S(\alpha,\varrho)$ og $\zeta \in \partial S(\alpha,\varrho)$ og þar með getum við liðað þáttinn lengst til hægri í kvótaröð og fáum

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}. \tag{3.6.2}$$

Röðin er greinilega samleitin í jöfnum mæli fyrir öll $\zeta \in \partial S(\alpha,\varrho)$ og öll $z \in \bar{S}(\alpha,\varrho-\varepsilon)$, $\varepsilon < \varrho$, og því megum við skipta á óendalegu summunni og heildinu í (3.6.1). Það gefur

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(\alpha,\varrho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-\alpha)^n.$$

Samkvæmt Cauchy-formúlunni fyrir afleiður er

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(\alpha,\varrho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}.$$

Niðurstaða þessa útreiknings er:

Setning 3.6.1 *X er opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, $\alpha \in X$, $\overline{S}(\alpha,\varrho) \subset X$ og $f \in \mathcal{O}(X)$, þá er unnt að setja f fram með samleitinni veldaröð á skífunni $S(\alpha,\varrho)$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha,\varrho), \tag{3.6.3}$$

þar sem stuðlarnir a_n eru ótvírætt ákvarðaðir og eru gefnir með

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}. \tag{3.6.4}$$

Samleitnigeisli raðarinnar er stærri en eða jafn fjarlægðinni frá α út á jaðar X. □

Skilgreining 3.6.2 Ef X er opið hlutmengi af $\mathbb{C}$, $\alpha \in X$ og $f \in \mathcal{O}(X)$, þá kallast veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n, \tag{3.6.5}$$

Taylor-röð fágaða fallsins f í punktinum α. Ef $\alpha = 0$, þá kallast hún *Maclaurin-röð* fágaða fallsins f. □

Núllstöðvar fágaðra falla

Skilgreining 3.6.3 Látum X vera opið hlutmengi í $\mathbb{C}$, $\alpha \in X$ og $f \in \mathcal{O}(X)$. Punkturinn α nefnist *núllstöð* fágaða fallsins f ef $f(\alpha) = 0$ og mengið $\mathcal{N}(f) = \{\alpha \in X; f(\alpha) = 0\}$ kallast *núllstöðvamengi* fágaða fallsins f. Ef f er ekki núllfallið í $S(\alpha, \varrho)$, þar sem $\varrho > 0$, þá er til minnsta gildi $m > 0$ á n þannig að $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$. Talan m nefnist *stig* núllstöðvarinnar α. Ef fallið f er núll í heilli grennd um α, þá segjum við að f hafi núllstöð af *óendanlegu stigi* í α. □

Eins og fyrir margliður þá er hægt að þátta núllstöðvar úr fáguðum föllum:

Setning 3.6.4 *Fall $f \in \mathcal{O}(X)$ hefur núllstöð af stigi $m > 0$ í punktinum $\alpha \in X$ þá og því aðeins að til sé $g \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $g(\alpha) \neq 0$ og*

$$f(z) = (z - \alpha)^m g(z), \qquad z \in X. \tag{3.6.6}$$

□

Sönnun: Veljum $\varrho > 0$ þannig að $S(\alpha, \varrho) \subset X$ og lítum á veldaraðaframsetningu f,

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n = (z - \alpha)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - \alpha)^n, \tag{3.6.7}$$

þar sem $z \in S(\alpha, \varrho)$. Við skilgreinum nú

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/(z - \alpha)^m, & z \in X \setminus \{\alpha\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - \alpha)^n, & z \in S(\alpha, \varrho). \end{cases}$$

Jafnan (3.6.7) gefur að þessi skilgreining sé sjálfri sér samkvæm. Fallið g er því fágað á X, $g(\alpha) = a_m \neq 0$ og (3.6.6) gildir. Öfugt, ef (3.6.6) gildir, þá lítum við á veldaröð fallsins g í punktinum α,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n, \qquad z \in S(\alpha, \varrho).$$

Þá er $g(\alpha) = b_0 \neq 0$ og

$$f(z) = (z - \alpha)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n = \sum_{n=m}^{\infty} b_{n-m} (z - \alpha)^n,$$

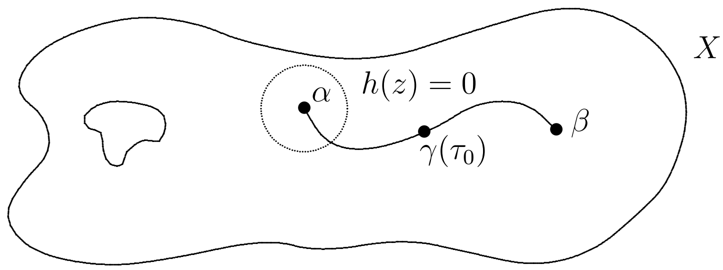
svo fallið f hefur greinilega núllstöð af stigi m í punktinum α. ■

3.7 Samsemdarsetningin

Við skulum rifja það upp að *svæði* er opið samanhangandi mengi, en það þýðir að sérhverja tvo punkta α og β í X er unnt að tengja saman með vegi í X. Ef A er hlutmengi í $\mathbb{C}$, þá er punktur $\alpha \in A$ sagður vera *einangraður* í A ef til er $\varepsilon > 0$ þannig að $A \cap S(\alpha, \varepsilon) = \{\alpha\}$. Mengi sem samanstendur af einangruðum punktum í A er sagt vera *dreift* í A. Athugið að þetta þýðir að ekki er til nein runa af *ólíkum* punktum í A sem er samleitin og hefur markgildi í A.

Setning 3.7.1 (*Samsemdarsetning I*). *Ef X er svæði í $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(X)$ og til er punktur α í X þannig að $f^{(n)}(\alpha) = g^{(n)}(\alpha)$ fyrir öll $n \geq 0$, þá er $f(z) = g(z)$ fyrir öll $z \in X$.* □

Sönnun: Við setjum $h(z) = f(z) - g(z)$ og þurfum að sanna að $h(\beta) = 0$, þar sem β er einhver punktur í X. Fyrst X er svæði, þá er til vegur $\gamma : [0,1] \to X$ með $u_\gamma = \gamma(0) = \alpha$ og $e_\gamma = \gamma(1) = \beta$. Nú látum við I tákna mengi allra $\tau \in [0,1]$ þannig að $h(\gamma(t)) = 0$ fyrir öll t sem uppfylla $0 \leq t \leq \tau$. Þá er $0 \in I$, því $h(\alpha) = h(\gamma(0)) = 0$. Takmark okkar er að sanna að $I = [0,1]$ og þá fáum við $h(\beta) = h(\gamma(1)) = 0$. Bilið I er takmarkað að ofan og ekki tómt, svo það hefur efra mark, sem við táknum með τ_0. Forsendan segir okkur að veldaröðin fyrir h í punktinum α sé núll og þar með er $h = 0$ í heilli grennd um α. Þetta gefur $\tau_0 > 0$. Ef $\tau_0 = 1$, þá er $h(\gamma(t) = 0$ fyrir öll $t \in [0,1[$, svo $h(\gamma(1)) = \lim_{t\to 1} h(\gamma(t)) = 0$. Við skulum gera ráð fyrir að $\tau_0 < 1$ og sýna hvernig það leiðir til mótsagnar. Við setjum $\alpha_0 = \gamma(\tau_0)$ og lítum á veldaröð fallsins h í grennd um α_0.



Mynd: Punktar tengdir með ferli

Greinilega er $h(\alpha_0) = 0$, því h er samfellt og $h(\alpha_0) = \lim_{\tau\to\tau_0} h(\gamma(\tau)) = 0$. Fallið h getur ekki verið 0 í heilli grennd um α_0, því það myndi hafa í för með sér að til væri $\tau \in I$, $\tau > \tau_0$ í mótsögn við að τ_0 er efra mark I. Þar með er α_0 núllstöð af stigi $m > 0$ og við getum skrifað

$$h(z) = (z - \alpha_0)^m H(z), \qquad z \in S(\alpha_0, \varrho_0),$$

þar sem $H \in \mathcal{O}(X)$, $H(\alpha_0) \neq 0$ og $\varrho_0 > 0$. Fyrst H er samfellt, þá getum við valið ϱ_0 það lítið að $H(z) \neq 0$ fyrir öll $z \in S(\alpha_0, \varrho_0)$. Þar með sjáum við að fallið h hefur aðeins eina núllstöð α_0 í $S(\alpha_0, \varrho_0)$. Það getur ekki staðist, því $\lim_{\tau\to\tau_0-} \gamma(\tau) = \gamma(\tau_0) = \alpha_0$ og $h(\gamma(\tau)) = 0$ ef $\tau \leq \tau_0$. Hér er því mótsögnin komin sem sannar setninguna. ■

Setning 3.7.2 *Ef X er svæði og $f \in \mathcal{O}(X)$ er ekki núllfallið, þá er núllstöðvamengi $\mathcal{N}(f) = \{z \in X; f(z) = 0\}$ fallsins f dreift hlutmengi af X.* □

Sönnun: Látum α vera núllstöð fallsins f og gerum ráð fyrir að hún sé af stigi $m > 0$. Samkvæmt setningu 3.6.4 er til fall $g \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $f(z) = (z-\alpha)^m g(z)$ fyrir öll $z \in X$ og $g(\alpha) \neq 0$. Fyrst g er samfellt, þá er til $\varepsilon > 0$, þannig að $g(z) \neq 0$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varepsilon)$. Við höfum því $\mathcal{N}(f) \cap S^*(\alpha, \varepsilon) = \varnothing$ og þar með er $\mathcal{N}(f)$ dreift mengi. ■

Við fáum nú enn sterkari útgáfu af samsemdarsetningunni:

Setning 3.7.3 (*Samsemdarsetning II*). *Ef X er svæði, $f, g \in \mathcal{O}(X)$ og $f(a_j) = g(a_j)$ þar sem $\{a_j\}$ er runa af ólíkum punktum, sem hefur markgildi $a \in X$, þá er $f(z) = g(z)$ fyrir öll $z \in X$.* □

Sönnun: Lítum á fallið $h(z) = f(z) - g(z)$. Núllstöðvamengi þess er ekki dreift, því runan $\{a_j\}$ er í $\mathcal{N}(h)$ og jafnframt markgildi hennar. Þar með er h fastafallið 0 og $f = g$. ■

Samsemdarsetningin hefur mikla þýðingu. Hún segir okkur meðal annars, að ef f er fall sem gefið er með veldaröð á bili I á $\mathbb{R}$ og hægt er að útvíkka f yfir í fágað fall á svæði X í $\mathbb{C}$ sem inniheldur I, þá er útvíkkunin ótvírætt ákvörðuð. Hún segir okkur einnig að $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ sé eina mögulega fágaða útvíkkunin á veldisvísisfallinu $x \mapsto e^x$ og að höfuðgrein lografallsins $\operatorname{Log} z$ sé eina mögulega fágaða framlengingin af náttúrlega lografallinu $\ln x$ yfir í mengið $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$.

3.8 Hágildislögmálið

Eftirfarandi setning er merkilegt hjálpartæki til þess að sanna alls konar ójöfnur fyrir $|f|$, þar sem f er fágað fall:

Setning 3.8.1 (*Hágildislögmál I*). *Ef X er svæði og $f \in \mathcal{O}(X)$, þá getur $|f(z)|$ ekki haft staðbundið hágildi í X nema f sé fastafall.* □

Sönnun: Gerum ráð fyrir að fallið $|f(z)|$ hafi staðbundið hágildi í punktinum α, $M = |f(\alpha)| \geq |f(z)|$ fyrir öll $z \in \overline{S}(\alpha, \varepsilon)$. Meðalgildissetningin gefur okkur að

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + \varepsilon e^{it})\, dt$$

og þar með er

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{f(\alpha + \varepsilon e^{it})}{f(\alpha)}\right) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{f(\alpha + \varepsilon e^{it})}{f(\alpha)}\right) dt. \tag{3.8.1}$$

Nú er $\varphi(t) = \operatorname{Re}\big(f(\alpha + \varepsilon e^{it})/f(\alpha)\big) \leq 1$ því tölugildi þessa falls er ≤ 1 samkvæmt forsendu. Nú segir (3.8.1) að meðalgildið af φ yfir bilið $[0, 2\pi]$ jafnt 1 og þar með verður fallið $\varphi(t)$ að vera fastafallið 1. Af þessu leiðir nú að $\operatorname{Re}\big(f(z)/f(\alpha)\big) = 1$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varepsilon)$ og af Cauchy-Riemann-jöfnunum og (3.8.1) leiðir síðan að $\operatorname{Im}\big(f(z)/f(\alpha)\big) = 0$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varepsilon)$ og við höfum sannað að $f(z) = f(\alpha)$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varepsilon)$. Nú gefur samsemdarsetningin að $f(z) = f(\alpha)$ fyrir öll $z \in X$. ■

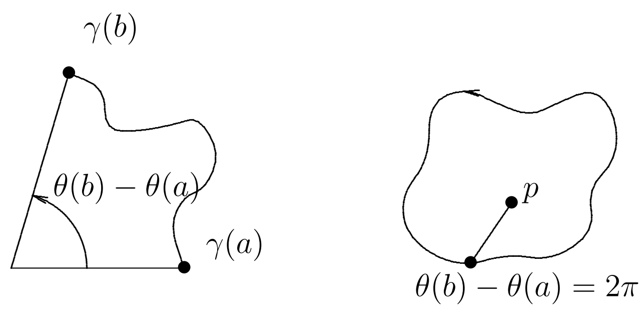
Setning 3.8.2 (*Hágildislögmál II*). *Látum X vera takmarkað svæði $f \in \mathcal{O}(X) \cap C(\overline{X})$ (samfellt á lokuninni $\overline{X}$). Þá tekur $|f(z)|$ hágildi á jaðri svæðisins ∂X.* □

Sönnun: Fyrst f er samfellt á lokuninni $\overline{X}$, þá tekur $|f|$ stærsta gildi í einhverjum punkti $\alpha \in \overline{X}$. Samkvæmt setningu 3.8.1 er α ekki innri punktur, nema f sé fastafall. Þar með er hágildi alltaf tekið á jaðrinum. ■

3.9 Vafningstölur vega

Látum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ vera feril og p vera punkt sem liggur ekki á ferlinum. Þá er hægt að skrifa
$$\gamma(t) = p + r(t)e^{i\theta(t)}, \qquad r = |\gamma(t) - p|, \qquad t \in [a,b],$$
þar sem fallið $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ kallast *horn fyrir ferilinn γ mælt frá punktinum p.* Fallið γ er samfellt og af því leiðir að hægt er að velja θ samfellt. Ef γ er vegur, þá er fallið γ samfellt og samfellt deildanlegt á köflum og af því leiðir að hægt er að velja θ með sömu eiginleika. Sönnun á þessum staðreynum er alls ekki flókin, en við látum hana eiga sig. Fallið θ er ekki ótvírætt ákvarðað, en mismunur á tveimur hornum θ og φ fyrir ferillinn γ mælt frá p er fast heiltölumargfeldi af 2π. Þetta segir okkur að mismunurinn $\theta(b) - \theta(a)$ sé óháður því hvernig hornið er valið. Ef ferillinn γ er lokaður, þá er $e^{i\theta(b)} = e^{i\theta(a)}$, sem segir okkur að $\theta(b) - \theta(a)$ sé heiltölumargfeldi af 2π.

Skilgreining 3.9.1 Ef θ er samfellt horn fyrir ferilinn γ mælt frá punktinum p, þá kallast talan
$$\theta(b) - \theta(a)$$
hornauki ferilsins γ séð frá punktinum p. Ef γ er lokaður ferill, þá nefnist heiltalan
$$I(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$
vafningstala ferilsins γ með tilliti til punktsins p. Við segjum að γ *vefjist utan um* p, ef $I(\gamma, p) \neq 0$. Mengi allra punkta p sem liggja ekki á ferlinum og ferillinn vefst utan um köllum við *innmengi ferilsins* γ og við táknum það með $I(\gamma)$. □



Mynd: Hornauki

Ef γ er lokaður vegur, þá höfum við formúlu fyrir vafningstölunni:

Setning 3.9.2 *Ef γ er lokaður vegur, þá er*
$$I(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-p}, \qquad p \in \mathbb{C} \setminus \text{mynd}(\gamma).$$

□

Sönnun: Við höfum $\gamma(t) = p + r(t)e^{i\theta(t)}$, $t \in [a,b]$ og því er

$$\gamma'(t) = r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)} = \big(r'(t)/r(t) + i\theta'(t)\big)r(t)e^{i\theta(t)}.$$

Vegurinn er lokaður, svo $r(b) = r(a)$ og þar með er

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-p} &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \Big(r'(t)/r(t) + i\theta'(t)\Big)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\ln r(b) - \ln r(a) + i\big(\theta(b) - \theta(a)\big)\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big) = I(\gamma, p).\end{aligned}$$

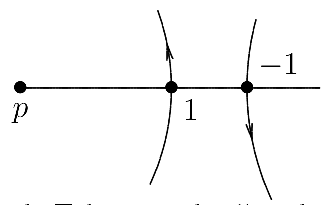
■

Lítum nú á mengið $X = \mathbb{C} \setminus \text{mynd}(\gamma)$ sem samanstendur af öllum punktum p sem eru ekki á ferlinum. Það er hægt að skrifa X sem sammengi $X = \cup X_i$, $i \in I$ af sundurlægum svæðum X_i, þar sem I er eitthvert endanlegt eða teljanlega óendanlegt mengi. Þessi mengi X_i kallast *samhengisþættir* mengisins X. Á sérhverjum samhengisþætti X_i er vafningstalan fasti sem fall af p, því

$$X_i \ni p \mapsto I(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-p},$$

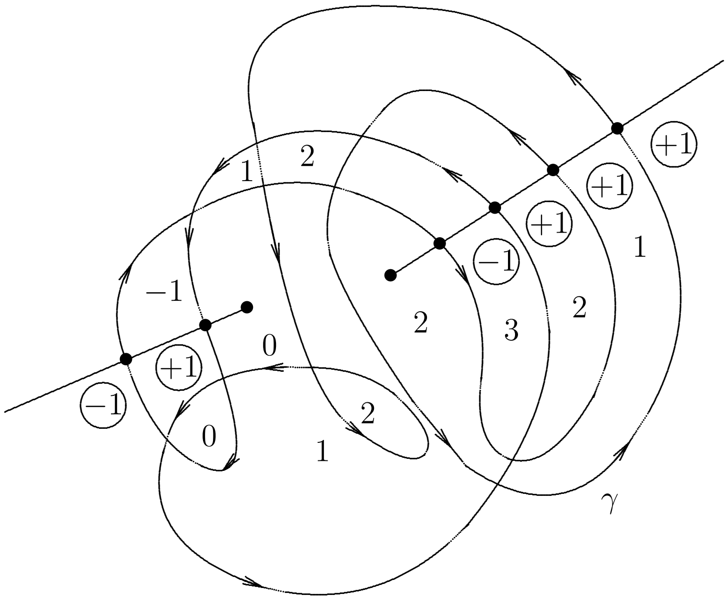
er heiltölugilt fágað fall. Eitt mengjanna X_i er ótakmarkað og við sjáum á formúlunni að $I(\gamma, p) \to 0$ ef $|p| \to +\infty$. Þar með er vafningstalan jöfn 0 á ótakmarkaða samhengisþættinum.

Mjög létt er að ákvarða vafningstölur fyrir alla skikkanlega vegi. Við tökum einn punkt í hverjum samhengisþætti í $X \setminus \text{mynd}(\gamma)$ og drögum beint línustrik frá honum yfir í ótakmarkaða samhengisþáttinn. Gæta verður þess að í öllum skurðpunktum línunnar og vegarins sé snertivigurinn við veginn ekki samsíða línunni. Við merkjum alla skurðpunkta, sem eru þannig að vegurinn sker línuna frá hægri til vinstri séð frá punktinum p, með tölunni 1, og við merkjum hina punktana, sem eru þá þannig að vegurinn sker línuna frá vinstri til hægri, með tölunni -1.



Mynd: Talning á skurðpunktum

Við leggjum síðan saman allar tölur á sama línustriki. Summan er vafningstala fyrir alla punkta í samhengisþættinum, sem inniheldur upphafspunkt striksins.



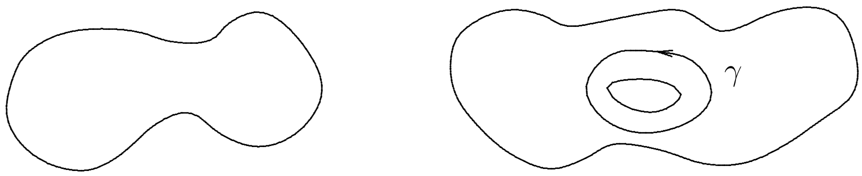
Mynd: Í samhengisþáttunum standa vafningstölurnar.

3.10 Einfaldlega samanhangandi svæði

Í setningu 3.3.3 sáum við að um stjörnusvæði X gildir að vegheildi sérhvers fágaðs falls f á X yfir sérhvern lokaðan veg er 0. Við sönnuðum þetta með því að sýna fram á að sérhvert fágað fall f á stjörnusvæði hafi stofnfall. Hægt er að alhæfa þetta yfir á almennari flokk mengja:

Skilgreining 3.10.1 Opið mengi X er sagt vera *einfaldlega samanhangandi* ef $I(\gamma) \subset X$ fyrir sérhvern lokaðan veg γ í X. □

Innmengi vegarins γ samanstendur af öllum punktum p sem γ vefst utanum, þar sem við segjum að γ vefjist utanum p ef vafningstalan $I(\gamma, p)$ er frábrugðin 0. Skilyrðið í skilgreiningunni segir því að í einfaldlega samanhangandi mengi geti lokaðir vegir einungis vafist utanum punkta í X og þar með að þeir geti ekki vafist utan um punkta í fyllimenginu $\mathbb{C} \setminus X$. Þetta þýðir að mengið X hafi engin göt. Sem dæmi má nefna að allar hringskífur eru einfaldlega samanhangandi, en hringkragar eru það ekki.



Mynd: Einfaldlega og ekki einfaldlega samanhangandi svæði

Einfaldlega samanhangandi svæði einkennast af fjölbreytilegum eiginleikum:

Setning 3.10.2 *Látum X vera svæði í $\mathbb{C}$. Þá er eftirfarandi jafngilt:*
(i) X er einfaldlega samanhangandi.
(ii) Sérhvert fágað fall á X hefur stofnfall.
(iii) Fyrir sérhvert $f \in \mathcal{O}(X)$ og sérhvern lokaðan veg γ í X er

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{3.10.1}$$

(iv) Fyrir sérhvert $f \in \mathcal{O}(X)$ og sérhvern lokaðan veg γ í X er

$$f(z)I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.10.2}$$

(v) Sérhvert núllstöðvalaust fágað fall á X hefur logra, þ.e. ef $f \in \mathcal{O}(X)$ og $\mathcal{N}(f) = \varnothing$, þá er til $g \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in X$.
(vi) Sérhvert núllstöðvalaust fágað fall á X hefur fágaða n-tu rót fyrir öll $n \geq 1$, þ.e. ef $f \in \mathcal{O}(X)$ og $\mathcal{N}(f) = \varnothing$, þá er til $h \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $f(z) = h(z)^n$, $z \in X$.
(vii) Sérhvert núllstöðvalaust fágað fall á X hefur fágaða aðra rót. □

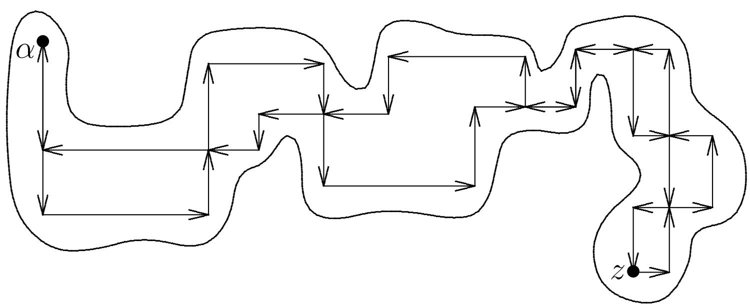
Sönnun: (i)⇒(ii): Látum $f \in \mathcal{O}(X)$ og α vera fastan punkt í X. Fyrir sérhvert z skilgreinum við

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.10.3}$$

þar sem γ_z er einfaldur vegur, sem samanstendur af línustrikum samsíða hnitaásunum, frá α til z. Við þurfum fyrst að sýna að þessi skilgreining sé óháð valinu á veginum γ_z. Til þess látum við γ_z^1 og γ_z^2 vera tvo svona vegi og látum γ tákna lokaða veginn, sem fæst með því að fara fyrst eftir γ_z^1 frá α til z og síðan til baka frá z til α eftir öfuga veginum $(\gamma_z^2)_-$ við γ_z^2. Við höfum þá að

$$\int_{\gamma_z^1} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_z^2} f(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.10.4}$$

og við þurfum að sýna fram á að síðasta heildið sé núll.



Mynd: Heildi er óháð vegi

Við sjáum nú að vegurinn γ samanstendur af línustrikum samsíða ásunum og að það er hægt að raða línustrikunum þannig saman að

$$\mathrm{mynd}(\gamma) = \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{mynd}(\beta_j),$$

þar sem β_j, $j = 1, \dots, N$ eru lokaðir vegir, sem skiptast í tvo hópa. Í fyrri hópnum eru vegir sem eru þannig að farið er fram og til baka eftir einu línustriki. Ef β_j er slíkur vegur þá er augljóst að

$$\int_{\beta_j} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Í síðari hópnum eru einfaldir lokaðir vegir β_j, sem stika jaðar á marghyrningi Ω_j. Þá er $I(\beta_j, p) = 1$ fyrir alla punkta í Ω_j eða $I(\beta_j, p) = -1$ fyrir alla punkta í Ω_j eftir því hvort β_j vefst utan um Ω_j í jákvæða eða neikvæða stefnu. Fyrst X er einfaldlega samanhangandi og Ω_j er innmengi β_j, þá er $\Omega_j \subset X$ og Cauchy-setningin gefur okkur því

$$\int_{\beta_j} f(\zeta)\, d\zeta = \pm \int_{\partial\Omega_j} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Þar með gildir

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=1}^{N} \int_{\beta_j} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

og við höfum sannað að skilgreiningin á $F(z)$ er óháð því hvernig vegurinn γ_z er valinn. Til þess að sanna að F sé stofnfall f, þá tökum við $z \in X$ og veljum $\varepsilon > 0$ það lítið að $S(z, \varepsilon) \subset X$. Síðan leggjum við veg γ_z sem samanstendur af línustrikum samsíða hnitaásunum frá α til z og skilgreinum síðan veginn γ_{z+h} með því að fara fyrst eftir veginum γ_z frá α til z og síðan eftir línustrikunum $\langle z, z + \operatorname{Re} h\rangle$ og $\langle z + \operatorname{Re} h, z + h\rangle$ frá z til $z + h$. Þá er

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\bigg(\int_{\langle z, z+\operatorname{Re} h\rangle} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\langle z+\operatorname{Re} h, z+h\rangle} f(\zeta)\, d\zeta \bigg) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\langle z, z+h\rangle} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^1 f(z + th)\, dt.\end{aligned}$$

Við höfum hér beitt Cauchy-setningunni á heildið yfir þríhyrninginn með hornpunktana z, $z+\operatorname{Re} h$ og $z+h$, til þess að sjá að summan af heildunum yfir línustrikin $\langle z, z + \operatorname{Re} h\rangle$ og $\langle z + \operatorname{Re} h, z + h\rangle$ sé jöfn heildinu yfir línustrikið $\langle z, z + h\rangle$. Með því að láta $h \to 0$ í síðasta heildinu, þá fáum við $F'(z) = f(z)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Fallið f hefur stofnfall, svo vegheildi þess yfir sérhvern lokaðan veg er 0.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Látum $z \in X \setminus \mathrm{mynd}(\gamma)$ og skilgreinum

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Augljóst er að $g \in \mathcal{O}(X \setminus \{z\})$. Ef $S(z,\varepsilon) \subset X$, þá er

$$g(\zeta) = \int_0^1 f'(z + t(\zeta - z))\, dt, \qquad \zeta \in S(z,\varepsilon).$$

Heildið er greinilega fágað fall af ζ í $S(z,\varepsilon)$, því f er fágað og þar með er $g \in \mathcal{O}(X)$. Samkvæmt (iii) er

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

og þar með gildir (3.10.2).

(iv)⇒(iii): Við lítum á fallið $g(\zeta) = (\zeta - z)f(\zeta)$ þar sem z er einhver punktur í X. Þá er $g(z) = 0$ og þar með gefur (iv) að

$$0 = 2\pi i g(z) I(\gamma, z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

(iii)⇒(ii): Þetta er að mestu leyti endurtekning á röksemdafærslunni í sönnuninni á (i)⇒(ii). Við tökum fastan punkt $\alpha \in X$, látum $f \in \mathcal{O}(X)$ og skilgreinum $F(z)$ eins og í (3.10.3), þar sem γ_z er einhver vegur frá α til z. Til þess að sanna að $F(z)$ sé óháð valinu á γ_z, þá látum við γ_z^1 og γ_z^2 vera tvo vegi frá α til z og skilgreinum lokaða veginn γ með því að fara fyrst frá α til z eftir veginum γ_z^1 og síðan til baka frá z til α eftir öfuga veginum $\big(\gamma_z^2\big)_-$ við γ_z^2. Jafnan (3.10.4) gildir og samkvæmt (iii) er síðasta heildið 0. Þetta segir okkur að skilgreiningin á $F(z)$ sé óháð valinu á veginum γ_z. Með nákvæmlega sömu rökum og í sönnuninni á (i)⇒(ii) leiðir nú að F er stofnfall fyrir f.

(ii)⇒(v): Fyrst f er núllstöðvalaust, þá er $f'/f \in \mathcal{O}(X)$. Samkvæmt (ii) hefur f'/f stofnfall $G \in \mathcal{O}(X)$. Athugum nú að

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Big(f(z)e^{-G(z)}\Big) &= f'(z)e^{-G(z)} - f(z)G'(z)e^{-G(z)} \\ &= \big(f'(z) - f(z)f'(z)/f(z)\big)e^{-G(z)} = 0, \end{aligned}$$

fyrir öll $z \in X$. Fyrst X er svæði, þá er $f(z)e^{-G(z)}$ fastafall og fastann getum við skrifað sem e^c. Við skilgreinum nú $g(z) = G(z) + c$ og fáum $f(z) = e^{G(z)+c} = e^{g(z)}$.

(v)⇒(vi): Ef $f(z) = e^{g(z)}$, þá setjum við $h(z) = e^{g(z)/n}$ og fáum $f(z) = h(z)^n$.

(vi)⇒(vii): Augljóst.

(vii)⇒(i): Látum γ vera lokaðan veg í X og $p \in \mathbb{C}\setminus X$. Við þurfum að sanna að $I(\gamma, p) = 0$, en það hefur í för með sér að $I(\gamma) \subset X$. Fallið $f(z) = z - p$ er núllstöðvalaust í X og samkvæmt (vii) er því til fall $h_1 \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $h_1(z)^2 = z - p$ fyrir öll $z \in X$. Með því að beita (vii) á fallið h_1 fæst að til er fall $h_2 \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $h_2(z)^4 = z - p$ fyrir öll $z \in X$ og með þrepun fáum við síðan að til er fall $h_n \in \mathcal{O}(X)$ þannig að $h_n(z)^{2^n} = z - p$ fyrir öll $z \in X$. Af þessari jöfnu leiðir síðan

$$1 = 2^n h_n(z)^{2^n - 1} {h_n}'(z)$$

og þar með er

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{z-p} = \frac{h_n(z)^{2^n-1} h_n{}'(z)}{h_n(z)^{2^n}} = \frac{h_n{}'(z)}{h_n(z)}.$$

Þessi jafna gefur síðan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} I(\gamma, p) &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-p} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_n{}'(z)}{h_n(z)}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{h_n \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = I(h_n \circ \gamma, 0), \end{aligned}$$

þar sem vegurinn $h_n \circ \gamma$ er skilgreindur út frá $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ með formúlunni $h_n \circ \gamma(t) = h_n(\gamma(t))$. Við höfum því jöfnuna

$$I(\gamma, p) = 2^n I(h_n \circ \gamma, 0).$$

Þessi jafna segir okkur að heiltalan $I(\gamma, p)$ sé deilanleg með 2^n fyrir öll $n \geq 1$. Það fær ekki staðist nema $I(\gamma, p) = 0$ eins og sanna átti. ■

3.11 Æfingardæmi

1. Sýnið að

$$\int_{\partial S(\alpha,r)} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i \qquad \text{og} \qquad \int_{\partial S(\alpha,r)} (z-\alpha)^n\, dz = 0,$$

fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$ með $n \neq -1$.

2. Reiknið út vegheildin $\int_\gamma f(z)\, dz$ þar sem

a) $f(z) = \bar{z}$ og γ er hluti af hring með miðju í 1 og þegar farið er eftir boganum, þá breytist hornið frá $-\pi/2$ til $\pi/2$.

b) $f(z) = z^2$ og γ er vegurinn sem stikar beina línu frá 0 til 1 og þaðan hringboga með miðju í $1+i$ stystu leið til $2+i$.

c) $f(z) = 2z \sin z^2$ og γ er fleygboginn gegnum punktinn $-i$ með $u_\gamma = -1$ og $e_\gamma = 1$.

d) $f(z) = z^{-\frac{1}{2}} = \exp(-\frac{1}{2}\mathrm{Log} z)$ og γ er línustrikið frá $-1-i$ til $1-i$.

e) $f(z) = \mathrm{Log} z$ og γ er hringboginn sem er með miðju í 0, geislann 2 og fer frá $-2i$ til $2i$ í jákvæða stefnu.

f) $f(z) = |z|\bar{z}$ og γ er lokaði vegurinn sem samanstendur af línustrikinu $\langle -1, 1 \rangle$ og hringboganum frá 1 gegnum i til -1.

g) $f(z) = z^2 e^z$ og γ er einhver vegur með upphafspunkt $1+3i$ og lokapunkt $2+i$.

3. Setjum $\alpha = a+ib$. Heildið fallið $e^{\alpha\tau}$ yfir bilið $[0,t]$ og takið raunhlutann af útkomunni til þess að sýna að

$$\int_0^t e^{a\tau}\cos b\tau\, d\tau = \frac{e^{at}(a\cos bt + b\sin bt) - a}{a^2+b^2}.$$

Hvaða heildi fæst út ef þverhlutinn er tekinn?

4. Við höfum að $\sin' z = \cos z$ og $\cos' z = -\sin z$ og af þeim leiðir að

$$\int \sin((a+ib)x)\, dx = \frac{-\cos((a+ib)x)}{a+ib} + C$$

og

$$\int \cos((a+ib)x)\, dx = \frac{\sin((a+ib)x)}{a+ib} + C.$$

Leiðið af þessu formúlurnar:

a) $\displaystyle\int \cos(ax)\cosh(bx)\, dx = \frac{a\sin(ax)\cosh(bx) + b\cos(ax)\sinh(bx)}{a^2+b^2} + C.$

b) $\displaystyle\int \sin(ax)\sinh(bx)\, dx = \frac{-a\cos(ax)\sinh(bx) + b\sin(ax)\cosh(bx)}{a^2+b^2} + C.$

5. Reiknið út heildin

a) $\displaystyle\int_{\partial S(0,2)} \frac{e^{z^2}\cos z}{z-i}\, dz$ b) $\displaystyle\int_{\partial S(1,2)} \frac{z}{z^2-5z+4}\, dz$

c) $\displaystyle\int_{\partial S(i,\frac{1}{2})} \frac{\mathrm{Log} z}{(z-i)^2}\, dz$ d) $\displaystyle\int_{\partial S(0,2)} \frac{z^2+z+1}{z^2-1}\, dz$

6. Látum γ tákna hringinn með miðju í 0 og geislann R. Sýnið að

$$\int_\gamma \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| |dz| \leq 2\pi e^R \quad \text{og} \quad \int_\gamma \left|\frac{\sinh z}{z^2}\right| |dz| \leq \frac{2\pi\cosh R}{R}.$$

7. Látum f vera fall sem er samfellt í grennd um punktinn $\alpha \in \mathbb{C}$ og uppfyllir

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = A.$$

Látum γ_r tákna hringbogann sem stikaður er með $\gamma_r(t) = \alpha + re^{it}$, $t \in [a,b]$. Sýnið að

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = iA(b-a).$$

8. Beitið Cauchy-formúlunni til þess að reikna út heildin:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}, \quad -1<a<1$ b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\sin\theta}\, d\theta.$

9. Beitið Cauchy-formúlunni til þess að reikna út heildin:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x+x^2}$, b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^4}$, c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^6}$.

10. Sýnið að heildið

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\, dx$$

er óháð $a \in \mathbb{R}$ með því að heilda fágaða fallið e^{-z^2} yfir jaðar ferhyrningsins með hornpunktana $-r, r, r+ia, -r+ia$ og láta síðan $r \to +\infty$.

11. Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ og gerum ráð fyrir að $|f(z)| \leq A + B|z|^C$, þar sem $A \geq 0$, $B \geq 0$ og $C \geq 0$. Sýnið að f sé margliða af stigi $\leq C$.

[*Leiðbeining:* Látið N tákna stærstu náttúrulega tölu $\leq C$. Beitið setningu Liouville á fallið $g(z) = z^{-N-1}\big(f(z) - \sum_{j=0}^{N}(f^{(j)}(0)/j!)z^j\big)$.]

12. Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vera fall sem uppfyllir $|f(z)| \leq Me^{c|z|}$, fyrir öll $z \in \mathbb{C}$. Notið Cauchy-formúluna fyrir afleiður til að sanna að $|f'(z)| \leq ceMe^{c|z|}$.

13. Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ og gerum ráð fyrir að $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ fyrir öll $z \in \mathbb{C}$. Notið setningu Liouville til þess að sanna að f sé fastafall.

14. Ákvarðið samleitnigeisla Taylor-raðar fallsins $f(z)$ í punktinum α án þess að reikna út röðina:

a) $f(z) = e^{z-1}$, $\alpha = 1$. b) $\sin\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, $\alpha = 0$.

c) $\dfrac{z\cos z}{2z+1}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$. d) $\cot z$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

15. Skrifið upp Taylor-röð fallsins $(1-z)^{-1}$ í punktinum $a = 0$ og notið hana síðan til þess að sýna að

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots, \qquad \operatorname{Log}(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots.$$

16. Sýnið að $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1-z)$ gildi ef $|z| < 1$. Notið síðan Taylor-röðina fyrir $\operatorname{Log}(1-z)$ til þess að finna Taylor-röð $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

17. Fallið sem hefur Taylor-röðina $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ er rætt. Skrifið það á forminu $P(z)/Q(z)$, þar sem P og Q eru margliður. [*Leiðbeining*: Notið röðina fyrir $(1-z)^{-1}$ og framkvæmið aðgerðir á henni.]

18. Látum $\alpha \in \mathbb{C}$ og skilgreinum f á $X = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1\}$ með formúlunni $f(z) = (1+z)^\alpha = \exp\big(\alpha \operatorname{Log}(1+z)\big)$. Sýnið að liðun fallsins f í Taylor-röð í punktinum $a = 0$ sé

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \cdots.$$

Sýnið að þetta sé ekkert annað en tvíliðureglan ef α er náttúruleg tala.

19. Ákvarðið Taylor-röð fallanna í 0.

a) $f(z) = \displaystyle\int_{<0,z>} e^{\zeta^2}\, d\zeta.$ b) $f(z) = \displaystyle\int_{<0,z>} \frac{\sin\zeta}{\zeta}\, d\zeta.$

20. Notið veldaraðir til þess að sanna reglu l'Hôpital fyrir fáguð föll: Ef föllin f og g eru fáguð í grennd um punktinn $\alpha \in \mathbb{C}$ og

$$f(\alpha) = g(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = g^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{og} \quad g^{(m)}(\alpha) \neq 0,$$

þá er

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^m(\alpha)}{g^m(\alpha)}.$$

Kafli 4

LEIFAREIKNINGUR

Samantekt. Í þessum kafla tökum við leifasetninguna fyrir og sýnum hvernig henni er beitt til þess að reikna út ákveðin heildi.

4.1 Samleitnar Laurent-raðir

Nú ætlum við að skoða föll sem eru ekki endilega fáguð á tiltekinni hringskífu, heldur á svæðir þar sem búið er að skera út einn punkt eða lokaða hringskífu.

Hringkragar

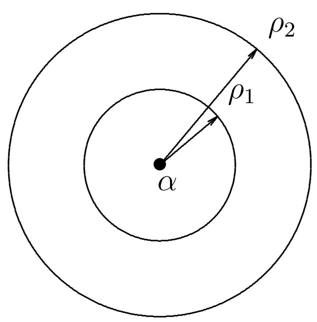
Mengi af gerðinni

$$A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2) = \{z \in \mathbb{C}; \varrho_1 < |z - \alpha| < \varrho_2\}$$

þar sem $0 \leq \varrho_1 < \varrho_2 \leq +\infty$ kallast *opinn hringkragi* með miðju í α, *innri geisla* ϱ_1, og *ytri geisla* ϱ_2, og mengi af gerðinni

$$\bar{A}(\alpha, \varrho_1, \varrho_2) = \{z \in \mathbb{C}; \varrho_1 \leq |z - \alpha| \leq \varrho_2\}$$

þar sem $0 < \varrho_1 < \varrho_2 \leq +\infty$ kallast *lokaður hringkragi* með miðju í α, *innri geisla* ϱ_1, og *ytri geisla* ϱ_2.



Mynd: Hringkragi

Laurent-setningin

Fágað fall á skífu er hægt að setja fram með veldaröð. Ef fall er fágað á hringkraga þá koma til sögunnar neikvæð veldi:

Setning 4.1.1 (*Laurent*). *Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{C}$ og gerum ráð fyrir að $A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2) \subset X$. Ef $f \in \mathcal{O}(X)$, þá er unnt að skrifa f sem*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n, \qquad z \in A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2). \tag{4.1.1}$$

Stuðlar raðarinnar a_n eru gefnir með formúlunni

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\alpha, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{4.1.2}$$

og r getur verið hvaða tala sem er á bilinu $]\varrho_1, \varrho_2[$. Röðin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

er samleitin ef $|z-\alpha| < \varrho_2$ og röðin

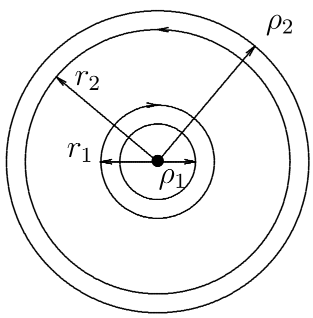
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-\alpha)^n$$

er samleitin ef $|z-\alpha| > \varrho_1$.

□

Sönnun: Veljum r_1 og r_2 þannig að $\varrho_1 < r_1 < r_2 < \varrho_2$. Þá er $\Omega = A(\alpha, r_1, r_2) \subset X$ opið mengi með jaðar $\partial\Omega = \partial S(\alpha, r_1) \cup \partial S(\alpha, r_2)$. Við setjum $\gamma_r(t) = \alpha + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ og beitum síðan Cauchy-formúlunni,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$



fyrir öll $z \in A(\alpha, r_1, r_2)$. Ef $|\zeta - \alpha| = r_2$ og $|z-\alpha| < r_2$, þá gefur sami reikningur og við notuðum í grein 3.6

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{1}{\zeta-\alpha}\cdot\frac{1}{1-(z-\alpha)/(\zeta-\alpha)}\\ &= \frac{1}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ef hins vegar $|\zeta-\alpha| = r_1$ og $|z-\alpha| > r_1$, þá er skiptum við á hlutverki ζ og z í veldaröðinni og fáum

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{-1}{(z-\alpha)-(\zeta-\alpha)} = \frac{-1}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-(\zeta-\alpha)/(z-\alpha)} =\\ &= \frac{-1}{z-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-\alpha)^n}{(z-\alpha)^n} = \frac{-1}{z-\alpha}\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^n} =\\ &= -\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(z-\alpha)^{n-1}}{(\zeta-\alpha)^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Fyrri röðin er alsamleitin í jöfnum mæli, ef $\zeta \in \partial S(\alpha, r_2)$ og $|z-\alpha| \leq r_2 - \varepsilon$, og sú síðari er alsamleitin í jöfnum mæli, ef $\zeta \in \partial S(\alpha, r_1)$ og $|z-\alpha| \geq r_1 + \varepsilon$. Við megum því skipta á heildi og óendanlegum summum í Cauchy-formúlunni, og fáum

$$\begin{aligned}f(z) = &\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-\alpha)^n\\ &+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-\alpha)^n.\end{aligned}$$

Við höfum því fengið framsetninguna (4.1.1) með stuðlana a_n gefna með (4.1.2), þar sem $r = r_2$ ef $n \geq 0$, en $r = r_1$ ef $n < 0$. Við eigum einungis eftir að sýna að heildin í (4.1.2) séu óháð valinu á r. Til þess tökum við tvær tölur s_1 og s_2, þannig að $\varrho_1 < s_1 < s_2 < \varrho_2$ og athugum að Cauchy-setningin gefur

$$\int_{\gamma_{s_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta - \int_{\gamma_{s_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta = \int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta = 0,$$

þar sem $\Omega = A(\alpha, s_1, s_2)$. Þetta sýnir að heildið í (4.1.2) er óháð r. ■

Laurent-raðir

Skilgreining 4.1.2 Röð af gerðinni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

kallast *Laurent-röð. Innri samleitnigeisli* raðarinnar ϱ_1 er skilgreindur sem neðra mark yfir $\varrho = |z-\alpha|$ þannig að

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-\alpha)^n$$

er samleitin, *ytri samleitnigeisli* raðarinnar ϱ_2 er skilgreindur sem efra mark yfir öll $\varrho = |z-\alpha|$ þannig að

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

er samleitin. Ef $\varrho_1 < \varrho_2$ þá segjum við að Laurent-röðin sé *samleitin*. Stuðullinn a_{-1} kallast *leif* Laurent-raðarinnar og röðin

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-\alpha)^n$$

kallast *höfuðhluti* hennar. □

Ef Laurent-röð $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n$ er samleitin og ϱ_1 og ϱ_2 tákna innri og ytri samleitnigeisla hennar, þá skilgreinir hún fágað fall á hringkraganum $A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2)$ með formúlunni

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n.$$

Hugsum okkur nú að γ sé lokaður vegur sem liggur í $A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2)$ og lítum á heildið

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_\gamma (z-\alpha)^n\,dz. \tag{4.1.3}$$

Hér höfum við notfært okkur að röðin er samleitin í jöfnum mæli á veginum γ til þess að flytja heildið inn fyrir summutáknið. Nú athugum við að allir liðirnir í summunni hafa stofnfall nema sá með númerið $n = -1$. Þar með er

$$\int_\gamma f(z)\,dz = a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}.$$

Ef nú γ er einfaldur lokaður vegur, sem stikar jaðarinn $\partial\Omega$ á svæðinu Ω í jákvæða stefnu, þá segir Cauchy-formúlan að síðasta heildið sé $2\pi i$ ef α er inni í svæðinu, en Cauchy-setningin segir að það sé 0 ef α er utan þess. Þar með er

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i\, a_{-1}, & \alpha \in \Omega, \\ 0, & \alpha \notin \Omega. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Í tilfellinu að $A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2) \subset S(\alpha, \varrho_2) \subset X$, þ.e. þegar fallið f er fágað á svæði sem inniheldur alla hringskífuna $S(\alpha, \varrho_2)$, þá eru föllin

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} = (\zeta-\alpha)^{-n-1} f(\zeta),$$

fáguð í $S(\alpha, \varrho_2)$ fyrir öll $n < 0$. Cauchy-setninginn segir okkur þá að $a_n = 0$ ef $n < 0$ og Cauchy-formúlan fyrir afleiður gefur okkur

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}, \qquad n \geq 0.$$

Ef $A(\alpha, \varrho_1, \varrho_2) \subset S(\alpha, \varrho_2) \subset X$, þá þýðir þetta sem sagt að Laurent-röð fallsins f í α sé Taylor-röð þess.

4.2 Einangraðir sérstöðupunktar

Einangraðir punktar og dreifð mengi

Látum nú A vera hlutmengi í $\mathbb{C}$. Rifjum það upp að punktur $\alpha \in A$ kallast *einangraður punktur* í A ef til er $\varepsilon > 0$ þannig að $S^*(\alpha, \varepsilon) \cap A = \varnothing$, þ.e.a.s. α er eini punkturinn í A sem liggur í opnu skífunni $S(\alpha, \varepsilon)$. Við segjum að mengið A sé *dreift* ef sérhver punktur í því er einangraður.

Höfuðhluti og leif

Látum X vera opið mengi, $f \in \mathcal{O}(X)$ og α vera einangraðan sérstöðupunkt fágaða fallsins f. Samkvæmt Laurent-setningunni getum við skrifað

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - \alpha)^n, \qquad z \in S^*(\alpha, \varepsilon) = A(\alpha, 0, \varepsilon),$$

þar sem stuðlarnir eru ótvírætt ákvarðaðir. Við köllum þessa röð *Laurent-röð fágaða fallsins f í punktinum α*, við köllum höfuðhluta raðarinnar *höfuðhluta fágaða fallsins f í punktinum α* og við köllum leif raðarinnar *leif fallsins f í punktinum α* og við táknum hana með

$$\operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Afmáanlegir sérstöðupunktar

Einangraður sérstöðupunktur α fágaða fallsins f er sagður vera *afmáanlegur*, ef til er $r > 0$ og $g \in \mathcal{O}(S(\alpha, r))$ þannig að $S^*(\alpha, r) \subset X$ og $f(z) = g(z)$ fyrir öll $z \in S^*(\alpha, r)$.

Setning 4.2.1 (*Riemann*). *Ef α er einangraður sérstöðupunktur fágaða fallsins f, og $\lim_{z \to \alpha}(z - \alpha) f(z) = 0$, þá er α afmáanlegur sérstöðupunktur* □

Sönnun: Stuðlarnir í Laurent-röð fallsins f í punktinum α eru gefnir með formúlunni

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\alpha, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}} ire^{it}\, dt,$$

og þar með er

$$|a_n| \leq r^{-n} \max_{\zeta \in \partial S(\alpha, r)} |f(\zeta)| = r^{-n-1} \max_{\zeta \in \partial S(\alpha, r)} |(\zeta - \alpha) f(\zeta)|.$$

Ef $n < 0$, þá stefnir hægri hliðin á 0 ef $r \to 0$ og því er $a_n = 0$ ef $n < 0$. Við höfum því

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n, \qquad z \in S^*(\alpha, \varrho).$$

Hægri hliðin skilgreinir fágað fall í grennd um α, svo α er afmáanlegur sérstöðupunktur. ■

Skaut

Skilgreining 4.2.2 Látum f vera fágað fall á opnu mengi X og α vera einangraðan sérstöðupunkt fallsins f. Við segjum að α sé *skaut af stigi* $m > 0$, ef til er fágað fall $g \in \mathcal{O}(U)$, þar sem U er grennd um α, þannig að $g(\alpha) \neq 0$ og

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}, \qquad z \in U \setminus \{\alpha\}.$$

□

Skautin einkennast af:

Setning 4.2.3 *Fall f hefur skaut í α ef og aðeins ef $|f(z)| \to +\infty$ ef $z \to \alpha$.*

□

Sönnun: Ef α er skaut fágaða fallsins f, þá er ljóst að $|f(z)| \to +\infty$ ef $z \to \alpha$. Gerum nú ráð fyrir að $|f(z)| \to +\infty$ ef $z \to \alpha$. Þá er til grennd $S(\alpha, \varepsilon)$ um α þannig að f hefur enga núllstöð í $S^*(\alpha, \varepsilon)$ og við getum skilgreint

$$F(z) = 1/f(z), \quad z \in S^*(\alpha, \varepsilon), \qquad F(\alpha) = 0.$$

Setning Riemanns gefur að F hefur afmáanlegan sérstöðupunkt í α og setning 3.6.4 gefur að við getum skrifað $F(z) = (z-\alpha)^m G(z)$, þar sem $m > 0$ og $G(z) \neq 0$ fyrir öll $z \in S(\alpha, \varepsilon)$. Ef við setjum nú $g(z) = 1/G(z)$, $z \in S(\alpha, \varepsilon)$, þá fæst

$$f(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{(z-\alpha)^m G(z)} = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}, \qquad z \in S(\alpha, \varepsilon).$$

■

Hugsum okkur nú að fallið f hafi skaut í punktinum α af stigi m. Þá er fallið sett fram með Laurent-röð af gerðinni

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n,$$

í grennd um α. Ef höfuðhlutinn er táknaður með $h(z)$, þá er α afmáanlegur sérstöðupunktur mismunarins

$$f(z) - h(z) = f(z) - \sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n.$$

Stofnbrotaliðun

Áður en við segjum skilið við skautin, þá skulum við víkja ögn að stofnbrotaliðun. Í grein 1.5 gengum við út frá því sem vísum hlut, að það væri alltaf hægt að liða rætt fall í stofnbrot. Nú skulum við sanna þetta og leiða út formúlurnar fyrir stuðlunum í stofnbrotaliðuninni.

Látum $R = P/Q$ vera rætt fall og gerum ráð fyrir að $\text{stig}P < \text{stig}Q$. Látum $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ vera ólíkar núllstöðvar Q, látum $m_1, \dots, m_k$ vera margfeldni þeirra og setjum $m = \text{stig}Q = m_1 + \cdots + m_k$. Þá er greinilegt að fallið R hefur skaut af stigi $\leq m_j$ í α_j og ef við látum

$$h_j(z) = \frac{A_{1j}}{(z-\alpha_j)} + \cdots + \frac{A_{m_j j}}{(z-\alpha_j)^{m_j}}$$

tákna höfuðhluta fallsins R í punktinum α_j, þá hefur fallið

$$f(z) = R(z) - h_1(z) - \cdots - h_k(z)$$

afmáanlega sérstöðupunkta í $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Við setjum $f(\alpha_j) = \lim_{z\to\alpha_j} f(z)$, og fáum að $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Fyrst $\text{stig}P < \text{stig}Q$, þá sjáum við að fallið sem stendur hægra megin jafnaðarmerkisins stefnir á 0 ef $|z| \to +\infty$. Setning Liouville segir okkur nú að f sé núllfallið. Þar með er

$$R(z) = h_1(z) + \cdots + h_k(z).$$

Stuðlarnir í stofnbrotaliðuninni fást nú með því að reikna liðina í veldaröð fallanna $(z - \alpha_j)^{m_j} R(z)$ í punktunum α_j, þeir eru gefnir með formúlunni

$$A_{lj} = \frac{1}{(m_j - l)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m_j - l} \left(\frac{P(z)}{q_j(z)}\right)\Bigg|_{z=\alpha_j},$$

þar sem $q_j(z) = Q(z)/(z-\alpha_j)^{m_j}$.

Verulegir sérstöðupunktar

Skilgreining 4.2.4 Einangraður sérstöðupunktur fágaða fallsins f kallast *verulegur sérstöðupunktur*, ef hann er hvorki afmáanlegur sérstöðupunktur né skaut.

□

Hegðun fágaðra falla í grennd um verulega sérstöðupunkta er lýst með:

Setning 4.2.5 (*Casorati-Weierstrass*). *Gerum ráð fyrir að α sé verulegur sérstöðupunktur fallsins f. Ef $\beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ og $\delta > 0$, þá er til $z \in S(\alpha, \delta)$ þannig að $f(z) \in S(\beta, \varepsilon)$.*
□

Við sleppum sönnuninni hér enda kemur þessi setning ekki meira við sögu.

4.3 Leifasetningin

Við sáum í síðasta kafla hvernig hægt er að hagnýta Cauchy-formúluna og Cauchy-formúluna fyrir afleiður til þess að reikna út ákveðin heildi. Við ætlum nú að beita Cauchy-setningunni til þess að alhæfa þessar formúlur fyrir heildi yfir lokaða vegi. Við höfum séð að það er einstaklega auðvelt að reikna út vegheildi af föllum, sem gefin eru með samleitnum Laurent-röðum yfir lokaða vegi, því við getum alltaf heildað röðina lið fyrir lið og allir liðirnir hafa stofnfall nema sá með númerið -1.

Setning 4.3.1 (*Leifasetningin*). *Látum X vera opið hlutmengi í $\mathbb{C}$ og látum Ω vera opið hlutmengi af X sem uppfyllir sömu forsendur og í Cauchy-setningunni. Látum A vera dreift hlutmengi af X sem sker ekki jaðarinn $\partial\Omega$ á Ω. Ef $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$, þá er*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\alpha\in\Omega\cap A} \operatorname{Res}(f,\alpha). \tag{4.3.1}$$

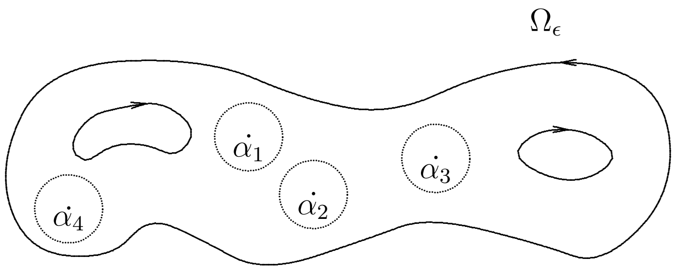
□

Sönnun: Fyrst Ω er lokað og takmarkað mengi og A er dreift, þá er $\Omega \cap A$ endanlegt. Veljum ε það lítið að $\overline{S}(\alpha,\varepsilon) \subset \Omega$ fyrir öll $\alpha \in A\cap\Omega$ og $\overline{S}(\alpha_1,\varepsilon) \cap \overline{S}(\alpha_2,\varepsilon) = \varnothing$ ef $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Setjum

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{\alpha\in\Omega\cap A} \overline{S}(\alpha,\varepsilon).$$

Þá er jaðarinn $\partial\Omega_\varepsilon$ gefinn sem

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \bigcup_{\alpha\in A\cap\Omega} \partial S(\alpha,\varepsilon).$$



Mynd: Svæði með útskornum skífum

Cauchy-setningin gefur okkur

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz - \sum_{\alpha\in A\cap\Omega} \int_{\partial S(\alpha,\varepsilon)} f(z)\,dz. \tag{4.3.2}$$

Í sérhverri skífanna $\overline{S}(\alpha,\varepsilon)$ höfum við framsetningu á f með Laurent-röð og samkvæmt (4.1.4) er þá

$$\int_{\partial S(\alpha,\varepsilon)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,\alpha).$$

Formúlan (4.3.1) leiðir því af (4.3.2). ■

Leifasetningin hefur mikla hagnýta þýðingu við útreikninga á ákveðnum heildum. Við gerum þeim hagnýtingum skil í næsta kafla, en það sem eftir er þessa kafla ætlum við að halda áfram að fjalla um ýmsar afleiðingar af Cauchy-setningunni.

4.4 Útreikningur á leifum

Cauchy-formúla og leifasetning

Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{C}$ og Ω vera opið hlutmengi af X, þannig að jaðarinn $\partial\Omega$ af Ω sé einnig innihaldinn í X. Við hugsum okkur jafnframt að $\partial\Omega$ sé stikaður af endanlega mörgum vegum $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, sem skerast aðeins í endapunktum, og að þeir stiki $\partial\Omega$ í jákvæða stefnu, sem þýðir að svæðið sé vinstra megin við snertilínuna í punkti $\gamma_j(t)$, ef horft er í stefnu $\gamma_j{}'(t)$. Hér höfum við verið að telja upp hluta af forsendum Cauchy–setningarinnar. Til viðbótar gerum við ráð fyrir að A sé dreift hlutmengi af X og að $f \in \mathcal{A}(X \setminus A)$. Þá eru allir punktarnir í A einangraðir sérstöðupunktar fallsins f og leifasetningin segir okkur að

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{\alpha \in A\cap\Omega} \operatorname{Res}(f, \alpha). \tag{4.4.1}$$

Ef $A \cap \Omega = \varnothing$, þá er summan sett 0, eins og alltaf þegar summa yfir tóma mengið er tekin. Þetta er í fullu samræmi við Cauchy–setninguna, því í þessu tilfelli er f fágað í grennd um $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$ og þá er heildið í vinstri hliðinni jafnt 0. Cauchy–formúlan er líka sértilfelli af leifasetningunni, því ef $z \in \Omega$ og $\Omega \cap A = \varnothing$, þá hefur fallið $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ eitt skaut z af stigi ≤ 1 í Ω og leifasetningin segir okkur að

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \operatorname{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, z\right) = f(z).$$

Leif í einföldu skauti

Áður en við snúum okkur að því að beita leifasetningunni til að leysa ákveðin dæmi, þá skulum við huga að því, hvernig farið er að því að reikna út leif $\operatorname{Res}(f, \alpha)$ fallsins f í einangraða sérstöðupunktinum α. Samkvæmt skilgreiningu er $\operatorname{Res}(f, \alpha) = a_{-1}$, þar sem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - \alpha)^n, \qquad z \in S^*(\alpha, \varepsilon), \tag{4.4.2}$$

er framsetning á f með Laurent–röð. Ef við höfum skaut af stigi 1 í punktinum α, þá eru allir stuðlarnir $a_n = 0$, $n < -1$, í Laurent–röðinnni og við fáum

$$(z - \alpha) f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z - \alpha)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-1} (z - \alpha)^n.$$

Af þessari formúlu leiðir síðan

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z). \tag{4.4.3}$$

Leif í skauti af stigi $m > 1$

Við skulum gera ráð fyrir að f hafi skaut af stigi $m > 0$ í punktinum α. Samkvæmt skilgreiningu er þá til fágað fall g í grennd U um α þannig að $g(\alpha) \neq 0$ og $f(z) = g(z)/(z-\alpha)^m$, $z \in U \setminus \{\alpha\}$. Við sjáum sambandið milli stuðlanna b_n í Taylor–röð fallsins g í punktinum α og stuðlanna a_n í Laurent röð fallsins f, út frá formúlunni

$$f(z) = (z-\alpha)^{-m} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-\alpha)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{+\infty} b_{n+m}(z-\alpha)^n,$$

sem gefur okkur

$$\text{Res}(f,\alpha) = a_{-1} = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}. \tag{4.4.4}$$

Sértilfellið að α sé skaut af fyrsta stigi, sem við skrifuðum upp í (4.4.3), er einfaldast,

$$\text{Res}(f,\alpha) = g(\alpha), \qquad m = 1. \tag{4.4.5}$$

Cauchy-formúla fyrir afleiður og leifasetning

Cauchy–formúlan fyrir afleiður er einnig sértilfelli af leifasetningunni, því ef $A \cap \Omega = \varnothing$ og $z \in \Omega$ þá hefur fallið $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)^{n+1}$ skaut af stigi $\leq n+1$ og samkvæmt (4.4.4) er

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = n!\text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}, z\right) = f^{(n)}(z).$$

Leif af kvóta tveggja falla

Nú skulum við hugsa okkur að f hafi skaut af stigi m í α og að f sé gefið í grennd um α sem $f(z) = g(z)/h(z)$, þar sem $g(\alpha) \neq 0$ og $h(\alpha) = 0$. Þá getum við skrifað $h(z) = (z-\alpha)^m h_1(z)$ þar sem $h_1(z)$ er fágað í grennd um α og $h_1(\alpha) = h^{(m)}(\alpha)/m! \neq 0$. Ef f hefur skaut af fyrsta stigi, þá er leifin

$$\text{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{(z-\alpha)g(z)}{h(z) - h(\alpha)} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}. \tag{4.4.6}$$

Þetta segir okkur, að formúlan sem við leiddum út í setningu 3.3.6, er ekkert annað en sértilfelli af leifasetningunni, því þar gerðum við ráð fyrir að núllstöðvar $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ margliðunnar Q væru einfaldar og því gefur leifasetningin

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}\, d\zeta = 2\pi i \sum_{\alpha_j \in \Omega} \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}, \alpha_j\right) = 2\pi i \sum_{\alpha_j \in \Omega} \frac{f(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}.$$

Ef $f(z) = g(z)/h(z)$, þar sem $g(\alpha) \neq 0$ og h hefur núllstöð af stigi $m > 1$ og við skrifum $h(z) = (z-\alpha)^m h_1(z)$, þá er

$$\text{Res}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\frac{g(z)}{h_1(z)}\right)\bigg|_{z=\alpha}. \tag{4.4.7}$$

Stofnbrotaliðun og leifasetning

Í þessu samhengi er skemmtilegt að nefna, að formúlan fyrir stofnbrotaliðun, sem við settum fram í grein 1.5 og leiddum út í grein 4.2, leiðir beint af leifasetninunni og formúlu (4.4.7). Við gerðum ráð fyrir að $\operatorname{stig} P < \operatorname{stig} Q$, að Q hefði núllstöðvar $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ af stigi $m_1, \dots, m_k$, $m = \operatorname{stig} Q = m_1 + \cdots + m_k$, og við skrifuðum $Q(z) = (z - \alpha_j)^{m_j} q_j(z)$, þar sem q_j er margliða af stigi $m - m_j$. Við veljum nú hringinn γ_r, með miðju í 0 og geislann r það stóran að $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ og z liggi innan hans. Leifasetningin gefur okkur þá

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta &= \operatorname{Res}\Big(\frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta - z)}, z\Big) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\Big(\frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta - z)}, \alpha_j\Big)\\ &= \frac{P(z)}{Q(z)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \cdot \frac{d^{m_j-1}}{d\zeta^{m_j-1}}\Big(\frac{P(\zeta)}{q_j(\zeta)(\zeta - z)}\Big)\Big|_{\zeta=\alpha_j}.\end{aligned}$$

Fyrst $\operatorname{stig} P < \operatorname{stig} Q$, þá er til fasti C þannig að $|P(\zeta)/Q(\zeta)| \leq C/r$ ef $|\zeta| = r$ og r er nógu stórt. Heildið í vinstri hlið jöfnunnar er óháð tölunni r og við getum því metið það með $2\pi r C/r(r - |z|) \to 0$, $r \to +\infty$. Heildið er því 0 og við fáum

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q(z)} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \cdot \frac{d^{m_j-1}}{d\zeta^{m_j-1}}\Big(\frac{P(\zeta)}{q_j(\zeta)(z - \zeta)}\Big)\Big|_{\zeta=\alpha_j}\\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{m_j-1} \frac{1}{(m_j - 1)!} \cdot \binom{m_j - 1}{l} \cdot \frac{l!}{(z - \alpha_j)^{l+1}} \cdot \frac{d^{m_j-1-l}}{d\zeta^{m_j-1-l}}\Big(\frac{P(\zeta)}{q_j(\zeta)}\Big)\Big|_{\zeta=\alpha_j}\\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_j} \frac{1}{(z - \alpha_j)^{l}} \cdot \frac{1}{(m_j - l)!} \cdot \frac{d^{m_j-l}}{d\zeta^{m_j-l}}\Big(\frac{P(\zeta)}{q_j(\zeta)}\Big)\Big|_{\zeta=\alpha_j},\end{aligned}$$

og hér er komin formúlan sem stendur í grein 1.5. Athugið að hér höfum við notað formúluna fyrir hærri afleiður af margfeldi tveggja falla

$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(z) g^{(k)}(z)$$

og formúluna fyrir tvíliðustuðlana

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Leifar reiknaðar út frá stuðlum í veldaröðum

Höldum nú áfram með útreikning okkar á leifum, gerum ráð fyrir að $f = g/h$ og

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \quad g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n, \quad h(z) = \sum_{n=l}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n,$$

hugsum okkur að stuðlarnir b_n, c_n séu gefnir, $c_l \neq 0$, $b_k \neq 0$ og að við viljum reikna út leifina $\operatorname{Res}(f, \alpha) = a_{-1}$. Taylor–röð g er þá gefin sem margfeldi af Laurent–röð f og Taylor–röð h,

$$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n \sum_{n=l}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = \sum_{n=k}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n.$$

Þetta segir okkur að $-m + l = k$ og að við fáum sambandið milli stuðlanna með því að margfalda saman raðirnar í vinstri hliðinni

$$\begin{aligned}
a_{-m}c_l &= b_k,\\
a_{-m+1}c_l + a_{-m}c_{l+1} &= b_{k+1},\\
a_{-m+2}c_l + a_{-m+1}c_{l+1} + a_{-m}c_{l+2} &= b_{k+2},\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots\\
a_{-2}c_l + a_{-3}c_{l+1} + \cdots + a_{-m}c_{l+m-2} &= b_{k+m-2}\\
a_{-1}c_l + a_{-2}c_{l+1} + \cdots + a_{-m}c_{l+m-1} &= b_{k+m-1}.
\end{aligned}$$

Fyrst $c_l \neq 0$, þá fáum við m skrefa rakningarformúlu fyrir $a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_{-1}$ og í síðasta skrefinu er leif f í α fundin,

$$\begin{aligned}
a_{-m} &= c_l^{-1} b_k,\\
a_{-m+1} &= c_l^{-1}\big(b_{k+1} - a_{-m}c_{l+1}\big),\\
a_{-m+2} &= c_l^{-1}\big(b_{k+2} - a_{-m+1}c_{l+1} - a_{-m}c_{l+2}\big),\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots\\
a_{-2} &= c_l^{-1}\big(b_{k+m-2} - a_{-3}c_{l+1} - \cdots - a_{-m}c_{l+m-2}\big)\\
\operatorname{Res}(f,\alpha) = a_{-1} &= c_l^{-1}\big(b_{k+m-1} - a_{-2}c_{l+1} - \cdots - a_{-m}c_{l+m-1}\big).
\end{aligned}$$

Ef engin af aðferðunum, sem við höfum verið að fjalla um hér, dugir til að finna leifina þá er ekkert annað að gera en að reikna hana út frá formúlunni sem við leiddum út í Laurent–setningunni,

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\alpha,\varepsilon)} f(\zeta)\, d\zeta,$$

þar sem við veljum geislann ε í hringnum nógu lítinn.

4.5 Heildi yfir einingarhringinn

Við skulum gera ráð fyrir að f sé fall af tveimur breytistærðum (x, y) og að f sé skilgreint í grennd um einingarhringinn, $x^2 + y^2 = 1$. Við fáum nú endurbót á aðferðinni, sem við leiddum út eftir setningu 3.3.6. Eins og þar athugum við, að ef z er á einingarhringnum,

$z = e^{i\theta}$, þá er

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+1}{2z}, \\
\sin\theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{z^2-1}{2iz}, \\
dz &= ie^{i\theta}d\theta, \qquad d\theta = \frac{1}{iz}dz.
\end{aligned}$$

Við getum því reiknað heildið út með leifareikningi

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta &= \int_{\partial S(0,1)} f\big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\big)\frac{1}{iz}\, dz \\
&= 2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap S(0,1)} \text{Res}\bigg(f\big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\big)\frac{1}{iz}, \alpha\bigg),
\end{aligned}$$

ef til er opin grennd X um lokuðu einingarskífuna $\overline{S}(0,1)$ og dreift mengi A þannig að fallið $z \mapsto f\big((z^2+1)/(2z), (z^2-1)/(2iz)\big)/(iz)$ sé fágað á $X \setminus A$.

Sýnidæmi 4.5.1

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\pi$$

Lausn: Við táknum heildið með I og umritum það yfir í vegheildi

$$I = \int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{1+(z^2+1)^2/(2z)^2}\frac{1}{iz}\, dz = \int_{\partial S(0,1)} \frac{4z/i}{z^4+6z^2+1}\, dz.$$

Nefnarann í heildisstofninum skrifum við sem

$$h(z) = z^4 + 6z^2 + 1 = (z^2+3)^2 - 8$$

og sjáum að núllstöðvar hans uppfylla $z^2 = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Þær eru því

$$i\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad -i\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad i\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \quad -i\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Aðeins þær tvær síðasttöldu eru innan einingarhringsins. Skautin eru því öll einföld og leifarnar fáum við með því að stinga $\alpha = \pm i\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ inn í

$$\text{Res}\bigg(\frac{4z/i}{z^4+6z^2+1}, \alpha\bigg) = \frac{4z/i}{4z^3+12z}\bigg|_{z=\alpha} = \frac{-i}{\alpha^2+3} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}.$$

Leifin er sem sagt sú sama í báðum punktunum og svarið verður því

$$I = 2\pi i\bigg(\frac{-i}{2\sqrt{2}} + \frac{-i}{2\sqrt{2}}\bigg) = \sqrt{2}\pi.$$

□

Sýnidæmi 4.5.2 Reiknið út heildið $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,d\theta.$

Lausn: Við táknum heildið með I og umskrifum það yfir í heildi yfir einingarhringinn γ með því að setja $z = e^{i\theta}$. Þá verður $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+1/z)$, $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(z^2+1/z^2)$ og $d\theta = dz/iz$. Við fáum því

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{\frac{1}{2}\big(z+1/z\big)}{13-12\cdot\frac{1}{2}\big(z^2+1/z^2\big)}\cdot\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{z^2+1}{13z^2-6z^4-6}\,dz = -\frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{z^2+1}{6z^4-13z^2+6}\,dz. \end{aligned}$$

Við skilgreinum nú $f(z) = (z^2+1)/(6z^4-13z^2+6)$. Skaut fallsins eru núllstöðvar nefnarans. Lausnarformúlan fyrir annars stigs jöfnu gefur okkur þau,

$$z^2 = \frac{13 \pm \sqrt{13^2-4\cdot 6\cdot 6}}{2\cdot 6} = \frac{13\pm 5}{12}$$

Við fáum að $z = \pm\sqrt{3/2}$ og $z = \pm\sqrt{2/3}$. Fyrri lausnirnar tvær eru utan einingar hringsins, en hinar $a = \sqrt{2/3}$ og $-a$ eru innan hans. Þetta eru einföld skaut og því er

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,a) &= \frac{a^2+1}{24a^3-26a} \\ \mathrm{Res}(f,-a) &= \frac{a^2+1}{-24a^3+26a} = -\mathrm{Res}(f,a). \end{aligned}$$

Af þessu leiðir að $I = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,-a)) = 0$. □

Sýnidæmi 4.5.3 Sýnið að

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{a(1+a^2)^{1/2}}, \qquad a > 0.$$

Lausn: Táknum heildið með I og umskrifum það yfir í vegheildi, þar sem γ táknar einingarhringinn

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{1}{a^2+(z^2-1)^2/(2iz)^2}\cdot\frac{dz}{iz} \\ &= \int_\gamma \frac{-4z/i}{(z^2-1)^2-4a^2z^2}\,dz \\ &= \int_\gamma \frac{-4z/i}{z^4-2(1+2a^2)z^2+1}\,dz \end{aligned}$$

Nefnarinn í síðasta heildisstofninum hefur fjórar ólíkar núllstöðvar og þær uppfylla

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (1+2a^2) \pm ((1+2a^2)^2-1)^{1/2} \\ &= (1+2a^2) \pm (4a^2+4a^4)^{1/2} \\ &= (1+2a^2) \pm 2a(1+a^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Greinilegt er að núllstöðvarnar α, sem hafa $+$ milli liðanna í þessari formúlu, eru utan einingarskífunnar $S(0,1)$, en hinar tvær sem hafa $-$ milli liðanna eru innan hans. Við reiknum nú leifina út

$$\begin{aligned} 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{-4z/i}{z^4-2(1+2a^2)z^2+1}, \alpha\right) &= \frac{-8\pi z}{4z^3-4(1+2a^2)z}\bigg|_{z=\alpha} \\ &= \frac{2\pi}{(1+2a^2)-\alpha^2} = \frac{2\pi}{2a(1+a^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Leifin er sem sagt sú sama í báðum punktunum, svo við fáum

$$I = 2\pi i \sum_{\alpha\in S(0,1)} \mathrm{Res}\left(\frac{-4z/i}{z^4-2(1+2a^2)z^2+1}, \alpha\right) = \frac{2\pi}{a(1+a^2)^{1/2}}.$$

□

4.6 Heildi yfir raunásinn

Nú ætlum við að snúa okkur að heildum af gerðinni

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{4.6.1}$$

þar sem fallið f er fágað í grennd um $\mathbb{R}$. Hugsum okkur fyrst að $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus A)$, þar sem A er dreift mengi. Aðferðin byggir á því að athuga að

$$I = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx,$$

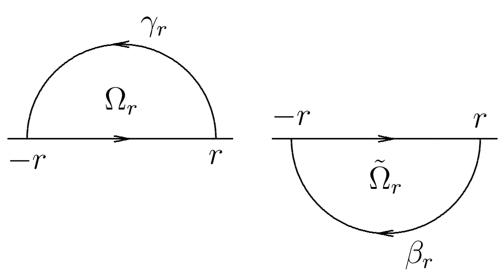
ef heildið (4.6.1) er samleitið. Leifasetningin gefur okkur þá

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap\Omega_r} \mathrm{Res}(f,\alpha)$$

og jafnframt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\beta_r} f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap\widetilde{\Omega}_r} \mathrm{Res}(f,\alpha),$$

þar sem Ω_r og $\widetilde{\Omega}_r$ eru hálfskífurnar á myndinni.



Mynd: Hálfskífur í efra og neðra hálfplani

Ef unnt er að sýna fram á að önnur hvor summan í hægri hliðunum hafi markgildi ef $r \to +\infty$ og að tilsvarandi vegheildi

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \qquad \text{eða} \qquad \int_{\beta_r} f(z)\,dz$$

stefni á núll, þá verður

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap H_+} \operatorname{Res}(f,\alpha)$$

eða

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap H_-} \operatorname{Res}(f,\alpha)$$

þar sem $H_+ = \{z\in\mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ táknar efra hálfplanið og $H_- = \{z\in\mathbb{C}; \operatorname{Im} z < 0\}$ táknar neðra hálfplanið.

Lítum nú á tilfellið að $f(x) = P(x)/Q(x)$ sé rætt fall, að P og Q séu margliður með $\operatorname{stig} P \le \operatorname{stig} Q - 2$, og að Q hafi engar núllstöðvar á $\mathbb{R}$. Auðvelt er að sannfæra sig um að til er fasti C þannig að

$$|f(z)| \le \frac{C}{r^2},$$

ef $|z| = r$ og r er það stórt að allar núllstöðvar Q liggja í $S(0, r-1)$. Lengd veganna γ_r og β_r er πr, svo við fáum

$$\Big|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\Big| \le \pi C/r \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

og sama mat fæst fyrir heildið af $f(z)$ yfir β_r. Niðurstaðan verður því að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\alpha\in\mathcal{N}(Q)\cap H_+} \operatorname{Res}(f,\alpha) = -2\pi i \sum_{\alpha\in\mathcal{N}(Q)\cap H_-} \operatorname{Res}(f,\alpha),$$

þar sem $\mathcal{N}(Q)$ er núllstöðvamengi Q.

Sýnidæmi 4.6.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = 5\pi/6$$

Lausn: Stig teljarans er tveimur lægra en stig nefnarans, svo okkur dugir að reikna út leifarnar í núllstöðvum nefnarans í efra hálfplaninu. Þær eru tvær, $\alpha_1 = i$ og $\alpha_2 = 2i$.

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}, \alpha_1\Big) = \frac{\alpha_1^2+3}{2\alpha_1(\alpha_1^2+4)} = \frac{1}{3i},$$
$$\operatorname{Res}\Big(\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}, \alpha_2\Big) = \frac{\alpha_2^2+3}{2\alpha_2(\alpha_2^2+1)} = \frac{1}{12i}.$$

Svarið verður því $I = 2\pi i(1/(3i) + 1/(12i)) = 5\pi/6$. □

Fram til þessa höfum við einungis fengist við föll sem hafa einföld skaut. Lítum nú á eitt dæmi, þar sem við þurfum að reikna út leif í skauti af hærra stigi en 1.

Sýnidæmi 4.6.2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \qquad n \geq 0.$$

Lausn: Setjum $f(z) = 1/(1+z^2)^{n+1}$, $z \neq \pm i$. Fallið f hefur skaut af stigi $m = n+1$ í $\alpha = i$ og engin önnur skaut í efra hálfplaninu. Til þess að ákvarða leifina, skrifum við

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^{n+1}}, \qquad g(z) = \frac{1}{(z+i)^{n+1}},$$

og athugum að

$$g^{(k)}(z) = (-1)^k \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{(z+i)^{n+k+1}}.$$

Gildi heildisins er því

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i \frac{g^{(n)}(i)}{n!} \\ &= \frac{2\pi i(-1)^n}{(2i)^{2n+1}} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!} = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

□

4.7 Æfingardæmi

1. Flokkið sérstöðupunkta fallanna í afmáanlega sérstöðupunkta, skaut og verulega sérstöðupunkta, reiknið út leifarnar í þeim og ákvarðið stig allra skauta:

a) $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3(z-2)^2(z-3)}$, b) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$,

c) $f(z) = e^{1/z^2}$, d) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$,

e) $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, f) $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$,

g) $f(z) = \tan z$, h) $f(z) = \exp(z - 1/z)$,

i) $f(z) = \dfrac{1}{\sinh z \cdot \sin z}$, j) $f(z) = \dfrac{z}{\cot(\pi z)}$.

k) $g(z) = \dfrac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)}$, l) $\dfrac{\sin z}{z}$,

m) $\dfrac{e^z - 1}{z(z-1)}$, n) $\dfrac{z(z-\pi)}{\sin z}$,

o) $\sin(1/z)$, p) $\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{\sin^2 \pi z}$.

2. Sýnið að föllin $(\sin z)/z$, $(e^z - 1)/z$ og $\big(\text{Log}(1+z)\big)/z$ hafi afmáanlegan sérstöðupunkt í $a = 0$ og ákvarðið síðan Taylor-raðir eftirtalinna falla í punktinum $a = 0$,

$$S(z) = \int_{\langle 0,z \rangle} \frac{\sin \zeta}{\zeta}\, d\zeta, \quad E(z) = \int_{\langle 0,z \rangle} \frac{e^\zeta - 1}{\zeta}\, d\zeta, \quad L(z) = \int_{\langle 0,z \rangle} \frac{\text{Log}(1+\zeta)}{\zeta}\, d\zeta.$$

3. Látum γ tákna stikaferillinn sem fæst með því að fara eina umferð rangsælis (í jákvæða stefnu) eftir jaðri rétthyrningsins með hornpunkta $-\frac{1}{2} - i$, $\frac{3}{2} - i$, $\frac{3}{2} + i$ og $-\frac{1}{2} + i$. Reiknið út heildið

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-10)}.$$

4. Sýnið að $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{b^2}\big(a - \sqrt{a^2 - b^2}\big)$, $a > |b| > 0$.

5. Sýnið að $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \sin^2\theta)^2} = \frac{\pi(2a+1)}{2(a^2+a)^{\frac{3}{2}}}$, $a > 0$.

6. Sýnið að

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{\pi \cdot (2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}$$

með því að heilda Laurent röð fallsins $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$,

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$$

í punktinum 0 yfir einingarhringinn.

7. Sýnið að $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$, $a, b > 0$.

8. Reiknið út heildin

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)^2}$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin 2x}{(1+x^2)^2}$, d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$, f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$, h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^4}\,dx$,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos 2x}{(1+x^2)^2}\,dx$, j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(4+x^2)(9+x^2)}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)^2}\,dx$, l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,dx$,

9. Látum a, b og c vera rauntölur og gerum ráð fyrir að $b^2 - 4ac < 0$. Sýnið að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(ax^2+bx+c)^2}\,dx = \frac{4\pi a}{(4ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

10. Heildið föllin $e^{az}/(e^z+1)$ og $\cosh az/\cosh z$ yfir ferhyrninginn með hornpunktana $-r$, r, $r+2\pi i$ og $-r+2\pi i$ og notið niðurstöðurnar til þess að sýna að fyrir sérhvert $a \in]0,1[$ gildi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin\pi a}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

[*Leiðbeining:* Athugið að bæði föllin hafa einfalt skaut í punktinum $i\pi$ og að nefnararnir eru lotubundin föll með lotuna $2\pi i$.]

Kafli 5

ÞÝÐ FÖLL OG FÁGAÐAR VARPANIR

5.1 Þýð föll

Laplace-virki, Laplace-jafna og þýð föll

Látum nú X tákna opið mengi í $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ og látum $\varphi : X \to \mathbb{R}$ vera deildanlegt fall á X. Munum að *stigull* fallsins φ er vigursviðið

$$\nabla\varphi = \big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\big).$$

Munum einnig að fyrir deildanlegt vigursvið $\vec{V} = (p, q) : X \to \mathbb{R}^2$ er *sundurleitni* þess skilgreind sem fallið

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Ef við tengjum saman stigul og sundurleitni, þá fáum við

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.$$

Skilgreining 5.1.1 Látum $\varphi : X \to \mathbb{R}$ vera tvisvar deildanlegt fall á opnu hlutmengi X í $\mathbb{C}$. Hlutafleiðuvirkinn

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

nefnist *Laplace-virki*, óhliðraða hlutafleiðujafnan $\Delta\varphi = 0$ nefnist *Laplace-jafna* og lausn $\varphi : X \to \mathbb{R}$ á henni er sögð vera *þýtt fall* á X. □

Wirtinger-afleiðuvirkjarnir

Rifjum nú upp skilgreininguna á Wirtinger-afleiðuvirkjunum:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

Með smá útreikningi sjáum við að

$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}$$

og þar með er fallið u er þýtt þá og því aðeins að $\partial^2 u/\partial z \partial \bar{z} = 0$. Munum einnig að fall f er fágað þá og því aðeins að $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.

Tengsl við fáguð föll

Látum $f : X \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ vera fágað fall þar sem $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$ tákna raun- og þverhluta. Þá eru bæði u og v óendanlega oft deildanleg föll og þau uppfylla Cauchy-Riemann jöfnurnar

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Við getum nú skrifað Cauchy-Riemann jöfnurnar sem

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \qquad \text{og} \qquad \nabla v = \Big(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Af þessu leiðir að

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0,$$

sem segir okkur að stiglar u og v eru hornréttir.

Munum að raungilt á fall á svæði X er fastafall þá og því aðeins að stigull þess sé núll í sérhverjum punkti. Cauchy-Riemann jöfnurnar segja okkur að u sé fastafall þá og því aðeins að v sé fastafall.

Af Cauchy-Riemann jöfnunum leiðir einnig

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

af því að v er óendanlega oft deildanlegt og $\partial^2 v/\partial x \partial y = \partial^2 v/\partial y \partial x$, og einnig fæst að

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

Við höfum því sannað:

Setning 5.1.2 *Ef f er fágað fall á opnu mengi X í $\mathbb{C}$, þá eru $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$ þýð föll og stiglar þeirra eru hornréttir í sérhverjum punkti í X. Ef X er svæði og annað hvort u eða v er fastafall, þá er hitt fallið það líka.* ■

Það er eðlilegt að spyrja hvort sérhvert þýtt fall á opnu mengi í $\mathbb{C}$ sé raunhluti af fáguðu falli. Svarið við þessari spurningu er neikvætt:

Sýnidæmi 5.1.3 Látum $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ og $u : X \to \mathbb{R}$ vera fallið sem gefið er með $u(z) = \ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $z = x+iy$. Í grennd um sérhvern punkt $a \neq 0$ getum við fundið logra og fallið u er raunhluti hans. Ef til væri þýtt fall þannig að $u+iv$ væri fágað á X, þá leiddi af þessu að v væri af gerðinni $v(z) = \theta(z) + c$ þar sem θ er samfellt horn á X, því þverhluti sérhvers logra er samfellt horn. Þetta fær ekki staðist, því það er ómögulegt að skilgreina samfellt horn á öllu menginu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Á sérhverju hlutmengi af $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ þar sem til er logri er fallið u raunhluti af þeim logra. Til dæmis er u raunhlutinn af höfuðgrein lograns á menginu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. $\square$

Ef gefið er þýtt fall u þá er oft hægt að finna fall v þannig að $u+iv$ verði fágað:

Sýnidæmi 5.1.4 (i) Lítum á þýða fallið $u(x,y) = x^2 - y^2$ og leitum að falli $v(x,y)$ þannig að $u+iv$ verði fágað fall. Fyrri Cauchy-Riemann-jafnan er

$$2x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ef við tökum stofnfall með tilliti til y, þá segir hún okkur að $v(x,y) = 2xy + g(x)$ þar sem g er eitthvert fall. Hin Cauchy-Riemann-jafnan segir okkur að

$$-2y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - g'(x).$$

Því er $g'(x) = 0$ fyrir öll x og þar með er g fasti. Niðurstaðan er því að $u = \operatorname{Re} f$, þar sem fallið f er gefið með

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi + ic = z^2 + ic$$

þar sem $c \in \mathbb{R}$ er fasti.

(ii) Lítum nú á fallið $u(x,y) = \sin x \cosh y$ sem er þýtt á öllu $\mathbb{C}$. Við förum eins að og hér að framan. Fyrri Cauchy-Riemann-jafnan er

$$\cos x \cosh y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Við tökum stofnfall með tilliti til y og fáum $v(x,y) = \cos x \sinh y + g(x)$ þar sem g er eitthvert fall. Hin Cauchy-Riemann-jafnan segir okkur að

$$\sin x \sinh y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \sinh y - g'(x).$$

Þessi jafna gefur okkur að $g'(x) = 0$ fyrir öll x og þar með að g sé fasti. Niðurstaðan er því að $u = \operatorname{Re} f$, þar sem fallið f er gefið með

$$f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y + ic = \sin z + ic$$

þar sem $c \in \mathbb{R}$ er fasti. $\square$

Gerum nú aftur ráð fyrir að u sé þýtt fall á svæði X í $\mathbb{C}$ og athugum hvernig hægt er að finna v þannig að $u+iv$ verði fágað fall. Gerum ráð fyrir að slíkt v sé til og setjum $f = u + iv$. Þá er

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

og fyrri Cauchy-Riemann-jafnan gefur að

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Það er því nauðsynlegt skilyrði að afleiðan af f sé gefin með þessari formúlu. Athugum að fallið sem stendur í hægri hliðinni uppfyllir Cauchy-Riemann-jöfnurnar og er þar með fágað, því ef við látum virkjann $\partial/\partial\bar{z}$ verka á hægri hliðina þá fáum við $\partial^2 u/\partial\bar{z}\partial z = 0$.

Nú sjáum við að sérhvert þýtt fall á X er raunhluti af fáguðu falli þá og því aðeins að sérhvert fágað fall á X hafi stofnfall. Í kafla 3.10 sáum við að þetta einkennir einfaldlega samanhangandi svæði:

Setning 5.1.5 *Látum X vera svæði í $\mathbb{C}$. Þá er sérhvert þýtt fall á X raunhluti af fáguðu falli þá og því aðeins að X sé einfaldlega samanhangandi. Ef $a \in X$ er fastur punktur þá er fallið f gefið með formúlunni*

$$f(z) = u(a) + ic + 2\int_{\gamma_z} \frac{\partial u}{\partial \zeta}(\zeta)\, d\zeta,$$

þar sem γ_z er einhver vegur í X með upphafspunkt a og lokapunkt z og $c \in \mathbb{R}$ er fasti. $\square$

Athugið að veginn í setningunni má velja sem línustrik, ef X er stjörnusvæði með tilliti til a.

Gerum nú ráð fyrir að u sé þýtt fall á svæði Y og að $g : X \to \mathbb{C}$ sé fágað fall á svæði $X \subset \mathbb{C}$ þannig að $g(X) \subset Y$. Ef $a \in X$ þá er til opin skífa með miðju í $g(a)$ í Y þannig að u er raunhluti fágaðs falls á f á skífunni. Þá verður samskeytingin $u \circ g$ raunhluti $f \circ g$ sem er fágað fall í grennd um a. Þetta segir okkur að samskeyting af þýðu falli við fágað fall er þýtt fall.

5.2 Hagnýtingar í straumfræði

Látum nú $\vec{V}$ vera vigursvið á opnu mengi X í $\mathbb{R}^2$. Við ætlum að líta á $\vec{V}$ sem hraðasvið, sem er háð tveimur breytistærðum

$$\vec{V}(x, y) = (p(x, y), q(x, y)), \qquad (x, y) \in X.$$

Straumlína vigursviðsins $\vec{V}$ er ferill í X sem stikaður er með lausn $\vec{z} : I \to \mathbb{R}^2$ á

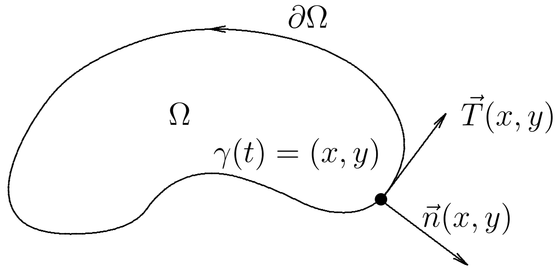
$$\vec{z}\,'(t) = \vec{V}(\vec{z}(t)), \qquad t \in I,$$

á einhverju bili I á $\mathbb{R}$. Þessi jafna jafngildir afleiðujöfnuhneppinu

$$x' = p(x, y), \qquad y' = q(x, y).$$

Vigursviðið getur átt sér eðlisfræðilega túlkun. Við getum til dæmis litið á $\vec{V}$ sem hraðasvið fyrir streymi vökva eða lofts. Gengið er út frá því að streymið sé óháð tíma og einni rúmbreytistærð og að það sé samsíða einhverju plani, sem við höfum valið sem (x, y)-plan. Straumlínurnar eru þá brautir agnanna í vökvanum eða loftinu. $\vec{V}$ getur einnig verið hraðasvið rafstraums í þunnri plötu og þá er $\vec{V}$ samsíða straumsviðinu í sérhverjum punkti.

Hugsum okkur nú að Ω sé hlutsvæði í X með jaðar $\partial\Omega$ í X og gerum ráð fyrir að hægt sé að stika $\partial\Omega$ með einföldum lokuðum ferli γ, sem er samfellt deildanlegur á köflum og γ stikar $\partial\Omega$ í jákvæða stefnu, en það þýðir að svæðið Ω er vinstra megin við snertilínuna í $\gamma(t)$, ef horft er í stefnu snertilsins $\gamma'(t)$. Ef $(x, y) = \gamma(t) \in \partial\Omega$ er punktur, þar sem γ er deildanlegt fall, þá skilgreinum við *einingarsnertil* $\vec{T}(x, y)$ í (x, y), sem einingarvigurinn í stefnu $\gamma'(t)$, $\vec{T}(x, y) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$, og *ytri einingarþvervigur á* $\partial\Omega$ sem einingarvigurinn $\vec{n}(x, y)$ sem er hornréttur á $\gamma'(t)$ og vísar út úr Ω. Við látum ds tákna *bogalengdarfrymið*. Með γ sem stikun á $\partial\Omega$ er það gefið sem $ds = |\gamma'(t)|\, dt$.



Mynd: Jaðar á svæði, snertill og þvervigur

Gauss-setningin gefur nú

$$
\begin{aligned}
(5.2.1)\qquad \int_{\partial\Omega} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds &= \int_\gamma (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}\vec{V}\, dxdy \\
&= \iint_\Omega \big(\partial_x p(x, y) + \partial_y q(x, y)\big)\, dxdy,
\end{aligned}
$$

og Green-setningin gefur

$$
\begin{aligned}
(5.2.2)\qquad \int_{\partial\Omega} (\vec{V}\cdot\vec{T})\, ds &= \int_\gamma (\vec{V}\cdot\vec{T})\, ds = \iint_\Omega \operatorname{rot}\vec{V}\, dxdy \\
&= \iint_\Omega \big(\partial_x q(x, y) - \partial_y p(x, y)\big)\, dxdy.
\end{aligned}
$$

Heildið í vinstri hlið (5.2.1) nefnist *flæði vigursviðsins* $\vec{V}$ yfir jaðarinn $\partial\Omega$ og vinstri hlið (5.2.2) nefnist *hringstreymi* vigursviðsins $\vec{V}$ eftir jaðrinum $\partial\Omega$. Við gefum okkur nú tvær forsendur um hraðasviðið $\vec{V}$:

(i) *Streymið er geymið*: Fyrir sérhvert $\Omega \subset X$ er flæðið yfir $\partial\Omega$ jafnt 0. Samkvæmt (5.2.1) hefur þetta í för með sér að

$$
(5.2.3)\qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in X.
$$

Þetta er lögmálið um varðveislu massans, ef $\vec{V}$ er hraðasvið fyrir vökvastreymi, en lögmálið um varðveislu hleðslunnar, ef $\vec{V}$ er hraðasvið rafstraums. Jafnan (5.2.3) er oft nefnd *samfelldnijafna*.

(ii) *Streymið er án hvirfla*: Fyrir sérhvert Ω er hringstreymi $\vec{V}$ eftir jaðrinum $\partial\Omega$ jafnt 0. Samkvæmt (5.2.2) hefur þetta í för með sér að

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in X. \tag{5.2.4}$$

Ein mikilvæg afleiðing þessa skilyrðis er að í streyminu geta ekki verið *hvirflar*, en það eru lokaðar straumlínur, sem mynda jaðar á svæði $\Omega \subset X$. Hugsum okkur að $\vec{z} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ væri slík straumlína. Þá er $\vec{T}(\vec{z}(t)) = \pm z'(t)/|z'(t)|$, $\vec{V}(\vec{z}(t)) = z'(t)$, $ds = |z'(t)|\,dt$ og þar með

$$\int_{\partial\Omega} \vec{V}\cdot\vec{T}\,ds = \pm\int_a^b |z'(t)|^2\,dt \neq 0.$$

Nú skulum við skrifa $\vec{V}$ sem tvinnfall, $V(z) = p(z) + iq(z)$. Jöfnurnar (5.2.3) og (5.2.4) segja að $\overline{V} = p - iq$ uppfylli Cauchy-Riemann-jöfnurnar og þar með er fallið $\overline{V}$ fágað. Hugsum okkur að $\overline{V}$ hafi stofnfall, sem við táknum með f. Ef $\varphi = \operatorname{Re} f$ og $\psi = \operatorname{Im} f$, þá leiðir af Cauchy-Riemann-jöfnunum að

$$f'(z) = \partial_x\varphi(z) + i\partial_x\psi(z) = \partial_x\varphi(z) - i\partial_y\varphi(z) = p(z) - iq(z).$$

Við höfum því $\text{grad}\varphi = \vec{V} = (p,q)$, svo straumlínurnar eru hornréttar á jafnhæðarlínurnar $\{z;\varphi(z) = c\}$, þar sem c er fasti. Nú gefa Cauchy-Riemann-jöfnurnar hins vegar að $\text{grad}\psi = (\partial_x\psi, \partial_y\psi)$ er hornréttur á $\text{grad}\varphi = (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi)$ og þar með eru staumlínurnar fyrir vigursviðið $\vec{V}$ gefnar sem jafnhæðarlínurnar $\{z;\psi(z) = c\}$, þar sem c fasti.

Fallið f kallast *tvinnmætti* fyrir straumfallið V, fallið φ kallast *raunmætti* fyrir V og fallið ψ kallast *streymisfall*. Niðurstaða athugana okkar er því að straumlínur vigursviðsins $\vec{V}$ eru jafnhæðarlínur streymisfallsins ψ, þar sem $\psi = \operatorname{Im} f$ og $f' = \overline{V}$. Ef við þekkjum streymisfallið ψ og getum ákvarðað jafnhæðarlínur þess, þá höfum við ákvarðað brautir lausna afleiðujöfnuhneppisins (5.2), án þess að leysa jöfnurnar.

Sýnidæmi 5.2.1 Lítum fyrst á hraðasviðið V sem gefið er með

$$V(z) = \frac{a}{\bar{z}} = a\frac{e^{i\theta}}{r}, \qquad z = re^{i\theta}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

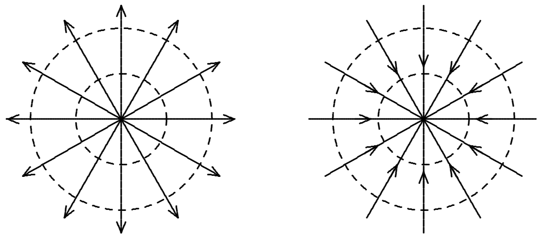
þar sem $a \in \mathbb{R}$. Fallið $\overline{V}$ hefur ekkert stofnfall á öllu $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, en á menginu $X = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ getum við tekið

$$f(z) = a\text{Log}z = a(\ln|z| + i\theta(z)), \qquad -\pi < \theta(z) < \pi,$$

fyrir stofnfall, þar sem Log táknar höfuðgrein lografallsins. Straumlínurnar verða þá jafnhæðarlínur fyrir hornið $\{z;\theta(z) = c\}$, en þær eru geislar út frá 0. Heildarflæði straumfallsins gegnum hring með geislann r er

$$\int_{|z|=r} \langle\vec{V},\vec{n}\rangle\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r}\,rd\theta = 2\pi a.$$

Ef $a > 0$ þá stefna straumlínurnar út frá 0 og þetta straumfall er til komið af *uppsprettu* í punktinum 0 með styrkinn $2\pi a$. Ef $a < 0$ þá er straumfallið til komið af *svelg* í punktinum 0 með styrkinn $2\pi a$. □



Uppspretta *Svelgur*

Mynd: Punktuppspretta

Sýnidæmi 5.2.2 Lítum nú á fallið V sem gefið er með

$$V(z) = \frac{ib}{\overline{z}} = ib\frac{e^{i\theta}}{r}, \qquad z = re^{i\theta}, \quad z \in X = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

þar sem $b \in \mathbb{R}$. Hér er hraðavigurinn í stefnu $ie^{i\theta}$ og þar með hornréttur á stöðuvigurinn. Á menginu $X = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ höfum við tvinnmættið

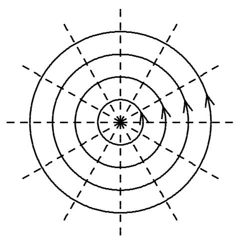
$$f(z) = -ib\text{Log}z = b(\theta(z) - i\ln|z|).$$

Hér verða straumlínurnar $\{z; \ln|z| = c\}$ hringir með miðju í 0. Hringstreymi vigursviðsins $\vec{V}$ eftir hring með geisla r er

$$\int_{|z|=r} \langle\vec{V}, \vec{T}\rangle\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{b}{r}\, r d\theta = 2\pi b.$$

Þetta mætti er sagt lýsa *hringstreymi* umhverfis *hvirfilpunkt* með styrk $2\pi b$ í 0.

□



Mynd: Hringstreymi

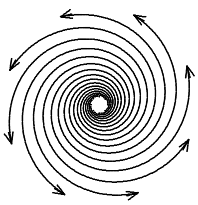
Sýnidæmi 5.2.3 Lítum á enn eitt afbrigðið,

$$V(z) = \frac{(a + ib)}{\overline{z}} = (a + ib)\frac{e^{i\theta}}{r}, \qquad z = re^{i\theta}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

þar sem $a, b \in \mathbb{R}$. Hér tvinnmætti á menginu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ gefið með

$$f(z) = (a - ib)\mathrm{Log} z = (a \ln|z| + b\theta(z)) + i(a\theta(z) - b\ln|z|).$$

Straumlínurnar eru $\{z; a\theta(z) - b\ln|z| = c\}$. Í pólhnitum eru þær gefnar með jöfnunni $r = e^{(a\theta - c)/b}$, en þetta eru *skrúflínur* eða *iðustreymi* út frá 0. Þetta mætti er myndað af straumuppsprettu með styrkinn $2\pi a$ og hvirfilpunkti með styrkinn $2\pi b$ í 0. □



Mynd: Iðustreymi

Sýnidæmi 5.2.4 Lítum nú á dæmið þar sem tvær uppsprettur með styrk $2\pi a$ eru í punktunum α og $-\alpha$ á raunásnum. Straumfallið verður þá

$$V(z) = \frac{a}{\overline{z} + \alpha} + \frac{a}{\overline{z} - \alpha},$$

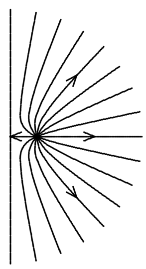
og sem tvinnmætti á $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq \alpha\}$ getum við tekið

$$\begin{aligned} f(z) &= a\mathrm{Log}(z + \alpha) + a\mathrm{Log}(z - \alpha) \\ &= a(\ln|z + \alpha| + \ln|z - \alpha|) + ia(\theta(z + \alpha) + \theta(z - \alpha)). \end{aligned}$$

Við sjáum vð þverásinn er straumlína, því þar er $\theta(iy + \alpha) + \theta(iy - \alpha) = \pi$, ef $y > 0$ og $\theta(iy + \alpha) + \theta(iy - \alpha) = -\pi$, ef $y < 0$. Straumvigurinn er í stefnu þverássins, upp ef $y > 0$ og niður ef $y < 0$, því

$$V(z) = \frac{2a\overline{z}}{\overline{z}^2 - \alpha^2}, \qquad V(iy) = \frac{2ayi}{y^2 + \alpha^2}.$$

Við getum einnig notað þetta fall til þess að lýsa streymi út frá uppsprettu í punktinum α af styrk $2\pi a$ í hálfplaninu $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z > 0\}$, þar sem litið er á þverásinn sem vegg. □



Mynd: Straumuppspretta við vegg

Sýnidæmi 5.2.5 Lítum nú á mættið sem til er komið vegna uppsprettu af styrk $2\pi a$ í punktinum α og svelgs af styrk $2\pi a$ í punktinum $-\alpha$. Straumfallið verður

$$V(z) = \frac{a}{\overline{z} - \alpha} - \frac{a}{\overline{z} + \alpha}.$$

Tvinnmættið á $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq \alpha\}$ getum við valið sem

$$f(z) = a\mathrm{Log}(z-\alpha) - a\mathrm{Log}(z+\alpha) = a \ln\left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right| + ia\theta\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right).$$

Talan $\theta((z-\alpha)/(z+\alpha))$ er hornið sem bilið $[-\alpha, \alpha]$ sést undir miðað við punktinn z. Við getum lýst straumlínu $\{z \in \mathbb{C}; \theta((z-\alpha)/(z+\alpha)) = c\}$ fyrir þetta streymi, sem mengi allra punkta sem eru þannig að bilið $[-\alpha, \alpha]$ sést undir horninu c frá z. Við sjáum að

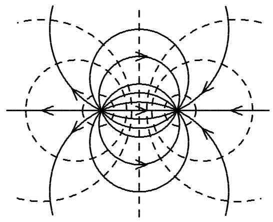
$$w = \frac{z-\alpha}{z+\alpha} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{\alpha w + \alpha}{-w+1} = -\alpha\frac{w+1}{w-1}.$$

Straumlínurnar eru gefnar sem $\theta(w) = c$, sem eru hálflínur út frá 0 í w-planinu með stefnuvigur e^{ic}. Við sjáum að $w = 0 \Leftrightarrow z = \alpha$ og $w = \infty \Leftrightarrow z = -\alpha$. Straumlínurnar eru því hringbogar frá α til $-\alpha$. Jafnmættislínurnar eru síðan gefnar með jöfnum af gerðinni

$$\left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right|^2 = c,$$

þar sem $c > 0$. Ef $c = 1$, þá er þetta þverásinn, en fyrir $c \neq 1$ er þetta hringur.

□



Mynd: Straumuppspretta í $-\alpha$ og svelgur í $+\alpha$

Sýnidæmi 5.2.6 Lítum nú á fallið $f : X \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \arcsin z, \qquad z \in X = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}.$$

sem tvinnmætti. Við skrifum $w = \arcsin z$, $z = x + iy$ og $w = u + iv$. Þá er $-\pi/2 < u < \pi/2$ og

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \sin w = \sin(u + iv) \\ &= \sin u \cos(iv) + \cos u \sin(iv) \\ &= \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v. \end{aligned}$$

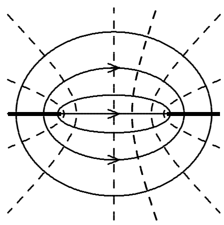
Straumlínurnar eru því gefnar sem $\psi(z) = \operatorname{Im} \arcsin z = v = \text{fasti}$ og við sjáum að jöfnur þeirra í z-planinu eru

$$\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = \sin^2 u + \cos^2 u = 1.$$

Þetta eru sporbaugar með hálfásana $a = \cosh v$ og $b = \sinh v$. Jafnmættislínurnar eru hins vegar gefnar sem $\varphi(z) = \operatorname{Re} \arcsin z = u = \text{fasti}$ og jöfnur þeirra í z-planinu eru

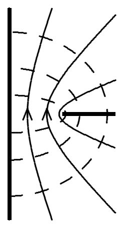
$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = \cosh^2 v - \sinh^2 v = 1.$$

Þetta eru jöfnur fyrir breiðboga.



Mynd: Tvinnmættið $f(z) = \arcsin z$

Ef við lítum á fallið $g(z) = -i \arcsin z$, þá skipta straumlínur og jafnmættislínur um hlutverk og breiðbogarnir verða straumlínur. Við tökum eftir því að þverásinn er straumlína. Við getum því túlkað þetta sem mætti fyrir streymi gegnum hlið.



Mynd: Streymi gegnum hlið

$\square$

5.3 Æfingardæmi

1. Látum $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ og $u : X \to \mathbb{R}$ vera fallið sem gefið er með $u(z) = \ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $z = x + iy$. Reiknið út Δu og sýnið þannig að u er þýtt fall.

2. Látum $X = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\, x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$ vera hægra hálfplanið og v vera fallið sem gefið er með $v(z) = \operatorname{Arg} z = \arctan(y/x)$. Reiknið út Δv og sýnið þannig að v er þýtt fall.

3. Látum $v : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ vera fallið sem gefið er með

$$v(z) = \operatorname{Arg} z = 2 \arctan\left(\frac{y}{|z| + x}\right), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Sýnið að v er þýtt.

4. Í sýnidæmi 5.2.5 sýndum við fram á að straum- og jafnmættislínur fyrir straumuppsprettu í $\alpha > 0$ og svelg í $-\alpha$ væru gefnar með jöfnunum

$$\theta\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right) = c \qquad \text{og} \qquad \left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right|^2 = d.$$

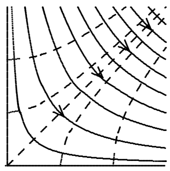
Fyrir öll gildi á c og d nema eitt eru þetta hringir. Ákvarðið miðju og geisla þessara hringa sem föll af c og d.

5. Lítum á tvinnmættið á $X = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq \alpha\}$

$$f(z) = -ia\big(\operatorname{Log}(z-\alpha) - \operatorname{Log}(z+\alpha)\big), \qquad z \in X,$$

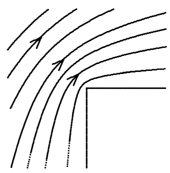
þar sem $\alpha > 0$ og $a > 0$. Notið niðurstöðuna úr dæmi 4 til þess að túlka þetta mætti sem mætti fyrir hringstreymi umhverfis hvirfilpunktinn α í hálfplani.

6. Ákvarðið straum- og jafnmættislínur fyrir tvinnmættið $f(z) = z^2$ á menginu $X = \{z = re^{i\theta}; 0 < \theta < \pi/2\}$ og túlkið það sem mætti fyrir streymi inn í horn.



Mynd: Streymi inn í horn

7. Ákvarðið straum- og jafnmættislínur fyrir tvinnmættið $f(z) = z^{\frac{2}{3}}$ á menginu $X = \{z = re^{i\theta}; 0 < \theta < 3\pi/2\}$ og túlkið það sem mætti fyrir streymi fyrir horn.



Mynd: Streymi fyrir horn

8. Ákvarðið straum- og jafnmættislínur fyrir tvinnmættið $f(z) = e^{i\alpha}/z$ á $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, þar sem $\alpha \in \mathbb{R}$.

Kafli 6

UNDIRSTÖÐUATRIÐI UM AFLEIÐUJÖFNUR

Samantekt. Afleiðujöfnur eru ein auðugasta og fjölbreytilegasta grein stærðfræðinnar sem snertir ótalmörg svið raunvísinda og tækni. Þær koma fyrir í stærðfræðilegum líkönum af fyrirbærum í umhverfi okkar. Það á jafnt við um náttúrleg fyrirbæri og þau sem gerð eru af manna höndum. Margar afleiðujöfnur eru leiddar út frá eðlisfræðilegum lögmálum, t.d. öðru lögmáli Newtons, lögmálinu um varðveislu orku, lögmálinu um varðveislu skriðþunga eða lögmálinu um varðveislu hleðslu. Þessi kafli er inngangur að afleiðujöfnum. Við byrjum á því að innleiða ritháátt fyrir afleiðujöfnur og kynnast nokkrum stærðfræðilegum líkönum af eðlisfræðilegum fyrirbærum. Við fjöllum síðan um upphafsgildisverkefni, jaðargildisverkefni og eigingildisverkefni. Við ljúkum svo kaflanum með því að fjalla um tilvist og ótvíræðni lausna á afleiðujöfnuhneppum. Við sönnum tilvistarsetningu fyrir fyrsta stigs hneppi á staðalformi, sem kennd er við Picard.

6.1 Skilgreiningar á nokkrum hugtökum

Venjulegar afleiðujöfnur

Afleiðujafna er jafna sem lýsir sambandi milli fallgilda óþekkts falls og gilda á einstökum afleiðum þess. Ef óþekkta fallið er háð einni breytistærð, þá kallast jafnan *venjuleg afleiðujafna,* en ef það er háð fleiri en einni breytistærð, þá kallast hún *hlutafleiðujafna.* Venjulega afleiðujöfnu er alltaf hægt að umrita yfir í jafngilda jöfnu af gerðinni

$$F(t, u, u', u'', \dots, u^{(m)}) = 0 \tag{6.1.1}$$

þar sem við hugsum okkur að t sé breytistærð, sem tekur gildi í einhverju hlutmengi A af $\mathbb{R}$ og að u sé óþekkt fall sem skilgreint er á A og tekur gildi í $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ eða jafnvel $\mathbb{R}^m$. Úrlausn jöfnunnar felst í því að finna opið bil $I \subset A$ og öll föll u þannig að vigurinn

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \tag{6.1.2}$$

sé í skilgreiningarmengi fallsins F og uppfylli jöfnuna

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0, \qquad t \in I. \tag{6.1.3}$$

Við segjum þá að fallið u sé lausn á jöfnunni (6.1.1). *Stig* afleiðujöfnu er hæsta stig á afleiðu, sem kemur fyrir í jöfnunni. Við segjum að m-ta stigs afleiðujafnan (6.1.1) sé á *staðalformi* þegar hún hefur verið umrituð yfir í jafngilda jöfnu af taginu

$$u^{(m)} = G(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}). \tag{6.1.4}$$

Línulegar afleiðujöfnur

Afleiðujafna af gerðinni

$$a_m(t)u^{(m)} + a_{m-1}(t)u^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t), \tag{6.1.5}$$

þar sem föllin $a_0, \dots, a_m, f$ eru skilgreind á bili $I \subset \mathbb{R}$, er sögð vera *línuleg*. Ástæðan fyrir nafngiftinni er, að vinstri hliðin skilgreinir línulega vörpun

$$L : C^m(I) \to C(I),$$
$$Lu(t) = a_m(t)u^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t),$$

ef $a_0, \dots, a_m \in C(I)$. Hér táknar $C^m(I)$ línulegt rúm allra m sinnum samfellt deildanlegra falla á I og $C(I)$ táknar rúm allra samfelldra falla á I. Við segjum að línulega jafnan (6.1.5) sé *óhliðruð* ef f er núllfallið. Annars segjum við að hún sé *hliðruð*.

Hlutafleiðujöfnur

Erfitt er að lýsa hlutafleiðujöfnum með almennum hætti eins og í (6.1.1), en sem dæmi um hlutafleiðujöfnur getum við tekið

$$\begin{aligned}
&\partial_x u + i\partial_y u = 0, && (\textit{Cauchy–Riemann–jafna}\ ),\\
&\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, && (\textit{Laplace–jafna}),\\
&\partial_t u - \kappa(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) = f(x, y, z, t), && (\textit{varmaleiðnijafna}),\\
&\partial_t^2 u - c^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) = f(x, y, z, t), && (\textit{bylgjujafna}).
\end{aligned}$$

Tilvist og ótvíræðni lausna

Það eru margvíslegar spurningar sem menn leita svara við þegar afleiðujöfnur eru leystar. Eðlilega fjallar fyrsta spurningin um tilvist á lausn. Ef henni er svarað játandi er eðlilegt að spyrja næst með hvaða skilyrðum lausn sé ótvírætt ákvörðuð og síðan hvernig ákvarða megi lausnir og finna nálganir á þeim. Til þess að útskýra þetta skulum við líta á einföldustu afleiðujöfnu sem hugsast getur

$$u' = 0.$$

Við vitum að öll fastaföll, $u(t) = c$, $t \in \mathbb{R}$, uppfylla þessa jöfnu og að sérhver lausn er fastafall. Spurningunni um tilvist er því svarað játandi, en spurningunni um ótvíræðni er svarað neitandi, því við höfum óendanlega margar lausnir. Lítum á aðeins flóknara dæmi, nefnilega jöfnuna

$$u' = f, \tag{6.1.6}$$

þar sem við hugsum okkur að fallið f sé samfellt á bilinu $I \subset \mathbb{R}$. Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar segir okkur að sérhvert stofnfall f sé lausn. Jafnframt vitum við að mismunur tveggja stofnfalla er fastafall og því er sérhver lausn af gerðinni

$$u(t) = b + \int_a^t f(\tau)\, d\tau, \qquad t, a \in I. \tag{6.1.7}$$

Ef við setjum nú það skilyrði að lausnin eigi að taka ákveðið gildi b í punktinum $a \in I$,

$$u' = f(t), \qquad u(a) = b, \tag{6.1.8}$$

þá gefur undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar að til er ótvírætt ákvörðuð lausn og hún er sett fram með formúlunni (6.1.7).

Aflfræði

Hreyfijöfnur aflfræðinnar gefa mörg dæmi um afleiðujöfnur. Við skulum rifja upp annað lögmál Newtons áður en við tökum slík dæmi. Hugsum okkur að hlutur með massa m sé á hreyfingu og að staðsetning hans sem fall af tíma t í einhverju hnitakerfi sé gefin með staðarvigrinum $\vec{r}(t)$. Hraðann á tímanum t táknum við með $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ og hröðun hans með $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$. Annað lögmál Newtons segir að

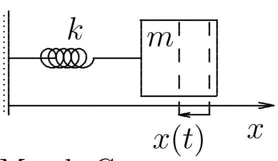
$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{6.1.9}$$

þar sem $\vec{F}$ táknar summu allra krafta sem verka á hlutinn. Kraftarnir geta verið háðir tíma, staðsetningu og hraða, $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$, þannig að (6.1.9) er í raun annars stigs afleiðujöfnuhneppi,

$$m\vec{r}\,''(t) = \vec{F}(t, \vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)), \tag{6.1.10}$$

þar sem hnitin þrjú í vigrinum $\vec{r} = (x, y, z)$ eru óþekkt föll af t.

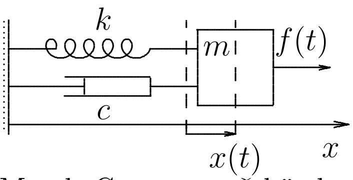
Sýnidæmi 6.1.1 (*Lögmál Hookes; deyfð sveifla*). Lítum á massa sem festur er



Mynd: Gormur

við gorm og hreyfist núningslaust eftir línu. Hugsum okkur að hnitakerfið sé valið þannig á línunni að x tákni færslu massans frá jafnvægisstöðu, $x > 0$ ef gormurinn er teygður og $x < 0$ ef honum er þrýst saman. Þegar gormurinn er teygður eða honum er þrýst saman, þá verkar hann með krafti f á massann. Lögmál Hookes segir að krafturinn sé í réttu hlutfalli við færsluna, en að hann hafi öfuga stefnu. Þetta þýðir að $f = -kx$, þar sem $k > 0$ nefnist *fjaðurstuðull* gormsins. Nú lítum við á annað lögmál Newtons. Fyrst massinn færist eftir línu, sem við veljum sem x-ás, þá er $y(t) = z(t) = 0$ fyrir öll t, svo fyrsta hnitið í vigurjöfnunni (6.1.10) verður hreyfijafna massans

$$mx'' = -kx. \tag{6.1.11}$$



Mynd: Gormur með högdeyfi

Nú skulum við líta á hlut með massann m sem er tengdur við gorm og höggdeyfi. Það er yfirleitt góð nálgun að gera ráð fyrir því að krafturinn, sem verkar frá höggdeyfinum á hlutinn sé í réttu hlutfalli við hraða hlutarins og að hann sé í öfuga stefnu við hraðann. Þetta þýðir að krafturinn er $-cx'(t)$, þar sem $c > 0$. Við köllum fastann c *deyfingarstuðul* höggdeyfisins. Við skulum einnig hugsa okkur að á massann verki ytri kraftur $f(t)$. Annað lögmál Newtons segir þá að $mx'' = -kx - cx' + f(t)$ og við fáum annars stigs afleiðujöfnu fyrir x

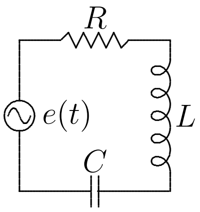
$$mx'' + cx' + kx = f(t). \tag{6.1.12}$$

□

Rafrás

Þetta dæmi á sér hliðstæðu í rafsegulfræði:

Sýnidæmi 6.1.2 (*RLC–rás*). Lítum á rafrás sem samanstendur af spennugjafa með frumspennuna $e(t)$, viðnámi R, spólu með spanstuðul L og þétti með rýmdina C. Hlutar rásarinnar eru tengdir saman eins og myndin sýnir.



Mynd: Rafrás

Við látum $i(t)$ tákna strauminn í rásinni og $q(t)$ tákna hleðslu þéttisins sem föll af tíma t. Varðveisla orkunnar er sett fram í *spennulögmáli Kirchhoffs*, en það segir að frumspennan sé jöfn summunni af spennumuni yfir einstaka hluta rásarinnar. Spennumunurinn yfir viðnámið er $Ri(t)$, spennumunurinn yfir spóluna er $Li'(t)$ og spennumunurinn yfir þéttinn er $C^{-1}q(t)$. Við höfum því

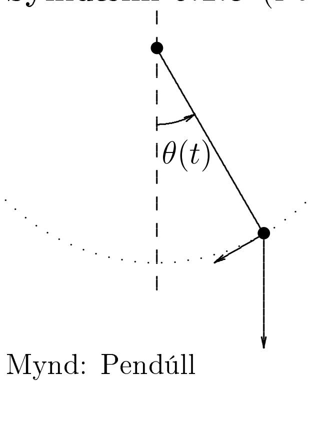
$$Ri(t) + Li'(t) + C^{-1}q(t) = e(t).$$

Við deildum þessa jöfnu, notfærum okkur að $q' = i$ og fáum annars stigs jöfnuna

$$Li'' + Ri' + C^{-1}i = e'(t). \tag{6.1.13}$$

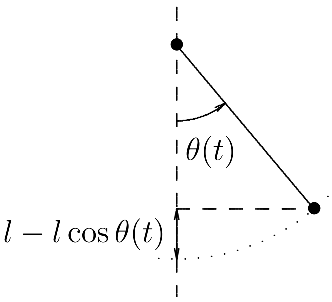
Við sjáum að þetta er jafna sömu gerðar og (6.1.12). □

Sýnidæmi 6.1.3 (*Pendúll*). Lítum á kúlu með massa m sem hangir



Mynd: Pendúll

í stöng af lengd l og gerum ráð fyrir að massi stangarinnar sé hverfandi miðað við massa kúlunnar. Stöngin er fest að ofanverðu þannig að massinn sveiflist án núnings. Við táknum útslagshornið sem fall af tíma t með $\theta(t)$ eins og myndin sýnir. Hornhraðinn er $\theta'(t)$, brautarhraðinn er $l\theta'(t)$ og brautarhröðunin er $l\theta''(t)$. Kraftarnir sem verka á kúluna eru annars vegar togkrafturinn í stönginni og hins vegar þyngdarkrafturinn mg lóðrétt niður. Summa þessara krafta er $-mg\sin\theta(t)$ í stefnu snertilsins við brautina, svo annað lögmál Newtons gefur okkur hreyfijöfnu pendúlsins



Mynd: Stöðuorka pendúls

(6.1.14) $$ml\theta'' = -mg\sin\theta.$$

Við getum stytt út massann og fáum að lokum jöfnuna

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Þetta er annars stigs afleiðujafna, en hún er ekki línuleg, því sínus er ekki línulegt fall. Ef útslagið $\theta(t)$ er lítið, þá er hægt nálga $\sin\theta = \theta - \theta^3/3! + \cdots$ með fyrsta liðnum í Taylor-röðinni og þá fæst línuleg annars stigs jafna

(6.1.15) $$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Hægt er að sýna fram á að lausnir (6.1.15) séu góðar nálganir á lausnum (6.1.14) ef útslagið er lítið. Hreyfijöfnuna (6.1.14) er einnig hægt að leiða út með því að ganga út frá varðveislu orkunnar. Eins og áður segir, þá er hraði kúlunnar á tímanum t jafn $l\theta'(t)$ og því er hreyfiorka kúlunnar $\frac{1}{2}m(l\theta')^2$. Stöðuorkan í þyngdarsviðinu er $mg(l - l\cos\theta)$. Ef gengið er út frá því að heildarorkan

$$E = \frac{1}{2}m(l\theta')^2 + mg(l - l\cos\theta)$$

sé fasti, þá fæst (6.1.14) með því að deilda þessa jöfnu. $\square$

6.2 Fyrsta stigs jöfnur

Línulegar jöfnur

Fyrsta stigs línuleg afleiðujafna er af gerðinni

(6.2.1) $$a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t).$$

Við skulum rifja upp aðferðina til að leysa þessa jöfnu í því tilfelli að stuðlarnir eru samfelld föll á einhverju bili I og að $a_1(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Með því að deila í gegnum jöfnuna með $a_1(t)$, þá getum við gert ráð fyrir því að a_1 sé fastafallið 1 og við ætlum því að leysa

$$u' + a_0(t)u = f(t).$$

Aðferðin gengur út á að skilgreina A sem eitthvert stofnfall a_0,

$$A(t) = c + \int_a^t a_0(\tau)\,d\tau, \qquad t, a \in I,$$

og athuga að ef u er lausn, þá gildir

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}u(t)) = e^{A(t)}(u'(t) + a_0(t)u(t)) = e^{A(t)}f(t).$$

Af þessari jöfnu leiðir síðan að

$$e^{A(t)}u = C + \int_a^t e^{A(\tau)} f(\tau)\, d\tau,$$

og þar með fæst almenna lausnarformúlan

$$u(t) = e^{-A(t)}(C + \int_a^t e^{A(\tau)} f(\tau)\, d\tau),$$

þar sem C er einhver fasti. Þessi útreikningur okkar sýnir að sérhver lausn á jöfnunni hlýtur að vera af þessari gerð. Nú er hins vegar lauflétt að sýna að þetta er lausn, með því að stinga þessari formúlu inn í afleiðujöfnuna. Verkefnið

$$u' + a_0(t)u = f(t), \qquad u(a) = b,$$

hefur ótvírætt ákvarðaða lausn og hún er fundin með því að velja stofnfallið A þannig að $A(a) = 0$ og $C = b$,

$$u(t) = e^{-A(t)}(b + \int_a^t e^{A(\tau)} f(\tau)\, d\tau), \qquad A(t) = \int_a^t a_0(\tau)\, d\tau. \tag{6.2.2}$$

Fyrsta stigs jöfnur koma fyrir í einföldum líkönum í eðlisfræði og líffræði:

Sýnidæmi 6.2.1 (*Geislavirkni efna*). Hugsum okkur að á tilteknum tíma innihaldi ákveðið efni $N(t)$ frumeindir af ákveðinni geislavirkri samsætu. Nú er N heiltölugilt fall, en við hugsum okkur að við getum nálgað N með samfellt deildanlegu falli $u(t)$. *Hrörnun* geislavirku samsætunnar yfir tímabilið $[t, t+h]$ er mismunurinn $N(t+h) - N(t)$. Hann reynist vera í hlutfalli við $N(t)$ og h, $N(t+h) - N(t) \approx -kN(t)h$ ef h er nógu lítið. Ef við gefum okkur að sama gildi um fallið u, þá fáum við jöfnuna

$$u'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = -ku(t)$$

fyrir nálgunarfallið. Ef við setjum einfaldlega N í hlutverk u þá fáum við

$$N(t) = N(0)e^{-kt}, \qquad t \geq 0.$$

Venjulega reikna menn fastann k út frá *helmingunartíma* T fyrir samsætuna, en það er sá tími sem það tekur $N(t)$ að minnka frá $N(0)$ niður í $\frac{1}{2}N(0)$. Fastinn k ákvarðast þá út úr jöfnunni $N(T) = e^{-kT}N(0) = \frac{1}{2}N(0)$, $k = (\ln 2)/T$. Þar með fáum við

$$N(t) = N(0)2^{-t/T}, \qquad t \geq 0.$$

□

Sýnidæmi 6.2.2 (*Stofnstærð*). Allra einföldustu líkön fyrir stærð dýrastofna og mannfjölda eru kennd við stærðfræðinginn Malthus og eru frá árinu 1798. Við gerum ráð fyrir að $P(t)$ tákni fjölda einstaklinga í stofninum og við hugsum okkur að $P(t)$ sé samfellt deildanlegt fall af tíma, enda þótt það geti ekki verið annað en heiltölugilt. Við látum $B(t)$ tákna fjölda fæðinga í stofninum frá tímanum $t = t_0$ og $D(t)$ fjölda dauðsfalla frá $t = t_0$. Við skilgreinum út frá þessum stærðum *fæðingartíðni* með

$$\beta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{hP(t)} = \frac{B'(t)}{P(t)}$$

og síðan *dánartíðni* með

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{hP(t)} = \frac{D'(t)}{P(t)}.$$

Ef við gerum ráð fyrir að stofninn stækki einungis við eigin fjölgun, þá fáum við

$$P'(t) = B'(t) - D'(t) = (\beta(t) - \delta(t))P(t),$$

en þessi jafna hefur lausnina

$$P(t) = P(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t (\beta(\tau) - \delta(\tau))\,d\tau\right), \qquad t \geq t_0.$$

Ef bæði β og δ eru fastaföll, þá fáum við

$$P(t) = P(t_0)e^{k(t-t_0)}, \qquad k = \beta - \delta, \qquad t \geq t_0.$$

Þar sem þessi lausn er ótakmörkuð, ef fæðingartíðnin er hærri en dánartíðnin, þá getur hún ekki átt við nema í takmarkaðan tíma. Til þess að fá lausn sem líkir betur eftir því sem gerist í raunveruleikanum er nauðsynlegt að setja einhverjar skorður á stofnstærðina inn í forsendur líkansins. Við víkjum að þessu í næsta sýnidæmi. □

Aðskiljanlegar jöfnur

Við segjum að fyrsta stigs afleiðujafna $u' = f(t,u)$ sé *aðskiljanleg* ef hægt er að rita fallið f sem kvóta af gerðinni $f(t,x) = g(t)/h(x)$. Til þess að leysa jöfnuna, þá skrifum við hana sem $h(u)u' = g(t)$ og heildum síðan

$$\int h(u(t))u'(t)\,dt = c + \int g(t)\,dt,$$

þar sem c er heildunarfasti. Ef við viljum síðan leysa verkefnið

$$u' = f(t,u), \qquad u(a) = b,$$

þá veljum við stofnfall H fyrir h og heildum

$$H(u(t)) - H(b) = \int_b^{u(t)} h(x)\,dx = \int_a^t h(u(\tau))u'(\tau)\,d\tau = \int_a^t g(\tau)\,d\tau. \tag{6.2.3}$$

Ef til er grennd um punktinn b þar sem fallið H hefur andhverfu, þá getum við skrifað lausnina sem

$$u(t) = H^{[-1]}\left(H(b) + G(t)\right), \qquad G(t) = \int_a^t g(\tau)\,d\tau. \tag{6.2.4}$$

Í útreikningum á venjulegum dæmum borgar sig yfirleitt ekki að reikna út formúlu fyrir $H^{[-1]}$ og stinga síðan gildinu $H(b)+G(t)$ inn í þá formúlu eins og lýst er með (6.2.4). Þess í stað er betra að leysa $u(t)$ úr jöfnunni (6.2.3).

Sýnidæmi 6.2.3 (*Stofn af takmarkaðri stærð*). Nú skulum við halda áfram með sýnidæmi 6.2.2 og gera ráð fyrir því að fæðingartíðnin sé háð stofnstærðinni þannig að $\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 P(t)$, þar sem β_0 og β_1 eru jákvæðir fastar en að dánartíðnin $\delta(t) = \delta_0$ sé föst. Afleiðujafnan fyrir stofnstærðina verður þá

$$P'(t) = (\beta(t) - \delta(t))P(t) = (\beta_0 - \beta_1 P(t) - \delta_0)P(t) = k(M - P(t))P(t),$$

þar sem $k = \beta_1$ og $M = (\beta_0 - \delta_0)/\beta_1$. Þetta er aðskiljanleg jafna og við getum skrifað hana sem

$$\frac{P'}{P(M-P)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right)P' = k.$$

Ef við veljum upphafstímann $t_0 = 0$, og setjum $P(0) = P_0$, þá fáum við með heildun

$$\ln P(t) - \ln(M - P(t)) = Mkt + c, \qquad \frac{P(t)}{M - P(t)} = \frac{P_0}{M - P_0} e^{Mkt}.$$

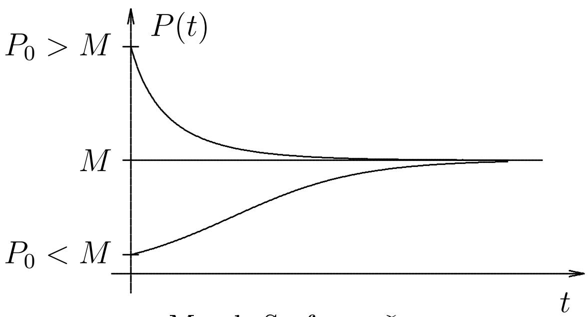
Einfalt er að leysa $P(t)$ út úr þessari jöfnu,

$$P(t) = \frac{MP_0 e^{Mkt}}{(M - P_0) + P_0 e^{Mkt}} = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}}.$$

Á þessari formúlu sjáum við að stærð stofnsins er takmörkuð, hún er alltaf á milli P_0 og M, og við höfum

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = M.$$

$\square$



Mynd: Stofnstærð

Aðskiljanleg jafna fyrir pendúl

Í þessu sýnidæmi var auðvelt að leysa út $P(t)$ sem fall af t. Ef ekki er gerlegt að setja lausnina fram með beinni formúlu, þá segjum við að hún sé gefin sem *fólgið fall* af t. Í dæminu um pendúlinn er hægt að skrifa útslagshornið sem fólgið fall af tíma:

Sýnidæmi 6.2.4 (*Pendúll, framhald*). Í sýnidæmi 6.1.3 leiddum við út hreyfijöfnuna $\theta'' + (g/l)\sin\theta = 0$ fyrir útslagshornið $\theta(t)$. Með því að beita einföldu bragði, má umrita þessa jöfnu yfir í aðskiljanlega fyrsta stigs jöfnu. Þetta bragð er fólgið í því að margfalda jöfnuna með θ' og athuga að $\theta'\theta''$ er afleiðan af $\frac{1}{2}\big(\theta'\big)^2$. Þetta gefur

$$\frac{d}{dt}\big(\theta'\big)^2 = 2\theta'\theta'' = -(2g/l)(\sin\theta)\theta'.$$

Við veljum hnitin þannig að $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) > 0$ og táknum tímann þegar hámarksútslagi θ_0 er fyrst náð með t_0. Við höfum þá $\theta(t_0) = \theta_0$ og $\theta'(t_0) = 0$. Þar með er

$$\big(\theta'(t)\big)^2 = (2g/l)(\cos\theta(t) - \cos\theta_0), \qquad t \in [0, t_0].$$

Við getum nú skilið að breytistærðirnar θ og t

$$1 = (2g/l)^{-1/2}\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big)^{-1/2}\theta',$$

sem gefur okkur $\theta(t)$ sem fólgið fall,

$$t = (2g/l)^{-1/2}\int_0^{\theta(t)} \big(\cos\varphi - \cos\theta_0\big)^{-1/2}\, d\varphi, \qquad t \in [0, t_0].$$

Við látum $T = 4t_0$ tákna *lotu* sveiflunnar. Við höfum því

$$T = 4(2g/l)^{-1/2}\int_0^{\theta_0} \big(\cos\varphi - \cos\theta_0\big)^{-1/2}\, d\varphi, \qquad t \in [0, t_0],$$

og sjáum að lotan og þar með sveiflutíðnin er einungis háð hámarksútslagi, lengd pendúlsins og þyngdarhröðuninni, en ekki massanum. □

6.3 Afleiðujöfnuhneppi

Afleiðujöfnuhneppi er safn af jöfnum sem lýsa sambandi milli gilda óþekktra falla og gilda á einstökum afleiðum þeirra. Ef óþekktu föllin eru háð einni breytistærð, þá kallast það *venjulegt afleiðujöfnuhneppi*, en það kallast *hlutafleiðujöfnuhneppi* ef þau eru háð fleiri en einni breytistærð. Venjulegt afleiðujöfnuhneppi er alltaf hægt að umrita yfir í jöfnur af gerðinni

$$F_j(t, u_1, \dots, u_k, {u_1}', \dots, {u_k}', \dots, u_1^{(m)}, \dots, u_k^{(m)}) = 0, \qquad j = 1, \dots, l, \tag{6.3.1}$$

þar sem t táknar breytistærðina, $u_1, \dots, u_k$ eru óþekktu föllin og föllin $F_1, \dots, F_l$ taka gildi í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$. Til þess að einfalda ritháttinn, þá skilgreinum við vigurgildu föllin $u = (u_1, \dots, u_k)$ og $F = (F_1, \dots, F_l)$. Þá eru jöfnurnar (6.3.1) jafngildar vigurjöfnunni $F(t, u, u', \dots, u^{(m)}) = 0$, sem hefur sama útlit og (6.1.1). Úrlausn jöfnunnar felst í því að finna opið bil I og öll vigurföll $u = (u_1, \dots, u_k)$, þannig að vigurinn (6.1.2) sé í skilgreiningarmengi fallsins F og uppfylli jöfnuna (6.1.3). *Stig* afleiðujöfnuhneppis er skilgreint sem hæsta stig á afleiðu sem kemur fyrir í jöfnunni.

Staðalform hneppa

Við segjum að hneppið sé á *staðalformi* , ef fjöldi jafna og fjöldi óþekktra falla er sá sami og það er af gerðinni

$$u^{(m)} = G(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}).$$

Mikilvægustu hneppin sem við fáumst við eru fyrsta stigs venjuleg afleiðujöfnuhneppi á staðalformi

$$u' = G(t, u).$$

Ef við skrifum upp hnitaföllin fyrir þetta hneppi, þá fáum við jöfnurnar

$$\begin{aligned} {u_1}' &= G_1(t, u_1, \dots, u_m), \\ {u_2}' &= G_2(t, u_1, \dots, u_m), \\ &\vdots \\ {u_m}' &= G_m(t, u_1, \dots, u_m), \end{aligned}$$

þar sem $G_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eða $G_j : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ eftir því hvort við viljum að lausnin taki rauntölugildi eða tvinntölugildi. Föllin $u = (u_1, \dots, u_m)$ og $G = (G_1, \dots, G_m)$ taka gildi í vigurrúminu $\mathbb{R}^m$ eða $\mathbb{C}^m$, eftir því hvort við hugsum okkur að lausnirnar eigi að taka rauntölugildi eða tvinntölugildi.

Línuleg afleiðujöfnuhneppi

Við segjum að fyrsta stigs jöfnuhneppi sé *línulegt* ef fallið G er af gerðinni

$$G(t, x) = A(t)x + f(t),$$

þar sem $A(t)$ er $m \times m$ fylki og $f(t)$ er m–vigur. Ef við skrifum upp hnitin þá verður hneppið

$$\begin{aligned} {u_1}' &= a_{11}(t)u_1 + \cdots + a_{1m}(t)u_m + f_1(t), \\ {u_2}' &= a_{21}(t)u_1 + \cdots + a_{2m}(t)u_m + f_2(t), \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ {u_m}' &= a_{m1}(t)u_1 + \cdots + a_{mm}(t)u_m + f_m(t). \end{aligned}$$

Hér eru föllin $a_{jk}(t)$ stökin í fylkinu $A(t)$. Við segjum að hneppið sé *óhliðrað* ef f er núllfallið og við segjum að það sé *hliðrað* annars.

Jöfnur af hærri stigum og jafngild hneppi

Lítum nú á venjulega m–ta stigs afleiðujöfnu á staðalformi

$$v^{(m)} = G(t, v, v', \dots, v^{(m-1)}). \tag{6.3.2}$$

Ef við skilgreinum vigurfallið $u = (u_1, \dots, u_m)$ með

$$u_1 = v, \quad u_2 = v', \dots, \quad u_m = v^{(m-1)},$$

þá uppfyllir u jöfnuhneppið

$$u_1{}' = u_2, \quad u_2{}' = u_3, \quad \dots \quad u_{m-1}{}' = u_m, \quad u_m{}' = G(t, u_1, \dots, u_m). \tag{6.3.3}$$

Jafnan (6.3.2) og jöfnuhneppið (6.3.3) eru jafngild í þeim skilningi að sérhver lausn v á (6.3.2) gefur lausn $u = (v, v', \dots, v^{(m-1)})$ á (6.3.3) og sérhver lausn u á (6.3.3) gefur lausnina $v = u_1$ á (6.3.2). Þessi einfalda staðreynd er mikilvæg, því einfalt reynist að sanna tilvist á lausnum á fyrsta stigs jöfnuhneppum á staðalformi. Þá niðurstöðu er síðan hægt að nota til að sanna tilvist á lausnum á jöfnum af stigi stærra en 1.

Línulega afleiðujafnan

$$a_m(t)v^{(m)} + \cdots + a_1(t)v' + a_0(t)v = g(t)$$

er greinilega jafngild línulega hneppinu

$$\begin{aligned} u_1{}' = u_2, \qquad u_2{}' = u_3, \qquad \dots, \quad u_{m-1}{}' = u_m \\ u_m{}' = -(a_0(t)/a_m(t))u_1 - \cdots - (a_{m-1}(t)/a_m(t))u_m + g(t)/a_m(t), \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

ef $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Fylkið A og vigurinn f verða þá

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0/a_m & -a_1/a_m & \dots & -a_{m-1}/a_m \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g/a_m \end{bmatrix}. \tag{6.3.5}$$

Sýnidæmi 6.3.1 Jafnan $t^2v'' - tv' + 2v = t^3$ hefur staðalformið

$$v'' = \frac{1}{t}v' - \frac{2}{t^2}v + t.$$

Ef við setjum $u_1 = v$ og $u_2 = v'$, þá fáum við jöfnuhneppið

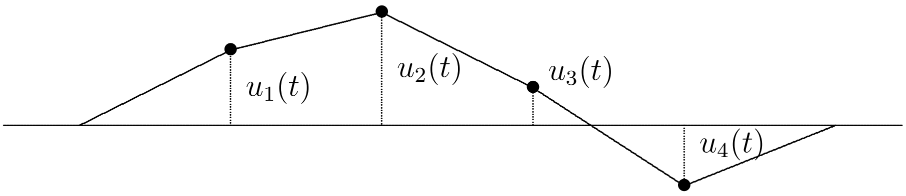
$$\begin{aligned} u_1{}' &= \qquad\qquad u_2, \\ u_2{}' &= -\frac{2}{t^2}u_1 + \frac{1}{t}u_2 + t. \end{aligned}$$

Á fylkjaformi er þetta hneppi $u' = A(t)u + f(t)$, þar sem

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

□

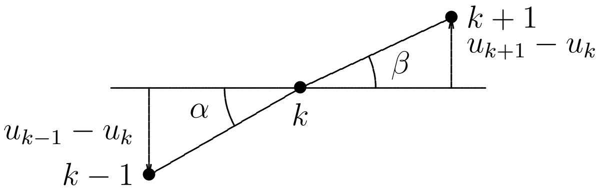
Sýnidæmi 6.3.2 (*Festi*). Lítum á festi af lengd L og massa m. Hún samanstendur af n eins kúlum sem festar eru með jöfnu millibili á streng. Við hugsum okkur að massi strengsins sé hverfandi miðað við massa kúlnanna, að hann sé strekktur og festur niður í báðum endapunktum. Við gerum ráð fyrir að kúlurnar hreyfist í plani og táknum frávik kúlu númer k frá jafnvægisstöðu með $u_k(t)$ eins og myndin sýnir.



Mynd: Festi

Ef T táknar spennuna í strengnum, þá er lóðrétti þáttur togkraftsins sem verkar á massa númer k jafn

$$-T\sin\alpha + T\sin\beta.$$



Mynd: Togkraftar í festi

Ef útslagið er nógu lítið, þá má nálga sínus af hornunum α og β með tangens og við fáum

$$-\sin\alpha \approx \frac{u_{k-1}-u_k}{L/(n+1)}, \ \sin\beta \approx \frac{u_{k+1}-u_k}{L/(n+1)}.$$

Massi kúlnanna er m/n, svo annað lögmál Newtons gefur

$$(m/n)u_k{}'' = \frac{(n+1)T}{L}\big(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\big).$$

Látum nú $\varrho = m/L$ tákna massa á lengdareiningu í festinni og $h = L/(n+1)$ tákna fjarlægðina milli miðpunkta kúlnanna. Þá eru þessar jöfnur jafngildar

$$u_k'' = \frac{nT}{(n+1)\varrho}\cdot\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Þar sem strengurinn er festur niður í endapunktunum, þá setjum við $u_0 = u_{n+1} = 0$ í þessum jöfnum. Þetta er annars stigs jöfnuhneppi og það getum við ritað á fylkjaformi sem

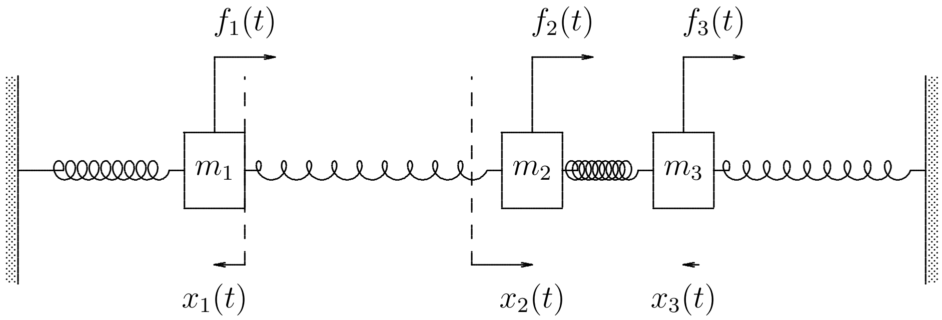
$$u'' = Au, \qquad A = -\omega^2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{6.3.6}$$

þar sem

$$\omega = \sqrt{\frac{nT}{(n+1)\varrho h^2}} = \sqrt{n(n+1)}\,c/L, \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}. \tag{6.3.7}$$

□

Sýnidæmi 6.3.3 (*Tengdir gormar*). Lítum á n hluti sem tengdir eru saman með $n+1$ gormi með fjaðurstuðla $k_1, \dots, k_{n+1}$. Við gerum ráð fyrir að þeir sveiflist núningslaust eftir sléttum fleti og að á þá verki ytri kraftar $f_1, \dots, f_n$. Við táknum færslu hlutanna frá jafnvægisstöðu með $x_1(t), \dots, x_n(t)$.



Mynd: Tengdir gormar

Lögmál Hookes og annað lögmál Newtons gefa okkur hreyfijöfnurnar fyrir þetta kerfi

$$\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1, \\
m_j x_j'' &= -k_j(x_j - x_{j-1}) + k_{j+1}(x_{j+1} - x_j) + f_j, \quad j = 2, \dots, n-1, \\
m_n x_n'' &= -k_n(x_n - x_{n-1}) - k_{n+1} x_n + f_n.
\end{aligned}$$

Þetta er annars stigs línulegt jöfnuhneppi og við getum ritað það á fylkjaformi sem

$$x'' = Ax + f,$$

$$A = -\begin{bmatrix} (k_1+k_2)/m_1 & -k_2/m_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2/m_2 & (k_2+k_3)/m_2 & -k_3/m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k_n+k_{n+1})/m_n \end{bmatrix}.$$

Ef við gerum ráð fyrir að allir massarnir séu eins $m_j = m$ og að allir gormarnir hafi sama fjaðurstuðul $k_j = k$, þá fáum við sama hneppið og í sýnidæmi 6.3.2 með $\omega = \sqrt{k/m}$. $\square$

6.4 Upphafsgildisverkefni

Oft hafa menn áhuga á að finna lausnir á afleiðujöfnum og afleiðujöfnuhneppum sem uppfylla einhverja ákveðna eiginleika. *Upphafsgildisverkefni* snúast um að leysa afleiðujöfnuhneppi með því hliðarskilyrði að lausnin og einhverjar afleiður hennar taki fyrirfram gefin gildi í ákveðnum punkti. Upphafsgildisverkefni fyrir fyrsta stigs hneppi af staðalformi er til dæmis verkefnið

$$u' = f(t,u), \quad t \in I, \qquad u(a) = b. \tag{6.4.1}$$

Hér er átt við að finna eigi lausn $u = (u_1, \dots, u_m)$ á jöfnunni á bilinu I, sem tekur gildið $b = (b_1, \dots, b_m)$ í punktinum $a \in I$. Upphafsgildisverkefni fyrir m-ta stigs línulega jöfnu er af gerðinni

$$\begin{cases} a_m(t)v^{(m)} + \cdots + a_1(t)v' + a_0(t)v = g(t), & t \in I, \\ v(a) = b_0, \quad v'(a) = b_1, \quad \dots \quad v^{(m-1)}(a) = b_{m-1}. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

Ef $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$, þá getum við deilt í gegnum jöfnuna með $a_m(t)$ og umskrifað hana síðan yfir í jafngilt $m \times m$ línulegt jöfnuhneppi með óþekkta vigurfallið $u = (v, v', \dots, v^{(m-1)})$, eins og lýst er í grein 6.3. Það að leysa upphafsgildisverkefnið (6.4.2) er þá jafngilt því að leysa verkefni af taginu (6.4.1) með $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$.

Upphafsgildisverkefni koma eðlilega upp í eðlisfræði. Hugsum okkur til dæmis hlut með massann m á hreyfingu undir áhrifum kraftsviðsins $\vec{F}$. Við gerum ráð fyrir að staðsetningu hlutarins sé lýst með staðarvigrinum $\vec{r}(t)$, að kraftsviðið sé háð tíma t, staðsetningu $\vec{r}$ og hraða $\vec{v}$. Ef við hugsum okkur að staðsetningin og hraðinn séu þekkt á einhverju augnabliki $t = t_0$, $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ og $\vec{v}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0) = \vec{v}_0$, þá gefur lausn upphafsgildisverkefnisins

$$m\vec{r}\,'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}\,'), \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \vec{r}\,'(t_0) = \vec{v}_0,$$

staðsetningu hlutarins sem fall af tíma.

Sýnidæmi 6.4.1 (*Þyngdarlögmál Newtons*). Við skulum nú huga að einu dæmi um kraftsvið eins og við vorum að fjalla um í textanum hér að framan. Þyngdarlögmál Newtons segir að tveir hlutir dragi hvor annan að sér með krafti, sem er í hlutfalli við margfeldi massa þeirra og í öfugu hlutfalli við fjarlægðina á milli þeirra í öðru veldi. Þegar þessu lögmáli er beitt til þess að reikna út hreyfingu himintungla, þá hugsa menn sér N massa $m_1, \dots, m_N$ sem hafa staðarvigrana $\vec{r}_j = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j})$. Annað lögmál Newtons og þyngdarlögmálið gefa okkur þá jöfnuhneppi með $3N$ óþekktum stærðum

$$m_j\vec{r}_j\,'' = G\sum_{j\neq k} m_k m_j \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^3}, \qquad j = 1, \dots, N, \tag{6.4.3}$$

þar sem G táknar *þyngdarstuðulinn*. Tilsvarandi upphafsgildisverkefni snýst nú um að leysa þessar jöfnur með því að gefa sér staðsetningu og hraða allra massanna á einhverju augnabliki.

Hneppið (6.4.3) hefur haft geysilega mikla þýðingu fyrir rannsóknir manna á afleiðujöfnum allt frá dögum Newtons. Ekki er hægt að leiða út lausnarformúlu fyrir lausnir þess. Til þess að finna jöfnur fyrir brautir reikistjarnanna, er til einföldunar gert ráð fyrir því að sólin sé föst í upphafspunkti hnitakerfisins og að þyngdarkrafturinn milli einstakra reikistjarna sé hverfandi miðað við þyngdarkraftinn milli sólarinnar og reikistjarnanna. Jöfnuhneppið (6.4.3) leysist þá upp í $N - 1$ óháð jöfnuhneppi þar sem hvert um sig er af gerðinni

$$m\vec{r}\,'' = -GMm\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{6.4.4}$$

Hér táknar M massa sólarinnar og m táknar massa reikistjörnunnar. Með þessum hætti tókst Newton að leiða lögmál Keplers um hreyfingu reikistjarnanna út frá þyngdarlögmálinu. □

6.5 Jaðargildisverkefni

Jaðargildisverkefni snúast um að leysa jöfnu

$$u^{(m)} = f(t, u, u', \dots, u^{(m-1)})$$

af stigi m á takmörkuðu bili $I = [a, b]$ með skilyrðum á

$$u(a),\ u'(a), \dots,\ u^{(m-1)}(a) \qquad \text{og} \qquad u(b),\ u(b), \dots,\ u^{(m-1)}(b).$$

Þessi skilyrði eru venjulega sett fram þannig að ákveðnar línulegar samantektir af þessum fallgildum eigi að taka fyrirfram gefin gildi. Fyrir annars stigs jöfnu geta *jaðarskilyrðin* til dæmis verið

$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0.$$

Lotubundin jaðarskilyrði eru af gerðinni

$$u(a) = u(b), \qquad u'(a) = u'(b).$$

Almenn línuleg jaðarskilyrði fyrir annars stigs jöfnu eru

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) + \beta_{11}u(b) + \beta_{12}u'(b) = c_1 \\ B_2 u &= \alpha_{21}u(a) + \alpha_{22}u'(a) + \beta_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = c_2, \end{aligned}$$

þar sem stuðlarnir α_{jk}, β_{jk}, c_j eru gefnir fyrir $j, k = 1, 2$. Almenn línuleg jaðarskilyrði fyrir m-ta stigs jöfnu eru af gerðinni

$$B_j u = \sum_{l=1}^{m} \big(\alpha_{jl}u^{(l-1)}(a) + \beta_{jl}u^{(l-1)}(b)\big) = c_j, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Við lítum á B_j sem línulega vörpun $C^{m-1}[a, b] \to \mathbb{C}$ og skilgreinum *jaðargildisvirkja* $B : C^{m-1}[a, b] \to \mathbb{C}^m$ með formúlunni $Bu = (B_1 u, \dots, B_m u)$. Almennt jaðargildisverkefni fyrir m-ta stigs línulega jöfnu er að leysa

$$\text{(6.5.1)} \qquad \begin{cases} a_m(t)u^{(m)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t), & t \in]a, b[\\ Bu = c, \qquad B_j u = \sum\limits_{l=1}^{m} \big(\alpha_{jl}u^{(l-1)}(a) + \beta_{jl}u^{(l-1)}(b)\big), \end{cases}$$

fyrir gefið fall $f \in C[a, b]$ og gefinn vigur $c \in \mathbb{C}^m$. Athugið að upphafsskilyrðin í (6.4.2) eru dæmi um almenn línuleg jaðarskilyrði, þar sem við setjum $\beta_{jl} = 0$ fyrir öll j og l, $\alpha_{jl} = 1$ ef $j = l$ og $\alpha_{jl} = 0$ ef $j \neq l$. Ef bilið I er ótakmarkað geta verið skilyrði á markgildin

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x), \qquad \lim_{x \to \pm\infty} u'(x), \qquad \dots$$

eftir því sem við á. Þessi skilyrði geta verið sams konar línulegar samantektir og við höfum verið að lýsa.

6.6 Tilvist og ótvíræðni lausna á afleiðujöfnum

Í þessari grein ætlum við að fjalla um tilvist á lausn á upphafsgildisverkefninu

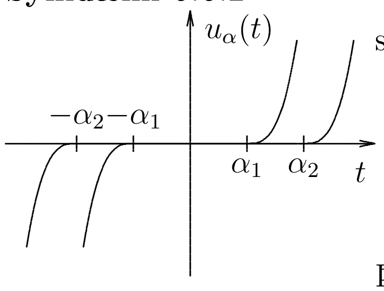
$$u' = f(t, u), \qquad u(a) = b, \tag{6.6.1}$$

þar sem fallið $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ er skilgreint á einhverju hlutmengi Ω í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, a er gefin rauntala, b er gefinn vigur og $(a, b) \in \Omega$. Tilfellið að f taki gildi í tvinntölurúminu $\mathbb{C}^m$ og að Ω sé hlutmengi í $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ fæst síðan með því að líta á $\mathbb{C}^m$ sem vigurrúmið $\mathbb{R}^{2m}$. Ef við ætlumst til þess að lausnin u hafi samfellda afleiðu, þá þurfum við auðvitað að gera ráð fyrir því að fallið f sé samfellt.

Setning 6.6.1 (*Peano*). *Gerum ráð fyrir að Ω sé grennd um punktinn $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ og að $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Þá er til opið bil I sem inniheldur punktinn a og fall $u : I \to \mathbb{R}^m$, þannig að $(t, u(t)) \in \Omega$, $u'(t) = f(t, u(t))$ fyrir öll $t \in I$ og $u(a) = b$.* □

Setning Peano er of erfið til þess að við getum átt við að sanna hana hér, en fróðlegt er að vita hvað hún segir. Við munum hins vegar sanna tvær tilvistarsetningar, sem kenndar eru við Picard. Í þeim gefum við okkur meiri forsendur um fallið f, en að það sé bara samfellt, og þær tryggja að lausnin verði ótvírætt ákvörðuð. Setning Peano segir okkur einungis að til sé lausn en hún segir ekkert um það hvort lausnin er ótvírætt ákvörðuð.

Sýnidæmi 6.6.2 Athugum upphafsgildisverkefnið $u' = 3u^{2/3}$, $u(0) = 0$. Fyrir sérhvert $\alpha > 0$ fáum við lausnina u_α, sem skilgreind er með



$$u_\alpha(t) = \begin{cases} (t+\alpha)^3, & t < -\alpha, \\ 0, & -\alpha \le t < \alpha, \\ (t-\alpha)^3, & \alpha \le t. \end{cases}$$

Þetta dæmi sýnir okkur að til þess að fá ótvírætt ákvarðaða lausn þurfum við að setja einhver strangari skilyrði á f en samfelldni. □

Skilgreining 6.6.3 (*Lipschitz–skilyrði*). Látum $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ vera fall, þar sem $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ og $A \subset \Omega$. Ef til er fasti C þannig að

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le C|x - y|, \qquad (t, x), (t, y) \in A, \tag{6.6.2}$$

þá segjum við að f uppfylli *Lipschitz–skilyrði* í menginu A. □

Sýnidæmi 6.6.4 (i) Ef jöfnuhneppið er línulegt, $f(t, x) = A(t)x + g(t)$, $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og $g \in C(I, \mathbb{C}^m)$, þá uppfyllir f Lipschitz–skilyrði í $J \times \mathbb{C}^m$ fyrir sérhvert lokað og takmarkað hlutbil $J \subset I$. Þetta sést á því að

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)(x - y)| \le \sum_{j,k=1}^{m} |a_{jk}(t)||x - y| \le C|x - y|,$$

þar sem $C = \sup \sum_{j,k=1}^{m} |a_{jk}(t)|$ og efra markið er tekið yfir öll $t \in J$.

(ii) Látum $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ og gerum ráð fyrir að Ω sé þannig að fyrir sérhvert par af punktum $(t,x), (t,y)$ í Ω liggi línustrikið milli þeirra í Ω. Línustrikið samanstendur af öllum punktum $(t, \tau x + (1-\tau)y)$, $\tau \in [0,1]$. Látum nú A vera lokað og takmarkað hlutmengi af Ω, sem hefur þann eiginleika að fyrir sérhvert par af punktum $(t,x), (t,y)$ í A liggur línustrikið á milli þeirra í A. Þá er

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(t, (1-\tau)y + \tau x)\, d\tau\right| \\ &= \left|\int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j} f(t, (1-\tau)y + \tau x)(x_j - y_j)\, d\tau\right| \\ &\leq \sup_{(\tau,\xi)\in A} \sum_{j=1}^{m} |\partial_{x_j} f(\tau, \xi)||x - y|, \end{aligned}$$

og þar með uppfyllir f Lipschitz–skilyrði í A.

(iii) Lítum nú á fallið $f(t,x) = x^2$, með $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Það uppfyllir

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |x+y||x-y|,$$

en þetta gefur okkur að f uppfylli ekki Lipschitz–skilyrði í Ω, því þátturinn $x+y$ er ekki takmarkaður. Ef við látum hins vegar $[\alpha, \beta]$ vera takmarkað bil og veljum $A = \mathbb{R} \times [\alpha, \beta]$, þá uppfyllir fallið f Lipschitz–skilyrði í A og við getum valið fastann C sem $C = 2(|\alpha| + |\beta|)$.

(iv) Fallið $f(t,x) = 3x^{2/3}$, í sýnidæmi 6.6.2, er samfellt, en uppfyllir ekki Lipschitz–skilyrði í neinni grennd um 0, því $|f(t,x) - f(t,0)| = x^{2/3} = x^{-1/3}|x - 0|$ og $x^{-1/3} \to \infty$ ef $x \to 0$. □

Nú kemur í ljós að Lipschitz–skilyrði tryggir að lausnin verður ótvírætt ákvörðuð:

Setning 6.6.5 (*Picard; víðfeðm útgáfa*). *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil, $a \in I$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ og gerum ráð fyrir að f uppfylli Lipschitz–skilyrði í $J \times \mathbb{R}^m$ fyrir sérhvert lokað og takmarkað hlutbil J í I. Þá er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = f(t,u), \qquad u(a) = b.$$

□

Þessi setning er önnur tveggja tilvistarsetninga sem við sönnum í næstu grein. Eins og fram hefur komið kallast hún venjulega *víðfeðm* útgáfa af tilvistarsetningu fyrir fyrsta stigs hneppi. Ástæðan fyrir nafngiftinni er, að við fáum lausn á bili sem inniheldur öll t–gildi þar sem hægri hlið jöfnunnar er skilgreind. Tökum nú fyrir tvær mikilvægustu afleiðingar setningarinnar. Í sýnidæmi 6.6.4 sáum við að forsendurnar í setningu 6.6.5 eru uppfylltar fyrir línuleg jöfnuhneppi með samfellda stuðla. Við lítum á vigurrúmið $\mathbb{C}^m$ yfir tvinntölurnar sem $2m$ víða rúmið $\mathbb{R}^{2m}$ yfir rauntölurnar og fáum:

Fylgisetning 6.6.6 *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil, $a \in I$, $b \in \mathbb{C}^m$, $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og $f \in C(I, \mathbb{C}^m)$. Þá er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^1(I, \mathbb{C}^m)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = A(t)u + f(t) \qquad u(a) = b. \tag{6.6.3}$$

Í grein 6.4 sáum við að það er jafngilt að leysa upphafsgildisverkefnið (6.4.2) fyrir línulega afleiðuvirkja af stigi m og að leysa hliðstætt upphafsgildisverkefni af gerðinni (6.6.3), þar sem fylkið A og vigurinn f eru gefin með (6.3.5). Við höfum því: □

Fylgisetning 6.6.7 *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil, $a \in I$, $b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{C}$, $a_0, \dots, a_m, g \in C(I)$ og $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Þá er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^m(I)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$\begin{gathered} a_m(t)u^{(m)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = g(t), \\ u(a) = b_0, u'(a) = b_1, \dots, u^{(m-1)}(a) = b_{m-1}. \end{gathered}$$

□

Nú setjum við fram aðra útgáfu sem venjulega kallast *staðbundin* útgáfa af tilvistarsetningu fyrir fyrsta stigs hneppi:

Setning 6.6.8 (*Picard; staðbundin útgáfa*). *Látum Ω vera opið hlutmengi í $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in \Omega$ og $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Gerum ráð fyrir að til sé grennd U um punktinn (a, b) innihaldin í Ω og að fallið f uppfylli Lipschitz–skilyrði í U. Þá er til opið bil I á $\mathbb{R}$ sem inniheldur a og ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = f(t, u), \qquad u(a) = b.$$

□

Ástæðan fyrir því að þessi setning kallast *staðbundin* útgáfa af tilvistarsetningunni fyrir fyrsta stigs afleiðujöfnuhneppi er sú, að hún segir okkur einungis að til sé bil I þar sem lausnin er til. Í sönnuninni, sem við tökum fyrir í næstu grein, kemur fram hvernig bilið I er háð U, Lipschitz–fasta fallsins f og upphafsgildinu b.

Sýnidæmi 6.6.9 Við skulum taka eitt dæmi til þess að sjá hvernig skilgreiningarsvæði lausnarinnar er háð upphafsgildinu b og líta á verkefnið $u' = u^2$, $u(a) = b$, þar sem b er jákvæð rauntala. Lausnin er fallið

$$u(t) = \frac{b}{1 - b(t - a)}, \qquad t \in I =]-\infty, a + 1/b[.$$

Maður skyldi ætla að óreyndu, að svona einföld jafna hefði lausn, sem skilgreind er á öllum rauntalnaásnum, en svo er greinilega ekki. Skilgreiningarsvæðið minnkar eftir því sem upphafsgildið stækkar. Athugið að engu að síður hefur verkefnið lausn í grennd um a fyrir sérhvert val á (a, b). Við sáum í sýnidæmi 6.6.4 (iii) uppfyllir skilyrðin í staðbundnu útgáfu Picard setningarinnar, en ekki þeirrar víðfeðmu. □

Aðferðin sem beitt er í sönnuninni á þessum setningum er kennd við franska stærðfræðinginn Émile Picard. Eins og áður hefur verið sagt framkvæmum við hana í smáatriðum í næstu grein. Auðvelt er að skilja meginhugmyndina í sönnuninni á víðfeðmu útgáfunni af Picard–setningunni og skulum við líta á hana núna.

Við athugum fyrst, að

$$u \in C^1(I, \mathbb{R}^m), \quad u' = f(t, u), \quad t \in I, \quad u(a) = b \tag{6.6.4}$$

er jafngilt því að

$$u \in C(I, \mathbb{R}^m), \quad u(t) = b + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I. \tag{6.6.5}$$

Okkur dugir því að sanna að til sé ótvírætt ákvarðað fall $u \in C(I, \mathbb{R}^m)$ sem uppfyllir heildisjöfnuna (6.6.5). Tilvistin er fengin með því að skilgreina runu $\{u_n\}$ af föllum í $C(I, \mathbb{R}^m)$ með formúlunni

$$u_0(t) = b, \qquad u_n(t) = b + \int_a^t f(\tau, u_{n-1}(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I, \tag{6.6.6}$$

og sýna síðan að þessi fallaruna sé samleitin að markfalli u. Ekki er nóg að sýna að runan $\{u_n(t)\}$ stefni á $u(t)$ í sérhverjum punkti heldur þurfum við að sanna að $\{u_n\}$ sé samleitin í *jöfnum mæli* á sérhverju lokuðu og takmörkuðu hlutbili J af I. Að því fengnu gefa niðurstöðurnar í grein 3.5 að markfallið u er í $C(I, \mathbb{R}^m)$. Lipschitz skilyrðið gefur að

$$|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| \leq C|u_n(t) - u(t)|, \qquad t \in J,$$

og þar með að runan $f(t, u_n(t))$ stefnir á markfallið $f(t, u(t))$ í jöfnum mæli á J. Þá megum við skipta á heildi og markgildi og við fáum það sem sanna á,

$$\begin{aligned} u(t) = \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = b + \lim_{n\to+\infty} \int_a^t f(\tau, u_{n-1}(\tau))\, d\tau = \\ = b + \int_a^t \lim_{n\to+\infty} f(\tau, u_{n-1}(\tau))\, d\tau = b + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau. \end{aligned}$$

Tökum nú tvö dæmi, sem sýna hvers er að vænta um samleitni rununnar $\{u_n\}$.

Sýnidæmi 6.6.10 Fyrsta stigs afleiðujafnan $u' - \alpha u = 0$ með upphafsskilyrðið $u(0) = b$, þar sem α og b eru einhverjar tvinntölur, hefur lausnina $u(t) = be^{\alpha t}$. Hér er $f(t, x) = \alpha x$ og runan $\{u_n\}$ er

$$\begin{gathered} u_0(t) = b, \\ u_1(t) = b + \int_0^t \alpha b\, d\tau = b(1 + \alpha t), \\ u_2(t) = b + \int_0^t \alpha b(1 + \alpha\tau)\, d\tau = b(1 + \alpha t + (\alpha t)^2/2), \\ u_3(t) = b + \int_0^t \alpha b(1 + \alpha\tau + (\alpha\tau)^2/2)\, d\tau = b(1 + \alpha t + (\alpha t)^2/2 + (\alpha t)^3/3!), \quad \dots, \\ u_n(t) = b + \int_0^t \alpha b\big(1 + \alpha\tau + \cdots + \frac{(\alpha\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\big)\, d\tau = b(1 + \alpha t + \cdots + (\alpha t)^n/n!). \end{gathered}$$

Við sjáum nú að $u_n(t)$ er n–ta stigs Taylor–margliða fallsins $u(t)$ í punktinum $a = 0$. $\square$

Sýnidæmi 6.6.11 Lítum nú á línulega jöfnuhneppið

$$u' = Au, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

en það hefur lausnina

$$u(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad f(t, u_{n-1}(t)) = Au_{n-1}(t) = \begin{bmatrix} -u_{2,n-1}(t) \\ u_{1,n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Með þessa formúlu að vopni er einfalt að ákvarða rununa u_n

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
u_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \\
u_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - t^2/2 \\ t \end{bmatrix}, \\
u_3(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 - \tau^2/2 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - t^2/2 \\ t - t^3/3! \end{bmatrix}, \\
u_4(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau + \tau^3/3! \\ 1 - \tau^2/2 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - t^2/2! + t^4/4! \\ t - t^3/3! \end{bmatrix}, \quad \dots, \\
u_{2k}(t) &= \begin{bmatrix} 1 - t^2/2! + \cdots + (-1)^k t^{2k}/(2k)! \\ t - t^3/3! + \cdots + (-1)^{k-1} t^{2k-1}/(2k-1)! \end{bmatrix} \\
u_{2k+1}(t) &= \begin{bmatrix} 1 - t^2/2! + \cdots + (-1)^k t^{2k}/(2k)! \\ t - t^3/3! + \cdots + (-1)^k t^{2k+1}/(2k+1)! \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nú birtast hér Taylor-margliður fallanna $\cos t$ og $\sin t$, svo við fáum

$$u_n(t) \to u(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

eins og við var að búast. □

6.7 Sannanir á Picard–setningunum

Í þessari grein sönnum við setningar 6.6.5 og 6.6.8. Ótvíræðnin er sönnuð á sama hátt í þeim báðum svo við byrjum á henni.

Ótvíræðni: Gerum ráð fyrir að upphafsgildisverkefnið (6.6.4) og þar með heildunarjafnan (6.6.5) hafi tvær lausnir $u(t)$ og $v(t)$ og hugsum okkur fyrst að $t \geq a$. Þá gefur Lipschitz skilyrðið

$$0 \leq |u(t) - v(t)| = |\int_a^t (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\, d\tau| \leq C \int_a^t |u(\tau) - v(\tau)|\, d\tau. \tag{6.7.1}$$

Við setjum nú $w(t) = \int_a^t |u(\tau) - v(\tau)|\,d\tau$ og sjáum að ójafnan (6.7.1) er jafngild

$$w'(t) - Cw(t) \leq 0.$$

Eftir margföldun með e^{-Ct} fæst $(e^{-Ct}w(t))' \leq 0$, ef $t \geq a$, og þar með er $e^{-Ct}w(t)$ minnkandi fall af t, ef $t \geq a$. Við höfum að $w(a) = 0$, svo af ójöfnunni

$$0 \leq e^{-Ct}w(t) \leq e^{-Ca}w(a) = 0, \qquad t \geq a,$$

leiðir að $u(t) = v(t)$ fyrir öll $t \geq a$. Hugsum okkur nú að $t \leq a$. Í stað ójöfnunnar (6.7.1) fáum við

$$0 \leq |u(t) - v(t)| \leq C \int_t^a |u(\tau) - v(\tau)|\,d\tau.$$

Nú setjum við $w(t) = \int_t^a |u(\tau) - v(\tau)|\,d\tau$ og fáum ójöfnuna $-w'(t) \leq Cw(t)$, sem gefur síðan að $e^{Ct}w(t)$ sé vaxandi fall. Þar með er

$$0 \leq e^{Ct}w(t) \leq e^{Ca}w(a) = 0, \qquad t \leq a,$$

og við höfum einnig sannað að $u(t) = v(t)$ fyrir $t \leq a$. ■

Sönnun á tilvist í setningu 6.6.5: Við skilgreinum rununa $\{u_n\}$ með formúlunni (6.6.5). Samkvæmt athugun okkar í grein 6.7, þá þurfum við einungis að sanna að runan $\{u_n\}$ sé samleitin í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu hlutbili J af I með $a \in J$. Við höfum

$$u_n(t) = u_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \big(u_{k+1}(t) - u_k(t)\big)$$

og því dugir að sanna röðin $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(u_{k+1} - u_k)$ sé samleitin í jöfnum mæli á bilinu J. Við setjum $M = \sup_{t\in J} |f(t,b)|$. Þá er

$$|u_1(t) - u_0(t)| = \Big|\int_a^t f(\tau,b)\,d\tau\Big| \leq M|t-a|. \tag{6.7.2}$$

Lipschitz–skilyrðið gefur

$$\begin{aligned}
|u_2(t) - u_1(t)| &= \Big|\int_a^t \big(f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_0(\tau))\big)\,d\tau\Big| \\
&\leq \Big|\int_a^t \big|f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_0(\tau))\big|\,d\tau\Big| \\
&\leq \Big|\int_a^t C\big|u_1(\tau) - u_0(\tau)\big|\,d\tau\Big| \\
&\leq \Big|\int_a^t CM|\tau - a|\,d\tau\Big| = CM\frac{|t-a|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Í síðasta skrefinu notuðum við ójöfnuna (6.7.2). Með þrepun fæst

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq MC^k\frac{|t-a|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Fyrst J er takmarkað bil, þá er til $T > 0$ þannig að $|t-a| \leq T$ fyrir öll $t \in J$, og því fáum við

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq MC^k \frac{T^{k+1}}{(k+1)!}.$$

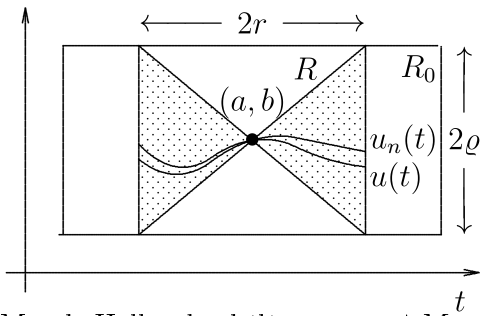
Röðin $\sum_{k=0}^{\infty} MC^k T^{k+1}/(k+1)!$ samleitin fyrir sérhvert $C > 0$ og $T > 0$ og þar með gefur samleitnipróf Weierstrass í grein 3.5 að röðin $\sum_{k=0}^{\infty}(u_{k+1} - u_k)$ er samleitin í jöfnum mæli á J. ■

Sönnun á tilvist í setningu 6.6.8: Í sönnuninni á setningu 6.6.5 var runan $u_n(t)$ vel skilgreind með formúlunni (6.6.6), því skilgreiningarsvæði fallsins f var $I \times \mathbb{R}^m$. Nú gerum við ráð fyrir að skilgreiningarsvæðið Ω geti verið minna mengi og við þurfum að sjá til þess að $(t, u_n(t))$ haldist innan Ω fyrir öll n og $t \in I$, ef I er valið nógu lítið. Út frá forsendum okkar fæst að til er mengi af gerðinni

$$R_0 = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |t-a| \leq r_0, |x-b| \leq \varrho\}$$

þar sem f uppfyllir Lipschitz–skilyrði. Við látum C tákna Lipschitz–fastann og setjum $M = \max_{(t,x)\in R_0} |f(t,x)|$. Síðan veljum við $r = \min\{r_0, \varrho/M\}$ og skilgreinum

$$R = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |t-a| \leq r, |x-b| \leq \varrho\}, \qquad \text{og} \qquad I = [a-r, a+r].$$



Mynd: Hallatala skálínanna er $\pm M$.

Nú er auðvelt að sanna með þrepun að $(t, u_n(t)) \in R$ fyrir öll $t \in I$. Ef $n = 0$ er þetta augljóst, því $u_0(t)$ er fastafallið b. Ef $(t, u_n(t)) \in R$ fyrir öll $t \in I$, þá er $u_{n+1}(t)$ vel skilgreint með formúlunni (6.6.6) og við höfum

$$|u_{n+1}(t) - b| \leq |\int_a^t f(\tau, u_n(\tau))\, d\tau| \leq M|t-a| \leq Mr \leq \varrho,$$

fyrir öll $t \in I$. Þar með er $(t, u_{n+1}(t)) \in R$ fyrir öll $t \in I$. Með nákvæmlega sömu rökum og í sönnuninni á setningu 6.6.5 fæst nú að runan $\{u_n\}$ er samleitin í jöfnum mæli á I og að markgildi hennar uppfyllir (6.6.4). ■

6.8 Æfingardæmi

1. Hefur jafnan $tu' = u$ með skilyrðinu $u(0) = 0$ ótvírætt ákvarðaða lausn á $\mathbb{R}$?

2. Sýnið að fyrir sérhvert $\alpha > 0$ sé fallið u_α sem skilgreint er með

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} t^3, & t < 0, \\ 0, & 0 \le t \le \alpha, \\ (t-\alpha)^3, & t > \alpha, \end{cases}$$

í $C^1(\mathbb{R})$ og jafnframt að það sé lausn á verkefninu $u' = 3u^{2/3}$, $u(-1) = -1$.
[Þetta er dæmi um upphafsgildisverkefni, sem hefur óendanlega margar lausnir.]

3. Finnið afleiðujöfnur sem föllin u uppfylla út frá eiginleikunum sem gefnir eru og leysið þær síðan:

a) Snertilínan við grafið af u í punktinum $(x, u(x))$ sker x-ásinn í $(x/2, 0)$.
b) Sérhver bein lína sem sker graf u undir réttu horni inniheldur punktinn $(0, 1)$.
c) Graf fallsins u er hornrétt á sérhvern feril af gerðinni $y = k + x^2$, $k \in \mathbb{R}$.
d) Snertilínan í punktinum $(x, u(x))$ inniheldur punktinn $(-u(x), x)$.

4. Finnið almennar lausnir á afleiðujöfnunum:
a) $xu' + u = 3xu$, b) $xu' - 3u = x^3$,
c) $(1 + x)u' + u = \cos x$, d) $u' = 2xu + 3x^2 \exp(x^2)$.

5. Finnið almenna lausn, hugsanlega sem fólgið fall, á afleiðujöfnunum.
a) $u' = \dfrac{(x-1)u^5}{x^2(2u^3 - u)}$, b) $u' = 1 + x + u + xu$,
c) $u' + 1 = 2u$.

6. Leysið jöfnuna $u' = t \tan u$ með upphafsskilyrðinu $u(0) = \pi/6$. Hvert er skilgreiningarmengi lausnarinnar?

7. a) Sýnið að jafna af gerðinni $u' = f(u/t)$ ummyndist yfir í jafngilda aðskiljanlega jöfnu fyrir v, ef v er skilgreint með $v(t) = u(t)/t$.

b) Látum L veru línu gegnum $(0, 0)$. Sýnið að L skeri alla lausnarferla afleiðujöfnu af gerðinni $u' = f(u/t)$ undir sama horni.

8. Notið aðferðina í dæmi 7 til þess að leysa:
a) $2tuu' - u^2 = t^2$, $t > 0$. b) $tu' = t + u$,
c) $2t^2u' = u^2 + t^2$, d) $t^2u' = u^2 + tu$.

9. Afleiðujafnan $u' + P(t)u = Q(t)u^n$ kallast Bernoulli-jafna. Ef $n = 0$ eða $n = 1$, þá er hún línuleg. Sýnið að innsetningin $v(t) = u(t)^{1-n}$ ummyndi hana yfir í línulega jöfnu $v' + (1 - n)P(t)v = (1 - n)Q(t)$, $n \neq 1$.

10. Finnið almenna lausn á jöfnunum
a) $2tu' + u^3e^{-2t} = 2tu$, b) $3u^2u' + u^3 = e^{-t}$,
c) $3u' + u = (1 - 2x)u^4$, d) $u' + xu = xu^{-1}$.

11. Sýnið að innsetningin $v = \ln u$ ummyndi afleiðujöfnuna $u' + P(t)u = Q(t)u \ln u$ í jöfnuna $v' + P(t) = Q(t)v$. Notið þessa aðferð til þess að finna lausn á jöfnunni $tu' - 4t^2u + 2u \ln u = 0$.

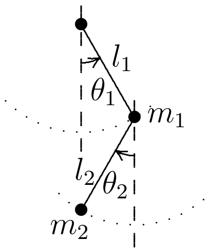
12. Jafna af gerðinni $u' = A(x)u^2 + B(x)u + C(x)$ nefnist *Riccati-jafna*. Gerum ráð fyrir að u_1 sé þekkt lausn á þessari jöfnu. Sýnið að fallið $u = u_1 + 1/v$ sé lausn á Riccati-jöfnunni þá og því aðeins að v uppfylli línulegu fyrsta stigs jöfnuna

$$v' + \big(B(x) + 2A(x)u_1(x)\big)v = -A(x).$$

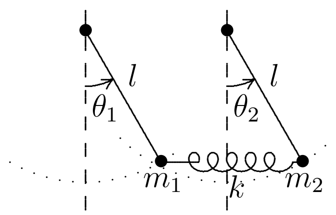
13. Notið niðurstöðuna úr síðasta dæmi til þess að leysa:
a) $u' + u^2 = 1 + x^2$,
b) $u' + 2xu = 1 + x^2 + u^2$,
c) $u' = x^3 + 2u/x - u^2/x$, $(u_1 = -x^2)$,
d) $u' = x^3(u - x)^2 + u/x$, $(u_1(x) = x,\ x > 0)$.

14. Afleiðujafna af gerðinni $u = xu' + f(u')$ nefnist *Clairaut-jafna*. Sýnið að sérhvert fall af gerðinni $u(x) = Cx + f(C)$, þar sem C er fasti, er lausn.

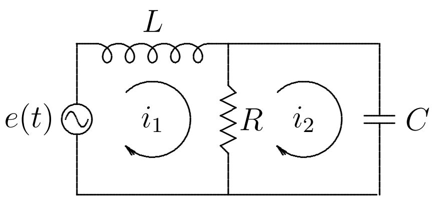
15. Lítum á Clairaut-jöfnuna $u = xu' - \frac{1}{4}\big(u'\big)^2$. Sýnið að lausnarferlarnir í (x, y)-séu allir snertilínur við fleygbogann $y = x^2$ og að $u(x) = x^2$ sé einnig lausn.



16. Leiðið út jöfnuhneppi fyrir hreyfingu pendúla af massa m_1 og m_2 og lengd l_1 og l_2, sem tengdir eru saman eins og myndin sýnir. Finnið línulegt jöfnuhneppi sem nálgar hreyfijöfnurnar, þegar útslagið er lítið.

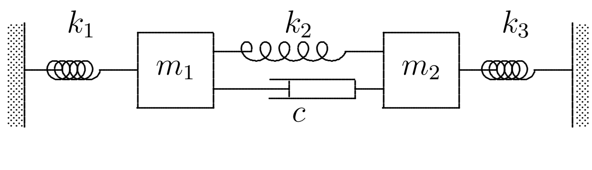


17. Leiðið út jöfnuhneppi fyrir hreyfingu pendúla af massa m_1 og m_2 og lengd l_1 og l_2, sem tengdir eru saman með gormi eins og myndin sýnir. Við gerum ráð fyrir því að gormurinn sé slakur þegar pendúlarnir hanga lóðréttir. Finnið línulegt jöfnuhneppi sem nálgar hreyfijöfnurnar, þegar útslagið er lítið.



18. Leiðið út jöfnuhneppi fyrir rafstraumana i_1 og i_2 í rafrásinni sem sýnd er á myndinni. Veljið straumstefnurnar eins og myndin sýnir.

19. Leiðið út hreyfijöfnur fyrir hreyfingu massanna tveggja sem sýndir eru á myndinni. Massarnir m_1 og m_2 hreyfast núningslaust eftir sléttum fleti. Þeir eru tengdir saman með gormi með fjaðurstuðul k_2 og höggdeyfi með deyfingarstuðul c. Þeir eru einnig tengdir við veggi með gormum með fjaðurstuðlana k_1 og k_3.



20. a) Sýnið að almenn lausn jöfnunnar

$$-\kappa u'' = f(x), \qquad x \in I,$$

sé af gerðinni

$$u(x) = A + Bx - \frac{1}{\kappa}\int_a^x (x-\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

þar sem A og B eru fastar og $a \in I$.

b) Sýnið að upphafsgildisverkefnið $-\kappa u'' = f(x)$, $x > 0$, $u(0) = b_0$, $u'(0) = b_1$, hafi lausnina

$$u(x) = b_0 + b_1 x - \frac{1}{\kappa}\int_0^x (x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

c) Sýnið að jaðargildisverkefnið $-\kappa u'' = f(x)$, $x \in]0, L[$, $u(0) = T_0$, $u(L) = T_1$, hafi lausnina

$$u(x) = (1 - x/L)T_0 + (x/L)T_1 + \frac{L-x}{\kappa L}\int_0^x \xi f(\xi)\,d\xi + \frac{x}{\kappa L}\int_x^L (L-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

21. Leysið jaðargildisverkefnin

a) $-\kappa u'' = x$, $u(0) = T_0$, $-\lambda u'(L) = ku(L)$.

b) $-\kappa u'' = x^2$, $u(0) = T_0$, $-\lambda u'(L) = v_0$.

c) $-\kappa u'' = x^3$, $u(0) = T_0$, $-\lambda u'(L) = ku(L)$.

22. Leysið eigingildisverkefnin

a) $-u'' = \lambda u$, $u'(0) = u'(L) = 0$.

b) $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u'(L) = 0$.

23. Notið niðurstöðuna úr dæmi 22 til þess að finna allar lausnir af gerðinni $u(x,t) = T(t)X(x)$ á verkefnunum

a) (*Bylgjujafna*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

b) (*Varmaleiðnijafna*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

24. Reiknið út föllin $u_0, \dots, u_3$ í Picard-aðferðinni fyrir upphafsgildisverkefnið $u' = 1+u^2$, $u(0) = 0$ og berið saman við réttu lausnina.

25. Sýnið að upphafsgildisverkefnið $tu' = 2u$, $u(0) = 1$ hefur enga lausn.

26. Sýnið að fallið $f(x,y) = |\sin y| + x$ fullnægi Lipschitz-skilyrði, en að $\partial f/\partial y$ sé ekki til í $y = 0$.

27. a) Uppfylla föllin $f(x,y) = |x| + |y|$ og $g(x,y) = x|y|$ Lipschitz-skilyrði? Eru hlutafleiðurnar $\partial f/\partial y$ og $\partial g/\partial y$ til?

b) Finnið allar lausnir jöfnunnar $u' = t|u|$.

Kafli 7

LÍNULEGAR AFLEIÐUJÖFNUR

Samantekt. Í þessum kafla ætlum við að fjalla um línulegar afleiðujöfnur með samfellda stuðla. Við byrjum á því að kynna okkur reikning með afleiðuvirkja. Síðan skilgreinum við núllrúm línulegs afleiðuvirkja og gefum fullkomna lýsingu á því fyrir virkja með fastastuðla. Það sem eftir er kaflans fjöllum við um aðferðir til að ákvarða sérlausnir á línulegum jöfnum. Við tökum nokkur dæmi um sérlausnir þar sem hægri hlið jöfnunnar er veldisvísisfall eða fall því skylt. Við fjöllum um Green-föll, en með þeim er hægt að reikna út sérlausnir fyrir hvaða samfellda hægri hlið í jöfnu sem er.

7.1 Línulegir afleiðuvirkjar

Kennimargliðan

Afleiðujafna af gerðinni

$$a_m(t)u^{(m)} + a_{m-1}(t)u^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t),$$

þar sem föllin $a_0, \dots, a_m, f$ eru skilgreind á bili $I \subset \mathbb{R}$, er sögð vera *línuleg*, því vinstri hliðin skilgreinir línulega vörpun

$$L : C^m(I) \to C(I),$$
$$Lu(t) = a_m(t)u^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t),$$

ef $a_0, \dots, a_m \in C(I)$. Línuleg vörpun af þessari gerð kallast *afleiðuvirki*. Við segjum að jafnan sé *óhliðruð* ef f er núllfallið. Annars segjum við að hún sé *hliðruð*. Fyrir sérhvern punkt $t \in I$ fáum við margliðu af einni breytistærð λ,

$$P(t, \lambda) = a_m(t)\lambda^m + a_{m-1}(t)\lambda^{m-1} + \cdots + a_1(t)\lambda + a_0(t). \tag{7.1.1}$$

Þessa margliðu köllum við *kennimargliðu* afleiðuvirkjans L.

Afleiðuvirkinn D

Til þess að geta reiknað á auðveldan hátt með afleiðuvirkjum er venja að skilgreina virkjann D sem $Du = u'$ og síðan veldi D^k af D með

$$D^0u = u, \quad D^1u = u', \quad D^2u = DDu = u'', \quad \dots \quad D^ku = DD^{k-1}u = u^{(k)}.$$

Afleiðuvirkinn L er síðan skrifaður með formúlunni

$$P(t,D) = a_m(t)D^m + \cdots + a_1(t)D + a_0(t). \tag{7.1.2}$$

Athugið að í síðasta liðnum höfum við sleppt því að skrifa D^0, en þetta á að lesa þannig að þegar virkinn L er látinn verka á fallið u, er margfaldað með $a_0(t)$ í síðasta liðnum. Við munum framvegis nota ritháttinn (7.1.2) til að tákna afleiðuvirkjann, sem hefur kennimargliðuna (7.1.1). Ef allir stuðlarnir a_j eru fastaföll, þá segjum við að virkinn hafi *fastastuðla* og við skrifum þá einungis $P(D)$ í stað $P(t,D)$. Þegar ekki er ljóst í formúlum með tilliti til hvaða breytistærðar er verið að deilda, þá tilgreinum við það með D_t, D_x, D_s, …, í stað D í tákninu fyrir virkjann, þar sem lágvísirinn er táknið fyrir breytistærðina. Línulega samantekt tveggja afleiðuvirkja $P(t,D)$ og $Q(t,D)$ með tvinntölunum α og β táknum við með $\alpha P(t,D) + \beta Q(t,D)$. Þetta er virkinn sem skilgreindur er með formúlunni

$$\big(\alpha P(t,D) + \beta Q(t,D)\big)u = \alpha P(t,D)u + \beta Q(t,D)u.$$

Samsetningu virkjanna $P(t,D)$ og $Q(t,D)$ táknum við með $P(t,D)Q(t,D)$ og er hún skilgreind með

$$\big(P(t,D)Q(t,D)\big)u = P(t,D)\big(Q(t,D)u\big).$$

Sýnidæmi 7.1.1 Ef $P(t,D) = D + t$ og $Q(D) = D$, þá er

$$\begin{aligned} P(t,D)Q(D)u &= (D+t)u' = u'' + tu' = (D^2 + tD)u,\\ Q(D)P(t,D)u &= D(u' + tu) = u'' + tu' + u = (D^2 + tD + 1)u, \end{aligned}$$

□

Þetta dæmi sýnir okkur að almennt er $P(t,D)Q(t,D) \neq Q(t,D)P(t,D)$, með öðrum orðum, víxlreglan gildir ekki við samsetningu afleiðuvirkja. Hins vegar gildir hún ef virkjarnir hafa fastastuðla:

Setning 7.1.2 *Ef $P(D)$ og $Q(D)$ eru línulegir afleiðuvirkjar með fastastuðla, þá er*

$$P(D)Q(D) = Q(D)P(D).$$

□

Sönnun: Ef $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j D^j$ og við hugsum okkur fyrst að $Q(D) = D^k$, þá er

$$\begin{aligned} P(D)D^k u &= a_m D^m D^k u + \cdots + a_1 D D^k u + a_0 D^k u =\\ &= a_m D^{m+k} u + \cdots + a_1 D^{1+k} u + a_0 D^k u =\\ &= D^k(a_m D^m u + \cdots + a_1 D u + a_0 u) = D^k P(D)u \end{aligned}$$

Ef $Q(D) = \sum_{k=0}^{n} b_k D^k$, þá gefur þessi formúla

$$\begin{aligned} P(D)Q(D)u &= P(D)(b_n D^n u + \cdots + b_1 D u + b_0 u) =\\ &= b_n P(D) D^n u + \cdots + b_1 P(D) D u + b_0 P(D) u =\\ &= b_n D^n P(D) u + \cdots + b_1 D P(D) u + b_0 P(D) u = Q(D)P(D)u. \end{aligned}$$

■

Núllrúm afleiðuvirkja

Kjarni eða *núllrúm* virkjans $P(t, D)$ samanstendur af öllum lausnum u á óhliðruðu jöfnunni $P(t, D)u = 0$. Fyrst $P(t, D)$ er línulegur virki, þá vitum við að núllrúmið er línulegt rúm yfir tvinntölurnar. Við táknum það með $\mathcal{N}(P(t, D))$.

Setning 7.1.3 *Ef I er bil á $\mathbb{R}$, $a \in I$ og $P(t, D)$ er línulegur afleiðuvirki á I með samfellda stuðla, sem gefinn er með (7.1.2) og $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$, þá hefur núllrúm hans $\mathcal{N}(P(t, D))$ víddina m.* □

Sönnun: Úr línulegri algebru vitum við að tvö línuleg rúm V og W yfir tvinntölurnar hafa sömu vídd, ef til er gagntæk línuleg vörpun $T : V \to W$. Vörpunin

$$T : \mathcal{N}(P(t, D)) \to \mathbb{C}^m, \qquad T(u) = (u(a), u'(a), \dots, u^{(m-1)}(a)),$$

er greinilega línuleg. Fylgisetning 6.7.7 segir að fyrir sérhvert $b = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})$ í $\mathbb{C}^m$ sé til $u \in \mathcal{N}(P(t, D))$ þannig að $T(u) = b$, og þar með er vörpunin T átæk. Hún er einnig eintæk, því sama setning segir að lausnin u sé ótvírætt ákvörðuð. Þar með hafa rúmin $\mathcal{N}(P(t, D))$ og $\mathbb{C}^m$ sömu víddina, en hún er m.

■

Hér er mjög mikilvægt að taka eftir því að stuðullinn við D^m í skilgreiningunni á virkjanum er núllstöðvalaust fall. Setningin gildir almennt *ekki* ef þar stæði stuðull sem hefur núllstöðvar á bilinu I.

Ef föllin $u_1, \dots, u_m$ mynda grunn fyrir $\mathcal{N}(P(t, D))$, þá má rita sérhvert fall u í núllrúminu sem línulega samantekt af þeim,

$$u(t) = c_1u_1(t) + \cdots + c_mu_m(t), \qquad t \in I,$$

með stuðlum $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$. Ef v og w eru tvær lausnir á hliðruðu jöfnunni $P(t, D)u = f$, þá fæst

$$P(t, D)(v - w) = P(t, D)v - P(t, D)w = f - f = 0,$$

því afleiðuvirkinn $P(t, D)$ er línulegur. Þar með er $v - w \in \mathcal{N}(P(t, D))$. Við höfum því:

Setning 7.1.4 *Ef I er bil á $\mathbb{R}$ og $P(t, D)$ er línulegur afleiðuvirki á I með samfellda stuðla, sem gefinn er með (7.1.2) og $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$, þá er sérhver lausn jöfnunnar $P(t, D)u = f$, $f \in C(I)$ af gerðinni*

$$u(t) = c_1u_1(t) + \cdots + c_mu_m(t) + v(t), \tag{7.1.3}$$

þar sem $u_1, \dots, u_m$ er einhver grunnur í $\mathcal{N}(P(t, D))$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ og v er einhver sérlausn, sem uppfyllir $P(t, D)v = f$. □

Þessi setning segir okkur, að ef við viljum finna almenna lausn á jöfnunni $P(t, D)u = f$, þá getum við skipt því verkefni í tvo hluta:

(i) að finna grunn $u_1, \dots, u_m$ fyrir núllrúm virkjans $P(t, D)$ og

(ii) að ákvarða eina *sérlausn* v á $P(t, D)v = f$.

Það er ekki til nein almenn lausnaraðferð á verkefni (i), nema í því tilfelli að stuðlarnir í $P(t,D)$ séu af sérstakri gerð. Það á til dæmis við ef þeir eru fastar eða ef hægt er að setja þá fram með veldaröðum. Í greinum 7.5 og 7.6 munum við sjá hvernig hægt er að leysa (ii) ef lausn á (i) er þekkt.

Samkvæmt fylgisetningu 6.7.7, hefur upphafsgildisverkefnið

$$P(t,D)u = f(t), \qquad u(a) = b_0,\ u'(a) = b_1, \dots, u^{(m-1)}(a) = b_{m-1} \tag{7.1.4}$$

ótvírætt ákvarðaða lausn. Ef við þekkjum grunn $u_1, \dots, u_m$ fyrir núllrúmið og eina sérlausn v, þá vitum við að u er af gerðinni (7.1.3). Stuðlarnir $c_1, \dots, c_m$ eru því lausnin á jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned}
c_1u_1(a) + \cdots + c_mu_m(a) &= b_0 - v(a),\\
c_1{u_1}'(a) + \cdots + c_m{u_m}'(a) &= b_1 - v'(a),\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots\\
c_1u_1^{(m-1)}(a) + \cdots + c_mu_m^{(m-1)}(a) &= b_{m-1} - v^{(m-1)}(a).
\end{aligned}$$

Á fylkjaformi verður þetta hneppi

$$\begin{bmatrix} u_1(a) & u_2(a) & \cdots & u_m(a)\\ {u_1}'(a) & {u_2}'(a) & \cdots & {u_m}'(a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_1^{(m-1)}(a) & u_2^{(m-1)}(a) & \cdots & u_m^{(m-1)}(a)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 - v(a)\\ b_1 - v'(a)\\ \vdots\\ b_{m-1} - v^{(m-1)}(a)\end{bmatrix} \tag{7.1.5}$$

Lækkun á stigi – úrlausn á annars stigs jöfnu

Sýnidæmi 7.1.5 (*Lækkun á stigi*). Hugsum okkur að u_1 sé þekkt lausn á línulegu annars stigs jöfnunni

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0, \tag{7.1.6}$$

á bilinu I og að við viljum finna aðra línulega óháða lausn u_2. Til er sígild aðferð til þess að finna u_2 og nefnist hún *lækkun á stigi*. Í henni er gengið út frá því að $u_1(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$ og fallið v er skilgreint með $v(t) = u_2(t)/u_1(t)$. Ef við stingum u_2 inn í jöfnuna, þá fæst

$$\begin{aligned}
{u_2}'' + p(t){u_2}' + q(t)u_2 &= (v''u_1 + 2v'{u_1}' + v{u_1}'') + p(t)(v'u_1 + v{u_1}') + q(t)vu_1\\
&= v\big({u_1}'' + p(t){u_1}' + q(t)u_1\big) + u_1v'' + \big(2{u_1}' + p(t)u_1\big)v' = 0
\end{aligned}$$

Nú notfærum við okkur að u_1 er lausn á (7.1.6) og fáum að v verður að uppfylla

$$v'' + \left(2\frac{{u_1}'(t)}{u_1(t)} + p(t)\right)v' = 0 \tag{7.1.7}$$

til þess að u_2 sé lausn á (7.1.6). Þetta er fyrsta stigs línuleg jafna í $w = v'$, $w' + a_0(t)w = 0$, þar sem stuðullinn a_0 er gefinn með

$$a_0(t) = 2\frac{u_1{}'(t)}{u_1(t)} + p(t).$$

Hér er skýringin á nafngiftinni á aðferðinni komin. Við erum búin að umskrifa það verkefni að leysa annars stigs jöfnu yfir í það að leysa fyrsta stigs jöfnu. Tökum nú $a \in I$ og látum A vera stofnfall a_0,

$$A(t) = \ln\big(u_1(t)^2\big) + \int_a^t p(\tau)\,d\tau + c.$$

Lausnin w er þá gefin með formúlunni

$$w(t) = C_1 e^{-A(t)} = C_1 \frac{\exp\big(-\int_a^t p(\tau)\,d\tau\big)}{u_1(t)^2},$$

þar sem C_1 er fasti. Að lokum fæst

$$v(t) = C_1 \int_a^t \frac{\exp\big(-\int_a^\tau p(\sigma)\,d\sigma\big)}{u_1(\tau)^2}\,d\tau + C_2.$$

Heildisstofninn í þessu heildi er jákvæður og þar með er v ekki fastafall. Það segir okkur að u_1 og u_2 séu línulega óháð föll, ef $C_1 \neq 0$. Við getum valið fastana C_1 og C_2 frjálst, til dæmis $C_1 = 1$ og $C_2 = 0$ og í því tilfelli verður svarið

$$u_2(t) = u_1(t) \int_a^t \frac{\exp\big(-\int_a^\tau p(\sigma)\,d\sigma\big)}{u_1(\tau)^2}\,d\tau \tag{7.1.8}$$

□

Nú skulum við líta á tilvist á lausnum á jaðargildisverkefnum. Í grein 6.5 skilgreindum við almennan jaðargildisvirkja með formúlunni

$$\begin{cases} B : C^{m-1}[a,b] \to \mathbb{C}^m, & Bu = (B_1u, \dots, B_mu), \\ B_ju = \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_{jl}u^{(l-1)}(a) + \beta_{jl}u^{(l-1)}(b) = c_j, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \tag{7.1.9}$$

Við höfum fullkomna lýsingu á því hvenær lausn fæst:

Setning 7.1.6 *Látum I vera opið bil sem inniheldur $[a,b]$, $P(t,D)$ vera línulegan afleiðuvirkja af gerðinni (7.1.2), $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$ og B vera almennan jaðargildisvirkja af gerðinni (7.1.9). Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild*

(i) Jaðargildisverkefnið $P(t,D)u = f(t)$, $Bu = c$, hefur ótvírætt ákvarðaða lausn $u \in C^m(I)$ fyrir sérhvert $f \in C(I)$ og sérhvert $c \in \mathbb{C}^m$.

(ii) Jaðargildisverkefnið $P(t,D)u = 0$, $Bu = 0$, hefur einungis núllfallið sem lausn.

(iii) Ef $u_1, \dots, u_m$ er grunnur í $\mathcal{N}(P(t,D))$, þá er

$$\begin{vmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 & \cdots & B_1u_m \\ B_2u_1 & B_2u_2 & \cdots & B_2u_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_mu_1 & B_mu_2 & \cdots & B_mu_m \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

Sönnun: Byrjum á því að athuga að (i) er jafngilt:

(i)′ Jaðargildisverkefnið $P(t,D)u = 0$, $Bu = c$, hefur ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir sérhvert $c \in \mathbb{C}^m$.

Við sjáum að (i)′ er sértilfelli af (i). Til þess að sjá að (i)′ hafi (i) í för með sér, þá notfærum við okkur að fylgisetning 6.7.7 gefur okkur fall v sem uppfyllir $P(t,D)v = f(t)$ án nokkurra hliðarskilyrða. Samkvæmt (i)′ er til fall w sem uppfyllir $P(t,D)w = 0$ og $Bw = c - Bv$. Nú er ljóst að $u = v + w$ uppfyllir (i), því

$$P(t,D)u = P(t,D)v + P(t,D)w = f(t), \qquad Bu = Bv + Bw = c.$$

Lausnin er ótvírætt ákvörðuð, því mismunur tveggja lausna er núllfallið samkvæmt (i)′. Nú snúum við okkur að því að sanna að (i)′, (ii) og (iii) séu jafngild. Til þess látum við $u_1, \dots, u_m$ vera grunn í núllrúminu og skrifum lausn u á $P(t,D)u = 0$ sem $u = d_1u_1 + \cdots + d_mu_m$, þar sem $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{C}$. Skilyrðið $Bu = c$ er þá jafngilt jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} \big(B_1u_1\big)d_1 + \cdots + \big(B_1u_m\big)d_m &= c_1, \\ \big(B_2u_1\big)d_1 + \cdots + \big(B_2u_m\big)d_m &= c_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ \big(B_mu_1\big)d_1 + \cdots + \big(B_mu_m\big)d_m &= c_m. \end{aligned}$$

Við vitum úr línulegri algebru að það er jafngilt að hliðraða jafnan hafi lausn fyrir sérhverja hægri hlið, að óhliðraða jafnan hafi aðeins núlllausnina og að ákveða stuðlafylkisins sé frábrugðin núlli. Þetta er nákvæmlega það sem skilyrðin (i)′, (ii) og (iii) segja. ■

Sýnidæmi 7.1.7 Athugum nú hvaða skilyrði ω þarf að uppfylla til þess að jaðargildisverkefnið

$$u'' + \omega^2 u = f(t), \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

hafi lausn fyrir öll $f \in C[0,1]$ og öll $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Við höfum hér $B_1u = u(0)$, $B_2u = u(1)$ og grunninn $u_1(t) = \cos\omega t$ og $u_2(t) = \sin\omega t$ í núllrúminu. Ákveða stuðlafylkisins í setningu 7.1.6 (iii) er

$$\begin{vmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 \\ B_2u_1 & B_2u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\omega & \sin\omega \end{vmatrix} = \sin\omega.$$

Svarið er því $\omega \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. □

Hugsum okkur nú að við þekkjum grunn $u_1, \dots, u_m$ fyrir núllrúm virkjans $P(t, D)$ og eina sérlausn u_p á $P(t, D)u = f$. Þá er lausnin u á (i) af gerðinni $u = d_1u_1 + \cdots + d_mu_m + u_p$ þar sem stuðlarnir $d_1, \dots, d_m$ eru lausnir jöfnuhneppisins

$$\begin{bmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 & \cdots & B_1u_m \\ B_2u_1 & B_2u_2 & \cdots & B_2u_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_mu_1 & B_mu_2 & \cdots & B_mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - B_1u_p \\ c_2 - B_2u_p \\ \vdots \\ c_m - B_mu_p \end{bmatrix}. \tag{7.1.10}$$

7.2 Línulegar jöfnur með fastastuðla

Við skulum nú líta á línulega afleiðujöfnu

$$P(D)u = (a_mD^m + \cdots + a_1D + a_0)u = f(t), \qquad t \in I, \tag{7.2.1}$$

þar sem við gerum ráð fyrir því að stuðlarnir a_j í virkjanum séu fastaföll, $a_j \in \mathbb{C}$, og $a_m \neq 0$. Kennimargliðan er þá

$$P(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0. \tag{7.2.2}$$

Fyrsta viðfangsefni okkar er að finna grunn fyrir núllrúmið $\mathcal{N}(P(D))$ og fá þannig framsetningu á almennri lausn óhliðruðu jöfnunnar $P(D)u = 0$. Við byrjum á því að láta afleiðuvirkjana D^k verka á veldisvísisfallið $e^{\alpha t}$, þar sem α er einhver tvinntala. Þá fæst

$$De^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}, \quad D^2e^{\alpha t} = \alpha^2 e^{\alpha t}, \quad \dots, \quad D^me^{\alpha t} = \alpha^m e^{\alpha t}.$$

Þetta gefur okkur síðan

$$\begin{aligned} P(D)e^{\alpha t} &= (a_mD^m + \cdots + a_1D + a_0)e^{\alpha t} \\ &= (a_m\alpha^m + \cdots + a_1\alpha + a_0)e^{\alpha t} = P(\alpha)e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Ef við veljum α sem eina af núllstöðvum kennimargliðunnar P, þá sjáum við að $e^{\alpha t}$ er lausn á óhliðruðu jöfnunni. Undirstöðusetning algebrunnar gefur okkur, að við getum þáttað margliðuna P fullkomlega yfir tvinntölurnar og skrifað hana sem

$$P(\lambda) = a_m(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell}, \tag{7.2.4}$$

þar sem $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ eru *núllstöðvarnar* og $m_1, \dots, m_\ell$ er *margfeldni* þeirra, $m_1 + \cdots + m_\ell = m$. Með því að nota þessa framsetningu á kennimargliðunni getum við skrifað afleiðuvirkjann sem

$$P(D) = a_m(D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_\ell)^{m_\ell}. \tag{7.2.5}$$

Við fáum nú fullkomna lýsingu á núllrúmi afleiðuvirkja með fastastuðla:

Setning 7.2.1 *Gerum ráð fyrir að $P(D)$ sé línulegur afleiðuvirki af stigi m með fastastuðla og að kennimargliðan $P(\lambda)$ hafi ℓ ólíkar núllstöðvar $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ með margfeldnina $m_1, \dots, m_\ell$. Þá mynda föllin*

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t},\\
&e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t},\\
&\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&e^{\lambda_\ell t}, te^{\lambda_\ell t}, \dots, t^{m_\ell-1}e^{\lambda_\ell t},
\end{aligned}$$

grunn í núllrúmi virkjans $P(D)$ og þar með má skrifa sérhvert stak í núllrúminu sem

$$q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_\ell(t)e^{\lambda_\ell t},$$

þar sem q_j eru margliður af stigi $< m_j$, $1 \leq j \leq \ell$. □

Sönnunina tökum við fyrir í grein 2.9.

Sýnidæmi 7.2.2 Fyrsta stigs virkinn $P(D) = D + a_0$ hefur kennimargliðuna $P(\lambda) = \lambda + a_0$. Núllstöð hennar er $\lambda_1 = -a_0$, svo núllrúmið samanstendur af öllum föllum af gerðinni $u(t) = ce^{-a_0 t}$, $c \in \mathbb{C}$. Þetta er sértilfelli af (6.2.2). □

Sýnidæmi 7.2.3 Látum $P(D) = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$ vera annars stigs afleiðuvirkja með rauntölustuðla og látum λ_1 og λ_2 vera núllstöðvar kennimargliðunnar. Lítum á þrjú mismunandi tilfelli:

(i) Ef $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$, þá er $\lambda_1 = \alpha + \beta$ og $\lambda_2 = \alpha - \beta$, með $\alpha = -a_1/2a_2$ og $\beta = \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}/2a_2$. Grunnur fyrir núllrúmið $\mathcal{N}(P(D))$ er $\{e\lambda_1 t, e^{\lambda_2 t}\}$ en við getum einnig tekið $\{e^{\alpha t}\cosh\beta t, e^{\alpha t}\sinh\beta t\}$ fyrir grunn, því sambandið milli þessara tveggja grunna er

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t}\cosh\beta t &= \frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-\beta)t},\\
e^{\alpha t}\sinh\beta t &= \frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta)t} - \frac{1}{2}e^{(\alpha-\beta)t}.
\end{aligned}$$

(ii) Ef $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$, þá hefur kennimargliðan einungis eina núllstöð $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha = -a_1/2a_2$ og við fáum grunninn $\{e^{\alpha t}, te^{\alpha t}\}$ fyrir núllrúmið.

(iii) Ef $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, þá er $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ og $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, með $\alpha = -a_1/2a_2$ og $\beta = \sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}/2a_2$. Grunnur fyrir núllrúmið er þá $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$. Í mörgum tilfellum er betra að reikna út lausnir ef gengið er út frá grunninum $\{e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t\}$,

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t}\cos\beta t &= \frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)t},\\
e^{\alpha t}\sin\beta t &= \frac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)t} - \frac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)t}.
\end{aligned}$$

Þessi grunnur hefur þann kost að föllin í honum eru raungild. □

Sýnidæmi 7.2.4 (*Deyfð sveifla; framhald*). Í sýnidæmi 6.1.1 fjölluðum við um deyfðar sveiflur og leiddum þá út hreyfijöfnuna

$$mx'' + cx' + kx = f(t).$$

Nú skulum við líta á það tilfelli að ytri kraftarnir séu núll. Eins og í sýnidæmi 7.2.3 skulum við líta á þrjú tilfelli. Þau hafa ólíka eðlisfræðilega túlkun:
(i) (*Yfirdeyfing*), $c^2 - 4km > 0$. Hér fást tvær ólíkar núllstöðvar

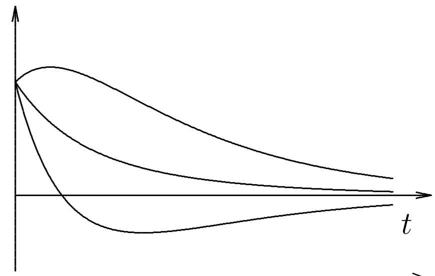
$$\lambda_1, \lambda_2 = -c/2m \pm \omega, \qquad \omega = \sqrt{c^2 - 4km}/2m,$$

á kennijöfnunni $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$. Almenn lausn á jöfnunni er þá

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}\big(c_1 \cosh \omega t + c_2 \sinh \omega t\big). \tag{7.2.6}$$

Ef við gerum ráð fyrir að upphafsskilyrðin $x(0) = x_0$ og $v(0) = x'(0) = v_0$ gildi, þá fæst ótvírætt ákvörðuð lausn

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}\left(x_0 \cosh \omega t + \big(v_0 + x_0 c/2m\big)\frac{\sinh \omega t}{\omega}\right). \tag{7.2.7}$$



Mynd: Yfirdeyfing $v_0 + x_0c/2m \gtreqqless 0$.

(ii) (*Markdeyfing*), $c^2 - 4km = 0$. Hér fæst ein núllstöð á kennijöfnunni

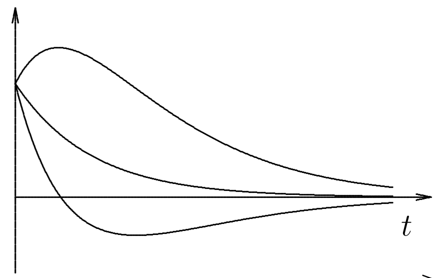
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -c/2m.$$

Almenn lausn er því

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}\big(c_1 + c_2 t\big). \tag{7.2.8}$$

Með sömu upphafsgildi og áður verður lausnin

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}\big(x_0 + (v_0 + x_0c/2m)t\big). \tag{7.2.9}$$



Mynd: Markdeyfing $v_0 + x_0c/2m \gtreqqless 0$.

(iii) (*Undirdeyfing*), $c^2 - 4km < 0$. Hér fást tvær ólíkar núllstöðvar á kennijöfnunni

$$\lambda_1, \lambda_2 = -c/2m \pm i\omega, \qquad \omega = \sqrt{4km - c^2}/2m.$$

Almenn lausn á jöfnunni er þá

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}\big(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\big). \tag{7.2.10}$$

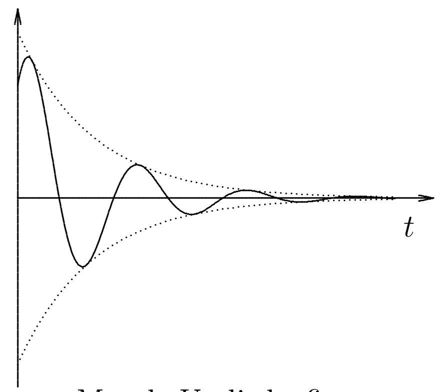
Með sömu upphafskilyrðum og áður fæst ótvírætt ákvörðuð lausn

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}\left(x_0 \cos\omega t + \big(v_0 + x_0 c/2m\big)\frac{\sin\omega t}{\omega}\right). \tag{7.2.11}$$

Oft er betra að átta sig á þessari lausn með því að umskrifa hana sem

$$x(t) = A_0 e^{-(c/2m)t}\cos(\omega t - \alpha), \tag{7.2.12}$$

þar sem *sveifluvíddin* A_0 er gefin sem $A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + x_0 c/2m)^2/\omega^2}$ og *fasahliðrunin* α uppfyllir $\cos\alpha = x_0/A_0$ og $\sin\alpha = (v_0 + x_0 c/2m)/\omega A_0$. $\square$



Mynd: Undirdeyfing.

Sýnidæmi 7.2.5 (*RLC-rás; framhald*). Lítum nú aftur á sýnidæmi 6.1.2 um *RLC*-rásina. Við leiddum út jöfnuna (6.1.13) fyrir strauminn $i(t)$ í henni. Jafnan er sú sama og sýnidæmi 7.2.4, en það er fróðlegt að sjá hvernig fastarnir L, R og C ganga inn í lausnirnar:

(i) (*Yfirdeyfing*), $R^2 - 4L/C > 0$. Almenn lausn á jöfnunni er

$$i(t) = e^{-(R/2L)t}\big(c_1 \cosh\omega t + c_2 \sinh\omega t\big), \qquad \omega = \sqrt{R^2 - 4L/C}/2L. \tag{7.2.13}$$

(ii) (*Markdeyfing*), $R^2 - 4L/C = 0$. Almenn lausn er

$$i(t) = e^{-(R/2L)t}\big(c_1 + c_2 t\big). \tag{7.2.14}$$

(iii) (*Undirdeyfing*), $R^2 - 4L/C < 0$. Almenn lausn er

$$i(t) = e^{-(R/2L)t}\big(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\big), \qquad \omega = \sqrt{4L/C - R^2}/2L. \tag{7.2.15}$$

$\square$

Sýnidæmi 7.2.6 Við látum hér $P(D)$ tákna afleiðuvirkjann með kennimargliðuna $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Ákvörðum almenna lausn óhliðruðu jöfnunnar $P(D)u = 0$.

Lausn: Við sjáum að $\lambda_1 = 1$ er núllstöð kennijöfnunnar $P(\lambda) = 0$. Eftir deilingu á $P(\lambda)$ með $\lambda - 1$ fæst $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$. Seinni þátturinn hefur núllstöðvarnar $\lambda_2 = -1 + 2i$ og $\lambda_3 = -1 - 2i$. Núllstöðvarnar eru ólíkar og því er almenn lausn óhliðruðu jöfnunnar línuleg samantekt $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ og $e^{\lambda_3 x}$,

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{(-1+2i)x} + c_3 e^{(-1-2i)x}.$$

Nú er $e^{(-1+2i)x} = e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)$ svo Euler-jöfnurnar gefa okkur að við megum líka taka lausnagrunninn $(e^x, e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x)$ og fáum því jafngilda framsetningu á lausninni

$$u(x) = b_1 e^x + b_2 e^{-x}\cos 2x + b_3 e^{-x}\sin 2x$$

□

Sýnidæmi 7.2.7 Látum $P(D)$ vera afleiðuvirkjann $P(D) = D^3 - 5D^2 + 8D - 4$. Ákvörðum almenna lausn jöfnunnar $P(D)u = 0$.

Lausn: Kennimargliðan er $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$. Við sjáum strax að $\lambda = 1$ er núllstöð. Við deilum $\lambda - 1$ upp í $P(\lambda)$ og fáum þáttunina $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Við höfum því að $\lambda = 2$ er tvöföld núllstöð. Skv. setningu 7.2.1 er almenn lausn af gerðinni

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}.$$

□

7.3 Euler-jöfnur

Afleiðujafna af gerðinni

$$P(x, D_x)u = a_m x^m u^{(m)} + \cdots + a_1 x u' + a_0 u = 0, \tag{7.3.1}$$

þar sem stuðlarnir a_j eru tvinntölur, $a_m \neq 0$ og u er óþekkt fall af x, nefnist *Euler-jafna*. Til þess að fá almenna lýsingu á lausnum jöfnunnar á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dugir okkur að finna almenna lausn á jákvæða raunásnum, því auðvelt er að sannfæra sig um að $v(x) = u(|x|)$ er lausn á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ þá og því aðeins að u sé lausn á $\{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$. Athugið að veldið á x í hverjum lið er það sama og stigið á afleiðunni. Ef við stingum $u(x) = x^r$ inn í afleiðuvirkjann, þá fæst

$$\begin{aligned} P(x, D_x)u &= a_m x^m r(r-1)\cdots(r-m+1)x^{r-m} + \cdots + a_1 x r x^{r-1} + a_0 x^r \\ &= \big(a_m r(r-1)\cdots(r-m+1) + \cdots + a_1 r + a_0\big)x^r. \end{aligned}$$

Þar með er u lausn þá og því aðeins að r sé núllstöð m-ta stigs margliðunnar Q, sem skilgreind er með formúlunni

$$Q(r) = a_m r(r-1)\cdots(r-m+1) + \cdots + a_1 r + a_0. \tag{7.3.2}$$

Lítum fyrst á tilfellið að þessi jafna hafi ólíkar núllstöðvar $r_1, \dots, r_m$. Þá er auðvelt að sannfæra sig um að föllin $x^{r_1}, \dots, x^{r_m}$ eru línulega óháð og þar með er almenn lausn á (7.3.1) af gerðinni

$$u(x) = c_1 x^{r_1} + \cdots + c_m x^{r_m}. \tag{7.3.3}$$

Nú skulum við athuga tilfellið þegar $Q(r)$ hefur margfaldar núllstöðvar. Þá skilgreinum við fallið $v(t) = u(e^t)$ og sýnum fram á að v uppfylli $Q(D)v = 0$. Við þurfum þá að þekkja sambandið milli afleiða fallanna u og v. Við höfum

$$\begin{aligned} u(x) &= v(\ln x), \\ u'(x) &= v'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}, \\ u''(x) &= v''(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2} - v'(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2} = D(D-1)v(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Með þrepun fæst síðan að

$$u^{(k)}(x) = D(D-1)\cdots(D-k+1)v(\ln x) \cdot \frac{1}{x^k}. \tag{7.3.4}$$

Þetta gefur

$$\begin{aligned} P(x, D)u(x) &= \sum_{k=0}^{m} a_k x^k u^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)v(\ln x) \\ &= Q(D)v(\ln x). \end{aligned}$$

Þar með er u lausn á Euler-jöfnunni þá og því aðeins að v sé lausn á jöfnunni $Q(D)v = 0$. Nú hefur virkinn Q fastastuðla svo við getum beitt setningu 7.2.1:

Setning 7.3.1 *Almenn lausn Euler-jöfnunnar (7.3.1) á jákvæða raunásnum er línuleg samatekt fallanna*

$$\begin{array}{ccc} x^{r_1}, \big(\ln x\big)x^{r_1}, & \dots, & \big(\ln x\big)^{m_1-1}x^{r_1}, \\ x^{r_2}, \big(\ln x\big)x^{r_2}, & \dots, & \big(\ln x\big)^{m_2-1}x^{r_2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{r_\ell}, \big(\ln x\big)x^{r_\ell}, & \dots, & \big(\ln x\big)^{m_\ell-1}x^{r_\ell}, \end{array}$$

þar sem $r_1, \dots, r_\ell$ eru ólíkar núllstöðvar margliðunnar Q, sem gefin er með (7.3.2), og margfeldni þeirra er $m_1, \dots, m_\ell$. □

Sýnidæmi 7.3.2 Finnum almenna lausn jöfnunnar

$$x^2u'' + 2xu' - 6u = 0.$$

Lausn: Við byrjum á því að stinga fallinu $u(x) = x^r$ inn í afleiðujöfnuna,

$$\begin{aligned} x^2u'' + 2xu' - 6u &= x^2r(r-1)x^{r-2} + 2xrx^{r-1} - 6x^r \\ &= (r^2 + r - 6)x^r = (r+3)(r-2)x^r = 0. \end{aligned}$$

Núllstöðvarnar eru $r_1 = -3$ og $r_2 = 2$. Samkvæmt setningu 7.3.1 er þá almenn lausn af gerðinni $u(x) = c_1x^{-3} + c_2x^2$. □

Sýnidæmi 7.3.3 Ákvörðum nú almenna lausn jöfnunnar

$$x^2u'' + 7xu' + 13u = 0.$$

Lausn: Við förum eins að og í síðasta dæmi og stingum fyrst $u(x) = x^r$ inn í afleiðujöfnuna. Þá fáum við

$$\begin{aligned} x^2u'' + 7xu' + 13u &= (r(r-1) + 7r + 13)x^r = \\ &= (r^2 + 6r + 13)x^r = \big((r+3)^2 + 4\big)x^r = 0 \end{aligned}$$

Núllstöðvar margliðunnar $(r + 3)^2 + 4$ eru $r_1 = -3 + 2i$ og $r_2 = -3 - 2i$. Við fáum því almennu lausnina

$$u(x) = c_1|x|^{-3+2i} + c_2|x|^{-3-2i}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Það getur verið heppilegt að skipta um grunn með því að notfæra sér Euler-jöfnurnar

$$|x|^{-3\pm 2i} = |x|^{-3}e^{\pm 2i\ln|x|} = |x|^{-3}\big(\cos(2\ln|x|) \pm i\sin(2\ln|x|)\big).$$

Þá verður lausnin af gerðinni

$$u(x) = |x|^{-3}\big(b_1\cos(2\ln|x|) + b_2\sin(2\ln|x|)\big).$$

□

7.4 Sérlausnir

Algengt er að ástandsjöfnur eðlisfræðilegra kerfa séu af gerðinni

$$P(D)u = f$$

þar sem $P(D)$ er línulegur afleiðuvirki með fastastuðla og f er gefið fall á einhverju bili. Fallið f stendur oft fyrir ytra álag, örvun eða krafta, sem á kerfið verka, en lausnin er svörun kerfisins við þessu ytra álagi. Til þess að skilja kerfið er nauðsynlegt að ráða yfir fjölbreytilegum aðferðum til þess að reikna út svörunina u þegar ytra álagið f er gefið. Í þessari grein ætlum við að líta á tilfellið að f sé veldisvísisfall eða hornafall og athuga hvort hægt sé að finna sérlausn af sömu gerð. Í næstu grein munum við hins vegar fjalla um almenna aðferð til þess að finna sérlausn fyrir hvaða hægri hlið sem er. Í (7.2.3) sáum við að $P(D)e^{\alpha t} = P(\alpha)e^{\alpha t}$. Ef α er núllstöð kennimargliðunnar P, þá er veldisvísisfallið $e^{\alpha t}$ lausn á óhliðruðu jöfnunni. Ef aftur á móti $P(\alpha) \neq 0$, þá er

$$P(D)u_p = e^{\alpha t} \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{e^{\alpha t}}{P(\alpha)}. \tag{7.4.1}$$

Ef $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(i\alpha) \neq 0$ og $P(-i\alpha) \neq 0$, þá fáum við með því að nota jöfnur Eulers að

$$P(D)u_p = \cos\alpha t \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{e^{i\alpha t}}{2P(i\alpha)} + \frac{e^{-i\alpha t}}{2P(-i\alpha)}, \tag{7.4.2}$$

og

$$P(D)u_p = \sin\alpha t \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{e^{i\alpha t}}{2iP(i\alpha)} - \frac{e^{-i\alpha t}}{2iP(-i\alpha)}. \tag{7.4.3}$$

Í því tilfelli að kennimargliðan hefur eingöngu rauntalnastuðla, þá verða lausnirnar í þessum tveimur dæmum

$$u_p(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\alpha t}}{P(i\alpha)}\right), \qquad \text{og} \qquad u_p(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\alpha t}}{P(i\alpha)}\right). \tag{7.4.4}$$

Ef $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha) \neq 0$ og $P(-\alpha) \neq 0$, þá fáum við að

$$P(D)u_p = \cosh\alpha t \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2P(\alpha)} + \frac{e^{-\alpha t}}{2P(-\alpha)}, \tag{7.4.5}$$

og

$$P(D)u_p = \sinh\alpha t \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2P(\alpha)} - \frac{e^{-\alpha t}}{2P(-\alpha)}. \tag{7.4.6}$$

Sýnidæmi 7.4.1 (*Deyfð sveifla; framhald.*). Lítum aftur á deyfðar sveiflur, sem við tókum fyrir í sýnidæmum 6.1.1 og 7.2.4. Nú skulum við gera ráð fyrir að ytri krafturinn $f(t)$ sé gefinn með fallinu $f(t) = f_0 \cos\omega_f t$, þar sem sveifluvíddin f_0 og horntíðnin ω_f eru rauntölur. Við höfum nú áhuga á að finna sérlausn x_p á jöfnunni

$$mx'' + cx' + kx = f(t) = f_0\cos\omega_f t,$$

með aðferðinni sem við höfum verið að skoða. Við skilgreinum því fallið $F(t) = f_0 e^{i\omega_f t}$ og notfærum okkur að stuðlar jöfnunnar eru rauntölur. Það gefur okkur að við getum tekið $x_p = \operatorname{Re} X_p$, þar sem $X_p(t) = f_0 e^{i\omega_f t}/P(i\omega_f)$ er sérlausn jöfnunnar

$$mx'' + cx' + kx = F(t) = f_0 e^{i\omega_f t},$$

og $P(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k$ táknar kennimargliðuna. Greinilega er

$$X_p(t) = \frac{f_0 e^{i\omega_f t}}{(k - m\omega_f^2) + ic\omega_f} = \frac{f_0\big((k - m\omega_f^2) - ic\omega_f\big)e^{i\omega_f t}}{(k - m\omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}$$

og þar með er

$$x_p(t) = \frac{f_0\big((k-m\omega_f^2)\cos\omega_f t + c\omega_f \sin\omega_f t\big)}{(k-m\omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}. \tag{7.4.7}$$

Til þess að átta okkur á þessari lausn skulum við skrifa hana sem

$$x_p(t) = \frac{f_0\cos(\omega_f t - \alpha)}{\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}}, \tag{7.4.8}$$

þar sem fasahliðrunin α uppfyllir

$$\cos\alpha = \frac{k-m\omega_f^2}{\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c\omega_f}{\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}}.$$

Sveifluvíddin $f_0/\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2 + c^2\omega_f^2}$ nær hámarki ef horntíðni ytri kraftsins er $\omega_f = \sqrt{k/m}$. Í því tilfelli segjum við að það verði *herma* í sveiflunni.

Nú skulum við breyta dæminu örlítið og líta á hreinan sveifil, en það er tilfellið $c = 0$. Kennimargliðan er þá $P(\lambda) = m\lambda^2 + k$ og núllstöðvar hennar eru $\pm i\sqrt{k/m}$. Ef við gerum ráð fyrir að $\omega_f \neq \sqrt{k/m}$, þá fáum við $X_p(t) = f_0 e^{i\omega_f t}/(k-m\omega_f^2)$ og þar með

$$x_p(t) = \frac{f_0\cos\omega_f t}{k-m\omega_f^2}. \tag{7.4.9}$$

$\square$

Sýnidæmi 7.4.2 (*RLC-rás; framhald*). Lítum nú aftur á sýnidæmi 6.1.2 og 7.2.5. Við viljum nú finna sérlausn á jöfnunni

$$Li'' + Ri' + C^{-1}i = e'(t),$$

þar sem við gefum okkur að frumspennan $e(t)$ sé gefin sem $e(t) = E_0\sin\omega_f t$. Við eigum þá að setja $m = L$, $c = R$, $k = 1/C$ og $f_0 = \omega_f E_0$ inn í lausnarformúluna (7.4.7). Við fáum því sérlausnina

$$i_p(t) = \frac{\omega_f E_0\cos(\omega_f t - \alpha)}{\sqrt{(1/C - L\omega_f^2)^2 + R^2\omega_f^2}} = \frac{E_0\cos(\omega_f t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/(\omega_f C))^2}}.$$

Þar sem fasahliðrunin α uppfyllir

$$\cos\alpha = (1/C - L\omega_f^2)/Z, \qquad \text{og} \qquad \sin\alpha = R\omega_f/Z,$$

og stærðin $Z = \sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/(\omega_f C))^2}$ kallast *samviðnám* rásarinnar. Við sjáum að sveifluvíddin er einfaldlega E_0/Z og að það verður herma í sveiflunni þegar Z tekur lággildið R. Það gerist ef $\omega_f = 1/\sqrt{LC}$. $\square$

Sérlausnir fundnar með virkjareikningi

Nú skulum við láta afleiðuvirkjann $D-\alpha$ verka á margfeldi fallanna v og $e^{\alpha t}$. Við fáum þá

$$(D-\alpha)(ve^{\alpha t}) = D(ve^{\alpha t}) - \alpha ve^{\alpha t} = v'e^{\alpha t}. \tag{7.4.10}$$

Af þessari formúlu fæst síðan með þrepun

$$(D-\alpha)^m(ve^{\alpha t}) = v^{(m)}e^{\alpha t} \qquad m \geq 1. \tag{7.4.11}$$

Ef við veljum nú $v(t) = t^k$, þá fáum við

$$(D-\alpha)^m(t^k e^{\alpha t}) = \begin{cases} 0, & k < m, \\ k!e^{\alpha t}, & k = m, \\ k(k-1)\cdots(k-m+1)t^{k-m}e^{\alpha t}, & k > m. \end{cases} \tag{7.4.12}$$

Hugsum okkur nú að α sé núllstöð P af stigi k. Þá er unnt að þátta margliðuna P í $P(\lambda) = (\lambda-\alpha)^k Q(\lambda)$, þar sem $Q(\lambda)$ er margliða af stigi $m-k$ og $Q(\alpha) \neq 0$. Samkvæmt (7.4.12) er

$$P(D)(t^k e^{\alpha t}) = Q(D)(D-\alpha)^k(t^k e^{\alpha t}) = Q(D)(k!e^{\alpha t}) = k!Q(\alpha)e^{\alpha t}.$$

Þetta gefur okkur að

$$P(D)u_p = e^{\alpha t} \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{t^k e^{\alpha t}}{k!Q(\alpha)}. \tag{7.4.13}$$

Nú skulum við gera ráð fyrir því að $i\alpha$ sé núllstöð P af stigi k og að $-i\alpha$ sé núllstöð P af stigi l. Þá getum við þáttað P á tvo mismunandi vegu í

$$P(\lambda) = (\lambda - i\alpha)^k Q(\lambda), \qquad P(\lambda) = (\lambda + i\alpha)^l R(\lambda),$$

þar sem Q og R eru margliður af stigi $m-k$ og $m-l$, $Q(i\alpha) \neq 0$ og $R(-i\alpha) \neq 0$. Þetta gefur að

$$P(D)u_p = \cos\alpha t \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{t^k e^{i\alpha t}}{2(k!)Q(i\alpha)} + \frac{t^l e^{-i\alpha t}}{2(l!)R(-i\alpha)}, \tag{7.4.14}$$

og

$$P(D)u_p = \sin\alpha t \qquad \text{ef} \qquad u_p(t) = \frac{t^k e^{i\alpha t}}{2i(k!)Q(i\alpha)} - \frac{t^l e^{-i\alpha t}}{2i(l!)R(-i\alpha)}. \tag{7.4.15}$$

Sýnidæmi 7.4.3 (*Hreinn sveifill; herma*). Höldum nú áfram með sýnidæmi 7.4.1 og reiknum út sérlausn á

$$mx'' + kx = f_0 \cos\omega_f t.$$

þar sem við gefum okkur að tíðnin í ytra kraftsviðinu $f(t) = f_0 \cos \omega_f t$ sé jöfn eigintíðni sveiflsins, $\omega_f = \sqrt{k/m}$. Hér er $P(i\omega_f) = m(i\omega_f)^2 + k = 0$, þar sem P táknar kennimargliðuna

$$P(\lambda) = m\lambda^2 + k = (\lambda - i\sqrt{k/m})m(\lambda + i\sqrt{k/m})$$

og því $Q(\lambda) = m(\lambda + i\sqrt{k/m}) = m(\lambda + i\omega_f)$. Þar með er

$$X_p(t) = \frac{f_0 t e^{i\omega_f t}}{2im\omega_f}$$

og að lokum fáum við sérlausnina

$$x_p(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{f_0 t e^{i\omega_f t}}{2im\omega_f}\right) = \frac{f_0 t \sin\left(\omega_f t\right)}{2m\omega_f}. \tag{7.4.16}$$

Athugið að þessi lausn er ótakmörkuð, þó hægri hliðin f sé takmarkað fall. $\square$

Sýnidæmi 7.4.4 Finnið sérlausn á $u'' - 2u' + u = \cos 2t$.
Lausn: Kennimargliðan er $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Talan $2i$ er ekki núllstöð, $P(2i) = -3 - 4i$, svo við fáum sérlausnina

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{2it}}{-3-4i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-3+4i}{25}(\cos 2t + i \sin 2t)\right) \\ &= -\frac{3}{25}\cos 2t - \frac{4}{25}\sin 2t. \end{aligned}$$

$\square$

Sýnidæmi 7.4.5 Við látum hér $P(D)$ tákna afleiðuvirkjann með kennimargliðuna $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$. Notum virkjareikning til þess að finna sérlausnir $P(D)u = f(x)$ með $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sinh x$ og $f(x) = e^{2x}$.
Lausn: Þessi virki kom fyrir í sýnidæmi hér að framan og við vitum að $\lambda = 1$ er einföld núllstöð kennimargliðurnnar og $\lambda = 2$ er tvöföld núllstöð.

$f(x) = \cos x$: Virkinn hefur rauntalnastuðla og því er

$$P(D)\operatorname{Re}\left(e^{ix}/P(i)\right) = \operatorname{Re}\left(P(D)e^{ix}/P(i)\right) = \operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$$

Þetta gefur okkur sérlausnina

$$u(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}}{P(i)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}}{1+7i}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i\sin x)\frac{1-7i}{50}\right) = \frac{\cos x + 7\sin x}{50}$$

$f(x) = x^2$: Ef $P(\alpha) \neq 0$ þá er

$$P(D)\left(\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}\right) = e^{\alpha x}$$

Ef við deildum þessa jöfnu tvisvar sinnum með tilliti til α, þá fáum við

$$P(D)\bigg(\frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg(\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}\bigg)\bigg) = x^2e^{\alpha x}$$

Það með fáum við u sem uppfyllir $P(D)u = x^2e^{\alpha x}$ með formúlunni

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg(\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}\bigg) = \frac{d}{d\alpha}\bigg(\frac{1}{P(\alpha)}xe^{\alpha x} - \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)^2}e^{\alpha x}\bigg) \\ &= \frac{1}{P(\alpha)}\cdot x^2e^{\alpha x} - \frac{2P'(\alpha)}{P(\alpha)^2}\cdot xe^{\alpha x} + \bigg(\frac{2(P'(\alpha))^2}{P(\alpha)^3} - \frac{P''(\alpha)}{P(\alpha)^2}\bigg)\cdot e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Í þessu dæmi er $\alpha = 0$, $P(0) = -4$, $P'(0) = 8$ og $P''(0) = -10$. Við stingum þessum gildum inn í síðustu formúlu og fáum

$$u(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 - x - \tfrac{11}{8}.$$

$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$: Fallið e^x er lausn óhliðruðu jöfnunar, svo við þurfum að deila $(\lambda - 1)$ út úr virkjanum $P(\lambda) = (\lambda - 1)Q(\lambda)$ þar sem $Q(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Við fáum því sérlausnina

$$u(x) = \frac{1}{2}\bigg(\frac{xe^x}{Q(1)} - \frac{e^{-x}}{P(-1)}\bigg) = \frac{xe^x}{2} + \frac{e^{-x}}{36}.$$

$f(x) = e^{2x}$: Talan 2 er núllstöð kennimargliðunnar af stigi 2 og þegar við þáttum hana út, þá fáum við $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2Q(\lambda)$ og í þessu tilfelli er $Q(\lambda) = \lambda - 1$. Sérlausnin er þá

$$u(x) = \frac{x^2e^{2x}}{2!Q(2)} = \tfrac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

□

7.5 Green-föll

Í síðustu grein skoðuðum við nokkrar einfaldar aðferðir til að finna sérlausnir á línulegum jöfnum með fastastuðla, þar sem hægri hlið jöfnunnar $f(t)$ er veldisvísisfall eða eitthvert skylt fall. Núna ætlum við að kynna okkur almenna aðferð til þess að finna sérlausn á

(7.5.1) $$P(t, D)u = (a_m(t)D^m + \cdots + a_1(t)D + a_0(t))u = f(t), \qquad t \in I,$$

þar sem I er eitthvert bil á rauntalnaásnum, föllin $a_0, \ldots, a_m, f$ eru í $C(I)$ og $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$.

Ef $\tau \in I$ er einhver ótiltekinn punktur, þá segir fylgisetning 6.7.7 að til sé ótvírætt ákvörðuð lausn í $C^m(I)$ á upphafsgildisverkefninu

$$P(t, D_t)u = 0, \qquad u(\tau) = u'(\tau) = \cdots = u^{(m-2)}(\tau) = 0, \quad u^{(m-1)}(\tau) = 1/a_m(\tau).$$

Við táknum hana með $G(t, \tau)$. Þar með ákvarðast fallið G af skilyrðunum

$$P(t, D_t)G(t, \tau) = 0, \qquad t, \tau \in I, \tag{7.5.2}$$

$$G(\tau, \tau) = \partial_t G(\tau, \tau) = \cdots = \partial_t^{(m-2)} G(\tau, \tau) = 0, \quad \partial_t^{(m-1)} G(\tau, \tau) = 1/a_m(\tau). \tag{7.5.3}$$

Nú tökum við $a \in I$ og sýnum fram á að fallið

$$u_p(t) = \int_a^t G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad t \in I, \tag{7.5.4}$$

uppfylli jöfnuna $P(t, D)u = f(t)$, $t \in I$. Til þess að ráða við þetta þurfum við að vita að fallið $G(t, \tau)$ sé heildanlegt með tilliti til τ og jafnframt hvernig á að deilda fall sem gefið er með svona formúlu:

Hjálparsetning 7.5.1 *Ef I er bil á raunásnum, $a \in I$, $f \in C(I)$ og $g \in C(I \times I)$, er samfellt deildanlegt fall af fyrri breytistærðinni, þ.e. $\partial_t g \in C(I \times I)$, þá er fallið h, sem gefið er með formúlunni*

$$h(t) = \int_a^t g(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad t \in I,$$

í $C^1(I)$ og afleiða þess er

$$h'(t) = g(t, t) f(t) + \int_a^t \partial_t g(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad t \in I.$$

□

Sönnun: Setjum

$$F(x, y) = \int_a^y g(x, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad (x, y) \in I \times I.$$

Þá gefur undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar að $F \in C^1(I \times I)$ og

$$\partial_x F(x, y) = \int_a^y \partial_x g(x, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad \partial_y F(x, y) = g(x, y) f(y).$$

Nú er $h(t) = F(x(t), y(t))$ með $x(t) = y(t) = t$, svo $h \in C^1(I)$ og keðjureglan gefur okkur $h'(t) = \partial_x F(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \partial_y F(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$, en það er nákvæmlega formúlan sem sanna átti. ■

Nú skulum við ganga út frá því að $\partial_t^j G \in C(I \times I)$ fyrir $j = 0, \dots, m$ og líta aftur á fallið u_p sem skilgreint var með (7.5.4). Með því að beita hjálparsetningu 7.5.1, fáum við að $u_p \in C^1(I)$ og

$$u_p'(t) = G(t, t) f(t) + \int_a^t \partial_t G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Nú er $G(t, t) = 0$ fyrir öll $t \in I$ samkvæmt fyrsta upphafsskilyrðinu á G, svo við fáum að $u_p \in C^2(I)$ og

$$u_p''(t) = \partial_t G(t, t) f(t) + \int_a^t \partial_t^2 G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Ef $m > 2$ þá er $\partial_t G(t,t) = 0$ fyrir öll $t \in I$ og við getum haldið áfram að deilda fallið u_p, þar til við fáum að $u_p \in C^m(I)$ og

$$u_p^{(m)}(t) = \partial_t^{m-1} G(t,t) f(t) + \int_a^t \partial_t^m G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Nú er $\partial_t^{m-1} G(t,t) = 1/a_m(t)$ fyrir öll $t \in I$. Við tökum saman liði og fáum

$$\begin{aligned} P(t,D_t)u_p(t) &= a_m(t)f(t)/a_m(t) + \sum_{j=0}^m a_j(t) \int_a^t \partial_t^j G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau = \\ &= f(t) + \int_a^t P(t,D_t) G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau = f(t), \end{aligned}$$

því $P(t,D_t)G(t,\tau) = 0$ fyrir öll $\tau \in I$. Á jöfnunum fyrir afleiður u_p sjáum við að

$$u_p(a) = u_p{}'(a) = \cdots = u_p^{(m-1)}(a) = 0.$$

Við getum því tekið saman útreikninga okkar:

Setning 7.5.2 *Látum I vera bil á rauntöluásnum, $a \in I$ og $P(t,D)$ vera línulegan afleiðuvirkja á forminu (7.5.3) með samfellda stuðla og $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Fyrir sérhvert $f \in C(I)$ er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u_p \in C^m(I)$ á upphafsgildisverkefninu*

(7.5.5) $$P(t,D)u = f(t), \qquad u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = 0,$$

og er hún gefin með formúlunni

(7.5.6) $$u_p(t) = \int_a^t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad t \in I,$$

þar sem G, er lausnin á upphafsgildisverkefninu

(7.5.7) $$P(t,D_t)G(t,\tau) = 0, \qquad t,\tau \in I,$$

(7.5.8) $$G(\tau,\tau) = \partial_t G(\tau,\tau) = \cdots = \partial_t^{(m-2)} G(\tau,\tau) = 0, \quad \partial_t^{(m-1)} G(\tau,\tau) = 1/a_m(\tau).$$

Fallið $G(t,\tau)$ er m-sinnum samfellt deildanlegt fall af t fyrir sérhvert $\tau \in I$ og $\partial_t^j G \in C(I \times I)$ fyrir $j = 0, \ldots, m$. □

Við eigum eftir að sanna síðustu staðhæfinguna og það gerum við í grein 7.7.

Skilgreining 7.5.3 Fallið $G(t,\tau)$ í síðustu setningu kallast *Green-fall* virkjans $P(t,D)$. Við tölum einnig um *fall Greens.* □

Mjög auðvelt er að ákvarða Green-fallið fyrir línulegan afleiðuvirkja með fastastuðla:

Fylgisetning 7.5.4 *Gerum ráð fyrir að $P(D) = a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0$ sé línulegur afleiðuvirki með fastastuðla. Látum $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ vera fallið sem uppfyllir*

(7.5.9) $$P(D)g = 0, \quad g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(m-2)}(0) = 0, \quad g^{(m-1)}(0) = 1/a_m.$$

Þá er $G(t,\tau) = g(t-\tau)$ Green-fall virkjans $P(D)$. □

Sönnun: Það blasir við að $G(t,\tau) = g(t-\tau)$ uppfyllir (7.5.7) og (7.5.8). ■

Sýnidæmi 7.5.5 Við skulum byrja á því að ákvarða Green-fallið fyrir fyrsta stigs virkjann $P(t,D) = D + a_0(t)$, þar sem $a_0 \in C(I)$ og I er eitthvert bil. Almenn lausn á óhliðruðu jöfnunni er af gerðinni $Ce^{-A(t)}$, þar sem $A(t)$ er stofnfall $a_0(t)$. Við sjáum því að

$$G(t,\tau) = e^{-A(t)+A(\tau)}, \qquad t,\tau \in I, \tag{7.5.10}$$

uppfyllir $P(t,D_t)G(t,\tau) = 0$ og $G(\tau,\tau) = 1$. Lausnin á upphafsgildisverkefninu $P(t,D)u = f(t)$, $u(a) = b$ er síðan gefin með gamalkunnri formúlu, sem við sjáum nú í nýju ljósi,

$$\begin{aligned} u(t) &= be^{-A(t)+A(a)} + \int_a^t e^{-A(t)+A(\tau)} f(\tau)\, d\tau \\ &= bG(t,a) + \int_a^t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad t \in I. \end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 7.5.6 (*Deyfð sveifla; framhald*). Lítum nú á afleiðuvirkjann

$$P(D) = mD^2 + cD + k.$$

Við höfum fengist við hann í sýnidæmum 6.1.1, 7.2.4 og 7.4.1. Þetta er virki með fastastuðla, svo fylgisetning 6.5.4 segir okkur að Green-fall hans sé af gerðinni $G(t,\tau) = g(t-\tau)$, þar sem $P(D)g = 0$, $g(0) = 0$ og $g'(0) = 1/m$. Við fjölluðum um almenna lausn óhliðruðu jöfnunnar í sýnidæmi 7.2.4 og ákvörðum því g með því að stinga $x_0 = 0$ og $v_0 = 1/m$ inn í lausnarformúlurnar, sem við fengum þar:

(i) *Yfirdeyfing*, $c^2 - 4km > 0$. Hér er

$$g(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-(c/2m)t} \sinh(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{c^2 - 4km}\,/2m. \tag{7.5.11}$$

(ii) *Markdeyfing*, $c^2 - 4km = 0$. Hér er

$$g(t) = \frac{1}{m} te^{-(c/2m)t}. \tag{7.5.12}$$

(iii) *Undirdeyfing*, $c^2 - 4km < 0$. Hér er

$$g(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-(c/2m)t} \sin(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{4km - c^2}\,/2m. \tag{7.5.13}$$

□

Sýnidæmi 7.5.7 Reiknum út Green-fall virkjans $D^2 - 4D + 3$.

Lausn: Samkvæmt fylgisetningu 7.5.4 er $G(t, \tau) = g(t - \tau)$, þar sem g uppfyllir $(D^2 - 4D + 3)g = 0$, $g(0) = 0$ og $g'(0) = 1$. Kennimargliðan er

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

og núllstöðvar hennar eru $\lambda = 1$ og $\lambda = 3$. Þar með er g af gerðinni

$$g(t) = Ae^t + Be^{3t}.$$

Upphafsskilyrðin eru

$$\begin{aligned} g(0) &= A + B = 0, \\ g'(0) &= A + 3B = 1. \end{aligned}$$

Við leysum stuðlana út úr þessu hneppi, $A = -\frac{1}{2}$ og $B = \frac{1}{2}$, og svarið er þá fundið

$$G(t, \tau) = -\tfrac{1}{2}e^{t-\tau} + \tfrac{1}{2}e^{3(t-\tau)}.$$

$\square$

Sýnidæmi 7.5.8 Reiknum út Green-fall virkjans sem þáttast í $(D^2 + 1)(D - 1)(D - 2)$.

Lausn: Green–fallið er $G(t, \tau) = g(t - \tau)$ þar sem g er lausnin á óhliðruðu jöfnunni, sem uppfyllir $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ og $g'''(0) = 1$. Núllstöðvar kennijöfnunnar eru $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1$ og $\lambda_4 = 2$ og þar með er g af gerðinni

$$g(t) = A\cos t + B\sin t + Ce^t + De^{2t}$$

og upphafsskilyrðin gefa okkur jöfnuhneppið fyrir stuðlana

$$\begin{aligned} A \quad\; + C \;+D &= 0, \\ B + C + 2D &= 0, \\ -A \quad\; + C + 4D &= 0, \\ -B + C + 8D &= 1. \end{aligned}$$

Lausnin er síðan fundin með Gauss–eyðingu: $A = 3/10$, $B = 1/10$, $C = -5/10$, $D = 2/10$.

$\square$

Sýnidæmi 7.5.9 Nú skulum við reikna út lausnina á

$$P(D)u = (D - 1)(D - 2)(D - 3)u = f(t),$$

með upphafsskilyrðunum

$$u(0) = 1, u'(0) = 2, u''(0) = 3,$$

þar sem $f \in C(I)$ er eitthvert ótiltekið fall á bilinu I og $0 \in I$.

Lausn: Kennimargliða virkjans er $P(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, svo grunnur fyrir núllrúmið er $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$. Til þess að finna Green-fallið þurfum við fyrst að finna fallið g sem uppfyllir

$$g(t) = Ae^t + Be^{2t} + Ce^{3t}, \qquad g(0) = g'(0) = 0, g''(0) = 1.$$

Stuðlarnir eru leystir út úr jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} g(0) &= A + B + C = 0, \\ g'(0) &= A + 2B + 3C = 0, \\ g''(0) &= A + 4B + 9C = 1, \end{aligned}$$

og þeir eru því $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. Green-fallið er síðan gefið með formúlunni

$$G(t,\tau) = \frac{1}{2}\big(e^{(t-\tau)} - 2e^{2(t-\tau)} + e^{3(t-\tau)}\big), \qquad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Nú finnum við lausn $v(t) = Ae^t + Be^{2t} + Ce^{3t}$ á óhliðruðu jöfnunni með gefnu upphafsskilyrðunum. Til þess þurfum við að leysa stuðlana út úr jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} v(0) &= A + B + C = 1, \\ v'(0) &= A + 2B + 3C = 2, \\ v''(0) &= A + 4B + 9C = 3. \end{aligned}$$

Þeir eru $A = -1/2$, $B = 2$, $C = -1/2$. Svarið er nú fundið,

$$u(t) = -\frac{1}{2}e^t + 2e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} + \int_0^t \frac{1}{2}\big(e^{(t-\tau)} - 2e^{2(t-\tau)} + e^{3(t-\tau)}\big) f(\tau)\, d\tau.$$

□

Sýnidæmi 7.5.10 Reiknum nú út lausnina á upphafsgildisverkefninu

$$P(D)u = (D^4 - 1)u = f(t), \qquad u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -1, u'''(0) = 0,$$

þar sem $f \in C(I)$ er eitthvert ótiltekið fall á bilinu I og $0 \in I$.
Lausn: Kennimargliða virkjans er $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$ og núllstöðvar hennar eru $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$ og $\lambda_4 = -i$. Grunnur fyrir núllrúmið er $\{e^t, e^{-t}, e^{it}, e^{-it}\}$, svo sérhver lausn á óhliðruðu jöfnunni er línuleg samantekt af þessum föllum. Hér erum við að finna lausnir með upphafsgildi í 0 og þá er miklu einfaldara að velja $\{\sinh t, \cosh t, \sin t, \cos t\}$ sem grunn í núllrúminu. Til þess að reikna út Green-fallið, þá finnum við fyrst fallið g, sem uppfyllir

$$g(t) = A\sinh t + B\cosh t + C\sin t + D\cos t, \quad g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, g'''(0) = 1.$$

Við þurfum því að leysa hneppið

$$\begin{aligned} g(0) &= B + D = 0, \\ g'(0) &= A + C = 0, \\ g''(0) &= B - D = 0, \\ g'''(0) &= A - C = 1. \end{aligned}$$

Greinilega er $B = D = 0$, $A = 1/2$ og $C = -1/2$. Green-fallið er þar með komið,

$$G(t,\tau) = \frac{1}{2}\big(\sinh(t-\tau) - \sin(t-\tau)\big), \qquad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Nú þurfum við að finna lausn $v(t) = A\sinh t + B\cosh t + C\sin t + D\cos t$ á óhliðruðu jöfnunni sem uppfyllir gefnu upphafsskilyrðin,

$$\begin{aligned} v(0) &= B + D = 1, \\ v'(0) &= A + C = 0, \\ v''(0) &= B - D = -1, \\ v'''(0) &= A - C = 0. \end{aligned}$$

Stuðlarnir sem uppfylla þessar jöfnur eru $A = B = C = 0$, $D = 1$. Svarið er því

$$u(t) = \cos t + \int_0^t \frac{1}{2}\big(\sinh(t-\tau) - \sin(t-\tau)\big)f(\tau)\,d\tau, \qquad t \in I.$$

□

7.6 Wronski-fylkið og Wronski-ákveðan

Nú skulum við láta $G(t,\tau)$ tákna Green-fallið sem lýst er í setningu 7.5.2 og jafnframt gera ráð fyrir því að $u_1, \dots, u_m$ sé grunnur í $\mathcal{N}(P(t,D))$. Fyrst $G(t,\tau)$ er lausn á óhliðruðu jöfnunni $P(t,D_t)G(t,\tau) = 0$ fyrir sérhvert $\tau \in I$, þá getum við skrifað $G(t,\tau)$ sem línulega samantekt af grunnföllunum með stuðlum sem eru háðir τ,

$$G(t,\tau) = c_1(\tau)u_1(t) + \cdots + c_m(\tau)u_m(t), \qquad t, \tau \in I.$$

Stuðlaföllin $c_1, \dots, c_m$ ákvarðast síðan af upphafsskilyrðunum (7.5.8),

$$\begin{aligned} G(\tau,\tau) &= c_1(\tau)u_1(\tau) + \cdots + c_m(\tau)u_m(\tau) = 0, \\ \partial_t G(\tau,\tau) &= c_1(\tau){u_1}'(\tau) + \cdots + c_m(\tau){u_m}'(\tau) = 0, \\ &\;\;\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial_t^{m-2} G(\tau,\tau) &= c_1(\tau)u_1^{(m-2)}(\tau) + \cdots + c_m(\tau)u_m^{(m-2)}(\tau) = 0, \\ \partial_t^{m-1} G(\tau,\tau) &= c_1(\tau)u_1^{(m-1)}(\tau) + \cdots + c_m(\tau)u_m^{(m-1)}(\tau) = 1/a_m(\tau). \end{aligned}$$

Á fylkjaformi verður þetta jöfnuhneppi

$$V(\tau)c(\tau) = a_m(\tau)^{-1}e_m, \tag{7.6.1}$$

þar sem $V \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ er fylkjafallið

$$V(\tau) = V(u_1, \dots, u_m)(\tau) = \begin{bmatrix} u_1(\tau) & \dots & u_m(\tau) \\ {u_1}'(\tau) & \dots & {u_m}'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(m-1)}(\tau) & \dots & u_m^{(m-1)}(\tau) \end{bmatrix} \tag{7.6.2}$$

en $c(\tau) = [c_1(\tau), \dots, c_m(\tau)]^t$ og $e_m = [0, \dots, 0, 1]^t$.

Skilgreining 7.6.1 Látum I vera bil á $\mathbb{R}$ og $u_1, \dots, u_m$ vera $m-1$ sinnum deildanleg föll á I. Þá nefnist fylkjagilda fallið $V = V(u_1, \dots, u_m)$, sem skilgreint er með (7.6.2), *Wronski-fylki* fallanna $u_1, \dots, u_m$. Ákveða þess kallast *Wronski-ákveða* fallanna $u_1, \dots, u_m$ og hana táknum við með $W = W(u_1, \dots, u_m)$.

□

Ef við þekkjum Wronski-ákveðuna af m lausnum á afleiðujöfnu í einum punkti, þá getum við reiknað hana út með því að leysa fyrsta stigs afleiðujöfnu:

Setning 7.6.2 *Látum $P(t, D) = a_m(t)D^m + \cdots + a_1(t)D + a_0(t)$ vera afleiðuvirkja með samfellda stuðla, $u_1, \dots, u_m$ vera lausnir á óhliðruðu jöfnunni $P(t, D)u = 0$ og táknum Wronski-ákveðu þeirra með $W(t)$. Þá uppfyllir W fyrsta stigs afleiðujöfnuna*

$$a_m(t)W' + a_{m-1}(t)W = 0 \tag{7.6.3}$$

og þar með gildir formúlan

$$W(t) = W(a) \exp\left(- \int_a^t \frac{a_{m-1}(\tau)}{a_m(\tau)}\, d\tau \right) \tag{7.6.4}$$

fyrir öll a og t á bili J þar sem a_m er núllstöðvalaust. □

Sönnunin er tekin fyrir í grein 7.7. Formúluna fyrir Wronski-ákveðuna má nota á ýmsa vegu:

Setning 7.6.3 *Látum $u_1, \dots, u_m$ vera lausnir á óhliðruðu jöfnunni $P(t, D)u = 0$, þar sem $P(t, D)$ er sami virkinn og í setningu 7.6.2, og gerum ráð fyrir að a_m sé núllstöðvalaust á opnu bili $J \subset I$. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:*

(i) Föllin $u_1, \dots, u_m$ eru línulega óháð á bilinu J.

(ii) $W(u_1, \dots, u_m)(t) \neq 0$ fyrir sérhvert $t \in J$.

(iii) $W(u_1, \dots, u_m)(a) \neq 0$ fyrir eitthvert $a \in J$.

(iv) Dálkvigrarnir í Wronski-fylkinu $V(u_1, \dots, u_m)(t)$ eru línulega óháðir fyrir sérhvert $t \in J$.

(v) Dálkvigrarnir í Wronski-fylkinu $V(u_1, \dots, u_m)(a)$ eru línulega óháðir fyrir eitthvert $a \in J$. □

Sönnun: (ii)⇔(iii) gildir samkvæmt (7.6.4). (ii)⇔(iv) og (iii)⇔(v) er augljóst út frá skilgreiningunni á $W(u_1, \dots, u_m)$. Þar með eru skilyrðin (ii)-(v) jafngild og við þurfum að sýna að (i) sé jafngilt þeim. Til að sanna (iv)⇒(i), þá gerum við ráð fyrir að

$$c_1u_1(t) + \cdots + c_mu_m(t) = 0, \qquad \text{fyrir öll } t \in J, \tag{7.6.5}$$

og við þurfum að sýna að $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Með því að deilda þessa jöfnu $m-1$ sinnum, þá fáum við

$$c_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_1{}'(t) \\ \vdots \\ u_1^{(m-1)(t)} \end{bmatrix} + \cdots + c_m \begin{bmatrix} u_m(t) \\ u_m{}'(t) \\ \vdots \\ u_m^{(m-1)(t)} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{fyrir öll } t \in J. \tag{7.6.6}$$

Nú segir (iv) að þessir vigrar séu línulega óháðir, svo $c_1 = \cdots = c_m = 0$ og þar með eru föllin $u_1, \dots, u_m$ línulega óháð á J.

(i)⇒(iv). Hugsum okkur nú að (7.6.6) sé uppfyllt. Við þurfum að sanna að af því leiði $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Nú er fyrsta línan í (7.6.6) ekkert annað en (7.6.5) og föllin $u_1, \dots, u_m$ eru línulega óháð á J og þar með er $c_1 = \cdots = c_m = 0$ samkvæmt (i). ■

Nú skulum við rifja það upp að $n \times n$ fylki A hefur andhverfu þá og því aðeins að $\det A \neq 0$. Andhverfuna er hægt að reikna út á ýmsa vegu, en til er formúla fyrir henni,

$$A^{[-1]} = \frac{1}{\det A} B^t, \tag{7.6.7}$$

þar sem $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ táknar fylgiþáttafylki A, sem er $n \times n$ fylkið með stökin

$$b_{jk} = (-1)^{j+k} \det A_{jk}, \tag{7.6.8}$$

þar sem A_{jk} er $(n-1) \times (n-1)$ fylkið, sem fæst með því að fella niður línu númer j og dálk númer k í fylkinu A, og B^t er fylkið B bylt, þar sem víxlað er á línum og dálkum í B. Við höfum nú bætt miklu við þekkingu okkar á Green-föllum:

Setning 7.6.4 *Látum I vera bil á $\mathbb{R}$ og $P(t,D) = a_m(t)D^m + \cdots + a_1(t)D + a_0(t)$ vera afleiðuvirkja með samfellda stuðla á I og $u_1, \dots, u_m$ vera grunn í $\mathcal{N}(P(t,D))$. Green-fallið sem lýst er í setningu 7.5.2 er gefið með formúlunni*

$$G(t,\tau) = c_1(\tau)u_1(t) + \cdots + c_m(\tau)u_m(t), \qquad t, \tau \in I, \tag{7.6.9}$$

þar sem vigurinn $a_m(\tau)(c_1(\tau), \dots, c_m(\tau))$ myndar aftasta dálkinn í andhverfu Wronski-fylkisins $V(u_1, \dots, u_m)(\tau)$,

$$c_j(\tau) = (-1)^{m+j} \frac{\det V_{mj}(u_1, \dots, u_m)(\tau)}{a_m(\tau) W(u_1, \dots, u_m)(\tau)}, \tag{7.6.10}$$

þar sem $V_{mj}(u_1, \dots, u_m)(\tau)$ táknar $(m-1) \times (m-1)$ fylkið sem fæst með því að fella niður neðstu línuna og dálk númer j í $V(u_1, \dots, u_m)(\tau)$. Ef $f \in C(I)$, þá hefur upphafsgildisverkefnið (7.5.5) lausnina $u_p \in C^m(I)$ sem gefin er með

$$u_p(t) = v_1(t)u_1(t) + \cdots + v_m(t)u_m(t), \qquad t \in I, \tag{7.6.11}$$

þar sem stuðlaföllin v_j eru gefin með formúlunni

$$v_j(t) = \int_a^t c_j(\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{7.6.12}$$

□

Sönnun: Við höfum $a_m(\tau)c(\tau) = V(\tau)^{-1}e_m$ samkvæmt (7.6.1), svo (7.6.10) er ekkert annað en beiting á (7.6.7). Allar aðrar staðhæfingar eru fólgnar í setningu 7.5.2. ■

Við fáum nú beina formúlu fyrir Green-falli annars stigs virkja:

Fylgisetning 7.6.5 *Látum $P(t,D) = a_2(t)D^2 + a_1(t)D + a_0(t)$ vera annars stigs afleiðuvirkja á bilinu I með samfellda stuðla og $a_2(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Gerum nú ráð fyrir að u_1 og u_2 séu línulega óháðar lausnir á óhliðruðu jöfnunni $P(t,D)u = 0$. Þá er*

$$G(t,\tau) = a_2(\tau)^{-1} \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_1(t) \\ u_2(\tau) & u_2(t) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix}. \tag{7.6.13}$$

□

Sönnun: Wronski-fylkið er

$$V(u_1,u_2)(\tau) = \begin{bmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{bmatrix}.$$

Formúlan fyrir andhverfunni gefur okkur

$$V(u_1,u_2)(\tau)^{[-1]} = \frac{1}{W(u_1,u_2)(\tau)} \begin{bmatrix} u_2'(\tau) & -u_2(\tau) \\ -u_1'(\tau) & u_1(\tau) \end{bmatrix}.$$

Samkvæmt setningu 7.6.4 myndar vigurinn $(a_2(\tau)c_1(\tau), a_2(\tau)c_2(\tau))$ aftasta dálkinn í andhverfu Wronski-fylkisins, þar sem $c_1(\tau)$ og $c_2(\tau)$ eru stuðlarnir í skilgreiningunni á Green-fallinu. Þar með er

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= \frac{-u_1(t)u_2(\tau) + u_2(t)u_1(\tau)}{a_2(\tau)\big(u_1(\tau)u_2'(\tau) - u_2(\tau)u_1'(\tau)\big)} \\ &= a_2(\tau)^{-1} \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_1(t) \\ u_2(\tau) & u_2(t) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

■

Sýnidæmi 7.6.6 Lítum á annars stigs virkja með fastastuðla $a_2D^2 + a_1D + a_0$ í því tilfelli að $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$. Þá eru núllstöðvar kennijöfnunnar $\alpha \pm i\beta$, $\alpha = -a_1/2a_2$ og $\beta = \sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}/2a_2$. Við tökum $u_1(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ og $u_2(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$. Við höfum $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 1$, $u_1'(0) = \beta$ og $u_2'(0) = \alpha$. Wronski-ákveðan uppfyllir jöfnuna

$$a_2W' + a_1W = 0$$

og því er

$$W(t) = W(0)\exp\left(-\int_0^t a_1/a_2\,d\tau\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} e^{-(a_1/a_2)t} = -\beta e^{2\alpha t}.$$

Green-fallið er því

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= \frac{1}{-a_2\beta e^{2\alpha\tau}} \begin{vmatrix} e^{\alpha\tau}\sin\beta\tau & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha\tau}\cos\beta\tau & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{vmatrix} \\ &= \frac{e^{\alpha(t-\tau)}}{-a_2\beta}(\sin\beta\tau\cos\beta t - \sin\beta t\cos\beta\tau) \\ &= \frac{1}{a_2\beta}e^{\alpha(t-\tau)}\sin\beta(t-\tau). \end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 7.6.7 Lítum nú á virkjann $(D-1)(D-2)(D-3) = D^3 - 6D^2 + 11D - 6$ úr sýnidæmi 7.5.7 og reiknum út Green-fallið fyrir hann með því að reikna stuðlana $c(\tau) = (c_1(\tau), c_2(\tau), c_3(\tau))$ út úr Wronski-fylkinu. Við veljum föllin $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{2t}$ og $u_3(t) = e^{3t}$ sem grunn fyrir núllrúm virkjans, svo

$$V(\tau) = \begin{bmatrix} e^\tau & e^{2\tau} & e^{3\tau} \\ e^\tau & 2e^{2\tau} & 3e^{3\tau} \\ e^\tau & 4e^{2\tau} & 9e^{3\tau} \end{bmatrix}.$$

Hér höfum við $a_3(t) = 1$, $a_2(t) = -6$ og

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Þar með er

$$W(\tau) = W(0)\exp\left(-\int_0^\tau a_2(\xi)/a_3(\xi)\,d\xi\right) = 2e^{6\tau}.$$

Vigurinn $c(\tau)$ er einfaldlega neðsta línan í fylgiþáttafylki $V(\tau)$ deilt með $W(\tau)$. Við reiknum stökin í $c(\tau)$ út sem ákveður

$$\begin{aligned} c_1(\tau) &= \frac{e^{-6\tau}}{2}\begin{vmatrix} e^{2\tau} & e^{3\tau} \\ 2e^{2\tau} & 3e^{3\tau} \end{vmatrix} = \frac{e^{-\tau}}{2}, \\ c_2(\tau) &= -\frac{e^{-6\tau}}{2}\begin{vmatrix} e^{\tau} & e^{3\tau} \\ e^{\tau} & 3e^{3\tau} \end{vmatrix} = -e^{-2\tau}, \\ c_3(\tau) &= \frac{e^{-6\tau}}{2}\begin{vmatrix} e^{\tau} & e^{2\tau} \\ e^{\tau} & 2e^{2\tau} \end{vmatrix} = \frac{e^{-3\tau}}{2} \end{aligned}$$

Green-fallið er því

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= \frac{1}{2}e^t e^{-\tau} - e^{2t}e^{-2\tau} + \frac{1}{2}e^{3t}e^{-3\tau} \\ &= \frac{1}{2}\big(e^{(t-\tau)} - 2e^{2(t-\tau)} + e^{3(t-\tau)}\big). \end{aligned}$$

□

Með harðfylgi og útsjónarsemi má beita formúlunum (7.6.9-11) til þess að reikna út $G(t,\tau)$, ef $m > 3$. Að jafnaði er þó miklu einfaldara að nota aðferðina sem lýst er í setningu 6.5.2 og fylgisetningu 6.5.4:

Sýnidæmi 7.6.8 Lítum á afleiðuvirkjann $D^4 - 1$, sem við fjölluðum um í sýnidæmi 7.5.8. Við veljum föllin $u_1(t) = \sinh t$, $u_2(t) = \cosh t$, $u_3(t) = \sin t$ og $u_4(t) = \cos t$, sem grunn fyrir núllrúmið. Wronski-fylkið er einfalt að reikna út

$$V(t) = \begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t & \sin t & \cos t \\ \cosh t & \sinh t & \cos t & -\sin t \\ \sinh t & \cosh t & -\sin t & -\cos t \\ \cosh t & \sinh t & -\cos t & \sin t \end{bmatrix}.$$

Við höfum $a_4(t) = 1$, $a_3(t) = 0$ og

$$W(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Með því að leysa afleiðujöfnuna $W' = 0$ fáum við að $W(t) = 4$ fyrir öll $t \in \mathbb{R}$. Nú þurfum við að finna aftasta dálkinn $c(\tau) = (c_1(\tau), \dots, c_4(\tau))$ í $V(\tau)^{[-1]}$, en hann myndar einnig neðstu línuna í fylgiþáttafylki $V(\tau)$ deilt með $W(\tau)$. Við notum nú (7.5.10) ásamt formúlunum $\cosh^2\tau - \sinh^2\tau = 1$ og $\cos^2\tau + \sin^2\tau = 1$ og fáum

$$\begin{aligned} c_1(\tau) &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \cosh\tau & \sin\tau & \cos\tau \\ \sinh\tau & \cos\tau & -\sin\tau \\ \cosh\tau & -\sin\tau & -\cos\tau \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \cosh\tau & \sin\tau & \cos\tau \\ \sinh\tau & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & -2\sin\tau & -2\cos\tau \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cosh\tau \\ c_2(\tau) &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sinh\tau & \sin\tau & \cos\tau \\ \cosh\tau & \cos\tau & -\sin\tau \\ \sinh\tau & -\sin\tau & -\cos\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sinh\tau & \sin\tau & \cos\tau \\ \cosh\tau & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & -2\sin\tau & -2\cos\tau \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sinh\tau \\ c_3(\tau) &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sinh\tau & \cosh\tau & \cos\tau \\ \cosh\tau & \sinh\tau & -\sin\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau & -\cos\tau \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sinh\tau & \cosh\tau & \cos\tau \\ \cosh\tau & \sinh\tau & -\sin\tau \\ 0 & 0 & -2\cos\tau \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cos\tau \\ c_4(\tau) &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sinh\tau & \cosh\tau & \sin\tau \\ \cosh\tau & \sinh\tau & \cos\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau & -\sin\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sinh\tau & \cosh\tau & \sin\tau \\ \cosh\tau & \sinh\tau & \cos\tau \\ 0 & 0 & -2\sin\tau \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin\tau \end{aligned}$$

Útkoman úr þessum reikningum okkar er

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= \frac{1}{2}\big(\sinh t\cosh\tau - \cosh t\sinh\tau - \sin t\cos\tau + \cos t\sin\tau\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\sinh(t-\tau) - \sin(t-\tau)\big), \end{aligned}$$

sem er sama svarið og við fengum í sýnidæmi 7.5.8. $\square$

7.7 Sannanir á nokkrum niðurstöðum

Nú ætlum við að sanna þau atriði sem við skildum eftir í greinum 7.2, 7.5 og 7.6. Við byrjum á því að undirbúa sönnun á setningu 7.2.1:

Hjálparsetning 7.7.1 *Ef $P(D)$ er afleiðuvirki með fastastuðla sem unnt er að skrifa sem $P(D) = P_1(D) \cdots P_\ell(D)$, þar sem $P_j(D)$ eru afleiðuvirkjar með fastastuðla, þá er $\mathcal{N}(P_j(D)) \subset \mathcal{N}(P(D))$ fyrir öll j.* □

Sönnun: Ef $P_j(D)u = 0$, þá fæst

$$P(D)u = P_1(D) \cdots P_{j-1}(D)P_{j+1}(D) \cdots P_\ell(D)P_j(D)u = 0.$$

Hér höfum við notfært okkur setningu 7.1.2, en hún segir að sama sé í hvaða röð virkjarnir verka. ■

Við beitum nú virkjanum $D - \alpha$ á margfeldi fallanna v og $e^{\alpha t}$

$$(D - \alpha)(ve^{\alpha t}) = D(ve^{\alpha t}) - \alpha ve^{\alpha t} = v'e^{\alpha t}.$$

Af þessari formúlu fæst síðan með þrepun

$$(D - \alpha)^m(ve^{\alpha t}) = v^{(m)}e^{\alpha t} \qquad m \geq 1. \tag{7.7.1}$$

Ef við veljum nú $v(t) = t^k$, þá fáum við

$$(D - \alpha)^m(t^k e^{\alpha t}) = \begin{cases} 0, & k < m, \\ k!e^{\alpha t}, & k = m, \\ k(k-1)\cdots(k-m+1)t^{k-m}e^{\alpha t}, & k > m. \end{cases} \tag{7.7.2}$$

Þar með eru föllin

$$e^{\alpha t}, \quad te^{\alpha t}, \quad \dots, \quad t^{m-1}e^{\alpha t} \tag{7.7.3}$$

í núllrúmi virkjans $(D - \alpha)^m$. Þetta er virki af stigi m, svo setning 7.1.3 gefur okkur að víddin á núllrúmi hans er m. Þessi föll mynda grunn fyrir núllrúmið ef við getum sannað að þau séu línulega óháð:

Hjálparsetning 7.7.2 *Ef α er tvinntala, þá eru föllin $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t}, \dots,$ línulega óháð á sérhverju opnu bili I á rauntalnaásnum.* □

Sönnun: Gerum ráð fyrir að

$$c_0e^{\alpha t} + c_1te^{\alpha t} + \cdots + c_mt^me^{\alpha t} = 0, \qquad t \in I,$$

þar sem stuðlarnir $c_0, \dots, c_m$ eru tvinntölur. Við þurfum að sanna að allir stuðlarnir séu núll. Ef við styttum $e^{\alpha t}$ út úr jöfnunni, þá stendur eftir margliða með óendanlega margar núllstöðvar. Hún er því núllmargliðan og þar með eru allir stuðlarnir 0. ■

Fylgisetning 7.7.3 *Föllin $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \dots, t^{m-1}e^{\alpha t}$, mynda grunn í $\mathcal{N}((D-\alpha)^m)$ og því er sérhvert fall í $\mathcal{N}((D-\alpha)^m)$ af gerðinni $q(t)e^{\alpha t}$, þar sem q er margliða af stigi $< m$.* □

Lítum nú aftur á afleiðuvirkjann $P(D)$ sem gefinn er með formúlunni (7.2.1). Hjálparsetning 7.7.2 og fylgisetning 7.7.3 segja okkur að öll föll af gerðinni $q_j(t)e^{\lambda_j t}$, þar sem q_j er margliða af stigi $< m_j$ séu í $\mathcal{N}(P(D))$. Til þess að ljúka sönnuninni á setningu 7.2.1 þarf því aðeins að sýna fram á að föll af þessari gerð séu línulega óháð:

Hjálparsetning 7.7.4 *Látum $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ vera ólíkar tvinntölur, $q_1, \dots, q_\ell$ vera margliður, allar frábrugðnar núllmargliðunni. Þá eru föllin $q_1(t)e^{\lambda_1 t}, \dots, q_\ell(t)e^{\lambda_\ell t}$ línulega óháð á sérhverju opnu bili $I \subset \mathbb{R}$.* □

Sönnun: Við tökum línulega samantekt

$$c_1q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_\ell q_\ell(t)e^{\lambda_\ell t} = 0, \qquad t \in I, \tag{7.7.4}$$

og þurfum að sanna að $c_k = 0$, $1 \le k \le \ell$. Við veljum M stærra en stigið á öllum margliðunum og athugum að (7.7.1) gefur okkur að

$$(D-\lambda_j)^M(q_j(t)e^{\lambda_j t}) = (q_j^{(M)}(t))e^{\lambda_j t} = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Við látum nú virkjann

$$\prod_{\substack{1\le j\le \ell\\ j\ne k}} (D-\lambda_j)^M = (D-\lambda_1)^M \cdots (D-\lambda_{k-1})^M(D-\lambda_{k+1})^M \cdots (D-\lambda_\ell)^M$$

verka á jöfnuna (7.7.4) og notfærum okkur að sama er í hvaða röð þættirnir verka. Þá verða allir liðirnir í summunni núll, nema sá með númerið k, og við fáum

$$c_k \prod_{\substack{1\le j\le \ell\\ j\ne k}} (D-\lambda_j)^M(q_k(t)e^{\lambda_k t}) = 0. \tag{7.7.5}$$

Nú setjum við $K = \text{stig} q_k$ og athugum að (7.7.2) gefur

$$(D-\lambda_k)^K(q_k(t)e^{\lambda_k t}) = (A_k K!)e^{\lambda_k t} \ne 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{7.7.6}$$

þar sem $A_k \ne 0$ táknar forystustuðulinn í q_k. Ef við látum virkjann $(D-\lambda_k)^K$ verka á (7.7.5), víxlum röðinni og notum (7.7.6), þá fæst

$$0 = c_k \prod_{\substack{1\le j\le \ell\\ j\ne k}} (D-\lambda_j)^M(A_kK!e^{\lambda_k t}) = c_k \prod_{\substack{1\le j\le \ell\\ j\ne k}} (\lambda_k-\lambda_j)^M(A_kK!e^{\lambda_k t}), \qquad t \in I.$$

Nú eru tölurnar $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ allar ólíkar og því er síðasta margfeldið frábrugðið 0. Þar með er $c_k = 0$. ■

Þegar við sýndum fram á að u_p sem skilgreint er með (7.5.4) væri sérlausn á $P(t, D)$, þá gengum við út frá því að $\partial_t^j G \in C(I, I)$ fyrir $j = 0, \dots, m$. Nú er komið að því að sanna þetta. Við þurfum fyrst að huga aðeins nánar að Wronski-ákveðunni $W(u_1, \dots, u_m)$, þar sem $u_1, \dots, u_m$ eru lausnir á óhliðruðu jöfnunni $P(t, D)u = 0$. Við ætlum að sýna fram á að W uppfylli fyrsta stigs afleiðujöfnu en til þess að geta það verðum við að vita hvernig taka á afleiðu af ákveðu:

Hjálparsetning 7.7.5 *Látum $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1}^m \in C^n(I, \mathbb{C}^{m\times m})$, vera fylkjafall með n sinnum samfellt deildanlega stuðla, $0 \le n \le +\infty$, og skrifum $A = A(a_1, \dots, a_m)$, þar sem a_j er línuvigur númer j í A, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$. Þá er $\det A \in C^n(I)$ og*

$$\begin{aligned}\big(\det A(a_1, \dots, a_m)\big)' &= \det A({a_1}', a_2 \dots, a_m)\\ &\quad + \det A(a_1, {a_2}', a_3 \dots, a_m) + \cdots + \det A(a_1, \dots, a_{m-1}, {a_m}')\end{aligned}$$

□

Sönnun: Við sönnum þetta með þrepun og byrjum á $m = 2$. Við höfum

$$\det A = \big(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\big).$$

Þar með er $\det A \in C^n(I)$ og

$$\begin{aligned}\big(\det A(a_1, a_2)\big)' &= \big({a_{11}}'a_{22} - {a_{12}}'a_{21}\big) + \big(a_{11}{a_{22}}' - a_{12}{a_{21}}'\big)\\ &= \det A({a_1}', a_2) + \det A(a_1, {a_2}').\end{aligned}$$

Gerum nú ráð fyrir $m > 2$ og að reglan hafi verið sönnuð fyrir $m-1$. Við liðum ákveðuna eftir fyrstu línunni og fáum

$$\det A(a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^m (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_k(a_2, \dots, a_m),$$

þar sem við látum $A_k(a_2, \dots, a_m)$ tákna $(m-1) \times (m-1)$ fylkið sem fæst með því að mynda línurnar úr vigrunum $a_2, \dots, a_m$, en sleppa hnitafalli númer k. Þrepunarforsendan segir okkur nú að $\det A(a_1, \dots, a_m) \in C^n(I)$ og hún ásamt Leibniz-reglu gefa

$$\begin{aligned}\big(A(a_1, \dots, a_m)\big)' &= \sum_{k=1}^m (-1)^{1+k} {a_{1k}}' \det A_k(a_2, \dots, a_m)\\ &\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_k({a_2}', a_3, \dots, a_m) + \cdots\\ &\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_k(a_2, \dots, a_{m-1}, {a_m}')\\ &= \det A({a_1}', a_2, \dots, a_m) + \cdots + \det A(a_1, \dots, a_{m-1}, {a_m}').\end{aligned}$$

■

Sönnun:(*Sönnun á setningu 7.6.2*). Við skulum nota sama ritháttt og í hjálparsetningu 7.7.5 og skrifa

$$W(t) = \det A(u, u', \dots, u^{(m-1)})(t)$$

þar sem vigurinn u er myndaður úr lausnunum, $u = (u_1, \dots, u_m)$. Við höfum þá samkvæmt hjálparsetningu 7.7.5

$$\begin{aligned}W' &= \det A(u', u', u'', \dots, u^{(m-1)}) + \det A(u, u'', u'', u''', \dots, u^{(m-1)}) + \cdots\\ &\quad + \det A(u, u', \dots, u^{(m-1)}, u^{(m-1)}) + \det A(u, u', \dots, u^{(m-2)}, u^{(m)}).\end{aligned}$$

Nú eru tvær línur eins í öllum fylkjunum, sem koma fyrir í hægri hliðinni, nema í síðasta liðnum. Þar með eru allar ákveðurnar núll nema sú síðasta og við höfum

$$\begin{aligned} a_m W' &= a_m \det A(u, u', \dots, u^{(m-2)}, u^{(m)}) \\ &= \det A(u, u', \dots, u^{(m-2)}, a_m u^{(m)}). \end{aligned}$$

Nú notfærum við okkur að hnitaföllin í vigrinum u uppfylla afleiðujöfnuna og fáum

$$\begin{aligned} a_m(u_1^{(m)}, \dots, u_m^{(m)}) = -a_{m-1}&(u_1^{(m-1)}, \dots, u_m^{(m-1)}) \\ &- a_{m-2}(u_1^{(m-2)}, \dots, u_m^{(m-2)}) - \cdots - a_0(u_1, \dots, u_m). \end{aligned}$$

Þessi jafna segir okkur að vigurinn $a_m u^{(m)}$ sé jafn vigrinum $-a_{m-1}u^{(m-1)}$ að viðbættri línulegri samantekt af vigrunum $u, u', \dots, u^{(m-2)}$. Ef við setjum þessa línulegu samantekt inn fyrir neðsta línuvigurinn og notfærum okkur að ákveðan helst óbreytt ef bætt er við eina línu línulegri samantekt af hinum línunum, þá fáum við

$$\begin{aligned} a_m W' &= \det A(u, u', \dots, u^{(m-2)}, -a_{m-1}u^{(m-1)}) \\ &= -a_{m-1} \det A(u, u', \dots, u^{(m-2)}, u^{(m-1)}) = -a_{m-1} W. \end{aligned}$$

Við höfum því sannað (7.6.3). Jafnan (7.6.4) er einfaldlega lausnarformúlan fyrir fyrsta stigs línulegar jöfnur. ■

Sönnun:(Endir á sönnun á setningu 7.5.2). Af setningu 7.6.3 leiðir að $V(u_1, \dots, u_m)(\tau)$ er andhverfanlegt fyrir sérhvert $\tau \in I$, ef föllin $u_1, \dots, u_m$ mynda grunn í núllrúmi $P(t, D)$. Jafnan (7.6.1) segir okkur að stuðlarnir $c_1(\tau), \dots, c_m(\tau)$ myndi aftasta dálkinn í andhverfu fylkisins $a_m(\tau)V(u_1, \dots, u_m)(\tau)$. Samkvæmt setningu 6.7.7 eru föllin $u_1, \dots, u_m$ í $C^m(I)$, svo $V(u_1, \dots, u_m) \in C^1(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og þar með $W(u_1, \dots, u_m) \in C^1(I)$ samkvæmt hjálparsetningu 7.7.5. Ef við notfærum okkur formúlurnar (7.6.10) og (7.6.11) til að skoða $V(u_1, \dots, u_m)(\tau)^{[-1]}$, þá sjáum við að $c_j \in C(I)$. Formúlan

$$\partial_t^j G(t, \tau) = c_1(\tau)u_1^{(j)}(t) + \cdots + c_m(\tau)u_m^{(j)}(t) \qquad t, \tau \in I,$$

segir okkur nú að $\partial_t^j G \in C(I \times I)$ fyrir $j = 0, \dots, m$. ■

7.8 Æfingardæmi

1. Reiknið út $P(t, D)Q(t, D)$ og $Q(t, D)P(t, D)$.
a) $P(t, D) = D + t$, $Q(t, D) = D^2 + t^2$,
b) $P(t, D) = tD$, $Q(t, D) = D$,
c) $P(t, D) = t^n$, $Q(t, D) = D^n$,
d) $P(t, D) = D^2 + tD + t^2$,$Q(t, D) = D - t$.

2. a) Sýnið að $u(t) = 1/t$ sé lausn á jöfnunni $u' + u^2 = 0$, en að $u(t) = c/t$, $c \neq 1$, sé ekki lausn.
b) Sýnið að $u_1(t) = 1$ og $u_2(t) = \sqrt{t}$ séu lausnir á jöfnunni $uu'' + (u')^2 = 0$ en að summan $u_1 + u_2$ sé ekki lausn.

[Þessi dæmi sýna að lausnir ólínulegra óhliðraðra jafna þurfi ekki að mynda línuleg rúm.]

3. Ákvarðið hvort föllin séu línulega háð eða línulega óháð á $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \pi$, $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$.

b) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = 1 + |x|$.

c) $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = e^x \cos x$.

d) $f(x) = \cosh^2 x$, $g(x) = \sinh^2 x$, $h(x) = 1$.

e) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \cosh x$.

f) $f(x) = e^{ix}$, $g(x) = e^{-ix}$, $h(x) = \sin x$.

g) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin(x - 1)$.

h) $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$, $g(x) = 3\cos x - 2\sin x$.

4. Látum a og b vera rauntölur.
a) Sýnið að föllin $\{e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt\}$ spanni sama undirrúm og $\{e^{(a+ib)t}, e^{(a-ib)t}\}$.
b) Sýnið að föllin $\{\sinh at, \cosh at\}$ spanni sama undirrúm og $\{e^{at}, e^{-at}\}$.

5. Undir hvaða skilyrðum á $L \in \mathbb{R}$ eru föllin u_1 og u_2 línulega óháð:
a) $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \sin(L - x)$.
b) $u_1(x) = \sinh x$, $u_2(x) = \sinh(L - x)$.

6. Látum A vera hlutmengi af $\mathbb{R}$ sem inniheldur að minnsta kosti n ólíka punkta, þar sem n er heiltala ≥ 1. Sýnið að föllin $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x, \dots, u_n(x) = x^{n-1}$, séu línulega óháð sem föll á A.

7. Sýnið að fallið u_1 sé lausn á jöfnunni sem gefin er og notið hana til þess að finna aðra línulega óháða lausn u_2:

a) $u_1(t) = t^3$, $t^2u'' - 5tu' + 9u = 0$,
b) $u_1(t) = t$, $t^2u'' - t(t+2)u' + (t+2)u = 0$,
c) $u_1(t) = t^{-1}\cos 3t$, $tu'' + 2u' + 9tu = 0$,
d) $u_1(t) = t^{-1}\cosh 2t$, $tu'' + 2u' - 4tu = 0$,
e) $u_1(t) = t^{-1}\cos(t/2)$, $4tu'' + 8u' + tu = 0$,
f) $u_1(t) = \sqrt{t}\cosh t$, $t^2u'' - tu' - (t^2 - 3/4)u = 0$.

8. Hvaða skilyrði þarf ω að uppfylla til þess að jaðargildisverkefnið $u'' - \omega^2 u = f(x)$, $x \in]0,1[$, $u(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$, hafi ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir öll $f \in C[0,1]$ og allar tvinntölur α og β?

[*Leiðbeining:* Föllin $u_1(x) = \cosh \omega x$ og $u_2(x) = \sinh \omega x$ mynda grunn í núllrúmi afleiðuvirkjans.]

9. Hvaða skilyrði þarf L að uppfylla til þess að jaðargildisverkefnið $u'' + u = f(x)$, $x \in]0,L[$, $u(0) = \alpha$, $u(L) = \beta$, hafi ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir öll $f \in C[0,L]$ og allar tvinntölur α og β?

[*Leiðbeining:* Föllin $u_1(x) = \cos x$ og $u_2(x) = \sin x$ mynda grunn í núllrúmi afleiðuvirkjans.]

10. Sýnið að jaðargildisverkefnið $u''+2u'+u = f(x)$, $x \in]0,1[$, $u(0) = \alpha$, $u(1)-u'(1) = \beta$, hafi ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir öll $f \in C[0,1]$ og allar tvinntölur α og β.

[*Leiðbeining:* Föllin $u_1(x) = e^{-x}$ og $u_2(x) = xe^{-x}$ mynda grunn í núllrúmi afleiðuvirkjans.]

11. Sýnið að verkefnið $u''' = f(x)$, $x \in]0, L[$, $u(0) = c_1$, $u'(L) = c_2$ og $u''(L) = c_3$ hafi ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir sérhvert $L > 0$.

[*Leiðbeining:* Föllin $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$ og $u_3(x) = x^2$ mynda grunn í núllrúmi afleiðuvirkjans.]

12. Finnið almennar lausnir á $P(D)u = 0$, þar sem $P(D)$ er:

a) $D^2 - 4D + 3$,	b) $D^2 + 4D + 4$,
c) $D^2 - 3D + 3$,	d) $D^2 - 2iD + 3$,
e) $D^2 + (2 - 2i\sqrt{3})$,	f) $D^3 + D^2 - D - 1$,
g) $D^3 + D^2 + 3D - 5$,	h) $(D^2 + 1)(D - 2)^2$,
i) $(D^2 + 1)(D - 1)(D - 2)$,	j) $D^5 - 1$,
k) $D^4 + 6D^3 + 15D^2 + 18D + 9$,	l) $D^4 - D^2 + 2D + 2$.

13. Finnið lausn á afleiðujöfnunum í dæmi 12 a)-l) með upphafsskilyrðunum:
a) $u(0) = 1$, $u'(0) = 3$,
b) $u(0) = 3$, $u'(0) = -5$,
c) $u(1) = -1$, $u'(1) = -(3 + \sqrt{3})/2$,
d) $u(0) = 7$, $u'(0) = 13$,
e) $u(0) = 5$, $u'(0) = 9 + i9\sqrt{3}$,
f) $u(0) = 7$, $u'(0) = 3$, $u''(0) = -5$,
g)* $u(1) = 1$, $u'(1) = 0$, $u''(1) = 1$,
h) $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = -1$, $u'''(0) = -3$,
i) $u(0) = 4$, $u'(0) = 6$, $u''(0) = 2$, $u'''(0) = 6$,
j) $u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0$, $u^{(4)}(0) = 1$,
k) $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$, $u''(0) = 3$, $u'''(0) = 4$.
l) $u(1) = 1$, $u'(1) = 2$, $u''(1) = -1$, $u'''(1) = -2$.

14. a)-e) Látum $P(D)$ tákna virkjana í dæmi 12 a)-e): Fyrir hvaða $L > 0$ hefur jaðargildisverkefnið $P(D)u = f(t)$, $t \in]0, L[$, $u(0) = u(L) = 0$ ótvírætt ákvarðaða lausn? Finnið lausnina fyrir leyfileg L í tilfellinu $f(t) = \sin t$.

f)-g) Látum $P(D)$ tákna virkjana í dæmi 12 f)-g). Fyrir hvaða $L > 0$ hefur jaðargildisverkefnið $P(D) = f(t)$, $t \in]0, L[$, $u(0) = u'(0) = u(L) - u'(L) = 0$ ótvírætt ákvarðaða lausn? Finnið lausnina fyrir leyfileg L í tilfellinu $f(t) = \cos t$.

15. a) Sýnið að $v(x) = u(|x|)$ sé lausn Euler-jöfnunnar á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ þá og því aðeins að u sé lausn á jákvæða raunásnum.

b) Sýnið að föllin $x^{r_1}, \dots, x^{r_m}$ séu línulega óháð ef $r_1, \dots, r_m$ eru ólíkar tvinntölur.

c) Framkvæmið þrepasönnunina á jöfnu (7.3.4).

16. Ákvarðið almennar lausnir jafnanna sem gefnar eru á jákvæða raunásnum:

a) $2x^2u'' - 3xu' - 3u = 0$	b) $x^2u'' - xu' + 2u = 0$,
c) $x^2u'' - 3xu' + 4u = 0$	d) $x^2u''' + 3xu'' - 3u' = 0$,
e) $x^3u''' + 6x^2u'' + 7xu' + u = 0$	f) $x^4u^{(iv)} + 2x^2u'' - 6xu' + 6u = 0$.

17. Finnið sérlausn á jöfnunni $(D^2 + 1)(D - 2)^2u = f(t)$ með

a) $f(t) = \sin t$, b) $f(t) = \sinh t$, c) $f(t) = \sinh 2t$, d) $f(t) = e^{-t} \sin 2t$.

18. Finnið Green-föll fyrsta stigs virkjanna:

a) $D + t^2$, b) $D + \sin t$,
c) $D + \ln t$, $t > 0$, d) $D + e^t$.

19. Finnið Green-föll virkjanna í dæmi 12 a)-l).

20. Finnið Green-föll virkjanna í dæmi 16 a)-f).

Kafli 8

VELDARAÐALAUSNIR Á AFLEIÐUJÖFNUM

Samantekt. Í þessum kafla fjöllum við um aðferðir til að finna lausnir u af gerðinni $u(x) = |x-a|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ á línulegum afleiðujöfnum með raunfágaða stuðla. Við fjöllum fyrst um veldaraðalausnir umhverfis reglulega punkta. Við fjöllum síðan um raðalausnir umhverfis reglulega sérstöðupunkta og setjum fram setningu Frobeniusar, en hún lýsir þeim skilyrðum sem þurfa að vera uppfyllt til þess að lausn fáist af þessari gerð. Við ljúkum kaflanum með stuttri umfjöllun um Bessel-jöfnuna.

8.1 Raunfáguð föll

Lítum nú á línulega afleiðujöfnu

$$P(x,D)u = (a_m(x)D^m + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))u = 0, \tag{8.1.1}$$

þar sem stuðlarnir a_j eru samfelld föll á bili I á $\mathbb{R}$. Ekki er til nein almenn aðferð til að finna grunn fyrir núllrúmið $\mathcal{N}(P(x,D))$, nema gert sé ráð fyrir því að stuðlarnir séu af ákveðinni gerð. Við vitum hvernig þetta er gert ef stuðlarnir eru fastaföll og ætlum nú að taka nokkur dæmi um það hvernig lausnir eru reiknaðar út ef unnt er að setja stuðlana fram með veldaröðum.

Raunfáguð föll og fágaðar útvíkkanir

Skilgreining 8.1.1 Fall $f : X \to \mathbb{C}$ skilgreint á opnu mengi X á raunásnum, er sagt vera *raunfágað* á X ef hægt er að skrifa X sem sammengi af opnum bilum $]a-\varrho, a+\varrho[$ og fyrir sérhvert þessara bila er til samleitin veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ þannig að

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad x \in]a-\varrho, a+\varrho[. \tag{8.1.2}$$

□

Ef f er fall sem sett fram með veldaröð á bilinu $]a-\varrho, a+\varrho[$, þá framlengist f sjálfkrafa í fágað fall á skífunni opnu $S(a,\varrho)$ og gildi þess eru gefin með

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad z \in S(a,\varrho).$$

Af þessu leiðir að um sérhvert raunfágað fall f á opnu mengi X í $\mathbb{R}$ gildir að til er fágað fall F á opnu mengi Y í $\mathbb{C}$ sem inniheldur X þannig að $F(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in X$. Fallið F er þá nefnt *fáguð útvíkkun* eða *fáguð framlenging* af f yfir á Y. Ef Y er svæði og F_1 og F_2 eru tvær fágaðar útvíkkanir af f yfir á Y, þá gefur samsemdarsetningin 3.7.3 að $F_1 = F_2$. Þetta segir okkur að fágaðar útvíkkanir yfir á svæði séu ótvírætt ákvarðaðar og því notum við bókstafinn f líka fyrir útvíkkunina. Við höfum fjallað heilmikið um fágaðar framlengingar í greinum 1.6, 2.4 og 2.5.

Ef fallið f er raunfágað á menginu X og f er gefið með veldaröðinni í (8.1.2) á bilinu $I =]a-\varrho, a+\varrho[$, þá er $f \in C^\infty(I)$ og afleiður f eru reiknaðar með því að deilda röðina lið fyrir lið,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-a)^n.$$

Athugið að í seinni summunni hliðruðum við til númeringu liðanna með því að setja $k = n-1$ í stað n. Þá svarar $n = 1$ til $k = 0$ og n svarar til $k+1$. Þetta þurfum við oft að gera í útreikningum í þessu kafla. Hærri afleiður eru nú reiknaðar á sama hátt

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} (x-a)^n, \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (x-a)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+k) c_{n+k} (x-a)^n.
\end{aligned}$$

Út frá þessu sést að veldaröðin (8.1.2) er Taylor-röð fallsins f í punktinum a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \tag{8.1.3}$$

Við þekkjum ótal dæmi um raunfáguð föll sem gefin eru með Taylor-röðum og við fengumst við fágaðar útvíkkanir þeirra í kafla 2,

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\,, \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\,, \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\,, \\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\,, \\
\sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\,, \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\,, \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots\,, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots\,.
\end{aligned}
$$

Í veldaraðarframsetningum af þessu tagi setjum við alltaf $0! = 1$ og $x^0 = 1$ fyrir öll x. Fimm fyrstu raðirnar eru samleitnar á öllu $\mathbb{R}$ en hinar eru samleitnar á $]-1,1[$.

Aðgerðir á veldaröðum

Framsetning á föllum með veldaröðum er sérstaklega þægileg vegna þess að aðgerðir á þeim eru nánast þær sömu og aðgerðir á margliðum. Gerum nú ráð fyrir því að föllin f og g séu gefin með veldaröðum á bilinu $]a-\varrho, a+\varrho[$,

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.
$$

Þá er summa þeirra gefin með veldaröðinni

$$
(8.1.4) \qquad f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n,
$$

og margfeldið er gefið með röðinni

$$
(8.1.5) \qquad f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0.
$$

Ef $g(a) = b_0 \neq 0$, þá er til $\varrho_1 \leq \varrho$ þannig að $g(x) \neq 0$ fyrir öll x á bilinu $]a - \varrho_1, a + \varrho_1[$. Kvótinn $f(x)/g(x)$ er þá gefinn með veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$. Til þess að reikna út stuðlana d_n þá beitum við (8.1.5) á margfeldið

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Formúlan fyrir stuðlana í margfeldinu gefur

$$d_0b_0 = a_0, \quad d_0b_1 + d_1b_0 = a_1, \quad \dots, \quad d_0b_n + d_1b_{n-1} + \cdots + d_nb_0 = a_n.$$

Við fáum því rakningarformúlu fyrir stuðlana

$$\begin{aligned} f(x)/g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \\ d_0 &= a_0/b_0, \\ d_1 &= (a_1 - d_0b_1)/b_0, \\ \vdots \quad & \quad\quad \vdots \\ d_n &= (a_n - d_0b_n - d_1b_{n-1} - \cdots - d_{n-1}b_1)/b_0. \end{aligned}$$

8.2 Raðalausnir umhverfis venjulega punkta

Nú skulum við snúa okkur að afleiðuvirkjanum í (8.1.1). Í kafla 9 munum við sýna fram á að ef öll stuðlaföllin $a_0(x), \dots, a_m(x)$ eru raunfáguð á bilinu I og $a_m(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in I$, þá hefur afleiðujafnan (8.1.1) m línulega óháðar lausnir, sem eru fágaðar á I og unnt er að ákvarða stuðlana í veldaraðarframsetningu þessara falla út frá stuðlunum í veldaraðarframsetningu $a_0, \dots, a_{m-1}$. Við ætlum nú að ganga út frá þessari setningu og reikna út lausnir með veldaröðum.

Nokkur dæmi um veldaraðalausnir

Hugmyndin bakvið veldaraðalausnir á afleiðujöfnum er einföld. Við göngum út frá þeirri lausnartilgátu að til sé lausn sem gefin er með veldaröð,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Síðan stingum við röðinni inn í jöfnuna og leiðum út formúlu fyrir stuðlana c_n. Það er best að útskýra þetta nánar með dæmum:

Sýnidæmi 8.2.1 Við skulum byrja á því að líta á fyrsta stigs jöfnuna

$$u' + \alpha u = 0.$$

Við vitum að lausnin er $u(x) = Ce^{-\alpha x}$, en við skulum nú láta eins og við þekkjum hana ekki og gera ráð fyrir að lausn sé gefin með veldaröð,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Afleiðuna fáum við með því að deilda röðina lið fyrir lið

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n.$$

Við stingum síðan röðunum inn í jöfnuna

$$0 = u' + \alpha u = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} + \alpha c_n)x^n.$$

Nú er hægri hliðin í jöfnunni núllveldaröðin þá og því aðeins að allir stuðlarnir í henni séu núll, en það gefur

$$(n+1)c_{n+1} + \alpha c_n = 0, \qquad \text{og} \qquad c_{n+1} = \frac{-\alpha}{n+1} c_n.$$

Nú getum við reiknað stuðlana út hvern á fætur öðrum

$$c_1 = -\alpha c_0, \quad c_2 = \frac{-\alpha}{2} c_1 = \frac{\alpha^2}{2} c_0, \quad \dots, \quad c_n = \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!} c_0.$$

og lausnin er því

$$u(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!} x^n = c_0 e^{-\alpha x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

eins og við var að búast. □

Sýnidæmi 8.2.2 Við skulum nú líta á annað dæmi ögn flóknara. Jafnan $u'' + \alpha^2 u = 0$ hefur almenna lausn af gerðinni $A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$. Við skulum nú sjá hvernig hún fæst með veldaröðum. Eins og í fyrra dæminu, þá gerum við ráð fyrir að unnt sé að setja lausnina fram með veldaröð

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n,$$

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n.$$

Við stingum þessum röðum inn í jöfnuna og fáum

$$\begin{aligned}
0 = u'' + \alpha^2 u &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2} + \alpha^2 c_n)x^n.
\end{aligned}$$

Stuðlarnir verða því að uppfylla jöfnuna

$$c_{n+2} = -\frac{\alpha^2}{(n+2)(n+1)}c_n,$$

og hún sýnir að við getum valið c_0 og c_1 frjálst. Síðan fáum við

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\alpha^2}{2\cdot 1}c_0, \qquad c_4 = \frac{\alpha^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}c_0, \quad \dots, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!}c_0 \\
c_3 &= -\frac{\alpha^2}{3\cdot 2}c_1, \qquad c_5 = \frac{\alpha^4}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}c_1, \quad \dots, \quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k+1)!}c_1.
\end{aligned}$$

Nú þekkjum við veldaraðir hornafallanna og fáum því að lausnin er

$$\begin{aligned}
u(x) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= c_0\cos\alpha x + (c_1/\alpha)\sin\alpha x.
\end{aligned}$$

□

Einangraðir sérstöðupunktar

Við rifjum nú upp þekkt hugtök fyrir fáguð föll:

Skilgreining 8.2.3 Látum f vera raunfágað fall á opnu mengi X í $\mathbb{R}$, $a \in X$, gerum ráð fyrir að punkturinn $a \in X$ sé núllstöð fallsins f og

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Þá kallast minnsta gildið á n þannig að $c_n \neq 0$ *margfeldni* eða *stig* núllstöðvarinnar a. □

Ef a er núllstöð fallsins f af stigi N og við setjum $b_n = c_{N+n}$, þá er $b_0 \neq 0$ og

$$f(x) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(x-a)^n = (x-a)^N \sum_{n=N}^{\infty} c_n(x-a)^{n-N} = (x-a)^N \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.$$

Það er því greinilega jafngilt að fallið f hafi núllstöð af stigi N í punktinum a og að hægt sé að skrifa f í grennd um a með formúlu af gerðinni

$$f(x) = (x-a)^N \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n,$$

þar sem $b_0 \neq 0$.

Skilgreining 8.2.4 Látum f vera raunfágað fall á opnu mengi X í $\mathbb{R}$, gerum ráð fyrir að $a \notin X$ og að $\{x; 0 < |x-a| < r\} \subset X$ fyrir eitthvert $r > 0$. Þá kallast punkturinn a *einangraður sérstöðupunktur* raunfágaða fallsins f. Við segjum að einangraður sérstöðupunktur sé *afmáanlegur* ef til er $\varrho > 0$, þannig að $\{x; 0 < |x-a| < \varrho\} \subset X$ og raunfágað fall g á $\{x; |x-a| < \varrho\}$ þannig að $f(x) = g(x)$ ef $0 < |x-a| < \varrho$. □

Skilgreiningin segir að a sé afmáanlegur sérstöðupunktur raunfágaða fallsins f þá og því aðeins að hægt sé að bæta punktinum a við skilgreiningarsvæði f þannig að f verði raunfágað á $X \cup \{a\}$.

Sýnidæmi 8.2.5 a) Lítum á fallið $f(x) = (\sin x)/x$ sem er raunfágað á menginu $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Við sjáum á veldaröðinni fyrir sin að

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}, \qquad x \in X.$$

Seinni veldaröðin í þessari jöfnu er samleitin á öllu $\mathbb{R}$ og skilgreinir því fall g sem er raunfágað á öllu $\mathbb{R}$. Þar með er punkturinn $a = 0$ afmáanlegur sérstöðupunktur raunfágaða fallsins f.

b) Lítum nú á fallið $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$, sem er raunfágað á menginu $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Við liðum cos í veldaröð sína og fáum

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2(n+1))!} x^{2n},$$

Eins og í a) skilgreinir seinni veldaröðin raunfágað fall g á öllu $\mathbb{R}$ og þar með sjáum við að punkturinn $a = 0$ er afmáanlegur sérstöðupunktur raunfágaða fallsins f.

c) Lítum nú aftur á móti á fallið $f(x) = (\cos x)/x$, sem einnig er raunfágað á menginu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Punkturinn $a = 0$ er einangraður sérstöðupunkur fallsins f, en hann er ekki afmáanlegur, því $\lim_{x\to 0} |f(x)| \to +\infty$, sem segir okkur að ekki geti verið til neitt fall g sem er raunfágað á $\{x; |x| < \varrho\}$, þannig að $f(x) = g(x)$, ef $0 < |x| < \varrho$, því $\lim_{x\to 0} |g(x)| = |g(0)|$. □

Venjulegir punktar

Nú skulum við líta á jöfnuna

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0, \tag{8.2.1}$$

þar sem föllin a_0, a_1 og a_2 eru raunfáguð á bili I á $\mathbb{R}$. Það þýðir að fyrir sérhvern punkt $a \in I$ má skrifa föllin með veldaröðum í $(x-a)$, sem eru samleitnar í grennd um punktinn a,

$$a_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}(x-a)^n, \qquad j = 0, 1, 2.$$

Við skilgreinum nú

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}. \tag{8.2.2}$$

Þessi föll eru greinilega vel skilgreind í sérhverjum punkti þar sem $a_2(x) \neq 0$, en í núllstöðvunum þurfa þau ekki að vera skilgreind. Þar sem föllin P og Q eru skilgreind fáum við jafngilda afleiðujöfnu

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0, \tag{8.2.3}$$

Skilgreining 8.2.6 Við segjum að punkturinn $a \in I$ sé *venjulegur punktur* afleiðujöfnunnar (8.2.1), ef $a_2(a) \neq 0$ eða $a_2(a) = 0$ og a er afmáanlegur sérstöðupunktur fallanna P og Q. Ef a er ekki venjulegur punktur, þá kallast a *sérstöðupunktur* jöfnunnar (8.2.1). □

Sýnidæmi 8.2.7 (i) Jafnan

$$\frac{d}{dx}\big((1-x^2)\frac{du}{dx}\big) + \lambda u = (1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0.$$

er kennd við Legendre. Við sjáum að $P(x) = -2x/(1-x^2)$ og $Q(x) = \lambda/(1-x^2)$. Allir punktar $a \neq \pm 1$ eru því venjulegir.

(ii) Jafnan

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \alpha^2)u = 0,$$

þar sem α er tvinnbreyta er kennd við Bessel. Allir punktar $a \neq 0$ eru venjulegir punktar hennar. □

Lítum nú á afleiðujöfnuna (8.2.1), umritum hana yfir á (8.2.3) og gerum ráð fyrir að stuðlarnir $P(x)$ og $Q(x)$ hafi veldaraðaframsetningu

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)^n, \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x-a)^n, \tag{8.2.4}$$

Við göngum út frá þeirri lausnartilgátu að u sé gefið með veldaröð umhverfis punktinn a,

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n, \quad u'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n, \quad u''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-a)^n.$$

Ef við stingum þessu inn í jöfnuna (8.2.3), þá fáum við

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-a)^n+P(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n+Q(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n.$$

Með því að margfalda saman raðirnar fyrir P og u' annars vegar og Q og u hins vegar í (8.2.4), þá fáum við

$$P(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)P_{n-k}c_{k+1}\right)(x-a)^n,$$
$$Q(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}Q_{n-k}c_k\right)(x-a)^n,$$

svo afleiðujafnan verður

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)c_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}\big((k+1)P_{n-k}c_{k+1}+Q_{n-k}c_k\big)\right)(x-a)^n.$$

Val okkar á c_0 og c_1 er frjálst og við fáum rakningarformúluna

$$c_{n+2}=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\big[(k+1)P_{n-k}c_{k+1}+Q_{n-k}c_k\big], \tag{8.2.5}$$

fyrir $n=0,1,2,\dots$.

Setning 8.2.8 *Gerum ráð fyrir að a sé venjulegur punktur afleiðujöfnunnar*

$$a_2(x)u''+a_1(x)u'+a_0(x)u=0, \tag{8.2.6}$$

og látum föllin $P(x)=a_1(x)/a_2(x)$ og $Q(x)=a_0(x)/a_2(x)$ vera gefin með veldaröðunum (8.2.4). Þá eru sérhver lausn u á (8.2.6) gefin með veldaröð

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

þar sem stuðlarnir c_n uppfylla rakningarformúluna (8.2.5). Samleitnigeislinn er að minnsta kosti jafn stór og minni samleitnigeisli raðanna (8.2.4). □

Útreikningar okkar hér að framan byggðu á þeirri lausnartilgátu að u væri raunfágað. Tilvistin og matið á samleitnigeislanum verða tekin fyrir í kafla 9.

Sýnidæmi 8.2.9 (*Jafna Legendre*). Gerum ráð fyrir að jafnan

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{du}{dx}) + \lambda u = (1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0$$

hafi veldaraðalausn umhverfis punktinn $a = 0$,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}, \quad xu'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n,$$

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n,$$

$$x^2u''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n.$$

Við stingum síðan þessum röðum inn í afleiðujöfnuna og fáum

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n \\ &- 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2} + (\lambda - n(n-1) - 2n)c_n)x^n. \end{aligned}$$

Stuðlarnir verða því að uppfylla

$$c_{n+2} = -\frac{\lambda - (n+1)n}{(n+2)(n+1)}c_n.$$

Valið á fyrstu tveimur stuðlunum er frjálst og við fáum

$$c_2 = -\frac{\lambda}{2\cdot 1}c_0, \quad c_4 = \frac{(\lambda - 3\cdot 2)\lambda}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}c_0, \quad \dots,$$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{(\lambda - (2k-1)(2k-2))(\lambda - (2k-3)(2k-4))\cdots(\lambda - 3\cdot 2)\lambda}{(2k)!}c_0$$

$$c_3 = -\frac{\lambda - 2\cdot 1}{3\cdot 2}c_1, \quad c_5 = \frac{(\lambda - 4\cdot 3)(\lambda - 2\cdot 1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}c_1, \quad \dots,$$

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\lambda - 2k(2k-1))(\lambda - (2k-2)(2k-3))\cdots(\lambda - 2\cdot 1)}{(2k+1)!}c_1.$$

Ef við skrifum $\lambda = \alpha(\alpha+1)$ og notfærum okkur að

$$\alpha(\alpha+1) - n(n+1) = (\alpha - n)(\alpha + n + 1),$$

þá verður rakningarformúlan fyrir röðina

$$c_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}{(n+2)(n+1)}c_n$$

og almenn lausn jöfnunnar verður því

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1},$$
$$a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2k-1)}{(2k)!},$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2k)}{(2k+1)!}.$$

Nú tökum við eftir því að ef α er jöfn heiltala þá eru allir liðir í fyrri summunni með númer $2k \geq \alpha+2$ jafnir núll og fyrri summan er því margliða af stigi α. Ef hins vegar α er oddatala þá er seinni veldaröðin margliða. Við fáum því að fyrir sérhvert n er til margliðulausn á jöfnu Legendre, ef λ er valið sem $\lambda = n(n+1)$. Venja er að skilgreina Legendre–margliðurnar sem þessar lausnir eftir að hafa valið ákveðin gildi á stuðlunum c_0 og c_1. Legendre–margliðurnar koma fyrir í ýmsum útreikningum, meðal annars í rafsegulfræði. Við höfum ekki tök á því að gera þeim nein skil hér. □

Sýnidæmi 8.2.10 (*Jafna Hermite*). Við lítum nú á afleiðujöfnuna $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$ og leysum hana með því að gera ráð fyrir að lausnin sé gefin með veldaröð. Við notum formúlurnar fyrir u'' og xu' úr sýnidæmi 8.2.9. Til einföldunar setjum við $\lambda = 2\alpha$. Það gefur okkur

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + 2\alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(\alpha-n)c_n)x^n.$$

Stuðlarnir verða því að uppfylla

$$c_{n+2} = -\frac{2(\alpha-n)}{(n+2)(n+1)}c_n.$$

Við fáum nú formúlu fyrir lausnina

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1},$$

þar sem stuðlarnir a_k eru gefnir með formúlunum

$$\begin{gathered}
a_0 = a_1 = 1,\\
a_2 = -2\frac{\alpha}{2\cdot 1}, \qquad a_4 = 4\frac{(\alpha-2)\alpha}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, \quad \dots,\\
a_{2k} = (-1)^k 2^k \frac{(\alpha-2k+2)\cdots(\alpha-2)\alpha}{(2k)!},\\
a_3 = -2\frac{(\alpha-1)}{3\cdot 2}, \qquad a_5 = 4\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \quad \dots,\\
a_{2k+1} = (-1)^k 2^k \frac{(\alpha-2k+1)\cdots(\alpha-3)(\alpha-1)}{(2k+1)!}.
\end{gathered}$$

Við sjáum nú að ef α er heiltala > 0 þá fæst lausn sem er margliða. Fyrir ákveðið val á c_0 og c_1 fæst runa af margliðum, en þær nefnast *Hermite–margliður.* □

Sýnidæmi 8.2.11 Við skulum finna almenna lausn á jöfnunni

$$(x^2-1)u'' + 4xu' + 2u = 0,$$

með veldaröðum umhverfis punktinn 0.

Lausn: Við notum formúlurnar í sýnidæmi 8.2.9 og stingum inn í jöfnuna

$$\begin{aligned}
&x^2u'' - u'' + 4xu' + 2u\\
&\quad= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n\\
&\quad= \sum_{n=0}^{\infty}\big[-(n+2)(n+1)c_{n+2} + \big(n(n-1)+4n+2\big)c_n\big]x^n = 0
\end{aligned}$$

Nú athugum við að $n(n-1)+4n+2 = n^2+3n+2 = (n+2)(n+1)$ og þar með er rakningarformúlan

$$c_{n+2} = c_n.$$

Stuðlarnir við öll veldin með sléttu númeri eru þeir sömu og stuðlarnir við veldin með oddatölunúmeri eru einnig þau sömu. Svarið er því

$$u(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = (c_0+c_1x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{c_0+c_1x}{1-x^2}.$$

□

Sýnidæmi 8.2.12 Oft er erfitt að finna beina formúlu fyrir stuðlum á veldaraðalausnum þótt það sé auðvelt að finna rakningarformúlur fyrir stuðlana c_n. Við skulum nú líta á jöfnuna

$$u'' + (1+x)u = 0$$

og líta á almenna lausn $u(x) = \sum_{n0}^{\infty} c_n x^n$. Við getum alltaf skrifað hana sem $u(x) = c_0 u_1(x) + c_1 u_2(x)$. Við skulum ákvarða þrjá fyrstu liðina í veldaröðum u_1 og u_2, sem eru frábrugðnir núlli.

Lausn: Við stingum veldaröð inn í jöfnuna og fáum þá

$$\begin{aligned} u'' + u + xu &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n \\ &= (2c_2 + c_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\big[(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n + c_{n-1}\big]x^n = 0. \end{aligned}$$

Rakningarformúlan verður þá

$$2c_2 + c_0 = 0, \qquad (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n + c_{n-1} = 0.$$

Grunnfallið u_1 er valið þannig að $c_0 = 1$ og $c_1 = 0$. Í framhaldi af því fáum við

$$c_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 0 + 1 = 0, \quad c_3 = -\tfrac{1}{6}.$$

Þar með er

$$u_1(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots .$$

Grunnfallið u_2 er hins vegar valið þannig að $c_0 = 0$ og $c_1 = 1$. Við höfum því

$$\begin{gathered} 2c_2 + 0 = 0, \quad c_2 = 0, \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 1 + 0 = 0, \quad c_3 = -\tfrac{1}{6}, \\ 4 \cdot 3 \cdot c_4 + 0 + 1 = 0, \quad c_4 = -\tfrac{1}{12}, \end{gathered}$$

og þar með er

$$u_2(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{12}x^4 + \cdots .$$

□

8.3 Γ–fallið

Þegar rakningarformúlur eru notaðar til að finna beinar formúlur fyrir stuðlana í raðalausnum afleiðujafna koma endurtekin margfeldi oft fyrir. Þá er þægilegt að grípa til Γ–fallsins, en það er skilgreint með formúlunni

(8.3.1) $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Greinilegt er að fyrir þessi gildi á z er heildið alsamleitið. Athugum nú að hlutheildunin

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^z\,dt = \big[-e^{-t}t^z\big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}zt^{z-1}\,dt = z\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

gefur okkur formúluna

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{8.3.2}$$

og með þrepun fáum við síðan

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z), \qquad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{8.3.3}$$

Þessa formúlu getum við síðan notað til að framlengja skilgreiningarsvæði Γ yfir á mengið

$$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}.$$

Við veljum n það stórt að $\operatorname{Re} z + n > 0$ og notum

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \tag{8.3.4}$$

til að skilgreina $\Gamma(z)$ fyrir z með $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Við getum auðveldlega reiknað út $\Gamma(1)$, því

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1,$$

en formúlan (8.3.3) gefur okkur síðan

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{8.3.5}$$

Niðurstaðan er því sú að Γ er framlenging á fallinu $n \mapsto (n-1)!$ frá mengi náttúrlegra talna $\{1, 2, 3, \dots\}$ yfir á mengið $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

Við getum líka reiknað út $\Gamma(1/2)$, en það er gert með því að skipta fyrst um breytistærð í heildinu

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Síðan athugum við að $\Gamma(1/2)^2$ má skrifa sem tvöfalt heildi

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

Næsta skref er að skipta yfir í pólhnit

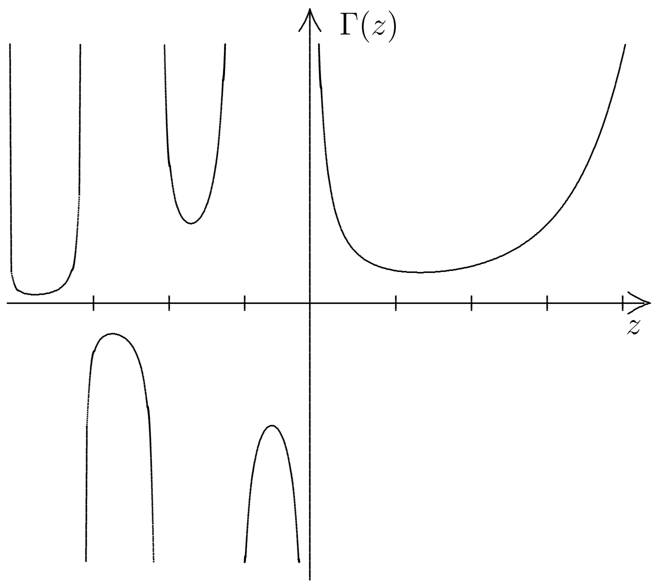
$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, rdrd\theta = \pi \int_0^\infty e^{-r^2}\, 2rdr = \pi \left[-e^{-r^2}\right]_0^\infty = \pi.$$

Við höfum því

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}, \tag{8.3.6}$$

og í framhaldi af því

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots(n-\frac{1}{2})\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}.$$



Mynd: Gamma–fallið.

8.4 Aðferð Frobeniusar

Reglulegir sérstöðupunktar

Í þessari grein ætlum við að líta á raðalausnir á jöfnunni

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \tag{8.4.1}$$

í grennd um sérstöðupunkta. Ef a er sérstöðupunktur, þá kemur í ljós að ekki er alltaf hægt að skrifa lausnirnar sem veldaraðir. Hins vegar er stundum hægt að skrifa þær sem margfeldi af veldaröð og veldisfalli

$$u(x) = |x-a|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{8.4.2}$$

Aðferð Frobeniusar gengur út á að leita að lausn af þessari gerð og ákvarða bæði veldið r og stuðlana c_n út frá veldaröðum stuðlafallanna í afleiðujöfnunni.

Skilgreining 8.4.1 Látum f vera raunfágað fall á opnu mengi X í $\mathbb{R}$. Við segjum að einangraður sérstöðupunktur a raunfágaða fallsins f sé *skaut af stigi* $m > 0$, ef til er $\varrho > 0$ og raunfágað fall g á $\{x; |x-a| < \varrho\}$, þannig að $\{x; 0 < |x-a| < \varrho\} \subset X$, $g(a) \neq 0$ og

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^m} \qquad 0 < |x-a| < \varrho.$$

□

Látum a vera sérstöðupunkt fyrir jöfnuna (8.4.1) og skrifum

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{p(x)}{x-a}, \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{q(x)}{(x-a)^2}. \tag{8.4.3}$$

Skilgreining 8.4.2 Við segjum að a sé *reglulegur sérstöðupunktur* afleiðujöfnunnar (8.4.1), ef a er sérstöðupunktur jöfnunnar, fallið P hefur annað hvort afmáanlegan sérstöðupunkt í a eða skaut af stigi ≤ 1 og Q hefur annað hvort afmáanlegan sérstöðupunkt í a eða skaut af stigi ≤ 2. $\square$

Punkturinn a er reglulegur sérstöðupunktur jöfnunnar (8.4.2) þá og því aðeins að föllin p og q, sem skilgreind eru í (8.4.3), séu bæði fáguð í grennd um a.

Sýnidæmi 8.4.3 (i) Jafna Legendre hefur sérstöðupunktana $a = \pm 1$. Við tökum $a = 1$ fyrir og umskrifum jöfnuna sem

$$u'' - \frac{2x}{1-x^2}u' - \frac{\lambda}{1-x^2}u = u'' + \frac{2x/(1+x)}{x-1}u' - \frac{\lambda(x-1)/(x+1)}{(x-1)^2}u = 0.$$

Hér er því greinilega $p(x) = 2x/(x+1)$ og $q(x) = -\lambda(x-1)/(x+1)$. Bæði þessi föll eru ræð og raunfáguð í grennd um $a = 1$. Þetta gefur okkur að $a = 1$ er reglulegur sérstöðupunktur Legendre-jöfnunnar. Punkturinn $a = -1$ er einnig reglulegur.

(ii) Jafna Bessels hefur einn reglulegan sérstöðupunkt $a = 0$, því jafnan er

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2}u = 0$$

$\square$

Útfærsla á aðferð Forbeniusar

Nú skulum við gera ráð fyrir að við höfum afleiðujöfnu með reglulegan sérstöðupunkt a og að við umritum hana yfir á formið

$$(x-a)^2u'' + (x-a)p(x)u' + q(x)u = 0,$$

þar sem föllin p og q eru sett fram með veldaröðum

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-a)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-a)^n.$$

Við gerum ráð fyrir því að unnt sé að skrifa lausnina sem

$$u(x) = (x-a)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^{n+r}, \qquad a < x < a + \varrho. \tag{8.4.4}$$

Við stingum röðinni inn í jöfnuna og fáum

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-a)^{n+r}+p(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r} \\ +q(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r}=0.$$

Við stingum nú röðunum fyrir p og q inn í jöfnuna og margföldum síðan raðirnar saman

$$p(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+r)p_{n-k}a_k(x-a)^{n+r},$$
$$q(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k(x-a)^{n+r}.$$

Til þess að jafnan gildi, þá þurfa stuðlarnir við öll veldin í liðuninni að vera núll, en það jafngildir

$$(n+r)(n+r-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}\big((k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\big)a_k=0, \qquad n=0,1,2,\dots. \tag{8.4.5}$$

Athugum nú sérstaklega tilfellið $n=0$, en það er jafnan

$$(r(r-1)+p_0r+q_0)a_0=0.$$

Til þess að við getum valið stuðulinn a_0 frjálst, þá þarf talan r að uppfylla annars stigs jöfnuna

$$r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+p(a)r+q(a)=0. \tag{8.4.6}$$

Skilgreining 8.4.4 Gerum ráð fyrir að a sé reglulegur sérstöðupunktur afleiðujöfnunnar

$$(x-a)^2u''+(x-a)p(x)u'+q(x)u=0. \tag{8.4.7}$$

Þá kallast margliðan

$$\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+p(a)\lambda+q(a)$$

vísamargliða afleiðujöfnunnar í punktinum a, jafnan $\varphi(\lambda)=0$ kallast *vísajafna afleiðujöfnunnar í punktinum a*. Núllstöðvar hennar kallast *vísar jöfnunnar í punktinum a*. □

Við höfum sem sagt komist að því í útreikningum okkar, að til þess að fallið $u(x)$ sem gefið er með formúlunni (8.4.4), geti verið lausn á afleiðujöfnunni (8.4.7), þá þarf talan r að vera vísir jöfnunnar í punktinum a. Lítum nú á jöfnuna (8.4.5) aftur, og þá í tilfellinu $n>0$, en hún er

$$\begin{aligned}&(n+r)(n+r-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}\big((k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\big)a_k\\ &=\big((n+r)(n+r-1)+p_0(n+r)+q_0\big)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\big((k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\big)a_k\\ &=\varphi(n+r)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\big((k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\big)a_k=0.\end{aligned}$$

Ef r er vísir jöfnunnar og $\varphi(n+r) \neq 0$ fyrir öll $n > 0$, þá fáum við rakningarformúluna

$$a_n = \frac{-1}{\varphi(r+n)} \sum_{k=0}^{n-1} \big((k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\big)a_k.$$

Við erum nú komin að meginniðurstöðu kaflans:

Setning 8.4.5 (*Frobenius*). *Gerum ráð fyrir því að a sé reglulegur sérstöðupunktur afleiðujöfnunnar*

$$(x-a)^2u'' + (x-a)p(x)u' + q(x)u = 0 \tag{8.4.8}$$

og gerum ráð fyrir að föllin p og q séu sett fram með veldaröðunum

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-a)^n, \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-a)^n, \tag{8.4.9}$$

og að þær séu samleitnar ef $|x-a| < \varrho$. Látum r_1 og r_2 vera núllstöðvar vísajöfnunnar

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + p(a)\lambda + q(a) = 0$$

og gerum ráð fyrir að $\mathrm{Re}\, r_1 \geq \mathrm{Re}\, r_2$. Þá gildir:

(i) Til er lausn u_1 á (8.4.8) sem gefin er með

$$u_1(x) = |x-a|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Röðin er samleitin fyrir öll x sem uppfylla $0 < |x-a| < \varrho$. Valið á a_0 er frjálst, en hinir stuðlar raðarinnar fást með rakningarformúlunni

$$a_n = \frac{-1}{\varphi(n+r_1)} \sum_{k=0}^{n-1} ((k+r_1)p_{n-k} + q_{n-k})a_k, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(ii) Ef $r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, \ldots$, þá er til önnur línulega óháð lausn u_2 á (8.4.8) sem gefin er með

$$u_2(x) = |x-a|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.$$

Röðin er samleitin fyrir öll x sem uppfylla $0 < |x-a| < \varrho$. Valið á b_0 er frjálst, en hinir stuðlar raðarinnar fást með rakningarformúlunni

$$b_n = \frac{-1}{\varphi(n+r_2)} \sum_{k=0}^{n-1} ((k+r_2)p_{n-k} + q_{n-k})b_k, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(iii) Ef $r_1 - r_2 = 0$, þá er til önnur línulega óháð lausn u_2 á (8.4.8) sem gefin er með

$$u_2(x) = |x-a|^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n + u_1(x) \ln|x-a|.$$

Röðin er samleitin fyrir öll x sem uppfylla $0 < |x-a| < \varrho$ og stuðlar raðarinnar fást með innsetningu í jöfnuna.

(iv) Ef $r_1 - r_2 = N$, þar sem N er jákvæð heiltala, þá er til önnur línulega óháð lausn u_2 á (8.4.8) sem gefin er með

$$u_2(x) = |x-a|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n + \gamma u_1(x) \ln |x-a|.$$

Röðin er samleitin fyrir öll x sem uppfylla $0 < |x-a| < \varrho$. Stuðlar raðarinnar og γ fást með innsetningu í jöfnuna. □

Við höfum aðeins sannað lítið brot af setningunni, en látum það duga.

Sýnidæmi 8.4.6 Notið aðferð Frobeniusar til þess að finna almenna lausn á jöfnunni $2xu'' + (1+x)u' + u = 0$.

Lausn: Við byrjum á því að umrita jöfnuna yfir á staðlað form $x^2u''+xp(x)u'+q(x)u = 0$ fyrir aðferð Forbeniusar í þeim tilgangi að finna vísajöfnuna,

$$x^2u'' + x \cdot \tfrac{1}{2}(1+x)u' + \tfrac{1}{2}xu = 0.$$

Á þessu sjáum við að $p(x) = \frac{1}{2}(1+x)$ og $q(x) = \frac{1}{2}x$ og að vísajafnan er

$$\lambda(\lambda-1) + p(0)\lambda + q(0) = \lambda(\lambda-1) + \tfrac{1}{2}\lambda = \lambda(\lambda - \tfrac{1}{2}) = 0.$$

Núllstöðvar hennar eru $r_1 = \frac{1}{2}$ og $r_2 = 0$. Samkvæmt setningu Frobeniusar fáum við því tvær línulega óháðar lausnir u_1 og u_2 af gerðinni

$$u_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} \qquad \text{og} \qquad u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Nú setjum við u_1 inn í jöfnuna

$$\begin{aligned}
&2xu_1'' + (1+x)u_1' + u_1 \\
&\quad = 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) 2n\, a_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{3}{2})\, a_n x^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+\tfrac{3}{2}) 2(n+1)\, a_{n+1} + (n+\tfrac{3}{2})\, a_n \big) x^{n+\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned}$$

Rakningarformúlan sem við fáum út úr síðustu jöfnunni er

$$a_{n+1} = \frac{(-1)}{2(n+1)} a_n$$

og með þrepun fáum við formúluna

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} a_0.$$

Við erum því komin með aðra lausnina

$$u_1(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^n = a_0 \sqrt{x} e^{-x/2}.$$

Við setjum nú u_2 inn í jöfnuna

$$\begin{aligned}
&2xu_2'' + (1+x)u_2' + u_2 \\
&\quad = 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} n(2n-1)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, b_n x^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1)(2n+1)\, b_{n+1} + (n+1)\, b_n\big) x^n = 0.
\end{aligned}$$

Síðasta jafnan gefur okkur rakningarformúluna

$$b_{n+1} = \frac{(-1)}{2n+1} b_n.$$

Við getum valið b_0 frjálst og með þrepun fáum við síðan

$$b_n = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} b_0,$$

og þar með er

$$u_2(x) = b_0 \bigg(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} x^n \bigg).$$

Almenn lausn jöfnunnar er línuleg samantekt af u_1 og u_2. □

Sýnidæmi 8.4.7 Beitum aðferð Frobeniusar til þess að finna almenna lausn

$$3x^2 u'' + 2xu' + x^2 u = 0.$$

Lausn: Hér er $p(x) = \frac{2}{3}$ og $q(x) = \frac{1}{3}x^2$, svo vísajafnan er

$$r(r-1) + \tfrac{2}{3} r = r(r - \tfrac{1}{3}) = 0$$

Núllstöðvar hennar eru $r_1 = \frac{1}{3}$ og $r_2 = 0$. Við erum því með tilfelli (ii) í setningu Frobeniusar og leitum næst að lausn á forminu

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}.$$

Við stingum henni inn í jöfnuna,

$$\begin{aligned}
&3x^2u'' + 2xu' + x^2u \\
&\quad = 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} \\
&\qquad = \big[3r(r-1)+2r\big]c_0x^r + \big[3(r+1)r + 2(r+1)\big]c_1x^{r+1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=2}^{\infty}\big[\big(3(n+r)(n+r-1)+2(n+r)\big)c_n + c_{n-2}\big]x^{n+r} = 0
\end{aligned}$$

Í fyrsta liðnum í hægri hliðinni stendur vísamargliðan, svo við getum valið c_0 frjálst, ef $r = r_1$ eða $r = r_2$, en $c_1 = 0$ verður að gilda til þess að stuðullinn við x^{r+1} sé 0. Rakningarformúlan verður síðan

$$c_n = \frac{-1}{(n+r)(3n+3r-1)}c_{n-2}.$$

Stuðlarnir við veldin með oddatölunúmer verða því 0. Í tilfellinu $r = r_1 = \frac{1}{3}$ fáum við

$$c_{2k} = \frac{-1}{(2k+1/3)6k}c_{2(k-1)} = \frac{-1}{2k(6k+1)}c_{2(k-1)}.$$

Til þess að fá beina formúlu fyrir stuðlana, þá skrifum við

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= c_0 \cdot \frac{c_2}{c_0}\cdot\frac{c_4}{c_2}\cdots\frac{c_{2k}}{c_{2(k-1)}} \\
&= c_0 \cdot \frac{(-1)}{2\cdot 1\cdot 7}\cdot\frac{(-1)}{2\cdot 2\cdot 13}\cdots\frac{(-1)}{2\cdot k\cdot(6k+1)} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!\cdot 7\cdot 13\cdots(6k+1)}.
\end{aligned}$$

Ef við setjum hins vegar $r = 0$ inn í rakningarformúluna, þá fáum við

$$c_{2k} = \frac{-1}{2k(6k-1)}c_{2(k-1)}.$$

og með sömu aðferð og áður fáum við

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= c_0 \cdot \frac{c_2}{c_0}\cdot\frac{c_4}{c_2}\cdots\frac{c_{2k}}{c_{2(k-1)}} \\
&= c_0 \cdot \frac{(-1)}{2\cdot 1\cdot 5}\cdot\frac{(-1)}{2\cdot 2\cdot 11}\cdots\frac{(-1)}{2\cdot k\cdot(6k-1)} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!\cdot 5\cdot 11\cdots(6k-1)}.
\end{aligned}$$

Svarið er því að almenn lausn jöfnunnar er línuleg samantekt fallanna u_1 og u_2 sem gefin eru með formúlunum

$$u_1(x) = x^{1/3}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n+1)}\Big),$$
$$u_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 5 \cdot 11 \cdots (6n-1)}.$$

□

8.5 Bessel–jafnan

Við skulum nú taka fyrir aðferð Frobeniusar til þess að leysa Bessel–jöfnuna

(8.5.1) $$P(x, D)u = x^2u'' + xu' + (x^2 - \alpha^2)u = 0$$

í grennd um reglulega sérstöðupunktinn $a = 0$. Hér er $p(x) = 1$ og $q(x) = x^2 - \alpha^2$, svo vísajafnan er

(8.5.2) $$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - \alpha^2 = \lambda^2 - \alpha^2 = 0$$

og núllstöðvar hennar eru $r_1 = \alpha$ og $r_2 = -\alpha$. Við hugsum okkur að $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$. Setning Frobeniusar segir okkur að við fáum lausn af gerðinni

$$u_1(x) = |x|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

þar sem við getum valið stuðulinn a_0 frjálst og hina stuðlana út frá rakningarformúlunni

$$\varphi(\alpha + 1)a_1 = 0, \qquad \varphi(\alpha + n)a_n = -a_{n-2}.$$

Þar sem $\varphi(\alpha + 1) \neq 0$ þá verður $a_1 = 0$ og í framhaldi af því fæst $0 = a_3 = a_5 = \cdots$. Til þess að finna formúluna fyrir a_{2k} þá athugum við að

$$\varphi(\alpha + 2k) = (\alpha + 2k)^2 - \alpha^2 = 4k\alpha + 4k^2 = 2^2k(\alpha + k),$$

og þar með verður

$$a_2 = \frac{-a_0}{2^2(\alpha + 1)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 2(\alpha + 1)(\alpha + 2)}, \dots$$
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k)}.$$

Athugum nú að

$$(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k) = \Gamma(\alpha + k + 1)/\Gamma(\alpha + 1).$$

Það er því eðlilegt að velja

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Skilgreining 8.5.1 Lausnin á Bessel–jöfnunni $x^2u'' + xu' + (x^2 - \alpha^2)u = 0$, sem gefin er með formúlunni

$$J_\alpha(x) = \left|\frac{x}{2}\right|^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{8.5.3}$$

er kölluð *fall Bessels af fyrstu gerð með vísi* α. □

Nú þurfum við að finna línulega óháða lausn og skiptum í tilfelli:

Tilfellið $\alpha \neq 0, 1, 2 \ldots$**.** Talan $-\alpha$ er vísir Bessel-jöfnunnar og með því að skipta á α og $-\alpha$ í rakningarformúlunum hér að framan, þá fáum við aðra línulega óháða lausn

$$J_{-\alpha}(x) = \left|\frac{x}{2}\right|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{8.5.4}$$

og sérhverja lausn má síðan skrifa sem línulega samantekt af J_α og $J_{-\alpha}$.

Tilfellið $\alpha = 0$**.** Bessel-jafnan í tilfellinu $\alpha = 0$ er jafngild jöfnunni

$$xu'' + u' + xu = 0, \tag{8.5.5}$$

og við erum búin að finna eina lausn á henni

$$u_1(x) = J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

Samkvæmt tilfelli (iii) í setningu Frobeniusar vitum við að til er önnur línulega óháð lausn u_2, sem gefin er á jákvæða raunásnum með formúlu af gerðinni

$$u_2(x) = J_0(x)\ln x + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m. \tag{8.5.6}$$

Við reiknum út afleiðurnar af u_2

$$u_2{}'(x) = J_0{}'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1},$$
$$u_2{}''(x) = J_0{}''(x)\ln x + \frac{2J_0{}'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-2},$$

stingum þeim inn í afleiðujöfnuna (8.5.5) og notfærum okkur að J_0 er lausn á (8.5.5). Þá fáum við

$$2J_0{}'(x) + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0.$$

Til þess að fá formúlu fyrir stuðlana A_m, þá verðum við að stinga röðinni fyrir $J_0{}'$ inn í þessa jöfnu,

$$J_0{}'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{2k-1}k!(k-1)!}$$

og taka summurnar þrjár saman í eina. Við fáum þá jöfnuna

$$A_1 x^0 + 4A_2 x + \sum_{m=2}^{\infty} \big((m+1)^2 A_{m+1} + A_{m-1}\big)x^m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2^{2k-2}k!(k-1)!}.$$

Nú eru allir stuðlarnir í hægri hliðinni við slétt veldi af x jafnir 0 og því fáum við

$$A_1 = 0, \qquad (2k+1)^2 A_{2k+1} + A_{2k-1} = 0.$$

Þessar jöfnur gefa að $A_m = 0$ ef m er oddatala. Snúum okkur nú að A_m þar sem m er slétt tala. Við höfum

$$4A_2 = 1, \qquad (2k)^2 A_{2k} + A_{2k-2} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-2}k!(k-1)!}.$$

Með þrepun fæst síðan formúlan

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(k!)^2} h_k, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$

þar sem $h_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/k$. Við getum því skrifað lausnina sem

$$u_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} h_k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

Það er venja að nota annað fall en u_2 sem grunnfall:

Skilgreining 8.5.2 Fallið Y_0, sem skilgreint er með

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln \frac{|x|}{2} + \gamma \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} h_k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} \right], \tag{8.5.7}$$

þar sem $h_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/k$ og γ táknar fasta Eulers

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{k\to\infty} \big(1 + 1/2 + \cdots + 1/k - \ln k\big) \\ &\approx 0.577\,215\,644\,90\dots, \end{aligned} \tag{8.5.8}$$

nefnist *fall Bessels af annarri gerð með vísi* 0. □

Það er ljóst að föllin J_0 og Y_0 eru línulega óháð, svo sérhverja lausn á Bessel-jöfnunni með vísi $\alpha = 0$ er unnt að skrifa sem línulega samantekt af þeim.

Tilfellið $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. Hér er gengið út frá lausnarformúlunni í tilfelli (iv) í setningu Frobeniusar. Lausnaraðferðin er sú sama og í tilfellinu $\alpha = 0$, en útfærslan er töluvert snúnari og förum við ekki út í hana hér. Niðurstaðan er alla vega sú, að til sögunnar kemur nýtt fall:

Skilgreining 8.5.3 Fallið Y_α, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ sem skilgreint er með

$$Y_\alpha(x) = \frac{2}{\pi}\Bigg[J_\alpha(x)\bigg(\ln\frac{|x|}{2} + \gamma\bigg) + x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\big(h_k + h_{k+\alpha}\big)}{2^{2k+\alpha+1}k!(k+\alpha)!}x^{2k} - x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{(\alpha-k-1)!}{2^{2k-\alpha+1}k!}x^{2k}\Bigg], \tag{8.5.9}$$

þar sem $h_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/k$ og γ táknar fasta Eulers, nefnist *fall Bessels af annarri gerð með vísi α.* $\square$

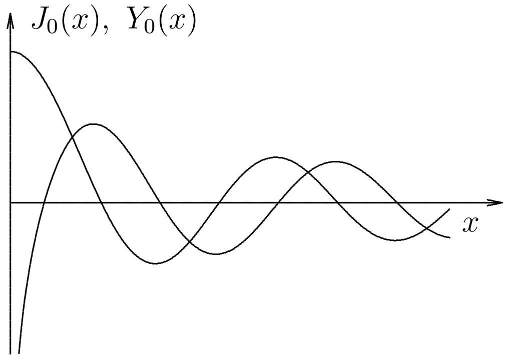
Almenn lausn á Bessel-jöfnunni með vísi α er línuleg samantekt af J_α og Y_α, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. Það er hægt að skilgreina Y_α fyrir önnur gildi á α. Það er gert með formúlunni

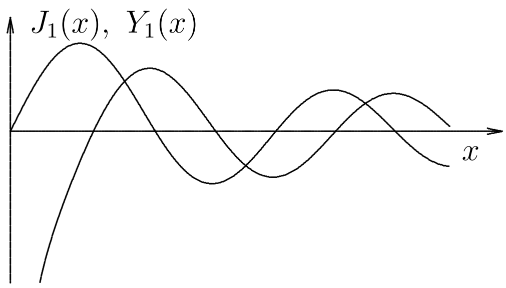
$$Y_\alpha(x) = \frac{1}{\sin\alpha\pi}\left[J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)\right], \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\alpha \geq 0, \alpha \neq 1, 2, 3, \ldots.$$

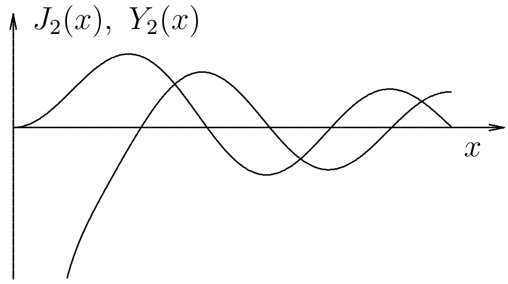
Þá fæst nokkuð merkileg formúla

$$Y_\alpha(x) = \lim_{\beta\to\alpha} Y_\beta(x), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots.$$

Við höldum ekki lengra inn á þessa braut og endum kaflann með gröfum fallanna J_0, Y_0, J_1, Y_1, J_2 og Y_2.







8.6 Æfingardæmi

1. Finnið almenna lausn á jöfnunum, sem gefnar eru með veldaröðum umhverfis punktinn 0. Setjið fram rakningarformúlur fyrir stuðlum raðanna og leysið þá út úr formúlunum. Ákvarðið samleitnigeisla raðanna.

a)$u' + xu = 0$, b) $u'' + xu' + u = 0$,
c) $(2 - x^2)u'' - xu' + 16u = 0$, d) $u'' + xu = 0$,
e) $u'' + x^2u = 0$.

2. Finnið rakningarformúlur fyrir stuðlana c_n í almennri lausn $u(x) = \sum_{n0}^{\infty} c_n x^n$ á eftirtöldum jöfnum. Skrifið lausnina sem $u(x) = c_0u_1(x) + c_1u_2(x)$ og ákvarðið þrjá fyrstu liðina í veldaröðum u_1 og u_2, sem eru frábrugðnir núlli.

a)* $u'' + (1 + x)u = 0$, b) $(x^2 - 1)u'' + 2xu' + 2xu = 0$
c) $u'' + x^2u' + x^2u = 0$, d) $(1 + x^3)u'' + x^4u = 0$.

3. Notið aðferð Frobeniusar til þess að finna almenna lausn á jöfnunum:

a) $3x^2u'' + 2xu' + x^2u = 0$, b) $xu'' + 2u' + 4xu = 0$
c) $x^2u'' - 5xu' + 9u = 0$, d) $xu'' + (1 - 2x)u' + (x - 1)u = 0$,
e) $2xu'' + 3u' - u = 0$, f) $2x^2u'' + xu' - (3 - 2x^2)u = 0$,
g) $3xu'' + 2u' + 2u = 0$, h) $xu'' + u' - xu = 0$.

4. Athugið hvort $a = 0$ er venjulegur punktur, reglulegur sérstöðupunktur eða óreglulegur sérstöðupunktur jafnanna, sem gefnar eru. Ef $a = 0$ er reglulegur sérstöðupunktur, ákvarðið þá vísa jöfnunnar í $a = 0$.

a) $xu'' + (x - x^3)u' + (\sin x)u = 0$,
b) $xu'' + x^2u' + (e^x - 1)u = 0$
c) $x^2u'' + (\cos x)u' + xu = 0$,
d) $3x^3u'' + 2x^2u' + (1 - x^2)u = 0$,
e) $x(1 + x)u'' + 2u' + 3xu = 0$,
f) $x^2(1 - x^2)u'' + 2xu' - 2u = 0$,
g) $x^2u'' + (6\sin x)u' + 6u = 0$,
h) $(6x^2 + 2x^3)u'' + 21xu' + 9(x^2 - 1)u = 0$.

5. Aðferð Frobeniusar getur virkað ef $a = 0$ er óreglulegur sérstöðupunktur eins og þetta dæmi sýnir: Gerum ráð fyrir að A og B séu tvinntölur frábrugðnar 0.

a) Sýnið að til sé lausn á jöfnunni $x^2u'' + Au' + Bu = 0$ af gerðinni $u(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ sem er frábrugðin núllfallinu og að ekki séu til tvær línulega óháðar lausnir af þessari gerð.

b) Sýnið að niðurstaðan í a) gildi einnig um jöfnuna $x^3u'' + Axu' + Bu = 0$.

c) Sýnið að jafnan $x^3u''+Ax^2u'+Bu = 0$ hafi enga lausn af gerðinni $u(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, sem er frábrugðin núllfallinu.

6. Beitið aðferð Frobeniusar til þess að sýna að $u_1(x) = x$ sé lausn á jöfnunni $x^3u'' - xu' + u = 0$ og beitið aðferðinni um lækkun á stigi til þess að sýna að $u_2(x) = xe^{-1/x}$ sé einnig lausn. Er hægt að setja $u_2(x)$ fram með Frobeniusar-röð?

7. Sýnið að fyrir sérhvert α með $\operatorname{Re}\alpha > 0$ gildi:

a) $\dfrac{d}{dx}\big(x^\alpha J_\alpha(x)\big) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$,

b) $\dfrac{d}{dx}\big(x^{-\alpha} J_\alpha(x)\big) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$.

8. Notið niðurstöðuna úr dæmi 7 til þess að sýna að J_α hafi núllstöð milli sérhverra tveggja núllstöðva $J_{\alpha+1}$ og að $J_{\alpha+1}$ hafi núllstöð milli sérhverra tveggja núllstöðva J_α. [*Leiðbeining:* Beitið Rolle-setningunni.]

9. a) Notið niðurstöðuna úr dæmi 7 til þess að sýna að

$$\frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) + J_\alpha{}'(x) = J_{\alpha-1}(x) \qquad \text{og} \qquad \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) - J_\alpha{}'(x) = J_{\alpha+1}(x).$$

b) Notið a)-lið til þess að sanna rakningarformúlurnar

$$J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x) \qquad \text{og} \qquad J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J_\alpha{}'(x).$$

10. Sýnið að

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \qquad \text{og} \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

11. Notið niðurstöðuna úr dæmum 9 og 10 til þess að sýna að

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \qquad \text{og} \qquad J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right).$$

12. Látum u og v vera tvö föll á jákvæða raunásnum, $v(x) = x^{\frac{1}{2}} u(x)$. Sýnið að

$$v'' + \left(1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right) v = 0$$

þá og því aðeins að u sé lausn á Bessel-jöfnunni með vísi α. Athugið að í tilfellinu $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, þá verður þessi jafna að $v'' + v = 0$ og þar með er $v(x) = A \sin x + B \cos x$. Notið þetta til þess að leysa dæmi 10.

13. Látum u og v vera tvö föll á jákvæða raunásnum, $v(x) = x^{\frac{1}{2}} u(ax^b)$. Sýnið að v uppfylli

$$x^2 v'' + \left(a^2 b^2 x^{2b} + \tfrac{1}{4} - \alpha^2 b^2\right) v = 0$$

þá og því aðeins að u sé lausn á Bessel-jöfnunni af röð α.

14. Notið niðurstöðuna úr dæmi 13 til þess að tjá almennar lausnir á eftirtöldum jöfnum með Bessel-föllum:

a) $u'' + xu = 0$, b) $u'' + x^2 u = 0$,
c) $u'' + x^m u = 0$, d) $x^2 u'' + \left(x^4 + \frac{1}{8}\right) u = 0$.

Kafli 9

LÍNULEG AFLEIÐUJÖFNUHNEPPI

Samantekt. Fram til þessa höfum við eingöngu fjallað um aðferðir til þess að leysa venjulegar afleiðujöfnur. Nú er komið að því að fást við venjuleg línuleg afleiðujöfnuhneppi. Við byrjum á því að taka fyrir tilvist á lausnum. Síðan skilgreinum við grunnfylki, en dálkar þeirra mynda grunn í núllrúmi hneppisins. Það sem eftir er kaflans fer síðan í að reikna út grunnfylki með ýmsum aðferðum.

9.1 Tilvist og ótvíræðni lausna

Viðfangsefni þessa kafla eru línuleg afleiðujöfnuhneppi af gerðinni

(9.1.1)
$$u' = A(t)u + f(t),$$

þar sem $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ er fylkjafall og $f \in C(I, \mathbb{C}^m)$ er vigurfall sem er skilgreint á opnu bili I á $\mathbb{R}$. Ef við skrifum upp hnitin þá verður hneppið

$$\begin{aligned}
{u_1}' &= a_{11}(t)u_1 + \cdots + a_{1m}(t)u_m + f_1(t),\\
{u_2}' &= a_{21}(t)u_1 + \cdots + a_{2m}(t)u_m + f_2(t),\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
{u_m}' &= a_{m1}(t)u_1 + \cdots + a_{mm}(t)u_m + f_m(t).
\end{aligned}$$

Hneppið er sagt vera *óhliðrað* ef fallið f er núllfallið, en *hliðrað* annars. Samkvæmt fylgisetningu 6.7.6 hefur upphafsgildisverkefnið

(9.1.2)
$$u' = A(t)u + f(t), \qquad u(a) = b,$$

ótvírætt ákvarðaða lausn, þar sem a er einhver gefinn punktur í I og b er einhver gefinn vigur í $\mathbb{C}^m$.

Skilgreining 9.1.1 Línulega rúmið, sem samanstendur af öllum lausnum á óhliðruðu jöfnunni $u' = A(t)u$, kallast *núllrúm* línulega jöfnuhneppisins (9.1.1). Við táknum það með $\mathcal{N}(A)$. □

Setning 9.1.2 *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil og $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$. Þá hefur núllrúmið $\mathcal{N}(A)$ víddina m.* □

Sönnun: Sönnunin er nánast eins og sönnunin á setningu 7.1.3. Við látum $a \in I$ vera fastan punkt og skilgreinum línulegu vörpunina T með

$$T : \mathcal{N}(A) \to \mathbb{C}^m, \qquad T(u) = (u_1(a), \dots, u_m(a))$$

Fylgisetning 6.7.6 gefur að T er gagntæk og þar með er vídd $\mathcal{N}(\mathcal{A}) =$ vídd $\mathbb{C}^m$.

■

Við athugum nú að ef v og w eru tvær lausnir á hliðruðu jöfnunni $u' = A(t)u + f(t)$, þá er mismunurinn $v - w$ í núllrúminu, því

$$(v - w)' = v' - w' = A(t)v + f(t) - A(t)w - f(t) = A(t)(v - w).$$

Þetta gefur okkur því:

Setning 9.1.3 *Látum I vera bil á rauntalnaásnum, $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og $f \in C(I, \mathbb{C}^m)$. Þá er sérhver lausn á $u' = A(t)u + f(t)$ af gerðinni*

$$u(t) = c_1u_1(t) + \cdots + c_mu_m(t) + u_p(t),$$

þar sem $u_1, \dots, u_m$ er einhver grunnur í $\mathcal{N}(A)$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ og u_p er einhver lausn á hliðruðu jöfnunni. □

Jöfnur af hærri stigum og jafngild hneppi

Í grein 6.3 sáum við að línuleg m–ta stigs afleiðujafna

$$P(t, D)v = v^{(m)} + a_{m-1}(t)v^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)v' + a_0(t)v = g(t), \qquad t \in I, \tag{9.1.3}$$

er jafngild hneppinu

$$\begin{aligned} &{u_1}' = u_2, \quad {u_2}' = u_3, \quad \dots, \quad {u_{m-1}}' = u_m \\ &{u_m}' = -a_0(t)u_1 - a_1(t)u_2 - \cdots - a_{m-1}(t)u_m + g(t). \end{aligned} \tag{9.1.4}$$

í þeim skilningi að v er lausn á (9.1.3) þá og því aðeins að $u = [v, v', \dots, v^{(m-1)}]^t$ sé lausn á (9.1.4). Fylkið $A(t)$ og vigurinn $f(t)$ verða í þessu tilfelli

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{m-1}(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}. \tag{9.1.5}$$

Setning 9.1.4 *Látum $P(t, D) = D^m + a_{m-1}(t)D^{m-1} + \cdots + a_1(t)D + a_0(t)$ vera línulegan afleiðuvirkja og skilgreinum $A(t)$ sem fylkið í (9.1.5). Þá er*

$$\det(\lambda I - A(t)) = P(t, \lambda),$$

þ.e.a.s. kennimargliða fylkisins $A(t)$ er kennimargliða virkjans $P(t, D)$. □

Sönnun: Við sönnum þetta með þrepun á stiginu m og byrjum á tilfellinu $m = 2$.

$$\det(\lambda I - A(t)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_0(t) & \lambda + a_1(t) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + a_1(t)) + a_0(t) = P(t, \lambda).$$

Nú gerum við ráð fyrir því að formúlan gildi um alla virkja af stigi $m - 1$. Þá fáum við með liðun eftir fyrsta dálki

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A(t)) = \lambda &\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \dots & a_{m-2}(t) & \lambda + a_{m-1}(t) \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{m+1} a_0(t) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda\big(\lambda^{m-1} + a_{m-1}(t)\lambda^{m-2} + \cdots + a_2(t)\lambda + a_1(t)\big) \\ &+ (-1)^{m+1} a_0(t)(-1)^{m-1} \\ &= P(t, \lambda). \end{aligned}$$

■

9.2 Hneppi með fastastuðla

Nú ætlum við að byrja á því að reikna út lausnir á línulegum afleiðujöfnuhneppum. Við lítum á óhliðrað línulegt jöfnuhneppi $u' = Au$ og gerum ráð fyrir að stuðlarnir í fylkinu A séu fastaföll.

Hjálparsetning 9.2.1 *Látum A vera $m \times m$ fylki og ε vera eiginvigur þess með tilliti til eigingildisins λ. Þá uppfyllir vigurfallið $u(t) = e^{\lambda t}\varepsilon$ jöfnuna $u' = Au$.*

□

Sönnun: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}\varepsilon = e^{\lambda t}(\lambda\varepsilon) = e^{\lambda t}A\varepsilon = A(e^{\lambda t}\varepsilon) = Au$. ■

Þessi einfalda hjálparsetning gefur okkur að í því tilfelli að hægt er að liða b og $f(t)$ í línulegar samantektir af eiginvigrunum, þá leysist jöfnuhneppið (9.1.1) upp í óháðar jöfnur:

Setning 9.2.2 *Látum A vera $m \times m$ fylki og gerum ráð fyrir að $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$ séu eiginvigrar þess með tilliti til eigingildanna $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$. Ef $a \in I$, $b \in \mathbb{C}^m$ og unnt er að skrifa $b = \beta_1\varepsilon_1 + \cdots + \beta_\ell\varepsilon_\ell$ og $f(t) = g_1(t)\varepsilon_1 + \cdots + g_\ell(t)\varepsilon_\ell$, þá er lausnin á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = Au + f(t), \qquad u(a) = b,$$

gefin með $u(t) = v_1(t)\varepsilon_1 + \cdots + v_\ell(t)\varepsilon_\ell$, þar sem stuðullinn v_j uppfyllir

$$v_j{}'(t) = \lambda_j v_j(t) + g_j(t), \qquad v_j(a) = \beta_j, \tag{9.2.1}$$

og er þar með

$$v_j(t) = \beta_j e^{\lambda_j(t-a)} + e^{\lambda_j t}\int_a^t e^{-\lambda_j\tau} g_j(\tau)\, d\tau. \tag{9.2.2}$$

□

Sönnun: Við þurfum ekki að gera neitt annað en að staðfesta að þetta gildi, en það er beinn reikningur

$$\begin{aligned}
u'(t) &= v_1{}'(t)\varepsilon_1 + \cdots + v_\ell{}'(t)\varepsilon_\ell \\
&= \big(\lambda_1 v_1(t) + g_1(t)\big)\varepsilon_1 + \cdots + \big(\lambda_\ell v_\ell(t) + g_\ell(t)\big)\varepsilon_\ell \\
&= (v_1(t)\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + v_\ell(t)\lambda_\ell\varepsilon_\ell) + (g_1(t)\varepsilon_1 + \cdots + g_\ell(t)\varepsilon_\ell) \\
&= (v_1(t)A\varepsilon_1 + \cdots + v_\ell(t)A\varepsilon_\ell) + f(t) \\
&= A(v_1(t)\varepsilon_1 + \cdots + v_\ell(t)\varepsilon_\ell) + f(t) \\
&= Au(t) + f(t).
\end{aligned}$$

■

Sýnidæmi 9.2.3 Finnum eigingildi og eiginvigra fylkisins $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og notum þau til þess að finna almenna lausn á jöfnuhneppinu $u' = Au$. Ákvörðum síðan lausnina sem uppfyllir $u(0) = b$, þar sem $b = [1, 0]^t$.

Lausn: Kennimargliðan er

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1.$$

Eigingildin eru $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ og $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Eiginvigrana reiknum við út úr

$$\begin{aligned}
((3 - 2\sqrt{2})I - A)\varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} -2 - 2\sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}, \\
((3 + 2\sqrt{2})I - A)\varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} -2 + 2\sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Samkvæmt setningu 9.2.2 er almenn lausn

$$u(t) = \beta_1 e^{(3-2\sqrt{2})t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} + \beta_2 e^{(3+2\sqrt{2})t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Við þurfum næst að finna hnit vigursins $b = [1, 0]^t$ miðað við eiginvigragrunninn ε_1 og ε_2. Til þess þurfum við að leysa jöfnuhneppi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ -1-\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Svarið er því

$$u(t) = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{(3-2\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} - \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{(3+2\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

□

Sýnidæmi 9.2.4 Reiknið út sérlausn á hneppinu $u' = Au + f(t)$, þar sem A táknar fylkið úr síðasta sýnidæmi og $f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lausn: Samkvæmt setningu 9.2.2 er almenn lausn hliðruðu jöfnunnar $u' = Au + f(t)$ gefin með formúlunni $u(t) = v_1(t)\varepsilon_1 + v_2(t)\varepsilon_2$, þar sem

$$v_j(t) = \beta_j e^{\lambda_j t} + e^{\lambda_j t} \int_0^t e^{-\lambda_j \tau} g_j(\tau)\, d\tau,$$

eigingildin eru $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ og $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ og tilsvarandi eiginvigrar eru $\varepsilon_1 = [-1, 1 + \sqrt{2}]^t$ og $\varepsilon_2 = [-1, 1 - \sqrt{2}]^t$. Hnit fallsins f miðað við eiginvigrana ε_1 og ε_2 táknum við með (g_1, g_2). Við byrjum á því að ákvarða þau,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Þar með er

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \beta_1 e^{(3-2\sqrt{2})t} + e^{(3-2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{(-3+2\sqrt{2})\tau} \cdot \tfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^\tau\, d\tau \\
&= \beta_1 e^{(3-2\sqrt{2})t} + e^{(3-2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{-2(1-\sqrt{2})\tau} \tfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, d\tau \\
&= \big(\beta_1 + \tfrac{1}{4\sqrt{2}}\big) e^{(3-2\sqrt{2})t} - \tfrac{1}{4\sqrt{2}} e^t, \\
v_2(t) &= \beta_2 e^{(3+2\sqrt{2})t} + e^{(3+2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{(-3-2\sqrt{2})\tau} \cdot \tfrac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^\tau\, d\tau \\
&= \beta_2 e^{(3+2\sqrt{2})t} + e^{(3+2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{-2(1+\sqrt{2})\tau} \tfrac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, d\tau \\
&= \big(\beta_1 - \tfrac{1}{4\sqrt{2}}\big) e^{(3+2\sqrt{2})t} + \tfrac{1}{4\sqrt{2}} e^t,
\end{aligned}$$

Sem sérlausn getum við því tekið

$$u_p(t) = -\frac{e^t}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{bmatrix} + \frac{e^t}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2}e^t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

$\square$

Sýnidæmi 9.2.5 Reiknum út eigingildi og eiginvigra fylkisins

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\\4 & -4 & 5\end{bmatrix},$$

finnum síðan almenna lausn hneppisins $u' = Au$ og að lokum lausnina sem uppfyllir $u(0) = b$ með $b = [-1, 0, 0]^t$.

Lausn: Kennijafnan er:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 1\\-1 & \lambda & -1\\-4 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\4 & \lambda-5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & 1\\4 & \lambda-5\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}-2 & 1\\\lambda & -1\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)[\lambda(\lambda-5)+4] + [-2(\lambda-5)-4] - 4[2-\lambda]\\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4) + 2(\lambda-2)\\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).\end{aligned}$$

Eigingildin eru því $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$. Við ákvörðum nú eiginvigrana með því að leysa jöfnurnar

$$\begin{aligned}(I-A)\varepsilon_1 &= \begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\-1 & 1 & -1\\-4 & 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\\
(2I-A)\varepsilon_2 &= \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 2 & -1\\-4 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix},\\
(3I-A)\varepsilon_3 &= \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\-1 & 3 & -1\\-4 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Almenn lausn er því

$$u(t) = \beta_1 e^t\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} + \beta_2 e^{2t}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix} + \beta_3 e^{3t}\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}.$$

Nú þurfum við að ákvarða hnit b miðað við eiginvigragrunninn. Við táknum þau með $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ og þurfum að leysa þau út úr hneppinu

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Með Gauss-eyðingu fáum við $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 1, -1)$ og svarið er því

$$u(t) = e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

□

Úrlausn með gefinn eiginvigragrunn

Nú skulum við gera ráð fyrir því að fylkið A hafi eiginvigragrunn $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ með eigingildin $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Þá getum við þáttað fylkið A í

$$A = T\Lambda T^{-1}, \tag{9.2.3}$$

þar sem eiginvigrarnir eru dálkar fylkisins T og $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ er hornalínufylki með tilsvarandi eigingildi á hornalínunni,

$$T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{m1} & \varepsilon_{m2} & \dots & \varepsilon_{mm} \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Hér skrifum við $\varepsilon_j = [\varepsilon_{1j}, \dots, \varepsilon_{mj}]^t$. Hér mikilvægt að minnast þess að ef b er vigur í $\mathbb{C}^m$, þá eru hnit hans $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^t$ miðað við grunninn $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ gefin með jöfnunni $\beta = T^{-1}b$.

Nú skulum við skoða aftur lausnina á upphafsgildisverkefninu 9.1.2. Við látum $v(t) = [v_1(t), \dots, v_m(t)]^t$ vera hnit $u(t)$, $g(t) = [g_1(t), \dots, g_m(t)]^t$ vera hnit $f(t)$ og $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^t$ vera hnit b miðað við grunninn $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$, þ.e. $v = T^{-1}u$, $g = T^{-1}f$ og $\beta = T^{-1}b$. Við reiknum nú afleiðuna af v og notum (9.2.3)

$$\begin{gathered} v' = T^{-1}u' = T^{-1}(Au + f(t)) = T^{-1}T\Lambda T^{-1}u + T^{-1}f(t) = \Lambda v + g(t), \qquad t \in I, \\ v(a) = T^{-1}u(a) = T^{-1}b = \beta \end{gathered}$$

Nú er $\Lambda v = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_m v_m)$, svo við höfum fengið upphafsgildisverkefni fyrir v, sem sett er fram með jöfnunum (9.2.1) og þar með er lausnin gefin með (9.2.2).

Nú skulum við líta á þessa formúlu ögn nánar. Við skilgreinum fylkjafallið

$$\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix},$$

og athugum síðan að $T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t})$ hefur dálkana $e^{\lambda_1 t}\varepsilon_1, \dots, e^{\lambda_m t}\varepsilon_m$ og því er

$$\beta_1 e^{\lambda_1(t-a)}\varepsilon_1 + \dots + \beta_m e^{\lambda_m(t-a)}\varepsilon_m = T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1(t-a)}, \dots, e^{\lambda_m(t-a)})\beta,$$
$$e^{\lambda_1(t-\tau)}g_1(\tau)\varepsilon_1 + \dots + e^{\lambda_m(t-\tau)}g_m(\tau)\varepsilon_m = T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1(t-\tau)}, \dots, e^{\lambda_m(t-\tau)})g(\tau).$$

Nú er $\beta = T^{-1}b$ og $g(\tau) = T^{-1}f(\tau)$, svo við fáum umritaða framsetningu á setningu 9.2.2:

Setning 9.2.6 *Látum A vera $m \times m$ fylki og gerum ráð fyrir að hægt sé að þátta A í $A = T\Lambda T^{-1}$ þar sem Λ er hornalínufylki með hornalínustökin $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Látum I vera bil á $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f \in C(I, \mathbb{C}^m)$ og $b \in \mathbb{C}^m$. Þá hefur upphafsgildisverkefnið*

$$u' = Au + f(t), \qquad u(a) = b$$

ótvírætt ákvarðaða lausn á I, sem gefin er með formúlunni

$$\begin{aligned} u(t) &= T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1(t-a)}, \dots, e^{\lambda_m(t-a)})T^{-1}b \\ &\quad + \int_a^t T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1(t-\tau)}, \dots, e^{\lambda_m(t-\tau)})T^{-1}f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

□

Þessi setning segir ekkert meira en setning 9.2.2 og hana höfum við sannað. Við skulum engu að síður staðfesta að þetta sé lausn á upphafsgildisverkefninu. Athugum fyrst að

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} \\ &= \Lambda\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}). \end{aligned}$$

Ef við notum þessa formúlu, þá fáum við

$$\begin{aligned} u'(t) &= T\Lambda\operatorname{diag}(e^{\lambda_1(t-a)}, \dots, e^{\lambda_m(t-a)})T^{-1}b \\ &\qquad + \int_a^t T\Lambda\operatorname{diag}(e^{\lambda_1(t-\tau)}, \dots, e^{\lambda_m(t-\tau)})T^{-1}f(\tau)\, d\tau + TT^{-1}f(t). \end{aligned}$$

Nú notum við formúluna $T\Lambda = T\Lambda T^{-1}T = AT$ og fáum

$$u'(t) = A\biggl(T\mathrm{diag}(e^{\lambda_1(t-a)}, \dots, e^{\lambda_m(t-a)})T^{-1}b + \int_a^t T\mathrm{diag}(e^{\lambda_1(t-\tau)}, \dots, e^{\lambda_m(t-\tau)})T^{-1}f(\tau)\,d\tau\biggr) + f(t) = Au(t) + f(t).$$

Sýnidæmi 9.2.7 Leysum verkefnið

$$\begin{aligned} {u_1}' &= 4u_1 + 2u_2 + \cos t, \qquad & u_1(0) &= 1,\\ {u_2}' &= 3u_1 - u_2 + \sin t, \qquad & u_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

Stuðlafylkið er $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Eigingildi þess reiknum við út úr kennijöfnunni

$$\begin{aligned} \det\bigl(\lambda I - A\bigr) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 5), \qquad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5. \end{aligned}$$

Eiginvigrana reiknum við út úr jöfnunum

$$\begin{aligned} \bigl(-2I - A\bigr)\varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \\ \bigl(5I - A\bigr)\varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hnitunum miðað við eiginvigragrunninn er lýst með

$$\begin{aligned} T = \bigl[\varepsilon_1, \varepsilon_2\bigr] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \\ \beta = T^{-1}b &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}, \\ g(t) = T^{-1}f(t) &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} \cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Svarið verður því

$$\begin{aligned} u(t) &= \Bigl(\tfrac{-3}{7}e^{-2t} + e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\bigl(\tfrac{1}{7}\cos\tau - \tfrac{2}{7}\sin\tau\bigr)\,d\tau\Bigr)\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &+ \Bigl(\tfrac{5}{7}e^{5t} + e^{5t}\int_0^t e^{-5\tau}\bigl(\tfrac{3}{7}\cos\tau + \tfrac{1}{7}\sin\tau\bigr)\,d\tau\Bigr)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Annars stigs hneppi

Aðferðinni sem við höfum verið að lýsa er oft hægt að beita á annars stigs hneppi, til að leysa upphafsgildisverkefni af gerðinni

$$u'' = Au + f(t), \qquad u(a) = b, \quad u'(a) = c, \tag{9.2.4}$$

í því tilfelli að hægt er að skrifa

$$b = \beta_1\varepsilon_1 + \cdots + \beta_\ell\varepsilon_\ell, \quad c = \gamma_1\varepsilon_1 + \cdots + \gamma_\ell\varepsilon_\ell, \quad f(t) = g_1(t)\varepsilon_1 + \cdots + g_\ell(t)\varepsilon_\ell.$$

Lausnin verður þá einfaldlega af gerðinni

$$u(t) = v_1(t)\varepsilon_1 + \cdots + v_\ell(t)\varepsilon_\ell, \tag{9.2.5}$$

þar sem v_j er lausnin á upphafsgildisverkefninu

$${v_j}'' = \lambda_j v_j + g_j(t), \qquad v_j(a) = \beta_j, \quad {v_j}'(a) = \gamma_j. \tag{9.2.6}$$

Þessi formúla er staðfest með beinum útreikningi. Ef við gerum ráð fyrir því að öll eigingildin séu neikvæð $\lambda_j = -\omega_j^2$, þá notfærum við okkur að $\cos\omega_j t$ og $\sin\omega_j t$ er lausnargrunnur fyrir óhliðruðu jöfnuna og $\sin(\omega_j(t-\tau))/\omega_j$ er Green–fall virkjans. Þar með er lausnin

$$v_j(t) = \beta_j\cos(\omega_j(t-a)) + (\gamma_j/\omega_j)\sin(\omega_j(t-a)) + \int_a^t \frac{\sin(\omega_j(t-\tau))}{\omega_j} g_j(\tau)\, d\tau. \tag{9.2.7}$$

Í því tilfelli að hneppið (9.2.4) er hreyfijöfnur einhvers eðlisfræðilegs kerfis, þá kallast liðirnir $v_j(t)\varepsilon_j$ í lausnarformúlunni (9.2.5) *sveifluhættir* kerfisins. Þeir eru innbyrðis óháðir eins og jöfnur (9.2.6). Í því tilfelli að lausnin verður eins og í (9.2.7), þá nefnist ω_j *tíðni sveifluháttarins* $v_j(t)\varepsilon_j$.

Sýnidæmi 9.2.8 (*Festi; framhald*). Í sýnidæmi 6.3.2 leiddum við út hreyfijöfnur fyrir festi með n eins kúlum. Í tilfellinu $n = 2$ er þetta hneppi

$$u'' = Au, \quad A = -\omega^2 B, \quad \omega = \sqrt{6}\, c/L, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{9.2.8}$$

Hér höfum við skrifað $c = \sqrt{T/\varrho}$ eins og í sýnidæmi 6.3.2. Eigingildi fylkisins A eru $\lambda_1 = -\omega^2\mu_1$ og $\lambda_2 = -\omega^2\mu_2$, þar sem μ_1 og μ_2 eru eigingildi fylkisins B. Kennimargliða B er

$$\det(\mu I - B) = \begin{vmatrix} \mu - 2 & 1 \\ 1 & \mu - 2 \end{vmatrix} = (\mu-2)^2 - 1 = (\mu-1)(\mu-3).$$

Þar með eru eigingildin

$$\mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = 3.$$

Auðvelt er að finna eiginvigrana

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

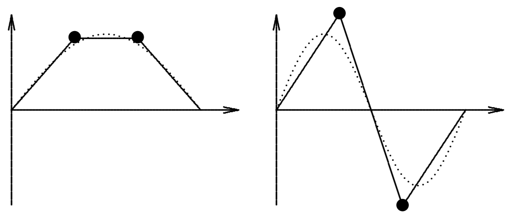
Tíðnir sveifluháttanna eru

$$\omega_1 = \omega\sqrt{\mu_1} = \sqrt{6}\, c/L, \qquad \omega_2 = \omega\sqrt{\mu_2} = 3\sqrt{2}\, c/L.$$

Almenn lausn hneppisins er þar með fengin

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{9.2.9}$$

Myndin sýnir sveifluhætti festarinnar og til samanburðar höfum við teiknað upp föllin $\sin(n\pi x/L)$ og $\sin(2n\pi x/L)$. Þegar fengist er við Fourier-raðir kemur í ljós hvers vegna sá samanburður er áhugaverður.



Mynd: Sveifluhættir festar

Nú fjölgum við perlunum í festinni um eina. Þá fáum við 3×3 jöfnuhneppi í (9.2.8) með

$$\omega = 2\sqrt{3}\, c/L, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nú verða eigingildi A af gerðinni $\lambda_j = -\omega^2 \mu_j$, þar sem μ_j, $j = 1, 2, 3$, eru eigingildi fylkisins B. Kennimargliðan er

$$\begin{aligned} \det(\mu I - B) &= \begin{vmatrix} \mu - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \mu - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \mu - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\mu - 2) \begin{vmatrix} \mu - 2 & 1 \\ 1 & \mu - 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mu - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\mu - 2)\big((\mu - 2)^2 - 1\big) - (\mu - 2) \\ &= (\mu - (2 - \sqrt{2}))(\mu - 2)(\mu - (2 + \sqrt{2})) \end{aligned}$$

Við getum nú lesið út eigingildin

$$\mu_1 = 2 - \sqrt{2}, \qquad \mu_2 = 2, \qquad \mu_3 = 2 + \sqrt{2}.$$

Það er auðveldur útreikningur að finna eiginvigrana

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

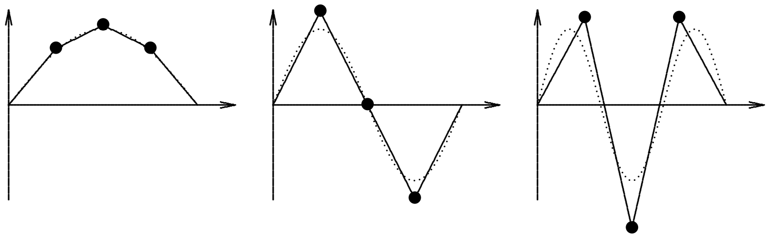
Tíðnir sveifluháttanna eru

$$\omega_1 = 2\sqrt{3(2-\sqrt{2})}\,c/L, \quad \omega_2 = 2\sqrt{6}\,c/L, \quad \omega_3 = 2\sqrt{3(2+\sqrt{2})}\,c/L.$$

Almenn lausn hneppisins er þar með fengin

$$(9.2.10)\quad u(t) = c_1\cos(\omega_1 t - \alpha_1)\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix} + c_2\cos(\omega_2 t - \alpha_2)\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + c_3\cos(\omega_3 t - \alpha_3)\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}.$$

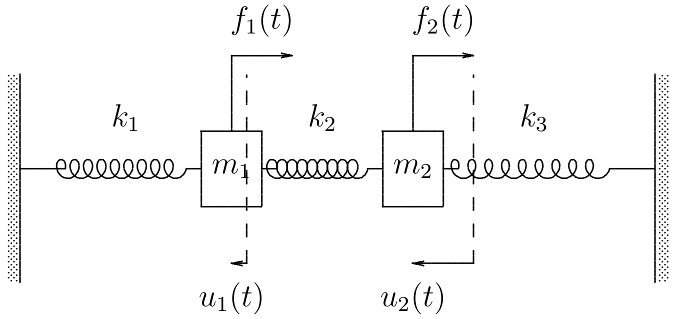
Myndin sýnir sveifluhætti festarinnar í þessu tilfelli



Mynd: Sveifluhættir festar með þremur mössum

□

Sýnidæmi 9.2.9 (*Tengdir gormar; framhald*). Í sýnidæmi 1.3.3 leiddum við út hreyfijöfnur fyrir tengda gorma.



Mynd:Tengdir gormar.

Jöfnuhneppið sem við fengum fyrir $n = 2$ er

$$u'' = Au + f(t), \qquad A = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2)/m_1 & k_2/m_1 \\ k_2/m_2 & -(k_2+k_3)/m_2 \end{bmatrix}.$$

Til einföldunar skulum við nú gera ráð fyrir að $m_1 = m_2 = m$ og $k_1 = k_3 = k$ og setjum $\kappa = k_2/k$. Þá einfaldast fylkið verulega,

$$A = -\frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1+\kappa & -\kappa \\ -\kappa & 1+\kappa \end{bmatrix}.$$

Eigingildin eru $\lambda_1 = -(k/m)\mu_1$ og $\lambda_2 = -(k/m)\mu_2$ þar sem μ_1 og μ_2 eru eigingildi fylkisins

$$B = \begin{bmatrix} 1+\kappa & -\kappa \\ -\kappa & 1+\kappa \end{bmatrix}.$$

Við reiknum eigingildin út í snatri,

$$\det\big(\mu I - B\big) = \begin{bmatrix}\mu-1-\kappa & \kappa\\ \kappa & \mu-1-\kappa\end{bmatrix} = (\mu-1-\kappa)^2-\kappa^2$$
$$= (\mu-1)(\mu-1-2\kappa), \qquad \mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = 1+2\kappa,$$

og síðan eiginvigrana

$$\big(1I-B\big)\varepsilon_1 = \begin{bmatrix}-\kappa & \kappa\\ \kappa & -\kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$
$$\big((1+2\kappa)I-B\big)\varepsilon_2 = \begin{bmatrix}\kappa & \kappa\\ \kappa & \kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Fylkið sem lýsir hnitaskiptunum er því

$$T = \big[\varepsilon_1, \varepsilon_2\big] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}.$$

Ef nú upphafsskilyrðin eru gefin með $u(0) = b$ og $u'(0) = c$, þá fáum við vigrana

$$\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}b_1+b_2\\ b_1-b_2\end{bmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1+c_2\\ c_1-c_2\end{bmatrix}, \qquad g(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}f_1(t)+f_2(t)\\ f_1(t)-f_2(t)\end{bmatrix}.$$

Tíðnir sveifluháttanna eru

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(1+2\kappa)} = \sqrt{\frac{k_1+2k_2}{m}}.$$

□

9.3 Grunnfylki

Lítum á óhliðrað línulegt afleiðujöfnuhneppi

$$u' = A(t)u, \qquad t \in I,$$

þar sem $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$, $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1}^m$. Mengi allra lausna myndar línulegt rúm og í setningu 9.1.2 sýndum við fram á að það hefur víddina m. Við skulum nú sanna eina mikilvæga afleiðingu af tilvistarsetningunni 6.7.6:

Hjálparsetning 9.3.1 *Látum $u_1, \dots, u_m$ vera föll í $\mathcal{N}(A)$. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:*
(i) Vigurföllin $u_1, \dots, u_m$ eru línulega óháð á bilinu I.
(ii) Vigrarnir $u_1(t), \dots, u_m(t)$ eru línulega óháðir í $\mathbb{R}^m$ (eða $\mathbb{C}^m$) fyrir sérhvert $t \in I$.
(iii) Vigrarnir $u_1(a), \dots, u_m(a)$ eru línulega óháðir í $\mathbb{R}^m$ (eða $\mathbb{C}^m$) fyrir eitthvert $a \in I$. □

Sönnun: Við sönnum (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i), og tökum strax eftir því að (ii)⇒(iii) er algerlega augljóst. Til þess að sanna (i)⇒(ii), þá gerum ráð fyrir að $\alpha \in I$ og

$$c_1 u_1(\alpha) + \cdots + c_m u_m(\alpha) = 0,$$

þar sem stuðlarnir $c_1, \dots, c_m$ eru tvinntölur. Athugum nú, að vigurföllin

$$v(t) = c_1 u_1(t) + \cdots + c_m u_m(t) \qquad \text{og} \qquad w(t) = 0, \qquad t \in I,$$

eru bæði lausn á upphafsgildisverkefninu $u' = A(t)u$, $u(\alpha) = 0$. Fyrst lausnin er ótvírætt ákvörðuð, þá er $v = w$ og þar með gildir

$$0 = c_1 u_1(t) + \cdots + c_m u_m(t), \qquad t \in I.$$

Samkvæmt (i) eru vigurföllin $u_1, \dots, u_m$ línulega óháð og þar með er $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Þar með eru vigrarnir $u_1(\alpha), \dots, u_m(\alpha)$ línulega óháðir og (ii) gildir.

Til þess að sanna (iii)⇒(i), þá gerum ráð fyrir að $0 = c_1 u_1(t) + \cdots + c_m u_m(t)$ fyrir öll $t \in I$. Þá gildir sérstaklega $0 = c_1 u_1(a) + \cdots + c_m u_m(a)$. Fyrst vigrarnir $u_1(a), \dots, u_m(a)$ eru línulega óháðir, þá er $c_1 = \cdots = c_m = 0$ og við höfum sannað (i). ■

Skilgreining 9.3.2 Fylki af gerðinni

$$\Phi(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)], \qquad t \in I,$$

þar sem dálkavigrarnir $u_1, \dots, u_m$ mynda grunn í núllrúminu $\mathcal{N}(A)$ fyrir afleiðujöfnuhneppið $u' = A(t)u$, kallast *grunnfylki* fyrir afleiðujöfnuhneppið. □

Samkvæmt hjálparsetningu 9.3.1, þá eru dálkarnir í $\Phi(t)$ línulega óháðir fyrir öll $t \in I$ og þar með er andhverfan $\Phi(t)^{-1}$ til í sérhverjum punkti $t \in I$. Við sjáum jafnframt að

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= [u_1{}'(t), \dots, u_m{}'(t)] = \\ &= [A(t)u_1(t), \dots, A(t)u_m(t)] = \\ &= A(t)\Phi(t). \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Af hjálparsetningu 9.3.1 leiðir einnig að ef $m \times m$ fylkjafallið Φ uppfyllir $\Phi' = A(t)\Phi$ og $\Phi(a)$ hefur andhverfu fyrir eitthvert $a \in I$, þá er $\Phi(t)$ grunnfylki fyrir afleiðujöfnuhneppið $u' = A(t)u$.

Setning 9.3.3 *Látum Φ og Ψ vera tvö grunnfylki fyrir jöfnuhneppið $u' = A(t)u$. Þá er til andhverfanlegt fylki B þannig að*

$$\Psi(t) = \Phi(t)B. \tag{9.3.2}$$

□

Sönnun: Við getum skrifað $\Phi = [u_1, \dots, u_m]$ og $\Psi = [v_1, \dots, v_m]$, þar sem $\{u_1, \dots, u_m\}$ og $\{v_1, \dots, v_m\}$ eru grunnar í $\mathcal{N}(A)$. Þá er til andhverfanlegt fylki $B = (b_{jk})$ sem lýsir hnitaskiptunum miðað við grunnana tvo, en stök þess uppfylla

$$v_k(t) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} u_j(t), \qquad k = 1, \dots, m, \quad t \in I.$$

Þessar jöfnur eru greinilega jafngildar (9.3.2). ■

Upphafsgildisverkefni fyrir grunnfylki

Við fáum nú lýsingu á lausn upphafsgildisverkefnisins með grunnfylkjum:

Setning 9.3.4 *Látum $\Phi(t)$ vera grunnfylki fyrir jöfnuhneppið $u' = A(t)u$.*
(i) Sérhvert stak í $\mathcal{N}(A)$ er af gerðinni $u(t) = \Phi(t)c$, þar sem c er vigur í $\mathbb{C}^m$.
(ii) Vigurfallið u_p, sem gefið er með formúlunni

$$u_p(t) = \Phi(t) \int_a^t \Phi(\tau)^{-1} f(\tau)\, d\tau,$$

uppfyllir $u' = A(t)u + f(t)$ og $u(a) = 0$.
(iii) Lausnin á upphafsgildisverkefninu $u' = A(t)u + f(t)$, $u(a) = b$ er gefin með formúlunni

$$u(t) = \Phi(t)\Phi(a)^{-1}b + \Phi(t) \int_a^t \Phi(\tau)^{-1} f(\tau)\, d\tau.$$

□

Sönnun: (i) Margfeldi fylkis og dálkvigurs er einfaldlega línuleg samantekt á dálkum fylkisins með stuðlum vigursins.

(ii) Regla Leibniz gefur okkur

$$\begin{aligned} {u_p}'(t) = \Phi'(t) \int_a^t \Phi(\tau)^{-1} f(\tau)\, d\tau + \Phi(t)\Phi(t)^{-1} f(t) = \\ = A(t)\Phi(t) \int_a^t \Phi(\tau)^{-1} f(\tau)\, d\tau + f(t) = A(t)u_p(t) + f(t). \end{aligned}$$

(iii) Þetta er augljós afleiðing af (i) og (ii). ■

Nú getum við beitt setningu 9.3.4 á dálkana í $m \times m$ fylkinu $U(t)$ og fengið eftirfarandi tilvistarsetningu:

Setning 9.3.5 *Látum $A, F \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og látum Φ vera grunnfylki fyrir A. Þá hefur $m \times m$ fylkjaafleiðujafnan*

$$U' = A(t)U + F(t), \qquad U(a) = B,$$

ótvírætt ákvarðaða lausn $U(t)$, sem gefin er með formúlunni

$$U(t) = \Phi(t)\Phi(a)^{-1}B + \Phi(t) \int_a^t \Phi(\tau)^{-1} F(\tau)\, d\tau.$$

□

Hneppi með fastastuðla

Gerum nú ráð fyrir því að A hafi fastastuðla og að eiginvigrar þess myndi grunn í $\mathbb{C}^m$. Eins og við höfum áður sannfært okkur um, þá er það jafngilt því að unnt sé að þátta fylkið A í

$$A = T\Lambda T^{-1},$$

þar sem Λ er hornalínufylki með eigingildin á hornalínunni,

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Lítum á fylkið

$$\Phi(t) = T\operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_m})T^{-1}.$$

Það uppfyllir

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= T\operatorname{diag}(\lambda_1 e^{t\lambda_1}, \dots, \lambda_m e^{t\lambda_m})T^{-1} = \\ &= T\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)\operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_m})T^{-1} = \\ &= T\Lambda T^{-1} T\operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_m})T^{-1} = \\ &= A\Phi(t), \end{aligned}$$

með upphafsskilyrðinu

$$\Phi(0) = I.$$

Þar með er Φ grunnfylki fyrir hneppið $u' = Au$. Hér er komin grunnlausnin sem við notuðum í útleiðslu okkar í grein 9.2.

9.4 Fylkjamargliður og fylkjaveldaraðir

Ef A er $m \times m$ fylki og $p(\lambda)$ er margliða af tvinnbreytistærðinni λ,

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n,$$

þá getum við skilgreint fylkjamargliðuna $p(A)$ með formúlunni

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n,$$

þar sem I táknar $m \times m$–einingarfylkið. Hér höfum við einfaldlega skipt á veldum λ^k af λ og veldum A^k af A og jafnframt margfaldað fastaliðinn með einingarfylkinu I. Til þess að geta stungið A inn í óendanlegar veldaraðir, þá þurfum við að skilgreina samleitni:

Samleitnar fylkjarunur

Skilgreining 9.4.1 Runa $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$, af $\ell \times m$ fylkjum $C_n = \big(c_{jkn}\big)_{j=1,k=1}^{\ell,m}$ er sögð vera samleitin ef allar stuðlarunurnar

$$\{c_{jkn}\}_{n=0}^{\infty}, \qquad j = 1, \dots, \ell, \quad k = 1, \dots, m.$$

eru samleitnar. Fylkið $C = \big(c_{jk}\big)_{j=1,k=1}^{\ell,m}$ sem hefur stuðlana

$$c_{jk} = \lim_{n\to\infty} c_{jkn}, \qquad j = 1, \dots, \ell, \quad k = 1, \dots, m,$$

kallast markgildi rununnar $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ og við táknum það með

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Óendanleg summa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ af $\ell\times m$ fylkjum er sögð vera samleitin, ef runan af hlutsummum $\{\sum_{n=0}^{N} C_n\}_{N=0}^{\infty}$ er samleitin. Við táknum markgildið einnig með $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} C_n.$$

□

Ef $C_n = a_n A^n$ og $A^0 = I$, þá er $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ veldaröð.

Fylkjastaðall

Til þess að geta skorið úr um samleitni veldaraða þá þurfum við að tengja fylkið við samleitnigeisla raðarinnar. Til þess innleiðum við:

Skilgreining 9.4.2 (*Fylkjastaðall*). Ef A er $\ell \times m$ fylki, $A = (a_{jk})$, með tvinntölustök, þá skilgreinum við *staðalinn* $\|A\|$ af A með formúlunni

$$\|A\| = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|.$$

Við köllum töluna $\|A\|$ einnig *lengd* fylkisins A. □

Setning 9.4.3 (*Reiknireglur um fylkjastaðal*). *(i) Ef A og B eru $\ell \times m$ fylki með stök í $\mathbb{C}$ og $c \in \mathbb{C}$, þá er*

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\| \qquad \text{og} \qquad \|cA\| = |c|\|A\|.$$

(ii) Ef A er $\ell \times m$ fylki og B er $m \times n$ fylki, þá er

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

(iii) Ef A er $m \times m$ fylki, þá er

$$\|A^n\| \le \|A\|^n.$$

□

Sönnun: (i). Þetta er mjög auðvelt og er eftirlátið lesandanum.

(ii) Skrifum $AB = (c_{jk})_{j=1,k=1}^{\ell,n}$, $c_{jk} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}b_{pk}$. Þá er

$$\begin{aligned}\|AB\| = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{n}|\sum_{p=1}^{m} a_{jp}b_{pk}| \leq \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p=1}^{m}|a_{jp}|\sum_{k=1}^{n}|b_{pk}| \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p=1}^{m}|a_{jp}|\|B\| = \|A\|\|B\|\end{aligned}$$

(iii) Þetta fæst með þrepun út frá (ii). ■

Samleitnar fylkjaraðir

Setning 9.4.4 (*Samleitnipróf fyrir fylkjaraðir*). *Látum $\{C_n\}$ vera runu af $\ell \times m$ fylkjum þannig að talnaröðin $\sum_{n=0}^{\infty}\|C_n\|$ sé samleitin. Þá er fylkjaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ samleitin.* □

Sönnun: Við skrifum $C_n = (c_{jkn})$. Þá er $|c_{jkn}| \leq \|C_n\|$ fyrir öll j og k, og þar með eru tvinntalnaraðirnar $\sum_{n=0}^{\infty} c_{jkn}$ samleitnar fyrir öll j og k, en það er samkvæmt skilgreiningu jafngilt því að fylkjaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ sé samleitin. ■

Fylgisetning 9.4.5 *Látum $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ vera veldaröð með tvinntölustuðla og gerum ráð fyrir að samleitnigeisli hennar sé $\varrho > 0$. Ef A er $m \times m$ fylki með tvinntölustuðla og $\|A\| < \varrho$, þá er fylkjaveldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ samleitin.* □

Sönnun: Af setningu 9.4.3 (iii) leiðir að $\|c_n A^n\| \leq |c_n|\|A\|^n$. Fyrst $\|A\| < \varrho$, þá er talnaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\|A\|^n$ samleitin og því leiðir þetta af setningu 9.4.4. ■

Hugsum okkur nú að $f : S(0,\varrho) \to \mathbb{C}$ sé fágað fall sem gefið er með

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad z \in S(0,\varrho).$$

Ef A er $m \times m$ fylki og $\|A\| < \varrho$, þá getum við skilgreint $m \times m$ fylkið $f(A)$ með því að stinga A inn í veldaröðina fyrir fágaða fallið f,

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n,$$

því fylkjaveldaröðin í hægri hliðinni er samleitin. Við skilgreinum $A^0 = I$. Ef við vitum að f er fágað fall á öllu $\mathbb{C}$ þá þurfum við engar áhyggjur að hafa af samleitninni og við getum sett hvaða $m \times m$ fylki sem er inn í röðina. Sem dæmi um fylkjaföll getum við tekið

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots\,, \\
\cos A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}A^{2n} = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \cdots\,, \\
\sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1} = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \cdots\,, \\
\cosh A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}A^{2n} = I + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots\,, \\
\sinh A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1} = A + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \cdots\,, \\
\ln(I+A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}A^n = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \cdots\,, \\
(I-A)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + A^2 + \cdots\,, \\
(I+A)^{\alpha} &= I + \alpha A + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}A^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}A^3 + \cdots\,.
\end{aligned}
$$

Fyrstu fimm raðirnar eru vel skilgreindar fyrir öll $m \times m$ fylki, en hinar þrjár eru vel skilgreindar ef $\|A\| < 1$.

9.5 Veldisvísisfylkið

Nú ætlum við að finna almenna formúlu fyrir grunnfylki fyrir línulegt jöfnuhneppi með fastastuðla. Í grein 9.3 sáum við hvernig grunnfylkið lítur út í því tilfelli að eiginvigrar stuðlafylkisins myndi grunn í $\mathbb{C}^m$. Við byrjum á því að skoða rununa $\{u_n\}$ sem skilgreind var í aðferð Picards til að sanna setningu 6.7.5. Hún er

$$
\begin{aligned}
u_0(t) &= b, \\
u_1(t) &= b + \int_0^t Ab\, d\tau = (I+tA)b, \\
u_2(t) &= b + \int_0^t A(I+\tau A)b\, d\tau = (I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2)b, \\
u_3(t) &= b + \int_0^t A(I+\tau A + \frac{\tau^2}{2}A^2)b\, d\tau = (I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3)b, \\
u_n(t) &= (I + tA + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n)b.
\end{aligned}
$$

Í sönnun okkar á tilvistarsetningunni sýndum við fram á að þessi runa er samleitin í jöfnum mæli á sérhverju takmörkuðu bili á rauntalnaásnum $\mathbb{R}$. Með því að velja vigurinn

b sem grunnvigrana

$$[1,0,\dots,0]^t,\ [0,1,0,\dots,0]^t\ \dots,\ [0,\dots,0,1]^t,$$

þá fáum við út úr aðferð Picards að fylkjaröðin $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(tA)^n$ er samleitin. Við sjáum að hér er komin veldaröðin fyrir veldisvísisfallið og sem grunnfylki fyrir jöfnuhneppið $u'=Au$ fáum við síðan $\Phi(t)=e^{tA}$.

Setning 9.5.1 *Fylkjafallið $\Phi(t)=e^{tA}$ er hin ótvírætt ákvarðaða lausn upphafsgildisverkefnisins*

$$\Phi'(t)=A\Phi(t),\qquad t\in\mathbb{R},\qquad \Phi(0)=I.$$

□

Sönnun: Við vitum að dálkarnir í $\Phi(t)$ mynda grunn í núllrúminu $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ og $\Phi(0)=I$, svo þetta er alveg augljóst. ■

Nú skulum við sjá hvernig unnt er að nota tilvistarsetninguna fyrir línuleg hneppi til þess að sanna samlagningarformúluna fyrir fylkjaveldisvísisfallið :

Setning 9.5.2 *Ef A og B eru $m\times m$ fylki og $AB=BA$, þá er*

$$e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A. \tag{9.5.1}$$

□

Sönnun: Við byrjum á því að líta á fallið $\Phi(t)=Be^{tA}$. Það uppfyllir

$$\Phi'(t)=BAe^{tA}=ABe^{tA}=A\Phi(t),\qquad \Phi(0)=B,$$

og tilvistarsetningin 9.3.5 segir okkur að $\Phi(t)=e^{tA}B$ og þar með höfum við sannað að

$$e^{tA}B=Be^{tA}.$$

Með því að skipta á hlutverkum A og B í þessar röksemdafærslu fáum við jafnframt

$$Ae^{tB}=e^{tB}A.$$

Nú skulum við líta á fallið $\Phi(t)=e^{tA}e^{tB}$. Regla Leibniz gefur okkur

$$\begin{aligned}\Phi'(t)&=Ae^{tA}e^{tB}+e^{tA}Be^{tB}=Ae^{tA}e^{tB}+Be^{tA}e^{tB}=\\&=(A+B)\Phi(t),\qquad \Phi(0)=I.\end{aligned}$$

Fylkjafallið $\Psi(t)=e^{t(A+B)}$ uppfyllir $\Psi'(t)=(A+B)\Psi(t)$ og $\Psi(0)=I$. Setning 9.3.5 gefur okkur því að $\Phi=\Psi$. Þar með höfum við sannað $e^{t(A+B)}=e^{tA}e^{tB}$ fyrir öll $t\in\mathbb{R}$. Með því að skipta aftur á hlutverkum A og B fáum við einnig að $e^{t(A+B)}=e^{tB}e^{tA}$. ■

Fylgisetning 9.5.3 *Fylkið e^{tA} hefur andhverfuna e^{-tA}.* □

Setningu 9.5.2 er ekki nokkur vandi að alhæfa:

Setning 9.5.4 *Ef A og B eru $m \times m$ fylki og $AB = BA$, f og g eru fáguð föll á $S(0, \varrho)$, $\|A\| < \varrho$ og $\|B\| < \varrho$, þá er*

$$f(A)g(B) = g(B)f(A).$$

□

Sönnun: Við eftirlátum lesandanum að útfæra sönnunina í smáatriðum. Fyrsta skrefið er að sanna með þrepun að $A^k B^\ell = B^\ell A^k$. Síðan er sýnt að margfalda megi raðir fallanna saman eins og venjulegar samleitnar veldaraðir. ■

Setning 9.5.5 *Ef $A = TBT^{-1}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er fágað fall, gefið með veldaröð sem hefur samleitnigeisla $> \|A\|$, þá er $f(A) = Tf(B)T^{-1}$.* □

Sönnun: Með þrepun fáum við $A^k = TB^kT^{-1}$ og að því fengnu er þetta ljóst. ■

Látum nú A vera $m \times m$ fylki og gerum ráð því að eiginvigrarnir $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ með tilliti til eigingildanna $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ myndi grunn í $\mathbb{C}^m$. Það er jafgilt því að unnt sé að þátta fylkið A í

$$A = T\Lambda T^{-1},$$

þar sem $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ mynda dálkana í T og $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Setning 9.5.5 gefur nú

$$e^{tA} = Te^{t\Lambda}T^{-1}.$$

9.6 Cayley–Hamilton–setningin

Veldisvísisfylkið e^{tA} af $m \times m$ fylki A, er gefið með óendanlegri veldaröð, sem ekki er árennileg við fyrstu sýn. Við ætlum nú að sýna fram á að ætíð sé unnt að skrifa e^{tA} á forminu

$$e^{tA} = f_0(t)I + f_1(t)A + \cdots + f_{m-1}(t)A^{m-1},$$

þar sem föllin $f_0, \dots, f_{m-1}$ eru gefin með samleitnum veldaröðum á $\mathbb{R}$. Veldisvísisfallið e^{tA} er sem sagt margliða í A af stigi $\leq (m-1)$ með tvinntölustuðla sem eru háðir t.

Skilgreining 9.6.1 Ef A er $m \times m$ fylki með stuðla í $\mathbb{C}$, þá táknum við kennimargliðu þess með $p_A(\lambda)$,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

□

Við getum skrifað

$$p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m$$

og jafnframt myndað fylkjamargliðuna $p_A(A)$, sem er $m \times m$ fylki, með því að setja A inn í þessa formúlu,

$$p_A(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{m-1}A^{m-1} + A^m.$$

Setning 9.6.2 (*Cayley–Hamilton*). *Ef A er $m \times m$ fylki, þá er $p_A(A) = 0$.*

□

Við athugum fyrst að setningin er algerlega augljós ef eiginvigrar A mynda grunn í $\mathbb{C}^m$, því þá er unnt að þátta fylkið A í $A = T\Lambda T^{-1}$, þar sem $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ er hornalínufylkið með eigingildin á hornalínunni og

$$p_A(A) = Tp_A(\Lambda)T^{-1} = T\text{diag}(p_A(\lambda_1), \dots, p_A(\lambda_m))T^{-1} = 0$$

því eigingildin $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ eru núllstövar kennimargliðunnar p_A.

Sönnun á setningu Cayley–Hamilton: Við lítum á fylkið $\lambda I - A$ og látum $\text{adj}(\lambda I - A)$ tákna fylgiþáttafylki þess. Þá gildir jafnan

$$(\lambda I - A)\text{adj}(\lambda I - A)^t = \det(\lambda I - A)I = p_A(\lambda)I. \tag{9.6.1}$$

Sérhvert stak í $\text{adj}(\lambda I - A)$ er myndað úr $(m-1) \times (m-1)$ hlutákveðu úr $\lambda I - A$ og er þar með margliða af stigi $\leq (m-1)$ í λ. Þetta segir okkur að við getum skrifað

$$\text{adj}(\lambda I - A) = B_0 + \lambda B_1 + \cdots + \lambda^{m-1}B_{m-1},$$

þar sem B_j eru $m \times m$ fylki. Ef við margföldum með $\lambda I - A$, þá segir jafnan (9.6.1) okkur að

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)&(B_0 + \lambda B_1 + \cdots + \lambda^{m-1}B_{m-1}) = \\ &- AB_0 + \lambda(B_0 - AB_1) + \lambda^2(B_1 - AB_2) + \cdots + \lambda^{m-1}(B_{m-2} - AB_{m-1}) + \lambda^m B_{m-1} \\ &= a_0 I + a_1\lambda I + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1}I + \lambda^m I.\end{aligned}$$

Þetta er jafna sem gildir um öll λ. Nú berum við saman stuðla og fáum $-AB_0 = a_0 I$, $B_0 - AB_1 = a_1 I$, $B_1 - AB_2$ o.s.frv. Við margföldum fyrstu jöfnuna með $A^0 = I$, aðra jöfnu með $A^1 = A$, þriðju jöfnu með A^2 o.s.frv. og leggjum saman. Þá fæst jafnan

$$\begin{aligned}- AB_0 + A(B_0 - AB_1) + A^2(B_1 - AB_2) + \cdots + A^{m-1}(B_{m-2} - AB_{m-1}) + A^m B_{m-1} \\ = p_A(A).\end{aligned}$$

Nú tökum við eftir því að liðirnir í vinstri hlið þessarar jöfnu ganga út tveir og tveir hver á móti öðrum. Vinstri hliðin er sem sagt núllfylkið og setningin er sönnuð. ■

Sýnidæmi 9.6.3 Lítum á fylkið $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Kennimargliða þess er $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, svo setning Cayley–Hamilton segir að $A^2 = -I$. En af þessari formúlu leiðir síðan

$$A^{2k} = (-1)^k I, \qquad A^{2k+1} = (-1)^k A.$$

Veldisvísisfylkið verður

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} A = \big(\cos t\big) I + \big(\sin t\big) A.$$

□

Sýnidæmi 9.6.4 Sem framhald af síðasta dæmi getum við tekið

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = aI + bJ, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fylkin I og J víxlast svo

$$e^{tA} = e^{taI}e^{tbJ} = e^{at}((\cos bt)I + (\sin bt)J).$$

□

Nú skulum við athuga hvaða þýðingu setning Cayley–Hamilton hefur. Ef við skrifum

$$p_A(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

þá gefur hún að

$$A^m = -a_0 I - a_1 A - \cdots - a_{m-1}A^{m-1}. \tag{9.6.2}$$

Með þrepun fáum við síðan að fyrir sérhvert $n \geq m$ eru til stuðlar c_{jn} þannig að

$$\frac{1}{n!}A^n = c_{0n}I + c_{1n}A + \cdots + c_{m-1,n}A^{m-1}.$$

Þegar við stingum þessu inn í veldaröðina fyrir e^{tA}, þá fáum við

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{jn}t^n\right)A^j.$$

Þessi formúla er alls ekki svo fráleit til útreikninga á tölvu, því við fáum rakningarformúlur fyrir stuðlana út frá (9.6.2) og

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1} = \frac{1}{n+1}A\cdot\frac{1}{n!}A^n &= \\
&= \frac{c_{0n}}{n+1}A + \frac{c_{1n}}{n+1}A^2 + \cdots + \frac{c_{m-1,n}}{n+1}A^m = \\
&= \frac{-c_{m-1,n}a_0}{n+1}I + \frac{c_{0n} - c_{m-1,n}a_1}{n+1}A + \cdots + \frac{c_{m-2,n} - c_{m-1,n}a_{m-1}}{n+1}A^{m-1}.
\end{aligned}$$

Stuðlarnir með númer $n = 0, \ldots, m-1$ eru gefnir með

$$\begin{array}{ccccc}
 & c_{0n} & c_{1n} & \ldots & c_{(m-1),n} \\
n=0 & 1/0! & 0 & \ldots & 0 \\
n=1 & 0 & 1/1! & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n=m-1 & 0 & 0 & \ldots & 1/n!.
\end{array}$$

Rakningarformúlurnar fyrir stuðlana með númer $n \geq m$ verða síðan

$$
\begin{aligned}
c_{0,n+1} &= \frac{-c_{m-1,n}a_0}{n+1},\\
c_{j,n+1} &= \frac{c_{j-1,n} - c_{m-1,n}a_j}{n+1}, \qquad j = 1, \dots, m-1.
\end{aligned}
$$

Það er greinilega auðvelt að forrita þetta í tölvu. Lausnin á upphafsgildisverkefninu $u' = Au$, $u(0) = b$ er síðan

$$
u(t) = e^{tA}b = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{0n}t^n\right)b_0 + \cdots + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{m-1,n}t^n\right)b_{m-1},
$$

þar sem vigrarnir $b_0, \dots, b_{m-1}$ eru reiknaðir út frá

$$
b_0 = b, \qquad b_1 = Ab, \qquad b_2 = A^2b = Ab_1, \dots, b_{m-1} = A^{m-1}b = Ab_{m-2}.
$$

9.7 Newton-margliður

Brúunarverkefni

Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vera gefið fall, látum $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ vera ólíka punkta í $\mathbb{C}$, látum $m_1, \dots, m_\ell$ vera jákvæðar heiltölur og setjum $m = m_1 + \cdots + m_\ell$. Nú ætlum við að sýna fram á að það verkefni að finna margliðu r af stigi $< m$, sem uppfyllir

$$
f^{(j)}(\alpha_k) = r^{(j)}(\alpha_k), \qquad j = 0, \dots, m_k - 1, \quad k = 1, \dots, \ell, \tag{9.7.1}
$$

hafi ótvírætt ákvarðaða lausn r og við ætlum jafnframt að finna formúlu fyrir margliðuna r. Verkefni af þessu tagi nefnist *brúunarverkefni*. Síðan munum við sjá hvernig þessar formúlur eru notaðar til þess að reikna út veldisvísisfylkið e^{tA}.

Úrlausn á brúunarverkefninu

Við skilgreinum rununa $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ með því að telja $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ með margfeldni, þannig að fyrstu m_1 gildin á λ_j séu α_1, næstu m_2 gildin á λ_j séu α_2 o.s.frv. Við skilgreinum síðan

$$
p(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} \cdots (z - \alpha_\ell)^{m_\ell} = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m). \tag{9.7.2}
$$

Athugum sértilfellið þegar $\ell = 1$. Þá getum við skrifað lausnina r beint niður því hún er Taylor-margliða fallsins f í punktinum α_1 númer $m - 1$,

$$
r(z) = f(\alpha_1) + f'(\alpha_1)(z - \alpha_1) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\alpha_1)}{(m-1)!}(z - \alpha_1)^{m-1}.
$$

Almenna niðurstaðan er:

Setning 9.7.1 *Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ vera ólíka punkta í $\mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_\ell$ vera jákvæðar heiltölur, setjum $m = m_1 + \cdots + m_\ell$ og skilgreinum $p(z)$ með (9.7.2). Þá er til margliða r af stigi $< m$ og $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ þannig að*

$$f(z) = r(z) + p(z)g(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{9.7.3}$$

Margliðan r er lausn á (9.7.1). Bæði r og g eru ótvírætt ákvörðuð og eru gefin með formúlunum

$$\begin{aligned} r(z) = f[\lambda_1] + f[\lambda_1, \lambda_2](z - \lambda_1) + \cdots \\ + f[\lambda_1, \dots, \lambda_m](z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{m-1}) \end{aligned}$$

og

$$g(z) = f[\lambda_1, \dots, \lambda_m, z](z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m),$$

þar sem mismunakvótarnir eru skilgreindir með

$$f[\lambda_i, \dots, \lambda_{i+j}] = \begin{cases} \dfrac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!}, & \lambda_i = \cdots = \lambda_{i+j}, \\ \dfrac{f[\lambda_i, \dots, \lambda_{i+j-1}] - f[\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+j}]}{\lambda_i - \lambda_{i+j}}, & \lambda_i \neq \lambda_{i+j}, \end{cases} \tag{9.7.4}$$

fyrir $i = 1, \dots, m$ og $j = 0, \dots, m - i$. □

Sönnun: Til þess að sanna að r sé lausn á brúunarverkefninu, þá athugum við að fallið $h(z) = p(z)g(z)$ hefur núllstöð af stigi m_k í punktinum α_k og þar með er $h^{(j)}(\alpha_k) = 0$ ef $0 \leq j < m_k$. Þar með leiðir (9.7.1) beint af (9.7.3).

Til þess að sanna ótvíræðnina, þá hugsum við okkur að $f(z) = r_1(z) + p(z)g_1(z) = r_2(z) + p(z)g_2(z)$, þar sem r_1 og r_2 eru margliður af stigi $< m$ og g_1 og g_2 eru fáguð föll á $\mathbb{C}$. Þá fæst

$$r_1(z) - r_2(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} \cdots (z - \alpha_\ell)^{m_\ell}(g_2(z) - g_1(z))$$

Ef $r_1 \neq r_2$, þá stæði margliða af stigi $< m$ í vinstri hlið jöfnunnar, en hægri hliðin segir að samanlögð margfeldni núllstöðvanna sé að minnsta kosti m. Þetta fær ekki staðist og því er $r_1 = r_2$. Við styttum síðan p út jöfnunni og fáum $g_1 = g_2$.

Nú skulum við sýna fram á að fyrir sérhvert $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ sé til margliða r af stigi $< m$ og $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ þannig að (9.7.3) gildi. Við byrjum á því að láta γ_r vera stikun á hringnum $\partial S(0, r)$ með miðju 0 og geisla r og veljum r það stórt að punktarnir $z, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ séu allir innihaldnir í $S(0, r)$. Cauchy-formúlan gefur okkur þá

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Við athugum nú að

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \lambda_1} + \frac{(z - \lambda_1)}{(\zeta - \lambda_1)} \cdot \frac{1}{\zeta - z}.$$

Ef við beitum þessari formúlu á síðasta þáttinn með λ_2 í hlutverki λ_1, þá fáum við

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \lambda_1} + \frac{(z - \lambda_1)}{(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)} + \frac{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}{(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)} \cdot \frac{1}{\zeta - z}.$$

Ef við höldum þessari liðun áfram rununa $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ á enda, þá fáum við

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \lambda_1} &+ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_j)}{(\zeta-\lambda_1)\cdots(\zeta-\lambda_{j+1})} \\ &+ \frac{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)}{(\zeta-\lambda_1)\cdots(\zeta-\lambda_m)} \cdot \frac{1}{\zeta - z}.\end{aligned}$$

Teljarinn í síðasta liðnum er $p(z)$. Við setjum nú þessa liðun inn í Cauchy-formúluna og fáum

$$f(z) = c_1 + c_2(z-\lambda_1) + \cdots + c_m(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{m-1}) + p(z)g(z), \tag{9.7.5}$$

þar sem stuðlarnir c_j og fallið g eru gefin með

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_1)\cdots(\zeta-\lambda_j)}\, d\zeta, \tag{9.7.6}$$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_1)\cdots(\zeta-\lambda_m)} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} \tag{9.7.7}$$

Með (9.7.5) höfum við sýnt fram á að hægt er að liða f eins og lýst er í (9.7.3) og við höfum séð að slík liðun er ótvírætt ákvörðuð.

Nú skilgreinum við $f[\lambda_i, \dots, \lambda_{i+j}]$ sem stuðulinn við veldið z^j í brúunarmargliðunni sem svarar til punktanna $\lambda_i, \dots, \lambda_{i+j}$. Nú beitum við formúlu (9.7.6) með i í hlutverki tölunnar 1 og $i+j$ í hlutverki m og sjáum að $f[\lambda_i, \dots, \lambda_{i+j}]$ er óháður röðinni á punktunum $\lambda_i, \dots, \lambda_{i+j}$ og

$$c_1 = f[\lambda_i] = f(\lambda_i), \quad c_k = f[\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}], \quad g(z) = f[\lambda_i, \cdots, \lambda_{i+j}, z].$$

þar sem k er notað sem stiki í summunni. Nú er einungis eftir að sýna að stuðlarnir $f[\lambda_1, \dots \lambda_j]$ séu mismunakvótar. Við göngum út frá því að punktarnir $\lambda_1, \dots \lambda_m$ séu fengnir með því að telja punktana $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ upp með margfeldni, eins og lýst var í upphafi greinarinnar. Cauchy-formúlan fyrir afleiður og (9.7.6) gefa fyrra tilfellið í (9.7.4). Við fáum hins vegar seinna tilfellið í (9.7.4) með því að beita

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-\lambda_i)\cdots(z-\lambda_{i+j-1})} - \frac{1}{(z-\lambda_{i+1})\cdots(z-\lambda_{i+j})} \\ = \frac{\lambda_i - \lambda_{i+j}}{(z-\lambda_i)\cdots(z-\lambda_{i+j})}\end{aligned} \tag{9.7.8}$$

í heildunarformúlunni (9.7.6). ■

Framsetningin á brúunarmargliðunni r, sem við notum hér, er kennd við Newton. Í þessari útleiðslu höfum við gert ráð fyrir því að f sé fágað á öllu $\mathbb{C}$. En með því að huga vel að valinu á veginum sem heildað er yfir, þá er hægt að sýna fram á að þessar formúlur gildi í hvaða svæði sem er.

Newton-margliður

Nú segir setning Cayley–Hamilton okkur að sérhvert veldi A^n af $m \times m$ fylkinu A með $n \geq m$ megi skrifa sem línulega samantekt af $I, A, \dots, A^{m-1}$, og af því leiðir að fylkjafall $f(A)$, sem gefið er með samleitinni veldaröð, er í raun margliða í A af stigi $\leq (m-1)$. Nú viljum við reikna út þessa margliðu og nota til þess fallgildin $f(z)$. Í tilfellinu $m = 4$ þurfum við fyrst að reikna út mismuakvótatöfluna

$$
\begin{array}{ccccccc}
f[\lambda_1] & & & & \\
& f[\lambda_1, \lambda_2] & & & \\
f[\lambda_2] & & f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] & & \\
& f[\lambda_2, \lambda_3] & & f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] \\
f[\lambda_3] & & f[\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] & & \\
& f[\lambda_3, \lambda_4] & & & \\
f[\lambda_4] & & & &
\end{array}
$$

þar sem $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ er upptalning með margfeldni á núllstöðvum kennimargliðu A. Margliðan $r(z)$ er síðan reiknuð út frá hornalínustökunum

$$
\begin{aligned}
r(z) = f[\lambda_1] &+ f[\lambda_1, \lambda_2](z - \lambda_1) + f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3](z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \\
&+ f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4](z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3).
\end{aligned}
$$

Fylkið $f(A)$ fæst nú með því að stinga A inn í formúluna í stað breytunnar z og setja I inn í stað allra fastaliða í margliðuþáttum,

$$
\begin{aligned}
f(A) = f[\lambda_1]I &+ f[\lambda_1, \lambda_2](A - \lambda_1 I) + f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3](A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \\
&+ f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4](A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I).
\end{aligned}
$$

Veldisvísisfylkið

Við fórum út í þetta æfintýri til þes að reikna út margliðuna e^{tA}, sem byggir á fallinu $f(z) = e^{tz}$, þar sem t er raunbreytistærð. Afleiðurnar eru

$$
f'(z) = te^{tz}, \qquad f''(z) = t^2 e^{tz}, \qquad f'''(z) = t^3 e^{tz}, \qquad \dots .
$$

Margliðan p verður síðan kennimargliða fylkisins A.

Sýnidæmi 9.7.2 (i) Gerum ráð fyrir að A sé 2×2 fylki með ólík eigingildi α_1 og α_2. Þá er kennimargliðan $p_A(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$ og mismunakvótataflan

$$
\begin{array}{cc}
e^{t\alpha_1} & \\
& \dfrac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \\
e^{t\alpha_2} &
\end{array}
$$

og við fáum

$$
e^{tz} = e^{t\alpha_1} + \frac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}(z - \alpha_1) + (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)g(z),
$$

sem gefur okkur formúluna fyrir e^{tA},

$$e^{tA} = e^{t\alpha_1}I + \frac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_1 I).$$

(ii) Ef hins vegar A er 2×2 fylki með aðeins eitt eigingildi α_1, þá verður mismunakvótataflan

$$\begin{array}{ll} e^{t\alpha_1} & \\ & te^{t\alpha_1} \\ e^{t\alpha_1} & \end{array}$$

og við fáum

$$e^{tz} = e^{t\alpha_1} + te^{t\alpha_1}(z - \alpha_1) + (z - \alpha_1)^2 g(z).$$

Veldisvísisfylkið verður því

$$e^{tA} = e^{t\alpha_1}I + te^{t\alpha_1}(A - \alpha_1 I).$$

(iii) Ef A er 3×3 fylki með þrjú ólík eigingildi, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ þá verður mismunakvótataflan

$$\begin{array}{lll} e^{t\alpha_1} & & \\ & \dfrac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} & \\ e^{t\alpha_2} & & \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_3}\left\{\dfrac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} - \dfrac{e^{t\alpha_2} - e^{t\alpha_3}}{\alpha_2 - \alpha_3}\right\} \\ & \dfrac{e^{t\alpha_2} - e^{t\alpha_3}}{\alpha_2 - \alpha_3} & \\ e^{t\alpha_3} & & \end{array}$$

og formúlan fyrir e^{tA} verður

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{t\alpha_1}I + \frac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_1 I) + & \\ + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3}\left\{\frac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{e^{t\alpha_2} - e^{t\alpha_3}}{\alpha_2 - \alpha_3}\right\}(A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I). \end{aligned}$$

(iv) Ef A er 3×3 fylki með tvö ólík eigingildi, α_1 tvöfalt og α_2 einfalt, þá verður mismunakvótataflan

$$\begin{array}{lll} e^{t\alpha_1} & & \\ & te^{t\alpha_1} & \\ e^{t\alpha_1} & & \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{te^{t\alpha_1} - \dfrac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right\} \\ & \dfrac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} & \\ e^{t\alpha_2} & & \end{array}$$

og formúlan verður

$$e^{tA} = e^{t\alpha_1}I + te^{t\alpha_1}(A - \alpha_1 I) + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{te^{t\alpha_1} - \frac{e^{t\alpha_1} - e^{t\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right\}(A - \alpha_1 I)^2.$$

(v) Að lokum skulum við líta á tilfellið að A sé 3×3 fylki með eitt eigingildi α_1. Mismunakvótataflan verður þá einfaldlega

$$
\begin{array}{cccc}
e^{t\alpha_1} & & & \\
 & te^{t\alpha_1} & & \\
e^{t\alpha_1} & & \dfrac{t^2}{2}e^{t\alpha_1} & \\
 & te^{t\alpha_1} & & \\
e^{t\alpha_1} & & &
\end{array}
$$

og veldisvísisfylkið verður

$$e^{tA} = e^{t\alpha_1} I + te^{t\alpha_1}(A - \alpha_1 I) + \frac{t^2}{2} e^{t\alpha_1}(A - \alpha_1 I)^2.$$

□

Hugsum okkur nú að við séum að finna lausn á upphafsgildisverkefninu $u' = Au$, $u(0) = b$, þar sem A er 3×3 fylki með eitt eigingildi α_1. Formúlan í sýnidæmi 9.7.2 (v) gefur

$$e^{tA} b = e^{t\alpha_1} b_0 + te^{t\alpha_1} b_1 + \frac{t^2}{2} e^{t\alpha_1} b_2$$

þar sem

$$b_0 = b, \qquad b_1 = (A - \alpha_1 I)b_0, \qquad b_2 = (A - \alpha_1 I)b_1.$$

Athugið að hér væri ákaflega heimskulegt að reikna fyrst út fylkið $(A - \alpha_1 I)^2$ og margfalda það síðan með b til að fá b_2, því það kostar almennt margfalt meiri vinnu en við þurfum að framkvæma í þeirri aðferð sem hér er lýst.

Sýnidæmi 9.7.3 Við skulum nú leysa verkefnið $u' = Au$, $u(0) = [1, 2, 3]^t$, þar sem A er fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lausn: Við byrjum á því að ákvarða kennimargliðuna

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)\big[\lambda(\lambda - 1) - 3\big] + (\lambda - 2) \\
&= (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2.
\end{aligned}
$$

Eigingildin eru því $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Eiginvigrarúmið sem svarar til eigingildisins 2 er einvítt, svo eiginvigrar fylkisins A mynda ekki grunn. Við verðum því að grípa til Newton–margliðunnar til að finna e^{tA} og skrifum upp mismunakvótatöfluna,

$$\begin{array}{llccc}
\lambda_1 = -1 & e^{-t} & & & \\
 & & \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}) & & \\
\lambda_1 = 2 & e^{2t} & & & (\frac{t}{3} - \frac{1}{9})e^{2t} + \frac{1}{9}e^{-t} \\
 & & te^{2t} & & \\
\lambda_1 = 2 & e^{2t} & & &
\end{array}$$

Út úr mismunakvótatöflunni lesum við síðan formúluna fyrir e^{tA},

$$e^{tA} = e^{-t}I + \tfrac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})(A+I) + \big((\tfrac{t}{3} - \tfrac{1}{9})e^{2t} + \tfrac{1}{9}e^{-t}\big)(A+I)(A-2I)$$

Lausnin $u(t)$ er nú

$$u(t) = e^{-t}b_0 + \tfrac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})b_1 + \big((\tfrac{t}{3} - \tfrac{1}{9})e^{2t} + \tfrac{1}{9}e^{-t}\big))b_2,$$

þar sem

$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = (A+I)b_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix},$$
$$b_2 = (A-2I)b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Svarið er því komið

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix} + \big((\tfrac{t}{3} - \tfrac{1}{9})e^{2t} + \tfrac{1}{9}e^{-t}\big) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{9}e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{9}e^{2t} \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3}te^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 9.7.4 Talan $\lambda = 2$ er þrefalt eigingildi fylkisins

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Við skulum nota þessa staðreynd til þess að ákvarða veldisvísisfylkið e^{tA} og finna síðan lausnina á $u' = Au$ með upphafsgildin $u(0) = [1, 0, 1]^t$.

Lausn: Brúunarmargliðan fyrir $z \mapsto e^{tz}$ með $\lambda = 2$ sem þrefalt eigingildi er Taylor-margliðan í $\lambda = 2$ af stigi 2. Hún er skrifuð upp í lok sýnidæmis 9.7.2(v), $r(z) = e^{2t} + te^{2t}(z-2)+\frac{1}{2}t^2e^{2t}(z-2)^2$ og því verður veldisvísisfallið $e^{tA} = e^{2t}I+te^{2t}(A-2I)+\frac{1}{2}t^2e^{2t}(A-2I)^2$. Lausnin á upphafsgildisverkefninu verður síðan $u(t) = e^{tA}b = e^{2t}b_0+te^{2t}b_1+\frac{1}{2}t^2e^{2t}b_2$ þar sem

$$b_0 = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b_1 = (A-2I)b_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = (A-2I)b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Svarið er því $u(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + te^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$ □

Sýnidæmi 9.7.5 Fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hefur tvöföld eigingildi ± 1. Finnið e^{tA} og reiknið síðan út lausnina á upphafsgildisverkefninu $u' = Au$, $u(0) = [1-1, 0, 0]^t$.

Lausn: Við þurfum að finna margliðu $r(z)$ af stigi ≤ 3 sem uppfyllir $r(1) = f(1)$, $r'(1) = f'(1)$, $r(-1) = f(-1)$ og $r'(-1) = f'(-1)$, þar sem $f(z) = e^{tz}$. Til þess reiknum við fyrst út mismunakvótana fyrir þetta brúunarverkefni

$$\begin{array}{lllll}
\lambda_1 = 1 & e^t & & & \\
 & & te^t & & \\
\lambda_2 = 1 & e^t & & \frac{1}{2}(te^t - \sinh t) & \\
 & & \sinh t & & \frac{1}{2}(t\cosh t - \sinh t) \\
\lambda_3 = -1 & e^{-t} & & \frac{1}{2}(\sinh t - te^{-t}) & \\
 & & te^{-t} & & \\
\lambda_4 = -1 & e^{-t} & & &
\end{array}$$

Margliðan er

$$r(z) = e^t + te^t(z-1) + \tfrac{1}{2}(te^t - \sinh t)(z-1)^2 + \tfrac{1}{2}(t\cosh t - \sinh t)(z-1)^2(z+1) \tag{9.7.9}$$

og veldisvísisfylkið

$$e^{tA} = e^tI + te^t(A-I) + \tfrac{1}{2}(te^t - \sinh t)(A-I)^2 + \tfrac{1}{2}(t\cosh t - \sinh t)(A-I)^2(A+I). \tag{9.7.10}$$

Lausnin er $u(t) = e^{tA}b = e^t b_0 + te^t b_1 + \frac{1}{2}(te^t - \sinh t)b_2 + \frac{1}{2}(t\cosh t - \sinh t)b_3$, það sem vigrarnir b_0, b_1, b_2 og b_3 eru reiknaðir út hver á fætur öðrum

$$b_0 = b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = (A-I)b_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = (A-I)b_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_3 = (A+I)b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Svarið verður því

$$u(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}(te^t - \sinh t) \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

□

Sýnidæmi 9.7.6 Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

og ákvörðum $\sin A$, $\cos A$ og $\cos^2 A + \sin^2 A$

Lausn: Ef A er $m \times m$ fylki og f er heilt fágað fall með veldaraðarframsetninguna $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, þá er $m \times m$ fylkið $f(A)$ skilgreint með veldaröðinni $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ þar sem $A^0 = I$ er einingarfylkið. Ef fylkið A er hornalínugeranlegt, þá er unnt að skrifa $A = T\Lambda T^{-1}$, þar sem Λ er hornalínufylkið með eigingildin $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ á hornalínunni og $T = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m]$ hefur tilsvarandi eiginvigra fyrir dálkvigra. Í þessu tilfelli er $f(A) = Tf(\Lambda)T^{-1}$ og $f(\Lambda)$ er hornalínufylkið með $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m)$ á hornalínunni.

Snúum okkur nú að fylkinu A í dæminu. Finnum fyrst kennimarliðuna

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Eigingildin eru $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 4$. Tilsvarandi eiginvigra getum við valið $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Við setjum síðan

$$T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{sem gefur } T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Um sérhvert fágað fall f gildir því

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & f(4) \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= f(1) \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &+ f(4) \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= f(1) \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + f(4) \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Við fáum $\sin A$ og $\cos A$ með því að setja inn viðeigandi fallgildi í þessa formúlu. Ef við táknum $f(A) = f(1)A_1 + f(4)A_2$ þar sem A_1 og A_2 eru tvö síðustu fylkin þá sjáum við að

$$A_1^2 = A_1, \quad A_2^2 = A_2, \quad A_1A_2 = A_2A_1 = O \quad \text{og} \quad A_1 + A_2 = I.$$

Þetta gefur okkur að

$$\begin{aligned} \sin A &= (\sin 1)A_1 + (\sin 4)A_2, \\ \cos A &= (\cos 1)A_1 + (\cos 4)A_2, \\ \sin^2 A &= \sin A \cdot \sin A = (\sin^2 1)A_1 + (\sin^2 4)A_2, \\ \cos^2 A &= \cos A \cdot \cos A = (\cos^2 1)A_1 + (\cos^2 4)A_2. \end{aligned}$$

Þar með er $\cos^2 A + \sin^2 A = I$. □

Sýnidæmi 9.7.7 Gilda reglurnar

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I \qquad \text{og} \qquad \cosh^2 A - \sinh^2 A = I$$

um öll $m \times m$ fylki A?

Lausn: Svarið er já. Ef $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, þá er veldaröðin fyrir $h(z) = f(z) + g(z)$ gefin með summu veldaraðanna, þ.e.a.s. $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ og því er $h(A) = f(A) + g(A)$. Þessa formúlu skrifum við líka sem $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$. Samlagningarmerkið vinstra megin þýðir samlagning fallanna f og g en hægra megin þýðir það samlagning fylkjanna $f(A)$ og $g(A)$. Eins fæst ef við setjum $h(z) = f(z)g(z)$ að veldaröð fallsins h er margfeldi veldaraða f og g með stuðlana $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$. Við fáum eins $h(A) = f(A)g(A)$, sem við skrifum einnig sem $(fg)(A) = f(A)g(A)$. Þetta á að lesa þannig að vinstra megin stendur margfeldi fallanna f og g en hægra megin margfeldi fylkjanna $f(A)$ og $g(A)$.

Ef við táknum nú fallið sem gefið er með $z \mapsto \cos^2 z + \sin^2 z$ með $\cos^2 + \sin^2$, þá vitum við að veldaröð þess er veldaröð fastafallsins 1 og af því leiðir að

$$I = (\cos^2 + \sin^2)(A) = \cos^2 A + \sin^2 A = (\cos A)^2 + (\sin A)^2.$$

Formúlan um samband cosh og sinh er leidd út með sama hætti. □

9.8 Æfingardæmi

1. Finnið eigingildi og eiginvigra fylkjanna sem gefin eru og notið þau til þess að finna almenna lausn á jöfnuhneppinu $u' = Au$.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Finnið lausnina á upphafsgildisverkefninu $u' = Au$, $u(0) = b$, þar sem A táknar eitt af fylkjunum í dæmi 1 og b er gefið með

a) $b = [1, 0]^t$, b) $b = [1, 2]^t$, c) $b = [2, 1]^t$, d) $b = [0, 1]^t$.

3. Reiknið út sérlausn á hneppinu $u' = Au + f(t)$, þar sem A táknar eitt af fylkjunum í dæmi 1 og

$$\text{a) } f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \text{c) } f(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

4. Finnið lausn upphafsgildisverkefnisins

$$\begin{aligned} u_1' &= 2u_1 + 2u_2 + e^t, & u_1(0) &= 1, \\ u_2' &= 2u_1 + 5u_2 + t, & u_2(0) &= -1. \end{aligned}$$

5. Finnið almenna lausn á bilinu $t > 0$ fyrir afleiðujöfnuhneppið

$$\begin{aligned} u_1' &= 4u_1 - 2u_2 + t^{-3}, \\ u_2' &= 8u_1 - 4u_2 - t^{-2}. \end{aligned}$$

6. Reiknið út eigingildi og eiginvigra fylkjanna og finnið síðan almenna lausn á jöfnuhneppinu $u' = Au$.

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Finnið lausnina á upphafsgildisverkefninu $u' = Au$, $u(0) = b$, þar sem A táknar fylkin úr dæmi 6 og

a) $b = [1, 2, 3]^t$, b) $b = [-1, 0, 0]^t$.

8. Finnið lausn upphafsgildisverkefnisins

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_1(x) + 2u_2(x) + u_3(x), & u_1(0) &= 1, \\ u_2'(x) &= 2u_1(x) - 2u_3(x), & u_2(0) &= 2, \\ u_3'(x) &= -u_1(x) + 2u_2(x) + 3u_3(x), & u_3(0) &= 3. \end{aligned}$$

9. Látum A vera 2×2 fylki með eitt eigingildi λ, látum v vera tilsvarandi eiginvigur og gerum ráð fyrir að eiginrúmið sé einvítt. Látum w vera annan vigur, þannig að v og w séu línulega óháðir.

(a) Sýnið að ef við lítum á A sem línulega vörpun á $\mathbb{R}^2$, þá sé framsetningin á A miðað við grunninn $\{v, w\}$,

$$\begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

þar sem α er einhver tala.

(b) Sýnið að almenn lausn jöfnuhneppisins $u' = Au$ sé af gerðinni

$$u(t) = e^{\lambda t}\big(c_1 v + c_2(\alpha t v + w)\big),$$

þar sem c_1 og c_2 eru fastar.

10. Sýnið að um sérhvert $m \times m$ fylki gildi

$$\frac{d}{dt}\sin(tA) = A\cos(tA) \qquad \text{og} \qquad \frac{d}{dt}\cos(tA) = -A\sin(tA).$$

11. Gildir ójafnan $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ fyrir öll $m \times m$ fylki A?

12. Sýnið að $e^{tA} = I - A + e^t A$ ef A er ofanvarp, þ.e.a.s. $A^2 = A$.

13. Fyrir sérhvert $m \times m$ tvinnfylki $A = (a_{jk})$ skilgreinum við $A^* = (b_{jk})$ með formúlunni $b_{jk} = \bar{a}_{kj}$, þ.e.a.s. við byltum fylkinu A og tökum síðan samok af öllum stökunum. Ef A er raunfylki, þá er $A^* = A^T$ bylta fylkið. Við segjum að A sé *hornrétt fylki* ef $A^*A = I$, við segjum að A sé *samhverft fylki* ef $A^* = A$ og við segjum að A sé *skásamhverft fylki* ef $A^* = -A$.

a) Sýnið að $e^{A^*} = \big(e^A\big)^*$.

b) Sýnið að e^{tA} sé hornrétt fyrir öll $t \in \mathbb{R}$, ef A er skásamhverft.

14. Látum $\Phi(t)$ vera grunnfylki fyrir línulega jöfnuhneppið $u' = Au$, þar sem A er $m \times m$ fylki með fastastuðla. Sýnið að $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

15. a) Látum A vera $m \times m$ fylki og b og c vera m-dálkvigra. Sýnið að upphafsgildisverkefnið $u' = Au + c$, $u(a) = b$ hafi lausnina

$$u(t) = e^{(t-a)A}b + \left(\int_0^{t-a} e^{\tau A}\, d\tau\right)c.$$

b) Sýnið að heildið í (a) sé jafnt $\big(e^{(t-a)A} - I\big)A^{-1}$ ef A er andhverfanlegt fylki.

c) Reiknið lausnina út í tilfellinu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a = 0.$$

16. Látum A vera $m \times m$ fylki.

a) Látum λ vera eigingildi þess og ε vera tilsvarandi eiginvigur. Sýnið að fallið $\mathbf{v}(t) = te^{\lambda t}\varepsilon$ er lausn á jöfnunni $\mathbf{v}'(t) = A\mathbf{v}(t) + e^{\lambda t}\varepsilon$.

b) Sýnið að ef λ_1 og λ_2 eru ólík eigingildi fylkisins A og ε_1 og ε_2 eru tilsvarandi eiginvigrar, þá er fallið $\mathbf{w}(t) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 t}\varepsilon_2$ lausn á jöfnunni $\mathbf{w}'(t) = A\mathbf{w}(t) + e^{\lambda_1 t}\varepsilon_2$

c) Látum nú $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ vera gefið fylki. Ákvarðið lausn á upphafsgildisverkefninu

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + e^{-2t}\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

17. Reiknið út afleiðuna af $e^{A(t)}$, þar sem $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og sýnið að hún sé hvorki $A'(t)e^{A(t)}$ né $e^{A(t)}A'(t)$.

18. Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sýnið að fylkin $e^A e^B$, $e^B e^A$ og e^{A+B} séu ólík.

19. abcd) Notið Newton-margliður til þess að finna veldisvísisfylkið e^{tA}, þar sem A táknar fylkin í dæmi 1. Leysið síðan upphafsgildisverkefnin í dæmi 2 með því að framkvæma margföldunina $e^{tA}b$.

20. ab) Notið Newton-margliður til þess að finna veldisvísisfylkið e^{tA}, þar sem A táknar fylkin í dæmi 6. Leysið síðan upphafsgildisverkefnin í dæmi 7.

21. Notið Newton-margliður til þess að reikna út e^{tA}, þar sem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

og finnið lausnina á upphafsgildisverkefnunum $u' = Au$, $u(0) = b$, þar sem $b = [1, 2, 3]^t$.

22. **a)** Reiknið út e^{tA}, þar sem $A = \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ -16 & -9 \end{bmatrix}$.

b) Notið **a)**-lið til að leysa upphafsgildisverkefnið

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 15u_1(t) + 9u_2(t) + 3e^{3t}, && u_1(0) = 0 \\ u_2'(t) &= -16u_1(t) - 9u_2(t) - 4e^{3t}, && u_2(0) = 1. \end{aligned}$$

23. **a)** Reiknið e^{tA}, þar sem $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Notið **a)**-lið til að leysa upphafsgildisverkefnið

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(t), && u_1(0) = 0 \\ u_2'(t) &= u_1(t) + 3u_2(t), && u_2(0) = 1, \\ u_3(t) &= u_2(t) + u_3(t), && u_3(0) = 2. \end{aligned}$$

24. Leysið upphafsgildisverkefnið $u' = Au$, $u(0) = b$, þar sem

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

25. Reiknið veldisvísisfallið $e^{t\mathbf{A}}$ fyrir $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

26. Reiknið $e^{t\mathbf{A}}$, þar sem $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Kafli 10

LAPLACE–UMMYNDUN

Samantekt. Í þessum kafla fjöllum við um aðgerð sem nefnist Laplace–ummyndun. Hún er mikilvægt hjálpartæki við úrlausn á alls kyns verkefnum í hagnýttri stærðfræði. Við beitum henni til þess að leysa upphafsgildisverkefni. Meginhugmyndin að baki Laplace-ummyndun er að með henni er hægt að umbreyta afleiðujöfnum yfir í algebrulegar jöfnur.

10.1 Skilgreiningar og reiknireglur

Látum f vera fall sem skilgreint er á $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$ með gildi í $\mathbb{C}$ og gerum ráð fyrir að f sé heildanlegt á sérhverju lokuðu og takmörkuðu bili $[0, b]$. *Laplace–mynd* f, sem við táknum með $\mathcal{L}f$ eða $\mathcal{L}\{f\}$, er skilgreind með formúlunni

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{10.1.1}$$

Skilgreiningarmengi fallsins $\mathcal{L}f$ samanstendur af öllum tvinntölum s þannig að heildið í hægri hliðinni sé samleitið. *Laplace-ummyndun* er vörpunin $\mathcal{L}$ sem úthlutar falli f Laplace-mynd sinni $\mathcal{L}f$.

Skilgreining 10.1.1 Við segjum að fallið $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ sé af veldisvísisgerð ef til eru jákvæðir fastar M og c þannig að

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{10.1.2}$$

□

Ef f er heildanlegt á sérhverju takmörkuðu bili $[0, b]$ og uppfyllir (10.1.2), þá er $\mathcal{L}f$ skilgreint fyrir öll $s \in \mathbb{C}$ með $\operatorname{Re} s > c$. Við fáum að auki vaxtartakmarkanir á $\mathcal{L}f$,

$$|\mathcal{L}f(s)| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} st} Me^{ct}\, dt = \frac{M}{\operatorname{Re}\, s - c}, \qquad \operatorname{Re}\, s > c. \tag{10.1.3}$$

Það er augljóst að Laplace-ummyndun er línuleg vörpun, en það þýðir að

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s)$$

ef f og g eru föll af veldisvísisgerð, α og β eru tvinntölur og $s \in \mathbb{C}$ liggur í skilgreiningarmengi fallanna $\mathcal{L}\{f\}$ og $\mathcal{L}\{g\}$.

Við þurfum að leiða út nokkrar reiknireglur fyrir Laplace-ummyndun. Sú fyrsta segir okkur að Laplace-myndir falla af veldisvísisgerð séu fáguð föll og hún segir okkur einnig að afleiður af Laplace-myndum af slíkum föllum séu einnig Laplace myndir:

Setning 10.1.2 *Látum $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vera fall sem er heildanlegt á sérhverju bili $[0, b]$ og uppfyllir (10.1.2). Þá er $\mathcal{L}f$ fágað á menginu $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > c\}$ og*

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}\{f\}(s) = (-1)^k\mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s), \qquad \operatorname{Re} s > c. \tag{10.1.4}$$

□

Sönnun: Við skrifum $s = \zeta = \xi + i\eta$ og lítum á heildisstofninn

$$F(\xi, \eta, t) = e^{-(\xi+i\eta)t} f(t),$$

en hann er óendanlega oft deildanlegur sem fall af ξ og η og við höfum á sérhverju hálfplani $\{\zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\zeta = \xi > c + \varepsilon\}$, þar sem $\varepsilon > 0$, að

$$|F(\xi, \eta, t)| \leq e^{-\xi t} M e^{ct} \leq M e^{-\varepsilon t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

og fyrir afleiður fáum við matið

$$|\partial_\xi^k \partial_\eta^\ell F(\xi, \eta, t)| \leq M t^{k+\ell} e^{-\varepsilon t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Í hægri hlið þessarar ójöfnu stendur fall óháð ξ og η, sem er heildanlegt á $\mathbb{R}_+$. Setning sem kennd er við franska stærðfræðinginn Lebesgue segir okkur nú að $\mathcal{L}f(\xi + i\eta)$ sé óendanlega oft deildanlegt og að við megum taka afleiður af $\mathcal{L}f(s)$ með því að deilda með tilliti til s undir heildið. Þar með er (10.1.4) sönnuð. Að Laplace–myndin sé fágað fall leiðir af Cauchy–Riemann–jöfnunum,

$$(\partial_\xi + i\partial_\eta)\mathcal{L}\{f\}(\xi + i\eta) = \int_0^\infty (\partial_\xi + i\partial_\eta) e^{-(\xi+i\eta)t} f(t)\, dt = 0.$$

■

Við snúum okkur nú að því að reikna út Laplace–myndir af nokkrum föllum:

Sýnidæmi 10.1.3 Ef $\alpha \in \mathbb{R}$ og $\alpha > -1$, þá er

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha\, dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-st}(st)^\alpha\, s dt \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Ef α er heiltala, þá verður þessi formúla

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}.$$

Fyrir sérhvert $\alpha \in \mathbb{C}$ gildir

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \left[\frac{-e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha},$$

og í framhaldi af þessu fáum við

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\beta t\}(s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\beta t}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\beta t}\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i\beta} + \frac{1}{s+i\beta}\right] = \frac{s}{s^2+\beta^2}, \\
\mathcal{L}\{\sin\beta t\}(s) &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{i\beta t}\}(s) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-i\beta t}\}(s) \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-i\beta} - \frac{1}{s+i\beta}\right] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \\
\mathcal{L}\{\cosh\beta t\}(s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\beta t}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\beta t}\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\beta} + \frac{1}{s+\beta}\right] = \frac{s}{s^2-\beta^2}, \\
\mathcal{L}\{\sinh\beta t\}(s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\beta t}\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\beta t}\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\beta} - \frac{1}{s+\beta}\right] = \frac{\beta}{s^2-\beta^2}.
\end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 10.1.4 Finnið Laplace–myndir fallsins $f(t) = \sin^2 t$ og tilgreinið hvert er stærsta hlutmengi af $\mathbb{C}$ þar sem fallið $\mathcal{L}f$ er fágað.

Lausn:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t)\}(s) = \tfrac{1}{2}\big(\mathcal{L}\{1\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)}\right) \\
&= \frac{2}{s(s^2+4)}.
\end{aligned}$$

Fallið $\mathcal{L}f$ er fágað á menginu $\mathbb{C}\setminus\{0, 2i, -2i\}$. □

Við höfum almenna reiknireglu:

Setning 10.1.5 $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-\alpha)$. □

Sönnun:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f\}(s-\alpha).$$

■

Útreikninga okkar í sýnidæmi 10.1.3 getum við því tekið saman í

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{\alpha t}t^{\beta}\}(s) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(s-\alpha)^{\beta+1}}, \\
\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}(s) &= \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \\
\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}(s) &= \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \\
\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cosh\beta t\}(s) &= \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}, \\
\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\}(s) &= \frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}.
\end{aligned}$$

Í grein 10.5 sýnum við hvernig hægt er að beita andhverfuformúlu Fouriers til þess að sanna andhverfuformúlu fyrir Laplace-ummyndanir. Bein afleiðing af henni er að samfellt fall af veldisvísisgerð er ótvírætt ákvarðað af Laplace–mynd sinni:

Setning 10.1.6 *Gerum ráð fyrir að föllin $f, g \in C(\mathbb{R}_+)$ séu bæði af veldisvísisgerð og að til sé fasti c þannig að*

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s), \qquad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s \geq c.$$

Þá er $f(t) = g(t)$ fyrir öll $t \in \mathbb{R}_+$. □

Þessa setningu má einnig orða þannig að Laplace-ummyndun er eintæk vörpun á mengi allra samfelldra falla af veldisvísisgerð. Ef við sjáum að eitthvert fall $F(s)$ er Laplace-mynd af samfelldu falli f, þá segir setningin okkur að f er ótvírætt ákvarðað og við köllum þá f *andhverfa Laplace-mynd* af fallinu F og skrifum $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$.

Sýnidæmi 10.1.7 Finnið andhverfa Laplace–mynd fallsins

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2+4}.$$

Lausn: Við þurfum aðeins að umrita fallið $F(s)$ yfir í línulegar samantektir af föllum sem Laplace-myndir sem við þekkjum

$$\begin{aligned}
F(s) &= 3\cdot\frac{s}{s^2+4} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4} \\
&= 3\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) = \mathcal{L}\{3\cos 2t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\}(s).
\end{aligned}$$

Samkvæmt sýnidæmi 10.1.3 og setningu 10.1.6 er því

$$\mathcal{L}^{[-1]}F(t) = 3\cos 2t + \tfrac{1}{2}\sin 2t.$$

□

Fallið $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sem skilgreint er með

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{10.1.5}$$

kallast *Heaviside–fall.* Athugum að hliðrun þess $H_a(t) = H(t-a)$ uppfyllir

$$H_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geq a, \\ 0, & t < a, \end{cases} \tag{10.1.6}$$

og því er Laplace-mynd þess

$$\mathcal{L}H_a(s) = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad a > 0. \tag{10.1.7}$$

Við fáum reyndar almenna reiknireglu:

Setning 10.1.8 *Látum $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vera fall af veldisvísisgerð. Þá gildir um sérhvert $a \geq 0$ að*

$$\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}(s).$$

þar sem fallið $t \mapsto H(t-a)f(t-a)$ tekur gildið 0 fyrir öll $t < a$. □

Sönnun:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\}(s) &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt = \int_0^\infty e^{-s(a+\tau)} f(\tau)\, d\tau \\ &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}(s). \end{aligned}$$

■

Ef $u = (u_1, \dots, u_m) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^m$ er vigurgilt fall á jákvæða raunásnum, þá skilgreinum við Laplace-mynd u með því að taka Laplace-mynd af hnitaföllunum,

$$\mathcal{L}u(s) = (\mathcal{L}u_1, \dots, \mathcal{L}u_m).$$

Við förum eins að við að skilgreina Laplace-mynd af $p \times m$-fylkjagildu falli $U = (u_{jk})_{j,k=1}^{p,m}$, þar sem við skilgreinum $\mathcal{L}U(s)$ sem $p \times m$ fylkjagilda fallið

$$\mathcal{L}U(s) = (\mathcal{L}u_{jk}(s))_{j,k=1}^{p,m}.$$

Ef A er $p \times m$ fylki, þá er

$$\mathcal{L}\{Au\}(s) = A\mathcal{L}u(s). \tag{10.1.8}$$

Þessa reglu sönnum við með því að líta á $v = Au$, $v_j = a_{j1}u_1 + \cdots + a_{jm}u_m$ og notfæra okkur að Laplace-ummyndunin er línuleg vörpun. Það gefur okkur $\mathcal{L}v_j(s) = a_{j1}\mathcal{L}u_1(s) + \cdots + a_{jm}\mathcal{L}u_m(s)$. Vinstri hliðin í þessari jöfnu er þáttur númer j í vinstri hlið (10.1.8), en hægri hliðin er þáttur númer j í hægri hlið (10.1.8). Ef hins vegar A er eitthvert $q \times p$ fylki, þá fæst reglan

$$\mathcal{L}\{AU\}(s) = A\mathcal{L}U(s). \tag{10.1.9}$$

10.2 Upphafsgildisverkefni

Nú skulum við snúa okkur að kjarna málsins, en það er að taka fall $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ af veldisvísisgerð og reikna út heildið

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} f'(t)\,dt &= \big[e^{-st} f(t)\big]_0^b + \int_0^b s e^{-st} f(t)\,dt \\ &= s\int_0^b e^{-st} f(t)\,dt - f(0) + e^{-sb} f(b).\end{aligned}$$

Ef $\operatorname{Re} s$ er nógu stórt, þá getum við látið $b \to \infty$ og fáum því

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0). \tag{10.2.1}$$

Ef við gerum ráð fyrir að $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ og að bæði f og f' séu af veldisvísisgerð, þá fáum við með því að beita þessari formúlu tvisvar að

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s\mathcal{L}\{f'\}(s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0), \tag{10.2.2}$$

og með þrepun fáum við síðan:

Setning 10.2.1 *Ef $f \in C^m(\mathbb{R}_+)$ og $f, f', f'', \dots, f^{(m-1)}$, eru af veldisvísisgerð, þá er $\mathcal{L}\{f^{(m)}\}(s)$ skilgreint fyrir öll $s \in \mathbb{C}$ með $\operatorname{Re} s$ nógu stórt og*

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}\}(s) = s^m\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{m-1}f(0) - \cdots - sf^{(m-2)}(0) - f^{(m-1)}(0). \tag{10.2.3}$$

□

Sýnidæmi 10.2.2 Leysum upphafsgildisverkefnið

$$u'' - u' - 6u = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = -1.$$

Lausn: Við setjum $\mathcal{L}u(s) = U(s)$, og athugum að

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u'\}(s) &= sU(s) - u(0) = sU(s) - 2,\\ \mathcal{L}\{u''\}(s) &= s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s) - 2s + 1.\end{aligned}$$

Við tökum nú Laplace–mynd af báðum hliðum jöfnunnar og fáum

$$(s^2U(s) - 2s + 1) - (sU(s) - 2) - 6U(s) = 0,$$

og þar með er

$$U(s) = \frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}.$$

Nú þurfum við að finna stofnbrotaliðun af hægri hliðinni

$$\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}.$$

Til þess að finna A, margföldum við gegnum jöfnuna með $s-3$ og setjum síðan $s=3$. Þá hverfur seinni liðurinn í hægri hliðinni og við fáum $A=3/5$. Við margföldum síðan jöfnuna með $s+2$ og setjum síðan $s=-2$. Það gefur $B=7/5$. Þar með er

$$U(s)=\frac{3/5}{s-3}+\frac{7/5}{s+2}=\frac{3}{5}\mathcal{L}\{e^{3t}\}+\frac{7}{5}\mathcal{L}\{e^{-2t}\},$$

og svarið verður

$$u(t)=\frac{3}{5}e^{3t}+\frac{7}{5}e^{-2t}.$$

□

Sýnidæmi 10.2.3 Beitum Laplace-ummyndun til þess að leysa upphafsgildisverkefnið

$$u''+6u'+25u=0, \qquad u(0)=2,\ u'(0)=3.$$

Lausn: Við setjum $U(s)=\mathcal{L}u(s)$, tökum Laplace-mynd af báðum liðum jöfnunnar og stingum inn upphafsgildunum

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u''\}(s)&=s^2U(s)-su(0)-u'(0)=s^2U(s)-2s-3,\\ \mathcal{L}\{u'\}(s)&=sU(s)-u(0)=sU(s)-2.\end{aligned}$$

Laplace-myndin U verður þá að uppfylla jöfnuna

$$(s^2U(s)-2s-3)+6(sU(s)-2)+25U(s)=0,$$

en það jafngildir

$$U(s)=\frac{2s+15}{s^2+6s+25}=\frac{2s+15}{(s+3)^2+16}.$$

Nú vitum við að

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos 4t\}(s)=\frac{s+3}{(s+3)^2+16}$$

og

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin 4t\}(s)=\frac{4}{(s+3)^2+16}.$$

Við notfærum okkur þessa vitneskju og liðum U því í

$$\begin{aligned}U(s)&=2\cdot\frac{s+3}{(s+3)^2+16}+\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{(s+3)^2+16}\\ &=2\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos 4t\}(s)+\tfrac{9}{4}\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin 4t\}(s).\end{aligned}$$

Svarið er því

$$u(t)=2e^{-3t}\cos 4t+\tfrac{9}{4}e^{-3t}\sin 4t.$$

□

Áður en við snúum okkur að því að leysa afleiðujöfnuhneppi með Laplace-ummyndun, skulum við líta á veldisvísisfylkið:

Setning 10.2.4 *Um sérhvert $m \times m$ fylki A gildir*

$$\mathcal{L}\{e^{tA}\}(s) = (sI - A)^{-1}. \tag{10.2.4}$$

□

Sönnun: Setjum $U(t) = e^{tA}$. Þá er U lausn á upphafsgildisverkefninu

$$U' = AU, \qquad U(0) = I.$$

Við tökum Laplace-ummyndun af jöfnunni og fáum

$$s\mathcal{L}U(s) - U(0) = A\mathcal{L}U(s).$$

Þessi jafna jafngildir $(sI - A)\mathcal{L}U(s) = U(0) = I$ og þar með gildir (10.2.4). ■

Sýnidæmi 10.2.5 Við skulum reikna út e^{tA} þar sem fylkið er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Við höfum

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}.$$

Ákveða fylkisins er $\det(sI - A) = s^2 + 3s + 2$ og því er andhverfan

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Nú vitum við að $\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) = 1/(s+1)$ og $\mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) = 1/(s+2)$ og því verður svarið

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

□

Sýnidæmi 10.2.6 Notið Laplace–ummyndun til þess að finna lausn á upphafsgildisverkefninu

$$\begin{aligned} {u_1}' + {u_2}' &= e^t - e^{-t}, \qquad & u_1(0) &= 1, \\ {u_2}' + {u_3}' &= e^t, & u_2(0) &= 1, \\ {u_3}' + {u_1}' &= 2e^t + e^{-t}, & u_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lausn: Við táknum Laplace–myndir fallanna u_1, u_2, u_3 með U_1, U_2, U_3 og tökum Laplace-myndir beggja vegna jafnaðarmerkisins

$$\begin{aligned}
sU_1(s) - 1 + sU_2(s) - 1 &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1},\\
sU_2(s) - 1 + sU_3(s) &= \frac{1}{s-1},\\
sU_3(s) + sU_1(s) - 1 &= \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1}.
\end{aligned}$$

Jöfnuhneppið sem við þurfum að leysa er því

$$\begin{aligned}
U_1(s) + U_2(s) &= \frac{2}{s} + \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1},\\
U_2(s) + U_3(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1},\\
U_1(s) + U_3(s) &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s(s-1)} + \frac{1}{s(s+1)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+1}.
\end{aligned}$$

Með Gauss–eyðingu fáum við síðan

$$\begin{aligned}
U_1(s) &= \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\{e^t\}(s),\\
U_2(s) &= \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s),\\
U_3(s) &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^t - e^{-t}\}(s).
\end{aligned}$$

Svarið er því $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{-t}$ og $u_3(t) = e^t - e^{-t}$. □

Sýnidæmi 10.2.7 Beitum Laplace-ummyndun til þess að leysa upphafsgildisverkefnið

$$\begin{aligned}
u''(t) + 2u(t) + v'(t) &= 0, \qquad u(0) = u'(0) = 0,\\
v''(t) + 2v(t) - u'(t) &= 0, \qquad v(0) = 1,\ v'(0) = 0
\end{aligned}$$

Lausn: Við skilgreinum $U(s) = \mathcal{L}u(s)$ og $V(s) = \mathcal{L}v(s)$. Við beitum síðan reiknireglunum um Laplace-ummyndun af afleiðum og setjum inn upphafsgildin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u'\}(s) &= sU(s) - u(0) = sU(s),\\
\mathcal{L}\{v'\}(s) &= sV(s) - v(0) = sV(s) - 1,\\
\mathcal{L}\{u''\}(s) &= s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s),\\
\mathcal{L}\{v''\}(s) &= s^2V(s) - sv(0) - v'(0) = s^2V(s) - s.
\end{aligned}$$

Nú tökum við Laplace-myndir af öllum liðum í jöfnunum og setjum gildi þeirra inn í jöfnurnar

$$\begin{aligned}
s^2U(s) + 2U(s) + \big(sV(s) - 1\big) &= 0,\\
\big(s^2V(s) - s\big) + 2V(s) - sU(s) &= 0.
\end{aligned}$$

Nú setjum við þetta jöfnuhneppi upp á fylkjaformi

$$\begin{bmatrix} s^2+2 & s \\ -s & s^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Ákveða stuðlafylkisins er

$$(s^2+2)(s^2+2)+s^2 = s^4+5s^2+4 = (s^2+1)(s^2+4).$$

Þar með er

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \begin{bmatrix} s^2+2 & -s \\ s & s^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Nú þurfum við að finna stofnbrotaliðun á föllunum $U(s)$ og $V(s)$. Við athugum að annars stigs margliðurnar s^2+1 og s^2+4 eru óþáttanlegar yfir rauntölurnar, svo

$$U(s) = \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C+Ds}{s^2+4}.$$

Við margföldum í gegnum þessa jöfnu með s^2+1 og setjum síðan $s=i$ inn í hana. Það gefur

$$\frac{2}{3} = A+iB, \qquad A = \frac{2}{3}, \quad B = 0.$$

Nú margföldum við í gegn með s^2+4 og setjum síðan $s=2i$. Það gefur

$$-\frac{2}{3} = C+2iD, \qquad C = -\frac{2}{3}, \quad D = 0.$$

Þetta gefur okkur

$$U(s) = \frac{2/3}{s^2+1} + \frac{-2/3}{s^2+4} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s).$$

Við liðum $V(s)$ með sömu aðferð og fáum

$$V(s) = \frac{2}{3}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{\cos t\}(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s).$$

Lausnin er því $u(t) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$ og $v(t) = \frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t$. □

Sýnidæmi 10.2.8 Leysum annars stigs jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} {u_1}'' &= -3u_1 + u_2, & u_1(0) &= {u_1}'(0) = 0, \\ {u_2}'' &= 2u_1 - 2u_2 + 40\sin 3t, & u_2(0) &= {u_2}'(0) = 0. \end{aligned}$$

Lausn: Hér setjum við $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1\}(s)$ og $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2\}(s)$. Fyrst upphafsgildin eru óhliðruð, þá er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{u_1}'\} &= sU_1(s), & \mathcal{L}\{{u_1}''\} &= s^2U_1(s), \\ \mathcal{L}\{{u_2}'\} &= sU_2(s), & \mathcal{L}\{{u_2}''\} &= s^2U_2(s), \end{aligned}$$

og þar með verður jöfnuhneppið eftir Laplace–ummyndun að

$$\begin{aligned} s^2U_1(s) &= -3U_1(s) + U_2(s), \\ s^2U_2(s) &= 2U_1(s) - 2U_2(s) + \frac{120}{s^2+9}, \end{aligned}$$

sem jafngildir

$$\begin{bmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120/(s^2+9) \end{bmatrix}.$$

Ákveða fylkisins er $(s^2+3)(s^2+2) - 2 = s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2+1)(s^2+4)$. Við getum nú skrifað andhverfu stuðlafylkisins beint upp og fáum

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} \begin{bmatrix} s^2+2 & 1 \\ 2 & s^2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

Þar með er

$$U_1(s) = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}, \qquad U_2(s) = \frac{120(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}.$$

Stofnbrotaliðun gefur síðan

$$\begin{aligned} U_1(s) &= \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9} \\ &= 5\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - 4\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) + \mathcal{L}\{\sin 3t\}(s), \\ U_2(s) &= \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9} \\ &= 10\mathcal{L}\{\sin t\}(s) + 4\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) - 6\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s), \end{aligned}$$

og svarið er

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 5\sin t - 4\sin 2t + \sin 3t, \\ u_2(t) &= 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t. \end{aligned}$$

Við reiknuðum ekki út stofnbrotaliðunina á föllunum $U_1(s)$ og $U_2(s)$, en bendum á að fallið $U_1(s)$ var liðað í sýnidæmi 1.5.2. □

10.3 Green–fallið og földun

Lítum nú á afleiðujöfnu með fastastuðla

(10.3.1) $$P(D)u = (a_mD^m + \cdots + a_1D + a_0)u = f(t),$$

með upphafsskilyrðunum

(10.3.2) $$u(a) = b_0, u'(a) = b_1, \ \ldots, \ u^{(m-1)}(a) = b_{m-1}.$$

Með því að hliðra til tímaásnum, þ.e. skipta á fallinu $u(t)$ og $u(t-a)$, þá getum við gert ráð fyrir að $a=0$.

Í grein 7.5 sýndum við fram á að fallið u_p sem uppfyllir (10.3.1), með óhliðruðu upphafsskilyrðunum $b_0=\cdots=b_{m-1}=0$ er gefið með formúlunni

$$u_p(t)=\int_0^t G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{10.3.3}$$

þar sem G er Green–fall virkjans $P(D)$. Við skulum nú reikna út $U_p(s)=\mathcal{L}\{u_p\}(s)$. Vegna þess að upphafsgildin eru öll 0, þá er

$$\mathcal{L}\{u_p{}'\}(s)=sU_p(s), \qquad \mathcal{L}\{u_p{}''\}(s)=s^2U_p(s),\dots,$$
$$\mathcal{L}\{u_p^{(m)}\}(s)=s^mU_p(s).$$

Þetta gefur okkur að Laplace–mynd jöfnunnar (10.3.1) er

$$\mathcal{L}\{P(D)u_p\}(s)=(a_ms^m+\cdots+a_1s+a_0)U_p(s)=\mathcal{L}f(s),$$

sem er greinilega jafnan

$$P(s)U_p(s)=\mathcal{L}f(s),$$

og við fáum

$$\mathcal{L}\{u_p\}(s)=\frac{\mathcal{L}f(s)}{P(s)}. \tag{10.3.4}$$

Nú er Green–fallið $G(t,\tau)=g(t-\tau)$, þar sem g uppfyllir

$$P(D)g=0,\ g(0)=g'(0)=\cdots=g^{(m-2)}(0)=0,\ g^{(m-1)}(0)=\frac{1}{a_m}.$$

Ef við setjum $U(s)=\mathcal{L}g(s)$, þá fáum við

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g'\}(s)&=s\mathcal{L}\{g\}(s)-g(0)=sU(s),\\
\mathcal{L}\{g''\}(s)&=s^2\mathcal{L}\{g\}(s)-sg(0)-g'(0)\\
&=s^2U(s),\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\mathcal{L}\{g^{(m-1)}\}(s)&=s^{m-1}\mathcal{L}\{g\}(s)-s^{m-2}g(0)-\cdots-g^{(m-2)}(0)\\
&=s^{m-1}U(s),\\
\mathcal{L}\{g^{(m)}\}(s)&=s^m\mathcal{L}\{g\}(s)-s^{m-1}g(0)-\cdots-g^{(m-1)}(0)\\
&=s^mU(s)-\frac{1}{a_m}.
\end{aligned}$$

Við tökum nú Laplace-myndina af báðum hliðum jöfnunnar $P(D)g=0$ og fáum

$$(a_ms^mU(s)-1)+a_{m-1}s^{m-1}U(s)+\cdots+a_1sU(s)+a_0U(s)=0,$$

og við fáum $P(s)U(s) = 1$, sem jafngildir

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{P(s)}. \tag{10.3.5}$$

Við höfum því sýnt fram á að

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{u_p\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)\mathcal{L}\{f\}(s).$$

Þessi formúla er engin tilviljun, því við höfum:

Setning 10.3.1 *Ef f og g eru föll af veldisvísisgerð og heildanleg á sérhverju bili $[0,b]$, þá er*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s).$$

□

Sönnun: Gerum ráð fyrir að bæði föllin uppfylli (10.1.2) og tökum $s \in \mathbb{C}$ með $\operatorname{Re} s > c$. Þá er

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-s(t-\tau)}f(t-\tau)e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau dt.
\end{aligned}$$

Ef við lítum á þetta ítrekaða heildi sem tvöfalt heildi, þá er heildað yfir

$$M = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2; 0 \le \tau \le t, 0 \le t < +\infty\}.$$

Fallið $e^{-s(t-\tau)}f(t-\tau)$ er heildanlegt yfir jákvæða t–ásinn og fallið $e^{-s\tau}g(\tau)$ er heildanlegt yfir jákvæða τ–ásinn. Við megum nú skrifa tvöfalda heildið yfir M sem ítrekað heildi, þar sem röðinni er snúið við. Það gefur að síðasta heildið er jafnt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)}f(t-\tau)\,dt\right)e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau \\
&\qquad = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right)e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau \\
&\qquad = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s).
\end{aligned}$$

■

Athugið að

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Með því að velja $g(t) = 1$ og nota að $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, þá fæst:

Fylgisetning 10.3.2 *Ef f er af veldisvísisgerð og heildanlegt á sérhverju bili $[0, b]$, þá er*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}(s). \tag{10.3.6}$$

□

Földun tveggja falla $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er skilgreind með formúlunni

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

og talan t liggur í skilgreiningarmengi $f * g$ ef heildið er samleitið. Ef f er til dæmis heildanlegt á $\mathbb{R}$ og g er takmarkað, þá er földunin vel skilgreind fyrir öll $t \in \mathbb{R}$. Ef föllin f og g eru bæði skilgreind og heildanleg á $\mathbb{R}_+$, þá getum við framlengt skilgreiningarsvæði þeirra yfir í allt $\mathbb{R}$ með því að setja $f(t) = g(t) = 0$ fyrir öll $t < 0$. Þá er $f * g(t)$ skilgreint fyrir öll $t \in \mathbb{R}$ og

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Við getum því umritað setningu 10.3.1 sem

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}. \tag{10.3.7}$$

Sýnidæmi 10.3.3 Beitið Laplace–ummyndun til þess að finna lausn á jöfnunni

$$u(t) = t - \sin t - \int_0^t (t-\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Lausn: Við táknum Laplace-myndina með $U(s)$ og athugum að heildið er földun fallanna $t \mapsto t$ og $u(t)$. Við látum Laplace-ummyndunina verka beggja vegna jafnaðarmerkisins

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2}\cdot U(s).$$

Við leysum $U(s)$ út úr þessari jöfnu og fáum

$$U(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s-i)^2(s+i)^2}$$

Stofnbrotaliðun gefur

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{4i(s-i)} - \frac{1}{4(s-i)^2} - \frac{1}{4i(s+i)} - \frac{1}{4(s+i)^2} \\ &= \frac{1}{4i}\mathcal{L}\{e^{it}\}(s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{te^{it}\}(s) - \frac{1}{4i}\mathcal{L}\{e^{-it}\}(s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{te^{-it}\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t\cos t\}(s)\Big). \end{aligned}$$

Svarið er því $u(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$. □

10.4 Deildun Laplace–ummyndana

Við skulum nú athuga hvernig hægt er að nota regluna um deildun Laplace–mynda, sem við sönnuðum í setningu 10.1.2, til þess að reikna út Laplace–myndir af ýmsum föllum:

Sýnidæmi 10.4.1

$$\mathcal{L}\{(\sin t)/t\}(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s, \qquad s > 0.$$

Lausn: Setjum $U(s) = \mathcal{L}\{(\sin t)/t\}(s)$. Þá er

$$-U'(s) = \mathcal{L}\left\{t(\sin t)/t\right\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Þar með er

$$U(s) = C - \arctan s, \qquad s > 0,$$

þar sem C er fasti. Nú er $\lim_{s\to\infty} U(s) = 0$, svo $C = \pi/2$. □

Sýnidæmi 10.4.2

$$\mathcal{L}\{J_0\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}, \qquad s > 0.$$

Lausn: Fallið J_0 er lausn á Bessel–jöfnunni af röð 0 með upphafsskilyrðum,

$$tu'' + u' + tu = 0, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Við setjum $U(s) = \mathcal{L}\{J_0\}(s)$, og fáum

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{tu''\}(s) &= -\frac{d}{ds}(s^2U(s) - s) = -s^2U'(s) - 2sU(s) + 1,\\
\mathcal{L}\{u'\}(s) &= sU(s) - 1,\\
\mathcal{L}\{tu\}(s) &= -U'(s).
\end{aligned}$$

Jafnan sem U uppfyllir er því

$$(-s^2U'(s) - 2sU(s) + 1) + (sU(s) - 1) - U'(s) = 0,$$

og við fáum því

$$U'(s) = -\frac{s}{s^2+1}U(s),$$

og þar með

$$U(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Nú þarf einungis að sýna að $C = 1$. Við sjáum greinilega að $C = \lim_{s\to\infty} sU(s)$ og þurfum því einungis að sýna að þetta markgildi sé 1. Við sjáum á veldaröðinni

$$|J_0(t)| = |\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k}| \leq |\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} t^{2k}| \leq e^t$$

að J_0 er af veldisvísisgerð. Á sama hátt sést að afleiðan $J_0{}'$ er af veldisvísisgerð. Við höfum því

$$sU(s) = s\mathcal{L}\{J_0\}(s) = J_0(0) + \mathcal{L}\{J_0{}'\}(s) = 1 + \mathcal{L}\{J_0{}'\}(s),$$

en síðasti liðurinn stefnir á 0 ef $s \to \infty$. Þar með er $C = 1$. $\square$

Sýnidæmi 10.4.3

$$\mathcal{L}\{e^{-at^2}\}(s) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{s^2/4a} \int_{s/(2\sqrt{a})}^{\infty} e^{-\sigma^2}\, d\sigma, \qquad a > 0, \quad s > 0.$$

Lausn: Við setjum $u(t) = e^{-at^2}$, $U(s) = \mathcal{L}u(s)$ og athugum að u er lausn á upphafsgildisverkefninu

$$u' + 2atu = 0, \qquad u(0) = 1.$$

Við höfum

$$\mathcal{L}\{u'\}(s) = sU(s) - 1, \qquad \mathcal{L}\{tu\}(s) = -U'(s),$$

en það gefur okkur

$$sU(s) - 1 - 2aU'(s) = 0.$$

Nú er

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-at^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Við höfum því komist að því að U er lausn á upphafsgildisverkefninu

$$U'(s) - \frac{s}{2a} U(s) = -\frac{1}{2a}, \qquad U(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Þetta er fyrsta stigs afleiðujafna og lausnin er því

$$U(s) = e^{s^2/4a} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2a} \int_0^s e^{-\sigma^2/4a}\, d\sigma \right).$$

Við skiptum nú á breytistærðum í heildinu og setjum $\tau = \sigma/\sqrt{4a}$. Þá er $d\tau = (1/2\sqrt{a})d\sigma$ og við fáum

$$U(s) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{s^2/4a} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{s/\sqrt{4a}} e^{-\tau^2}\, d\tau \right).$$

Fallið

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

er nefnt *skekkjufall* og fallið $1 - \operatorname{erf}(x)$ er táknað með $\operatorname{erfc}(x)$. Við getum því táknað niðurstöðu okkar sem

$$\mathcal{L}\{e^{-at^2}\}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{s^2/4a} \operatorname{erfc}(s/\sqrt{4a}).$$

$\square$

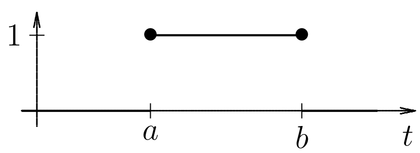
10.5 Æfingardæmi

1. Sýnið að fallið $f(t) = \sin(e^{t^2})$ sé af veldisvísisgerð, en að afleiða þess sé það ekki.

2. Finnið Laplace–myndir eftirtalinna falla og tilgreinið hvert er stærsta hlutmengi af $\mathbb{C}$ þar sem fallið $\mathcal{L}f$ er fágað:

a) $f(t) = \cos^4 t$, b) $f(t) = \sqrt{t} + 3t$, c) $f(t) = (1+t)^3$,
d) $f(t) = t\cos 2t$, e) $f(t) = te^t$, f) $f(t) = t^{\frac{3}{2}} e^{2t}$.

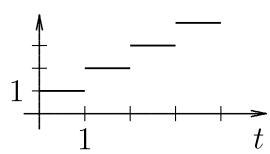
3. a) Reiknið út Laplace-mynd $f = \chi_{[a,b]}$, þar sem $\chi_{[a,b]}$ táknar kennifallið fyrir bilið $[a,b]$. Kennifall χ_A hlutmengis A í $\mathbb{R}$ (eða í einhverju mengi X) er skilgreint með $\chi_A(x) = 1$ ef $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ ef $x \notin A$.



Mynd: Kennifall bils.

Athugið að $\chi_{]a,b]}$, $\chi_{]a,b[}$ og $\chi_{[a,b[}$ hafa sömu Laplace mynd.

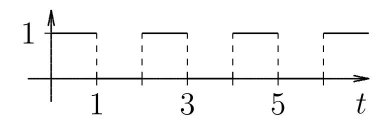
b) Reiknið út Laplace-myndina af fallinu f sem hefur grafið



með því að sýna að það uppfylli formúluna

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[n-1,n[}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(t-n).$$

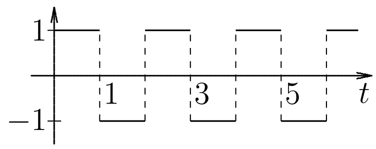
c) Reiknið út Laplace-myndina af fallinu f sem hefur grafið



með því að sýna að það uppfylli formúluna

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[2k,2k+1[}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H(t-n).$$

d) Reiknið út Laplace-myndina af fallinu f sem hefur grafið



með því að sýna að það uppfylli formúluna

$$f(t) = (-1)^{[t]} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1[}(t),$$

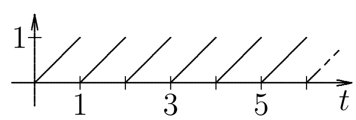
þar sem $[t]$ táknar heiltöluhluta tölunnar t.

4. Gerum ráð fyrir að f sé lotubundið fall með lotuna $T > 0$, þ.e.a.s. $f(t+T)$ fyrir öll $t \geq 0$. Sýnið að þá sé

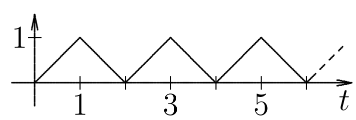
$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \cdot \mathcal{L}\{\chi_{[0,T]} f\}(s).$$

5. Notið niðurstöðuna úr dæmi 4 til þess að reikna út Laplace-myndir fallanna sem hafa gröfin:

a)

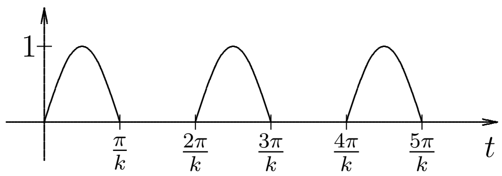


b)



6. Reiknið út Laplace-mynd fallsins

$$f(t) = \max\{\sin(kt), 0\}.$$



7. Finnið andhverfa Laplace–mynd fallanna:

a) $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$, b) $F(s) = \dfrac{5s+7}{s^2+9}$,

c) $F(s) = \dfrac{10s-3}{25-s^2}$, d) $F(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$,

e) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+1)(s+2)^2}$, f) $F(s) = \dfrac{se^{-s}+2s^2+9}{s(s^2+9)}$.

8. Beitið Laplace-ummyndun til þess að leysa:

a) $u'' - u' - 6u = 0, \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = -1,$

b) $u'' - 4u = t, \qquad u(0) = u'(0) = 0,$

c) $u'' + 4u' + 13u = te^{-t}, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 2,$

d) $u''' + u'' + 3u' - 5u = 0, \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 0,\ u''(0) = 1,$

e) $u''' - 5u'' + 8u' - 4u = 0, \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 0,\ u''(0) = 1.$

9. Beitið Laplace-ummyndun til þess að leysa upphafsgildisverkefnið

$$\begin{aligned} u_1'' &= -3u_1 + 2u_2', & u_1(0) &= u_2(0) = 0, \\ u_2'' &= -u_1' - 2u_2, & u_1'(0) &= u_2'(0) = 1. \end{aligned}$$

10. Beitið Laplace–ummyndun til þess að finna lausn á jöfnunum

a) $\int_0^t \cos(2(t-\tau))u(\tau)\,d\tau = t,$

b) $\int_0^t u(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = t^3e^t$

Kafli 11

NOKKUR UNDIRSTÖÐUATRIÐI UM HLUTAFLEIÐUJÖFNUR

11.1 Nokkur atriði um hlutafleiður og hlutafleiðujöfnur

Hlutafleiðujafna er jafna sem tjáir samband fallgilda og gilda á hlutafleiðum einhvers falls sem háð er fleiri en einni breytistærð. *Stig jöfnunnar* er hæsta stig á hlutafleiðu, sem kemur fyrir í jöfnunni. Það er til margs konar ritháttur til þess að tákna hlutafleiður og sem dæmi getum við tekið hlutafleiðu af fallinu u með tilliti til breytistærðarinnar x_j. Hún getur verið skrifuð sem

$$\partial_j u, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \partial_{x_j} u, \quad u'_{x_j} \quad \text{eða } u_{x_j}.$$

Í þessum fyrirlestrum notum við þrjár fyrstu aðferðirnar til þess að tákna hlutafleiður, en ekki fjórðu og fimmtu aðferðina, því þær koma illa heim og saman við annan ritháttt hjá okkur. Ef við veljum fyrsta rithátinn þá getum við alltaf skrifað fyrsta stigs jöfnu af tveimur breytistærðum með jöfnu af gerðinni

$$F(x_1, x_2, u(x_1, x_2), \partial_1 u(x_1, x_2), \partial_2 u(x_1, x_2)) = 0. \tag{11.1.1}$$

Til þess að stytta jöfnuna er sleppt að skrifa inn punktinn (x_1, x_2) þar sem fallgildin eru tekin og þannig fæst jafnan

$$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0. \tag{11.1.2}$$

Annars stigs jafna af tveimur breytistærðum er af gerðinni

$$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \partial_1^2 u, \partial_1\partial_2 u, \partial_2^2 u) = 0. \tag{11.1.3}$$

Fjölvísar – einföldun á rithætti

Á þessu einfalda dæmi sjáum við að hlutafleiðunum fjölgar hratt um leið og breytistærðunum fjölgar. Til þess að geta ritað flóknar hlutafleiðujöfnur með auðveldum hætti er nauðsynlegt að velja góðan rithátt. Það er best gert með því að skilgreina fyrst virkjann

$$\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n) = \text{grad} = \nabla, \tag{11.1.4}$$

sem úthlutar falli u af n breytistærðum $x = (x_1, \dots, x_n)$ stigli sínum,

$$\partial u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) = \text{grad } u = \nabla u. \tag{11.1.5}$$

Vigur af gerðinni $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ þar sem α_j eru heiltölur ≥ 0 kallast *fjölvísir* eða *fjölnúmer*. Fyrir sérhvern fjölvísi α skilgreinum við hlutafleiðuvirkjann

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \tag{11.1.6}$$

en hann úthlutar fallinu u hlutafleiðunni

$$\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} u. \tag{11.1.7}$$

Til þess að átta okkur á þessum rithætti skulum við líta á fall u af þremur breytistærðum $x = (x_1, x_2, x_3)$. Við höfum þá

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha u &= u\,, && \text{ef} \quad \alpha = (0,0,0)\,,\\
\partial^\alpha u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,, && \text{ef} \quad \alpha = (2,0,0)\,,\\
\partial^\alpha u &= \frac{\partial^6 u}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3}\,, && \text{ef} \quad \alpha = (1,2,3)\,,\\
\partial^\alpha u &= \frac{\partial^8 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^2 \partial x_3^3}\,, && \text{ef} \quad \alpha = (3,2,3)\,.
\end{aligned}$$

Stig hlutafleiðunnar $\partial^\alpha u$ er $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Línulegar hlutafleiðujöfnur

Hlutafleiðujafna af stigi m er sögð vera línuleg ef hægt er að umrita hana yfir í jafngilda jöfnu af gerðinni

$$Lu = f, \tag{11.1.8}$$

þar sem f er gefið fall á einhverju opnu mengi X í $\mathbb{R}^n$ og L er línuleg vörpun sem úthlutar fallinu u línulegri samantekt af u og hlutafleiðum u upp að stigi m með stuðlum sem eru háðir $x \in X$. Línuleg vörpun af þessu tagi nefnist *línulegur hlutafleiðuvirki* og við getum skrifað hana á forminu

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x), \qquad x \in X, \tag{11.1.9}$$

þar sem stuðullinn a_α er háður fjölvísinum $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ og punktinum $x = (x_1, \dots, x_n)$. Jafnan (11.1.8) er sögð vera *óhliðruð* ef f er núllfallið, en *hliðruð* annars.

Allar hlutafleiðujöfnur sem við fjöllum um eru línulegar. Ef stuðlarnir a_α eru samfelld föll, sem skilgreind eru á opnu mengi X í $\mathbb{R}^n$, þá getum við litið á L sem vörpun $L : C^m(X) \to C(X)$. Vörpunin L er greinilega línuleg, því

$$L(u+v) = Lu + Lv \qquad \text{og} \qquad L(cu) = cLu, \qquad u, v \in C^m(X), \quad c \in \mathbb{C}.$$

Við gerum alltaf ráð fyrir að föllin u geti verið tvinngild. *Kjarni* eða *núllrúm* línulegs hlutafleiðuvirkja L samanstendur af öllum lausnum $u \in C^m(X)$, á óhliðruðu jöfnunni $Lu = 0$. Núllrúmið er línulegt rúm. Ef u_p er lausn á $Lu = f$, þá er sérhver önnur lausn u á $Lu = f$ af gerðinni $u = v + u_p$, þar sem v er í núllrúminu.

Í mörgum útleiðslum á lausnarformúlum fyrir hlutafleiðujöfnur munum við notfæra okkur það sem kallað er *samlagningarlögmál* línulegra hlutafleiðuvirkja (e. *superposition principle*), en það segir að ef $Lu_j = f_j$, þar sem $u_j \in C^m(X)$ og $f_j \in C(X)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ og við setjum $u = \sum_j u_j$ og $f = \sum_j f_j$, þá er $Lu = f$. Hér er gert ráð fyrir að það megi láta hlutafleiðuvirkjann L verka lið fyrir lið í summunni fyrir u. Það er að sjálfsögðu hægt ef summan hefur endanlega marga liði. Samlagningarlögmálið er bein afleiðing af því að virkinn L er línulegur,

$$Lu = \sum_j Lu_j = \sum_j f_j = f.$$

Kennimargliða og kennijafna

Alveg eins og fyrir venjulega afleiðuvirkja þá skilgreinum við *kennimargliðu* virkjans L sem

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{11.1.10}$$

þar sem $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ og $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\dots\xi_n^{\alpha_n}$. Þetta er margliða af n breytistærðum af stigi $\le m$ með stuðlum sem breytast með x. Hliðstætt við ritháttinn sem við innleiddum í grein 2.1 er síðan hlutafleiðuvirkinn (11.1.9) einnig táknaður með

$$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha. \tag{11.1.11}$$

Lítum nú á veldisvísisfallið $u(x) = e^{\langle x, \zeta \rangle}$, þar sem $\langle x, \zeta \rangle = x_1\zeta_1 + \cdots + x_n\zeta_n$ er innfeldi $x \in \mathbb{R}^n$ og $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Þá er $\partial_{x_j} e^{\langle x, \zeta \rangle} = \zeta_j e^{\langle x, \zeta \rangle}$ og um hærri afleiður gildir $\partial^\alpha e^{\langle x, \zeta \rangle} = \zeta^\alpha e^{\langle x, \zeta \rangle}$. Eftir að hafa tekið línulegar samantektir af hlutafleiðunum, þá fáum við að

$$P(x, \partial)e^{\langle x, \zeta \rangle} = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\zeta^\alpha e^{\langle x, \zeta \rangle} = P(x, \zeta)e^{\langle x, \zeta \rangle}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ef virkinn hefur fastastuðla, $P(x, \partial) = P(\partial)$, þá sést að $u(x) = e^{\langle x, \zeta \rangle}$ er í núllrúminu ef ζ er núllstöð kennimargliðunnar, $P(\zeta) = 0$. Núllstöðvamengi margliðu af mörgum breytistærðum er alltaf óendanlegt og föllin $e^{\langle x, \zeta \rangle}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ eru línulega óháð. Þar með sjáum við að núllrúmið er óendanlega vítt.

Hlutafleiðujöfnur með hliðarskilyrðum

Í kafla 7 sáum við að lausn á venjulegri línulegri afleiðujöfnu af stigi m ákvarðast ótvírætt af m skilyrðum á lausnina í einum punkti, svokölluðum upphafsskilyrðum. Einnig gátum við fengið ótvírætt ákvarðaða lausn með því að setja m skilyrði á lausnina í tveimur punktum, svokölluð jaðarskilyrði. Lausnir u á línulegum hlutafleiðujöfnum ákvarðast ekki ótvírætt af gildum u og $\partial^\alpha u$, $|\alpha| \leq m$ í endanlega mörgum punktum og því eru *hliðarskilyrði* sett á lausnina á óendanlegum mengjum, sem oftast eru jaðrar á opnum hlutmengjum í $\mathbb{R}^n$. Þessi skilyrði nefnast ýmist *upphafsskilyrði* eða *jaðarskilyrði* og eru krafa um að lausnin og ákveðnar afleiður hennar taki fyrirfram gefin gildi á ákveðnum mengjum.

Þegar fjallað er um almenna eiginleika lausna á hlutafleiðujöfnum, er einfaldast að nota þann rithátt sem við höfum verið að lýsa. Flestar af þeim jöfnum, sem við munum fjalla um eru upprunnar í eðlisfræði og lausnirnar lýsa þá ástandi eðlisfræðilegra kerfa. Í eðlisfræði ráða fastar venjur um tákn á breytistærðum. Það er hyggilegt að fylgja þeim venjum og tákna breyturnar með $x, y, z, t, \dots,$ í stað $x_1, x_2, x_3, \dots$. Þannig er t notað til þess að tákna *tíma* og (x, y, z) notað til að tákna staðarvigur í *rétthyrndum hnitum*. *Pólhnit* í plani eru táknuð með (r, θ). *Kúluhnit* í þrívíðu rúmi eru táknuð með (r, θ, ϕ).

11.2 Hlutafleiðujöfnur í eðlisfræði

Hlutafleiðujöfnur koma fyrir í ótal tilbrigðum í eðlisfræði. Lausnir þeirra lýsa ástandi eðlisfræðilegra kerfa eða eru nálganir á ástandsstærðum. Við munum nú taka nokkur dæmi um slíkar hlutafleiðujöfnur. Við nefnum helstu eðlisfræðilögmál, sem til grundvallar liggja, en förum ekki út í ítarlegar útskýringar á þeim. Til þess að kafa dýpra í lögmálin, þarf lesandinn að taka fram bækur um efnið, sem lesnar eru í eðlis- og verkfræðinámskeiðum. Hér einbeitum við okkur að stærðfræðilega hluta útleiðslanna í þeim tilgangi að sýna hversu fjölbreytileg þessi fræði eru.

Hitastig í föstu efni – varmaleiðnijafna

Sýnidæmi 11.2.1 (*Hitastig; varmaleiðnijafna*).

Varmaleiðnijafna kemur fyrir þegar fjallað er um líkön fyrir hitastig $T = T(x, y, z, t)$ í föstu efni en það er fall af þremur rúmbreytistærðum (x, y, z) og tíma t. Við látum $\varrho = \varrho(x, y, z)$ tákna eðlismassa efnisins og $c = c(x, y, z)$ varmarýmd þess. Til grundvallar leggjum við lögmál Fouriers, sem segir að varmaflæðið $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ sé gefið með formúlunni

$$\vec{v} = -\lambda \nabla T = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{11.2.1}$$

þar sem fallið $\lambda = \lambda(x, y, z) > 0$ kallast *varmaleiðnistuðull* efnisins. Þetta þýðir að ef við lítum á lítinn flatarskika dA umhverfis punktinn (x, y, z) með þvervigur $\vec{n}$, þá er varmaorkan sem flæðir á tímaeiningu í gegnum skikann í stefnu $\vec{n}$ jöfn

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dA = -\lambda \langle \nabla T, \vec{n} \rangle dA.$$

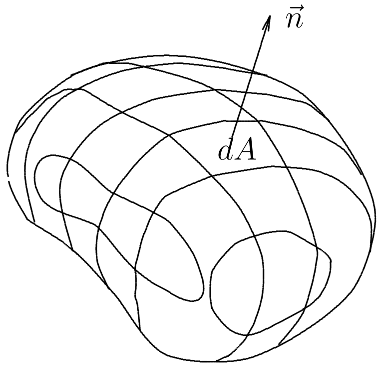
Við látum $F(x, y, z, t)$ tákna þá varmaorku sem myndast í punktinum (x, y, z) á rúm- og tímaeiningu. Ef $F(x, y, z, t) > 0$ þá hitnar efnið umhverfis punktinn (x, y, z) á tímanum t, en ef $F(x, y, z, t) < 0$ þá kólnar það.

Nú lítum við á lítinn rúmskika D með jaðri ∂D og athugum orkuvarðveisluna í honum. Við táknum *ytri* þvervigurinn á jaðarinn með $\vec{n}$. Varmaorkan í D sem fall af tíma er þá

$$E(t) = \iiint\limits_D c\varrho T\, dV.$$

Lögmálið um varðveislu orkunnar segir okkur að breyting varmaorkunnar í D sé jöfn summu þeirrar orku sem flæðir inn gegnum jaðarinn og þeirrar orku sem myndast inni í D. Þetta tjáum við með jöfnunni

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_D c\varrho T\, dV = \iint\limits_{\partial D} \lambda\langle\nabla T, \vec{n}\rangle\, dA + \iiint\limits_D F\, dV.$$



Mynd: Varmaflæði

Í þessari jöfnu táknar $dV = dxdydz$ rúmmálsfrymið í D, en dA táknar flatarmálsfrymið á yfirborðinu ∂D. Athugið að flæði inn gegnum jaðarinn er í stefnu $-\vec{n}$. Nú beitum við Gauss–setningunni á flæðið $\vec{v} = -\lambda\nabla T$

$$\iint\limits_{\partial D} \langle\vec{v}, \vec{n}\rangle dA = \iiint\limits_D \nabla\cdot\vec{v}\, dV.$$

Við getum því skrifað jöfnuna um orkuvarðveisluna í D sem

$$\iiint\limits_D \left(c\varrho\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla\cdot\big(\lambda\nabla T\big) - F\right) dV = 0.$$

Fyrst þessi jafna gildir hvernig sem rúmskikinn D er valinn, þá verður heildisstofninn að vera 0 og við fáum jöfnuna

$$c\varrho\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla\cdot\big(\lambda\nabla T\big) = F(x, y, z, t). \tag{11.2.2}$$

Ef við gerum ráð fyrir að ϱ, c og λ séu fastar og setjum $\kappa = \lambda/(c\varrho)$ og $f = F/(c\varrho)$, þá fáum við að hitastigið T uppfyllir *varmaleiðnijöfnuna*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\nabla\cdot\big(\nabla T\big) = \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\Delta T = f(x, y, z, t), \tag{11.2.3}$$

þar sem Δ táknar Laplace–virkjann,

$$\Delta T = \nabla \cdot \big(\nabla T\big) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \tag{11.2.4}$$

Varmaleiðnijafnan nefnist einnig *sveimjafna*. Sú nafngift á við þegar verið er að lýsa styrk $u(x, y, z, t)$ á uppleystu efni í vökva. Útleiðslan á sveimjöfnunni er hliðstæð útleiðslu okkar hér að framan. Í stað lögmáls Fouriers kemur lögmál Flicks, en það segir að flæði efnisins sé $-\kappa\nabla u$ og í þessu samhengi er κ þá nefnt *sveimstuðull*. □

Samhverfa – varmaleiðnijafna í einni og tveimur rúmvíddum

Sýnidæmi 11.2.2 (*Einfaldanir á varmaleiðnijöfnu*). Varmaleiðnijafnan lýsir eiginleikum falls T af fjórum breytistærðum. Í ýmsum verkefnum er hægt að gera ráð fyrir samhverfu af einhverju tagi og með því fækkar óháðu rúmbreytistærðunum. Ef við gerum ráð fyrir því að varmaflæðið sé alltaf samsíða ákveðnu plani, sem við veljum sem (x, y)-plan, þá fáum við tvívíðu varmaleiðnijöfnuna

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = f(x, y, t). \tag{11.2.5}$$

Ef hægt er að gera ráð fyrir því að varmaflæðið sé alltaf samsíða ákveðinni línu, sem við veljum sem x-ás, þá fæst

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x, t). \tag{11.2.6}$$

Þetta á við um hitastig í vegg, jarðlögum eða stöng, þar sem gert er ráð fyrir að varmaflæðið sé alls staðar í sömu stefnu. Ef við tökum stöng af lengd L sem dæmi og veljum hnitin þannig að x-ásinn sé eftir stönginni, þá uppfyllir hitastigið

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x, t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{11.2.7}$$

og fallið $c\varrho f(t, x)$ gefur varmaframleiðsluna í stönginni á lengdar- og tímaeiningu. Jaðarskilyrðin sem sett eru í endapunktinum $x = 0$ gætu til dæmis verið eitt af þrennu,

$$T(0, t) = T_0, \qquad -\lambda\partial_x T(0, t) = v_0, \qquad -\lambda\partial_x T(0, t) = kT(0, t). \tag{11.2.8}$$

Fyrsta skilyrðið er að hitastigið sé fast í enda stangarinnnar, annað skilyrðið segir að varmaflæðið gegnum enda stangarinnar sé fast og það þriðja segir að varmaflæðið gegnum enda stangarinnar sé í hlutfalli við hitastigið þar. Hliðstæð skilyrði má hugsa sér í punktinum $x = L$. Dæmigert upphafs- og jaðargildisverkefni gæti síðan verið að leysa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = f(x, t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ T(0, t) = T_0, \qquad -\lambda\partial_x T(L, t) = kT(L, t). \end{cases} \tag{11.2.9}$$

Hugsum okkur nú að fallið f sem lýsir varmamynduninni í stönginni sé einungis háð x en ekki háð tíma t, $f = f(x)$ og að við vitum að markgildin $\lim_{t\to+\infty} \partial_t T(x, t) = 0$,

$\lim_{t\to+\infty} T(x,t) = u(x)$, $\lim_{t\to+\infty} \partial_x T(x,t) = u'(x)$, $\lim_{t\to+\infty} \partial_x^2 T(x,t) = u''(x)$ séu öll til. Þá segjum við að u lýsi *æstæðu hitaástandi* í stönginni. Til þess að finna u þurfum við þá að leysa jaðargildisverkefnið

$$-\kappa u'' = f(x), \quad 0 < x < L, \qquad u(0) = T_0, \qquad -\lambda u'(L) = ku(L). \tag{11.2.10}$$

□

Varmajafnvægi – Laplace-jafna og Poisson-jafna

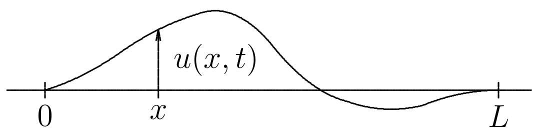
Sýnidæmi 11.2.3 (*Varmajafnvægi*). Oft er áhugavert að líta á *tímaóháð ástand* eða *æstætt ástand*. Þá er einfaldlega gert ráð fyrir því að tímaafleiðan sé 0 og að ytri áhrif á kerfið séu tímaóháð. Hliðraða varmaleiðnijafnan einfaldast þá í *Poisson-jöfnuna*

$$-\kappa \Delta u = f(x,y,z), \tag{11.2.11}$$

Ef engin varmamyndun er í svæðinu, þá einfaldast varmaleiðnijafnan í *Laplace-jöfnu*, $\Delta u = 0$. □

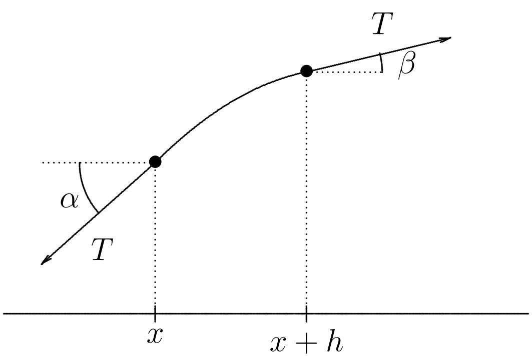
Sveiflandi strengur – bylgjujafna í einni rúmvídd

Sýnidæmi 11.2.4 (*Strengur; bylgjujafna*). Í sýnidæmi 6.3.2 leiddum við út hreyfijöfnur fyrir festi. Nú skulum við líta á skylt dæmi. Það er strengur af lengd L og massa m. Við gerum ráð fyrir að hann sé strekktur, festur niður í báðum endapunktum og að hann sveiflist í plani. Við veljum hnit þannig að stengurinn sé á x-ás þegar hann er í kyrrstöðu og látum $u(x,t)$ tákna færslu strengsins frá punktinum x.



Mynd: Strengur

Til þess að leiða út jöfnu fyrir hreyfingu strengsins, þá skoðum við lítinn bút af honum á einhverju augnabliki t yfir bilinu $[x, x+h]$.



Mynd: Kraftar í streng

Ef T táknar spennuna í strengnum, þá er lóðrétti þáttur togkraftsins, sem verkar á bútinn,

$$-T\sin\alpha + T\sin\beta.$$

Við athugum að *bogalengdarfrymið* á strengnum er

$$ds = \sqrt{1 + \big(\partial_x u(x,t)\big)^2}\, dx$$

og

$$\sin\alpha = \frac{\partial_x u(x,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{\partial_x u(x+h,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x+h,t)\big)^2}}.$$

Annað lögmál Newtons gefur okkur því

$$\int_x^{x+h} \varrho\partial_t^2 u(\xi,t)\sqrt{1+\big(\partial_x u(\xi,t)\big)^2}\, d\xi = T\bigg(\frac{\partial_x u(x+h,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x+h,t)\big)^2}} - \frac{\partial_x u(x,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2}}\bigg),$$

þar sem $\varrho = m/L$ táknar massa á lengdareiningu í strengnum. Nú gerum við til einföldunar ráð fyrir því að útslagið sé það lítið að

$$\sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2} \approx 1$$

og þar með að það megi fella niður kvaðratræturnar í þessum jöfnum. Þá fáum við

$$\int_x^{x+h} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)\, d\xi = T\bigg(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\bigg).$$

Nú deilum við í gegnum jöfnuna með h og látum síðan h stefna á núll. Þá fáum við *bylgjujöfnuna*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad c = \sqrt{T/\varrho}. \tag{11.2.12}$$

Strengurinn er festur niður í báðum endapunktum, svo við fáum náttúrleg jaðarskilyrði

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{11.2.13}$$

Þetta líkan má bæta á ýmsa vegu. Ef gert er ráð fyrir að ytri kraftur verki á strenginn og að $F(x,t)$ sé kraftur á lengdareiningu, sem verkar á strenginn í punkti x við tímann t, þá uppfyllir færslan $u(x,t)$ hliðruðu bylgjujöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{11.2.14}$$

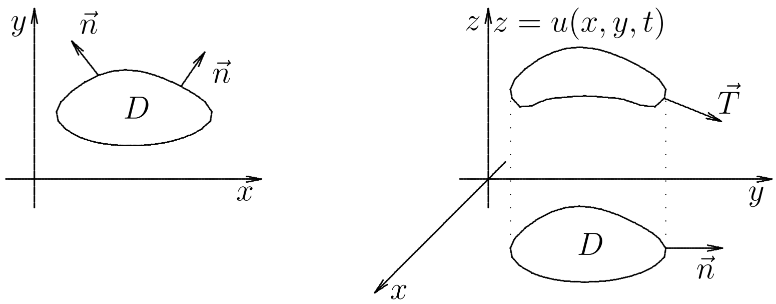
þar sem $f(x,t) = F(x,t)/\varrho$. Ef tekið er tillit til loftmótstöðu eða núnings í strengnum og gert er ráð fyrir að þau séu í hlutfalli við hraðann, þá kemur til sögunnar kraftliður af gerðinni $-a\partial_t u(x,t)$, þar sem a er fasti. Ef tekið er tillit til fjöðrunar í strengnum og gengið er út frá lögmáli Hookes, þá bætist við kraftliður af gerðinni $-bu(x,t)$, þar sem b er fasti. Ef gengið er út frá öllum þessum kraftáhrifum, þá gefur annað lögmál Newtons eins og í útleiðslunni hér að framan að færslan uppfyllir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\frac{\partial u}{\partial t} + ku = f(x,t), \tag{11.2.15}$$

þar sem $r = a/\varrho$ og $k = b/\varrho$. □

Tromma – bylgjujafna í tveimur rúmvíddum

Sýnidæmi 11.2.5 (*Tromma; tvívíða bylgjujafnan*). Hugsum okkur að teygjanleg þunn himna sé strengd yfir ramma og gerum ráð fyrir að spenna í henni T sé alls staðar sú sama. Hugsum okkur einnig að himnan hreyfist í lóðrétta stefnu og látum $u(x,y,t)$ tákna færslu hennar frá jafnvægisstöðu. Látum X tákna svæðið í xy-plani, sem himnan afmarkar þegar hún er kyrr og lítum á flatarskika $D \subset X$ með sléttan jaðar ∂D. Við látum $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)$ tákna stigulinn af u með tilliti til (x,y) og $\partial_n u = \partial u/\partial n = \langle \nabla u, \vec{n}\rangle$ vera stefnuafleiðu af u í stefnu ytri þvervigursins í punkti (x,y) á jaðrinum ∂D.



Mynd: Sveiflur himnu

Nú lítum við á þann bút af himnunni sem er yfir svæðinu D, en það er graf fallsins u með tilliti til (x,y). Ef við tökum síðan örsmæðarbút ds á jaðrinum á himnunni yfir D, þá er lóðrétti þáttur togkraftsins sem verkar á hann jafn

$$T\frac{\partial_n u}{\sqrt{1+(\partial_n u)^2}}ds \approx T\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

ef við gefum okkur að $\partial_n u$ sé það lítið að nálga megi kvaðratrótina með tölunni 1. Ef ϱ táknar massa á flatareiningu í himnunni, þá gefur annað lögmál Newtons

$$\iint_D \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dxdy = \int_{\partial D} T\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Með því að beita Gauss-setningunni á seinna heildið, þá fáum við

$$\iint_D \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dxdy = \iint_D T\Delta u\,dxdy,$$

þar sem Δ táknar Laplace-virkjann í breytistærðunum (x, y). Fyrst þessi jafna gildir um hvaða skika sem er, þá fáum við að u uppfyllir bylgjujöfnuna í tvívíðu rúmi,

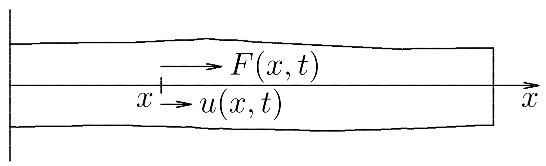
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \tag{11.2.16}$$

þar sem $c = \sqrt{T/\varrho}$. □

Sveiflur í bitum – bitajafna

Sýnidæmi 11.2.6 (*Sveiflur í bitum*). Í burðarþolsfræðinni koma fyrir margar mikilvægar hlutafleiðujöfnur. Meðal þeirra er bylgjujafnan, sem kemur fram þegar verið er að lýsa sveiflum í bitum. Við skulum nú líta á bita af lengd L sem liggur láréttur og leggja hnitakerfið þannig að x-ásinn liggi eftir honum endilöngum með endapunktana í $x = 0$ og $x = L$. Við skulum láta $\varrho(x)$ vera massa á lengdareiningu í bitanum og $A(x)$ vera þversniðsflatarmál hans í punktinum x. Gerum einnig ráð fyrir að í punktinum x verki kraftur í stefnu x-ássins og að $F(x, t)$ sé kraftur á lengdareiningu í punkti x við tímann t. Við verkun kraftsins verður teygja í stönginni og við látum $u(x, t)$ tákna færslu efnispunkts í x frá jafnvægisstöðu. Við gefum okkur að færslurnar sé smáar og að lögmál Hookes gildi. Það segir að spennan σ í efninu sé í hlutfalli við þensluna ϵ, $\sigma = E\epsilon$, þar sem $E = E(x)$ er efnisfasti óháður tíma og í punktinum x er $\epsilon = \partial_x u(x, t)$. Fallið E nefnist Young-stuðull. Þar með er spennukrafturinn sem verkar í þversniðinu við x við tímann t jafn

$$S(x, t) = A(x)\sigma(x, t) = A(x)E(x)\partial_x u(x, t).$$



Mynd: Langsveiflur í bita

Nú lítum við á bút af bitanum sem afmarkast af bilinu $[x, x + h]$. Spennukrafturinn sem verkar á bútinn er þá $S(x+h, t) - S(x, t)$ og því fáum við að annað lögmál Newtons gefur

$$\int_x^{x+h} \varrho(\xi)\partial_t^2 u(\xi, t)A(\xi)\, d\xi = \big(S(x + h) - S(x)\big) + \int_x^{x+h} F(\xi, t)\, d\xi.$$

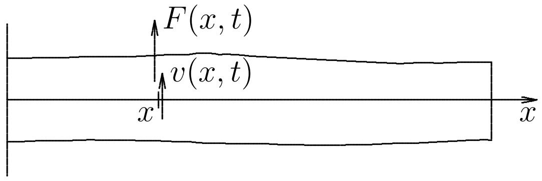
Með því að deila í gegnum þessa jöfnu með h og láta síðan $h \to 0$, þá fáum við

$$\varrho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(x, t). \tag{11.2.17}$$

Í þessari útleiðslu var hægt að gefa sér að ϱ, A og E væru föll af x. Í sértilfellinu þegar þetta eru fastar, þá er hreyfingunni lýst með hliðruðu bylgjujöfnunni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \tag{11.2.18}$$

þar sem $c = \sqrt{E/\varrho}$ og $f = F/(\varrho A)$ er kraftur á massaeiningu í bitanum.



Mynd: Þversveiflur í bita.

Nú skulum við gera ráð fyrir því að krafturinn $F(x,t)$ verki þvert á ás bitans í stefnu y-ássins. Nú er nauðsynlegt að taka tillit til spennunnar sem myndast í bitanum við það að hann svignar. Við látum $v(x,t)$ tákna færslu punktanna á x-ásnum frá jafnvægisstöðu, $M(x,t)$ tákna beygjuvægið og $S(x,t)$ tákna *skerkraftinn* í stefnu færslunnar. Skerkraftur er einnig nefndur *skúfkraftur*. Ef við lítum á kraftjafnvægið í litlum bút á bitanum $[x, x+h]$. Þá gefur annað lögmál Newtons

$$\int_x^{x+h} \varrho(\xi)\partial_t^2 v(\xi,t)A(\xi)\,d\xi = -(S(x+h) - S(x)) + \int_x^{x+h} F(\xi,t)\,d\xi.$$

Við deilum í gegnum jöfnuna með h og látum síðan $h \to 0$, þá fáum við jöfnuna

$$\varrho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial S}{\partial x} + F. \tag{11.2.19}$$

Til þess að skilja sambandið milli skerkraftsins S og færslunnar v er nauðsynlegt að hafa góða innsýn í fjaðurmagnsfræði. Til þess að gera langa sögu stutta, þá nefnum við fyrst að beygjuvægið uppfyllir $M(x,t) = E(x)I(x)\kappa(x,t)$, þar sem E er Young-stuðullinn, I er tregðuvægi og $\kappa(x,t)$ er krappinn sem ferillinn $x \mapsto v(x,t)$ myndar við tímann t. Ef gert er ráð fyrir því að færslurnar séu smáar, þá má gefa sér nálgunina $\kappa(x,t) \approx \partial_x^2 v(x,t)$. Næst er að nefna að sambandið milli skerkraftsins og beygjuvægisins er $S(x,t) = \partial_x M(x,t)$. Ef við notum þessar upplýsingar í (11.2.19), þá fáum við að færslan verður að uppfylla hlutafleiðujöfnuna,

$$\varrho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = F(x,t). \tag{11.2.20}$$

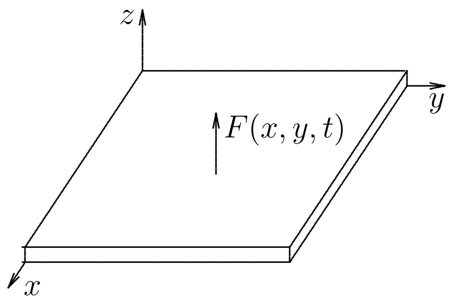
Í burðarþolsfræðinni er þessi jafna nefnd *bitajafna*. Í henni má gera ráð fyrir að stærðirnar ϱ, A, E og I séu föll af x. Ef þetta eru fastar þá fáum við sértilfellið

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f(x,t), \tag{11.2.21}$$

þar sem $a = \sqrt[4]{EI/\varrho A}$ og $f(x,t) = F(x,t)/\varrho A$ er ytri kraftur á massaeiningu í bitanum. $\square$

Sveiflur í plötum

Sýnidæmi 11.2.7 (*Sveiflur í plötum*). Annað mikilvægt viðfangsefni í burðarþolsfræði er athugun á sveiflum í plötum. Hugsum okkur að plata afmarki svæði X í xy-plani, að hún sé af þykkt h og hafi eðlismassann ϱ. Við gerum ráð fyrir að ytri kraftur verki hornrétt á plötuna, að $F(x,y,t)$ tákni kraft á flatareiningu í punkti (x,y) við tímann t og að $w(x,y,t)$ sér færsla efnispunkts í (x,y) frá jafnvægisstöðu við tímann t.



Mynd: Þversveiflur í plötu.

Útleiðslan á hreyfijöfnu w er svipuð og fyrir v í sýnidæmi 11.2.6, en töluvert snúnari. Niðurstaðan er að

$$\varrho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\Delta^2 w = F,$$

þar sem $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E er Young-stuðull, ν er Poisson-stuðull og Δ^2 er Laplace-virkinn í öðru veldi

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Í burðarþolsfræðinni er þessi virki nefndur *tvíþýður virki* (e. biharmonic operator). Ef við deilum nú í gegnum jöfnuna með ϱh, þá fáum við

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^4\Delta^2 w = f,$$

þar sem $a = \sqrt[4]{D/\varrho h}$ og $f = F/\varrho h$ er kraftur á massaeiningu. □

Rafsegulfræði – Maxwell-jöfnur

Sýnidæmi 11.2.8 (*Maxwell-jöfnurnar*). Öllum raf- og segulfyrirbærum í náttúrunni, þar sem ekki þarf að taka tillit til skammtaáhrifa, má lýsa sem lausnum á fjórum hlutafleiðujöfnum. Þær eru kenndar við Maxwell,

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \varrho, \quad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{11.2.22}$$

Hér er $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ stigullinn með tilliti til rúmbreytistærðanna, $\nabla\cdot = \operatorname{div}$ er sundurleitnivirkinn og $\nabla\times = \operatorname{rot}$ er rótvirkinn. Stærðirnar $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ og $\mathbf{J}$ eru þrívíð vigursvið, en ϱ er skalarsvið og þau eru öll háð staðsetningu (x,y,z) í rúminu og tíma t. Stærðin $\mathbf{E}$ er *rafsvið*, $\mathbf{D}$ er *raffærslusvið*, $\mathbf{B}$ er *segulsvið*, $\mathbf{H}$ er *segulflæði*, $\mathbf{J}$ er *straumþéttleiki* og ϱ er *hleðsluþéttleiki*. Stærðirnar, sem hér eru upp taldar ákvarðast ekki af Maxwell-jöfnunum einum saman. Til viðbótar koma einnig hliðarskilyrði og svokallaðar gerðarjöfnur sem tengja stærðirnar saman. Athugið að framsetningin á Maxwell-jöfnunum er háð einingarkerfinu sem unnið er í. Hér eru þær settar fram í SI-kerfinu. □

Rafstöðufræði – Laplace-jafna og Poisson-jafna

Sýnidæmi 11.2.9 (*Rafstöðufræði; Laplace-jafna og Poisson-jafna*). Mikilvægi Laplace-virkjans kemur skýrt fram í *rafstöðufræðinni*, þegar gert er ráð fyrir því að sviðin í jöfnum Maxwells séu tímaóháð. Þá fáum við

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{11.2.23}$$

Ef svæðið, þar sem sviðin eru skilgreind, er einfaldlega samanhangandi, þá gefur síðari jafnan okkur tilvist á *rafmætti* V og það uppfyllir

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \tag{11.2.24}$$

Sambandið milli $\mathbf{D}$ og $\mathbf{E}$ getur verið mjög flókið og er það háð efninu sem verið er að skoða, en einfaldasta sértilfellið er *einsátta línulegt efni*, en í því er gerðarjafnan

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \tag{11.2.25}$$

Talan ϵ er *rafsvörunarstuðull* efnisins. Rafmættið V verður því að uppfylla Poisson-jöfnuna,

$$\Delta V = \nabla^2 V = -\nabla \cdot \mathbf{D}/\epsilon = -\varrho/\epsilon. \tag{11.2.26}$$

Í sértilfellinu þegar $\varrho = 0$ þá nefnist jafnan Laplace-jafna. Tvívíðu Laplace- og Poisson-jöfnurnar eru einnig mikilvægar í rafstöðufræði, því lausnir þeirra geta lýst rafstöðumætti þar sem sívalningssamhverfa er til staðar eða rafstöðumætti í þunnri plötu, þar sem rafsviðið er alls staðar samsíða plötunni. Þá hugsum við okkur að hnitakerfið sé valið þannig að skilgreining á svæðinu sé í (x, y)-plani og að hún sé óháð þriðja hnitinu z. Hleðsludreifingin er þá einungis háð (x, y), $\varrho = \varrho(x, y)$. □

Rafsegulbylgjur – bylgjujafna í þremur rúmvíddum

Sýnidæmi 11.2.10 (*Rafsegulbylgjur; þrívíða bylgjujafnan*). Nú skulum við líta aftur á Maxwell-jöfnurnar í einsátta línulegu efni, þar sem við höfum gerðarjöfnurnar

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B},$$

ϵ táknar rafsvörunarstuðul efnisins og μ táknar segulsvörunarstuðul þess. Þær eru

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{11.2.27}$$

Ef $\mathbf{A}$ er þrívítt vigursvið, þá gildir jafnan

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \tag{11.2.28}$$

Ef við látum virkjann $\nabla \times$ verka á síðustu jöfnuna í (11.2.27), þá fáum við

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

og ef við látum $\partial/\partial t$ verka á aðra jöfnuna í (11.2.27), þá fáum við

$$\epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}=\nabla\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Nú notfærum við okkur að $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})=\nabla\varrho/\epsilon$ og fáum síðan með því að leggja saman tvær síðustu jöfnurnar að

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\mathbf{E}=-\frac{1}{\mu\epsilon^2}\nabla\varrho-\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}, \tag{11.2.29}$$

þar sem $c=1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Athugið að í vinstri hliðinni stendur bylgjuvirkinn í þrívíðu rúmi $\partial^2/\partial t^2-c^2\Delta$, því $\nabla^2=\Delta$. Hann verkar á hvert hnit fyrir sig í rafsviðinu $\mathbf{E}$. Til þess að fá hliðstæða jöfnu fyrir segulsviðið, þá látum við $\nabla\times$ verka á aðra jöfnuna í (11.2.27)

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B})-\nabla^2\mathbf{B}=\epsilon\mu\nabla\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu\nabla\times\mathbf{J}.$$

Ef við látum $\partial/\partial t$ verka á fjórðu jöfnuna í (11.2.27), þá fáum við

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Nú notfærum við okkur að $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B})=0$, leggjum saman tvær síðustu jöfnur og fáum þá

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\mathbf{B}=\frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{J}. \tag{11.2.30}$$

Niðurstaða þessara útreikninga okkar er að ef u táknar eitt af hnitaföllum rafsegulsviðsins $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ í einsátta línulegu efni, þá uppfyllir u þrívíðu bylgjujöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z,t), \tag{11.2.31}$$

þar sem fallið f er háð hleðslu- og straumþéttleikanum í efninu og er lesið út úr jöfnunum (11.2.29) og (11.2.30). □

Skammtafræði –Schrödinger-jafna

Sýnidæmi 11.2.11 (*Schrödinger-jafna*). Undirstöðujafna skammtafræðinnar er kennd við Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u+V(x)u, \qquad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Lausn u á jöfnunni, sem er stöðluð þannig að

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2\,dV(x)=1,$$

er bylgjufall fyrir ögn með massa m sem hreyfist í mætti V. Fastinn $\hbar$ er kenndur við Planck. Fallið $x \mapsto |u(x,t)|^2$ er þá líkindaþéttleikafall á $\mathbb{R}^3$, sem er túlkað þannig að heildi yfir rúmskika X,

$$\iiint_X |u(x,t)|^2\, dV$$

eru líkindi þess að ögnin sé í skikanum X við tímann t. Í tengslum við Schrödinger-jöfnuna fæst eigingildisverkefnið

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(x)u = Eu,$$

en möguleg eigingildi E eru túlkuð sem hugsanleg orkustig agnarinnar. $\square$

11.3 Hliðarskilyrði og vel framsett verkefni

Í síðustu grein sáum við nokkur dæmi um línulegar hlutafleiðujöfnur, sem lýsa ástandi eðlisfræðilegra kerfa. Þær eru flestar háðar einni, tveimur eða þremur rúmbreytistærðum og tíma. Lausnin ákvarðast ekki ótvírætt af jöfnunni einni saman, en ef sett eru eðlileg hliðarskilyrði á lausnina, þá fæst ótvírætt ákvörðuð lausn.

Upphafsskilyrði

Hugsum okkur að u sé fall á menginu

$$\overline{X} \times \overline{I} = \{(x,t); x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{X}, t \in \overline{I}\},$$

þar sem X er opið mengi í $\mathbb{R}^n$, I er opið bil í $\mathbb{R}$ og $\overline{X}$ og $\overline{I}$ tákna lokanir þeirra og að u uppfylli einhverja hlutafleiðujöfnu á $X \times I$. Ef lausnin er tímaháð, þá er eðlilegt að setja *upphafsskilyrði* á hana með því að tilgreina gildi hennar og einhverra tímaafleiða hennar $\partial_t u, \partial_t^2 u, \dots$, fyrir eitthvert ákveðið gildi t_0 á tímanum t,

$$u(x,t_0) = \varphi_0(x), \qquad \partial_t u(x,t_0) = \varphi_1(x), \qquad \dots, \qquad x \in X.$$

Ef m er hæsta stig á afleiðu, sem fyrir kemur í jöfnunni, þá dugir oft að tilgreina gildi á u og tímaafleiðum $\partial_t^k u$ af stigi $k \le m-1$.

Jaðarskilyrði

Jaðarskilyrði eru sett á lausnina með því að tilgreina gildi u og einhverra hlutafleiða af u í punktum (x,t), þar sem x er á jaðrinum ∂X og t er í I. Skilyrði af gerðinni

$$u(x,t) = h(x,t), \qquad x \in \partial X, \quad t \in I,$$

þar sem h er gefið fall á $\partial X \times I$, nefnist *fallsjaðarskilyrði*. Skilyrði af gerðinni

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = h(x,t), \qquad x \in \partial X, \quad t \in I,$$

nefnist *flæðisskilyrði* og skilyrði af gerðinni

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + b(x,t)u(x,t) = h(x,t), \qquad x \in \partial X, \quad t \in I,$$

nefnist *blandað jaðarskilyrði*. Nokkrar tegundir af skilyrðum, sem sett eru á lausnir hlutafleiðujafna, bera nöfn sem vert er að leggja á minnið:

(i) *Cauchy-skilyrði*: Lausnin u og einhverjar tímaafleiður hennar $\partial_t u$, $\partial_t^2 u$, $\dots$, eru tilgreindar á einhverjum tíma $t = t_0$. Samheiti er *upphafsskilyrði*.

(ii) *Dirichlet-skilyrði*: Lausnin u er tilgreind á jaðri svæðis. Samheiti er *fallsjaðarskilyrði*.

(iii) *Neumann-skilyrði*: Þverafleiðan $\partial u/\partial n$ er tilgreind á jaðri svæðis. Samheiti er *flæðisskilyrði*.

(iv) *Robin-skilyrði*: Línuleg samantekt af þverafleiðu og falli, $\partial u/\partial n + au$, er tilgreind á jaðri svæðis. Samheiti er *blandað jaðarskilyrði*.

Oft er jaðri svæðis skipt í parta og ólík skilyrði sett á lausnina á hinum ýmsu pörtum. Til dæmis getur verið eðlilegt að hugsa sér að á hluta jaðarsins sé sett fallsjaðarskilyrði en annars staðar flæðisskilyrði. Jaðarskilyrðið verður þá

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g(x,t), & x \in A, \ t \in I, \\ u(x,t) = h(x,t), & x \in B, \ t \in I, \end{cases}$$

þar sem $\partial X = A \cup B$ er skipting á jaðrinum í tvö sundurlæg mengi.

Upphafs- og jaðarskilyrði fyrir streng og himnu

Sýnidæmi 11.3.1 (*Strengur og himna*). Í sýnidæmi 11.2.4 fjölluðum við um streng sem ytri kraftur verkar á og sáum að með vissum nálgunum væri fráviki strengsins frá jafnvægisstöðu $u(x,t)$ lýst með einvíðu bylgjujöfnunni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0. \tag{11.3.1}$$

Eðlilegt er að staða og hraði strengsins séu gefin á einhverju augnabliki, segjum $t = 0$. Með því er sett upphafsskilyrði

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \qquad 0 < x < L, \tag{11.3.2}$$

þar sem litið er á φ og ψ sem þekkt föll. Ef strengurinn er festur niður í báðum endapunktum, þá fáum við fallsjaðarskilyrðin

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{11.3.3}$$

Ef við hugsum okkur að hægt sé að stjórna stöðu endapunkta strengsins, þá fáum við hliðruð jaðarskilyrði,

$$u(0,t) = g(t), \qquad u(L,t) = h(t), \qquad t > 0, \tag{11.3.4}$$

þar sem g og h eru gefin föll af tíma. Við getum alhæft þessi skilyrði með því að setja almenn aðskilin jaðarskilyrði,

$$\alpha_1 u(0,t) - \alpha_2 \partial_x u(0,t) = g(t), \qquad \beta_1 u(L,t) + \beta_2 \partial_x u(L,t) = h(t). \tag{11.3.5}$$

Í sýnidæmi 11.2.5 fjölluðum við um hreyfingu himnu, sem ytri kraftur verkar á og sáum þar að með ákveðnum nálgunum uppfyllir færsla $u(x,y,t)$ efnispunkts (x,y) frá jafnvægisstöðu tvívíðu bylgjujöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \qquad (x,y) \in X, \tag{11.3.6}$$

þar sem X táknar svæðið í xy-plani sem himnan afmarkar í kyrrstöðu. Eðlileg upphafsskilyrði á lausnina eru þá

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad \partial_t u(x,y,0) = \psi(x,y), \qquad (x,y) \in X,$$

þar sem φ og ψ eru nú gefin föll á menginu X, sem lýsa stöðu og hraða himnunnar við tímann $t = 0$. Þar sem himnan er fest niður á jaðrinum, þá fáum við jaðarskilyrðið

$$u(x,y,t) = 0, \qquad (x,y) \in \partial X, \qquad t > 0. \tag{11.3.7}$$

□

Upphafs- og jaðargildisverkefni

Sýnidæmi 11.3.2 (*Varmaleiðni*). Við skulum nú kynna okkur hvernig hliðarskilyrði eru sett á lausnir varmaleiðnijöfnunnar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = f(x,y,z,t), \tag{11.3.8}$$

þar sem Δ stendur fyrir Laplace-virkjann í þrívíðu rúmi. Hún lýsir hitastigi u á einhverju svæði X í þrívíðu rúmi, eins og við höfum þegar séð. Þar sem aðeins fyrsta stigs tímaafleiður koma fyrir í jöfnunni, þá er upphafsskilyrði aðeins sett á lausnina sjálfa með því að tilgreina hitastigið u á ákveðnum tíma $t = t_0$,

$$u(x,y,z,t_0) = \varphi(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in X,$$

þar sem φ er eitthvert fall á X. *Jaðarskilyrði* er sett á lausnina í jaðarpunktum X. Sem dæmi getum við tekið *fallsjaðarskilyrði*, þar sem hitastigið er tilgreint á jaðrinum ∂X á svæðinu X,

$$u(x,y,z,t) = h(x,y,z,t), \qquad (x,y,z) \in \partial X.$$

Flæðisskilyrði tilgreinir varmaflæðið í gegnum jaðarinn,

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z,t) = h(x,y,z,t), \qquad (x,y,z)\in\partial X,$$

þar sem $\partial u/\partial n = \langle \nabla u, \vec{n}\rangle$ táknar ytri þverafleiðuna af u á jaðrinum. Hér táknar $\vec{n}(x,y,z)$ ytri þvervigurinn á jaðarinn í punktinum (x,y,z) og λ er varmaleiðnistuðullinn. Stundum er gert ráð fyrir því að *kælingarlögmál Newtons* gildi, en það segir að varmaflæðið í jaðarpunktunum sé í hlutfalli við mismuninn á hitastiginu þar og umhverfishitastiginu,

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z,t) = k(u(x,y,z,t)-u_0), \qquad (x,y,z)\in\partial X.$$

Hér er þá gert ráð fyrir því að X sé heitur hlutur í köldu umhverfi og að hitastig umhverfisins u_0 hækki nánast ekkert þegar hluturinn kólnar. $\square$

Vel framsett verkefni

Úrlausn á hlutafleiðujöfnu með hliðarskilyrðum nefnist *vel framsett verkefni*, ef eftirfarandi þrjú skilyrði eru uppfyllt:

(i) *Tilvist*: Til er lausn sem uppfyllir jöfnuna og öll hliðarskilyrðin.

(ii) *Ótvíræðni*: Aðeins ein lausn er til.

(iii) *Stöðugleiki*: Lausnin er stöðug í þeim skilningi að lítilsháttar frávik frá hliðarskilyrðum kemur fram í lítilsháttar fráviki frá lausninni. Í hverju verkefni um sig þarf að skigreina hvaða mælikvarði er lagður á frávik í hliðarskilyrðum og í lausn.

Þegar verið er að sýna fram á að ákveðið verkefni sé vel framsett, þá er venjulega byrjað á að ganga út frá því að til sé lausn og síðan er formúla fyrir lausnina leidd út. Þá þarf að staðfesta að sérhvert fall sem skilgreint er með lausnarformúlunni uppfylli bæði hlutafleiðujöfnuna og öll hliðarskilyrðin. Þá er tilvistin sönnuð.

Í næsta skrefi er gengið út frá því að verkefnið hafi tvær lausnir u_1 og u_2 og síðan er sýnt fram á að í raun sé $u_1 = u_2$. Sannanir af þessu tagi eru mjög fjölbreytilegar. Til grundvallar eru stundum lögð varðveislulögmál, en þau geta til dæmis sagt að ákveðin orkuheildi séu minnkandi sem föll af tíma eða breytist ekki með tíma. Einnig getur verið að lausnir uppfylli há- og lággildislögmál. Með þessu er ótvíræðnin sönnuð.

Í síðasta skrefinu þarf fyrst að ákveða einhvern mælikvarða á frávik. Þá eru oft skilgreindir staðlar (norm) á línulegu fallarúmin þar sem hliðarskilyrðin og lausnirnar eru skilgreindar. Sem dæmi um slíka staðla getum við tekið

$$\|u\|_{\infty,X} = \max_{x\in X}|u(x)|, \qquad \|u\|_{1,X} = \int_X |u(x)|\,dx, \qquad \|u\|_{2,X} = \bigg(\int_X |u(x)|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Frávik u_1 frá u_2, eða öllu heldur fjarlægðin milli u_1 og u_2, er þá $\|u_1-u_2\|$. Til þess að útskýra þetta nánar skulum við líta á:

Stöðugleiki Dirichlet-verkefnisins

Sýnidæmi 11.3.3 (*Dirichlet-verkefnið fyrir Laplace-jöfnuna*). Látum X vera takmarkað svæði í þrívíðu rúmi með sléttan jaðar ∂X og lítum á verkefnið

$$\Delta u = 0 \quad \text{á} \quad X, \qquad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial X. \tag{11.3.9}$$

Við höfum þegar séð tvenns konar eðlisfræðilega túlkun á þessu verkefni. Lausnin u getur verið rafstöðumætti í X sem gefið er á jaðrinum ∂X með fallinu φ eða æstætt hitastig í X sem gefið er á jaðrinum með φ.

Lausn á Laplace-jöfnunni þýtt fall. Einn af undirstöðueiginleikum þýðra falla er að þau taka há- og lággildi á jaðri takmarkaðra svæða. Ef u_1 og u_2 eru lausnir á (11.3.9) með jaðargildin φ_1 og φ_2 þá er $u = u_1 - u_2$ lausn á (11.3.9) með jaðargildin $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Hágildislögmálið segir okkur þá að

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,X} = \max_{x\in X} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max_{x\in\partial X} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\partial X}. \tag{11.3.10}$$

Þessi ójafna segir okkur að frávik í lausninni geti ekki verið meira en frávikið í jaðargildunum. Þar með er lausn verkefnisins (11.3.9) stöðug. □

11.4 Flokkun á annars stigs jöfnum

Eins og við höfum séð, þá eru annars stigs hlutafleiðujöfnur með fastastuðla mjög mikilvægar í eðlisfræði. Í tveimur breytistærðum er línuleg óhliðruð annars stigs jafna með fastastuðla af gerðinni

$$a_{11}\partial^2_{x_1}u + 2a_{12}\partial^2_{x_1x_2}u + a_{22}\partial^2_{x_2}u + a_1\partial_{x_1}u + a_2\partial_{x_2}u + a_0u = 0. \tag{11.4.1}$$

Skilgreining 11.4.1 Hlutafleiðuvirkinn og hlutafleiðujafnan (11.4.1) eru sögð vera *sporger* eða *elliptísk* ef $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, þau eru sögð vera *breiðger* eða *hýperbólsk* ef $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$, og þau eru sögð vera *fleygger* eða *parabólsk* ef $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$.

□

Þessar nafngiftir tengjast keilusniðunum í tveimur breytistærðum. Við lítum þannig á ferningsjöfnuna

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 = 1. \tag{11.4.2}$$

Hún skilgreinir sporbaug ef $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, breiðboga ef $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$ og fleygboga ef $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$. Athugið að með þessum rithætti er Laplace-jafnan $\partial^2_{x_1}u + \partial^2_{x_2}u = 0$ sporger, bylgjujafnan $\partial^2_{x_1}u - \partial^2_{x_2}u = 0$, $(c = 1)$, breiðger og varmaleiðnijafnan $\partial^2_{x_1}u - \partial_{x_2}u = 0$, $(\kappa = 1)$, er fleygger. Þegar fram í sækir munum við sjá að eiginleikar lausna þessara þriggja jafna eru mjög ólíkir. Hins vegar eru eiginleikar hverrar um sig einkennandi fyrir flokkinn sem hún tilheyrir. Það liggur í þeirri staðreynd að hægt er að framkvæma línuleg hnitaskipti $y = Bx$, $v(y) = u(B^{-1}y) = u(x)$, þannig að sporger jafna (11.4.1) jafngildi

$$\partial^2_{y_1}v + \partial^2_{y_2}v + \alpha_1\partial_{y_1}v + \alpha_2\partial_{y_2}v + \alpha_0v = 0,$$

breiðger jafna jafngildi

$$\partial_{y_1}^2 v - \partial_{y_2}^2 v + \alpha_1 \partial_{y_1} v + \alpha_2 \partial_{y_2} v + \alpha_0 v = 0,$$

og fleygger jafna jafngildi

$$\partial_{y_1}^2 v + \alpha_1 \partial_{y_1} v + \alpha_2 \partial_{y_2} v + \alpha_0 v = 0.$$

Þetta má alhæfa yfir á annars stigs línulegar jöfnur með fastastuðla í n breytistærðum $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} u + \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_{x_j} u + a_0 u = 0. \tag{11.4.3}$$

Hér táknum við stuðlafylkið við annars stigs liðina með $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1}^n$. Ef við innleiðum nú línuleg hnitaskipti $y = Bx$, $y_l = \sum_{j=1}^n b_{lj} x_j$, þar sem $B = \big(b_{jk}\big)_{j,k=1}^n$ er $n \times n$ fylki og setjum $v(y) = u(B^{-1}y) = u(x)$, þá gefur keðjureglan okkur

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} b_{lj} \frac{\partial v}{\partial y_l}.$$

Af þessari formúlu leiðir síðan að

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} u = \sum_{l,m=1}^{n} \bigg(\sum_{j,k=1}^{n} b_{lj} a_{jk} b_{mk} \bigg) \partial_{y_l} \partial_{y_m} v, \tag{11.4.4}$$

þar sem vinstri hliðin er fall af x en hægri hliðin er fall af y. Nú segir rófsetningin úr línulegri algebru okkur að koma megi sérhverju samhverfu fylki yfir á hornalínuform, $A = T\Lambda T^t$, þar sem T er hornrétt fylki, en það þýðir að $TT^t = I$, og $\Lambda = \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \dots, \lambda_n\big)$ er hornalínufylki, þar sem eigingildin talin með margfeldni standa á hornalínunni. Ef öll eigingildin eru jákvæð og við skilgreinum B sem

$$B = \Lambda^{-\frac{1}{2}} T^t = \operatorname{diag}\big(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}\big) T^t,$$

þá er greinilegt að $BAB^t = I$, þar sem I táknar $n \times n$ einingarfylkið. Athugið að $\sum_{j,k=1}^n b_{lj} a_{jk} b_{mk}$ er stak í sæti (l, m) í fylkinu BAB^t og þar með fæst með þessu vali á B að

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} u = \sum_{l=1}^{n} \partial_{y_l}^2 v = \Delta v. \tag{11.4.5}$$

Ef öll eigingildin eru neikvæð, þá getum við margfaldað í gegnum jöfnuna (11.4.3) með -1 og litið á $-A$ í stað A.

Lítum nú á sértilfellið $n = 2$ aftur. Kennijafna fylkisins A er

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

og $\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Virkinn er því sporger þá og því aðeins að bæði eigingildin hafi sama formerki, hann er breiðger þá og því aðeins að eigingildin hafi ólík formerki og hann er fleygger þá og því aðeins að annað eigingildið sé 0. Við getum nú alhæft hugtökin sporger, breiðger og fleygger yfir á n breytistærðir.

Skilgreining 11.4.2 Hlutafleiðuvirkinn og hlutafleiðujafnan (11.4.3) eru sögð vera *sporger* ef öll eigingildi stuðlafylkisins A eru jákvæð eða ef þau eru öll neikvæð. Þau eru sögð vera breiðger ef öll eigingildin eru frábrugðin 0 og eitt þeirra hefur öfugt formerki við hin $n-1$. Þau eru sögð vera fleygger ef nákvæmlega eitt eigingildi er 0 og öll hin hafa sama formerki. □

Við höfum séð að sporger jafna af gerðinni (11.4.3) ummyndast með hnitaskiptunum $y = Bx$ og $v(y) = u(x)$ í

$$\Delta v + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{y_j} v + \alpha_0 v = 0. \tag{11.4.6}$$

Ef við lítum á breiðgera jöfnu og númerum eigingildin þannig að $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} > 0$ og $\lambda_n < 0$, þá fæst með sama hætti og hér að framan að hún varpast í

$$\partial_{y_1}^2 v + \cdots + \partial_{y_{n-1}}^2 v - \partial_{y_n}^2 v + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{y_j} v + \alpha_0 v = 0. \tag{11.4.7}$$

Að lokum, ef við lítum á fleyggera jöfnu með $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} > 0$ og $\lambda_n = 0$, þá sést með sama hætti og hér að framan að hún varpast yfir í

$$\partial_{y_1}^2 v + \cdots + \partial_{y_{n-1}}^2 v + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{y_j} v + \alpha_0 v = 0. \tag{11.4.8}$$

Af þessu sést að hægt er að alhæfa ýmsa eiginleika lausna á Laplace-jöfnunni yfir á lausnir á sporgerum jöfnum, eiginleika lausna á bylgjujöfnunni yfir á lausnir á breiðgerum jöfnum og eiginleika lausna varmaleiðnijöfnunnar yfir á lausnir á fleyggerum jöfnum. Það er því eðlilegt að leggja höfuðáherslu á þessar þrjár tilteknu jöfnur og tilsvarandi virkja.

Við munum fjalla um fjölbreytileg verkefni um hlutafleiðujöfnur. Þau eru nánast öll vel framsett og við munum einbeita okkur að því að sýna fram á tilvist á lausnum með því að leiða út lausnarformúlur fyrir verkefnin. Við leggjum hins vegar litla áherslu á að sýna fram á að verkefnin hafi ótvírætt ákvarðaða lausn og að lausnin sé stöðug. Fouriergreiningin er helsta hjálpartæki okkar við úrlausn á verkefnunum. Við byrjum á því að líta á verkefni þar sem lausnin er skilgreind á takmörkuðu bili í einni rúmvídd og rétthyrningum í tveimur rúmvíddum. Þá er hægt að beita Fourier-röðum og eiginfallaröðum til þess að setja lausnirnar fram. Ef lausnin er skilgreind á hálfás með tilliti til tíma, þá er oft hægt að nota Laplace-ummyndun til þess að leiða út lausnarformúlur. Ef lausnin er skilgreind á öllu rúminu, þá er oft hægt að finna lausn með því að beita Fourier-ummyndun. Við útskýrum lausnaraðferðirnar að verulegu leyti í reiknuðum sýnidæmum og þau eru flest upprunin úr eðlisfræði.

11.5 Æfingardæmi

1. *Símajafnan*: Hugsum okkur að $i(x,t)$ og $u(x,t)$ tákni straum og spennu í rafstreng, til dæmis símalínu, þar sem x táknar fjarlægð frá einhverjum viðmiðunarpunkti á strengnum og t táknar tíma. Út frá Maxwell-jöfnunum er leitt sambandið

$$L\partial_t i + Ri + \partial_x u = 0, \qquad \partial_x i + C\partial_t u + Gu = 0,$$

þar sem C táknar rýmd strengsins á lengdareiningu, G táknar lekaleiðni á lengdareiningu, R táknar viðnám á lengdareiningu og L táknar sjálfspan á lengdareiningu. Sýnið að bæði u og i uppfylli símajöfnuna

$$LC\partial_t^2 v - \partial_x^2 v + (RC + LG)\partial_t v + RGv = 0.$$

2. Skrifið upp Laplace-virkjann í pólhnitum $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ og ákvarðið síðan allar lausnir Laplace jöfnunnar $\Delta u = 0$ af gerðinni $u(x,y) = f(r)$ og allar lausnir af gerðinni $u(x,y) = g(\theta)$. (Sjá viðauka D.)

3. Skrifið upp Laplace-virkjann í kúluhnitum (r,θ,ϕ), þar sem r táknar lengd, θ pólhorn og ϕ áttarhorn. Ákvarðið síðan allar lausnir Laplace-jöfnunnar $\Delta u = 0$ af gerðinni $u(x,y,z) = f(r)$ og allar lausnir af gerðinni $u(x,y,z) = g(\phi)$. (Sjá viðauka D.)

4. Notið pólhnitaframsetningu á Laplace-virkjanum í tveimur víddum til þess að ákvarða allar lausnir *tvíþýðu jöfnunnar* $\Delta^2 u = 0$ af gerðinni $u(x,y) = f(r)$. Leysið sams konar verkefni í þremur víddum.

5. *Æstæða bitajafnan*: Ef við gerum ráð fyrir því að ytri krafturinn sem verkar á bitann í sýnidæmi 12.2.3 sé tímaóháður og að bitinn sé í kyrrstöðu við þetta álag, þá fáum við æstæðu bitajöfnuna $EIv^{(4)}(x) = F(x)$.

(i) Ef gert er ráð fyrir því að bæði færslan og beygjuvægið í endapunktunum sé núll, þá fást jaðarskilyrðin

$$v(0) = v(L) = v''(0) = v''(L) = 0,$$

en þetta tilfelli er nefnt *einfaldlega undirstuddur biti*. Ákvarðið Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið sem hér fæst og skrifið færsluna v sem

$$v(x) = \int_0^L G_B(x,\xi)F(\xi)\,d\xi, \qquad 0 \le x \le L.$$

(ii) Ef gert er ráð fyrir því að færslan sé núll í öðrum endapunktinum og að bitinn sé láréttur þar, þá er sagt að bitinn sé *innspenntur* í þeim punkti. Ef punkturinn er $x = 0$, þá fæst þar jaðarskilyrðið $v(0) = v'(0)$. Ef ekki eru settar neinar skorður á færslu og halla bitans í endapunkti, þá er hann sagður vera *frjáls* í þeim punkti. Þá gildir sjálfkrafa að beygjuvægið og skerkrafturinn þar eru núll. Ef punkturinn er $x = L$, þá fáum við jaðarskilyrðið $v''(L) = v'''(L) = 0$. Ákvarðið lausnina fyrir jaðargildisverkefnið sem hér fæst með sama hætti og í (i).

6. *Varmajafnvægi*: Látum T tákna hitastig í rúmskika X og gerum ráð fyrir að T sé lausn á æstæðu varmaleiðnijöfnunni $-\lambda\Delta T = F$ á X með flæðisskilyrðinu $-\lambda\partial T/\partial n = g$ á jaðrinum ∂X. Sýnið að þá gildi

$$\iiint\limits_X F\,dV = \iint\limits_{\partial X} g\,dA,$$

þar sem dV er rúmmálsfrymi í $\mathbb{R}^3$ og dA er flatarmálsfrymið á jaðrinum ∂X. Hver er eðlisfræðileg merking þessarar jöfnu.

7. Kannið hvort eftirfarandi virkjar eru sporgerir, breiðgerir eða fleyggerir og innleiðið hnitaskipti þannig að þeir verði að Laplace-virkja, bylgjuvirkja eða varmaleiðnivirkja að viðbættum fyrsta stigs liðum,

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}, \qquad \partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2, \qquad \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2.$$

Kafli 12

FYRSTA STIGS HLUTAFLEIÐUJÖFNUR

12.1 Inngangur

Þessi örstutti kafli inniheldur tvær aðferðir til úrlausnar á línulegum fyrsta stigs jöfnum. Kennilínuaðferðin byggir á þeirri staðreynd að lausnir á jöfnum af gerðinni $a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u = 0$ taka fast gildi á ákveðnum ferlum, sem nefndir eru kennilínur og ákvarðast af stuðlunum a og b. Í kafla 7 sáum við hvernig hægt er að beita Laplace-ummyndun til þess að finna lausnir á venjulegum afleiðujöfnum og afleiðujöfnuhneppum. Hún kemur oft að góðu gangi við úrlausn á tímaháðum hlutafleiðujöfnum með upphafsskilyrðum, þar sem hægt er að taka Laplace-mynd með tilliti til tíma. Þá fæst oft fram venjuleg afleiðujafna eða hlutafleiðujafna í rúmbreytistærðunum, sem auðveldara er að leysa en upphaflegu jöfnuna.

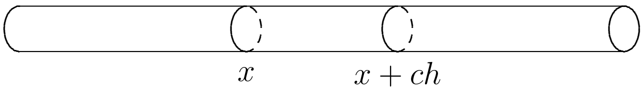
12.2 Kennilínuaðferðin fyrir línulegar fyrsta stigs jöfnur

Línuleg fyrsta stigs jafna af tveimur breytistærðum (x,y) er af gerðinni

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y). \tag{12.2.1}$$

Byrjum á því að skoða einfalt dæmi:

Sýnidæmi 12.2.1 (*Einfaldur massaflutningur*). Lítum á vatnslögn með fast þversnið og hugsum okkur að vatnið í henni renni með föstum hraða c. Gerum einnig ráð fyrir að í vatninu sé uppleyst efni og að styrkur þess á lengdareiningu í þversniðinu x við tímann t sé gefinn með fallinu $u(x,t)$, $[g/cm]$.



Mynd 14.1. Einfaldur massaflutningur

Ef við hugsum okkur að uppleysta efnið flytjist með straumnum en dreifist ekki í vatninu, þá gildir jafnan

$$u(x+ch, t+h) = u(x,t),$$

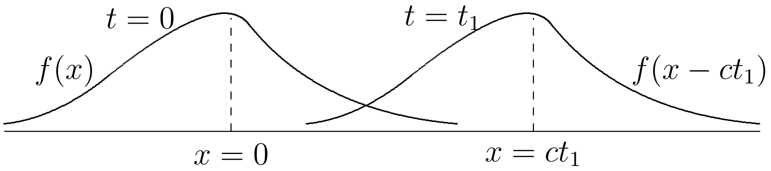
þ.e. efnisagnirnar sem voru í þversniðinu x við tímann t eru í þversniðinu $x+ct$ við tímann $t+h$. Þessi jafna hefur síðan í för með sér að

$$\lim_{h\to 0} \frac{u((x,t)+h(c,1)) - u(x,t)}{h} = 0,$$

og þar með er stefnuafleiða fallsins u í stefnuna $(c,1)$ í punktinum (x,t) jöfn 0. Samkvæmt keðjureglunni er þetta jafngilt því að

$$c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

gildi í sérhverjum punkti. Nú er augljóst að fall af gerðinni $u(x,t) = f(x-ct)$ er lausn á þessari jöfnu. Við tímann t er gildi lausnarinnar $u(x,t)$ einfaldlega hliðrun á fallinu f um ct. □



Mynd 14.2. Einvíð bylgja.

Það er auðvelt að finna lausn á fyrsta stigs línulegum jöfnum með fastastuðla á öllu rúminu:

Setning 12.2.2 *Fall $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ er lausn á jöfnunni*

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{12.2.2}$$

þar sem $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ og $(a,b) \neq (0,0)$, þá og því aðeins að u sé af gerðinni

$$u(x,y) = f(bx - ay), \tag{12.2.3}$$

með $f \in C^1(\mathbb{R})$. □

Sönnun: Gerum ráð fyrir að $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sé lausn. Jafnan segir okkur að stefnuafleiðan af u í stefnu vigursins (a,b) sé 0 í sérhverjum punkti og þar með er takmörkun u við sérhverja línu með stefnuvigurinn (a,b) fastafall. Slík lína hefur jöfnuna $bx - ay = c$ og því er u einungis háð breytunni c á þessari línu. Þar með er til fall f á $\mathbb{R}$ þannig að $u(x,y) = f(c)$ og þar með gildir (12.2.3). Með því að setja $y = 0$, eða $x = 0$ í tilfellinu $b = 0$, inn í (12.2.3), þá sjáum við að $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Ef $f \in C^1(\mathbb{R})$ og við skilgreinum u með (12.2.3), þá leiðir (12.2.2) beint af keðjureglunni. ■

Lítum nú á tilfellið $b \neq 0$ og tökum punkt (x,y) í (ξ,η)-plani. Línan gegnum punktinn (x,y) með stefnuvigurinn (a,b) hefur jöfnuna $b\xi - a\eta = bx - ay$. Skurðpunktur hennar við ξ-ásinn er $(x - ay/b, 0)$. Nú vitum við að gildi lausnarinnar u á afleiðujöfunni (12.2.2) er það sama í öllum punktunum á þessari línu og þar með gildir:

Setning 12.2.3 *Upphafsgildisverkefnið*

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{12.2.4}$$

þar sem $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ er gefið fall og $b \neq 0$, hefur ótvírætt ákvarðaða lausn

$$u(x,y) = \varphi(x - ay/b). \tag{12.2.5}$$

□

Skilgreining 12.2.4 Lína sem hefur stefnuvigur samsíða (a,b) nefnist *kennilína* afleiðuvirkjans $a\partial_x + b\partial_y$. □

Hugtakið kennilínu og aðferðina, sem við höfum verið að fjalla um er auðvelt að alhæfa yfir á jöfnu af gerðinni

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{12.2.6}$$

Í því tilfelli að a og b eru fastar og við stikum kennilínuna gegnum (x,y) með $t \mapsto (\xi(t),\eta(t))$, þar sem $\xi(t) = x + at$ og $\eta(t) = y + bt$, þá sjáum við að $(\xi(t),\eta(t))$ er lausn á upphafsgildisverkefninu

$$\xi'(t) = a, \quad \eta'(t) = b, \quad \xi(0) = x, \quad \eta(0) = y.$$

Skilgreining 12.2.5 Sérhver lausn $t \mapsto (\xi(t),\eta(t))$ á afleiðujöfnuhneppinu

$$\xi' = a(\xi,\eta), \qquad \eta' = b(\xi,\eta), \tag{12.2.7}$$

nefnist *kenniferill* eða *kennilína* afleiðuvirkjans

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{12.2.8}$$

□

Gerum nú ráð fyrir að u sé lausn á (12.2.6) og að $t \mapsto (\xi(t),\eta(t))$ sé kenniferill. Þá gefur keðjureglan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(u(\xi(t),\eta(t))\Big) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))\xi'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\eta'(t) \\ &= a(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial u}{\partial x}(\xi(t),\eta(t)) + b(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial u}{\partial y}(\xi(t),\eta(t)) = 0. \end{aligned}$$

Þetta segir okkur að gildi lausnarinnar sé fast á sérhverjum kenniferli. Nú skulum við líta á upphafsgildisverkefnið

$$\begin{cases} a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{12.2.9}$$

Við byrjum á því að taka punkt (x,y) í (ξ,η)-plani. Síðan leysum við verkefnið

$$\xi' = a(\xi,\eta), \quad \eta' = b(\xi,\eta), \quad \xi(0) = x, \quad \eta(0) = y. \tag{12.2.10}$$

Ef til er ótvírætt ákvörðuð lausn $t \mapsto (\xi(t),\eta(t))$ á einhverju opnu bili fyrir sérhvert (x,y) og ferillinn sker ξ-ásinn í nákvæmlega einum punkti $(s(x,y),0)$, þá er lausnin gefin með formúlunni

$$u(x,y) = \varphi(s(x,y)). \tag{12.2.11}$$

Sýnidæmi 12.2.6 Leysum verkefnið

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),$$

þar sem φ er eitthvert fall á $\mathbb{R}$. Við höfum hér $a(x,y) = x$ og $b(x,y) = 1$, svo fyrir gefinn punkt (x,y) þurfum við að leysa

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = 1, \quad \xi(0) = x, \quad \eta(0) = y.$$

Lausnin er greinilega

$$\xi(t) = xe^t, \qquad \eta(t) = t + y, \qquad t \in \mathbb{R},$$

og skurðpunkturinn við ξ-ásinn svarar til $t = -y$. Þar með er $s(x,y) = \xi(-y) = xe^{-y}$ og lausnin er fundin,

$$u(x,y) = \varphi(xe^{-y}).$$

□

Sýnidæmi 12.2.7 Lítum einnig á verkefnið

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \quad u(x,0) = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Við ákvörðum kennilínu virkjans gegnum (x,y) í (ξ,η)-plani. Ef hún sker ξ-ásinn í nákvæmlega einum punkti $(s(x,y),0)$, þá er lausnin gefin með formúlunni $u(x,y) = \sin\big(s(x,y)\big)$. Kennilínan í gegnum (x,y) er stikuð með $(\xi(t),\eta(t))$, þar sem

$$\xi'(t) = 1, \quad \eta'(t) = \big(\xi(t)\big)^2, \quad \xi(0) = x, \quad \eta(0) = y.$$

Með heildun fáum við

$$\xi(t) = x + t, \qquad \eta'(t) = (x+t)^2, \qquad \eta(t) = y - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}(x+t)^3.$$

Til þess að finna skurðpunkt kennilínunnar við ξ-ásinn, þá þurfum við aðeins að leysa t út úr jöfnunni $\eta(t) = 0$ og stinga útkomunni inn í $\xi(t)$,

$$y - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}(x+t)^3 = 0, \qquad t = \big(x^3 - 3y\big)^{\frac{1}{3}} - x.$$

Hér á að taka þriðju rót af neikvæðri tölu þannig að út komi neikvæð tala. Fyrir þetta gildi á t er $\xi = \xi(t) = s(x,y) = \big(x^3 - 3y\big)^{\frac{1}{3}}$. Þar með er lausnin fundin,

$$u(x,y) = \sin\big(x^3 - 3y\big)^{\frac{1}{3}}, \qquad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

$\square$

12.3 Úrlausn á fyrsta stigs jöfnum með Laplace-ummyndun

Laplace-ummyndunin er mikilvægt hjálpartæki við úrlausn á línulegum afleiðujöfnum og þá einkum til þess að leysa upphafsgildisverkefni. Hugsum okkur að $u(x,t)$ sé fall af tveimur breytistærðum og látum $U(x,s)$ vera Laplace-myndina af u með tilliti til tíma t,

$$U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,\cdot)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt.$$

Reiknireglan (10.2.3) gefur okkur að

$$\mathcal{L}\{\partial_t^m u(x,\cdot)\}(s) = s^m U(x,s) - s^{m-1}u(x,0) - \cdots - s\partial_t^{m-2}u(x,0) - \partial_t^{m-1}u(x,0),$$

ef við gefum okkur að u sé m sinnum samfellt deildanlegt með tilliti til t fyrir fast x og að allar afleiður séu af veldisvísisgerð. Við gefur okkur einnig að það megi taka allar afleiður af u með tilliti til x fram fyrir Laplace-heildið,

$$\mathcal{L}\{\partial_x^k u(x,\cdot)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\partial_x^k u(x,t)\,dt = \partial_x^k \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt = \partial_x^k U(x,s).$$

Nú skulum við sjá hvernig þessum reglum er beitt til þess að leiða út lausnarformúlur á upphafsgildisverkefnum.

Sýnidæmi 12.3.1 Við skulum ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = u(0,t) = 0, & x > 0,\ t > 0, \end{cases}$$

þar sem f er fall á $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Við látum $U(x,s)$ og $F(x,s)$ tákna Laplace-myndir fallanna u og f með tilliti til t. Við notum upphafsskilyrðið $u(x,0) = 0$ og fáum þá að Laplace-ummyndun af verkefninu gefur okkur

$$sU(x,s) + x\partial_x U(x,s) + U(x,s) = F(x,s), \qquad U(0,s) = 0.$$

Þetta er fyrsta stigs afleiðujafna í x

$$\partial_x U(x,s) + \frac{s+1}{x} U(x,s) = x^{-1} F(x,s), \qquad U(0,s) = 0.$$

Ef við setjum $a(x) = (s+1)/x$, þá er $A(x) = \int_1^x a(\xi)\,d\xi = (s+1)\ln x$ og $e^{A(x)} = x^{s+1}$. Við höfum því jafngilda jöfnu

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^{s+1} U(x,s)\Big) = x^s F(x,s), \qquad U(0,s) = 0.$$

Við heildum og fáum

$$x^{s+1} U(x,s) = \int_0^x \xi^s F(\xi,s)\,d\xi.$$

Þar með er Laplace-myndin fundin,

$$U(x,s) = x^{-1}\int_0^x x^{-s}\xi^s F(\xi,s)\,d\xi = x^{-1}\int_0^x e^{-s\ln(x/\xi)} F(\xi,s)\,d\xi.$$

Reiknireglan í setningu 7.1.5 segir okkur nú að

$$e^{-s\ln(x/\xi)} F(\xi,s) = \mathcal{L}\{H(t-\ln(x/\xi)) f(\xi, t-\ln(x/\xi))\}(s)$$

og þar með er lausnarformúlan fundin

$$u(x,t) = x^{-1}\int_0^x H(t-\ln(x/\xi)) f(\xi, t-\ln(x/\xi))\,d\xi.$$

□

12.4 Æfingardæmi

1. Ákvarðið kennilínur virkjanna sem gefnir eru og kannið hvort jaðargildisverkefnin

$$\begin{cases} Lu = 0 & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \begin{cases} Lu = 0 & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = \varphi(y), & y\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

hafi ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir sérhvert gefið fall $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.
(a) $Lu = 2\partial_x u + 3\partial_y u$, (b) $Lu = \partial_x u + y\partial_y u$,
(c) $Lu = y\partial_x u - x\partial_y u$, (d) $Lu = y\partial_x u + x\partial_y u$.

2. Sýnið að sérhver lausn $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ á jöfnunni $a\partial_x u + b\partial_y u + cu = 0$, þar sem $a \neq 0$, sé af gerðinni $u(x,y) = e^{-cx/a} f(bx - ay)$, þar sem $f \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Sýnið að almenn lausn hliðruðu jöfnunnar $a\partial_x u + b\partial_y u = f(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sé gefin með formúlunni

$$u(x,y) = (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \int_L f\,ds + g(bx - ay),$$

þar sem L táknar línustrikið á kennilínunni gegnum (x, y) með endapunktana (x, y) og skurðpunktinn við y-ásinn og g er fall af einni breytistærð.

4. Beitið Laplace-ummyndun til þess að ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (x^2+1)\dfrac{\partial u}{\partial x} - u = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u(0,t) = g(t), & x > 0,\ t > 0, \end{cases}$$

þar sem $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $g(0) = 0$ og $g'(0) = 0$.

5. Beitið Laplace-ummyndun til þess að ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = t, & x > 0,\ t > 0. \end{cases}$$

6. Beitið Laplace-ummyndun til þess að ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2x, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = u(0,t) = 1, & x > 0,\ t > 0. \end{cases}$$

7. Beitið Laplace-ummyndun til þess að ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, u(0,t) = f(t), & x > 0,\ t > 0, \end{cases}$$

þar sem f er gefið fall á $\mathbb{R}_+$.

8. Beitið Laplace-ummyndun til þess að ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = f(t), & x > 0,\ t > 0, \end{cases}$$

þar sem f er gefið fall á $\mathbb{R}_+$.

Kafli 13

FOURIER–RAÐIR

13.1 Inngangur

Lítum nú enn einu sinni á það verkefni að finna sérlausn á afleiðujöfnu

$$P(D)u = (a_m D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0)u = f(x), \tag{13.1.1}$$

með fastastuðla. Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er sagt vera *lotubundið með lotuna* $T \neq 0$ eða T-*lotubundið*, ef $f(x+T) = f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Það er einmitt mjög algengt að það sé áhugavert að leysa jöfnuna með T-lotubundið fall f fyrir eitthvert $T > 0$. Fallið $f(x) = e^{in\omega x}$ með $\omega = 2\pi/T$ er dæmi um slíkt fall og við vitum að sérlausn er auðfundin, ef $P(in\omega) \neq 0$, en hún er

$$u_n(x) = \frac{e^{in\omega x}}{P(in\omega)}. \tag{13.1.2}$$

Ef við gerum ráð fyrir að hægt sé að setja fallið f fram með óendanlegri röð

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x} \tag{13.1.3}$$

og $P(in\omega) \neq 0$ fyrir öll $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, þá getum við tekið sams konar óendanlega línulega samantekt á sérlausnunum u_n og fengið sérlausn á (13.1.1)

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{P(in\omega)} e^{in\omega x}. \tag{13.1.4}$$

Ef þessi röð er það vel samleitin að það megi deilda hana lið fyrir lið, þá fáum við

$$\begin{aligned} P(D)u(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{P(in\omega)} P(D) e^{in\omega x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = f(x), \end{aligned} \tag{13.1.5}$$

svo (13.1.4) er sérlausn á jöfnunni (13.1.1). Viðfangsefni þessa kafla er að finna skilyrði á lotubundið fall f sem tryggir að til sé framsetning á f af gerðinni (13.1.3).

13.2 Fourier–raðir af 2π-lotubundnum föllum

Athugið að um sérhvert T–lotubundið fall f gildir

$$f(x) = f(x \pm T) = f(x \pm 2T) = \cdots .$$

Ef f er T-lotubundið og $S > 0$ þá er fallið $g(x) = f(Tx/S)$ S-lotubundið, því

$$g(x + S) = f(T(x + S)/S) = f(Tx/S + T) = f(Tx/S) = g(x).$$

Þessi einfalda staðreynd segir okkur að allar upplýsingar, sem við getum fundið um T–lotubundin föll, sé hægt að yfirfæra á S–lotubundin föll með því að setja Tx/S sem nýja breytu í stað x.

2π-lotubundin föll

Við ætlum fyrst að líta á föll með lotuna $T = 2\pi$ og horntíðnina $\omega = 2\pi/T = 1$ og nota formúlurnar hér að framan til þess að yfirfæra þekkingu okkar á almenn T-lotubundin föll. Föllin

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & \cos x, & \sin x, & \cos 2x, & \sin 2x, & \cos 3x, & \sin 3x, & \dots \\ & e^{ix}, & e^{-ix}, & e^{2ix}, & e^{-2ix}, & e^{3ix}, & e^{-3ix}, & \dots, \end{array}$$

eru öll 2π–lotubundin. Sama er að segja um föll f sem eru línulegar samantektir af þeim og föll f sem eru sett fram með samleitnum röðum af gerðinni

(13.2.1)
$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Athugum nú að

(13.2.2)
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ \left[\dfrac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Ef fallið f er gefið með óendanlegum röðum eins og í (13.2.1) og raðirnar eru samleitnar í jöfnum mæli, þá getum við víxlað á heildi og óendanlegri summu, og það gefur okkur

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\, dx = 2\pi c_n.$$

Þetta segir okkur að stuðullinn c_n sé *ótvírætt ákvarðaður* af formúlunni

(13.2.3)
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Formúlurnar

$$\begin{aligned}\cos(mx)\cos(nx) &= \tfrac{1}{2}\big(\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x)\big),\\ \sin(mx)\sin(nx) &= \tfrac{1}{2}\big(\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)\big),\\ \sin(mx)\cos(nx) &= \tfrac{1}{2}\big(\sin((m-n)x)+\sin((m+n)x)\big),\end{aligned}$$

gefa okkur

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0, \qquad n=1,2,\dots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx = \begin{cases}\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n,\end{cases}, \quad n,m=1,2,\dots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx = 0, \qquad n,m=1,2,\dots.$$

Með því að heilda fyrri röðina í (13.2.1) lið fyrir lið og notfæra okkur þessar formúlur, þá fáum við að stuðlarnir a_n og b_n eru einnig ótvírætt ákvarðaðir

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n=0,1,2,\dots \tag{13.2.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n=1,2,3,\dots. \tag{13.2.5}$$

Skilgreining á Fourier-stuðlum og Fourier-röðum

Skilgreining 13.2.1 Ef $f\in L^1([-\pi,\pi])$ er 2π–lotubundið, þá skilgreinum við *Fourier–stuðla* fallsins f með

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots, \tag{13.2.6}$$

Fourier–kósínus–stuðla f með

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n=0,1,2,\dots, \tag{13.2.7}$$

og *Fourier–sínus–stuðla* f með

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,2,\dots. \tag{13.2.8}$$

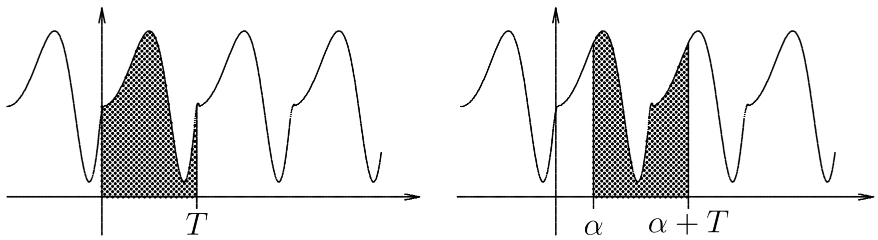
Raðirnar

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \qquad \text{og} \qquad \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx + b_n\sin nx\big)$$

kallast *Fourier–raðir* fallsins f. Til aðgreiningar köllum við síðari röðina *hornafallaröð.* $\square$

Athugið að fyrir T–lotubundið fall f þá er sama yfir hvaða bil af lengdinni T heildað er,

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx, \qquad \text{fyrir öll } \alpha \in \mathbb{R}.$$



Mynd: *Heildi yfir eina lotu*

Þessa staðhæfingu er mjög auðvelt að sanna ef við gefum okkur að fallið f sé samfellt

$$\frac{d}{d\alpha}\bigg(\int_\alpha^{T+\alpha} f(x)\,dx\bigg) = \frac{d}{d\alpha}\bigg(\int_0^{T+\alpha} f(x)\,dx - \int_0^\alpha f(x)\,dx\bigg) = f(T+\alpha) - f(\alpha) = 0.$$

Þetta segir okkur að í skilgreiningunni á Fourier–stuðlunum má heilda yfir hvaða bil sem er af lengdinni 2π.

Reiknireglur fyrir Fourier–stuðla

Setning 13.2.2 *Látum $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ vera 2π–lotubundin föll.*
(i) Fourier–stuðlarnir eru línulegar varpanir á $L^1([-\pi,\pi])$,

$$a_n(\alpha f + \beta g) = \alpha a_n(f) + \beta a_n(g), \qquad b_n(\alpha f + \beta g) = \alpha b_n(f) + \beta b_n(g),$$
$$c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g).$$

(ii) Sambandið milli stuðlanna $a_n(f)$, $b_n(f)$ og $c_n(f)$ er gefið með

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}),$$
$$c_0 = \tfrac{1}{2}a_0, \qquad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

(iii) Ef $g(x) = f(x+\alpha)$, þar sem $\alpha \in \mathbb{R}$, þá er $c_n(g) = e^{in\alpha}c_n(f)$ fyrir öll $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
(iv) Ef f er raungilt fall, þá eru $a_n(f)$ og $b_n(f)$ rauntölur og $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
(v) Ef f er jafnstætt fall, þá er $b_n(f) = 0$ fyrir öll $n = 1, 2, 3, \dots$, og

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx.$$

(vi) Ef f er oddstætt fall, þá er $a_n(f) = 0$ fyrir öll $n = 0, 1, 2, \dots$ og

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

(vii) Ef f og f' eru í $L^1([-\pi,\pi])$, þá er

$$c_n(f') = inc_n(f), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Ef $f, f', \dots, f^{(m)}$ eru í $L^1([-\pi,\pi])$, þá er

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f), \qquad 0 \le k \le m, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

og um sérhvern afleiðuvirkja $P(D) = a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0$ með fastastuðla gildir

$$c_n(P(D)f) = P(in)c_n(f), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

□

Sönnun: Allar þessar reglur leiða beint af skilgreiningunni, til dæmis (iii),

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(t)e^{-in(t-\alpha)}\,dt \\ &= e^{in\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = e^{in\alpha}c_n(f). \end{aligned}$$

Regla (vii) er hlutheildun

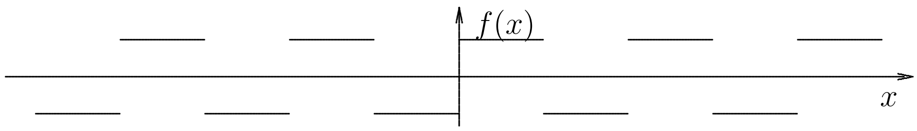
$$\begin{aligned} c_0(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0 = i0c_0(f), \\ c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx}\,dx \\ &= inc_n(f). \end{aligned}$$

Reglan fyrir hærri afleiður leiðir nú af þessu tilfelli með þrepun og síðasta staðhæfingin er augljós afleiðing af henni. ■

Nokkur sýnidæmi

Sýnidæmi 13.2.3 Lítum á 2π–lotubundna fallið f sem skilgreint er með

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pi. \end{cases}$$



Mynd: *Kassabylgja*

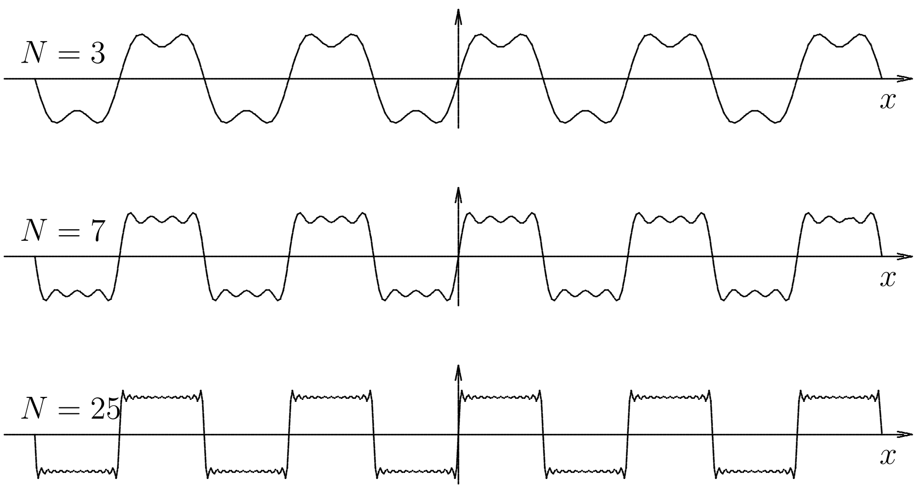
Þetta er oddstætt fall, svo $a_n(f) = 0$ fyrir öll $n = 0, 1, 2, \dots$ og við höfum

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{2((-1)^{n+1}+1)}{\pi n}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}, & \text{ef } n \text{ er oddatala,} \\ 0, & \text{ef } n \text{ er slétt tala.} \end{cases}$$

Nú er $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = -ib_n/2$ ef $n > 0$ og $c_{-n} = \overline{c_n}$, svo við getum skrifað Fourier–röð fallsins sem

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{-i((-1)^{n+1}+1)}{\pi n} e^{inx} \qquad \text{og} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x.$$

Á eftirfarandi mynd sjáum við nokkrar hlutsummur Fourier–raðarinnar:

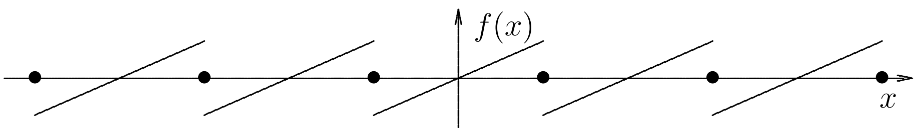


Mynd: *Hlutsummur kassabylgju*

□

Sýnidæmi 13.2.4 Lítum nú á fallið f sem er 2π–lotubundið og skilgreint er með formúlunni

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$



Mynd: *Sög*

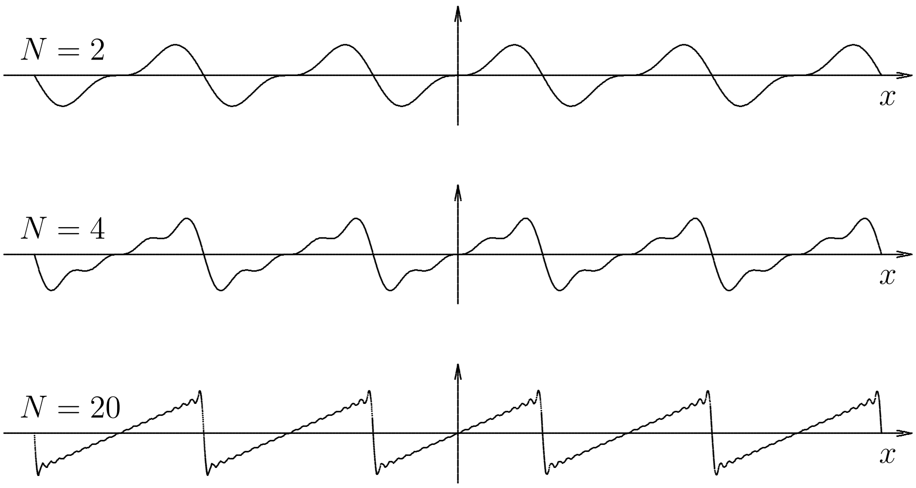
Þetta er oddstætt fall, svo við fáum $a_n = 0$ og

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x(-\cos nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Við getum skrifað Fourier–röð fallsins sem

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{i(-1)^n}{n} e^{inx} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Á eftirfarandi mynd sjáum við nokkrar hlutsummur Fourier–raðarinnar:



Mynd: *Hlutsummur sagarinnar*

□

Þessi tvö sýnidæmi gefa okkur vísbendingar um að hlutsummur Fourier-raðar fallsins f stefni á $f(x)$ í flestum punktum x. Nú snúum við okkur að því að rannsaka samleitni Fourier-raða.

13.3 Innfeldi og Bessel–ójafnan

Innfeldi á $L^2[-\pi, \pi]$

Rifjum upp að $L^2[-\pi, \pi]$ samanstendur af öllum föllum u á $[-\pi, \pi]$ þannig að

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Cauchy-Schwarz-ójafna segir að fyrir föllin $u, v \in L^2[-\pi, \pi]$ gildi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)v(x)| \, dx \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ef $u, v \in L^2[-\pi, \pi]$, þá skilgreinum við innfeldið af u og v með formúlunni

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\overline{v(x)} \, dx.$$

Við segjum að u og v séu *hornrétt* ef $\langle u, v\rangle = 0$. Helstu reiknireglur fyrir innfeldi eru

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u + \beta v, w\rangle &= \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle,\\
\langle u, \alpha v + \beta w\rangle &= \overline{\alpha}\langle u, v\rangle + \overline{\beta}\langle u, w\rangle,\\
\langle u, v\rangle &= \overline{\langle v, u\rangle},\\
\langle u, u\rangle &\geq 0.
\end{aligned}$$

Síðasta reglan leyfir okkur að skilgreina *lengd* eða *staðal* fallsins u sem

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Af Cauchy-Schwarz-ójöfnunni leiðir

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Regla Pýþagórasar á $L^2[-\pi, \pi]$ og Bessel-ójafna

Setning 13.3.1 (*Pýþagóras*). *Ef $u, v \in L^2[-\pi, \pi]$ eru hornrétt, þá er*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

□

Sönnun: Þetta leiðir beint af reiknireglunum fyrir innfeldi

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2,$$

því $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = 0$. ■

Fjölskylda $\mathcal{F}$ af innbyrðis hornréttum föllum á $[-\pi, \pi]$ er sögð vera *einingarrétt* ef $\|u\| = 1$ fyrir öll $u \in \mathcal{F}$. Sem dæmi getum við tekið

$\mathcal{F} = \{e_n(x) = e^{inx}\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ og $\mathcal{F} = \{1\} \cup \{\frac{1}{2}\cos(nx), \frac{1}{2}\sin(nx)\,;\, n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Athugum að fyrir 2π–lotubundið fall $f \in L^1([-\pi, \pi])$ gildir

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \langle f, e_n\rangle.$$

Nú ætlum við að kanna samleitni á Fourier–röðum og byrjum á því að líta á hlutsummuna

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \qquad c_n = c_n(f).$$

Ef $-N \leq n \leq N$, þá er

$$\langle f - s_N, e_n\rangle = \langle f, e_n\rangle - \sum_{m=-N}^{N} c_m\langle e_m, e_n\rangle = c_n - c_n = 0,$$

og af þessu leiðir síðan að

$$\langle f - s_N, s_N\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\langle f - s_N, e_n\rangle = 0.$$

Athugum einnig að

$$\begin{aligned}\|s_N\|^2 &= \langle \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \sum_{m=-N}^{N} c_m e^{imx}\rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} c_n\overline{c_m}\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.\end{aligned}$$

Fyrst s_N og $f - s_N$ eru innbyrðis hornrétt, þá gefur setning Pýþagórasar

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \|s_N\|^2 \le \|s_N\|^2 + \|f - s_N\|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx. \tag{13.3.1}$$

Með því að láta $N \to +\infty$, þá fæst

Setning 13.3.2 (*Bessel–ójafnan*). *Ef $f \in L^2([-\pi,\pi])$ er 2π–lotubundið og hefur Fourier-stuðla $c_n = c_n(f)$, þá er*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

□

Fourier-raðir af föllum í $PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$

Nú skulum við gera ráð fyrir því að $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, þ.e. að f sé samfellt deildanlegt á köflum og samfellt á $\mathbb{R}$, og að fallið f sé einnig 2π–lotubundið. Þá er til skipting

$$-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = \pi$$

á bilinu $[-\pi,\pi]$ þannig að f er samfellt deildanlegt á opnu bilunum (a_{j-1}, a_j) og hefur afleiðu frá hægri og vinstri í punktunum a_j. Með hlutheildun fáum við

$$\begin{aligned}c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{2\pi}\Big(f(a_j)e^{-ina_j} - f(a_{j-1})e^{-ina_{j-1}}\Big) + \frac{in}{2\pi}\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)e^{-inx}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(f(\pi)(-1)^n - f(-\pi)(-1)^n\Big) + inc_n(f) = inc_n(f).\end{aligned}$$

Af þessum útreikningi leiðir síðan:

Setning 13.3.3 *Ef $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ er 2π–lotubundið, þá er $c_n(f') = inc_n(f)$,*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty, \tag{13.3.2}$$

og þar með er Fourier–röðin $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ samleitin í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$. □

Sönnun: Við erum búin að staðfesta formúluna $c_n(f') = inc_n(f)$. Cauchy–Schwarz–ójafnan gefur

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)| &= |c_0(f)| + \sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} |c_n(f')| \cdot \frac{1}{|n|} \\
&\leq |c_0(f)| + \Big(\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} |c_n(f')|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} \\
&\leq |c_0(f)| + \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2\Big)^{1/2} \Big(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Í hægri hliðinni standa samleitnar raðir, svo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$. Við höfum

$$\Big|\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} - \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}\Big| \leq \sum_{|n|\geq N} |c_n(f)|.|$$

Hægri hliðin stefnir á 0 ef $N \to \infty$ og því gildir síðasta staðhæfingin. ■

13.4 Andhverfuformúla Fouriers

Nú erum við komin að meginniðurstöðu kaflans:

Setning 13.4.1 (*Andhverfuformúla Fouriers*). *Ef $f \in PC^1(\mathbb{R})$ er 2π–lotubundið fall með Fourier–stuðla $c_n = c_n(f)$, Fourier-kósínus–stuðla $a_n = a_n(f)$ og Fourier–sínus–stuðla $b_n = b_n(f)$, þá gildir*

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \\
&= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big).
\end{aligned}$$

Í punktum x þar sem f er samfellt gildir $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big)$ og þar með er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big).$$

Ef $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, þá eru raðirnar samleitnar í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$. □

Sönnun: Við sönnum þetta í fjórum skrefum:

Skref (i): Gerum fyrst ráð fyrir því að $x = 0$, f sé samfellt í x og $f(0) = 0$. Þá þurfum við að sanna að

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) = 0. \tag{13.4.1}$$

Við skilgreinum $g(x) = f(x)/(1 - e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2\pi k$ og $g(2\pi k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Greinilegt er að g er 2π–lotubundið fall. Ef $x \to 2\pi k$, þá stefna bæði teljari og nefnari á 0, því $f(0) = 0$ og f er 2π–lotubundið. Til þess að sanna að $g \in L^1([-\pi, \pi])$, þá dugir að sanna að g hafi markgildi bæði frá hægri og vinstri í $x = 0$. Það er auðvelt, því f er samfellt deildanlegt á köflum, samfellt í $x = 0$ og $f(0) = 0$, svo markgildin

$$f'(0\pm) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x)}{x}$$

eru bæði til og það hefur í för með sér að

$$g(0\pm) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x)}{1 - e^{ix}} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{x}{1 - e^{ix}} = if'(0\pm)$$

eru bæði til. Nú er

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{ix}) g(x) e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\, dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-i(n-1)x}\, dx = c_n(g) - c_{n-1}(g). \end{aligned}$$

Þar með er

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) = \sum_{n=-N}^{N} \big(c_n(g) - c_{n-1}(g)\big) = c_N(g) - c_{-N-1}(g).$$

Nú segir ójafna Bessels okkur að $c_n(g) \to 0$ ef $|n| \to +\infty$ og þar með gildir (13.4.1).

Skref (ii): Gerum ráð fyrir því að $x = 0$ og $\frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = 0$. Við setjum $\alpha = f(0+)$ og $h(x) = f(x) - \alpha\varphi(x)$, þar sem φ er kassabylgjan í sýnidæmi 13.2.3. Þá er

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} h(x) &= \lim_{x\to 0+} (f(x) - \alpha\varphi(x)) = \alpha - \alpha = 0 \\ \lim_{x\to 0-} h(x) &= \lim_{x\to 0-} (f(x) - \alpha\varphi(x)) = -\alpha + \alpha = 0 \end{aligned}$$

svo h uppfyllir skilyrðin í skrefi (i). Greinilega er $\sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi) = 0$, svo

$$\frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = 0 = h(0) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) - \alpha c_n(\varphi) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f).$$

Skref (iii): Gerum ráð fyrir að $x = 0$ setjum $\alpha = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-))$ og skilgreinum $j(x) = f(x) - \alpha$. Fallið j uppfyllir skilyrðin í skrefi (ii) og við höfum $c_n(j) = c_n(f)$, ef $n \neq 0$, og $c_0(j) = c_0(f) - \alpha$. Því er

$$0 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(j) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) - \alpha.$$

og niðurstaðan verður

$$\frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = \alpha = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f).$$

Skref (iv): Látum nú α vera einhvern punkt í $\mathbb{R}$ og setjum $k(x) = f(x+\alpha)$. Samkvæmt reiknireglu (iii) er $c_n(k) = e^{in\alpha}c_n(f)$ og skref (iii) gefur því

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(\alpha+) + f(\alpha-)) &= \frac{1}{2}(k(0+) + k(0-)) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(k) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\alpha}c_n(f).\end{aligned}$$

Síðasta staðhæfingin leiðir beint af setningu 13.3.3. ■

13.5 Fourier-raðir T-lotubundinna falla

Gerum nú ráð fyrir að $T > 0$ og að fallið f sé T–lotubundið og heildanlegt á sérhverju lokuðu og takmörkuðu bili. Þá er fallið $g(x) = f(Tx/2\pi)$ lotubundið með lotuna 2π og Fourier–stuðlar þess verða

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f((T/2\pi)x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i(2\pi/T)nx}\,dx.$$

Út frá þessari formúlu skilgreinum við Fourier–stuðla fyrir f:

Skilgreining 13.5.1 Látum $T > 0$ og setjum $\omega = 2\pi/T$. Ef $f \in L^1([-T/2, T/2])$ er T–lotubundið, þá skilgreinum við *Fourier–stuðla* fallsins f með

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}\,dx, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots,$$

Fourier–kósínus–stuðla f með

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\big(n\omega x\big)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

og *Fourier–sínus–stuðla* f með

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\big(n\omega x\big)\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Raðirnar

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{og} \quad \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos\big(n\omega x\big) + b_n\sin\big(n\omega x\big)\big)$$

kallast *Fourier–raðir* fallsins f og til aðgreiningar köllum við þá síðari *hornafallaröð.* □

Nú beitum við andhverfusetningu Fouriers á fallið g reiknað í punktinum ωx, $f(x) = g(\omega x)$, og fáum þá að fyrir $f \in PC^1(\mathbb{R})$ gildir

$$\tfrac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos\big(n\omega x\big) + b_n\sin\big(n\omega x\big)\big),$$

ef f er samfellt í x, þá er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos\big(n\omega x\big) + b_n\sin\big(n\omega x\big)\big)$$

og fyrir $f \in PC^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$, þá eru raðirnar samleitnar í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$. Reiknireglurnar eru nánast eins of fyrir 2π–lotubundin föll í setningu 13.2.2. Þær sem breytast eru:

Setning 13.5.2 *Látum $f, g \in L^1([-T/2, T/2])$ vera T–lotubundin föll og $\omega = 2\pi/T$.*
(iii)′ Ef $g(x) = f(x+\alpha)$, þar sem $\alpha \in \mathbb{R}$, þá er $c_n(g) = e^{i\alpha n\omega}c_n(f)$.
(v)′ Ef f er jafnstætt fall, þá er $b_n(f) = 0$ fyrir öll $n = 1, 2, 3, \dots$ og

$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx.$$

(vi)′ Ef f er oddstætt fall, þá er $a_n(f) = 0$ fyrir öll $n = 0, 1, 2, \dots$ og

$$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,dx.$$

(vii)′ Ef f og f' eru í $L^1([-T/2, T/2])$, þá er

$$c_n(f') = (in\omega)c_n(f).$$

Ef $f, f', \dots, f^{(m)}$ eru í $L^1([-T/2, T/2])$, þá er

$$c_n(f^{(k)}) = \big(in\omega\big)^k c_n(f)$$

og um sérhvern afleiðuvirkja $P(D) = a_mD^m + \cdots + a_1D + a_0$ með fastastuðla gildir

$$c_n(P(D)f) = P(in\omega)c_n(f).$$

□

13.6 Parseval–jafnan

Látum nú f vera T–lotubundið fall í $L^1[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$. Við höfum séð að Fourier–röðin er samleitin og hefur markfallið f, ef $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Ef f er ekki samfellt í x, þá er ekki víst að Fourier–röðin stefni á $f(x)$. Í framhaldi af þessu er hægt að spyrja sig hvort engu að síður geti gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega x},$$

í einhverjum öðrum skilningi, en að

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{in\omega x}, \qquad \text{fyrir öll } x \in \mathbb{R}.$$

Í grein 13.3 skilgreindum við innfeldi og lengd af föllum í $L^2([-\pi, \pi])$ og við sáum að setning Pýþagórasar segir okkur að

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2\, dx$$
$$= \|s_N\|^2 + \|f - s_N\|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$

þar sem við skilgreindum hlutsummuna með formúlunni

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \qquad c_n = c_n(f).$$

Nú ætlum við að sýna að $\|f - s_N\| \to 0$ ef $N \to +\infty$. Til þess þurfum við:

Hjálparsetning 13.6.1 *Látum V vera vigurrúm með tvinntalnamargföldun og innfeldi sem við táknum með $\langle u, v\rangle$, $u, v \in V$, gerum ráð fyrir að M sé endanlegt mengi og að fjölskyldan $\mathcal{F} = \{e_k; k \in M\}$ sé einingarrétt. Fyrir sérhvert $u \in V$ eru til ótvírætt ákvarðaðir vigrar u_1 og u_2, þannig að u_1 sé línuleg samantekt af vigrunum í $\mathcal{F}$, $u = u_1 + u_2$ og u_2 sé hornréttur á alla vigrana í $\mathcal{F}$. Vigurinn u_1 er gefinn með formúlunni*

(13.6.1)
$$u_1 = \sum_{k\in M} \langle u, e_k\rangle e_k.$$

□

Sönnun: Við skilgreinum u_1 með formúlunni (13.6.1) og setjum $u_2 = u - u_1$. Þá er augljóslega $u = u_1 + u_2$ og

$$\langle u_2, e_m\rangle = \langle u, e_m\rangle - \sum_{k\in M} \langle u, e_k\rangle\langle e_k, e_m\rangle = \langle u, e_m\rangle - \langle u, e_m\rangle = 0,$$

sem segir okkur að u_2 sé hornréttur á e_m. Hugsum okkur nú að við höfum einhverja aðra framsetningu $u = v_1 + v_2$, þar sem $v_1 = \sum_{k\in M} a_k e_k$ og v_2 er hornréttur á e_m fyrir öll m. Þá er

$$\langle u, e_m\rangle = \langle v_1, e_m\rangle = \sum_{k\in M} a_k\langle e_k, e_m\rangle = a_m.$$

Þetta segir okkur að $u_1 = v_1$ og af því leiðir $u_2 = v_2$. ■

Hjálparsetning 13.6.2 *Ef V er vigurrúm með tvinntalnamargföldun og innfeldi, M er endanlegt mengi og $\mathcal{F} = \{e_k; k \in M\}$ er einingarrétt fjölskylda af vigrum í V, þá tekur fallið*

$$\|u - \sum_{k\in M} a_k e_k\|$$

lægsta hugsanlega gildi þegar stuðlarnir eru valdir sem $a_k = \langle u, e_k\rangle$, $k \in M$. □

Sönnun: Við setjum $v = \sum_{k\in M} a_k e_k$ og skrifum $u = u_1 + u_2$ eins og í hjálparsetningu 13.6.1. Þá er u_2 hornréttur á $u_1 - v$ og þar með gefur setning Pýþagórasar

$$\|u - v\|^2 = \|u_1 - v\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|u - \sum_{k\in M}\langle u, e_k\rangle e_k\|^2.$$

■

Í því tilfelli að V samanstendur af öllum heildanlegum föllum á bilinu $[-\pi, \pi]$, með innfeldið

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\overline{v(x)}\, dx,$$

mengið M er valið sem $M = \{n \in \mathbb{Z}; -N \leq n \leq N\}$ og $e_n(x) = e^{inx}$, þá segir hjálparsetning 13.6.2, að heildið

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}|^2\, dx$$

taki lægsta gildi ef stuðlarnir a_n eru valdir sem Fourier–stuðlar fallsins f,

$$a_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx.$$

Nú vitum við að í því tilfelli að $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, þá er Fourier–röð fallsins f samleitin í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$ með markgildið $f(x)$. Fyrir almennt fall f í $L^1([-\pi, \pi])$ þurfum við að gera nálgun með föllum, sem eru samfellt deildanleg á köflum:

Hjálparsetning 13.6.3 *Ef $f \in L^2([-\pi, \pi])$ er 2π–lotubundið og $\varepsilon > 0$, þá er til $f_\varepsilon \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ þannig að*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)|^2\, dx < \varepsilon. \tag{13.6.2}$$

□

Við eftirlátum lesandanum sönnunina, en hún felst í því að nálga grafið af f með samfelldum ferli sem samanstendur af línustrikum.

Parseval-jafnan

Setning 13.6.4 *Látum $T > 0$ og $\omega = 2\pi/T$. Ef $f \in L^2[-T/2, T/2]$ er T–lotubundið, þá gildir*

$$\|f - s_N\|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\omega x}|^2\,dx \to 0, \qquad N \to +\infty. \tag{13.6.3}$$

og af þessu leiðir Parseval–jafna

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx. \tag{13.6.4}$$

□

Sönnun: Það dugir að sanna setninguna fyrir 2π-lotubundin föll. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið og veljum $f_\varepsilon \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ þannig að (13.6.2) gildi og veljum N_ε það stórt að

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f_\varepsilon)e^{inx}|^2\,dx < \varepsilon, \qquad N \geq N_\varepsilon.$$

Þá gefur hjálparsetning 13.6.2 að

$$\begin{aligned}\|f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}\|^2 &\leq \|f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f_\varepsilon)e^{inx}\|^2 \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|^2 + \|f_\varepsilon(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f_\varepsilon)e^{inx}\|^2 \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Þegar samleitnin er komin þá leiðir Parseval-formúlan af

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \|f - s_N\|^2 = \|s_N\|^2 + \|f - s_N\|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx$$

■

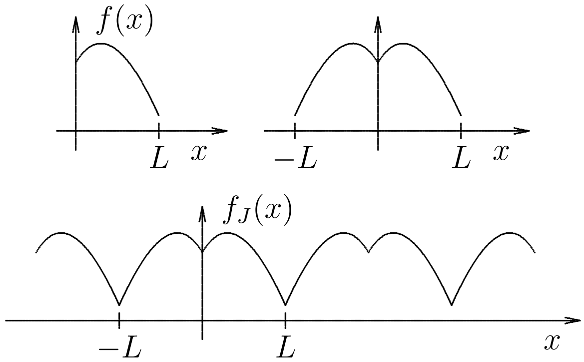
13.7 Kósínus– og sínus–raðir á endanlegum bilum

Jafnstæð lotubundin framlenging

Nú ætlum við líta á fall $f : [0, L] \to \mathbb{C}$ á takmörkuðu bili og fjalla um það hvernig hægt er að setja f fram með Fourier–röðum. Það er gert með því að framlengja skilgreiningarsvæði f yfir á allan rauntalnaásinn, þannig að út komi $2L$–lotubundið fall. Við skilgreinum

$$f_J(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L], \\ f(-x), & x \in [-L, 0], \end{cases}$$

og setjum $f_J(x) = f_J(x-2nL)$ ef $x \in [(2n-1)L, (2n+1)L]$. Þá er f_J greinilega jafnstætt fall og T–lotubundið með $T = 2L$.



Mynd: *Jafnstæð* $2L$*-lotubundin framlenging* f.

Fourier-stuðlar f_J eru gefnir með

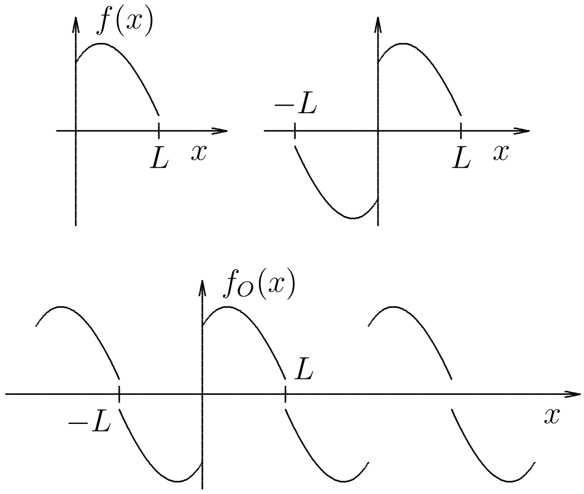
$$
\begin{aligned}
a_n(f_J) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_J(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f_J(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \\
b_n(f_J) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad n = 1, 2, 3, \dots.
\end{aligned}
$$

Oddstæð lotubundin framlenging

Við getum einnig skilgreint oddstætt T–lotubundið fall f_O með formúlunni

$$
f_O(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0, L[, \\ -f(-x), & x \in]-L, 0[, \\ 0, & x = nL, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}
$$

og $f_O(x) = f_O(x-2nL)$ ef $x \in [(2n-1)L, (2n+1)L]$. Þá er f_O oddstætt og T–lotubundið.



Mynd:*Oddstæð* $2L$*-lotubundin framlenging* f

Fourier–stuðlarnir eru

$$
\begin{aligned}
a_n(f_O) &= 0 && n = 0, 1, 2, \dots, \\
b_n(f_O) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_O(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f_O(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, && n = 1, 2, \dots.
\end{aligned}
$$

Skilgreining á Fourier-stuðlum

Skilgreining 13.7.1 Látum $f : [0, L] \to \mathbb{C}$ vera heildanlegt fall. Við skilgreinum *Fourier–kósínus–stuðla* fallsins f með

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

og *Fourier–sínus–stuðla* f með

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Röðin

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

kallast *Fourier–kósínus–röð* fallsins f og röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

kallast *Fourier–sínus–röð* fallsins f. □

Andhverfuformúla Fouriers

Með því að beita andhverfusetningu Fouriers annars vegar á fallið f_J og hins vegar á fallið f_O, þá fáum við:

Setning 13.7.2 (*Andhverfuformúla Fouriers*). *Ef $f \in PC^1([0, L])$ hefur Fourier–kósínus–stuðla $a_n = a_n(f)$ og Fourier–sínus–stuðla $b_n = b_n(f)$, þá er*

$$\tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad x \in]0, L[.$$

Ef $x \in]0, L[$ *og* f *er samfellt í* x, *þá er*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Ef $f \in PC^1([0, L]) \cap C([0, L])$, *þá er Fourier–kósínus–röðin samleitin í jöfnum mæli á* $[0, L]$. *Ef að auki gildir* $f(0) = f(L) = 0$, *þá er Fourier–sínus–röðin einnig samleitin í jöfnum mæli á* $[0, L]$. □

Sýnidæmi um lotubundnar framlengingar

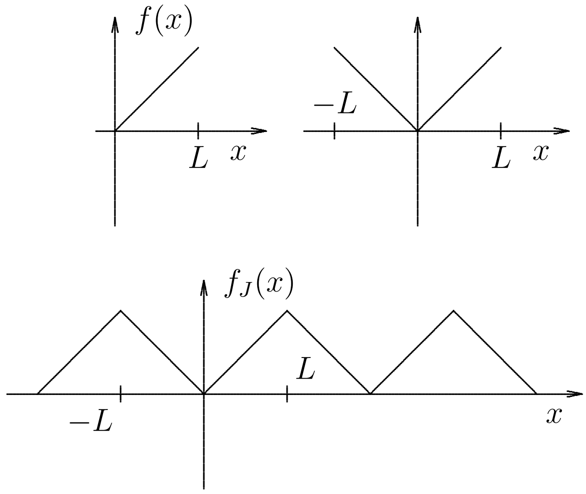
Sýnidæmi 13.7.3 Lítum á fallið $f(x) = x$, $x \in [0, L]$. Kósínus-stuðlar þess eru

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L x\,dx = L,\\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\left[\frac{xL}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L - \frac{2}{n\pi}\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\\
&= 0 - \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L = \frac{2L(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} = \frac{2L((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Niðurstaðan verður því að

$$x = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x, \qquad x \in]0, L[.$$

Fourier–kósínus–röðin í hægri hlið jöfnunnar stefnir síðan á $2L$–lotubundnu framlenginguna f_J á fallinu f.



Mynd: *Jafnstæð 2L-lotubundin framlenging*

Lítum nú á sínus–stuðlana

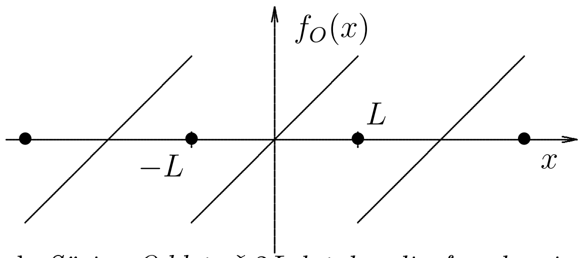
$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\left[-\frac{xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L + \frac{2}{n\pi}\int_0^L \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\\
&= \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L = \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Andhverfuformúlan gefur nú

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x, \qquad x \in]0, L[,$$

og Fourier–sínus–röðin stefnir á oddstæðu $2L$–lotubundnu framlenginguna f_O á f.

$\square$



Mynd: *Sögin: Oddstæð $2L$-lotubundin framlenging*

13.8 Fourier–raðir og afleiðujöfnur

Nú skulum við líta aftur á verkefnið að finna sérlausn á jöfnunni (13.1.1), þar sem fallið f er T–lotubundið. Til einföldunar skulum við setja $\omega = 2\pi/T$ og jafnframt gera ráð fyrir því að í punktum x þar sem f er ósamfellt gildi $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Ef $f \in PC^1(\mathbb{R})$, þá gefur andhverfuformúla Fouriers

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Ef til er T–lotubundin sérlausn u á (8.1.1), þá fæst sambandið milli Fourier–stuðla fallanna f og u úr formúlunni

$$c_n(f) = c_n(P(D)u) = P(in\omega)c_n(u).$$

Þetta segir okkur að til þess að T–lotubundin lausn sé til, þá verði $P(in\omega) \neq 0$ að gilda, ef $c_n(f) \neq 0$.

Setning 13.8.1 *Látum P vera margliðu af stigi m og lítum á jöfnuna*

$$P(D)u = (a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0)u = f(x), \tag{13.8.1}$$

þar sem $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ er T–lotubundið fall og setjum $\omega = 2\pi/T$. Ef $c_n(f) = 0$ fyrir öll n þannig að $P(in\omega) = 0$, þá fæst T–lotubundin lausn af gerðinni

$$u(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ P(in\omega)\neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{P(in\omega)} e^{in\omega x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{13.8.2}$$

$\square$

Sönnun: Fyrst P er margliða af stigi m, þá er til fasti $C > 0$ þannig að

$$\frac{|c_n(f)|}{|P(in\omega)|} \leq C\frac{|c_n(f)|}{|n|^m},$$

ef n er nógu stórt. Samkvæmt (13.3.2), þá er $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$ og með því að nota Weierstrass–prófið, þá sjáum við að það má taka afleiður af u upp að stigi m með því að deilda röðina lið fyrir lið. Við fáum því

$$P(D)u = \sum_{\substack{n=-\infty \\ P(in\omega)\neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{P(in\omega)} P(D)e^{in\omega x} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ P(in\omega)\neq 0}}^{+\infty} c_n(f)e^{in\omega x} = f(x).$$

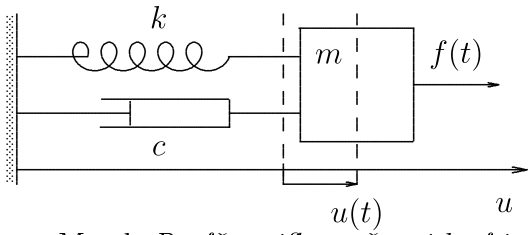
■

Við sáum í síðustu setningu að í því tilfelli þegar f er T–lotubundið, samfellt deildanlegt á köflum og samfellt, þá fáum við sérlausn á jöfnunni (13.8.1) með formúlunni (13.8.2). Þessi formúla er stundum mikilvæg, þó svo að samleitni Fourier–raðar f geti verið það hæg að getum ekki tekið afleiður undir summuna í (13.8.2):

Skilgreining 13.8.2 Látum $f \in L^1([-T/2, T/2])$ vera T–lotubundið fall og setjum $\omega = 2\pi/T$. Ef $c_n(f) = 0$ fyrir öll n þannig að $P(in\omega) = 0$, þá kallast fallið u, sem gefið er með formúlunni (13.8.2) *formlega lotubundna lausnin á* (13.8.1). □

Sýnidæmi: Deyfðar sveifur með lotubundnum krafti

Sýnidæmi 13.8.3 (*Deyfð sveifla; framhald*). Lítum nú á hreyfikerfið, þar sem massi m er tengdur við gorm með fjaðurstuðulinn k og höggdeyfi með deyfingarstuðulinn c, og gerum ráð fyrir að á massann verki T–lotubundinn kraftur sem gefinn er með fallinu f.



Mynd: *Deyfð sveifla með ytri krafti*

Hreyfijöfnan fyrir deifðan sveifil er

$$mu'' + cu' + ku = f(t),$$

þar sem $u(t)$ er færsla massans frá jafnvægisstöðu. Kennimargliða afleiðuvirkjans er

$$P(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k,$$

og þar með er

$$P(in\omega) = -mn^2\omega^2 + cin\omega + k = m\big(\omega_0^2 - n^2\omega^2 + i(c/m)n\omega\big),$$

þar sem $\omega_0^2 = k/m$. Við höfum að $c > 0$, svo $P(in\omega) \neq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$. Setning 13.8.1 segir okkur að til sé T–lotubundin lausn. Nú skulum við gera ráð fyrir því að f sé jafnstætt fall

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\big(n\omega t\big).$$

Við höfum þá samkvæmt reiknireglu (ii) í setningu 13.2.2 að $c_n = c_{-n} = \frac{1}{2}a_n$ og því er

$$\begin{aligned} c_n(u) &= \frac{a_n(f)}{2P(in\omega)} = \frac{a_n(f)}{2m\big((\omega_0^2 - n^2\omega^2) + i(c/m)n\omega\big)} \\ &= \frac{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)a_n(f) - i(cn\omega/m)a_n(f)}{2m\big((\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (cn\omega/m)^2)\big)}. \end{aligned}$$

Hornafallaröðin fyrir u er því lesin út úr formúlunni $c_n(u) = \frac{1}{2}(a_n(u) - ib_n(u))$

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{a_0}{2k} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)a_n(f)}{2m\big((\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (cn\omega/m)^2\big)} \cos\big(n\omega t\big) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cn\omega/m)a_n(f)}{2m\big((\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (cn\omega/m)^2\big)} \sin\big(n\omega t\big). \end{aligned}$$

Í því tilfelli að við höfum enga deyfingu, $c = 0$, þá verður þessi formúla

$$u(t) = \frac{a_0}{2k} + \frac{1}{2m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \cos\big(n\omega t\big),$$

og hún hefur aðeins merkingu ef $a_N(f) = 0$ þegar $\omega_0 = N\omega$ fyrir eitthvert N. Hugsum okkur nú að $\omega_0 = N\omega$ og að $a_N(f) \neq 0$. Þá eru allar lausnir á óhliðruðu jöfnunni $P(D)u = 0$ línulegar samantektir fallanna $\cos\omega_0 t$ og $\sin\omega_0 t$. Hliðraða jafnan $P(D)u = \cos\omega_0 t$ getur því ekki haft lausn af þessari gerð. Í grein 7.4 sáum við hvernig hægt er að finna sérlausn af svona jöfnu þegar $i\omega_0$ er núllstöð kennijöfnunnar af fyrsta stigi,

$$u_p(t) = \frac{te^{i\omega_0 t}}{2P'(i\omega_0)} + \frac{te^{-i\omega_0 t}}{2P'(-i\omega_0)} = \frac{t}{4i\omega_0}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) = \frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}.$$

Við fáum nú sérlausn á $P(D)u = f$, með því að finna sérlausnir á $P(D)u_n = a_n(f)\cos n\omega t$ liðunum í Fourier–röð f og leggja þær saman. Það gefur lausnina

$$u(t) = \frac{a_N(f)}{2mN\omega} t\sin\big(N\omega t\big) + \frac{1}{2m}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{+\infty} \frac{a_n(f)}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \cos\big(n\omega t\big).$$

Liðurinn $a_N(f)\cos\big(N\omega t\big)$ í Fourier–röð kraftsins $f(t)$ veldur því að útstlagið $u(t)$ verður ótakmarkað. □

Sýnidæmi 13.8.4 Lítum nú á jaðargildisverkefnið

$$u'' + \omega^2 u = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Í sýnidæmi 2.1.7 sýndum við fram á að það hafi ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir sérhvert f ef og aðeins ef ω er ekki heiltölumargfeldi af π. Hægt er að setja lausnina fram með sínus–röð

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x), \qquad u_n = b_n(u) = 2\int_0^1 u(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Ljóst er að jaðarskilyrðin eru uppfyllt. Við skulum nú ganga út frá því að sínus–röð fallsins f sé þekkt $f_n = b_n(f)$. Þá fáum við sambandið milli u_n og f_n með því að stinga röðinni fyrir u inn í afleiðujöfnuna

$$\begin{aligned} u''(x) + \omega^2 u(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n\big(-n^2\pi^2 + \omega^2\big)\sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\pi x) = f(x). \end{aligned}$$

Stuðlarnir eru því $u_n = f_n/(\omega^2 - n^2\pi^2)$ og svarið verður

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - n^2\pi^2}\sin(n\pi x).$$

□

Sveiflandi strengur

Sýnidæmi 13.8.5 (*Sveiflandi strengur; framhald*). Í sýnidæmi 11.2.1 leiddum við út einvíðu bylgjujöfnuna, sem lýsir hreyfingu sveiflandi strengs sem festur er niður í báðum endapunktum. Við skulum nú leysa hana með náttúrulegu jaðarskilyrðunum

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{13.8.3}$$

og gera jafnframt ráð fyrir því að upphafsstaðan og hraðinn séu þekkt

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \qquad x \in]0, L[. \tag{13.8.4}$$

Aðferðin byggir á því að skrifa upp liðun á $u(x,t)$ í sínus–röð með tilliti til x

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(n\pi x/L), \qquad u_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin(n\pi x/L)\,dx, \tag{13.8.5}$$

og ganga út frá því að sínus–stuðlar fallanna φ og ψ séu þekktir

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(n\pi x/L), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin(n\pi x/L). \tag{13.8.6}$$

Jaðarskilyrðin í (13.8.3) eru greinilega uppfyllt. Til þess að ákvarða óþekktu föllin $u_n(t)$, þá stingum við röðinni (13.8.5) inn í jöfnuna 13.8.3 og notum upphafsskilyrðin (13.8.4),

$$\partial_t^2 u(x,t) - c^2\partial_x^2 u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(u_n{}''(t) + (cn\pi/L)^2 u_n(t)\big)\sin(n\pi x/L) = 0,$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin(n\pi x/L) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin(n\pi x/L) = \varphi(x),$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(0)\sin(n\pi x/L) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin(n\pi x/L) = \psi(x).$$

Af þessum þremur jöfnum drögum við þá ályktun að fallið u_n sé lausnin á upphafsgildisverkefninu

$$u_n{}'' + \big(n\pi c/L\big)^2 u_n = 0, \qquad u_n(0) = \varphi_n, \quad u_n{}'(0) = \psi_n.$$

Svarið verður því

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + \frac{\psi_n L}{n\pi c}\sin\big(n\pi ct/L\big)\right)\sin(n\pi x/L). \tag{13.8.7}$$

Ef við skilgreinum nú sveifluvíddina

$$C_n = \sqrt{\varphi_n^2 + (\psi_n L/n\pi c)^2}$$

og veljum fasahliðrunina α_n þannig að

$$\cos\alpha_n = \varphi_n/C_n, \qquad \sin\alpha_n = (\psi_n L)/(n\pi c C_n),$$

þá verður lausnin

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\pi ct/L - \alpha_n\big)\sin(n\pi x/L). \tag{13.8.8}$$

□

Sveiflandi festi

Sýnidæmi 13.8.6 (*Festi; framhald*). Í sýnidæmi 5.2.5 reiknuðum við út hreyfingu perlufestar með n perlum í tilfellinu $n = 2$ og $n = 3$. Við sáum þá að sveifla festarinnar er samsett úr n óháðum liðum sem við nefndum sveifluhætti hennar. Tíðnir þessara sveifluhátta eru gefnar með formúlunni

$$\omega_j = \sqrt{n(n+1)}\sqrt{\mu_j}\, c/L, \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

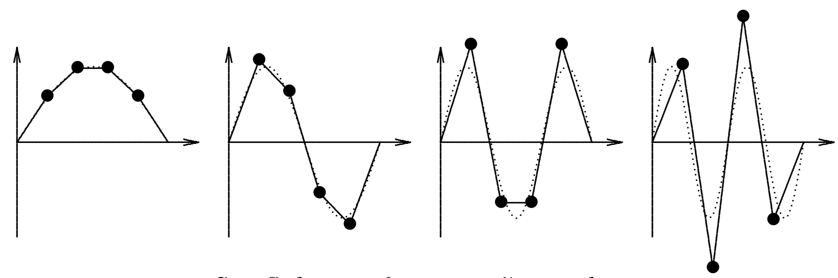
þar sem μ_j eru eigingildi fylkisins

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

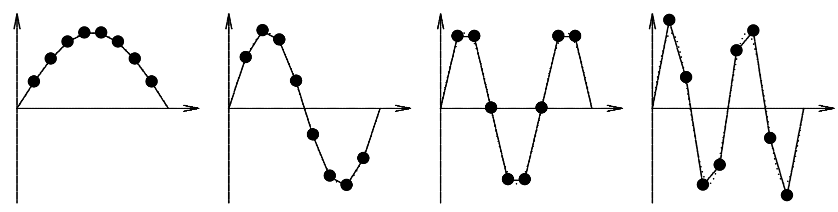
Við getum einnig túlkað (13.8.8) þannig að útslag strengsins $u(x,t)$ samanstandi af óháðum liðum $C_j \cos\big(j\pi ct/L - \alpha_j\big)\sin(j\pi x/L)$, sem við nefnum *sveifluhætti*. Tíðni sveifluháttarins er $j\pi c/L$. Í eftirfarandi töflu berum við saman tölurnar $j\pi$ og þáttinn $\sqrt{n(n+1)}\sqrt{\mu_j}$ í sveiflutíðni festarinnar fyrir mismunandi gildi á n.

$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=8$	$n=12$	$j\pi$
2.45	2.65	2.76	2.95	3.01	3.14
4.24	4.90	5.26	5.80	5.98	6.28
	6.40	7.24	8.49	8.86	9.42
		8.51	10.91	11.61	12.57
			13.00	14.19	15.71
			14.70	16.56	18.85
			15.95	18.70	21.99
			16.71	20.56	25.13
				22.12	28.27
				23.36	31.42
				24.25	34.56
				24.80	37.70

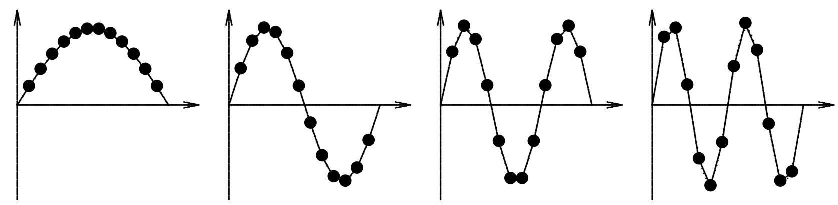
Á eftirfarandi myndum sjáum við fjóra fyrstu sveifluhættina í festi með 4, 8 og 12 perlum borna saman við föllin $\sin(j\pi x/L)$. Útslagið er valið þannig í öllum tilfellum að fallið φ sem samanstendur af brotnu línustrikunum hafi Fourier–stuðulinn $b_j(\varphi)=1$. $\square$



Sveifluhættir festar með 4 perlum



Lægstu sveifluhættir festar með 8 perlum



Lægstu sveifluhættir festar með 12 perlum

Varmaleiðni

Sýnidæmi 13.8.7 (*Varmaleiðni*). Við skulum nú líta á hliðruðu varmaleiðnijöfnuna og reikna út hitastig í stöng af lengd L, sem er einangruð í báðum endapunktunum. Það þýðir að varmaflæðið er núll í báðum endapunktunum og við þurfum því að leysa jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{13.8.9}$$

með upphafsskilyrðinu

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in]0, L[. \tag{13.8.10}$$

Úrlausnaraðferðin sem við beitum er sú sama og í sýnidæmi 13.8.5, en við liðum u nú í kósínus–röð til þess að rétt jaðarskilyrði verði uppfyllt,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(n\pi x/L), \tag{13.8.11}$$

$$u_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos(n\pi x/L)\,dx, \quad n > 0, \qquad u_0(t) = \frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)\,dx,$$

og við göngum út frá því að kósínus–raðir fallanna f og φ séu þekktar

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\cos(n\pi x/L), \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos(n\pi x/L). \tag{13.8.12}$$

Við stingum nú röðinni (13.8.12) inn í jöfnuna (13.8.9) og setjum inn upphafsskilyrðin

$$\begin{aligned} \partial_t u - \kappa \partial_x^2 u &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(u_n{}'(t) + \kappa(n\pi/L)^2 u_n(t)\big)\cos(n\pi x/L) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\cos(n\pi x/L) = f(x,t), \end{aligned}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\cos(n\pi x/L) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos(n\pi x/L) = \varphi(x).$$

Út úr þessum jöfnum lesum við að stuðullinn $u_n(t)$ er lausnin á upphafsgildisverkefninu

$$u_n{}'(t) + \kappa(n\pi/L)^2 u_n(t) = f_n(t), \qquad u_n(0) = \varphi_n.$$

og svarið verður því

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_n e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t} + \int_0^t e^{-\kappa(n\pi/L)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right)\cos(n\pi x/L).$$

□

13.9 Æfingardæmi

1. Ákvarðið Fourier-stuðla fallanna:
a) $f(x) = \cos^2 x$, b) $f(x) = \sin x$, c) $f(x) = \cos^4 x$,
d) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ e) $f(x) = \cos^{20} x$.

2. Ákvarðið 2π-lotubundna fallið sem hefur Fourier-stuðlana

$$c_n = \begin{cases} ne^{-n}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

3. Ákvarðið öll tvisvar samfelld deildanleg föll, sem eru 2π-lotubundin og uppfylla

$$u''(x) = u(x+\pi), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4. Sýnið að:

a) $x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2-1} \cos kx, \quad |x| \leq \pi.$

b) $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi}\Big(1 + \big(\frac{1}{3} - 1\big)\cos 2x + \big(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\big)\cos 4x + \big(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\big)\cos 6x + \cdots\Big).$

5. Látum u tákna 2π-lotubundna fallið, sem gefið er með formúlunni

$$u(x) = \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big) = \cosh x, \qquad |x| \leq \pi.$$

Liðið fallið u í Fourier-röð og notið hana til þess að reikna út summuna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

6. Látum u tákna 2π-lotubundna fallið, sem gefið er með formúlunni

$$u(x) = x^2, \qquad |x| \leq \pi.$$

Liðið u í Fourier-röð og setjið inn heppilegt gildi á x inn röðina til þess að sanna að

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

7. Látum α vera jákvæða rauntölu $\alpha \neq 1, 2, 3, \ldots$, og lítum á 2π-lotubundna fallið

$$f(x) = \cos \alpha x, \qquad |x| \leq \pi.$$

Liðið f í Fourier-röð og notið röðina til þess að sýna að

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1 - \pi\alpha \cot \pi\alpha}{2\alpha^2}.$$

8. Liðið fallið

$$f(x) = \max\{\cos x, 0\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

í Fourier-röð og notið röðina til þess að reikna út

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

9. Beitið Parseval-jöfnunni á 2π-lotubundna fallið, sem gefið er með formúlunni

$$f(x) = x^2, \qquad |x| \le \pi,$$

og notið niðurstöðuna til þess að ákvarða

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

10. Liðið 2π-lotubundna fallið f, sem gefið er með

$$f(x) = x(x^2 - \pi^2), \qquad |x| \le \pi,$$

í Fourier-röð og ákvarðið síðan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

11. Látum α vera jákvæða rauntölu, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, og f vera 2π-lotubundna fallið, sem gefið er með

$$f(x) = e^{i\alpha x}, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$

Ákvarðið Fourier-stuðla f og notið þá til þess að sýna fram á að

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha - n} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \qquad \text{og} \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha}.$$

12. Í hægri hliðum jafnanna standa lotubundin föll. Liðið þau í Fourier-raðir og notið raðirnar til þess að finna sérlausnir með sömu lotu:

a) $u'' + u = \cos^4 t$.

b) $u'' - u = \sin\big(2\pi t\big)$.

c) $u'' - 2u' + u = f(t)$, $f(t) = |t|$, ef $|t| \le 1$ og f hefur lotu 2.

d) $u''' + u'' - u' - u = f(t)$, $f(t) = 2t$, ef $0 \le t \le \frac{1}{2}$, $f(t) = 2 - 2t$, ef $\frac{1}{2} \le t \le 1$, f er oddstætt og 2-lotubundið.

13. Fyrir hvaða gildi á ω hefur jafnan

$$u'' + \omega^2 u = \sin^2 t \cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

2π-lotubundna sérlausn?

14. Liðið föllin f, sem gefin eru í Fourier-sínus-röð eða Fourier-kósínus-röð, eftir því sem við á, og finnið síðan lausn á jaðargildisverkefnunum.

a) $u'' + u = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, $f(x) = 4x(1-x)$, $0 \le x \le 1$,

b) $u^{(4)} + u'' + u = f(x)$, $u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0$, $f(x) = \sin(\pi x)$, $0 \le x \le 1$,

c) $u'' + u = f(x)$, $u'(0) = u'(1) = 0$, $f(x) = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$,

d) $u^{(4)} - u'' + u = f(x)$, $u'(0) = u'''(0) = u'(1) = u'''(1) = 0$, $f(x) = \cos^2(\pi x)$, $0 \le x \le 1$.

15. Látum P vera fjórða stigs margliðu og $f \in PC^1([0, L]) \cap C([0, L])$ vera fall sem uppfyllir $f(0) = f(L) = 0$. Finnið skilyrði á P, L og $b_n(f)$, sem tryggja að jaðargildisverkefnið

$$P(D)u = f(x), \quad x \in]0, L[, \qquad u(0) = u''(0) = u(L) = u''(L) = 0,$$

hafi ótvírætt ákvarðaða lausn sem hægt er að setja fram með Fourier-sínus-röð.

16. Liðið fallið

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2 - 2x, & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

í sínus–röð og notið röðina til þess að finna lausn á verkefninu

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + 2\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

17. Leysið verkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L, \\ \partial_x u(0, t) = \partial_x u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = T_0 + (T_1 - T_0)x/L, & 0 < x < L. \end{cases}$$

með Fourier-röð. Leysið sama verkefni með upphafsskilyrðin

$$u(x, 0) = T_0 + (T_1 - T_0)\big(1 - |1 - 2x/L|\big).$$

Kafli 14

EIGINGILDISVERKEFNI

14.1 Eigingildi og eiginföll

Upprifjun úr línulegri algebru

Við skulum byrja á því að rifja upp nokkur hugtök úr línulegri algebru. Látum V vera vigurrúm með tvinntalanmargföldun og $T : V \to V$ vera línulegan virkja. Tvinntalan λ er sögð vera *eigingildi* virkjans T er til er $v \neq 0$ í V þannig að

$$Tv = \lambda v.$$

Ef þessi jafna gildir, þá segjum við að v sé eiginvigur, sem svarar til eigingildisins λ. Einnig segjum við að v sé eiginvigur með eigingildið λ.

Fyrir sérhvert $\lambda \in \mathbb{C}$ er mengið $E_\lambda = \{v \in V\,;\, Tv = \lambda v\}$ hlutrúm í V. Talan λ er eigingildi ef og aðeins ef þetta hlutrúm samanstendur af fleiri stökum en núllvigrinum einum saman. Ef λ er eigingildi, þá nefnist E_λ *eiginrúmið* sem svarar til eigingildisins λ. Ef V er rúm sem samanstendur af föllum, þá segjum við að v sé *eiginfall* sem svarar til eigingildisins λ.

Mikilvægi eigingilda

Eigingildi og eiginvigrar skipta miklu málið þegar verið að leysa alls konar jöfnur. Hugsum okkur að við þurfum að leysa jöfnuna $Tu = f$ þar sem hægt er að liða hægri hlið jöfnunnar í línulega samatekt eiginvigra $f = \sum_j c_j v_j$, þar sem $Tv_j = \lambda_j v_j$ og $\lambda_j \neq 0$ fyrir öll j. Þá fæst lausnin u með formúlunni

$$u = \sum_j \frac{c_j}{\lambda_j} v_j.$$

Þetta sést einfaldlega með því að nýta það að T er línulegur virki og hann getur því verkað á summuna lið fyrir lið,

$$Tu = \sum_j \frac{c_j}{\lambda_j} Tv_j = \sum_j \frac{c_j}{\lambda_j} \lambda_j v_j = \sum_j c_j v_j = f.$$

Mikilvægi veldisvísisfallsins

Nú skulum við taka $V = C^\infty(\mathbb{R})$ og setja $u(x) = e^{\alpha x}$ með $\alpha \in \mathbb{C}$. Ef við látum deildavirkjana D, D^2, $\dots$ verka á $u(x)$, þá fáum við

$$\begin{aligned}
Du(x) &= u'(x) = \alpha e^{\alpha x} = \alpha u(x),\\
D^2u(x) &= u''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 u(x),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
D^k u(x) &= u^{(k)}(x) = \alpha^k e^{\alpha x} = \alpha^k u(x),
\end{aligned}$$

sem segir okkur að $u(x)$ sé eiginfall virkjanna $D, D^2, \dots, D^k$ með eigingildin $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^k$.

Ef við tökum almennan afleiðuvirkja með fastastuðla $P(D) = a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0$, þá fáum við

$$P(D)u(x) = (a_m\alpha^m + \cdots + a_1\alpha + a_0)e^{\alpha x} = P(\alpha)u(x),$$

sem segir okkur að fallið u sé eiginfall virkjans $P(D)$ með eigingildið $\lambda = P(\alpha)$.

Þetta notuðum við í kafla 6 til þess að finna sérlausnir á afleiðujöfnum, en hugmyndin er að finna lausn á jöfnunni $P(D)u = f$, þar sem fallið f er af gerðinni

$$f(x) = \sum_j c_j e^{\alpha_j x}$$

og $P(\alpha_j) \neq 0$ fyrir öll j, með því að taka eins summu

$$u(x) = \sum_j \frac{c_j}{P(\alpha_j)} e^{\alpha_j x}$$

14.2 Eigingildisverkefni fyrir afleiðuvirkja

Það verkefni að leysa afleiðujöfnu af taginu

$$a_m(x)u^{(m)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = \lambda u, \qquad x \in I, \tag{14.2.1}$$

þar sem λ er tvinntala og I er eitthvert bil á rauntalnaásnum, með skilyrðum á lausnina í endapunktum bilsins I, kallast *eigingildisverkefni*. Verkefnið er fólgið í því að finna öll $\lambda \in \mathbb{C}$ þannig að (14.2.1) hafi lausn u_λ, sem er ekki núllfallið. Slík gildi λ kallast *eigingildi* verkefnisins (14.2.1) og lausnir $u_\lambda \neq 0$ á jöfnunni kallast *eiginföll*.

Nú ætlum við að leysa nokkur eigingildisverkefni með virkjann $P(D)u = -u''$ með mismunandi jaðarskilyrðum:

Fallsjaðarskilyrði í báðum endapunktum

Sýnidæmi 14.2.1 Byrjum á verkefninu

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & x \in]0, L[\\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

Kennijafna afleiðujöfnunnar er $z^2 + \lambda = 0$. Ef $\lambda \neq 0$ þá fáum við tvær tvinnlausnir $z = \pm i\beta$, þar sem $\beta^2 = \lambda$ og við getum valið $\operatorname{Re}\beta \geq 0$. Því er almenn lausn jöfnunnar

$$X(x) = Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}.$$

Fyrra jaðarskilyrðið $0 = X(0) = A + B$ gefur að $B = -A$, svo við getum skrifað

$$X(x) = A(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2iA\sin(\beta x).$$

Seinna skilyrðið $0 = X(L) = 2iA\sin(\beta L)$ segir að $\lambda = \beta^2$ sé eigingildi ef og aðeins ef β uppfyllir jöfnuna $\sin(\beta L) = 0$. Lausnir þessarar jöfnu eru $\beta_n = n\pi/L$ með $n = 1, 2, 3, \dots$.

Í tilfellinu $\lambda = 0$ fáum við almenna lausn afleiðujöfnunnar

$$X(x) = A + Bx.$$

Jaðarskilyrðin $0 = X(0) = A$ og $0 = X(L) = BL$ segja að $A = B = 0$ og að $\lambda = 0$ sé ekki eigingildi.

Niðurstaða útreikninga er því að eigingildin eru $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ og tilsvarandi eiginföll

$$X(x) = C_n \sin((n\pi/L)x), \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

þar sem fastinn $C_n \neq 0$ getur verið hvaða tala sem er. Línulegar samantektir eiginfallanna,

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\big(n\pi x/L\big),$$

eru Fourier-sínusraðir á bilinu [0,L]. □

Afleiðujaðarskilyrði í báðum endapunktum

Sýnidæmi 14.2.2 Nú breytum við verkefninu í

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & x \in]0, L[\\ X'(0) = X'(L) = 0. \end{cases}$$

Afgreiðum fyrst tilfellið $\lambda = 0$. Almenn lausn jöfnunnar er

$$X(x) = C + Dx$$

Fyrra jaðarskilyrðið segir að $0 = X'(0) = D$. Þar með er $X(x) = C$ sem uppfyllir bæði jaðarskilyrðin. Þar með er $\lambda = 0$ eigingildi og tilsvarandi eiginföll eru $X_0(x) = C_0$ með $C_0 \neq 0$.

Við sáum í sýnidæmi 14.2.1 að kennijafna afleiðujöfnunnar er $z^2 + \lambda = 0$. Í stað þess að velja $e^{i\beta x}$ og $e^{-i\beta x}$ sem lausnagrunn, þá skulum við velja $cos(\beta x)$ og $\sin(\beta x)$. Almenn lausn er þá

$$X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x).$$

Fyrra jaðarskilyrðið $0 = X'(0) = D\beta$ gefur að $D = 0$, svo við getum skrifað $X(x) = C\cos(\beta x)$. og seinna jaðarskilyrðið segir að $0 = X'(L) = -C\beta\sin(\beta L)$. Þar með fæst eigingildi ef og aðeins ef $\beta L = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Niðurstaða er því að verkefnið hefur eigingildin $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ með eiginföllin

$$X(x) = C_n \cos(n\pi x/L), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

þar sem $C_n \neq 0$. Línulegar samantektir eiginfallanna

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\big(n\pi x/L\big)$$

eru Fourier-kósínus-raðir á bilinu [0,L]. □

Fallsjaðarskilyrði í öðrum endapunkti og afleiðuskilyrði í hinum

Sýnidæmi 14.2.3 Næsta afbrigði jaðargildisverkefnisins er

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & x \in]0, L[\\ X(0) = X'(L) = 0. \end{cases}$$

Lítum fyrst á tilfellið $\lambda = 0$. Almenn lausn afleiðujöfnunnar er $X(x) = C + Dx$ og jaðarskilyrðin gefa $0 = X(0) = C$ og $0 = X'(L) = D$, svo $\lambda = 0$ er ekki eigingildi.

Tökum nú $\lambda \neq 0$ og skrifum $\lambda = \beta^2 \neq 0$ með $\operatorname{Re}\beta \geq 0$. Þá er Almenn lausn $X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$. Fyrra skilyrðið $0 = X(0) = C$ og hið síðara er $0 = D\beta\cos(\beta L)$ sem segir að λ er eigingildi ef og aðeins ef $\cos(\beta L) = 0$. Þetta gefur lausnirnar $\beta_n = (n - \frac{1}{2})\pi/L$ með $n = 1, 2, 3, \dots$.

Eigingildin eru því $\lambda_n = \big((n - \frac{1}{2})\pi/L\big)^2$ og tilsvarandi eiginföll

$$X_n(x) = D_n \sin\big((n - \tfrac{1}{2})\pi x/L\big)$$

þar sem $D_n \neq 0$. □

Blönduð jaðarskilyrði í báðum endapunktum

Sýnidæmi 14.2.4 Nú skulum við takast á við eigingildisverkefnið

$$-u'' = \lambda u, \quad \text{á } [0, L], \qquad u'(0) - a_0 u(0) = 0, \quad u'(L) + a_L u(L) = 0. \tag{14.2.2}$$

Jákvæð eigingildi: Nú lítum við á eigingildisverkefnið (14.2.2) og leitum að skilyrði þess að $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$ sé eigingildi. Almenn lausn jöfnunnar er

$$u(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$$

og jaðarskilyrðin segja að

$$\begin{aligned} u'(0) - a_0 u(0) &= \beta D - a_0 C = 0, \\ u'(L) + a_L u(L) &= -\beta C\sin\beta L + \beta D\cos\beta L + a_L\big(C\cos\beta L + D\sin\beta L\big) \\ &= \big(a_L C + \beta D\big)\cos\beta L + \big(-\beta C + a_L D\big)\sin\beta L = 0. \end{aligned}$$

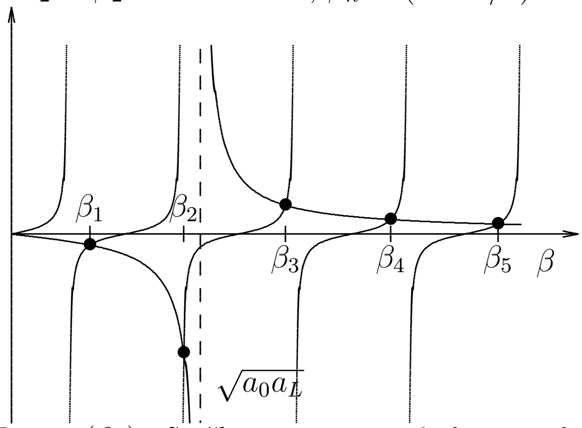
Við beitum fyrri jöfnunni til þess að leysa D út úr þeirri síðari og fáum

$$C\big((a_0 + a_L)\cos\beta L - (\beta - a_0 a_L/\beta)\sin\beta L\big) = 0.$$

Til þess að eiginfall fáist, þá þarf $C \neq 0$ að gilda, og við fáum því jöfnuna

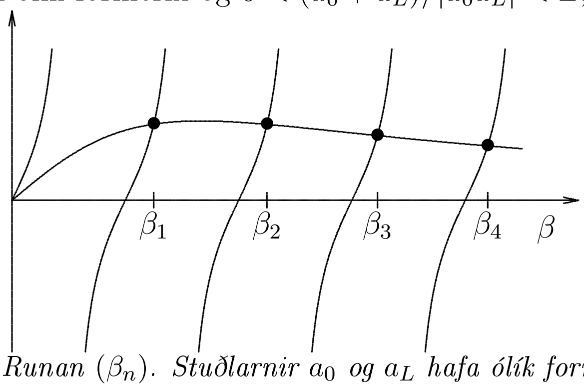
$$\tan\beta L = \frac{(a_0 + a_L)\beta}{\beta^2 - a_0 a_L}. \tag{14.2.3}$$

Það er ekki til nein bein formúla fyrir lausnir þessarar jöfnu, en með aðferð Newtons og Raphsons er auðvelt að finna tölulegar nálganir á þeim. Með því að teikna upp gröf fallanna í báðum hliðum (14.2.3) í tilfellinu $a_0 > 0$ og $a_L > 0$, þá sjáum við að til eru óendanlega margar lausnir $\alpha_2 < \beta_2 < \cdots \to +\infty$, $\beta_n \approx (n - 1/2)\pi$ ef $n \to +\infty$:



Mynd 14.1: *Runan (β_n). Stuðlarnir a_0 og a_L hafa sama formerki.*

Í tilfellinu að a_0 og a_L hafi ólík formerki og $0 < (a_0 + a_L)/|a_0 a_L| < L$, þá fáum við gröfin:



Mynd 14.2: *Runan (β_n). Stuðlarnir a_0 og a_L hafa ólík formerki.*

Í öllum öðrum tilfellum er hægt að teikna upp gröf og sjá út frá þeim að við höfum óendanlega mörg jákvæð eigingildi $\lambda_n = \beta_n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Tilsvarandi eiginföll verða

$$u_n(x) = C_n\left(\cos\beta_n x + \frac{a_0}{\beta_n}\sin\beta_n x\right) \qquad x \in [0, L]. \tag{14.2.4}$$

Eigingildið $\lambda = 0$: Nú er almenn lausn jöfnunnar

$$u(x) = C + Dx$$

og jaðarskilyrðin segja að

$$\begin{aligned} u'(0) - a_0u(0) &= D - a_0C = 0, \\ u'(L) + a_Lu(L) &= D + a_L\big(C + DL\big) = 0, \end{aligned}$$

Ef við beitum fyrri jöfnunni til þess að eyða D úr þeirri síðari, þá fæst

$$C\big((a_0 + a_L) + a_0a_LL\big) = 0$$

og skilyrði þess að $\lambda = 0$ sé eigingildi er að

$$L = -(a_0 + a_L)/a_0a_L.$$

Tilsvarandi eiginfall verður þá

$$u_0(x) = C_0\big(1 + a_0x\big), \qquad x \in [0, L].$$

Neikvæð eigingildi: Við skrifum nú $\lambda = -\gamma^2$, $\gamma > 0$. Almenn lausn á jöfnunni er

$$u(x) = C\cosh\gamma x + D\sinh\gamma x$$

og jaðarskilyrðin segja okkur að

$$\begin{aligned} u'(0) - a_0u(0) &= \gamma D - a_0C = 0, \\ u'(L) + a_Lu(L) &= \gamma C\sinh\gamma L + \gamma D\cosh\gamma L + a_L\big(C\cosh\gamma L + D\sinh\gamma L\big) \\ &= \big(a_LC + \gamma D\big)\cosh\gamma L + \big(\gamma C + a_LD\big)\sinh\gamma L = 0. \end{aligned}$$

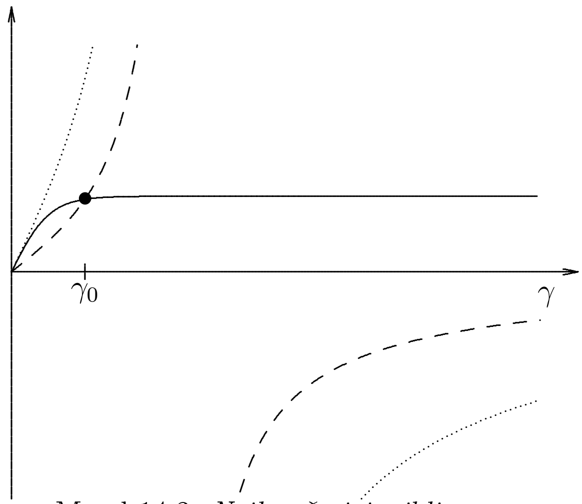
Við leysum D út úr fyrri jöfnunni og stingum inn í þá síðari

$$C\big((a_0 + a_L)\cosh\gamma L + (\gamma + a_0a_L/\gamma)\sinh\gamma L\big) = 0.$$

Nú þarf $C \neq 0$ að gilda og því fáum við

$$\tanh\gamma L = \frac{-(a_0 + a_L)\gamma}{\gamma^2 + a_0a_L}. \tag{14.2.5}$$

Samfelldi ferillinn á mynd 14.3 er graf fallsins $\tanh\gamma L$ sem fall af γ. Ef $a_0 > 0$ og $a_L > 0$, þá fæst ekkert neikvætt eigingildi, því í vinstri hlið (14.2.5) stendur jákvætt fall, en neikvætt í hægri hliðinni. Ef a_0 og a_L hafa ólík formerki og $L < (a_0 + a_L)/|a_0a_L|$, þá er punktaferillinn á mynd 14.3 graf fallsins í hægri hlið (14.2.5). Tilfellið að a_0 og a_L hafi ólík formerki og $L > (a_0 + a_L)/|a_0a_L|$ er strikaferillinn á mynd hér að framan. Þá fæst eitt neikvætt eigingildi $\lambda_0 = -\gamma_0^2$.



Mynd 14.3: *Neikvæð eigingildi.*

Í öðrum tilfellum fást ýmist ekkert, eitt eða tvö eigingildi. Í öllum tilfellum er eiginfallið af gerðinni

$$u_0(x) = C_0\Big(\cosh\gamma_0 x + \frac{a_0}{\gamma_0}\sinh\gamma_0 x\Big) \tag{14.2.6}$$

□

14.3 Aðskilnaður breytistærða

Algengt er að eigingildisverkefni komi upp þegar verið er að leysa hlutafleiðujöfnur með aðferð, sem kallast *aðskilnaður breytistærða*. Það er lang best að skoða hana með dæmum:

Sýnidæmi 14.3.1 Lítum á sýnidæmi 13.8.5 sem fjallar um sveiflandi streng og leysum það með aðskilnaði breytistærða. Við byrjum á því að finna allar lausnir á jöfnunni af gerðinni $T(t)X(x)$. Við stingum þessu falli inn í jöfnuna (13.8.3) og fáum

$$T''(t)X(x) - c^2T(t)X''(x) = 0.$$

Með því að deila í gegnum þessa jöfnu með $c^2T(t)X(x)$, þá sjáum við að hún jafngildir

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{14.3.1}$$

Vinstra megin jafnaðarmerkisins stendur fall, sem er aðeins háð t, en hægra megin stendur fall, sem er aðeins háð x. Þessi stærð hlýtur því að vera fasti. Við skulum tákna hann með $-\lambda$, þar sem λ er rauntala. Nú segir jaðarskilyrðið (13.8.4) að $X(0) = X(L) = 0$ verði að gilda. Þar með verður X að vera lausn á eigingildisverkefninu

$$-X'' = \lambda X, \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Við fundum lausnina á þessu verkefni í sýnidæmi 14.2.1. Eigingildin eru $\lambda_n = \big(n\pi/L\big)^2$ og tilsvarandi eiginföll má taka $X_n(x) = \sin\big(n\pi x/L\big)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Víkjum nú aftur að (14.3.1) til þess að ákvarða fallið T. Fyrir eigingildið λ_n þarf T að uppfylla

$$-T'' = c^2\lambda_n T.$$

Almenn lausn þessarar jöfnu er $T_n(t) = A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)$. Niðurstaðan er nú að allar lausnir af gerðinni $T(t)X(x)$ á (13.8.3) með jaðarskilyrðinu (13.8.4) eru

$$T_n(t)X_n(x) = \big(A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)\big) \sin\big(n\pi x/L\big),$$

$n = 1, 2, \dots$, þar sem velja má fastana A_n og B_n frjálst. Það er ljóst að summa endanlega margra lausna á (13.8.3) og (13.8.4) er lausn og sama gildir um óendanlegar raðir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)\big) \sin\big(n\pi x/L\big),$$

að því gefnu að þær séu nógu hratt samleitnar. Hér er Fourier–röðin úr 13.8.5 komin. Stuðlarnir A_n og B_n ákvarðast síðan af upphafsskilyrðum,

$$u(x,0) = f(x), \qquad \partial_t u(x,0) = g(x),$$

þar sem f og g eru gefin föll á bilinu $]0, L[$. □

Sýnidæmi 14.3.2 Til þess að sjá annað afbrigði af aðskilnaði breytistærða, skulum við líta á jöfnuna

$$a\partial_t^2 u + b\partial_t u + cu - \Delta u = 0, \tag{14.3.2}$$

þar sem $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ táknar Laplace–virkjann og u er fall af tíma t og þremur rúmbreytistærðum (x, y, z), $u = u(t, x, y, z)$. Við leitum fyrst að öllum lausnum á jöfnunni af gerðinni $u(x, y, z, t) = T(t)X(x)Y(y)Z(z)$, þar sem föllin T, X, Y og Z eru hvert um sig háð einni breytistærð. Við sjáum að

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\bigg(a\partial_t^2 u + b\partial_t u + cu - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u\bigg)& \\ = \frac{aT''(t) + bT(t)' + cT(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= 0.\end{aligned}$$

Þessi jafna er jafngild

$$\frac{aT''(t) + bT(t)' + cT(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)}. \tag{14.3.3}$$

Nú sjáum við að í hægri hlið jöfnunnar stendur fall sem er einungis háð z, en í vinstri hliðinni stendur fall sem er háð (x, y, t). Þar með hlýtur $Z''(z)/Z(z)$ að vera fastafall. Með nákvæmlega sömu rökum fáum við síðan að hinir liðirnir í (14.3.3) eru fastaföll og við fáum því

$$-X''(x) = \lambda X(x), \qquad -Y''(y) = \mu Y(y), \qquad -Z''(z) = \nu Z(z), \tag{14.3.4}$$

$$aT''(t) + bT'(t) + (c + \lambda + \mu + \nu)T = 0, \tag{14.3.5}$$

þar sem λ, μ og ν eru raun- eða tvinntölur eftir því hvort við gerum ráð fyrir raun- eða tvinntölugildum lausnum.

Hugsum okkur nú að við viljum leysa hlutafleiðujöfnuna (14.3.2) á menginu

$$\Omega = \{(x, y, z, t); 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$$

með því jaðarskilyrði að $u(x, y, z, t) = 0$ ef (x, y, z, t) er punktur á jaðri Ω, en það þýðir að eitt hnitanna x, y eða z taki gildið 0 eða 1. Ef við beitum aðskilnaði breytistærða eins og áður var lýst, þá sjáum við að föllin X, Y og Z verða öll að vera lausnir á eigingildisverkefninu í sýnidæmi 14.2.1. Þar með sjáum við að sérhver lausn á hlutafleiðujöfnunni (14.3.2) af gerðinni $u(x, y, z, t) = T(t)X(x)Y(y)Z(z)$ með þessum jaðarkilyrðum er af gerðinni

$$u(x, y, z, t) = T_{\ell,m,n}(t) \sin(\ell\pi x) \sin(m\pi y) \sin(n\pi z), \qquad \ell, m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

þar sem $T_{\ell,m,n}$ er lausn jöfnunnar

$$aT'' + bT' + \big(c + \pi^2(\ell^2 + m^2 + n^2)\big)T = 0.$$

$\square$

14.4 Virkjar af Sturm–Liouville–gerð

Við ætlum nú að fjalla um eigingildisverkefni fyrir annars stigs línulega afleiðuvirkja $L = P(x, D)$ á lokuðu og takmörkuðu bili $[a, b]$

$$Lu = P(x, D)u = a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u, \tag{14.4.1}$$

þar sem $a_0, a_1, a_2 \in C[a, b]$ og $a_2(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Í útreikningum okkar hentar betur að setja virkjann fram með öðrum hætti,

$$Lu = \frac{1}{\varrho}\bigg(-\frac{d}{dx}\Big(p\frac{du}{dx}\Big) + qu\bigg). \tag{14.4.2}$$

Sambandið milli (14.4.1) og (14.4.2) er einfalt. Við tökum

$$p(x) = \exp\bigg(C + \int_a^x \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)}\, d\xi\bigg), \quad q(x) = \frac{-a_0(x)p(x)}{a_2(x)}, \quad \varrho(x) = \frac{-p(x)}{a_2(x)}, \tag{14.4.3}$$

þar sem C er einhver ótiltekinn fasti. Það er rétt að rifja það upp á þessu stigi að formúlan (7.6.4) segir okkur að fallið

$$[a, b] \ni x \mapsto p(x)W(u_1, u_2)(x) \tag{14.4.4}$$

er fasti, ef u_1 og u_2 eru í núllrúmi virkjans L.

Skilgreining 14.4.1 Við segjum að virkinn L sé af Sturm–Liouville–gerð ef hann er settur fram með formúlunni (14.4.2). $\square$

Við ætlum að takmarka okkur við að stuðlarnir séu raungildir. Fyrst $a_2(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in [a,b]$, þá má gera ráð fyrir að $a_2(x) < 0$. Það segir okkur að

$$p \in C^1[a,b], \quad p(x) > 0, \quad q, \varrho \in C[a,b], \quad q(x) \in \mathbb{R}, \quad \varrho(x) > 0, \quad x \in [a,b]. \tag{14.4.5}$$

Skilgreining 14.4.2 Við segjum að virki L af Sturm–Liouville–gerð sé *reglulegur* ef föllin p, q og ϱ uppfylla (14.4.5). □

Á rúmið $C[a,b]$ skilgreinum við formið

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\varrho(x)\,dx, \qquad u, v \in C[a,b], \tag{14.4.6}$$

og á rúmið $C^1[a,b]$ skilgreinum við formið

$$\langle u, v\rangle_L = \int_a^b \Big(p(x)u'(x)\overline{v'(x)} + q(x)u(x)\overline{v(x)}\Big)\,dx, \qquad u, v \in C^1[a,b]. \tag{14.4.7}$$

Bæði eru þessi form línuleg í fyrri breytistærðinni, en andlínuleg í þeirri síðari. Það þýðir að

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u + \beta v, w\rangle &= \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle,\\
\langle u, \alpha v + \beta w\rangle &= \bar\alpha\langle u, v\rangle + \bar\beta\langle u, w\rangle,
\end{aligned}$$

fyrir öll $u, v \in C[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Fyrst $\varrho > 0$, þá er formið $\langle\cdot,\cdot\rangle$ innfeldi og tilheyrandi staðal táknum við með $\|\cdot\|$,

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in C[a,b]. \tag{14.4.8}$$

Nú skulum við líta á sambandið á milli þessara tveggja forma. Með hlutheildun fáum við

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle &= \int_a^b \frac{1}{\varrho(x)}\Big(-\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}(x)\Big) + q(x)u(x)\Big)\overline{v(x)}\varrho(x)\,dx\\
&= \Big[-p(x)u'(x)\overline{v(x)}\Big]_a^b + \int_a^b \Big(p(x)u'(x)\overline{v'(x)} + q(x)u(x)\overline{v(x)}\Big)\,dx\\
&= -\big(p(b)u'(b)\overline{v(b)} - p(a)u'(a)\overline{v(a)}\big) + \langle u, v\rangle_L,
\end{aligned} \tag{14.4.9}$$

$$\begin{aligned}
\langle u, Lv\rangle &= \int_a^b u(x)\frac{1}{\varrho(x)}\Big(-\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{d\bar v}{dx}(x)\Big) + q(x)\bar v(x)\Big)\varrho(x)\,dx\\
&= \Big[-p(x)u(x)\overline{v'(x)}\Big]_a^b + \int_a^b \Big(p(x)u'(x)\overline{v'(x)} + q(x)u(x)\overline{v(x)}\Big)\,dx\\
&= -\big(p(b)u(b)\overline{v'(b)} - p(a)u(a)\overline{v'(a)}\big) + \langle u, v\rangle_L.
\end{aligned} \tag{14.4.10}$$

Við tökum nú mismuninn af þessum tveimur jöfnum og fáum *formúlu Greens*

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle &= \Big[p(x)\big(u(x)\overline{v'(x)} - u'(x)\overline{v(x)}\big)\Big]_a^b\\
&= p(b)\begin{vmatrix} u(b) & u'(b)\\ \bar v(b) & \bar v'(b)\end{vmatrix} - p(a)\begin{vmatrix} u(a) & u'(a)\\ \bar v(a) & \bar v'(a)\end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{14.4.11}$$

Jaðargildisvirkinn B er af gerðinni

$$\begin{cases} B : C^1[a,b] \to \mathbb{C}^2, \qquad Bu = (B_1u, B_2u), \\ B_ju = \alpha_{j1}u(a) + \alpha_{j2}u'(a) + \beta_{j1}u(b) + \beta_{j2}u'(b), \quad j = 1, 2, \end{cases} \tag{14.4.12}$$

þar sem stuðlarnir α_{jk} og β_{jk} eru rauntölur. Við gerum ráð fyrir að þetta séu eiginleg skilyrði þannig að í hvorum virkja sé að minnsta kosti einn stuðull frábrugðinn núlli. Rúmið $C^2_B[a,b]$ er skilgreint sem mengi allra $u \in C^2[a,b]$ sem uppfylla óhliðruðu jaðarskilyrðin $Bu = 0$.

Skilgreining 14.4.3 Við segjum að virkinn L sé *samhverfur* á $C^2_B[a,b]$ eða *samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna* $Bu = 0$ ef

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle, \qquad u, v \in C^2_B[a,b]. \tag{14.4.13}$$

□

Út frá formúlu Greens (14.4.11) sjáum við að L er samhverfur á $C^2_B[a,b]$ þá og því aðeins að

$$p(b)\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{vmatrix} = p(a)\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} \tag{14.4.14}$$

fyrir öll $u, v \in C^2_B[a,b]$. Það eru einkum tvö tilfelli sem við höfum áhuga á:

Setning 14.4.4 *(i) Ef jaðarskilyrðin eru aðskilin , þ.e.a.s.*

$$B_1u = \alpha_1u(a) - \beta_1u'(a), \qquad B_2u = \alpha_2u(b) + \beta_2u'(b), \tag{14.4.15}$$

þar sem $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$ *og* $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$, *þá er* L *samhverfur á* $C^2_B[a,b]$.

(ii) Ef $p(a) = p(b)$ *og jaðarskilyrðin eru lotubundin, þ.e.a.s.*

$$B_1u = u(a) - u(b), \qquad B_2u = u'(a) - u'(b), \tag{14.4.16}$$

þá er L *samhverfur á* $C^2_B[a,b]$. □

Sönnun: (ii) er augljós afleiðing af (14.4.14) og til þess að sanna (i) þá tökum við $u, v \in C^2_B[a,b]$. Jöfnurnar $Bu = 0$ og $Bv = 0$ jafngilda því að vigrarnir (α_1, β_1) og (α_2, β_2) uppfylli

$$\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hvorugur vigranna er núllvigurinn, svo ákveður fylkjanna verða að vera 0. Þar með gildir (14.4.14) og virkinn L er samhverfur. ■

14.5 Eigingildisverkefni af Sturm–Liouville–gerð

Nú tökum við fyrir eigingildisverkefnið

$$Lu = \lambda u, \qquad Bu = 0, \tag{14.5.1}$$

þar sem L er virki af Sturm–Liouville–gerð (14.4.2) og B er almennur jaðargildisvirki af gerðinni (14.4.12). Talan $\lambda \in \mathbb{C}$ kallast *eigingildi* virkjans L á $C_B^2[a,b]$ ef til er lausn á (14.5.1) sem er ekki núllfallið og sérhver slík lausn kallast *eiginfall*. Línulega rúmið sem spannað er af öllum eiginföllum með tilliti til eigingildisins λ köllum við *eiginrúmið* með tilliti til eigingildisins λ og við táknum það með E_λ.

Skilgreining 14.5.1 Ef L er reglulegur virki af Sturm–Liouville–gerð, þá segjum við að verkefnið (14.5.1) sé *reglulegt*. □

Setning 14.5.2 *Gerum ráð fyrir að virkinn L af Sturm–Liouville–gerð sé samhverfur á $C_B^2[a,b]$. Þá eru öll eigingildin rauntölur og eiginföllin sem svara til ólíkra eigingilda eru innbyrðis hornrétt.* □

Sönnun: Ef $Lu = \lambda u$ og u er ekki núllfallið, þá er

$$\lambda\langle u,u\rangle = \langle Lu,u\rangle = \langle u,Lu\rangle = \langle u,\lambda u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle.$$

Við getum nú stytt út $\langle u,u\rangle$ og fáum $\lambda = \bar{\lambda}$, sem segir að λ sé rauntala. Ef $Lu = \lambda u$ og $Lv = \mu v$ þá er

$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle Lu,v\rangle = \langle u,Lv\rangle = \langle u,\mu v\rangle = \bar{\mu}\langle u,v\rangle.$$

Ef $\lambda \neq \mu$, þá fær þessi jafna ekki staðist nema $\langle u,v\rangle = 0$. ■

Athugum nú að fyrir samhverfan virkja L með eigingildi λ og eiginfall $u = v + iw$ gildir

$$Lv + iLw = Lu = \lambda u = \lambda v + i\lambda w.$$

Þetta segir okkur að bæði raunhluti og þverhluti u séu eiginföll ef þeir eru báðir frábrugðnir núllfallinu. Við getum því alltaf tekið raungild föll sem grunn fyrir eiginrúmið E_λ. Gerum nú ráð fyrir að u sé raungilt eiginfall sem svarar til eigingildisins λ og gerum ráð fyrir að $\|u\| = 1$. Þá gefur (14.4.9)

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda\langle u,u\rangle = \langle Lu,u\rangle &= \Big[-p(x)u(x)u'(x)\Big]_a^b + \langle u,u\rangle_L \\ &= p(a)u(a)u'(a) - p(b)u(b)u'(b) + \langle u,u\rangle_L\end{aligned} \tag{14.5.2}$$

Ef jaðarskilyrðin eru aðskilin eins og í setningu 9.1.4, þá uppfyllir u jöfnurnar

$$\alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0, \qquad \text{og} \qquad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0,$$

og þar með er

$$\lambda = \alpha p(a)u(a)^2 + \beta p(b)u(b)^2 + \int_a^b \Big(p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2\Big)\,dx, \tag{14.5.3}$$

þar sem við höfum sett $\alpha = \alpha_1/\beta_1$ ef $\beta_1 \neq 0$, $\alpha = 0$ ef $\beta_1 = 0$, $\beta = \alpha_2/\beta_2$ ef $\beta_2 \neq 0$ og $\beta = 0$ ef $\beta_2 = 0$. Athugið að $\beta_1 = 0$ hefur í för með sér að $u(a) = 0$ og $\beta_2 = 0$ hefur í för með sér að $u(b) = 0$. Þessi útreikningur gefur:

Setning 14.5.3 *Öll eigingildin eru* ≥ 0 *í tilfellunum:*

(i) $q(x) \geq 0$ *fyrir öll* $x \in [a,b]$, *jaðarskilyrðin eru aðskilin,* $B_1u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0$, $B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ *og* $\beta_2 \geq 0$.

(ii) $q(x) \geq 0$ *fyrir öll* $x \in [a,b]$, $p(a) = p(b)$ *og jaðarskilyrðin eru lotubundin,* $B_1u = u(a) - u(b) = 0$ *og* $B_2u = u'(a) - u'(b) = 0$. □

Meginniðurstaða kaflans er:

Setning 14.5.4 *Gerum ráð fyrir að*

$$Lu = \lambda u, \qquad Bu = 0, \tag{14.5.4}$$

sé reglulegt Sturm–Liouville–eigingildisverkefni og að L *sé samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna* $Bu = 0$. *Þá er til óendanleg runa* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots \to +\infty$ *af eigingildum og tilsvarandi raungildum eiginföllum* $u_0, u_1, u_2, \dots$, *sem uppfylla*

$$\langle u_j, u_k \rangle = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \tag{14.5.5}$$

og sérhvert fall $u \in C_B^2[a,b]$ *er unnt að liða í eiginfallaröð*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(u) u_n(x), \qquad x \in [a,b], \tag{14.5.6}$$

sem er samleitin í jöfnum mæli á $[a,b]$ *og stuðlarnir eru gefnir með formúlunni*

$$c_n(u) = \langle u, u_n \rangle = \int_a^b u(x) u_n(x) \varrho(x)\, dx. \tag{14.5.7}$$

□

Þetta er erfið setning að sanna og við höfum engin tök á að gera það.

Sýnidæmi 14.5.5 Í sýnidæmi 1.6.2 sáum við að eigingildisverkefnið

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(L) = 0,$$

hefur eigingildin $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, og tilsvarandi eiginföll eru margfeldi af $u_n(x) = \sin(n\pi x/L)$. Með því að velja $p(x) = \varrho(x) = 2/L$, þá fáum við að (14.5.5) er uppfyllt og $c_n(u)$ eru ekkert annað en Fourier–sínus–stuðlar fallsins u.

Ef við breytum randskilyrðunum og lítum á verkefnið

$$-u'' = \lambda u, \qquad u'(0) = u'(L) = 0,$$

þá fást eigingildin $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, og tilsvarandi eiginföll eru $u_n(x) = \cos(n\pi x/L)$. Með sama vali á p og ϱ þá verða stuðlarnir $c_n(u)$ Fourier–kósínus–stuðlar fallsins u, ef $n > 0$ og $c_0(u) = \frac{1}{2} a_0(u)$. □

Skilgreining 14.5.6 Fyrir sérhvert heildanlegt fall f á $[a,b]$, þá skilgreinum við *Fourier–stuðul fallsins f með tilliti til eiginfallsins u_n* með

$$c_n(f) = \langle f, u_n\rangle = \int_a^b f(x)u_n(x)\varrho(x)\,dx \tag{14.5.8}$$

og *eiginfallaröðina af f með tilliti til eiginfallanna $(u_n)_{n=0}^{\infty}$* með

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)u_n(x). \tag{14.5.9}$$

□

Sýnidæmi 14.5.7 Við skulum nú líta á jaðargildisverkefni fyrir varmaleiðnijöfnuna með almennu jaðarskilyrði og upphafsskilyrði,

$$\begin{cases} \partial_t T - \kappa\partial_x^2 T = f(x,t), & a < x < b, \quad t > 0, \\ B_1T(\cdot,t) = B_2T(\cdot,t) = 0, & t > 0, \\ T(x,0) = \varphi(x), & a < x < b. \end{cases} \tag{14.5.10}$$

Til þess að leysa þetta, skulum við gera ráð fyrir því að λ_n, $n = 1,2,3,\dots$ séu eigingildin og að u_n séu tilsvarandi eiginföll með $\|u_n\| = 1$ fyrir verkefnið

$$-\kappa u'' = \lambda u, \qquad B_1u = B_2u = 0.$$

Við göngum út frá liðun fallsins T í eiginfallaröð

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)u_n(x), \qquad T_n(t) = \int_a^b T(x,t)u_n(x)\varrho(x)\,dx \tag{14.5.11}$$

og að hægri hlið jöfnunnar og upphafsgildin hafi hliðstæða liðun

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)u_n(x), \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x). \tag{14.5.12}$$

Greinilegt er að jaðarskilyrðin eru uppfyllt, því allir liðir í summunni (14.5.11) uppfylla þau. Við stingum röðinni (14.5.11) inn í jöfnuna (14.5.10) og notum upphafsskilyrðin og jöfnuna $-\kappa u_n'' = \lambda_n u$

$$\partial_t T(x,t) - \kappa\partial_x^2 T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(T_n'(t) + \lambda_n T_n(t)\big)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)u_n(x) = f(x,t),$$

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x) = \varphi(x).$$

Svarið verður því

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right)u_n(x). \tag{14.5.13}$$

□

14.6 Green-föll fyrir jaðargildisverkefni

Látum nú $P(x, D)$ vera línulegan afleiðuvirkja af gerðinni

$$P(x, D) = a_m(x)D^m + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{14.6.1}$$

með $a_0, \ldots, a_m \in C[a, b]$ og $a_m(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Við athugum að það er alltaf hægt að stækka skilgreiningarsvæði fallanna $a_0, \ldots, a_m, f \in C[a, b]$ þannig að þau verði samfelld á opnu bili I sem inniheldur $[a, b]$ og $a_m(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in I$. Þá gefa setningar 1.7.7 og 2.1.4 okkur að sérhver lausn á $P(x, D)u = f$ á opna bilinu $]a, b[$ er í raun tvisvar samfellt deildanleg á grennd um lokaða bilið $[a, b]$ og þar með eru gildin $u(a)$, $u'(a), \ldots, u^{(m-1)}(a)$, $u(b)$, $u'(b), \ldots, u^{(m-1)}(b)$ vel skilgreind og óháð því hvernig föllin eru skilgreind á $I \setminus [a, b]$.

Við látum B vera línulegan jaðargildisvirkja á $[a, b]$ af gerðinni

$$\begin{cases} B : C^{m-1}[a, b] \to \mathbb{C}^m, \qquad Bu = (B_1u, \ldots, B_mu), \\ B_ju = \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_{jl}u^{(l-1)}(a) + \beta_{jl}u^{(l-1)}(b). \end{cases} \tag{14.6.2}$$

Við gerum ráð fyrir því að fyrir sérhvert j sé að minnsta kosti ein talnanna α_{jl}, β_{jl}, $l = 1, \ldots, m$ frábrugðin 0. Við látum $C_B^m[a, b]$ tákna rúm allra $u \in C^m[a, b]$ sem uppfylla óhliðruðu jaðarskilyrðin $Bu = 0$. Í setningu 2.1.6 gáfum við fullkonma lýsingu á því hvenær jaðargildisverkefnið $P(x, D)u = f$, $Bu = c$ hefur ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir sérhvert $f \in C[a, b]$ og sérhvert $c \in \mathbb{C}$. Athugið að skilyrðið (ii) í setningu 2.1.6 segir að $\lambda = 0$ sé ekki eigingildi virkjans $P(x, D)$ á rúminu $C_B^m[a, b]$.

Nú ætlum við að ákvarða lausnarformúlu fyrir lausn $P(x, D)u = f$ með óhliðruðum jaðarskilyrðum $Bu = 0$. Við beitum hliðstæðum aðferðum og í greinum 2.5 og 2.6, þegar við reiknuðum út lausnarformúluna fyrir lausn upphafsgildisverkefnisins $P(x, D)u = f$, $u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = 0$. Við byrjum á tveimur léttum sýnidæmum:

Sýnidæmi 14.6.1 Við skulum taka fyrir verkefnið

$$-u'' = f(x), \qquad B_1u = u(0) = B_2u = u(1) = 0, \tag{14.6.3}$$

þar sem $f \in C[0, 1]$. Almenn lausn fyrir óhliðruðu jöfnuna er línuleg samantekt $u_1(x) = 1$ og $u_2(x) = x$, Green-fall virkjans er $G(x, \xi) = -(x - \xi)$ og

$$\begin{vmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 \\ B_2u_1 & B_2u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

svo við höfum ótvírætt ákvarðaða lausn sem gefin er með formúlu af gerðinni

$$u(x) = c_1 + c_2x - \int_0^x (x - \xi)f(\xi)\, d\xi.$$

Jaðarskilyrðin gefa okkur

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = c_1, \\ 0 &= u(1) = c_1 + c_2 - \int_0^1 (1 - \xi)f(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

og því er

$$
\begin{aligned}
u(x) &= x\int_0^1 (1-\xi)f(\xi)\,d\xi - \int_0^x (x-\xi)f(\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^x (x(1-\xi)-(x-\xi))f(\xi)\,d\xi + \int_x^1 x(1-\xi)f(\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^x \xi(1-x)f(\xi)\,d\xi + \int_x^1 x(1-\xi)f(\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^1 G_B(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

þar sem fallið $G_B \in C([0,1]\times[0,1])$ er gefið með formúlunni

$$
G_B(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & 0\le\xi\le x\le 1,\\ x(1-\xi), & 0\le x\le\xi\le 1.\end{cases}
$$

Fallið G_B kallast *Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið* (14.6.3). □

Sýnidæmi 14.6.2 Áþekkt verkefni er

$$
-u'' - \omega^2 u = f(x), \qquad B_1u = u(0) = B_2u = u(1) = 0. \tag{14.6.4}
$$

Almenn lausn fyrir óhliðruðu jöfnuna er línuleg samantekt af $u_1(x) = \cos\omega x$ og $u_2(x) = \sin\omega x$, Green-fall virkjans er $G(x,\xi) = -\sin\big(\omega(x-\xi)\big)/\omega$ og

$$
\begin{vmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 \\ B_2u_1 & B_2u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\omega & \sin\omega \end{vmatrix} = \sin\omega.
$$

Við fáum ótvírætt ákvarðaða lausn þá og því aðeins að ω sé ekki heiltölumargfeldi af π. Lausn á (14.6.4) er því af gerðinni

$$
u(x) = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x - \int_0^x \frac{\sin(\omega(x-\xi))}{\omega} f(\xi)\,d\xi.
$$

Jaðarskilyrðin gefa okkur

$$
\begin{aligned}
0 &= u(0) = c_1,\\
0 &= u(1) = c_1\cos\omega + c_2\sin\omega - \int_0^1 \frac{\sin(\omega(1-\xi))}{\omega} f(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Við leysum út stuðlana og fáum

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{\sin\omega x}{\sin\omega}\int_0^1 \frac{\sin\omega(1-\xi)}{\omega} f(\xi)\,d\xi - \int_0^x \frac{\sin\omega(x-\xi)}{\omega} f(\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^x \left(\frac{\sin\omega x\sin\omega(1-\xi)}{\omega\sin\omega} - \frac{\sin\omega(x-\xi)}{\omega}\right) f(\xi)\,d\xi \\
&\quad + \int_x^1 \frac{\sin\omega x\sin\omega(1-\xi)}{\omega\sin\omega} f(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Samlagningarformúlan fyrir sínus gefur okkur nú að

$$\sin(\omega x)\sin(\omega(1-\xi))/\sin\omega - \sin(\omega(x-\xi)) = \sin(\omega\xi)\sin(\omega(1-x))/\sin\omega.$$

og þar með fáum við

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \frac{\sin\omega\xi\sin\omega(1-x)}{\omega\sin\omega} f(\xi)\,d\xi + \int_x^1 \frac{\sin\omega x\sin\omega(1-\xi)}{\omega\sin\omega} f(\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^1 G_B(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \end{aligned}$$

þar sem fallið $G_B \in C([0,1]\times[0,1])$ er gefið með formúlunni

$$G_B(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega\xi\sin\omega(1-x)}{\omega\sin\omega}, & 0\le\xi\le x\le 1, \\ \dfrac{\sin\omega x\sin\omega(1-\xi)}{\omega\sin\omega}, & 0\le x\le\xi\le 1. \end{cases}$$

Fallið G_B kallast *Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið* (14.6.4). □

Nú skulum við gera ráð fyir því að $\lambda = 0$ sé ekki eigingildi virkjans $P(x,D)$ á $C_B[a,b]$. Þá gefur setning 2.1.6 að jaðargildisverkefnið $P(x,D)u = f$, $Bu = 0$ hefur ótvírætt ákvarðaða lausn. Samkvæmt setningu 2.5.2 getum við skrifað hana á forminu

$$u(x) = c_1u_1(x) + \cdots + c_mu_m(x) + \int_a^x G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{14.6.5}$$

þar sem $u_1,\dots,u_m$ er grunnur í $\mathcal{N}(P(x,D))$ og G táknar Green-fall virkjans. Útreikningar okkar fyrir framan setningu 2.5.2 gefa

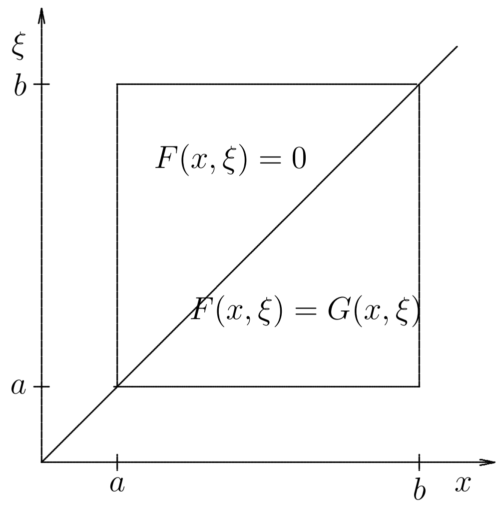
$$u^{(k)}(x) = c_1u_1^{(k)}(x) + \cdots + c_mu_m^{(k)}(x) + \int_a^x \partial_x^k G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{14.6.6}$$

fyrir öll $k = 0,\dots,m-1$. Nú látum við jaðargildisvirkjana $B_1,\dots,B_m$ verka á u og fáum

$$B_ju = c_1B_ju_1 + \cdots + c_mB_ju_m + \int_a^b \sum_{l=1}^m \beta_{jl}\partial_x^{l-1}G(b,\xi)f(\xi)\,d\xi = 0. \tag{14.6.7}$$

Nú er hyggilegt að innleiða fallið

$$F(x,\xi) = \begin{cases} G(x,\xi), & a\le\xi\le x\le b, \\ 0, & a\le x\le\xi\le b. \end{cases} \tag{14.6.8}$$



Mynd:

Þá er greinilegt að $\partial_x^{l-1}F(a,\xi) = 0$ fyrir öll $l = 1,\dots,m$ og $\xi \in]a,b[$, svo (14.6.7) jafngildir jöfnuhneppinu

$$\big(B_j u_1\big)c_1 + \cdots + \big(B_j u_m\big)c_m = -\int_a^b B_j F(\cdot,\xi) f(\xi)\,d\xi, \tag{14.6.9}$$

þar sem $B_jF(\cdot,\xi)$ táknar að B_j verki á fallið F með tilliti til fyrri breytistærðarinnar. Af setningu 2.5.2 leiðir nú:

Hjálparsetning 14.6.3 *Fallið F sem skilgreint er með (14.6.8) uppfyllir:*

(i) Hlutafleiðurnar $\partial_x^k F(x,\xi)$, $k = 0,\dots,m-2$ eru til í sérhverjum punkti á $[a,b]\times[a,b]$ og þær eru samfelldar.

(ii) Hlutafleiðan $\partial_x^{m-1}F(x,\xi)$ er til í öllum punktum á $[a,b]\times[a,b]$ utan línunnar $x = \xi$. Í punktum á línunni $x = \xi$ tekur afleiðan stökkið $1/a_m(\xi)$. Nánar tiltekið, þá eru markgildin $\partial_x^{m-1}F(\xi\pm,\xi) = \lim_{x\to\xi\pm}\partial_x^{m-1}F(x,\xi)$ til og

$$\partial_x^{m-1}F(\xi+,\xi) - \partial_x^{m-1}F(\xi-,\xi) = 1/a_m(\xi). \tag{14.6.10}$$

(iii) $P(x,D_x)F(x,\xi) = 0$ ef $x \neq \xi$. □

Samkvæmt setningu 2.1.6 hefur jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 & \cdots & B_1u_m \\ B_2u_1 & B_2u_2 & \cdots & B_2u_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_mu_1 & B_mu_2 & \cdots & B_mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(\xi) \\ d_2(\xi) \\ \vdots \\ d_m(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_1F(\cdot,\xi) \\ -B_2F(\cdot,\xi) \\ \vdots \\ -B_mF(\cdot,\xi) \end{bmatrix} \tag{14.6.11}$$

ótvírætt ákvarðaða lausn $d(\xi) = (d_1(\xi),\dots,d_m(\xi))$. Hún er samfellt fall af ξ á $[a,b]$, því

$$B_jF(\cdot,\xi) = \sum_{l=1}^m \beta_{jl}\partial_x^{l-1}G(b,\xi) \qquad \xi \in]a,b[$$

og við höfum markgildi af þessari stærð ef $\xi \to a$ og $\xi \to b$. Ef við setjum nú

$$c_j = \int_a^b d_j(\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{14.6.12}$$

og skilgreinum G_B með formúlunni

$$G_B(x,\xi) = u_1(x)d_1(\xi) + \cdots + u_m(x)d_m(\xi) + F(x,\xi). \tag{14.6.13}$$

Þá er lausnin fundin:

Setning 14.6.4 *Látum $P(x,D) = a_m(x)D^m + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$ vera afleiðuvirkja á $[a,b]$ með samfellda stuðla, gerum ráð fyrir að $a_m(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in [a,b]$, látum $B : C^{m-1}[a,b] \to \mathbb{C}^m$ vera jaðargildisvirkja og gerum ráð fyrir að $\lambda = 0$ sé ekki eigingildi $P(x,D)$ á $C^m_B[a,b]$. Þá hefur jaðargildisverkefnið*

$$P(x,D)u = f(x), \qquad Bu = 0, \tag{14.6.14}$$

ótvírætt ákvarðaða lausn sem uppfyllir

$$u(x) = \int_a^b G_B(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{14.6.15}$$

þar sem fallið G_B hefur eftirtalda eiginleika:

(i) $\partial_x^k G_B(x,\xi)$ er samfellt á $[a,b] \times [a,b]$ fyrir $k = 0, \dots, m-2$.

(ii)$\partial_x^{m-1} G_B(x,\xi)$ er samfellt í öllum punktum á $[a,b] \times [a,b]$ fyrir utan línuna $x = \xi$ og tekur stökkið $1/a_m(\xi)$ yfir hana.

(iii) $P(x,D_x)G_B(x,\xi) = 0$ ef $x \neq \xi$.

(iv) $BG_B(\cdot,\xi) = 0$ ef $\xi \in]a,b[$, þ.e. G_B uppfyllir óhliðruð jaðarskilyrði, sem fall af fyrri breytistærðinni.
Skilyrðin (i)-(iv) ákvarða fallið G_B ótvírætt. □

Sönnun: Í útreikningum okkar hér að framan sýndum við fram á að fallið G_B sem gefið er með (14.6.13) gefi okkur lausn á verkefninu (14.6.14) með formúlunni (14.6.15) og að (iv) sé uppfyllt. Skilyrðin (i)-(iii) leiða nú beint af hjálparsetningu 14.6.3.

Til þess að sanna að G_B sé ótvírætt ákvarðað, þá látum við G_B^1 og G_B^2 vera tvö föll sem uppfylla (i)-(iv), setjum $H = G_B^1 - G_B^2$ og sýnum fram á að H sé núllfallið. Þá uppfyllir H greinilega (i), (iii) og (iv). Samkvæmt (ii) er hlutafleiðan $\partial_x^{m-1} H(x,\xi)$ alls staðar til á $[a,b] \times [a,b]$ fyrir utan línuna $x = \xi$ og

$$\begin{aligned}
&\partial_x^{m-1} H(\xi+,\xi) - \partial_x^{m-1} H(\xi-,\xi) \\
&\quad = \big(\partial_x^{m-1} G_B^1(\xi+,\xi) - \partial_x^{m-1} G_B^1(\xi-,\xi)\big) - \big(\partial_x^{m-1} G_B^2(\xi+,\xi) - \big(\partial_x^{m-1} G_B^2(\xi-,\xi)\big) \\
&\qquad = 1/a_m(\xi) - 1/a_m(\xi) = 0.
\end{aligned}$$

Þar með er $\partial_x^{m-1}H(x,\xi)$ samfellt á öllu $[a,b]\times[a,b]$. Nú segir (iii) okkur að

$$\partial_x^m H(x,\xi) = \frac{1}{a_m(x)}\Big(-\partial_x^{m-1}H(x,\xi) - \cdots - a_1(x)\partial_x H(x,\xi) - a_0(x)H(x,\xi)\Big)$$

ef $x \neq \xi$. Í hægri hliðinni stendur fall, sem er samfellt á öllu menginu $[a,b]\times[a,b]$, svo $\partial_x^m H(x,\xi)$ er til í öllum punktum í $[a,b]\times[a,b]$ og er samfellt þar. Þar með er $P(x,D_x)H(x,\xi)=0$ og $BH(\cdot,\xi)=0$ fyrir öll $\xi\in]a,b[$ og setning 2.1.6 gefur að $H(x,\xi)=0$ fyrir öll $x\in[a,b]$ og öll $\xi\in]a,b[$. Fyrst H er samfellt, þá fáum við einnig $H(x,a)=H(x,b)=0$. ■

Sýnidæmi 14.6.5 Nú skulum við líta aftur á sýnidæmi 2.7.2 og reikna út Green-fallið með því að beita skilyrðunum (i)-(iv), sem einkenna það. Við byrjum á því að finna tvær lausnir sem uppfylla jaðarskilyrðin í sitt hvorum endapunkti. Þær eru $\sin\omega x$ og $\sin\omega(1-x)$. Þá gefa skilyrðin (iii) og (iv)

$$G_B(x,\xi) = \begin{cases} C(\xi)\sin\omega(1-x), & 0\le\xi<x\le 1,\\ D(\xi)\sin\omega x, & 0\le x<\xi\le 1.\end{cases}$$

Skilyrðið (i) segir að G_B sé samfellt, svo

$$C(\xi)\sin\omega(1-\xi) = D(\xi)\sin\omega\xi$$

og (ii) segir að $\partial_x G_B$ taki stökkið -1 í punktum þar sem $x=\xi$ og því er

$$-\omega C(\xi)\cos\omega(1-\xi) - \omega D(\xi)\cos\omega\xi = -1.$$

Stuðlarnir $C(\xi)$ og $D(\xi)$ uppfylla því jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix}\sin\omega(1-\xi) & -\sin\omega\xi\\ \cos\omega(1-\xi) & \cos\omega\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C(\xi)\\ D(\xi)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1/\omega\end{bmatrix}.$$

Ákveða fylkisins er $\sin\omega(1-\xi)\cos\omega\xi+\sin\omega\xi\cos\omega(1-\xi)=\sin\omega$ og lausnin er því

$$\begin{bmatrix}C(\xi)\\ D(\xi)\end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\omega}\begin{bmatrix}\cos\omega\xi & \sin\omega\xi\\ \cos\omega(1-\xi) & \sin\omega(1-\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1/\omega\end{bmatrix}.$$

Svarið er því fundið

$$G_B(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega\xi\sin\omega(1-x)}{\omega\sin\omega}, & 0\le\xi\le x\le 1,\\[2mm] \dfrac{\sin\omega x\sin\omega(1-\xi)}{\omega\sin\omega}, & 0\le x\le\xi\le 1.\end{cases}$$

□

Þetta dæmi er einfalt að alhæfa:

Setning 14.6.6 *Látum $P(x,D) = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$ vera annars stigs afleiðuvirkja, þar sem $a_2(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in [a,b]$, og gerum ráð fyrir að jaðarskilyrðin séu aðskilin , þ.e.a.s.*

$$B_1u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a), \quad B_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b), \tag{14.6.16}$$

og $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$, $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$. Gerum ráð fyrir að u_1 og u_2 myndi grunn í núllrúmi virkjans og

$$B_1 u_1 = 0, \qquad B_2 u_2 = 0. \tag{14.6.17}$$

Þá er Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið

$$P(x,D)u = f(x), \qquad Bu = 0,$$

gefið með formúlunni

$$G_B(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{a_2(\xi)W(u_1,u_2)(\xi)}, & a \leq \xi \leq x \leq b, \\ \dfrac{u_1(x)u_2(\xi)}{a_2(\xi)W(u_1,u_2)(\xi)}, & a \leq x \leq \xi \leq b, \end{cases} \tag{14.6.18}$$

þar sem $W(u_1, u_2)$ er Wronski-ákveða fallanna u_1 og u_2. □

Sönnun: (iii) og (iv) gefa að

$$G_B(x,\xi) = \begin{cases} C(\xi)u_2(x), & a \leq \xi < x \leq b, \\ D(\xi)u_1(x), & a \leq x < \xi \leq b. \end{cases}$$

Skilyrðið (i) að G_B sé samfellt á línunni $x = \xi$ gefur

$$C(\xi)u_2(\xi) = D(\xi)u_1(\xi).$$

og skilyrðið (ii) að afleiðan $\partial_x G_B(x,\xi)$ taki stökkið $1/a_2(\xi)$ yfir línuna $x = \xi$ gefur

$$C(\xi){u_2}'(\xi) - D(\xi){u_1}'(\xi) = 1/a_2(\xi).$$

Við getum nú sett þessi tvö skilyrði upp sem jöfnuhneppi

$$\begin{bmatrix} u_2(\xi) & -u_1(\xi) \\ {u_2}'(\xi) & -{u_1}'(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\xi) \\ D(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a_2(\xi) \end{bmatrix}.$$

Svarið verður því

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C(\xi) \\ D(\xi) \end{bmatrix} &= \frac{1}{-u_2(\xi){u_1}'(\xi) + u_1(\xi){u_2}'(\xi)} \begin{bmatrix} -{u_1}'(\xi) & u_1(\xi) \\ -{u_2}'(\xi) & u_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a_2(\xi) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_2(\xi)W(u_1,u_2)(\xi)} \begin{bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

14.7 Eiginfallaliðun og Green–föll

Í setningu 9.2.4 sáum við að eiginfallaröð fallsins f er samleitin í jöfnum mæli á $[a, b]$ ef $f \in C_B^2[a, b]$. Við höfum einnig andhverfuformúlu fyrir eiginfallaraðir af föllum sem eru samfellt deildanleg á köflum:

Setning 14.7.1 *Ef $f \in PC^1[a, b]$, þá er*

$$\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)u_n(x), \qquad x \in]a, b[\tag{14.7.1}$$

og í punktum x þar sem f er samfellt gildir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)u_n(x), \qquad x \in]a, b[. \tag{14.7.2}$$

□

Með því að hliðra punktinum a í 0, þá getum við alltaf gert ráð fyrir að bilið sé $[0, L]$. Þá fæst

Setning 14.7.2 (*Samleitnisetning Sturms*). *Látum f vera heildanlegt fall á bilinu $[0, L]$, látum $c_n(f)$ vera Fourier-stuðla f með tilliti til eiginfallarununnar (u_n) og $a_n(f)$ tákna Fourier–kósínus–stuðla f. Þá eru raðirnar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)u_n(x) \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\cos(n\pi x/L)$$

samleitnar í sömu punktum og í sérhverjum samleitnipunkti eru markgildi þeirra þau sömu. □

Það er mjög erfitt að sanna þessa setningu og við getum ekki fengist við það hér. Lesandanum er bent á hina sígildu bók Ince [21].

Lítum nú aftur á jaðargildisverkefnið

$$Lu = f(x), \qquad x \in]a, b[, \qquad Bu = 0, \tag{14.7.3}$$

þar sem L er virki af Sturm–Liouville–gerð og gerum ráð fyrir að hann sé reglulegur og samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna $Bu = 0$. Í því tilfelli að $\lambda = 0$ er eigingildi, þá gerum við ráð fyrir að f sé hornrétt á eiginrúmið E_0. Við athugum nú að lausnin u er gefin með formúlunni

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(f)}{\lambda_n} u_n(x) \tag{14.7.4}$$

ef þessi röð er nógu hratt samleitin til þess að við megum láta virkjann L verka lið fyrir lið í summunni. Þetta sjáum við með

$$Lu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(f)}{\lambda_n} Lu_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)u_n(x) = f(x). \tag{14.7.5}$$

Í því tilfelli að $\lambda_n = 0$ fyrir eitthvert n, þá setjum við inn 0 í stað $c_n(f)/\lambda_n$ í (14.7.4). Nú stingum við inn formúlunni fyrir stuðlana $c_n(f)$ og skiptum á óendanlegu summunni og heildinu

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\bigg(\int_a^b f(\xi)u_n(\xi)\varrho(\xi)\,d\xi\bigg)u_n(x) \\
&= \int_a^b \varrho(\xi)\bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}\bigg)f(\xi)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{14.7.6}
$$

Við vitum að Green–fallið fyrir randgildisverkefnið (14.7.3) er ótvírætt ákvarðað, svo við höfum

$$
G(x,\xi) = \varrho(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}. \tag{14.7.7}
$$

14.8 Æfingardæmi

1. Umritið eftirfarandi afleiðuvirkja yfir á Sturm–Liouville–gerð:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Bessel)} && P(x,D_x)u = -\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \bigg(1 - \frac{n^2}{x^2}\bigg)u \\
&\text{(Chebychev)} && P(x,D_x)u = -(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - n^2u \\
&\text{(Hermite)} && P(x,D_x)u = -\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} - 2nu \\
&\text{(Laguerre)} && P(x,D_x)u = -x\frac{d^2u}{dx^2} - (1-x)\frac{du}{dx} - nu \\
&\text{(Legendre)} && P(x,D_x)u = -(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} - n(n+1)u
\end{aligned}
$$

2. Látum L vera virkja af Sturm-Liouville-gerð með $p(a) = p(b)$. Ákvarðið skilyrði, sem stuðlarnir α, β, γ og δ þurfa að uppfylla, til þess að L sé samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna

$$
\begin{aligned}
B_1u &= \alpha u(a) + \beta u'(a) + u(b) = 0, \\
B_2u &= \gamma u(a) + \delta u'(a) + u'(b) = 0.
\end{aligned}
$$

3. Látum L tákna afleiðuvirkjann

$$
Lu = P(x,D)u = -x^{-2}u'' + x^{-3}u'.
$$

Sýnið að $Le^{i\beta x^2} = 4\beta^2 e^{i\beta x^2}$ gildi um sérhverja tvinntölu β. Notið þetta til þess að finna almenna lausn á jöfnunni $Lu = \lambda u$ og leysið síðan eigingildisverkefnið

$$
Lu = \lambda u, \qquad u(1) = u(2) = 0.
$$

Í hvaða innfeldi eru eiginföllin innbyrðis hornrétt?

4. * Leysið eigingildisverkefnið

$$-u'' = \lambda u, \qquad u'(0) + u(0) = 0, \qquad u'(1) - u(1) = 0.$$

[Það dugir að sýna fram á tilvist eigingilda með því að teikna mynd.]

5. (i) Leysið eigingildisverkefnið

$$\begin{cases} -(1+x)^2 u'' = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(ii) Notið lausnina úr (i) til þess að finna lausnarformúlu fyrir jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(x,t) - (1+x)^2 \partial_x^2 w(x,t) = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), \ \partial_t w(x,0) = \psi(x), & 0 < x < 1, \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

6. (i) Leysið eigingildisverkefnið

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big((1+x)^2 \dfrac{du}{dx}\Big) = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(ii) Notið lausnina úr (i) til þess að finna lausnarformúlu fyrir jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t) - \partial_x\big((1+x)^2 \partial_x w(x,t)\big) = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < 1, \\ \partial_x w(0,t) = w(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

7. Sýnið að jaðargildisverkefnin:

(i) $-u'' = \lambda u$, $B_1 u = u(0) - u(\pi) = 0$, $B_2 u = u'(0) + u'(\pi) = 0$,

(ii) $-u'' = \lambda u$, $B_1 u = 2u(0) - u(\pi) = 0$, $B_2 u = 2u'(0) + u'(\pi) = 0$,

séu ekki samhverf, að allar tvinntölur séu eigingildi í (i) og að (ii) hafi engin eigingildi.

8. Látum $L = P(x, D)$ vera afleiðuvirkja af Sturm-Liouville-gerð, sem er samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna $Bu = 0$, þar sem B er almennur jaðargildisvirki á bilinu $[a, b]$. Notið eiginfallaliðun til þess að finna lausnarformúlu fyrir eftirfarandi verkefni, ef gefið er fall $w(x,t)$, sem uppfyllir hliðruðu jaðarskilyrðin,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P(x, D_x) u = 0, & a < x < b, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & a < x < b, \\ B_1 u(\cdot, t) = g(t), \quad B_2 u(\cdot, t) = h(t). \end{cases}$$

Hér táknar $B_j u(\cdot, t)$ að jaðargildisvirkinn B_j eigi að verka á u sem fall af x fyrir fast t.

9. Beitið eiginfallaliðun til þess að finna lausn á jaðargildisverkefninu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < L, \\ \partial_x u(0,t) = hu(L,t) + \partial_x u(L,t) = 0, & t > 0,\ h > 0. \end{cases}$$

10. Beitið eiginfallaliðun til þess að finna lausn á jaðargildisverkefninu

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < L, \\ \partial_y u(x,0) = hu(x,L) + \partial_y u(x,L) = 0, & 0 < x < L, \\ u(L,y) = 0,\ u(0,y) = g(y), & 0 < y < L. \end{cases}$$

11. Ákvarðið Green-föllin til úrlausnar á jaðargildisverkefnunum:
(i)* $-u'' = f(x)$, $x \in [0,1]$, $u(0) = u'(1) = 0$.
(ii) $-u'' = f(x)$, $x \in [0,1]$, $u(0) = u'(1) + hu(1) = 0$, $h > 0$.
(iii) $-u'' - \omega^2 u = f(x)$, $x \in [0,1]$, $u(0) = u'(1) = 0$.
(iv) $-u'' + \omega^2 u = f(x)$, $x \in [0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$.
(v) $-u'' + \omega^2 u = f(x)$, $x \in [0,1]$, $u(0) = u'(1) + hu(1) = 0$, $h > 0$.

12. Ákvarðið Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið

$$u''' = f(x), \quad x \in [0,1], \qquad u(0) = u''(0) = u'(1) = 0.$$

13. Ákvarðið Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið

$$u'' - \frac{2}{x}u' + \frac{2}{x^2}u = f(x), \quad x \in [1,2], \qquad u(1) = u(2) = 0.$$

14. (*Tvöfaldar eiginfallaraðir.*) Látum $P(x, D_x)$ og $Q(y, D_y)$ vera tvo afleiðuvirkja af Sturm-Liouville gerð og lítum á jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P(x,\partial_x)u + Q(y,\partial_y)u = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < M,\ t > 0, \\ B_1^1 u(\cdot, y, t) = B_2^1 u(\cdot, y, t) = 0, & 0 < y < M,\ t > 0, \\ B_1^2 u(x, \cdot, t) = B_2^2 u(x, \cdot, t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & 0 < x < L,\ 0 < y < M, \end{cases}$$

þar sem $B^1 = (B_1^1, B_2^1)$ og $B^2 = (B_1^2, B_2^2)$ eru aðskildir jaðargildisvirkjar á bilunum $[0, L]$ og $[0, M]$. Finnið lausnarformúlu fyrir þetta verkefni með þeirri lausnartilgátu að hægt sé að liða u í tvöfalda eiginfallaröð með stuðlum sem eru háðir t.

Kafli 15

RAÐALAUSNIR Á HLUTAFLEIÐUJÖFNUM

15.1 Inngangur

Í þessum kafla kynnumst við ýmsum aðferðum til þess að leiða út formúlur fyrir lausnir á hlutafleiðujöfnum með hliðarskilyrðum. Aðferðirnar eiga það sammerkt að gengið er út frá lausnartilgátum sem segja að hægt sé að liða lausnina í eiginfallaröð með tilliti til einnar breytistærðar með stuðlum sem eru háðir öðrum breytistærðum. Eiginfallaröðin ákvarðast af hliðarskilyrðunum, sem oftast eru jaðarskilyrði, en gildin á stuðlum raðarinnar ákvarðast af hlutafleiðujöfnunni og einhverjum hliðarskilyrðum, sem ýmist eru upphafs- eða jaðarskilyrði.

Hugmyndin að baki þessara lausnaraðferða hefur þegar komið fram í nokkrum sýnidæmum í kafla 13. Í sýnidæmi 13.8.5 fjölluðum við um sveiflur strengs, þar sem frávikið frá jafnvægisstöðu $u(x,t)$ uppfyllir bylgjujöfnuna,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0. \tag{15.1.1}$$

Ef strengurinn er festur niður í báðum endapunktum, þá fáum við jaðarskilyrðið

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{15.1.2}$$

Þetta segir okkur að eðlileg lausnartilgáta sé að hægt sé að liða $u(x,t)$ í Fourier-sínusröð með tilliti til x með stuðlum sem eru háðir tíma,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(n\pi x/L), \quad u_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin(n\pi x/L)\,dx. \tag{15.1.3}$$

Með því að láta bylgjuvirkjann $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2$ verka lið fyrir lið summunni (15.1.3) og setja ákveðin upphafsskilyrði um stöðu og hraða strengsins við tímann $t = 0$, sáum við að Fourier-stuðullinn $u_n(t)$ væri lausn á ákveðnu upphafsgildisverkefni sem auðvelt var að leysa.

Í sýnidæmi 13.8.7 fjölluðum við um hitastig $u(x,t)$ í stöng af lengd L, þar sem varmamyndun á massa- og lengdareiningu er $f(x,t)$, en $u(x,t)$ uppfyllir þá varmaleiðnijöfnuna

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0. \tag{15.1.4}$$

Ef gert er ráð fyrir að endar stangarinnar séu einangraðir, þá fáum við jaðarskilyrðið

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{15.1.5}$$

Á því sjáum við að eðlilegt er að setja fram þá lausnartilgátu að hægt sé að liða $u(x,t)$ í Fourier-kósínusröð með tilliti til x

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(n\pi x/L), \tag{15.1.6}$$

og gefa sér að Fourier-kósínusstuðlar fallsins f séu þekktir

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos(n\pi x/L). \tag{15.1.7}$$

Með því að beita varmaleiðnivirkjanum $\partial_t - \kappa\partial_x^2$ lið fyrir lið í summunni (15.1.6), þá fengum við að u_n verður að uppfylla jöfnuna $u_n{}'(t) + \kappa(n\pi/L)^2 u_n(t) = f_n(t)$ og út frá henni ákvarðast $u_n(t)$.

Við ætlum nú að útfæra þessa hugmynd í mörgum afbrigðum til þess að leiða út lausnarformúlur fyrir ýmsar hlutafleiðujöfnur eins og bylgjujöfnuna, varmaleiðnijöfnuna og Laplace-jöfnuna með hliðarskilyrðum.

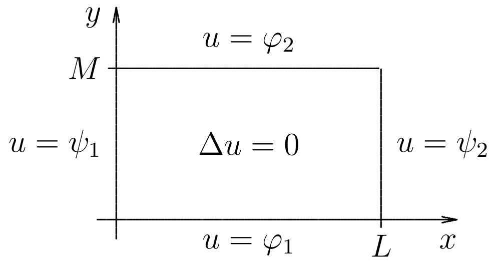
15.2 Laplace-virkinn í rétthyrndum hnitum

Í grein 12.3 nefndum við að *Dirichlet-verkefni* fyrir Laplace-virkjann í plani er:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in X, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \partial X, \end{cases} \tag{15.2.1}$$

þar sem X er opið svæði í $\mathbb{R}^2$ með jaðar ∂X og φ er gefið fall á ∂X. Í eðlisfræðinni er þetta verkefni mjög mikilvægt. Lausnin getur til dæmis verið hitastig í þunnri plötu, sem er í varmajafnvægi, $(\partial u/\partial t = 0)$. Fallið u getur einnig verið rafstöðumætti í þunnri leiðandi plötu. Nú skulum við líta á tilfellið þegar X er rétthyrnd plata:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < M, \\ u(x,0) = \varphi_1(x),\ u(x,M) = \varphi_2(x), & 0 < x < L, \\ u(0,y) = \psi_1(y),\ u(L,y) = \psi_2(y), & 0 < y < M. \end{cases} \tag{15.2.2}$$

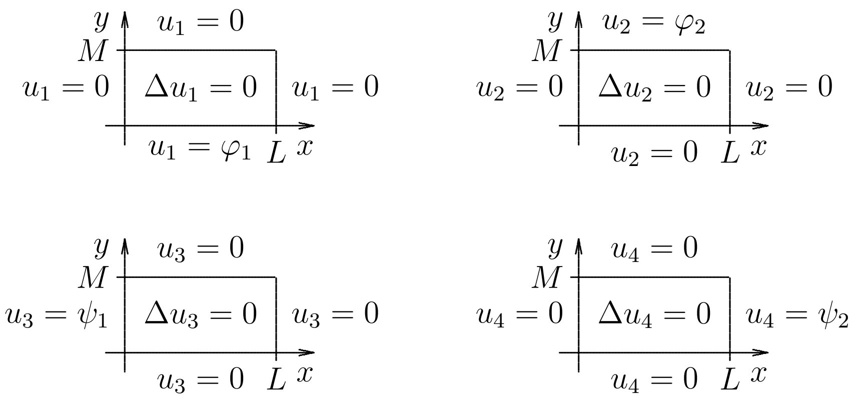


Mynd 13.1. Dirichlet verkefnið á ferhyrningi.

Við skiptum verkefninu í fjóra hluta

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ u_1(x,0) = \varphi_1(x), \ \ u_1(x,M) = 0, \\ u_1(0,y) = u_1(L,y) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = 0, \\ u_2(x,0) = 0, u_2(x,M) = \varphi_2(x), \\ u_2(0,y) = u_2(L,y) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0, \\ u_3(x,0) = u_3(x,M) = 0, \\ u_3(0,y) = \psi_1(y), \ \ u_3(L,y) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_4 = 0, \\ u_4(x,0) = u_4(x,M) = 0, \\ u_4(0,y) = 0, u_4(L,y) = \psi_2(y). \end{cases}$$



Mynd 13.2. Liðun á Dirichlet verkefninu í fernt.

Ef við getum sýnt fram á að lausnirnar u_1, u_2, u_3 og u_4 á þessum verkefnunum eru til og leitt út formúlur fyrir þeim, þá segir samlagningarlögmálið að lausnin u á (15.2.2) sé $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$.

Nú snúum við okkur að verkefnunum fjórum. Skilyrðin $u_1(0,y) = u_1(L,y) = 0$ segja okkur að eðlilegt sé að ganga út frá þeirri lausnartilgátu að hægt sé að liða $u_1(x,y)$ í Fourier-sínusröð,

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(y) \sin\big(n\pi x/L\big),$$

$$u_{1n}(y) = b_n(u_1(\cdot,y)) = \frac{2}{L}\int_0^L u_1(x,y) \sin\big(n\pi x/L\big)\, dx.$$

Til þess að ákvarða stuðlana $u_{1n}(y)$, þá látum við Laplace-virkjann verka lið fyrir lið í summunni og stingum inn jaðarskilyrðunum,

$$\begin{aligned}
\Delta u_1(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_{1n}(y)\sin\big(n\pi x/L\big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\big(-(n\pi/L)^2 u_{1n}(y)+u_{1n}{}''(y)\big)\sin\big(n\pi x/L\big)=0,\\
u_1(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}u_{1n}(0)\sin\big(n\pi x/L\big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}b_n(\varphi_1)\sin\big(n\pi x/L\big)=\varphi_1(x),\\
u_1(x,M) &= \sum_{n=1}^{\infty}u_{1n}(M)\sin\big(n\pi x/L\big)=0.
\end{aligned}$$

Út úr þessum jöfnum lesum við nú að u_{1n} verður að vera lausn á jaðargildisverkefninu

$$\begin{cases} u_{1n}{}''(y)-(n\pi/L)^2u_{1n}(y)=0, \qquad 0<y<M,\\ u_{1n}(0)=b_n(\varphi_1), \quad u_{1n}(M)=0.\end{cases}$$

Almenn lausn á þessari afleiðujöfnu er

$$u_{1n}(y)=A_n\cosh\big(n\pi y/L\big)+B_n\sinh\big(n\pi y/L\big),$$

og jaðarskilyrðin gefa

$$\begin{aligned}
u_{1n}(0) &= A_n = b_n(\varphi_1),\\
u_{1n}(M) &= A_n\cosh\big(n\pi M/L\big)+B_n\sinh\big(n\pi M/L\big)=0.
\end{aligned}$$

Þar með er

$$\begin{aligned}
u_{1n}(y) &= b_n(\varphi_1)\cosh\big(n\pi y/L\big)-b_n(\varphi_1)\frac{\cosh\big(n\pi M/L\big)}{\sinh\big(n\pi M/L\big)}\sinh\big(n\pi y/L\big)\\
&= b_n(\varphi_1)\frac{\sinh\big(n\pi M/L\big)\cosh\big(n\pi y/L\big)-\cosh\big(n\pi M/L\big)\sinh\big(n\pi y/L\big)}{\sinh\big(n\pi M/L\big)}\\
&= b_n(\varphi_1)\frac{\sinh\big(n\pi(M-y)/L\big)}{\sinh\big(n\pi M/L\big)}.
\end{aligned}$$

Við höfum því ákvarðað fyrsta liðinn u_1 í framsetningu okkar á u. Til þess að finna u_2 skiptum við einungis á y og $M-y$ og til þess að ákvarða u_3 og u_4, þá skiptum við einfaldlega á hlutverkum x og y. Útkoman verður því

$$
\begin{aligned}
(15.2.3) \qquad u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi_1) \frac{\sinh\big(n\pi(M-y)/L\big)}{\sinh\big(n\pi M/L\big)} \sin\big(n\pi x/L\big) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi_2) \frac{\sinh\big(n\pi y/L\big)}{\sinh\big(n\pi M/L\big)} \sin\big(n\pi x/L\big) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\psi_1) \frac{\sinh\big(n\pi(L-x)/M\big)}{\sinh\big(n\pi L/M\big)} \sin\big(n\pi y/M\big) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\psi_2) \frac{\sinh\big(n\pi x/M\big)}{\sinh\big(n\pi L/M\big)} \sin\big(n\pi y/M\big).
\end{aligned}
$$

Hér er rétt að lesandinn staldri við og sannfæri sig um að föllin, sem summurnar fjórar skilgreina séu lausnirnar á jaðargildisverkefnunum fjórum hér að ofan.

Í þessari úrlausn sáum við að það er mikilvægt að föllin $x \mapsto \sin(n\pi x/L)$ uppfylla gefnu jaðarskilyrðin í $x = 0$ og $x = L$ og jafnframt að það er lykilatriði að þau eru *eiginföll* fyrri liðarins í Laplace-virkjanum, þ.e.

$$
-\frac{d^2}{dx^2}\sin(n\pi x/L) = \big(n\pi/L\big)^2 \sin(n\pi x/L).
$$

15.3 Laplace-virkinn í pólhnitum

Í þessari grein höldum við áfram með Dirichlet-verkefnið fyrir Laplace-virkjann, en nú leysum við það á hringskífu

$$
(15.3.1) \qquad \begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x^2 + y^2 < a^2, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}
$$

Hér er φ gefið fall á jaðri hringskífunnar $D_a = \{(x,y); x^2 + y^2 < a^2\}$. Til þess að leysa verkefnið skiptum við yfir í pólhnit og setjum $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ og $\psi(\theta) = \varphi(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Í viðauka D er leidd út formúla fyrir Laplace-virkjann í pólhnitum,

$$
\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},
$$

svo verkefnið (15.3.1) verður

$$
(15.3.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, & r < a, \ \theta \in \mathbb{R}, \\ v(a,\theta) = \psi(\theta), & \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

Nú er ljóst að bæði v og ψ eru 2π-lotubundin föll af θ og því er eðlileg lausnartilgáta að setja þau fram með Fourier-röðum með tilliti til θ

$$
v(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n(r) e^{in\theta}, \qquad \psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{in\theta},
$$

þar sem $v_n(r) = c_n(v(r,\cdot))$ er Fourier-stuðull v, þar sem litið er á v sem fall af θ fyrir fast r og $\psi_n = c_n(\psi)$. Nú látum við Laplace-virkjann verka lið fyrir lið í röðinni fyrir v og lítum einnig á jaðarskilyrðin:

$$\begin{aligned}
\Delta v(r,\theta) &= \frac{1}{r^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(r\partial_r\big(r\partial_r\big) + \partial_\theta^2\Big)v_n(r)e^{in\theta} \\
&= \frac{1}{r^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(r\big(r{v_n}'(r)\big)' - n^2 v_n(r)\Big)e^{in\theta} = 0, \\
v(a,\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n(a)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n e^{in\theta} = \psi(\theta).
\end{aligned}$$

Af þessum tveimur jöfnum sjáum við að stuðlafallið v_n verður að vera lausn á jaðargildisverkefninu

(15.3.3)
$$\begin{cases} r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv_n}{dr}\right) - n^2 v_n = 0, & r < a, \\ v_n(a) = \psi_n, \quad v_n(r) \text{ takmarkað ef } r \to 0. \end{cases}$$

Þetta er Euler-jafna, sem við fjölluðum um í grein 7.3, og því leitum við að lausn af gerðinni $v_n(r) = r^\alpha$ og sjáum að α verður þá að uppfylla

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}r^\alpha\right) = \alpha^2 r^\alpha = n^2 r^\alpha.$$

Þetta segir okkur að $\alpha = \pm n$ og að almenn lausn á (15.3.3) sé

$$v_n(r) = \begin{cases} A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}, & n \neq 0 \\ A_0 + B_0 \ln r, & n = 0. \end{cases}$$

Til þess að lausnin geti verið takmörkuð í $r = 0$, þá verðum við að útiloka liðina með neikvæðum veldisvísi og logrann. Skilyrðið $v_n(a) = \psi_n$ gefur að $A_n = \psi_n / a^{|n|}$. Þar með er lausnin fundin

(15.3.4)
$$v(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\psi)\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta}.$$

Það er auðveld æfing að sannfæra sig um að þetta sé lausn á Laplace-jöfnunni með gefnum jaðarskilyrðum. Hér er mikilvægt að taka eftir því að ástæðan fyrir því að þessi lausnaraðferð virkar svona vel er að fallið $e^{in\theta}$ er *eiginfall* seinni liðarins í Laplace-virkjanum, þ.e.

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}e^{in\theta} = n^2 e^{in\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

15.4 Varmaleiðniverkefni og Fourier-raðir

Við skulum nú reikna út hitastig í jarðvegi sem fall af tíma t og dýpi x með hitastigið á yfirborði gefið sem fall af tíma $f(t)$. Það er eðlilegt að gefa sér að f sé T-lotubundið fall, þar sem lotan T getur til dæmis verið 1 ár. Við þurfum þá að leysa jaðargildisverkefnið

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = f(t), & t \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) \text{ takmarkað ef} & x \to +\infty. \end{cases} \tag{15.4.1}
$$

Það er eðlileg lausnartilgáta að gefa sér að $u(x,t)$ sé T-lotubundið fall af t fyrir fast x. Við liðum því u í Fourier-röð

$$
u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x) e^{in\omega t}, \qquad \omega = 2\pi/T,
$$

því f er af sömu gerð

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega t}.
$$

Til þess að ákvarða stuðlana $u_n(x)$, þá stingum við röðinni fyrir u inn í varmaleiðnijöfnuna og setjum fram jaðarskilyrðið með röðum,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(x) e^{in\omega t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(in\omega u_n(x) - \kappa {u_n}''(x) \Big) e^{in\omega t} = 0, \\
u(0,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(0) e^{in\omega t} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega t} = f(t).
\end{aligned}
$$

Þar með verður u_n að uppfylla

$$
\begin{cases} {u_n}''(x) - \dfrac{in\omega}{\kappa} u_n(x) = 0, \\ u_n(0) = c_n(f), \\ u_n(x) \text{ er takmarkað ef } x \to +\infty. \end{cases}
$$

Kennijafna afleiðujöfnunnar er

$$
\lambda^2 - \frac{in\omega}{\kappa} = 0
$$

og núllstöðvar hennar eru $\lambda = \pm k_n$, þar sem

$$
k_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{n\omega/\kappa}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{|n|\omega/\kappa}, & n < 0. \end{cases}
$$

Lausnin er því

$$u_n(x) = \begin{cases} A_n e^{-k_n x} + B_n e^{k_n x}, & n \neq 0 \\ A_0 + B_0 x, & n = 0. \end{cases}$$

Til þess að lausnin haldist takmörkuð ef $x \to +\infty$, þá verður $B_n = 0$ að gilda fyrir öll n. Jaðarskilyrðið $u_n(0) = c_n(f)$ gefur að $A_n = c_n(f)$. Við höfum því að

$$u_n(x) = c_n(f) e^{-\sqrt{|n|\omega/2\kappa}\,x} e^{-i\mathrm{sign}(n)\sqrt{|n|\omega/2\kappa}\,x},$$

og þar með er lausnin fundin

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{-\sqrt{|n|\omega/2\kappa}\,x} e^{i(n\omega t - \mathrm{sign}(n)\sqrt{|n|\omega/2\kappa}\,x)}. \tag{15.4.2}$$

Við sjáum að sveifluvíddin og fasahliðrunin í liðnum $u_n(x)e^{in\omega t}$ í lausninni eru háð dýpi og tíðninni $n\omega$.

15.5 Aðskilnaður breytistærða

Í öllum þeim sýnidæmum sem við höfum fjallað um í þessum kafla höfum við gengið út frá lausnartilgátum sem segja að hægt sé að liða lausn á hlutafleiðujöfnu með hliðarskilyrðum í einhvers konar röð. Annað sjónarhorn á þessar lausnaraðferðir er oft nefnt *aðskilnaður breytistærða*. Við skulum nú leysa nokkur verkefni með þeirri aðferð.

Sýnidæmi 15.5.1 (*Strengur; framhald*). Í sýnidæmi 13.8.5 leiddum við út formúlu fyrir sveiflandi streng en frávik hans $u(x,t)$ frá jafnvægisstöðu uppfyllir bylgjujöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad c = \sqrt{T/\varrho}, \tag{15.5.1}$$

þar sem T táknar spennuna í strengnum og ϱ táknar massa á lengdareiningu. Ef við gefum okkur að strengurinn sé festur niður í báðum endapunktum, þá fáum við náttúruleg jaðarskilyrði

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{15.5.2}$$

Þegar *aðskilnaði breytistærða* er beitt, er byrjað á að ákvarða allar lausnir á jöfnunni af gerðinni $v(x,t) = T(t)X(x)$. Við stingum þessu falli inn í jöfnuna (15.5.1) og fáum

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = T''(t)X(x) - c^2 T(t)X''(x) = 0.$$

Með því að deila í gegnum þessa jöfnu með $c^2 T(t)X(x)$, þá sjáum við að hún jafngildir

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{15.5.3}$$

Vinstra megin jafnaðarmerkisins stendur fall, sem er aðeins háð t, en hægra megin stendur fall, sem er aðeins háð x. Þessi stærð hlýtur því að vera fasti. Við skulum tákna hann með $-\lambda$. Nú segir jaðarskilyrðið (15.5.2) að $X(0) = X(L) = 0$ verði að gilda. Þar með verður X að vera lausn á eigingildisverkefninu

$$-X'' = \lambda X, \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Við fundum lausnina á þessu verkefni í sýnidæmi 1.6.2. Eigingildin eru $\lambda_n = \big(n\pi/L\big)^2$ og tilsvarandi eiginföll má taka $X_n(x) = \sin\big(n\pi x/L\big)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Víkjum nú aftur að (15.5.3) til þess að ákvarða fallið T. Fyrir hin ólíku eigingildi þarf T að uppfylla

$$-T'' = c^2\lambda_n T.$$

Almenn lausn þessarar jöfnu er $T_n(t) = A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)$. Niðurstaðan er nú að allar lausnir af gerðinni $T(t)X(x)$ á (15.5.1) með jaðarskilyrðinu (15.5.2) eru

$$T_n(t)X_n(x) = \big(A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)\big)\sin\big(n\pi x/L\big), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

þar sem velja má fastana A_n og B_n frjálst. Það er ljóst að summa endanlega margra lausna á (15.5.1) og (15.5.2) er lausn og sama gildir um hratt samleitnar óendanlegar raðir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)\big)\sin\big(n\pi x/L\big).$$

Við fáum því Fourier-sínusröð sem við fjölluðum um í kafla 8. Til þess að ákvarða stuðlana A_n og B_n þarf að bæta við fleiri hliðarskilyrðum. Eðlilegt er að það séu upphafsskilyrði af gerðinni

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \partial_t u(x,0) = \psi(x),$$

þar sem φ og ψ eru gefin föll á bilinu $(0, L)$. Ef við göngum út frá því að sínusstuðlar fallanna φ og ψ séu þekktir

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(n\pi x/L), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin(n\pi x/L), \tag{15.5.4}$$

þá gefa upphafsskilyrðin

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(n\pi x/L) = \varphi(x),$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (n\pi c/L) \sin(n\pi x/L) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin(n\pi x/L) = \psi(x).$$

Af þessum þremur jöfnum drögum við þá ályktun að

$$A_n = \varphi_n \qquad \text{og} \qquad B_n = \psi_n L/(n\pi c).$$

Lausnin $u(x,t)$ er þá fundin

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigg(\varphi_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + \frac{\psi_n L}{n\pi c}\sin\big(n\pi ct/L\big)\bigg)\sin(n\pi x/L). \tag{15.5.5}$$

Þetta er að sjálfsögðu sama lausnarformúla og við leiddum út í sýnidæmi 8.7.5.

□

Sýnidæmi 15.5.2 (*Dirichlet-verkefnið á ferhyrningi*). Tökum nú aftur fyrir verkefni númer 2 á mynd 13.2 og leysum það út frá sjónarhóli aðskilnaðar breytistærða.

$$\begin{cases} \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < M, \\ u(0,y) = u(L,y) = 0, & 0 < y < M, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,M) = \varphi(x), & 0 < x < L, \end{cases} \tag{15.5.6}$$

þar sem φ er gefið fall á $[0, L]$. Við byrjum samkvæmt forskrift í aðskilnaði breytistærða á því að finna allar lausnir v af gerðinni $v(x, y) = X(x)Y(y)$ sem uppfylla jöfnuna og óhliðruðu jaðarskilyrðin. Fyrst stingum við v inn í jöfnuna og fáum

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Nú deilum við í gegnum þessa jöfnu með $X(x)Y(y)$ og sjáum að

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Fallið sem stendur vinstra megin jafnaðarmerkisins er einungis háð x, en það sem stendur hægra megin er einungis háð y. Við höfum því

$$-X''(x) = \lambda X(x) \qquad \text{og} \qquad Y''(y) = \lambda Y(y), \tag{15.5.7}$$

þar sem λ er fasti. Nú lítum við á óhliðruðu jaðarskilyrðin

$$X(0)Y(y) = X(L)Y(y) = 0, \qquad X(x)Y(0) = 0, \tag{15.5.8}$$

og sjáum að X verður að vera lausn á eigingildisverkefninu

$$-X'' = \lambda X, \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Þetta verkefni leystum við í sýnidæmi 1.6.2 og komumst að þeirri niðurstöðu að eigingildin eru $\lambda = \lambda_n = \big(n\pi/L\big)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, og tilsvarandi eiginföll

$$X_n(x) = C_n \sin\big(n\pi x/L\big), \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Nú snúum við okkur að seinni jöfnunni í (15.5.7) og leysum hana með seinna jaðarskilyrðinu í (15.5.8),

$$Y''(y) = \big(n\pi/L\big)^2 Y(y), \qquad Y(0) = 0.$$

Þessi jafna hefur greinilega lausnina

$$Y_n(y) = D_n \sinh\big(n\pi y/L\big), \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Nú eru allar lausnir á (15.5.6) af gerðinni $v(x, y) = X(x)Y(y)$ með óhliðruðu jaðarskilyrðunum af gerðinni

$$v(x, y) = C_n D_n \sin\big(n\pi x/L\big) \sinh\big(n\pi y/L\big), \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Hér höfum við tvo frjálsa fasta sem við margföldum saman og því er greinilegt að við getum valið $D_n = 1$. Nú myndum við óendanlega línulega samatekt af þessum lausnum

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\big(n\pi x/L\big) \sinh\big(n\pi y/L\big).$$

Þetta er fall sem uppfyllir jöfnuna (15.5.6) með óhliðruðum jaðarskilyrðum. Nú er eitt jaðarskilyrði eftir, $u(x, M) = \varphi(x)$. Til þess að það verði uppfyllt þurfum við að hafa

$$\begin{aligned} u(x, M) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\big(n\pi x/L\big) \sinh\big(n\pi M/L\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi) \sin\big(n\pi x/L\big) = \varphi(x), \end{aligned}$$

þar sem $b_n(\varphi)$ er Fourier-sínusstuðull fallsins φ,

$$b_n(\varphi) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\big(n\pi x/L\big)\, dx$$

Með því að bera saman stuðlana í summunum tveimur, þá fáum við lausnina,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi) \frac{\sinh\big(n\pi y/L\big)}{\sinh\big(n\pi M/L\big)} \sin\big(n\pi x/L\big).$$

Athugið að þetta er önnur óendanlega summan í formúlunni (15.2.3). □

Sýnidæmi 15.5.3 (*Dirichlet-verkefnið á hringskífu*). Við skulum nú leysa aftur verkefnið sem við tókum fyrir í grein 13.3,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, & r < a,\ \theta \in \mathbb{R}, \\ v(a, \theta) = \psi(\theta), & \theta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{15.5.9}$$

þar sem föllin v og ψ eru 2π-lotubundin í θ. Við beitum aðskilnaði breytistærða og leitum fyrst að öllum lausnum af gerðinni $w(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Ef við stingum þessu falli inn í afleiðujöfnuna, þá fáum við að

$$r\big(rR'(r)\big)'\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

Nú deilum við í gegnum jöfnuna með $R(r)\Theta(\theta)$ og fáum þá jafngilda jöfnu

$$r\big(rR'(r)\big)'/R(r) = -\Theta''(\theta)/\Theta(\theta).$$

Vinstri hlið þessarar jöfnu er aðeins háð r en hægri hliðin er aðeins háð θ. Þar með sjáum við að þessi föll eru jöfn sama fastanum λ. Við getum þá skrifað jöfnurnar upp aftur

$$-\Theta''(\theta) = \lambda\Theta(\theta), \qquad r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}(r)\right) = \lambda R(r). \tag{15.5.10}$$

Almenn lausn á fyrri jöfnunni er

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} Ae^{i\beta\theta} + Be^{-i\beta\theta}, & \lambda = \beta^2 \neq 0, \\ A_0 + B_0\theta, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Fallið Θ á að vera 2π-lotubundið og því fáum við að einu gildin sem λ getur tekið eru $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, og $B_0 = 0$. Þar með er

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} A_n e^{in\theta} + B_n e^{-in\theta}, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ A_0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Nú ráðumst við á seinni jöfnuna í (15.5.10) með $\lambda = n^2$. Þetta er Euler-jafna, sem við fjölluðum um í grein 2.3. Með því að leita að lausn af gerðinni $R(r) = r^\alpha$ sjáum við að $\alpha = \pm n$. Almenn lausn á seinni jöfnunni í (15.5.10) með $\lambda = n^2$ er því

$$R(r) = \begin{cases} C_n r^n + D_n r^{-n}, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ C_0 + D_0 \ln r, & n = 0. \end{cases}$$

Við erum að leysa (15.5.9) og jafnan á að gilda í $r = 0$. Því verður hún að vera takmörkuð og við ályktum að $D_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Þar með er

$$R(r) = \begin{cases} C_n r^n, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ C_0, & n = 0. \end{cases}$$

Við erum nú búin að ákvarða allar lausnir á (15.5.9) af gerðinni $w(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ og þær eru

$$w(r,\theta) = C_n r^n \big(A_n e^{in\theta} + B_n e^{-in\theta}\big), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

þar sem A_n, B_n og C_n eru frjálsir fastar. Það er greinilegt að við megum alltaf velja $C_n = 1$. Nú er jafnan (15.5.9) línuleg og óhliðruð, svo línuleg samantekt af lausnum er lausn og sama gildir um hratt samleitnar óendanlegar summur. Ef við tökum lausnirnar saman, þá er greinilegt að við getum skrifað óendanlegar línulegar samantektir sem

$$v(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

þar sem við höfum sett $A_n = B_{-n}$ ef $n < 0$. Hér er Fourier-röðin komin. Við eigum eftir að notfæra okkur jaðarskilyrðið í $r = a$, en það segir

$$v(a,\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n a^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(\psi) a^{|n|} e^{in\theta} = \psi(\theta).$$

Með samanburði á stuðlum fáum við nú að $A_n = c_n(\psi)/a^{|n|}$ og við endum á sömu lausnarformúlu og áður

$$v(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(\psi) \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta}.$$

$\square$

15.6 Tvöfaldar Fourier-raðir

Látum $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ vera samfellt deildanlegt á $D = \{(x,y); 0 < x < L, 0 < y < M\}$ og samfellt á lokuninni $\overline{D}$. Ef φ er jafnt 0 á jaðrinum ∂D, þá getum við liðað φ í Fourier-sínusröð með tilliti til y

$$\varphi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \sin\big(m\pi y/M\big),$$

þar sem φ_m er m-ti Fourierstuðull fallsins $y \mapsto \varphi(x,y)$,

$$\varphi_m(x) = \frac{2}{M}\int_0^M \varphi(x,y)\sin\big(m\pi y/M\big)\,dy.$$

Nú er fallið φ_m samfellt deildanlegt og tekur gildið 0 í $x = 0$ og $x = L$, svo við getum liðað það í Fourier-sínusröð. Ef við látum $b_{n,m}$ tákna n-ta Fourier-sínusstuðul fallsins φ_m,

$$b_{n,m}(\varphi) = \frac{4}{LM}\int_0^L\int_0^M \varphi(x,y)\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big)\,dxdy, \tag{15.6.1}$$

þá fáum við framsetningu á φ með tvöfaldri Fourier-röð,

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}(\varphi)\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big). \tag{15.6.2}$$

Sýnidæmi 15.6.1 (*Poisson-jafnan á ferhyrningi*). Leysum nú Poisson-jöfnuna á rétthyrningi með óhliðruðum jaðarskilyrðum

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y), & 0 < x < L, 0 < y < M, \\ u(0,y) = u(L,y) = 0, & 0 < y < M, \\ u(x,0) = u(x,M) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Vegna jaðarskilyrðanna göngum við út frá liðun á lausninni í tvöfalda Fourier-sínusröð,

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big). \tag{15.6.3}$$

Við gefum okkur einnig að við þekkjum Fourier-stuðla fallsins f,

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,m}\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big). \tag{15.6.4}$$

Nú látum við Laplace-virkjann verka lið fyrir lið í summunni (15.6.3)

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}\big(-n^2\pi^2/L^2 - m^2\pi^2/M^2\big)\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,m}\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big) = f(x,y).
\end{aligned}$$

Með því að bera saman stuðlana í þessum tveimur röðum, þá fáum við lausnarformúluna

$$u(x,y) = \frac{-1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{n,m}}{n^2/L^2+m^2/M^2}\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big). \tag{15.6.5}$$

□

Ef við breytum jaðarskilyrðinu þannig að $\partial\varphi/\partial n = 0$ á öllum jaðrinum nema í hornpunktunum, þá er hægt með nákvæmlega sömu röksemdafærslu og hér að framan að liða φ í tvöfalda Fourier-kósínusröð,

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}(\varphi)\cos\big(n\pi x/L\big)\cos\big(m\pi y/M\big), \tag{15.6.6}$$

þar sem

$$a_{n,m}(\varphi) = \frac{\alpha_{n,m}}{LM}\int_0^L\int_0^M \varphi(x,y)\cos\big(n\pi x/L\big)\cos\big(m\pi y/M\big)\,dxdy. \tag{15.6.7}$$

og $\alpha_{0,0} = 1$, $\alpha_{0,m} = \alpha_{n,0} = 2$, $\alpha_{n,m} = 4$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$.

Sýnidæmi 15.6.2 (*Varmaleiðni í plötu*). Við skulum nú leysa varmaleiðnijöfnuna á ferhyrningi með Neumann-skilyrði á jaðrinum, en þau segja að jaðarinn sé einangraður,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 0, & 0 < x < L, 0 < y < M, t > 0,\\ \partial_x u(0,y,t) = \partial_x u(L,y,t) = 0, & 0 < y < M, t > 0,\\ \partial_y u(x,0,t) = \partial_y u(x,M,t) = 0, & 0 < x < L, t > 0,\\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & 0 < x < L, 0 < y < M, \end{cases}$$

þar sem φ er gefið fall á $D = \{(x,y); 0 < x < L, 0 < y < M\}$. Við úrlausn á þessu verkefni göngum við út frá liðun á fallinu u í Fourier-kósínusröð með stuðlum sem eru háðir tíma,

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}(t)\cos\big(n\pi x/L\big)\cos\big(m\pi y/M\big), \tag{15.6.8}$$

og setjum upphafsskilyrðin einnig fram með sams konar Fourier-röð. Til einföldunar skulum við skrifa $v_{n,m}(x,y) = \cos\big(n\pi x/L\big)\cos\big(m\pi y/M\big)$. Við sjáum nú strax að $u_{n,m}(0) = a_{n,m}(\varphi)$. Við látum varmaleiðnivirkjann verka lið fyrir lið í röðinni fyrir u og fáum þá

$$\begin{aligned}\big(\partial_t - \kappa\Delta\big)u &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\big(\partial_t - \kappa\partial_x^2 - \kappa\partial_y^2\big)u_{n,m}(t)v_{n,m}(x,y)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\big(u_{n,m}{}'(t) + \kappa(n^2\pi^2/L^2 + m^2\pi^2/M^2)\big)u_{n,m}(t)v_{n,m}(x,y) = 0.\end{aligned}$$

Fourier-stuðlar fallsins u verða því að uppfylla

$$u_{n,m}{}'(t) + \kappa(n^2\pi^2/L^2 + m^2\pi^2/M^2)u_{n,m}(t) = 0, \qquad \text{og} \qquad u_{n,m}(0) = a_{n,m}(\varphi).$$

Lausnin verður því

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}(\varphi)e^{-\kappa\pi^2(n^2/L^2+m^2/M^2)t}\cos\big(n\pi x/L\big)\cos\big(m\pi y/M\big). \tag{15.6.9}$$

□

Sýnidæmi 15.6.3 (*Rétthyrnd tromma*). Nú hugsum við okkur að himna sé strekkt á rétthyrndan ramma $D = \{(x,y); 0 < x < L, 0 < y < M\}$ og að hún sveiflist þar. Í sýnidæmi 12.2.2 sáum við að færsla efnispunkts (x,y) frá jafnvægisstöðu $u(x,y,t)$ uppfyllir tvívíðu bylgjujöfnuna. Ef staða og hraði trommunnar er gefinn við tímann $t = 0$, þá er u lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\bigg(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg) = 0, & 0 < x < L, 0 < y < M, t > 0, \\ u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0, & 0 < y < M, t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,M,t) = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \partial_t u(x,y,0) = \psi(x,y), & 0 < x < L, 0 < y < M. \end{cases}$$

Við liðum lausnina í tvöfalda Fourier-röð

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(t)\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(m\pi y/M\big). \tag{15.6.10}$$

Við látum bylgjuvirkjann verka lið fyrir lið í summunni og sjáum þá að $u_{n,m}$ verður að uppfylla annars stigs jöfnuna

$$u_{n,m}{}''(t) + c^2\pi^2(n^2/L^2 + m^2/M^2)u_{n,m} = 0,$$

en almenn lausn hennar er

$$u_{n,m}(t) = A_{n,m}\cos\big(\sqrt{n^2/L^2 + m^2/M^2}\,\pi ct\big) + B_{n,m}\sin\big(\sqrt{n^2/L^2 + m^2/M^2}\,\pi ct\big).$$

Út frá upphafsskilyrðunum sjáum við síðan að

$$A_{n,m} = b_{n,m}(\varphi) \qquad \text{og} \qquad B_{n,m} = \frac{b_{n,m}(\psi)}{\sqrt{n^2/L^2 + m^2/M^2}\,\pi c}.$$

Leyfilegar tíðnir í sveiflunni eru því

$$\{\tfrac{1}{2}\sqrt{n^2/L^2 + m^2/M^2}\,c; n, m = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Lægsta tíðnin $\frac{1}{2}\sqrt{1/L^2 + 1/M^2}\,c$ nefnist *grunntíðni* og hinar tíðnirnar nefnast *yfirtíðnir*. Greinilegt er að yfirtíðnirnar eru ekki heiltölumargfeldi af grunntíðninni eins og við sáum í hliðstæðu verkefni fyrir sveiflandi streng. Þetta fyrirbæri er einnig eiginleiki hringlaga tromma, en það er miklu erfiðara að sýna fram á það. Þetta er skýringin á því hvers vegna trommur gefa ekki frá sér hreinan tón eins og strengir. □

15.7 Eiginfallaraðir

Gerum ráð fyrir að $P(x, D_x)$ sé venjulegur afleiðuvirki af Sturm-Liouville-gerð á bilinu $[a, b]$,

$$P(x, D_x)v = \frac{1}{\varrho(x)}\bigg(-\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dv}{dx}\Big) + q(x)v\bigg), \qquad x \in [a, b], \tag{15.7.1}$$

að $B = (B_1, B_2)$ sé almennur jaðargildisvirki á $[a, b]$,

$$B_j v = \alpha_{j1}v(a) + \alpha_{j2}v'(a) + \beta_{j1}v(b) + \beta_{j2}v'(b), \qquad j = 1, 2,$$

að $P(x, D_x)$ sé samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna $Bv = 0$ og að $P(x, D_x)$ sé reglulegur virki, samkvæmt skilgreiningum okkar í kafla 9. Þá segir setning 9.2.4 okkur að eigingildisverkefnið

$$P(x, D_x)v = \lambda v, \qquad Bv = 0,$$

hafi óendanlega runu af eigingildum

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots \to +\infty$$

og tilsvarandi runu af raungildum eiginföllum

$$u_0, u_1, u_2, \dots .$$

Eiginföllin eru innbyrðis hornrétt í þeim skilningi að

$$\langle u_j, u_k\rangle = \int_a^b u_j(x)u_k(x)\varrho(x)\,dx = 0, \qquad j \neq k.$$

Ef v er tvisvar samfellt deildanlegt og uppfyllir óhliðruðu jaðarskilyrðin $Bv = 0$, þá er

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x),$$

þar sem Fourier-stuðlar v með tilliti til eiginfallanna eru

$$c_n = \int_a^b v(x)u_n(x)\varrho(x)\,dx \Big/ \int_a^b u_n(x)^2\varrho(x)\,dx.$$

Oft er hægt að leysa hlutafleiðujöfnur með jaðarskilyrðum með því að gefa sér liðun á lausninni í eiginfallaröð með tilliti til einnar breytistærðar með stuðlum sem eru háðir hinum.

Sýnidæmi 15.7.1 (*Varmaleiðni*). Við skulum nú líta á alhæft varmaleiðniverkefni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P(x, \partial_x)u = f(x, t), & x \in]a, b[,\ t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in]a, b[, \\ B_1 u(\cdot, t) = B_2 u(\cdot, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{15.7.2}$$

Hér er u fall af tveimur breytistærðum (x, t) og $B_j u(\cdot, t)$ táknar að jaðargildisvirkinn B_j verki með tilliti til fyrri breytistærðarinnar x. Við ákvörðum lausnina u með þeirri lausnartilgátu að hægt sé að liða hana í eiginfallaröð

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) u_n(x), \tag{15.7.3}$$

þar sem Fourier-stuðlarnir með tilliti til eiginfallanna eru tímaháðir og gefnir með formúlunni

$$c_n(t) = \int_a^b u(x,t) u_n(x) \varrho(x)\, dx \Big/ \int_a^b u_n(x)^2 \varrho(x)\, dx. \tag{15.7.4}$$

Fyrst öll eiginföllin uppfylla jaðarskilyrðin, þá er augljóst að fallið u uppfyllir þau einnig, því við megum láta jaðargildisvirkjana verka lið fyrir lið í summunni fyrir u. Nú hugsum við okkur einnig að föllin f og φ séu sett fram með eiginfallaröðum

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n(x). \tag{15.7.5}$$

Ef við látum síðan hlutafleiðuvirkjann verka lið fyrir lið í eiginfallaröð u, notum upphafsskilyrðin og jöfnuna $P(x, D_x) u_n = \lambda_n u_n$, þá fáum við

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + P(x, \partial_x) u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bigg(\frac{\partial}{\partial t} + P(x, \partial_x) \bigg) c_n(t) u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big({c_n}'(t) u_n(x) + c_n(t) P(x, D_x) u_n(x) \Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big({c_n}'(t) + \lambda_n c_n(t) \Big) u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) u_n(x) = f(x,t), \\ u(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n(x) = \varphi(x). \end{aligned} \tag{15.7.6}$$

Með því að bera saman stuðlana í jöfnunum, þá fáum við upphafsgildisverkefni fyrir $c_n(t)$,

$$\begin{cases} {c_n}'(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n(t), \\ c_n(0) = \varphi_n. \end{cases}$$

Þetta er fyrsta stigs jafna með fastastuðla, svo

$$c_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n \tau} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{15.7.7}$$

$\square$

Sýnidæmi 15.7.2 (*Bylgjujafna*). Nú skulum við líta á hliðstætt dæmi fyrir alhæfða bylgjujöfnu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P(x, \partial_x)u = f(x,t), & x \in]a,b[, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in]a,b[, \\ B_1 u(\cdot,t) = B_2 u(\cdot,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{15.7.8}$$

Við hugsum okkur nákvæmlega sams konar framsetningu á u, f og φ og í sýnidæmi 15.7.1 og bætum við liðun á ψ,

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n u_n(x).$$

Við látum hlutafleiðuvirkjann verka lið fyrir lið í eiginfallasummunni

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + P(x,\partial_x)u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bigg(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + P(x,\partial_x)\bigg) c_n(t)u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(c_n{}''(t)u_n(x) + c_n(t)P(x,D_x)u_n(x)\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(c_n{}''(t) + \lambda_n c_n(t)\Big)u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)u_n(x) = f(x,t), \\ u(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n(x) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n{}'(0)u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n u_n(x) = \psi(x). \end{aligned} \tag{15.7.9}$$

Eftir stuðlasamanburð fáum við að $c_n(t)$ verður að uppfylla

$$\begin{cases} c_n{}''(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n(t), \\ c_n(0) = \varphi_n, \quad c_n{}'(0) = \psi_n. \end{cases}$$

Nú er lausnarformúlan fyrir c_n háð því hvert formerkið er á eigingildinu λ_n:
(i) $\lambda_n > 0$, $\lambda_n = \beta_n^2$, $\beta_n > 0$. Hér mynda $\cos\beta_n t$ og $\sin\beta_n t$ lausnagrunn fyrir óhliðruðu jöfnuna og Green-fall virkjans er $\sin(\beta_n(t-\tau))/\beta_n$. Þar með er

$$c_n(t) = \varphi_n \cos(\beta_n t) + \frac{\psi_n}{\beta_n}\sin(\beta_n t) + \int_0^t \frac{\sin(\beta_n(t-\tau))}{\beta_n} f_n(\tau)\, d\tau.$$

(ii) $\lambda_n = 0$. Í þessu tilfelli mynda 1 og t lausnagrunn fyrir óhliðruðu jöfnuna og Green-fallið er $t - \tau$. Þar með er

$$c_n(t) = \varphi_n + \psi_n t + \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau.$$

(iii) $\lambda_n < 0$, $\lambda_n = -\gamma_n^2$, $\gamma_n > 0$. Hér fáum við lausnagrunninn $\cosh(\gamma_n t)$ og $\sinh(\gamma_n t)$ og Green-fallið $\sinh(\gamma_n(t-\tau))/\gamma_n$. Lausnin er því

$$c_n(t) = \varphi_n \cosh(\gamma_n t) + \frac{\psi_n}{\gamma_n}\sinh(\gamma_n t) + \int_0^t \frac{\sinh(\gamma_n(t-\tau))}{\gamma_n} f_n(\tau)\,d\tau.$$

□

Sýnidæmi 15.7.3 (*Laplace-jafna*). Með eiginfallaliðun er oft hægt að leysa Laplace- og Poisson-jöfnurnar með almennum jaðarskilyrðum á ferhyrningi. Við tökum eitt dæmi til þess að útskýra þetta,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & a < x < b,\ 0 < y < L, \\ B_1 u(\cdot, y) = B_2 u(\cdot, y) = 0, & 0 < y < L, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,L) = \varphi(x), & a < x < b, \end{cases}$$

þar sem B_1 og B_2 eru almennir jaðargildisvirkjar á $[a,b]$ og φ er gefið fall á $[a,b]$. Við gefum okkur nú sömu forsendur og ritháttt og í sýnidæmum 15.7.1 og 15.7.2 með $P(x, D_x) = -D_x^2$ og göngum út frá þeirri lausnartilgátu að hægt sé að liða lausnina $u(x,y)$ í eiginfallaröð

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(y) u_n(x). \tag{15.7.10}$$

Þá er greinilegt að jaðarskilyrðin $B_1 u(\cdot, y) = B_2 u(\cdot, y) = 0$ eru uppfylllt. Ef við látum nú $-\Delta$ verka lið fyrir lið í summunni og setjum inn hin jaðarskilyrðin, þá fáum við

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) c_n(y) u_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big(-c_n(y) u_n{}''(x) - c_n{}''(y) u_n(x)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\lambda_n c_n(y) - c_n{}''(y)\big) u_n(x) = 0, \\
u(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) u_n(x) = 0, \\
u(x,L) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(L) u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n(x) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Út úr þessum jöfnum lesum við að stuðlarnir þurfa að uppfylla

$$c_n{}''(y) = \lambda_n c_n(y), \qquad c_n(0) = 0, \qquad c_n(L) = \varphi_n.$$

Ef öll eigingildin eru jákvæð og við skrifum $\lambda_n = \beta_n^2$, þá er c_n gefið með formúlunni

$$c_n(y) = \varphi_n \frac{\sinh(\beta_n y)}{\sinh(\beta_n L)}$$

og lausnarformúlan verður

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n(x) \frac{\sinh(\beta_n y)}{\sinh(\beta_n L)}.$$

□

Látum $P(x, D_x)$, $x \in [a,b]$, og $Q(y, D_y)$, $y \in [c,d]$, vera tvo afleiðuvirkja af Sturm-Liouville gerð og $B^1 = (B_1^1, B_2^1)$ og $B^2 = (B_1^2, B_2^2)$ vera almenna jaðargildisvirkja á bilunum $[a,b]$ og $[c,d]$. Gerum ráð fyrir að virkjarnir séu reglulegir og samhverfir með tilliti til jaðarskilyrðanna. Lítum síðan á eigingildisverkefnin

$$\begin{aligned} P(x,D_x)u &= \lambda u, \quad & x \in [a,b], \qquad & B_1^1 u = B_2^1 u = 0, \\ Q(y,D_y)v &= \mu v, \quad & y \in [c,d], \qquad & B_1^2 v = B_2^2 v = 0. \end{aligned}$$

Við táknum eigingildin og eiginföllin úr þeim með (λ_n, u_n) og (μ_n, v_n) og gerum ráð fyrir að þeir myndi einingarréttan grunn með tilliti til innfeldanna sem virkjarnir skilgreina og lýst er í kafla 9. Táknum vægisföllin í þessum innfeldum með ϱ og σ. Látum nú φ vera tvisvar samfellt deildanlegt á rétthyrningnum $D = \{(x,y); a < x < b, c < y < d\}$, samfellt deildanlegt á lokuninni $\overline{D}$ og gerum ráð fyrir að φ uppfylli jaðarskilyrðin

$$\begin{aligned} B_1^1\varphi(\cdot,y) &= B_2^1\varphi(\cdot,y) = 0, \qquad & y \in [c,d], \\ B_1^2\varphi(x,\cdot) &= B_2^2\varphi(x,\cdot) = 0, \qquad & x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Þá gefur setning 9.2.4 og sama röksemdafærsla og við beittum á tvöföldu Fourier- raðirnar að hægt er að liða φ í tvöfalda eiginfallröð

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m}(\varphi) u_n(x) v_m(y),$$

þar sem stuðlarnir eru gefnir með formúlunni

$$c_{n,m}(\varphi) = \int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) u_n(x) v_m(y) \varrho(x) \sigma(y)\, dxdy.$$

Sýnidæmi 15.7.4 (*Varmaleiðni*). Lítum nú á verkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P(x,\partial_x)u + Q(y,\partial_y)u = 0, & a < x < b,\ c < y < d,\ t > 0, \\ B_1^1 u(\cdot,y,t) = B_2^1 u(\cdot,y,t) = 0, & c < y < d,\ t > 0, \\ B_1^2 u(x,\cdot,t) = B_2^2 u(x,\cdot,t) = 0, & a < x < b,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & a < x < b,\ c < y < d, \end{cases}$$

þar sem forsendurnar eru þær sömu og lýst er hér að framan. Við finnum lausnarformúlu fyrir þetta verkefni með því að liða u í tvöfalda eiginfallaröð með stuðlum $w_{n,m}$ sem eru háðir tíma. Með því að láta virkjann verka lið fyrir lið í eiginfallaröðinni, þá fáum við að $w_{n,m}$ verður að uppfylla $w_{n,m}'(t) + (\lambda_n + \mu_m)w_{n,m}(t) = 0$ með upphafsskilyrðinu $w_{n,m}(t) = c_{n,m}(\varphi)$. Svarið verður því

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m}(\varphi)e^{-(\lambda_n+\mu_m)t}u_n(x)v_n(y).$$

□

15.8 Æfingardæmi

1. Leysið hliðruðu bylgjujöfnuna með óhliðruðum hliðarskilyrðum,

$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = f(x, t), \qquad u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0,$$

$0 < x < L$, $t > 0$, með því að liða fallið f í Fourier-sínusröð með tilliti til x og ganga út frá sams konar liðun á lausninni u. [*Leiðbeining*: Skoðið sýnidæmi 8.7.5 og 8.7.7.]

2. Leysið bylgjujöfnuna með hliðruðum jaðarskilyrðum og óhliðruðum upphafsskilyrðum

$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0, \qquad u(0, t) = g(t),\ u(L, t) = h(t), \qquad u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0,$$

$0 < x < L$, $t > 0$, þar sem föllin g og h eru tvisvar samfellt deildanleg á $\mathbb{R}_+$. Gangið út frá því að gefið sé fall $w(x, t)$, sem uppfyllir jaðarskilyrðin, þ.e. $w(0, t) = g(t)$ og $w(L, t) = h(t)$. Skrifið $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$ og sýnið fram á að þá uppfylli v hliðraða bylgjujöfnu með hliðruðum upphafsskilyrðum, en óhliðruðum jaðarskilyrðum. Notið síðan niðurstöðuna úr dæmi 1 og sýnidæmi 8.7.5 til þess að skrifa upp lausnarformúlu fyrir u.

3. (i) Skrifið upp lausnarformúluna í síðasta dæmi í því sértilfelli að $w(x, t) = g(t)(L - x)/L + h(t)x/L$. Reiknið út Fourier-sínusraðir fallanna $x \mapsto x/L$ og $x \mapsto (L - x)/L$.

(ii) Skoðið sértilfellið þegar föllin g og h eru fastar.

4. Leysið dæmi 2 í því sértilfelli að $g(t) = 0$ og $h(t) = \sin(\omega t)$. Fyrir hvaða gildi á ω fæst herma í sveiflunni?

5. Leysið verkefnið í dæmi 1 í því sértilfelli að f er einungis háð x en ekki t með eftirfarandi aðferð: Finnið fyrst lausnina w sem uppfyllir $-c^2 w''(x) = f(x)$, $w(0) = 0$ og $w(L) = 0$. Skrifið $u(x, t) = w(x) + v(x, t)$ og sýnið að v sé þá lausn á verkefni, sem leyst var í sýnidæmi 8.7.5. Notið þá lausnarformúlu til þess að ákvarða u.

6. Ákvarðið lausnarformúlu fyrir varmaleiðniverkefni með hliðruðum jaðarskilyrðum

$$\partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = 0, \quad \partial_x u(0, t) = g(t), \quad \partial_x u(L, t) = h(t), \quad u(x, 0) = 0,$$

$0 < x < L$, $t > 0$, þar sem föllin g og h eru samfellt deildanleg á $\mathbb{R}_+$. Gangið út frá því að gefið sé fallið $w(x, t)$ sem uppfylli jaðarskilyrðin $\partial_x w(0, t) = g(t)$ og $\partial_x w(L, t) = h(t)$. Skrifið $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$ og sýnið fram á að v uppfylli hliðraða varmaleiðnijöfnu með hliðruðum upphafsgildum en óhliðruðum jaðargildum. Notið niðurstöðuna úr sýnidæmi 8.7.7 til þess að skrifa upp lausnarformúlu fyrir u.

7. (i) Skrifið upp lausnarformúluna í síðasta dæmi í því sértilfelli að $w(x,t) = g(t)x(L-x)^2/L^2 - h(t)(L-x)x^2/L^2$. Reiknið út Fourier-kósínusraðir fallanna $x \mapsto x(L-x)^2/L^2$ og $x \mapsto (L-x)x^2/L^2$.

(ii) Skoðið sértilfellið þegar föllin g og h eru fastar.

8. * Liðið fallið φ sem skilgreint er með $\varphi(x) = 2x$, ef $0 \le x \le 1/2$, og $\varphi(x) = 2-2x$, ef $1/2 \le x \le 1$, í sínusröð og notið röðina til þess að finna lausn á verkefninu

$$\partial_t^2 u + 2\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

þar sem $0 < x < 1$, $t > 0$.

9. Leysið jaðargildisverkefnið

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad u(0,y) = u(L,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,M) = x(L-x),$$

þar sem $0 < x < L$, $0 < y < M$, $L > 0$ og $M > 0$.

10. Notið Fourier-raðir til þess að leysa verkefnið

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + u = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = y(\pi - y), \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = 0,$$

þar sem $0 < x < \pi$ og $0 < y < \pi$.

11. Leysið jaðargildisverkefnið

$$\Delta u = 0, \quad u(0,y) = u(L,y) = 0, \quad \lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),$$

þar sem $0 < x < L$, $y > 0$ og φ er gefið fall á $[0,L]$.

12. Leysið Dirichlet-verkefnið í hringkraga með því að skipta yfir í pólhnit og setja lausnina fram með Fourier-röð:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & x^2 + y^2 = a^2, \\ u(x,y) = \psi(x,y), & x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}$$

13. Leysið Dirichlet-verkefnið utanvert við hring og setjið lausnina fram með Fourier-röð:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > a^2 > 0, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & x^2 + y^2 = a^2, \\ u(x,y) \text{ takmarkað í } \infty. \end{cases}$$

14. Finnið lausnina á Robin-verkefninu

$$\Delta u = 0, \quad \text{á } D_a, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h, \quad \text{á } \partial D_a,$$

þar sem $D_a = \{(x,y); x^2+y^2 < a^2\}$, α er fasti og h er gefið samfellt fall á jaðri skífunnar.

15. Ákvarðið lausn á jaðargildisverkefninu

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi/4, \\ u(1,\theta) = 0,\ u(2,\theta) = \theta(\pi/4 - \theta), & 0 \le \theta \le \pi/4, \\ u(r,0) = u(r,\pi/4) = 0, & 1 \le r \le 2, \end{cases}$$

með því að ganga út frá þeirri lausnartilgátu að hægt sé að setja lausnina fram með Fourier-sínusröð í θ með stuðlum sem eru háðir r.

16. Látum fallið f vera gefið með formúlunni

$$f(t) = \tfrac{1}{2}(T_0 + T_1) + \tfrac{1}{2}(T_1 - T_0)\cos\big(\omega t\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

þar sem $\omega = 2\pi/T$, $T_1 > T_0$. Reiknið út lausnina $u(x,t)$ á (15.4.1) í þessu tilfelli.

17. Látum f vera gefið með formúlunni í síðasta dæmi og gefum okkur gildin $T = 1$ár $\approx 3 \cdot 10^7 s$, $\kappa = 10^6$ fyrir klöpp og $\kappa = 1.5 \cdot 10^6$ fyrir sand, $T_1 = 11°C$, $T_0 = -1°C$. Teiknið upp lausnina $u(x,t)$ á verkefninu (15.4.1) yfir eina lotu með tilliti til tíma fyrir nokkur gildi á x. Fyrir hvaða gildi á x er fasahliðrunin $\frac{1}{2}$ ár? Fyrir hvaða gildi á x er árssveiflan í hitastiginu orðin 1% af árssveiflunni á yfirborðinu?

18. Beitið aðskilnaði breytistærða til þess að ákvarða sveiflur strengs, þar sem tekið er tillit til núnings,

$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u + a\partial_t u = 0, \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),$$

$0 < x < L$ og $t > 0$.

19. Beitið aðskilnaði breytistærða til þess að ákvarða sveiflur strengs, þar sem tekið er tillit til fjöðrunar,

$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u + ku = 0, \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),$$

$0 < x < L$ og $t > 0$.

20. Beitið aðskilnaði breytistærða til þess að leysa bitajöfnuna með einfaldlega undirstuddum endum, en það er verkefnið

$$\begin{gathered} \partial_t^2 u + a^4\partial_x^4 u = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \partial_x^2 u(0,t) = u(L,t) = \partial_x^2 u(L,t) = 0, \end{gathered}$$

þar sem $0 < x < L$, $t > 0$ og $a = \sqrt[4]{EI/\varrho A}$ og stærðirnar eru skilgreindar í sýnidæmi 12.2.2. Hver er grunntíðni sveiflunnar?

21. Leysið bitajöfnuna í dæmi 3, en gerið ráð fyrir því að bitinn sé einfaldlega undirstuddur í punktinum $x = 0$ en innspenntur í $x = L$. Það þýðir að jaðarskilyrðin breytast í

$$u(0,t) = \partial_x^2 u(0,t) = u(L,t) = \partial_x u(L,t) = 0.$$

Athugið að hér fæst eigingildisverkefni þar sem afleiðujafnan er af stigi 4. Gefið ykkur að eiginföllin myndi grunn þannig að hægt sé að liða sérhvert fall, sem er samfellt deildanlegt á köflum og samfellt, í eiginfallaröð.

22. Leysið bitajöfnuna í dæmi 3, en gerið ráð fyrir því að bitinn sé einfaldlega undirstuddur í punktinum $x = 0$ en frjáls í punktinum $x = L$. Það þýðir að jaðarskilyrðin breytast í

$$u(0,t) = \partial_x^2 u(0,t) = \partial_x^2 u(L,t) = \partial_x^3 u(L,t) = 0.$$

23. Leysið hliðruðu bylgjujöfnuna á ferhyrningi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t), & 0 < x < L, 0 < y < M, t > 0, \\ u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0, & 0 < y < M, t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,M,t) = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,y,0) = \partial_t u(x,y,0) = 0, & 0 < x < L, 0 < y < M. \end{cases}$$

24. Færsla efnispunkta í rétthyrndri þunnri plötu, sem er einfaldlega undirstudd á jaðrinum uppfyllir jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^4\Delta^2 w = 0, \\ w(0,y,t) = w(L,y,t) = \partial_x^2 w(0,y,t) = \partial_x^2 w(L,y,t) = 0, \\ w(x,0,t) = w(x,M,t) = \partial_y^2 w(x,0,t) = \partial_y^2 w(x,M,t) = 0, \\ w(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad \partial_t w(x,y,0) = \psi(x,y), \end{cases}$$

þar sem $0 < x < L$, $0 < y < M$ og $t > 0$. Athugið að jaðarskilyrðin segja að færslan og beygjuvægið séu núll á jaðrinum. Finnið formúlu fyrir lausn þessa verkefnis.

25. (*Dirichlet-verkefni á teningi.*) Setjum $D = \{(x,y); 0 < x < L, 0 < y < M\}$ og látum T vera teninginn $\{(x,y,z); 0 < x < L, 0 < y < M, 0 < z < N\}$. Finnið formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (x,y,z) \in T, \\ u(x,y,0) = 0,\ u(x,y,N) = \varphi(x,y), & (x,y) \in D, \\ u(x,y,z) = 0, & (x,y) \in \partial D,\ 0 < z < N. \end{cases}$$

með því að ganga út frá þeirri lausnartilgátu að hægt sé að liða u í tvöfalda Fourier-röð með Fourier-stuðla, sem eru háðir z. Hvernig verður lausnarformúlan ef sett eru almenn Dirichlet skilyrði á allan jaðarinn?

26. (*Þrefaldar Fourier-raðir.*) Látum T vera teninginn $\{(x,y,z); 0 < x < L, 0 < y < M, 0 < z < N\}$ og $\varphi : \overline{T} \to \mathbb{C}$ vera fall sem er samfellt deildanlegt á T. Sýnið að ef φ tekur gildið 0 á ∂T, þá sé hægt að liða φ í þrefalda Fourier-sínusröð. Ákvarðið formúlu fyrir stuðlana í röðinni.

27. (*Poisson-jafnan á teningi.*) Látum T vera teninginn $\{(x,y,z); 0<x<L, 0<y<M, 0<z<N\}$. Finnið formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z) & (x,y,z) \in T, \\ u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in \partial T, \end{cases}$$

með því að ganga út frá þeirri lausnartilgátu að hægt sé að liða u í þrefalda Fourier-sínusröð.

28. * Leysið bylgjujöfnuna með hliðarskilyrðum

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0<x<L,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & 0<x<L, \\ u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0, & t>0. \end{cases}$$

29. Leysið verkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in]0,L[,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in]0,L[, \\ u(0,t) = \partial_x u(0,t) = 0, & t>0. \end{cases}$$

30. Leysið jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, & 0<x<L,\ 0<y<M, \\ u(0,y) = \partial_x u(L,y) = 0, & 0<y<M, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,M) = x(2L-x), & 0<x<L, \end{cases}$$

þar sem L og M eru jákvæðar rauntölur.

31. Látum $L = P(x, D_x)$ vera afleiðuvirkja af Sturm-Liouville-gerð, sem er samhverfur með tilliti til jaðarskilyrðanna $Bu = 0$, þar sem B er almennur jaðargildisvirki á bilinu $[a,b]$. Notið eiginfallaliðun til þess að finna lausnarformúlu fyrir eftirfarandi verkefni, ef gefið er fall $w(x,t)$, sem uppfyllir hliðruðu jaðarskilyrðin,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P(x, D_x) u = 0, & a<x<b,\ t>0, \\ u(x,0) = 0, & a<x<b, \\ B_1 u(\cdot,t) = g(t), \quad B_2(\cdot,t) = h(t). \end{cases}$$

Hér táknar $B_j u(\cdot,t)$ að jaðargildisvirkinn B_j eigi að verka á u sem fall af x fyrir fast t.

32. Beitið eiginfallaliðun til þess að finna lausn á jaðargildisverkefninu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0<x<L,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0<x<L, \\ \partial_x u(0,t) = hu(L,t) + \partial_x u(L,t) = 0, & t>0. \end{cases}$$

33. * Leysið eigingildisverkefnið

$$\begin{cases} -(1+x)^2v'' = \lambda v, & 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{15.8.1}$$

og notið lausnina til þess að finna formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (1+x)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{15.8.2}$$

34. Látum L tákna afleiðuvirkjann, sem skilgreindur er með

$$Lu = P(x,D)u = -(1+x^2)\frac{d}{dx}\biggl((1+x^2)\frac{du}{dx}\biggr).$$

Sýnið að $Le^{i\beta \arctan x} = \beta^2 e^{i\beta\arctan x}$ og notið niðurstöðuna til þess að ákvarða lausn á eiginigildisverkefninu

$$Lu = \lambda u, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Notið síðan eiginföllin til þess að ákvarða formúlu fyrir lausnina á verkefninu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(x,\partial_x)w = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ w(0,t) = \partial_x w(1,t) = 0, & t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < 1, \\ \partial_t w(x,0) = \psi(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

35. Leysið æstæðu varmaleiðnijöfnuna $-\kappa\Delta u = f$ á $D = \{(x,y); 0 < x < L, 0 < y < M\}$ þar sem hitastigið $u(x,y)$ er T_0, ef $x = 0$, og sá hluti jaðarsins, sem gefinn er með jöfnunum $x = L$, $y = 0$ og $y = M$, er varmaeinangraður.

36. Leysið varmaleiðnijöfnuna $\partial_t u - \kappa\Delta u = 0$ á $D = \{(x,y); 0 < x < L, 0 < y < M\}$ og fyrir $t > 0$ með upphafsgildunum $\varphi(x,y)$ og þeim jaðarskilyrðum að hitastigið $u(x,y)$ sé T_0, ef $x = 0$ eða $y = 0$, og að sá hluti jaðarsins, sem gefinn er með jöfnunum $x = L$ og $y = M$, sé varmaeinangraður.

Kafli 16

FOURIER–UMMYNDUN

Samantekt. Í þessum kafla fjöllum við um frumatriði um Fourier–ummyndun, en hagnýtingar hennar í eðlisfræði og verkfræði eru ótalmargar, til dæmis í rafsegulfræði, skammtafræði, tímaraðagreiningu og upplýsinga- og merkjafræði. Við tökum fyrir það verkefni að finna sérlausnir á afleiðujöfnum með fastastuðla, þar sem hægri hliðin er heildanlegt fall á öllu $\mathbb{R}$. Við sjáum hvernig Fourier-ummyndun tengist Laplace-ummyndun og leiðum út formúlu fyrir andhverfa Laplace-ummyndun. Við tengjum Fourier-ummyndun við leifareikning og sjáum hvernig andhverf Laplace-ummyndun á sér einfalda formúlu þegar Laplace-mynd falls er fágað fall utan við endanlegt mengi.

16.1 Inngangur

Byrjum á því að líta enn einu sinni á vandamálið að að finna sérlausn á venjulegri afleiðujöfnu með fastastuðla

(16.1.1) $$P(D)u = (a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0)u = f(x).$$

Við sáum í 13. kafla hvernig hægt er að fá lausn $u(x)$ sem gefin er með Fourier-röð ef fallið f er lotubundið og gefið með Fourier-röð. Nú ætlum við að gefa okkur að fallið f sé gefið með heildi,

(16.1.2) $$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} F(\xi)\, d\xi,$$

þar sem $|F|$ er heildanlegt á $\mathbb{R}$. Þá er eðlilegt að leita að lausn af sömu gerð

(16.1.3) $$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} U(\xi)\, d\xi.$$

Ef við gefum okkur að við megum taka afleiður af u með því að deilda undir heildið, þá fáum við

$$u'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi) e^{ix\xi} U(\xi)\, d\xi, \quad u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^2 e^{ix\xi} U(\xi)\, d\xi, \dots, u^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^k e^{ix\xi} U(\xi)\, d\xi.$$

Þar með

$$\begin{aligned} P(D)u(x) &= a_m u^{(m)}(x) + \cdots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(a_m (i\xi)^m + \cdots + a_1(i\xi) + a_0\big) e^{ix\xi} U(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} P(i\xi) U(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} F(\xi)\, d\xi = f(x). \end{aligned}$$

Af þessu er ljóst að við eigum að taka

$$U(\xi) = \frac{F(\xi)}{P(i\xi)}, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{16.1.4}$$

Þessi formúla hefur merkingu í sérhverjum punkti ξ þar sem $P(i\xi) \neq 0$ og einnig í punktum $\xi = \alpha$ þar sem $P(i\alpha) = 0$, $P(i\xi) = (\xi - \alpha)^k Q(\xi)$, $Q(\alpha) \neq 0$ og markgildið

$$\lim_{\xi \to \alpha} \frac{F(\xi)}{(\xi - \alpha)^k}$$

er til. Hér höfum við fundið samband milli fallanna F og U og formúlu fyrir lausninni

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{F(\xi)}{P(i\xi)}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Viðfangsefni kaflans er að finna samband milli fallanna f og F og jafnframt að kanna skilyrði á f sem gefa okkur framsetningu af gerðinni (16.1.2).

16.2 Skilgreiningar og nokkrar reiknireglur

Rúm heildanlegra falla $L^1(\mathbb{R})$

Við látum $L^1(\mathbb{R})$ tákna mengi allra falla f þannig að $|f|$ er heildanlegt á $\mathbb{R}$. Af formúlunum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + g(x)|\, dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx$$

og

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha f(x)|\, dx = |\alpha| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

leiðir að $L^1(\mathbb{R})$ er vigurrúm.

Skilgreining á Fourier-ummyndun

Fyrir sérhvert fall $f \in L^1(\mathbb{R})$ skilgreinum við fallið

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Fallið $\mathcal{F}f$ köllum við *Fourier–mynd* fallsins f og táknum hana einnig með $\widehat{f}$ og $\mathcal{F}\{f\}$. Vörpunina $\mathcal{F}$ sem skilgreind er á $L^1(\mathbb{R})$ og úthlutar fallinu f Fourier-mynd sinni $\mathcal{F}f$ köllum við *Fourier–ummyndun*. Hún er einnig kölluð *Fourier–færsla* og *Fourier–vörpun*.

Því miður er skilgreiningin á Fourier–ummyndun ekki stöðluð. Ef lesandinn opnar einhverja bók um efnið getur hann átt von á því að sjá hana skilgreinda með einni af formúlunum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} f(x)\, dx, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} f(x)\, dx,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ix\xi} f(x)\, dx,$$

eða jafnvel á einhvern enn annan hátt. Ef tekin er önnur skilgreining á Fourier-mynd en sú sem við höfum, þá verða reiknireglur og setningar að sjálfsögðu að einhverju leyti öðruvísi en hjá okkur. Auðvelt er að átta sig á því í hverju munurinn liggur.

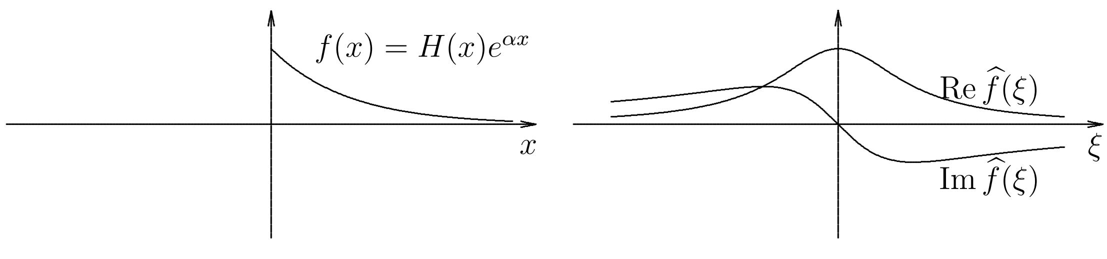
Nokkur sýnidæmi

Sýnidæmi 16.2.1 Við skulum byrja á því að reikna út nokkrar Fourier-myndir sem eiga eftir að koma fyrir í útreikningum okkar síðar. Við látum H tákna *Heaviside-fallið*, sem skilgreint er með

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(i) Lítum fyrst á fallið $f(x) = H(x)e^{\alpha x}$, þar sem $\alpha \in \mathbb{C}$ og $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Þá er f heildanlegt og

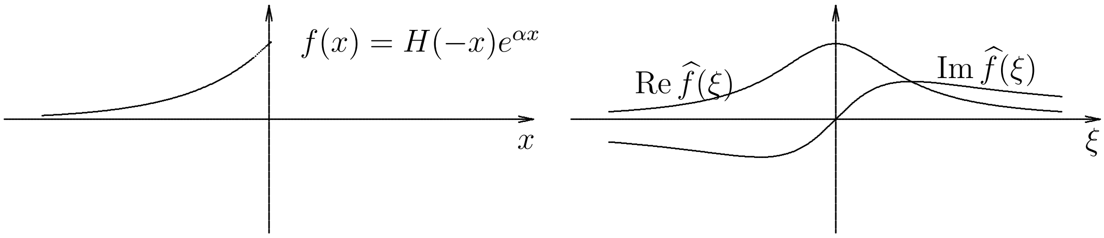
$$\mathcal{F}\{H(x)e^{\alpha x}\}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi+\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{-ix\xi+\alpha x}}{-i\xi+\alpha}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{i\xi-\alpha}.$$



Mynd: Fourier-mynd af veldisvísisfalli á $\mathbb{R}_+$.

(ii) Lítum nú á fallið $f(x) = H(-x)e^{\alpha x}$, þar sem $\alpha \in \mathbb{C}$ og $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Það er heildanlegt og

$$\mathcal{F}\{H(-x)e^{\alpha x}\}(\xi) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi+\alpha x}\,dx = \left[\frac{e^{-ix\xi+\alpha x}}{-i\xi+\alpha}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{-1}{i\xi-\alpha}.$$



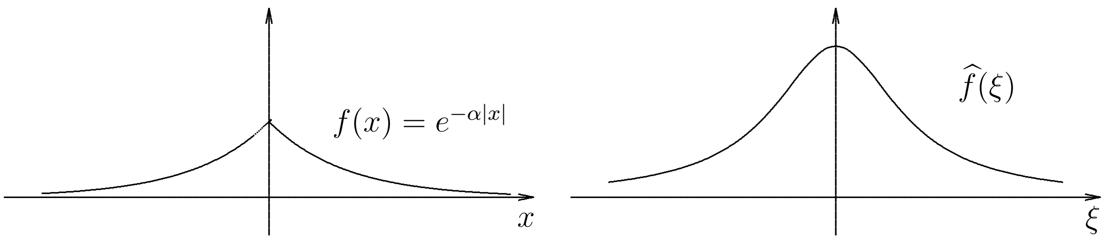
Mynd: Fourier-mynd af veldisvísisfalli á $\mathbb{R}_{-}$.

(iii) Fallið $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, þar sem $\operatorname{Re}\alpha > 0$, er heildanlegt og það má skrifa sem

$$e^{-\alpha|x|} = H(x)e^{-\alpha x} + H(-x)e^{\alpha x}, \qquad x \neq 0,$$

Fourier-ummyndunin er augljóslega línuleg vörpun, svo við fáum

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-\alpha|x|}\}(\xi) &= \mathcal{F}\{H(x)e^{-\alpha x}\}(\xi) + \mathcal{F}\{H(-x)e^{\alpha x}\}(\xi)\\ &= \frac{1}{i\xi+\alpha} - \frac{1}{i\xi-\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}.\end{aligned}$$



Mynd: Fourier-mynd $e^{-\alpha|x|}$.

(iv) Fallið $f(x) = \operatorname{sign}(x)e^{-\alpha|x|}$, þar sem $\operatorname{Re}\alpha > 0$ og sign táknar formerkisfallið

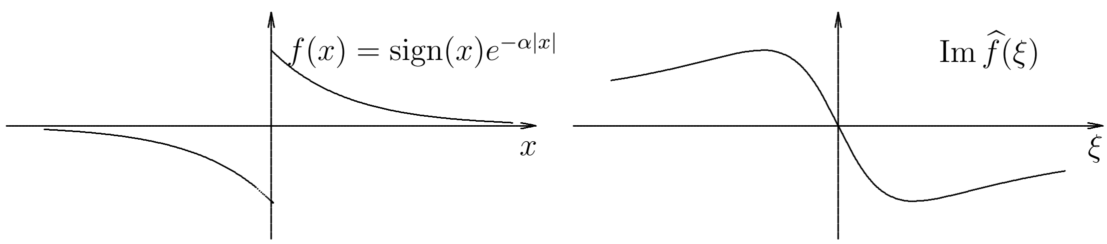
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0,\\ 0, & x = 0,\\ -1, & x < 0,\end{cases}$$

er unnt að skrifa sem

$$\operatorname{sign}(x)e^{-\alpha|x|} = H(x)e^{-\alpha x} - H(-x)e^{\alpha x}.$$

Nú notfærum við okkur að $\mathcal{F}$ er línuleg vörpun og fáum

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sign}(x)e^{-\alpha|x|}\}(\xi) = \frac{1}{i\xi+\alpha} + \frac{1}{i\xi-\alpha} = \frac{-2i\xi}{\alpha^2+\xi^2}.$$



Mynd: Fourier-mynd $\mathrm{sign}(x)e^{-\alpha|x|}$

$\square$

Fourier-mynd þéttifalls stöðluðu normaldreifingarinnar

Í grein 8.3 kom Γ-fallið við sögu hjá okkur og við reiknuðum út ákveðið heildi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Með skipti á breytistærðum $y = \sqrt{\alpha}x$ fáum við síðan að

$$\sqrt{\tfrac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = 1$$

fyrir öll $\alpha > 0$. Rifjum upp að fallið $\varphi_{0,1}$ sem gefið er með

$$\varphi_{0,1}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

er þéttifall *stöðluðu normaldreifingarinnar* og

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

er þéttifall normaldreifingar með *væntigildi* μ og *staðalfrávik* σ.

Sýnidæmi 16.2.2 $\mathcal{F}\{\varphi_{0,1}\}(\xi) = \mathcal{F}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Lausn: Við höfum

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-ix\xi}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2-\frac{1}{2}\xi^2}\, dx = \bigg(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\, dx\bigg)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.\end{aligned}$$

Til þess að staðfesta formúluna fyrir $\mathcal{F}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\}$ þurfum við einungis að sýna að heildið

$$I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}\,dx$$

sé óháð y og þar með $I(y) = I(0) = \sqrt{2\pi}$. Við metum fyrst afleiðuna af heildisstofninum

$$|\partial_y e^{-(x+iy)^2}| = |-2i(x+iy)e^{-x^2+y^2-2ixy}| = 2\sqrt{x^2+y^2}e^{-x^2+y^2}.$$

Ef y liggur í takmörkuðu bili $[-a,a]$ á $\mathbb{R}$ þá sjáum við að

$$|\partial_y e^{-(x+iy)^2}| \leq 2\sqrt{x^2+a^2}e^{-x^2+a^2}.$$

Hægri hliðin er heildanlegt fall og setning Lebesgue í viðauka C segir okkur að við getum tekið afleiðu af I með því að deilda með tilliti til y undir heildið. Þá fæst

$$I'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_y e^{-(x+iy)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} i\partial_x e^{-(x+iy)^2}\,dx = \Big[ie^{-(x+iy)^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Þar með er $I(y) = I(0) = \sqrt{2\pi}$ fyrir öll $y \in \mathbb{R}$. ■

Regla (i): Fourier-ummyndun er línuleg vörpun

Tökum tvö föll $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ og tvær tölur $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Heildun er línuleg aðgerð og því fáum við

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(x)\,dx + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}g(x)\,dx.$$

Samkvæmt skilgreiningunni á Fourier-myndum falla er þetta formúlan

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\xi) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\xi) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\xi), \qquad f, g \in L^1(\mathbb{R}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

og hún segir að *Fourier-ummyndun* $\mathcal{F}$ sé línuleg vörpun frá $L^1(\mathbb{R})$ með gildi í rúmi allra tvinngildra falla á $\mathbb{R}$.

Regla (ii): $\mathcal{F}\{f(\alpha x)\}(\xi) = (1/|\alpha|)\mathcal{F}\{f\}(\xi/\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Tökum nú $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Breytistærðaskiptin $y = \alpha x$ í heildinu fyrir Fourier-mynd fallsins $f(\alpha x)$ eru

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}f(\alpha x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(y/\alpha)\xi}f(y)\tfrac{1}{|\alpha|}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(\xi/\alpha)}f(y)\tfrac{1}{|\alpha|}\,dy$$

sem er ekkert annað en formúlan

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x)\}(\xi) = (1/|\alpha|)\mathcal{F}\{f\}(\xi/\alpha), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sýnidæmi 16.2.3 $\mathcal{F}\{e^{-\varepsilon x^2}\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\xi^2/(4\varepsilon)}$.

Lausn: Í sýnidæmi 16.2.2 reiknuðum við út Fourier-mynd þéttifallsins fyrir stöðluðu normaldreifinguna. Af þeirri formúlu leiðir nú

$$\mathcal{F}\{e^{-\varepsilon x^2}\}(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon}x)^2}\}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-\frac{1}{2}(\xi/\sqrt{2\varepsilon})^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\xi^2/(4\varepsilon)}.$$

□

Regla (iii): $\mathcal{F}\{f(x-\alpha)\}(\xi) = e^{-i\alpha\xi}\mathcal{F}\{f\}(\xi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Tökum $\alpha \in \mathbb{R}$, hliðrum fallinu f um α og reiknum síðan út Fourier-mynd,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(x-\alpha)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(y+\alpha)\xi}f(y)\,dy = e^{-i\alpha\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi}f(y)\,dy.$$

Hér stendur formúlan

$$\mathcal{F}\{f(x-\alpha)\}(\xi) = e^{-i\alpha\xi}\mathcal{F}\{f\}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sýnidæmi 16.2.4 Þéttifall normaldreifingar með væntigildi μ og staðalfrávik σ er

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}((x-\mu)/\sigma)^2} = \frac{1}{\sigma}\varphi_{0,1}((x-\mu)/\sigma)$$

Reiknireglur (ii), (iii) og sýnidæmi 16.2.2 gefa okkur að Fourier-mynd þess er

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\varphi_{\mu,\sigma}(x)\}(\xi) &= \frac{1}{\sigma}\mathcal{F}\{\varphi_{0,1}((x-\mu)/\sigma)\}(\xi) = \frac{1}{\sigma}e^{-i\mu\xi}\mathcal{F}\{\varphi_{0,1}(x/\sigma)\}(\xi)\\ &= e^{-i\mu\xi}\mathcal{F}\{\varphi_{0,1}(x)\}(\sigma\xi) = e^{-i\mu\xi-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2}.\end{aligned}$$

□

Regla (iv): $\mathcal{F}\{e^{i\alpha x}f(x)\}(\xi) = \mathcal{F}\{f\}(\xi-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Tökum $\alpha \in \mathbb{R}$ og lítum á Fourier-mynd fallsins $e^{i\alpha x}f(x)$,

$$\mathcal{F}\{e^{i\alpha x}f(x)\}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{i\alpha x}f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(\xi-\alpha)}f(x)\,dx = \mathcal{F}\{f\}(\xi-\alpha).$$

Regla (v): $\mathcal{F}\{\overline{f(x)}\}(\xi) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$

Nú tökum við Fourier-myndina af $\overline{f(x)}$,

$$\mathcal{F}\{\overline{f(x)}\}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e^{ix\xi}f(x)}\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}f(x)\,dx} = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\xi)}.$$

Regla (vi): $\mathcal{F}f(\xi) = \overline{\mathcal{F}f(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$, ef f er raungilt.

Fall f er raungilt þá og því aðeins að $f(x) = \overline{f(x)}$ gildi um öll $x \in \mathbb{R}$. Við fáum því sem sértilfelli af reglu (v) að

$$\mathcal{F}f(\xi) = \overline{\mathcal{F}f(-\xi)}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Regla (vii): $\mathcal{F}f(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}$, ef f er jafnstætt.

Við höfum

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx. \tag{16.2.1}$$

Ef f er jafnstætt, þá er seinni heildisstofninn oddstætt fall af x, því sin er oddstætt. Þar með er seinna heildið 0. Fyrri heildisstofninn er hins vegar jafnstætt fall og því er heildið yfir $\mathbb{R}$ tvöfalt heildið yfir $\mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{F}f(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Regla (viii): $\mathcal{F}f(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx$, ef f er oddstætt.

Ef við gerum ráð fyrir að f sé oddstætt og lítum aftur á heildin í (16.2.1), þá sjáum við að fyrri heildistofninn er oddstætt fall af x en sá seinni jafnstætt fall. Fyrra heildið er því 0 og seinna heildið er tvöfalt heildið yfir $\mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Regla (ix): $\mathcal{F}\{f^{(k)}\}(\xi) = (i\xi)^k\mathcal{F}\{f\}(\xi)$

Gerum nú ráð fyrir að f sé samfellt deildanlegt og að bæði f og f' séu í $L^1(\mathbb{R})$. Við þurfum þá að draga þá ályktun að $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. Við athugum að til er fasti

$$f(x) = C + \int_{-\infty}^{x} f'(y)\,dy,$$

þar sem C er fasti, því föllin sitt hvoru megin jafnaðarmerkisins hafa sömu afleiðu. Fastinn getur ekki verið neitt annað en 0, því fyrst f' er heildanlegt, þá stefnir heildið í hægri hliðinni á 0 ef $x \to -\infty$ og þar með er $\lim_{x\to-\infty} f(x) = C$. Ef $C \neq 0$, þá er til R_0 þannig að $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|C|$ ef $x \leq R_0$. Þar með er

$$\int_{-R}^{R_0} |f(x)|\,dx \geq \tfrac{1}{2}|C| \int_{-R}^{R_0} dx = \tfrac{1}{2}|C|(R_0 + R)$$

Ef til látum $R \to +\infty$, þá stefnir vinstri hliðin á heildið af $|f|$ yfir $]-\infty, R_0]$, en hægri hliðin á $+\infty$. Það er mótsögn við það að f er heildanlegt og því verður $C = 0$ að gilda. Niðurstaðan verður síðan að $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Við höfum einnig að

$$f(x) = C - \int_x^{+\infty} f'(y)\,dy.$$

og með sömu rökum og hér að framan ályktum við að $C = 0$ og $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Við beitum nú hlutheildun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f'(x)\,dx = \Big[e^{-ix\xi} f(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi) e^{-ix\xi} f(x)\,dx.$$

Fyrst $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, þá leiðir af þessu að

$$\mathcal{F}\{f'\}(\xi) = i\xi\mathcal{F}\{f\}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ef $f \in C^m(\mathbb{R})$ og $f, f', \dots, f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$, þá fæst að fyrir $k = 0, 1, 2, \dots, m$

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}\}(\xi) = (i\xi)\mathcal{F}\{f^{(k-1)}\}(\xi) = \cdots = (i\xi)^k \mathcal{F}\{f\}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

Af þessari formúlu leiðir síðan að um sérhvern afleiðuvirkja $P(D) = a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0$ með fastastuðla gildir

$$\mathcal{F}\{P(D)f\}(\xi) = P(i\xi)\mathcal{F}\{f\}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Regla (x): $\mathcal{F}\{x^j f(x)\}(\xi) = i^j \dfrac{d^j}{d\xi^j}\mathcal{F}\{f\}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Gerum nú ráð fyrir að föllin f og xf séu í $L^1(\mathbb{R})$ og lítum á fallið $\varphi(x,\xi) = e^{-ix\xi} f(x)$. Afleiða þess með tilliti til ξ uppfyllir

$$|\partial_\xi \varphi(x,\xi)| = |xf(x)| \le \begin{cases} |f(x)|, & |x| \le 1, \\ |x||f(x)|, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Hægri hliðin er í $L^1(\mathbb{R})$ og því gefur Lebesgue–setningin í viðauka C að $\mathcal{F}f(\xi)$ er deildanlegt og

$$i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\partial_\xi e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} x f(x)\,dx = \mathcal{F}\{xf(x)\}(\xi).$$

Við getum ítrekað þessa jöfnu, því ef við gefum okkur að f og $x^j f$ séu heildanleg föll, þá eru öll föllin $f, xf, \dots, x^j f$ heildanleg og

$$i^j \frac{d^j}{d\xi^j}\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^j \partial_\xi^j e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} x^j f(x)\,dx = \mathcal{F}\{x^j f(x)\}(\xi).$$

Sýnidæmi 16.2.5 Við skulum nú reikna aftur út Fourier–mynd þéttifallsins fyrir stöðluðu normaldreifinguna $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, sem við tókum fyrir í sýnidæmi 16.2.2. Við tökum eftir því að f uppfyllir fyrsta stigs afleiðujöfnuna

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nú tökum við Fourier–myndina af liðunum í þessari jöfnu og notum reiknireglur (ix) og (x). Þá fáum við jöfnuna

$$i\xi\widehat{f}(\xi) + i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

og þar með uppfyllir $\widehat{f}$ fyrsta stigs jöfnuna

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) + \xi\widehat{f}(\xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Almenn lausn hennar er gefin með

$$\widehat{f}(\xi) = Ce^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

og fastinn C ákvarðast af $C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Við höfum því sýnt aftur fram á að $\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ □

Sýnidæmi 16.2.6 Við getum beitt reiknireglu (x) til þess að reikna út Fourier-mynd fallsins $f(x) = x^2e^{-x^2}$, því

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \mathcal{F}\{x^2e^{-x^2}\}(\xi) = i^2\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}\{e^{-x^2}\}(\xi) = -\sqrt{\pi}\frac{d^2}{d\xi^2}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{d}{d\xi}\big(\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\big) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\big(1 - \tfrac{1}{2}\xi^2\big)e^{-\frac{1}{4}\xi^2}.\end{aligned}$$

□

Sýnidæmi 16.2.7 (i) Við skulum reikna út Fourier-mynd $f(x) = H(x)x^ke^{\alpha x}$, $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Samkvæmt sýnidæmi 16.2.1 (i) og reiknireglu (x) er

$$\mathcal{F}\{H(x)x^ke^{\alpha x}\}(\xi) = i^k\frac{d^k}{d\xi^k}\mathcal{F}\{H(x)e^{\alpha x}\}(\xi) = i^k\frac{d^k}{d\xi^k}\frac{1}{i\xi - \alpha} = i^k\frac{i^k(-1)^kk!}{(i\xi - \alpha)^{k+1}} = \frac{k!}{(i\xi - \alpha)^{k+1}}.$$

(ii) Með sama hætti reiknum við út fyrir $\operatorname{Re}\alpha > 0$ að

$$\mathcal{F}\{H(-x)x^ke^{\alpha x}\}(\xi) = -\frac{k!}{(i\xi - \alpha)^{k+1}}.$$

□

16.3 Andhverf Fourier–ummyndun

Fram til þessa höfum við aðeins sagt að Fourier mynd falls f í $L^1(\mathbb{R})$ er fall á $\mathbb{R}$ en ekkert sagt nánar um hvaða eiginleika hún hefur. Hér kemur niðurstaða sem bætir úr þessu:

Hjálparsetning 16.3.1 (*Riemann–Lebesgue*). *Ef $f \in L^1(\mathbb{R})$, þá er $\mathcal{F}f \in C(\mathbb{R})$ og*

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0.$$

$\square$

Sönnun: Til þess að sanna að $\mathcal{F}f$ sé samfellt, þá þurfum við að beita setningu Lebesgues. Við skrifum

$$\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-ihx} - 1)e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Greinilegt er að heildisstofninn stefnir á núll í sérhverjum punkti, ef $h \to 0$, og að hann er takmarkaður af fallinu $2|f(x)|$, sem er heildanlegt. Við megum því taka markgildi undir heildið og fáum $\lim_{h\to 0}(\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)) = 0$ og þar með er $\widehat{f}$ samfellt. Reikniregla (ix), $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)/(i\xi)$, gefur að $\lim_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ ef f er samfellt deildanlegt og $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Við eftirlátum stærðfræðingunum að sýna, að um sérhvert fall $f \in L^1(\mathbb{R})$ og sérhvert $\varepsilon > 0$ gildi að til er fall $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ með afleiðu í $L^1(\mathbb{R})$ þannig að $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon$, og að setningin leiði almennt af þessari staðreynd. $\blacksquare$

Setjum nú $C_0(\mathbb{R}) = \{F \in C(\mathbb{R})\, ;\, \lim_{|\xi|\to+\infty} F(\xi) = 0\}$. Þá er ljóst að $C_0(\mathbb{R})$ er hlutrúm í $C(\mathbb{R})$. Riemann-Lebesgue-hjálparsetningin segir okkur að Fourier-ummyndun $\mathcal{F}$ varpi rúminu $L^1(\mathbb{R})$ inn í $C_0(\mathbb{R})$. Hægt er að sýna fram á að til eru föll $F \in C_0(\mathbb{R})$ sem ekki eru Fourier-myndir af föllum í $L^1(\mathbb{R})$, en það er jafngilt því að segja að Fourier-ummyndunin $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ sé ekki átæk vörpun.

Nú skulum við gera ráð fyrir því að bæði föllin f og $\mathcal{F}f$ séu í $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ og reikna út Fourier–myndina af $\mathcal{F}f$. Þetta fall er gefið með formúlunni

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi} f(y)\, dy\right) d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+y)\xi} f(y)\, dy\right) d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} f(t-x)\, dt\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Nú viljum við skipta á röð heildanna, en það getum við ekki, því $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}\, d\xi$ er ósamleitið. Við snúum okkur út úr þeim vandræðum með því að smeygja fallinu $e^{-\varepsilon|x|}$ undir heildið og láta síðan $\varepsilon \to 0+$. Við fáum þá,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\xi|}\biggl(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}f(t-x)\,dt\biggr)\,d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\biggl(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\,d\xi\biggr)\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\mathcal{F}\{e^{-\varepsilon|\xi|}\}(t)\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\mathcal{F}\{e^{-|\xi|}\}(t/\varepsilon)\varepsilon^{-1}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon t-x)\mathcal{F}\{e^{-|\xi|}\}(t)\,dt \\
&= f(-x)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\pi f(-x).
\end{aligned}$$

Hér skulum við staldra ögn við og huga að því hvaða reiknireglum við höfum beitt. Fyrst skiptum við á röð heildanna og við réttlætum það með setningu Fubinis í viðauka C. Í næsta skrefi tökum við eftir því að innra heildið er Fourier–mynd. Þar á eftir beitum við reiknireglu (ii) og skiptum síðan á breytistærðum. Í síðasta skrefinu notfærum við okkur sýnidæmi 16.2.1 og tökum markgildi undir heildið. Til þess að réttlæta að það megi, þá athugum við að fallið f er takmarkað, $|f(x)| \leq C$, $x \in \mathbb{R}$. Þar með er

$$|f(\varepsilon t - x)\mathcal{F}\{e^{-|\xi|}\}(t)| \leq \frac{2C}{1+t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Í hægri hlið þessarar ójöfnu stendur fall í $L^1(\mathbb{R})$ sem er óháð ε og því segir setning Lebesgues að það megi taka markgildi þegar $\varepsilon \to 0$ undir heildið.

Niðurstaðan sem við höfum sannað er:

Setning 16.3.2 (*Andhverfuformúla Fouriers*). *Látum $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ og gerum ráð fyrir að $\mathcal{F}f = \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Þá er*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

Andhverfuformúla Fouriers hefur geysimikla þýðingu. Hún segir okkur að fallið $f(x)$ sé samantekt, sem gefin er með óendanlegu heildi, af hreintóna sveiflum. Þessum hreintóna sveiflum er lýst með föllunum

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix\xi} = \cos(x\xi) + i\sin(x\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

sveifluhæðin er $(2\pi)^{-1}|\widehat{f}(\xi)|$ og fasahornið er $\arg \widehat{f}(\xi)$.

Við stöndum hér við upphafið að mikilli fræðigrein, sem kennd er við upphafsmann sinn Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), og kölluð er Fourier–greining. Í örfáum orðum sagt, þá snýst hún um að rannsaka eiginleika fallsins $f(x)$ út frá eiginleikum Fourier–myndarinnar $\widehat{f}(\xi)$.

Í sönnun okkar á andhverfuformúlu Fouriers, gengum við út frá því að Fourier–myndin væri heildanleg. Það gildir ekki almennt. Það eina sem við vitum almennt um Fourier-myndina er það sem Riemann-Lebesgue-hjálparsetningin segir, $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

Í sumum tilfellum er hægt að draga þá ályktun að Fourier–myndin sé heildanleg út frá ýmsum eiginleikum fallanna f og $\widehat{f}$.

Setning 16.3.3 *Gerum ráð fyrir því að f sé takmarkað fall í $L^1(\mathbb{R})$ og að $\widehat{f}(\xi) \geq 0$ fyrir öll $\xi \in \mathbb{R}$. Þá er $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.* □

Sönnun: Lítum á heildið

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\xi|}\widehat{f}(\xi)\,d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\xi|}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx\right)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\,d\xi\right)f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}f(x)\,dx\end{aligned}$$

Hér höfum við notað niðurstöðuna úr sýnidæmi 16.2.1(iii). Fyrst fallið f takmarkað, segjum $|f(x)| \leq C$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þá fáum við ójöfnuna

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\xi|}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\,dx = 2\pi C.$$

Nú notfærum við okkur að lægsta gildi fallsins $e^{-\varepsilon|\xi|}$ á bilinu $[-R, R]$ er $e^{-\varepsilon R}$ til þess að fá matið

$$e^{-\varepsilon R}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \leq \int_{-R}^{R} e^{-\varepsilon|\xi|}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\xi|}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \leq 2\pi C.$$

Nú látum við $\varepsilon \to 0$ í vinstri hliðinni og fáum

$$\int_{-R}^{R}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \leq 2\pi C.$$

Að lokum látum við $R \to +\infty$. Það gefur

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \leq 2\pi C,$$

og við höfum sannað að $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. ■

Við getum nú sannað aðra útgáfu af andhverfuformúlu Fouriers, þar sem við setjum einungis skilyrði á fallið f en engin skilyrði á $\widehat{f}$:

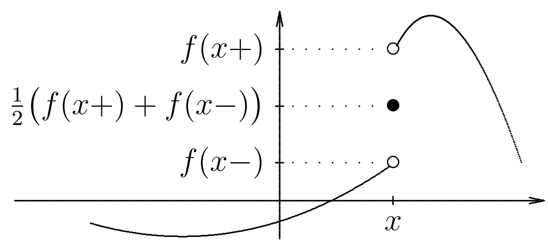
Setning 16.3.4 (*Andhverfuformúla Fouriers*). *Gerum ráð fyrir að $f \in PC^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, þ.e. að fallið f sé samfellt deildanlegt á köflum og að $|f|$ sé heildanlegt. Þá er*

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \lim_{R\to+\infty} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{16.3.1}$$

Ef f er samfellt í punktinum x, þá er

$$f(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{16.3.2}$$

□



Mynd: Meðalgildi af markgildum frá hægri og vinstri.

Sönnun: Við sönnum setninguna í fjórum skrefum:
Skref (i): Gerum fyrst ráð fyrir að $x = 0$, f sé samfellt í $x = 0$ og $f(0) = 0$. Setjum $g(x) = f(x)/x$. Fyrst f er samfellt deildanlegt á köflum, samfellt í $x = 0$ og $f(0) = 0$, þá eru markgildin

$$g(0+) = \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x},$$
$$g(0-) = \lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

bæði til og fallið g er því heildanlegt á $[-1,1]$. Nú er $|g(x)| \le |f(x)|$ ef $|x| \ge 1$, og þar með er $g \in L^1(\mathbb{R})$. Reikniregla (x) segir okkur síðan að

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} x g(x)\,dx = i\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} g(x)\,dx = i\frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi).$$

Riemann-Lebesgue-hjálparsetning gefur að $\lim_{\xi\to\pm\infty}\widehat{g}(\xi) = 0$, og þar með er

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(\xi)\,d\xi = \lim_{R\to+\infty}\frac{i}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi)\,d\xi = \lim_{R\to+\infty}\frac{i}{2\pi}(\widehat{g}(R)-\widehat{g}(-R)) = 0 = f(0).$$

Skref (ii): Gerum ráð fyrir því að $x = 0$ og $\frac{1}{2}(f(0+)+f(0-)) = 0$. Við setjum $\alpha = f(0+)$ og skilgreinum $h(x) = f(x) - \alpha\mathrm{sign}(x)e^{-|x|}$. Þá er

$$h(0+) = \lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0+}(f(x) - \alpha\mathrm{sign}(x)e^{-|x|}) = \alpha - \alpha = 0$$
$$h(0-) = \lim_{x\to 0-} h(x) = \lim_{x\to 0-}(f(x) - \alpha\mathrm{sign}(x)e^{-|x|}) = -\alpha + \alpha = 0$$

svo h uppfyllir skilyrðin í skrefi (i). Í sýnidæmi 16.2.1(iv) sýndum við að

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sign}(x)e^{-|x|}\}(\xi) = \frac{-2i\xi}{1+\xi^2},$$

sem er oddstætt, og því er heildi þess yfir $[-R, R]$ jafnt 0. Þar með er

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = 0 = h(0) &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{h}(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \left(\widehat{f}(\xi) + \frac{2i\alpha\xi}{1+\xi^2}\right) d\xi \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Skref (iii): Gerum ráð fyrir að $x = 0$ setjum $\alpha = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-))$ og skilgreinum $j(x) = f(x) - \alpha e^{-|x|}$. Fallið j uppfyllir skilyrðin í skrefi (ii). Samkvæmt sýnidæmi 16.2.1 er $\mathcal{F}\{e^{-|x|}\}(\xi) = 2/(1+\xi^2)$ og þar með fáum við

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{j}(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\,d\xi - \frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\,d\xi - \alpha.
\end{aligned}$$

Niðurstaðan verður

$$\tfrac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = \alpha = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Skref (iv): Látum nú α vera einhvern punkt í $\mathbb{R}$ og setjum $k(x) = f(x+\alpha)$. Samkvæmt reiknireglu (iii) er $\widehat{k}(\xi) = e^{i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi)$ og skref (iii) gefur því

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(f(\alpha+) + f(\alpha-)) = \tfrac{1}{2}(k(0+) + k(0-)) &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{k}(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

■

16.4 Földun og Fourier–ummyndun

Földun

Látum f og g vera tvö föll á $\mathbb{R}$ og lítum á *földun* þeirra $f * g$, sem skilgreind er með

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt \tag{16.4.1}$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þannig að heildið sé samleitið. Með því að innleiða breytuskiptin $\tau = x - t$, þá sjáum við að

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau = g * f(x). \tag{16.4.2}$$

Ef annað fallið er í $L^1(\mathbb{R})$ og hitt fallið er takmarkað, þá er földunin skilgreind fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Ef bæði föllin eru í $L^1(\mathbb{R})$, þá er $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, því setning Fubinis gefur okkur

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)|\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt\Big|\,dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|\,dx\bigg)|g(t)|\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt < +\infty.\end{aligned}$$

Lítum nú aftur á formúlu (16.4.1) og gerum ráð fyrir að $f \in C^1(\mathbb{R})$ og að bæði f og f' séu takmörkuð föll. Þá megum við deilda undir heildið og fáum að $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ með $(f * g)'(x) = (f' * g)(x)$. Með þrepun fáum við síðan að fyrir $f \in C^m(\mathbb{R})$ með föllin $f, f', \dots, f^{(m)}$ takmörkuð, er $f * g \in C^m(\mathbb{R})$ og

$$(f * g)^{(k)}(x) = (f^{(k)} * g)(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, m. \tag{16.4.3}$$

Regla (xi): $\mathcal{F}\{f * g\}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

Fourier–myndin af $f * g$ er auðreiknanleg, því setnig Fubinis í viðauka C leyfir okkur að skipta á röð heildanna

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}(f * g)(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt\bigg)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-t)\xi} f(x-t)e^{-it\xi}g(t)\,dt\bigg)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-t)\xi} f(x-t)\,dx\bigg)e^{-it\xi}g(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}g(t)\,dt.\end{aligned}$$

Niðurstaðan er því

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

16.5 Afleiðujöfnur og Fourier–ummyndun

Sérlausnir á afleiðujöfnum reiknaðar með Fourier-ummyndun

Nú skulum við víkja aftur að því verkefni að finna sérlausn á jöfnunni

$$P(D)u = (a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0)u = f(x), \tag{16.5.1}$$

sem við fjölluðum um í upphafi kaflans. Við göngum út frá því að $f \in L^1(\mathbb{R})$ og sömuleiðis að $u, u', \dots, u^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$. Nú tökum við Fourier–myndina af föllunum sem standa beggja vegna jafnaðarmerkisins og notum reiknireglu (ix). Þá fæst

$$P(i\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Þessi jafna gefur okkur sambandið milli $\widehat{u}$ og $\widehat{f}$,

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)}, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{16.5.2}$$

Hægri hliðin í þessari jöfnu skilgreinir samfellt fall í grennd um sérhvern punkt α þar sem $P(i\alpha) \neq 0$. Ef hins vegar $P(i\alpha) = 0$, $P(i\xi) = (\xi - \alpha)^k Q(\xi)$, þar sem Q er margliða $Q(\alpha) \neq 0$, þá skilgreinir hægri hliðin í jöfnunni fall sem er samfellt í α ef markgildið

$$\lim_{\xi \to \alpha} \frac{\widehat{f}(\xi)}{(\xi - \alpha)^k}$$

er til. Niðurstaðan er því:

Setning 16.5.1 *Gerum ráð fyrir því að $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ og $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ og jafnframt að $\widehat{f}(\xi)/P(i\xi)$ skilgreini samfellt fall á $\mathbb{R}$. Þá hefur afleiðujafnan $P(D)u = f$ lausn $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^m(\mathbb{R})$ sem gefin er með formúlunni*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)} \, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{16.5.3}$$

□

Sönnun: Við sjáum að fallið $(i\xi)^k \widehat{f}(\xi)/P(i\xi)$ er í $L^1(\mathbb{R})$ fyrir öll $k \leq m$, svo setning Lebesgues segir okkur að við megum taka afleiður af u með því að deilda veldisvísisfallið undir heildinu. Þar með er

$$\begin{aligned} P(D)u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(D_x) e^{ix\xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)} \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(i\xi) e^{ix\xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)} \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = f(x). \end{aligned}$$

■

Í sumum dæmum er auðvelt að reikna út andhverfu Fourier-myndina af fallinu $\widehat{f}(\xi)/P(i\xi)$:

Sýnidæmi 16.5.2 Leysum jöfnuna

$$-u'' + \omega^2 u = e^{-|x|} = f(x), \qquad \omega^2 \neq 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

með því að beita Fourier-ummyndun.

Við athugum að kennimargliða jöfnunnar er $P(z) = -z^2 + \omega^2$ og $P(i\xi) = \xi^2 + \omega^2$. Við tökum Fourier–mynd af öllum liðum beggja vegna jafnaðarmerkisins,

$$\xi^2\widehat{u}(\xi) + \omega^2\widehat{u}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Fourier–mynd u er því

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi) &= \frac{2}{(\omega^2+\xi^2)(1+\xi^2)} = \frac{1}{1-\omega^2}\left(\frac{2}{\omega^2+\xi^2} - \frac{2}{1+\xi^2}\right) \\ &= \frac{1}{1-\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\mathcal{F}\{e^{-\omega|x|}\}(\xi) - \mathcal{F}\{e^{-|x|}\}(\xi)\right).\end{aligned}$$

Athugið að hér höfum við notað niðurstöðuna úr sýnidæmi 16.2.1 (iii) og reiknireglu (ii). Niðurstaðan er því

$$u(x) = \frac{1}{1-\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}e^{-\omega|x|} - e^{-|x|}\right).$$

□

Stofnbrotaliðun ræðra falla og andhverf Fourier-ummyndun

Nú skulum við hugsa okkur að stig$P \geq 2$ og að fallið $P(i\xi)$ sé núllstöðvalaust á öllum rauntalnaásnum. Þá er fallið $1/P(i\xi)$ í $L^1(\mathbb{R})$ og við getum skilgreint andhverfu Fourier–mynd þess,

$$E(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\frac{d\xi}{P(i\xi)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{16.5.4}$$

Fallið E er samfellt samkvæmt Riemann-Lebesgue-hjálparsetningu og formúlan fyrir lausninni í síðustu setningu er einfaldlega

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{E}(\xi)\widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nú getum við notfært okkur reiknireglu (xi) og fáum framsetningu á lausninni sem földunarheildi,

$$u(x) = E * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)f(x-t)\,dt. \tag{16.5.5}$$

Það reynist vera auðvelt að reikna út fallið E ef við þekkjum stofnbrotaliðun ræða fallsins $\zeta \mapsto 1/P(\zeta)$:

Setning 16.5.3 *Gerum ráð fyrir að P sé margliða af stigi m með ólíkar núllstöðvar $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ með margfeldni $m_1, \dots, m_\ell$, að $P(i\xi)$ hafi enga núllstöð á $\mathbb{R}$, að Q sé margliða af stigi $\leq m-1$ og að stofnbrotaliðun á ræða fallinu Q/P sé gefin með*

$$\frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)} = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{jk}}{(\zeta-\lambda_k)^j}. \tag{16.5.6}$$

Þá er andhverfa Fourier-mynd fallsins $\xi \mapsto Q(i\xi)/P(i\xi)$ gefin með formúlunni

(16.5.7)
$$\begin{aligned} f(x) = &\sum_{\operatorname{Re}\lambda_k<0}\sum_{j=1}^{m_k} A_{jk}\tfrac{1}{(j-1)!}H(x)x^{j-1}e^{\lambda_k x} \\ &-\sum_{\operatorname{Re}\lambda_k>0}\sum_{j=1}^{m_k} A_{jk}\tfrac{1}{(j-1)!}H(-x)x^{j-1}e^{\lambda_k x}, \qquad x\neq 0. \end{aligned}$$

□

Sönnun: Forsendan um núllstöðvar $P(i\xi)$ jafngildir því að $P(\zeta)$ hafi enga núllstöð, sem er hrein þvertala, en það þýðir að $\operatorname{Re}\lambda_k \neq 0$ fyrir öll k. Stofnbrotaliðunin gefur

$$\frac{Q(i\xi)}{P(i\xi)} = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{jk}}{(i\xi-\lambda_k)^j}.$$

Samkvæmt sýnidæmi 16.2.7 er

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tfrac{1}{(j-1)!}H(x)x^{j-1}e^{\lambda_k x}\}(\xi) &= \frac{1}{(i\xi-\lambda_k)^j}, \qquad \operatorname{Re}\lambda_k<0, \\ \mathcal{F}\{\tfrac{1}{(j-1)!}H(-x)x^{j-1}e^{\lambda_k x}\}(\xi) &= \frac{-1}{(i\xi-\lambda_k)^j}, \qquad \operatorname{Re}\lambda_k>0. \end{aligned}$$

Formúlan (16.5.7) leiðir því beint af andhverfuformúlu Fouriers. ■

Deyfðar sveiflur

Sýnidæmi 16.5.4 (*Deyfð sveifla; framhald*). Við skulum nú halda áfram með sýnidæmi 7.5.6 um deyfðar sveiflur og reikna út fallið E í því tilfelli að

$$P(D) = mD^2 + cD + k.$$

(i) *Yfirdeyfing*, $c^2 - 4km > 0$. Núllstöðvar kennimargliðunnar eru $-c/2m \pm \omega$, $\omega = \sqrt{c^2-4km}/2m$. Þær eru báðar neikvæðar. Við höfum stofnbrotaliðunina

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(\zeta)} &= \frac{1}{m\zeta^2+c\zeta+k} = \frac{1}{m(\zeta+c/2m-\omega)(\zeta+c/2m+\omega)} \\ &= \frac{1}{2m\omega}\left(\frac{1}{(\zeta+c/2m-\omega)} - \frac{1}{(\zeta+c/2m+\omega)}\right) \end{aligned}$$

Nú lesum við út úr jöfnu (16.5.7) að

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2m\omega}\left(H(x)e^{-(c/2m)x+\omega x} - H(x)e^{-(c/2m)x-\omega x}\right) \\ &= H(x)\frac{1}{m\omega}e^{-(c/2m)x}\sinh(\omega x) = H(x)g(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

þar sem fallið g skilgreinir Green-fall virkjans, $G(t,\tau) = g(t-\tau)$ samkvæmt fylgisetningu 7.5.4.

(ii) *Markdeyfing*, $c^2 - 4km = 0$. Hér höfum við tvöfalda núllstöð á kennimargliðunni $-c/2m$. Stofnbrotaliðun $1/P$ er

$$\frac{1}{P(\zeta)} = \frac{1}{m(\zeta + c/2m)^2}$$

og við fáum því

$$E(x) = H(x) \cdot \frac{1}{m} x e^{-(c/2m)x} = H(x)g(x).$$

(iii) *Undirdeyfing*, $c^2 - 4km < 0$. Hér eru núllstöðvarnar $-c/2m \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{4km - c^2}\,/2m$. Með samskonar útreikningi og í (i) fáum við

$$E(x) = H(x) \cdot \frac{1}{m\omega} e^{-(c/2m)x} \sin(\omega x) = H(x)g(x).$$

$\square$

16.6 Plancherel–jafnan

Nú höldum við áfram að bæta við reiknireglum í safnið okkar:

$$\textbf{Regla (xii):} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)\, dx, \ f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Athugum að Riemann-Lebesgues-hjálparsetning gefur okkur að $\widehat{f}$ og $\widehat{g}$ eru samfelld föll sem stefna á 0 í $\pm\infty$. Því eru bæði föllin $f\widehat{g}$ og $\widehat{f}g$ heildanleg og setning Fubinis í viðauka C gefur að við megum skipta á röð ítrekaðra heilda með tilliti til tveggja breytistærða

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) g(\xi)\, dx d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)\, dx.$$

Við sönnuðum reglur Plancherel og Parseval fyrir Fourier-raðir í 13. kafla og fáum nú hliðstæðar reglur fyrir Fourier-ummyndun. Fyrst kemur Plancherel-jafna:

$$\textbf{Regla (xiii):} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi, \ f \in L^1(\mathbb{R}), \ |f| \le C.$$

Gerum nú ráð fyrir að $f \in L^1(\mathbb{R})$ og að f sé takmarkað. Þá gildir $|f(x)|^2 \le C|f(x)|$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þar sem C er fasti og fallið $|f|^2$ er því heildanlegt Til þess að sýna að jákvæða fallið $|\widehat{f}|^2 = \widehat{f}\overline{\widehat{f}}$ sé heildanlegt, þá dugir samkvæmt setningu 16.3.3 að sanna að það sé Fourier–myndin af falli $g \in L^1(\mathbb{R})$ sem er bæði samfellt og takmarkað. Við sjáum að

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\overline{f(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi}\overline{f(-y)}\, dy,$$

og þetta segir okkur að $\overline{\widehat{f}(\xi)} = \mathcal{F}\{\overline{f(-x)}\}(\xi)$. Ef við setjum nú

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}\, dy,$$

þá er $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ og

$$\widehat{g}(\xi) = \mathcal{F}g(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}\{\overline{f(-x)}\}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Ef við setjum nú $x = 0$ inn í andhverfuformúluna, þá fæst

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2\, dy = g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Þetta er Plancherel-jafna.

Regla (xiv) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi$**.**

Tökum nú tvö föll $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ og gerum ráð fyrir að þau séu takmörkuð. Þá er $|f + \alpha g|^2$ heildanlegt fyrir sérhverja tvinntölu α samkvæmt reglu (xiii). Ef við tökum hvaða tvær tvinntölur a og b sem er, þá gildir

$$a\bar{b} = \frac{1}{4}\big(|a+b|^2 - |a-b|^2 + i|a+ib|^2 - i|a-ib|^2\big).$$

Til þess að sanna að fallið $\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$ sé heildanlegt, þá athugum við fyrst að

$$\widehat{f}\overline{\widehat{g}} = \frac{1}{4}\big(|\widehat{f}+\widehat{g}|^2 - |\widehat{f}-\widehat{g}|^2 + i|\widehat{f}+i\widehat{g}|^2 - i|\widehat{f}-i\widehat{g}|^2\big),$$

og síðan að samkvæmt reglu (xiii) eru allir liðirnir í hægri hlið þessarar jöfnu heildanleg föll. Nú skiptum við á hlutverki $\widehat{f}, \widehat{g}$ og f, g í þessari jöfnu

$$f\overline{g} = \frac{1}{4}\big(|f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2\big).$$

Nú fáum við Parseval-jöfnu

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi$$

með því að bera saman hægri hliðar þessara tveggja jafna og beita reglu (xiii) á hvern lið.

Setning 16.6.1 *Ef $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, þá er $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.* $\square$

Sönnun: Samkvæmt reglu (ix) er fallið $i\xi\widehat{f}(\xi)$ Fourier-myndin af afleiðunni f'. Samkvæmt setningu er $|i\xi\widehat{f}(\xi)|^2 = |\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2$ heildanlegt á $\mathbb{R}$. Nú er fallið $|\xi|^{-2}$ heildanlegt á menginu $\{\xi \in \mathbb{R}; |\xi| \geq 1\}$ og ójafnan $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ gefur

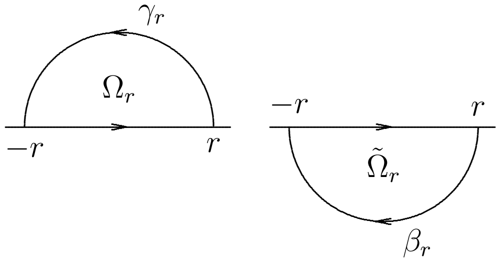
$$|\widehat{f}(\xi)| = |\xi\widehat{f}(\xi)\xi^{-1}| \leq \tfrac{1}{2}(|\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2 + |\xi|^{-2}).$$

Fallið í hægri hlið ójöfnunnar er heildanlegt og því gefur hún okkur að $|\widehat{f}(\xi)|$ er heildanlegt yfir mengið $\{\xi \in \mathbb{R}; |\xi| \geq 1\}$. Nú er $|\widehat{f}(\xi)|$ samfellt fall og þar með heildanlegt yfir $[-1,1]$. Við höfum því sýnt fram á að $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. ■

16.7 Leifareikningur og Fourier–ummyndun

Fourier-myndir reiknaðar með leifareikningi.

Hugsum okkur nú að $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$, þar sem A er dreift mengi og skilgreinum vegina γ_r og β_r eins og í 4. kafla, $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$, $\beta_r(\theta) = re^{-i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$.



Mynd: Hálfskífur í efra og neðra hálfplani

Ef A sker ekki hringinn $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = r\}$, þá fáum við

$$\int_{-r}^{r} e^{-ix\xi} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} e^{-iz\xi} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap\Omega_r} \operatorname{Res}(e^{-iz\xi}f(z),\alpha), \tag{16.7.1}$$

$$\int_{-r}^{r} e^{-ix\xi} f(x)\,dx + \int_{\beta_r} e^{-iz\xi} f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{\alpha\in A\cap\widetilde{\Omega}_r} \operatorname{Res}(e^{-iz\xi}f(z),\alpha), \tag{16.7.2}$$

Athugum nú að

$$|e^{-iz\xi}| = e^{\operatorname{Re}(-iz\xi)} = e^{y\xi} \leq 1, \quad \text{ef } y \geq 0 \text{ og } \xi \leq 0 \quad \text{eða} \quad y \leq 0 \text{ og } \xi \geq 0. \tag{16.7.3}$$

$$\Big|\int_{\gamma_r} e^{-iz\xi} f(z)\,dz\Big| \leq \max_{|z|=r}|f(z)| \int_{\gamma_r} |e^{-iz\xi}|\,|dz|, \qquad \xi < 0, \tag{16.7.4}$$

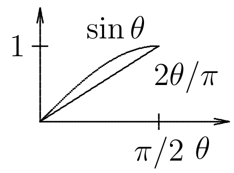
$$\Big|\int_{\beta_r} e^{-iz\xi} f(z)\,dz\Big| \leq \max_{|z|=r}|f(z)| \int_{\beta_r} |e^{-iz\xi}|\,|dz|, \qquad \xi > 0. \tag{16.7.5}$$

Hjálparsetning 16.7.1 (*Jordan*). *Við höfum að*

$$\int_{\gamma_r} |e^{-iz\xi}|\,|dz| = \int_0^\pi e^{\xi r\sin\theta}\, rd\theta < \frac{\pi}{-\xi}, \quad \xi<0,$$
$$\int_{\beta_r} |e^{-iz\xi}|\,|dz| = \int_0^\pi e^{-\xi r\sin\theta}\, rd\theta < \frac{\pi}{\xi}, \quad \xi>0.$$

□

Sönnun: Athugum fyrst að $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$ ef $\theta\in[0,\pi/2]$.



Ef $z=\gamma_r(\theta)=re^{i\theta}$, þá er $dz = ire^{i\theta}\,d\theta$ og því

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} |e^{-iz\xi}|\,|dz| &= \int_0^\pi e^{\xi r\sin\theta} r\,d\theta = 2r\int_0^{\pi/2} e^{\xi r\sin\theta}\,d\theta\\ &\le 2r\int_0^{\pi/2} e^{2\xi r\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi}{\xi}\left[e^{-2\xi r\theta/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{-\xi}\big(1-e^{\xi r}\big) < \frac{\pi}{-\xi}.\end{aligned}$$

Seinni ójafnan er sönnuð á nákvæmlega sama hátt. ■

Hjálparsetning Jordan og jöfnurnar (16.7.1), (16.7.2), (16.7.4) og (16.7.5):

Setning 16.7.2 *Látum $f\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus A)$, þar sem A er endanlegt mengi og gerum ráð fyrir að $\max_{|z|=r}|f(z)|\to 0$ ef $r\to+\infty$. Þá er*

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i\sum_{\alpha\in A\cap H_+}\operatorname{Res}(e^{-iz\xi}f(z),\alpha), & \xi<0,\\ -2\pi i\sum_{\alpha\in A\cap H_-}\operatorname{Res}(e^{-iz\xi}f(z),\alpha), & \xi>0,\end{cases} \tag{16.7.6}$$

þar sem $H_+=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z>0\}$ táknar efra hálfplanið og $H_-=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z<0\}$ táknar neðra hálfplanið. □

Áður en við byrjum að beita leifaformúlunni til þess að reikna út Fourier-myndir þá skulum við staldra við og rifja það upp að Fourier-mynd af jafnstæðu fallið er jafnstætt fall. Hugsum okkur að f sé jafnstætt og að við höfum komist að því að $\widehat{f}(\xi)=g(\xi)$ þar sem g er fall á jákvæða ásnum $\mathbb{R}_+$. Þá þurfum við ekki að reikna neitt meira því við höfum $\widehat{f}(\xi)=g(|\xi|)$ fyrir öll $\xi\in\mathbb{R}$. Ef við höfum reiknað út $\widehat{f}(\xi)=h(\xi)$ þar sem h er fall á neikvæða ásnum $\mathbb{R}_-$, þá fáum við að $\widehat{f}(\xi)=h(-|\xi|)$ fyrir öll $\xi\in\mathbb{R}$.

Við vitum líka að Fourier-mynd af oddstæðu falli er oddstæð. Hugsum okkur því að f sé oddstætt og að við höfum að $\widehat{f}(\xi)=g(\xi)$ þar sem g er fall á jákvæða ásnum $\mathbb{R}_+$. Þá gildir $\widehat{f}(\xi)=\operatorname{sign}(\xi)g(|\xi|)$ fyrir öll $\xi\in\mathbb{R}$. Ef við höfum reiknað út $\widehat{f}(\xi)=h(\xi)$ þar sem h er fall á neikvæða ásnum $\mathbb{R}_-$, þá fáum við að $\widehat{f}(\xi)=\operatorname{sign}(\xi)h(-|\xi|)$ fyrir öll $\xi\in\mathbb{R}$.

Sýnidæmi 16.7.3 Ef $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, þá er

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

□

Lausn: Fallið er jafnstætt, svo við það dugir að reikna heildið út fyrir $\xi < 0$. Fallið f hefur aðeins eitt skaut i í efra hálfplaninu sem er einfalt og $\max_{|z|=r} |f(z)| \leq 1/(r^2-1) \to 0$ ef $r \to +\infty$. Við höfum því

$$\widehat{f}(\xi) = 2\pi i \text{Res}\Big(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}, i\Big) = 2\pi i \frac{e^{-i(i\xi)}}{2i} = \pi e^{\xi}, \qquad \xi < 0,$$

og niðurstaðan verður

$$\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Við vorum reyndar búin að reikna út Fourier-mynd fallsins $e^{-|x|}$ og getum því staðfest þessa formúlu með því að beita andhverfuformúlunni. ■

Sýnidæmi 16.7.4 Ef $f(x) = 1/(1+x^4)$, $x \in \mathbb{R}$, þá er

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi e^{-|\xi|/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\Big(\cos(\xi/\sqrt{2}) + \sin(|\xi|/\sqrt{2})\Big), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

□

Lausn: Fallið f er jafnstætt og þar með $\widehat{f}$ einnig, svo okkur dugir að reikna heildið út fyrir $\xi \leq 0$. Fallið f hefur tvö einföld skaut í efra hálfplaninu. Þau eru fjórðu rætur af -1 og eru því gefin með formúlunum $\alpha_1 = (1+i)/\sqrt{2}$ og $\alpha_2 = (-1+i)/\sqrt{2}$. Við höfum

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq 1/(r^4-1) \to 0, \qquad r \to +\infty.$$

og þar með gildir um öll $\xi < 0$,

$$\widehat{f}(\xi) = 2\pi i\Big(\text{Res}\big(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^4}, \alpha_1\big) + \text{Res}\big(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^4}, \alpha_2\big)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e^{-i\alpha_1\xi}}{4\alpha_1^3} + \frac{e^{-i\alpha_2\xi}}{4\alpha_2^3}\Big).$$

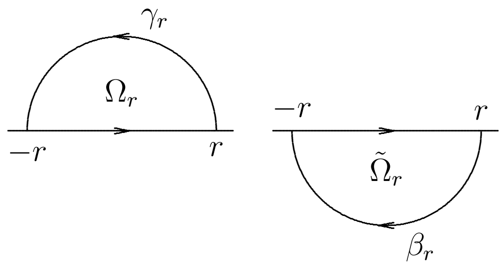
Nú notfærum við okkur að fjórðu rætur α af -1 uppfylla $\alpha^4 = -1$ og þar með $1/\alpha^3 = -\alpha$. Við athugum jafnframt að $-i\alpha_1 = \overline{(-i\alpha_2)} = (1-i)/\sqrt{2}$. Þetta gefur okkur

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{-\pi i}{2}\Big(\alpha_1 e^{-i\alpha_1\xi} + \alpha_2 e^{-i\alpha_2\xi}\Big) = \frac{\pi}{2}\Big(-i\alpha_1 e^{-i\alpha_1\xi} - i\alpha_2 e^{-i\alpha_2\xi}\Big) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\text{Re}\,\big((1-i)e^{(1-i)\xi/\sqrt{2}}\big) = \frac{\pi e^{\xi/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\big(\cos(\xi/\sqrt{2}) - \sin(\xi/\sqrt{2})\big).\end{aligned}$$

Nú notum við að $\xi = -|\xi|$ ef $\xi \leq 0$ og þar með er niðurstaðan fengin. ■

Andhverfar Fourier-myndir reiknaðar með leifareikningi.

Hugsum okkur nú að $f \in L^1(\mathbb{R})$ og að við getum sýnt fram á að Fourier-myndin $\widehat{f}$ eigi sér fágaða framlengingu yfir í fall $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$, þar sem A er dreift mengi og skilgreinum vegina γ_r og β_r eins og áður.



Mynd: Hálfskífur í efra og neðra hálfplani

Ef A sker ekki hringinn $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = r\}$, þá fáum við

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r} e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)\,d\zeta = i\sum_{\alpha\in A\cap\Omega_r}\operatorname{Res}(e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta),\alpha), \tag{16.7.7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\beta_r} e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)\,d\zeta = -i\sum_{\alpha\in A\cap\widetilde{\Omega}_r}\operatorname{Res}(e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta),\alpha), \tag{16.7.8}$$

Matið á veldisvísisfallinu verður nú fyrir $\zeta = \xi + i\eta$,

$$|e^{ix\zeta}| = e^{\operatorname{Re}(ix\zeta)} = e^{-x\eta} \leq 1, \qquad \text{ef } \eta \geq 0 \text{ og } x \geq 0 \qquad \text{eða} \qquad \eta \leq 0 \text{ og } x \leq 0. \tag{16.7.9}$$

Hjálparsetning Jordan gefur

$$\int_{\gamma_r} |e^{ix\zeta}|\,|d\zeta| < \frac{\pi}{x}, \quad x > 0, \qquad \text{og} \qquad \int_{\beta_r} |e^{ix\zeta}|\,|d\zeta| < \frac{\pi}{-x}, \quad x < 0,$$

og við fáum matið

$$\Big|\int_{\gamma_r} e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)\,d\zeta\Big| \leq \frac{\pi}{x}\max_{|\zeta|=r}|\widehat{f}(\zeta)|, \qquad x > 0, \tag{16.7.10}$$

$$\Big|\int_{\beta_r} e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)\,d\zeta\Big| \leq \frac{\pi}{(-x)}\max_{|\zeta|=r}|\widehat{f}(\zeta)|, \qquad x < 0. \tag{16.7.11}$$

Niðurstaðan verðu því:

Setning 16.7.5 *Gerum ráð fyrir því að $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap PC^1(\mathbb{R})$, að það sé hægt að framlengja skilgreiningarsvæði Fourier–myndarinnar $\widehat{f}$, þannig að $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$, þar sem mengið A er endanlegt, og $\max_{|\zeta|=r}|\widehat{f}(\zeta)| \to 0$, $r \to +\infty$. Þá er*

$$\tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \begin{cases} i\displaystyle\sum_{\alpha\in A\cap H_+}\operatorname{Res}\big(e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta),\alpha\big), & x > 0 \\ -i\displaystyle\sum_{\alpha\in A\cap H_-}\operatorname{Res}\big(e^{ix\zeta}\widehat{f}(\zeta),\alpha\big), & x < 0. \end{cases}$$

□

Sýnidæmi 16.7.6 Andhverfa Fourier–mynd fallsins $F(\xi) = \xi/(\xi^2+4\xi+5)$ uppfyllir

$$f(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{ix\xi} \frac{\xi}{\xi^2+4\xi+5}\, d\xi = -\big(1 - \tfrac{1}{2} i \operatorname{sign}(x)\big) e^{-|x|-2ix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fallið í hægri hliðinni er samfellt alls staðar, nema í $x = 0$. □

Lausn: Fallið F hefur tvö einföld skaut $-2+i \in H_+$ og $-2-i \in H_-$, og

$$\begin{aligned} i\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{ix\zeta}\zeta}{\zeta^2+4\zeta+5}, -2+i\Big) &= \frac{ie^{ix(-2+i)}(-2+i)}{2(-2+i)+4} = (-1+i/2)e^{-x-2ix}, \\ -i\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{ix\zeta}\zeta}{\zeta^2+4\zeta+5}, -2-i\Big) &= \frac{-ie^{ix(-2-i)}(-2-i)}{2(-2-i)+4} = (-1-i/2)e^{x-2ix}. \end{aligned}$$

Ef við tökum fallið í fyrri línunni þegar $x > 0$ og fallið í seinni línunni ef $x < 0$, þá getum við greinilega skrifað

$$f(x) = -(1 - i\operatorname{sign}(x)/2)e^{-|x|-2ix}.$$

■

16.8 Andhverf Laplace–ummyndun

Nú skulum við sjá samhengið milli Fourier- og Laplace-ummynda. Látum f vera fall á $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$ af veldisvísisgerð, en samkvæmt skilgreiningu 10.1.1 þýðir það að til eru jákvæðir fastar M og c þannig að

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Í setningu 10.1.2 sönnuðum við að Laplace–myndin $\mathcal{L}f(\zeta)$ er fágað fall á hálfplaninu $\{\zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\zeta > c\}$. Við framlengjum skilgreiningarsvæði fallsins f yfir á allan ásinn með því að setja $f(t) = 0$ fyrir öll $t < 0$ og sjáum þá að

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(\zeta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi+i\eta)x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\eta} e^{-\xi x} f(x)\, dx \\ &= \mathcal{F}\{e^{-\xi x} f(x)\}(\eta). \end{aligned} \tag{16.8.1}$$

Nú festum við gildið á ξ og lítum á þetta sem fall af η og fáum þá sem beina afleiðingu af andhverfuformúlu Fouriers:

Setning 16.8.1 (*Andhverfuformúla Fourier–Mellin*). *Ef $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ er samfellt deildanlegt á köflum og uppfyllir $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t \in \mathbb{R}_+$, þar sem M og c eru jákvæðir fastar, þá gildir um sérhvert $\xi > c$ og sérhvert $t > 0$ að*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} e^{(\xi+i\eta)t} \mathcal{L}f(\xi+i\eta)\, d\eta \\ &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-iR}^{\xi+iR} e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta)\, d\zeta, \end{aligned} \tag{16.8.2}$$

þar sem $\int_{\xi-iR}^{\xi+iR}$ *táknar að heildað sé eftir línustrikinu með upphafspunktinn* $\xi - iR$ *og lokapunktinn* $\xi + iR$. *Ef* $\mathcal{L}f(\xi + i\eta)$ *er í* $L^1(\mathbb{R})$ *sem fall af* η, *þá er* f *samfellt í* t *og*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\xi+i\eta)t}\mathcal{L}f(\xi+i\eta)\,d\eta \tag{16.8.3}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{\zeta t}\mathcal{L}f(\zeta)\,d\zeta,$$

þar sem $\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}$ *táknar að heildað sé eftir línunni* $\{\xi + i\eta; \eta \in \mathbb{R}\}$ *í stefnu vaxandi* η. □

Sönnun: Samkvæmt (16.8.1) og andhverfuformúlu Fouriers gildir

$$e^{-\xi t}\tfrac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{+R} e^{i\eta t}\mathcal{L}f(\xi+i\eta)\,d\eta,$$

svo (16.8.2) fæst með því að margfalda þessa jöfnu með $e^{t\xi}$. Ef $\mathcal{L}f(\xi + i\eta)$ er í $L^1(\mathbb{R})$ sem fall af η, þá er hægri hliðin í (16.8.3) er samfellt fall af t og þar með einnig vinstri hliðin. Fyrst f er samfellt deildanlegt á köflum, þá gefur (16.8.2) að f er samfellt á $\mathbb{R}_+$. ■

Sem beina afleiðingu af andhverfuformúlunni fáum við nú að setning 10.1.6 gildir, en hún segir okkur að samfellt fall er ótvírætt ákvarðað af Laplace–mynd sinni. Við athugum að setningin gildir ekki ef sleppt er þeirri forsendu að föllin f og g séu samfelld. Ástæðan er einfaldlega sú að Laplace mynd falls breytist ekki við það að gildum þess sé breytt í einstökum punktum.

Sem eitt dæmi um gildi samsemdarsetningarinnar skulum við taka:

Setning 16.8.2 *Látum* f *og* g *vera tvö samfelld föll af veldisvísisgerð á* $\mathbb{R}$, *sem uppfylla* $|f(t)| \leq Me^{ct}$ *og* $|g(t)| \leq Me^{ct}$ *fyrir* $t \in \mathbb{R}_+$, *og gerum ráð fyrir að* $\mathcal{L}f(\alpha_j) = \mathcal{L}g(\alpha_j)$, *þar sem* $\{\alpha_j\}$ *er runa af ólíkum punktum,* $\alpha_j \to \alpha$, $\operatorname{Re}\alpha_j > c$ *og* $\operatorname{Re}\alpha > c$. *Þá er* $f(t) = g(t)$ *fyrir öll* $t \in \mathbb{R}_+$. □

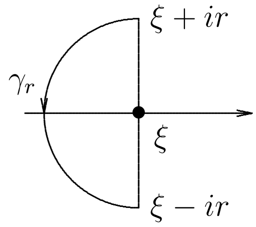
Sönnun: Föllin $\mathcal{L}f$ og $\mathcal{L}g$ eru fáguð á menginu $\{\zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\zeta > c\}$ og því segir samsemdarsetningin 3.7.3 okkur að $\mathcal{L}f(\zeta) = \mathcal{L}g(\zeta)$ gildi um alla punkta í þessu mengi. Nú gefur formúla Fourier-Mellin okkur að $f(t) = g(t)$ fyrir öll $t > 0$. Fyrst bæði föllin eru samfelld á $\mathbb{R}_+$, þá gildir jafnaðarmerki einnig ef $t = 0$. ■

16.9 Andhverf Laplace-ummyndun og leifareikningur

Í útreikningum okkar höfum við oft séð dæmi þess að unnt er að útvíkka skilgreiningarmengi $\mathcal{L}f(\zeta)$ frá hálfplaninu H_c yfir á allt planið utan við dreift mengi A af sérstöðupunktum. Sem dæmi getum við nefnt

$$\mathcal{L}\{\cos\beta t\}(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta^2+\beta^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\beta t\}(\zeta) = \frac{\beta}{\zeta^2+\beta^2},$$

en báðar þessar Laplace-myndir eru skilgreindar á $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\beta\}$. Sjálfsagt er að beita leifareikningi til að reikna út andhverfar Laplace–myndir með formúlunum (16.8.2) og (16.8.3). Við skulum nú sjá hvernig þetta er framkvæmt.



Mynd: Hálfhringur með upphafspunkt $\xi + ir$ og lokapunkt $\xi - ir$.

Við látum M_r vera hálfhringinn sem stikaður er með $\gamma_r(\theta) = \xi + ire^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ og $A_r = \{z \in \mathbb{C}; |z - \xi| < r, \operatorname{Re} z < \xi\}$ vera mengið sem hann afmarkar ásamt línustrikinu milli endapunkta hans. Ef engir sérstöðupunktar liggja á M_r, þá gefur leifasetningin okkur

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-ir}^{\xi+ir} e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{\alpha \in A_r} \operatorname{Res}(e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta), \alpha).$$

Nú viljum við vita hvenær heildið yfir hálfhringinn stefnir á núll ef $r \to +\infty$. Í þessu tilfelli gefur hjálparsetning Jordan matið

$$\int_{\gamma_r} |e^{\zeta t}||d\zeta| \leq \frac{\pi e^{\xi t}}{t}, \qquad t > 0,$$

og af því leiðir

$$\Big|\int_{\gamma_r} e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta)\, d\zeta\Big| \leq \int_{\gamma_r} |e^{\zeta t}||d\zeta| \max_{\zeta \in M_r} |\mathcal{L}f(\zeta)| \leq \frac{\pi e^{\xi t}}{t} \max_{\zeta \in M_r} |\mathcal{L}f(\zeta)|$$

Út frá andhverfuformúlu Fourier–Mellin fáum við:

Setning 16.9.1 *Látum $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vera samfellt deildanlegt á köflum og af veldisvísisgerð, með $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > 0$, og gerum ráð fyrir að hægt sé að framlengja $\mathcal{L}f$ yfir í fágað fall á $\mathbb{C} \setminus A$, þar sem A er endanlegt mengi. Ef $\xi > c$, M_r táknar hálfhringinn sem stikaður er með $\gamma_r(\theta) = \xi + ire^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ og*

$$\max_{\zeta \in M_r} |\mathcal{L}f(\zeta)| \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

þá er

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \sum_{\alpha \in A} \operatorname{Res}(e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta), \alpha) \qquad t > 0.$$

Ef f er samfellt í t, þá gildir

$$f(t) = \sum_{\alpha \in A} \operatorname{Res}(e^{\zeta t} \mathcal{L}f(\zeta), \alpha).$$

$\square$

Í grein 7.4 sáum við að unnt er að skrifa Green–fallið $G(t,\tau)$, til þess að leysa jöfnuna

$$P(D)u = (D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1D + a_0)u = f(t),$$

með upphafsskilyrðum, á forminu $G(t,\tau) = g(t-\tau)$, þar sem Laplace–mynd fallsins g er gefin með

$$\mathcal{L}g(\zeta) = \frac{1}{P(\zeta)}.$$

Setning 16.9.1 gefur okkur þá að

$$g(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{N}(P)} \operatorname{Res}\Big(\frac{e^{t\zeta}}{P(\zeta)}, \alpha\Big). \tag{16.9.1}$$

Sýnidæmi 16.9.2 Í sýnidæmi 7.5.9 reiknuðum við út Green–fallið fyrir virkjann $P(D) = (D-1)(D-2)(D-3)$. Við skulum nú beita setningu 16.9.1 til þess að framkvæma þetta á nýjan leik. Við höfum

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{t\zeta}}{(\zeta-1)(\zeta-2)(\zeta-3)}, 1\Big) &= \frac{e^t}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}e^t,\\
\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{t\zeta}}{(\zeta-1)(\zeta-2)(\zeta-3)}, 2\Big) &= \frac{e^{2t}}{(2-1)(2-3)} = -e^{2t},\\
\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{t\zeta}}{(\zeta-1)(\zeta-2)(\zeta-3)}, 3\Big) &= \frac{e^{3t}}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}e^{3t}.
\end{aligned}$$

Eins og vænta mátti fáum við sömu niðurstöðu og áður

$$g(t) = \tfrac{1}{2}\big(e^t - 2e^{2t} + e^{3t}\big)$$

og þar með

$$G(t,\tau) = \tfrac{1}{2}\big(e^{(t-\tau)} - 2e^{2(t-\tau)} + e^{3(t-\tau)}\big).$$

□

Sýnidæmi 16.9.3 Notið Laplace–ummyndun og leifareikning til þess að finna Green–fall virkjans $D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1$.

Lausn: Green-fallið er gefið sem $G(t,\tau) = g(t-\tau)$, þar sem fallið g uppfyllir $\mathcal{L}\{g\}(\zeta) = 1/P(\zeta)$ og P er kennimargliða virkjans

$$P(\zeta) = \zeta^4 - 2\zeta^3 + 2\zeta^2 - 2\zeta + 1 = (\zeta-1)^2(\zeta-i)(\zeta+i).$$

Við getum nú notað leifaformúluna

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{\alpha=1,i,-i} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta-1)^2(\zeta-i)(\zeta+i)}, \alpha\right) \\
&= \frac{d}{d\zeta}\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta-i)(\zeta+i)}\bigg|_{\zeta=1} + \frac{e^{it}}{(i-1)^2(2i)} + \frac{e^{-it}}{(-i-1)^2(-2i)} \\
&= \frac{te^{\zeta t}}{\zeta^2+1}\bigg|_{\zeta=1} + \frac{e^{\zeta t}(-2\zeta)}{(\zeta^2+1)^2}\bigg|_{\zeta=1} + \frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{-it}}{4} \\
&= \tfrac{1}{2}te^t - \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}\cos t.
\end{aligned}
$$

□

Sýnidæmi 16.9.4 Flokkið sérstöðupunkta fallsins

$$
F(\zeta) = \frac{\zeta^2-(2+i)\zeta+(1+i)}{(\zeta^3-5\zeta^2+8\zeta-4)(\zeta^2-2\zeta+2)}
$$

og reiknið út andhverfa Laplace–mynd þess leifareikningi.

Lausn: Við finnum fullkomna þáttun nefnarans og teljarans í brotinu

$$
F(\zeta) = \frac{(\zeta-1)(\zeta-(1+i))}{(\zeta-1)(\zeta-2)^2(\zeta-(1+i))(\zeta-(1-i))}.
$$

Við sjáum að sérstöðupunktarnir eru $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 1+i$ og $\alpha = 1-i$. Við fullstyttum brotið og þá stendur eftir

$$
F(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-2)^2(\zeta-(1-i))}.
$$

Þetta segir okkur að sérstöðupunktarnir $\alpha = 1$ og $\alpha = 1+i$ séu afmáanlegir, $\alpha = 1-i$ sé skaut af stigi 1 og $\alpha = 2$ sé skaut af stigi 2. Andhverfa Laplace-myndin er

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta-2)^2(\zeta-(1-i))}, 1-i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta-2)^2(\zeta-(1-i))}, 2\right) \\
&= \frac{e^{(1-i)t}}{(1-i-2)^2} + \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta-(1-i))}\right)_{\zeta=2} \\
&= \frac{e^{(1-i)t}}{2i} + \frac{te^{2t}}{1+i} - \frac{e^{2t}}{(1+i)^2} \\
&= -\tfrac{i}{2}e^{(1-i)t} + \tfrac{(1-i)}{2}te^{2t} - \tfrac{i}{2}e^{2t}.
\end{aligned}
$$

□

16.10 Sínus– og kósínus–ummyndanir

Í reiknireglum (vii) og (viii) sáum við að

$$\mathcal{F}f(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx,$$

ef fallið f er jafnstætt og

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx,$$

ef fallið f er oddstætt. Ef fallið f er ekki skilgreint á öllum ásnum $\mathbb{R}$ heldur einungis á $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, þá eru heildin í hægri hliðinni notuð til að skilgreina nýjar ummyndanir:

Skilgreining 16.10.1 Ef $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, þá kallast föllin

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \int_0^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx \quad \text{og} \quad \mathcal{F}_s f(\xi) = \int_0^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

kósínus–mynd og *sínus-mynd* fallsins f og varpanirnar $\mathcal{F}_c$ og $\mathcal{F}_s$ sem úthluta sérhverju falli $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ samfelldu föllunum $\mathcal{F}_c f$ og $\mathcal{F}_s f$ kallast *kósínus–ummyndun* og *sínus–ummyndun*. □

Við fáum hér enn eitt afbrigðið af andhverfuformúlunni:

Setning 16.10.2 (*Andhverfuformúla Fouriers*). *Gerum ráð fyrir að $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ og að $\mathcal{F}_c f, \mathcal{F}_s f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Þá er*

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)\mathcal{F}_c f(\xi)\,d\xi, \qquad x > 0,$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin(x\xi)\mathcal{F}_s f(\xi)\,d\xi, \qquad x > 0.$$

Ef $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap PC^1(\mathbb{R}_+)$, þá gildir

$$\tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{R} \cos(x\xi)\mathcal{F}_c f(\xi)\,d\xi, \qquad x > 0,$$
$$\tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{R} \sin(x\xi)\mathcal{F}_s f(\xi)\,d\xi, \qquad x > 0.$$

□

Sönnun: Við framlengjum f yfir í jafnstætt fall $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, en það þýðir að $\tilde{f}(x) = f(-x)$ ef $x < 0$. Þá er $\mathcal{F}\tilde{f}$ jafnstætt fall og þar með gefu gefur setning 16.3.2 í fyrra tilfellinu að

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)\mathcal{F}_c f(\xi)\,d\xi.$$

Seinni andhverfuformúlan fyrir $\mathcal{F}_c f$ er sönnuð út frá setningu 16.3.4. Formúlurnar fyrir $\mathcal{F}_s f$ eru sannaðar með því að framlengja f yfir í oddstætt fall á $\mathbb{R}$.

■

16.11 Æfingardæmi

1. Teiknið upp gröf eftirfarandi falla og reiknið út Fourier-myndir þeirra:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars}, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars}, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} (x-a)/(c-a), & x \in [a,c], \\ (b-x)/(b-c), & x \in [c,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$

2. Sannið reiknireglur (i)–(vi) og (viii).

3. Notið niðurstöðuna úr dæmi 16.2.1 og andhverfuformúluna til þess að sýna að:

a)
$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\xi}{\xi^2}\cos(x\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

b)
$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\cos(x\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

c)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

d)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

4. Notið niðurstöðurnar úr sýnidæmunum í grein 16.2, reiknireglurnar og andhverfuformúluna til þess að reikna út Fourier-myndir fallanna:

a) $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{1+2x^2}$,

b) $f(x) = x^4 e^{-x^2}$,

c) $f(x) = e^{-\alpha x^2 - \beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$,

d) $f(x) = xe^{-|x|}$,

e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$,

g) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$,

h) $f(x) = e^{-|x|}\cos x$,

i) $f(x) = e^{-|x|}\sin|x|$,

j) $f(x) = 1/(x^4+4)$.

5. Beitið andhverfuformúlunni og reiknireglunum til þess að ákvarða fallið f, þar sem:
a) $\widehat{f}(\xi) = e^{2i\xi-4|\xi|}$, b) $\widehat{f}(\xi) = \xi e^{-(\xi-3)^2}$, c) $\widehat{f}(\xi) = |\xi|e^{-|\xi|}$.

6. Ljúkið við sönnunina á hjálparsetningu Riemanns og Lebesgues með því að sanna:
(i) Fyrir sérhvert $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gildir

$$\int_a^b e^{-ix\xi}\,dx \to 0, \qquad \xi \to \pm\infty.$$

(ii) Fyrir sérhvert þrepafall v á bilinu $[-a, a]$, $a > 0$, gildir

$$\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}v(x)\,dx \to 0, \qquad \xi \to \pm\infty,$$

(iii) Ef $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $\varepsilon > 0$, þá er til $a > 0$ og þrepafall v þannig að

$$\int_{|x|\geq a} |f(x)|\,dx < \varepsilon \qquad \text{og} \qquad \int_{-a}^{a} |f(x) - v(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Notið þessar niðurstöður til þess að ljúka sönnuninni.

7. Er til fall $f \in L^1(\mathbb{R})$ þannig að $\widehat{f}(\xi) = 1 - \sin\xi$?

8. Látum $f_n, f \in L^1(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, 3, \dots$, og gerum ráð fyrir að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Sýnið að $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$.

9. Beitið leifareikningi til þess að ákvarða Fourier–myndir:
a) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$, b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^6}$,
c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-2x+2)^2}$, d) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$,
e) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$, f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$.
[*Leiðbeining:* Í f)-lið eru skautin fimmtu rætur af 1.]

10. Reiknið út andhverfar Fourier-myndir fallanna:
a) $F(\xi) = \dfrac{\xi}{\xi^2+2\xi+2}$, b) $F(\xi) = \dfrac{\xi^3}{(\xi^2+4\xi+5)^2}$.

11. Leysið földunarjöfnurnar:

$$\text{a)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)e^{-2y^2}\,dy = e^{-x^2}, \quad \text{b)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)u(t)\,dt = e^{-x^2}.$$

$$\text{c)} \qquad u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}u(y)\,dy = xe^{-|x|}.$$

12. Setjum $f(x) = 1/(1+x^2)$.
a) Reiknið út $f * f$ með því að beita Fourier–ummyndun.
b) Reiknið út $f * \cdots * f$, þar sem þættirnir eru n talsins.

13. Reiknið út heildið

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+4(x-y)^2)(1+y^2)}.$$

14. Látum $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ og gerum ráð fyrir að $\widehat{f}(\xi) = 0$ ef $|\xi| \geq 1$. Sýnið að f sé eiginfall földunarvirkjans T, sem skilgreindur er með formúlunni

$$Tu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-y)}{x-y} u(y)\, dy$$

Hvert er eigingildið?

15. Látum f vera fallið sem hefur Fourier-myndina

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{1-\xi^2}, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Sýnið að f uppfyllið afleiðujöfnuna

$$tf'' + 3f' + tf = 0.$$

Setjið f fram með veldaröð.

16. Jafnan

$$f'(x) + f(x) + f(x+2) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

hefur heildanlega lausn. Ákvarðið Fourier-mynd hennar.

17. Reiknið út andhverfu Fourier-myndina E af fallinu $\xi \mapsto 1/P(i\xi)$, skrifið lausnina u á jöfnunni $P(D)u = f$ sem földunarheildi og reiknið það út í sértilfellinu $f(x) = H(x)xe^{-x}$.

a) $P(\zeta) = \zeta^2 + 2\zeta + 1$, b) $P(\zeta) = \zeta^2 - 1$,
c) $P(\zeta) = \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta - 1$, d) $P(\zeta) = \zeta^2 + 2\zeta + 5$.

18. Skrifið upp Plancherel-formúluna fyrir fallið $f(x) = 1/(1+x^2)$ og notið hana til þess að ákvarða heildið

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

19. Notið niðurstöðuna úr dæmi 6.2.1, andhverfuformúlu Fouriers og Plancherel–jöfnuna til þess sýna að

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx = \frac{\pi}{3}.$$

20. Notið formúlu Parsevals til þess að reikna út heildið

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-|x|}\, dx.$$

21. Flokkið sérstöðupunkta fallanna sem gefin eru og reiknið út andhverfa Laplace–mynd þeirra með leifareikningi:

a) $F(\zeta) = \dfrac{1}{(\zeta+3)} - \dfrac{2}{(\zeta+3)^2} + \dfrac{1}{(\zeta+3)^3}$,

b) $F(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta^3(\zeta^2+1)}$,

c) $F(\zeta) = \dfrac{\zeta-2}{(\zeta^2-3\zeta+2)(\zeta-1)(\zeta^2+1)}$,

22. Notið Laplace–ummyndun og leifareikning til þess að finna Green–föll virkjanna:

a) $D^2+\omega^2$, b) $(D^2+4)(D^2+9)$,
c) D^3+D^2+3D-5, d) D^4-D^2+2D+2,
e) $(D^2+1)(D-1)(D-2)$, f) $D^4-2D^3+2D^2-2D+1$.
g) D^2+4D+8, h) D^3-4D^2+5D-2,
i) D^4-D^2+2D+2.

Kafli 17

LAPLACE-VIRKINN

17.1 Inngangur

Hlutafleiðuvirkinn
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$
á $\mathbb{R}^n$ nefnist *Laplace-virki*. Óhliðraða jafnan $\Delta u = 0$ nefnist *Laplace-jafna* og lausn u á henni á einhverju opnu mengi $X \subset \mathbb{R}^n$ er sögð vera *þýtt* eða *harmónískt* fall. Hliðraða jafnan $\Delta u = f$, þar sem f er gefið fall á X nefnist *Poisson-jafna*. Í einni vídd er Laplace-jafnan einfaldlega $u'' = 0$ og þýðu föllin á opnum bilum á $\mathbb{R}$ eru því öll af gerðinni $u(x) = Ax + B$, þar sem A og B eru fastar. Green-fall virkjans $\Delta = d^2/dx^2$ er fallið $G(x, \xi) = x - \xi$.

Í þessum kafla ætlum við að fjalla um aðferðir til þess að leysa Laplace- og Poisson-jöfnurnar með jaðarskilyrðum á nokkrum tegundum mengja í tví- og þrívíðu rúmi. Mikilvægi Laplace- og Poisson-jafnanna hefur komið skýrt fram í sýnidæmum hjá okkur, þar sem við fjölluðum um rafstöðufræði og æstæð varmaleiðniverkefni.

Í tveimur víddum munum við stundum tákna óháðu breyturnar með (x, y) í stað (x_1, x_2) og skrifa þær á tvinntalnaformi $z = x + iy$ og á pólformi $z = re^{i\theta}$. Í tveimur víddum koma fram sterk tengsl við fáguð föll. Það byggir á þeirri staðreynd að raun- og þverhluti fágaðs falls eru þýð föll og samskeyting á þýðu og fáguðu falli er þýtt fall. Í grein 4.7 sáum við fyrst þessi tengsl, þegar við fjölluðum um hagnýtingar í straumfræði og reiknuðum út straumlínur fyrir tvívíð streymi.

Meginverkefnið í þessum kafla er að leiða út heildunarframsetningu á lausn Poisson-jöfnunnar $\Delta u = f$ á opnu mengi X með Dirichlet-jaðarskilyrði $u = \varphi$ á ∂X, en hún er
$$u(x) = \int_{\partial X} P_X(x, \xi)\varphi(\xi)\, dS(\xi) + \int_X G_X(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$
þar sem P_X nefnist *Poisson-kjarni* fyrir svæðið X og G_X nefnist *Green-fall* eða *Green-kjarni* fyrir svæðið X. Fyrra heildið gefur þýtt fall sem uppfyllir jaðarskilyrðin og það síðara gefur lausn á Poisson-jöfnunni með óhliðruðum jaðarskilyrðum. Þessi lausnaraðferð er hliðstæð þeirri sem við beittum við úrlausn á jaðargildisverkefnunum í grein 2.7.

17.2 Þýð föll og fágaðar varpanir

Það er mikill skyldleiki með fáguðum og þýðum föllum. Til þess að sjá hver hann er, skulum við láta f vera fágað fall á opnu hlutmengi X í $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ og skrifa $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$. Þá eru föllin u og v í $C^\infty(X)$ og þau uppfylla Cauchy-Riemann-jöfnurnar $\partial_x u = \partial_y v$ og $\partial_y u = -\partial_x v$. Þar með fáum við að

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v + \partial_y(-\partial_x v) = 0 \tag{17.2.1}$$

og

$$\Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y \partial_x u = 0. \tag{17.2.2}$$

Hér höfum við notfært okkur að blönduðu afleiðurnar uppfylla $\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u$ og $\partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v$. Þar með eru bæði föllin u og v þýð.

Virkjarnir $\partial_z = \partial/\partial z$ og $\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial \bar{z}$ komu við sögu hjá okkur þegar við vorum að rannsaka skilgreininguna á fáguðum föllum í setningu 4.2.10,

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big) \qquad \text{og} \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big).$$

Með beinum útreikningi fáum við að

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}. \tag{17.2.3}$$

Hugsum okkur nú að u sé þýtt fall á X og að við viljum kanna hvort til sé $f \in \mathcal{A}(X)$ þannig að $u = \operatorname{Re} f$. Þá gildir $u = \frac{1}{2}\big(f + \overline{f}\big)$. Nú er fall f fágað þá og því aðeins að $\partial_{\bar{z}} f = 0$ og þar með segir jafnan $\partial_{\bar{z}} \partial_z u = \frac{1}{4}\Delta u = 0$ okkur að fallið $\partial_z u$ sé fágað. Við höfum að

$$\partial_z u = \tfrac{1}{2}\big(\partial_z f + \partial_z \overline{f}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\partial_z f + \overline{\partial_{\bar{z}} f}\big) = \tfrac{1}{2} f'. \tag{17.2.4}$$

(Hér höfum við notað reiknaregluna $\partial_z \overline{f} = \overline{(\partial_{\bar{z}} f)}$, sem sönnuð er í dæmi 17.2.4, og að fyrir fágað fall f er $\partial_z f = f'$.) Út úr þessari jöfnu lesum við að f er stofnfall $2\partial_z u$. Nú er tilvist á stofnfalli háð því hvernig svæðið X lítur út. Í setningu 10.2.3 sáum við að sérhvert fágað fall á stjörnusvæði hefur stofnfall og í setningu 10.11.2 sáum við að svæði X er einfaldlega samanhangandi þá og því aðeins að sérhvert fall í $\mathcal{A}(X)$ hafi stofnfall:

Setning 17.2.1 *Ef X er opið mengi í $\mathbb{C}$ og $f \in \mathcal{A}(X)$, þá eru $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ þýð föll á X. Ef $u : X \to \mathbb{R}$ er þýtt fall á einfaldlega samanhangandi svæði, þá er til $f \in \mathcal{A}(X)$ þannig að $u = \operatorname{Re} f$.* □

Sönnun: Fyrstu staðhæfinguna höfum við sannað. Fyrst $\partial_{\bar{z}} \partial_z u = 0$, þá er $2\partial_z u$ fágað. Látum g vera stofnfall $2\partial_z u$ og skrifum $g = \varphi + i\psi$, þar sem φ og ψ eru raun- og þverhluti g. Þá gildir

$$2\partial_z u = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = g' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Þessi jafna segir okkur að $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \varphi$ og þar með er $u = \varphi + c$, þar sem $c \in \mathbb{R}$ er fasti. Við setjum nú $f = g + c$. ■

Ef u er þýtt fall á svæði X og X er ekki einfaldlega samanhangandi, þá er alls ekki víst að $2\partial_z u$ hafi stofnfall. Sem dæmi getum við tekið:

Sýnidæmi 17.2.2 Fallið $u(z) = \ln|z| = \ln r$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, er þýtt á $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Það er ekki til neitt fágað fall f á öllu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ þannig að $u = \operatorname{Re} f$, því slíkt fall væri þá fágaður logri, en enginn slíkur er til á þessu mengi. Hins vegar er ljóst að við getum skilgreint logra á hlutmengjum af $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, til dæmis $f(z) = \operatorname{Log} z$, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$, þar sem Log táknar höfuðgrein lograns. □

Gerum nú ráð fyrir að v sé eitthvert deildanlegt fall á opnu mengi Y í $\mathbb{C}$, að $F : X \to Y$ sé deildanleg vörpun og setjum $u(z) = v(F(z))$. Við táknum breytuna í Y með ζ og skrifum $\zeta = F(z)$. Keðjureglan í tvinnbreytunum z og ζ verður þá

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = \frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)\frac{\partial F}{\partial z}(z) + \frac{\partial v}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}(z), \tag{17.2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial v}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}(z). \tag{17.2.6}$$

Ef F er fágað fall, þá er $\partial F/\partial \overline{z} = 0$ og $\partial \overline{F}/\partial z = \overline{\partial F/\partial \overline{z}} = 0$ og þessar jöfnur einfaldast í

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = \frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)\frac{\partial F}{\partial z}(z) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial v}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}(z)$$

og Leibniz-reglan gefur okkur

$$\tfrac{1}{4}\Delta u(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}\partial z}(z) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}(\zeta)\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{\zeta}\partial \zeta}(\zeta)\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}(z)\right)\frac{\partial F}{\partial z}(z) + \frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}\partial z}(z).$$

Nú notfærum við okkur að $\partial F/\partial \overline{z} = \partial^2 F/\partial \overline{z}\partial z = 0$ og $\partial \overline{F}/\partial \overline{z} = \overline{\partial F/\partial z} = \overline{F'}$ og höfum því

$$\Delta_z u(z) = \Delta_\zeta v(\zeta)\left|F'(z)\right|^2. \tag{17.2.7}$$

Af þessari jöfnu leiðir síðan:

Setning 17.2.3 *Látum X og Y vera svæði í $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $F : X \to Y$ vera fágaða vörpun sem er ekki föst, $v : Y \to \mathbb{C}$ og $u = v(F)$. Fallið u er þýtt þá og því aðeins að v sé þýtt.* □

Með þessa setningu að vopni er oft hægt að flytja upplýsingar um þýð föll á Y yfir á þýð föll á svæðinu X með vörpuninni F. Til þess að útskýra þetta skulum við hugsa okkur að við viljum leysa Dirichlet-verkefnið

$$\Delta u = 0 \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \qquad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial X, \tag{17.2.8}$$

þar sem φ er gefið samfellt fall á jaðrinum ∂X og gefum okkur einnig að hægt sé að framlengja fallið F þannig að það verði samfellt og gagntækt frá lokuninni $\overline{X} = X \cup \partial X$ yfir á lokunina $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ og táknum andhverfuna með $F^{[-1]}$, $z = F^{[-1]}(\zeta)$. Gefum okkur einnig að við getum alltaf leyst verkefnið

$$\Delta v = 0 \quad \text{á} \quad Y \qquad \text{og} \qquad v = \psi \quad \text{á} \quad \partial Y, \tag{17.2.9}$$

þar sem ψ er gefið samfellt fall á jaðrinum ∂Y. Ef við setjum einfaldlega $\psi(\zeta) = \varphi(F^{[-1]}(\zeta))$, fyrir $\zeta \in \partial Y$. Þá leiðir beint af (17.2.7) að lausn u á (17.2.8) er gefin með $u(z) = v(F(z))$, þar sem v er lausnin á (17.2.9).

Af tilvist á vörpuninni F er það að segja, að til er setning, sem nefnist *vörpunarsetning Riemanns* og hún segir að um sérhvert einfaldlega samanhangandi svæði $X \neq \mathbb{C}$ gildir að til er gagntæk fáguð vörpun $F : X \to \mathbb{E}$, þar sem $\mathbb{E}$ táknar opnu einingarskífuna. Ef X hefur samfellt deildanlegan jaðar, þá fæst jafnframt að hægt er að framlengja F yfir í samfellda gagntæka vörpun $F : \overline{X} \to \overline{\mathbb{E}}$. Það er erfitt að sanna vörpunarsetningu Riemanns. Sönnunin er hrein tilvistarsönnun og gefur ekki neina formúlu fyrir F. Fyrir viss svæði er hins vegar auðvelt að ákvarða vörpunina F:

Sýnidæmi 17.2.4 Brotna línulega vörpunin $\zeta = F(z) = (z-i)/(z+i)$ varpar efra hálfplaninu $\mathbb{H}_+ = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ á einingarhringinn $\mathbb{E}$. Til þess að sjá það, þá athugum við fyrst að hún uppfyllir

$$F(\infty) = 1, \qquad F(0) = -1, \quad \text{og} \quad F(1) = -i.$$

Punktarnir 0 og 1 ákvarða línuna $\mathbb{R}$ ótvírætt og við vitum að F varpar línu á hring eða línu, samkvæmt setningu 4.1.1. Fyrst hún varpar ∞ á 1, þá varpast $\mathbb{R}$ á hring. Nú eru punktarnir 1, -1 og $-i$ á einingarhringnum, svo $F(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \partial\mathbb{E}$. Nú er $F(i) = 0$ og því varpast efra hálfplanið á opnu skífuna $\mathbb{E}$. □

17.3 Poisson-formúlan á hringskífu

Í þessari grein höldum við áfram með Dirichlet-verkefnið fyrir Laplace-virkjann á skífunni $D_a = \{(x,y); x^2 + y^2 < a^2\}$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{á} \quad D_a \qquad \text{og} \qquad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial D_a. \tag{17.3.1}$$

Hér er φ gefið fall á jaðri hringskífunnar ∂D_a. Lausnina fundum við í grein 13.3 með því að innleiða pólhnit og skilgreina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ og $\psi(\theta) = \varphi(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Lausnin er gefin með formúlunni

$$v(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\psi) \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta}. \tag{17.3.2}$$

Við stingum nú skilgreiningunni á Fourier-stuðlum fallsins ψ inn í óendanlegu summuna og skiptum á röð heildis og summu,

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) e^{-int}\, dt\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in(\theta-t)}\right) \psi(t)\, dt. \end{aligned}$$

Við skilgreinum *Poisson-kjarnann fyrir skífuna* $D_a = \{x + iy = re^{i\theta}; r < a\}$ með

$$
\begin{aligned}
P_{D_a}(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{|n|} e^{in\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\bigg(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{n} e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{n} e^{-in\theta}\bigg) \\
&= \frac{1}{2\pi}\bigg(1 + \frac{(r/a)e^{i\theta}}{1-(r/a)e^{i\theta}} + \frac{(r/a)e^{-i\theta}}{1-(r/a)e^{-i\theta}}\bigg) \\
&= \frac{1}{2\pi}\bigg(1 + \frac{re^{i\theta}}{a-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{a-re^{-i\theta}}\bigg) \\
&= \frac{a^2-r^2}{2\pi(a^2-2ar\cos\theta+r^2)}.
\end{aligned}
\tag{17.3.3}
$$

Við getum því sett lausnina fram sem heildi,

$$
\begin{aligned}
v(r,\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_{D_a}(r,\theta-t)\psi(t)\,dt \\
&= \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi(t)}{a^2-2ar\cos(\theta-t)+r^2}\,dt.
\end{aligned}
\tag{17.3.4}
$$

Þessi formúla nefnist *Poisson-formúla* fyrir hringskífuna D_a. Ef við stingum inn rétthyrndum hnitum $z = (x,y) = x+iy = re^{i\theta}$, þá verður lausnarformúlan fyrir (17.3.1),

$$
u(z) = \frac{a^2-|z|^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(ae^{it})}{|z-ae^{it}|^2}\,dt.
\tag{17.3.5}
$$

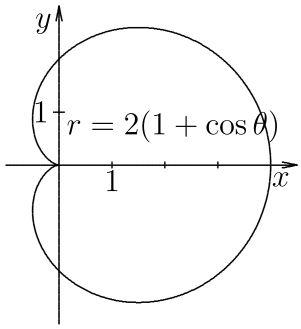
Nú athugum við að bogalengdarfrymið á hringnum ∂D_a er $ds = a\,dt$, þegar hann er stikaður með $t \mapsto \zeta = ae^{it}$ og því getum við umritað (17.3.5) yfir í heildi yfir ∂D_a með tilliti til bogalengdarinnar,

$$
u(z) = \frac{a^2-|z|^2}{2\pi a}\int_{\partial D_a}\frac{\varphi(\zeta)}{|z-\zeta|^2}\,ds(\zeta).
\tag{17.3.6}
$$

Sýnidæmi 17.3.1 Látum nú X tákna svæðið, sem takmarkast af *hjartaferlinum* $r = 2(1+\cos\theta)$, þ.e. $X = \{z = re^{i\theta}; r < 2(1+\cos\theta), -\pi \le \theta \le \pi\}$, og hugsum okkur að við viljum leysa verkefnið

$$
\Delta u = 0 \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \quad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial X,
\tag{17.3.7}
$$

þar sem φ er gefið samfellt fall á jaðrinum ∂X. Til þess að beita aðferðinni, sem lýst er í grein 17.2, þá þurfum við að finna fágaða vörpun F, sem varpar $\overline{X}$ gagntækt á $\overline{\mathbb{E}}$.



Mynd 17.1. Hjartaferill.

Slík vörpun reynist vera $\zeta = F(z) = z^{\frac{1}{2}} - 1$, þar sem $z \mapsto z^{\frac{1}{2}}$ táknar höfuðgrein kvaðratrótarinnar. Vörpunin F er gagntæk og andhverfa hennar er $z = F^{[-1]}(\zeta) = (\zeta+1)^2$. Til þess að sjá að ∂X varpist á einingarhringinn $\partial\mathbb{E}$, þá tökum við punkt á jaðrinum $z = re^{i\theta}$ með $r = 2(1+\cos\theta) = 4\cos^2(\theta/2)$. Hann uppfyllir

$$z^{\frac{1}{2}} - 1 = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} - 1$$

og því er

$$\begin{aligned} |z^{\frac{1}{2}} - 1|^2 &= 4\cos^2(\theta/2) + 1 - 2\mathrm{Re}\left(2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}\right) \\ &= 4\cos^2(\theta/2) + 1 - 4\cos^2(\theta/2) = 1. \end{aligned}$$

Þar með sjáum við að F varpar ∂X gagntækt á $\partial\mathbb{E}$. Nú lítum við á verkefnið

$$(17.3.8) \qquad \Delta v = 0 \quad \text{á} \quad \mathbb{E} \qquad \text{og} \quad v(\zeta) = \varphi((\zeta+1)^2), \quad \zeta \in \partial\mathbb{E}.$$

Lausn þess er gefin með Poisson-formúlunni,

$$v(\zeta) = \frac{1-|\zeta|^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi((e^{it}+1)^2)}{|\zeta - e^{it}|^2}\,dt,$$

og þar með er lausnin u á (17.3.7) gefin með

$$u(z) = \frac{1-|z^{\frac{1}{2}}-1|^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi((e^{it}+1)^2)}{|z^{\frac{1}{2}} - 1 - e^{it}|^2}\,dt.$$

□

Ef við stingum $z = 0$ inn í (17.3.6) og notfærum okkur að $|\zeta| = a$ ef $\zeta \in \partial D_a$, þá fáum við

$$(17.3.9) \qquad u(0) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\partial D_a} \varphi(\zeta)\,ds(\zeta).$$

Bein afleiðing af þessari formúlu er:

Setning 17.3.2 (*Meðalgildissetning*). *Látum u vera þýtt fall á opinni hringskífu $S(\alpha,\varrho)$ og gerum ráð fyrir að u sé samfellt á lokuninni $\overline{S}(\alpha,\varrho)$. Þá er*

$$u(\alpha) = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{\partial S(\alpha,\varrho)} u(\zeta)\,ds(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\alpha+\varrho e^{it})\,dt, \tag{17.3.10}$$

þ.e. gildi fallsins u í miðpunkti skífunnar er jafnt meðalgildi þess yfir jaðarinn.

□

Sönnun: Við beitum (17.3.9) á fallið $v(z) = u(\alpha+z)$ með $\varphi(z) = u(\alpha+z)$. ■

17.4 Poisson-formúlan á hálfplani

Nú skulum við láta $\mathbb{H}_+$ tákna efra hálfplanið, $\mathbb{H}_+ = \{(x,y); x\in\mathbb{R}, y>0\}$, og lítum á Dirichlet-verkefnið

$$\Delta u = 0 \quad \text{á} \quad \mathbb{H}_+ \qquad \text{og} \qquad u=\varphi \quad \text{á} \quad \mathbb{R}, \tag{17.4.1}$$

þar sem φ er gefið fall á $\mathbb{R}$. Við skulum leiða út lausnarformúlu fyrir þetta verkefni með því að beita Fourier-ummyndun. Til þess þurfum við að gera ráð fyrir að φ sé heildanlegt og að $u(x,y)$ sé heildanlegt sem fall af x fyrir sérhvert $y>0$. Við látum þá $\widehat{u}(\xi,y)$ tákna Fourier-mynd u með tilliti til x,

$$\widehat{u}(\xi,y) = \mathcal{F}\{u(\cdot,y)\}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}u(x,y)\,dx$$

og gefum okkur að allar forsendur í helstu reiknireglum um Fourier-ummyndunina séu uppfylltar, þannig að

$$\mathcal{F}\{\partial_x^k u(\cdot,y)\}(\xi) = (i\xi)^k\widehat{u}(\xi,y) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{F}\{\partial_y^k u(\cdot,y)\}(\xi) = \partial_y^k\widehat{u}(\xi,y).$$

Eftir Fourier-ummyndun af öllum liðum verkefnisins (17.4.1) fæst að $\widehat{u}(\xi,y)$ þarf að uppfylla

$$\begin{cases} -\xi^2\widehat{u}(\xi,y) + \partial_y^2\widehat{u}(\xi,y) = 0, & \xi\in\mathbb{R},\ y>0,\\ \widehat{u}(\xi,y) = \widehat{\varphi}(\xi), & \xi\in\mathbb{R},\\ \widehat{u}(\xi,y) \text{ er takmarkað}, & y\to+\infty. \end{cases}$$

Fyrir fast ξ er þetta annars stigs jafna í y. Almenn lausn hennar er af gerðinni

$$\widehat{u}(\xi,y) = \begin{cases} A(\xi)e^{-|\xi|y} + B(\xi)e^{|\xi|y}, & \xi\neq 0,\\ A(0)+B(0)y, & \xi=0. \end{cases}$$

Til þess að $\widehat{u}(\xi,y)$ haldist takmarkað ef $y\to+\infty$, þá verður $B(\xi)=0$ að gilda um öll $\xi\in\mathbb{R}$. Þar með er $A(\xi)=\widehat{\varphi}(\xi)$ og við höfum formúluna

$$\widehat{u}(\xi,y) = e^{-|\xi|y}\widehat{\varphi}(\xi).$$

Hægri hliðin í þessari jöfnu er margfeldi tveggja Fourier-mynda og því getum við skrifað $u(x,y)$ sem földun tveggja falla ef við getum reiknað út andhverfu Fourier-mynd fallsins $\xi \mapsto e^{-|\xi|y}$. Það er auðvelt, því í sýnidæmi 6.2.1 sýndum við fram á að $\mathcal{F}\{e^{-|\xi|y}\}(x) = 2y/(x^2+y^2)$ og þar með gefur andhverfuformúlan að $\mathcal{F}\{P_{\mathbb{H}_+}(\cdot,y)\}(\xi) = e^{-|\xi|y}$ þar sem $P_{\mathbb{H}_+}$ er *Poisson-kjarninn fyrir efra hálfplanið*,

$$P_{\mathbb{H}_+}(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{17.4.2}$$

Földunarreglan í setningu 6.4.1 gefur okkur nú lausnarformúluna

$$u(x,y) = P_{\mathbb{H}_+}(\cdot,y) * \varphi(x) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt. \tag{17.4.3}$$

Þessi formúla nefnist *Poisson-formúla á efra hálfplaninu.* Í útleiðslu okkar á (17.4.3) gengum við út frá því að fallið φ væri heildanlegt, en Poisson-formúlan gildir ef við gerum ráð fyrir að φ sé samfellt og takmarkað á $\mathbb{R}$.

Sýnidæmi 17.4.1 (*Dirichlet-verkefnið á fjórðungi*). Nú þegar við þekkjum lausnarformúluna fyrir Dirichlet-verkefnið á hálfplani, þá er auðvelt að beita aðferðinni sem lýst er í lok greinar 17.2 til þess að leysa hliðstætt verkefni á fjórðungi af planinu,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x > 0,\ y > 0, \\ u(x,0) = \varphi_1(x), & x \geq 0, \\ u(0,y) = \varphi_2(y), & y \geq 0, \end{cases} \tag{17.4.4}$$

þar sem föllin φ_1 og φ_2 eru samfelld á $\mathbb{R}_+$ og $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Við látum $X = \{z = x+iy; x > 0, y > 0\}$ tákna fjórðunginn og $Y = \{\zeta = \xi + i\eta; \eta > 0\}$ tákna efra hálfplanið. Fallið F, sem gefið er með

$$\zeta = \xi + i\eta = F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \tag{17.4.5}$$

skilgreinir gagntæka vörpun frá $\overline{X}$ á $\overline{Y}$. Við skilgreinum nú samfellda fallið ψ á $\mathbb{R}$ með

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\sqrt{\xi}), & \xi \geq 0, \\ \varphi_2(\sqrt{-\xi}), & \xi < 0. \end{cases}$$

Nú látum við v tákna lausnina á $\Delta v = 0$ á Y með jaðargildin $v(\xi,0) = \psi(\xi)$ ef $\xi \in \mathbb{R}$. Samkvæmt Poisson-formúlunni (17.4.3) er

$$v(\zeta) = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)\,dt}{(\xi-t)^2+\eta^2}, \qquad \zeta = \xi + i\eta \in Y.$$

Nú setjum við inn $\xi = x^2 - y^2$ og $\eta = 2xy$ samkvæmt (17.4.5 og fáum þá lausnarformúlu fyrir (17.4.4),

$$u(z) = \frac{2xy}{\pi}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi_1(\sqrt{t})}{(x^2-y^2-t)^2+4x^2y^2} + \frac{\varphi_2(\sqrt{t})}{(x^2-y^2+t)^2+4x^2y^2} \right) dt. \tag{17.4.6}$$

□

17.5 Green-formúlurnar

Látum nú X vera opið hlutmengi í $\mathbb{R}^2$ og látum D vera takmarkað hlutsvæði í X með jaðar ∂D, sem er samfellt deildanlegur á köflum og innihaldinn í X. Ef $\vec{F} : X \to \mathbb{R}^2$ er samfellt deildanlegt vigursvið á X, þá gefur Gauss-setningin

$$\iint_D \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds,$$

þar sem $\nabla\cdot = \operatorname{div}$ er sundurleitnivirkinn, dA er flatarmálsfrymið á $\mathbb{R}^2$, $\vec{n}$ táknar ytri þvervigurinn á jaðrinum og ds er bogalengdarfrymið á jaðrinum. Með því að beita Gauss-setningunni á sértilfellið $\vec{F} = v\nabla u$ þar sem $u, v \in C^2(X)$ og $\nabla = \operatorname{grad}$ er stigullinn, þá fáum við *fyrstu formúlu Greens*,

$$\int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_D \nabla v \cdot \nabla u\, dA + \iint_D v\Delta u\, dA. \tag{17.5.1}$$

Hér er $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \vec{n}$ stefnuafleiða u í stefnu ytri þvervigursins á jaðrinum. Ef við skiptum á hlutverkum u og v, þá fáum við

$$\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\, ds = \iint_D \nabla u \cdot \nabla v\, dA + \iint_D u\Delta v\, dA. \tag{17.5.2}$$

Tökum nú mismuninn af þessum tveimur jöfnum. Þá fáum við *aðra formúlu Greens*,

$$\int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \iint_D \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\, dA. \tag{17.5.3}$$

Þessar formúlur eiga sér hliðstæður í þremur víddum. Þá látum við X vera opið hlutmengi í $\mathbb{R}^3$ og látum D vera takmarkað hlutsvæði í X með jaðar ∂D innihaldinn í X. Við gefum okkur að jaðarinn sé samfellt deildanlegur flötur. Ef $\vec{F} : X \to \mathbb{R}^3$ er samfellt deildanlegt vigursvið á X, þá gefur Gauss-setningin

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS,$$

þar sem dV er rúmmálsfrymið í $\mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ táknar ytri þvervigurinn á jaðrinum og dS er flatarmálsfrymið á jaðrinum. Með því að beita Gauss-setningunni á sértilfellið $\vec{F} = v\nabla u$ eins og áður þar sem $u, v \in C^2(X)$, þá fáum við *fyrstu formúlu Greens*,

$$\iint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint_D \nabla v \cdot \nabla u\, dV + \iiint_D v\Delta u\, dV. \tag{17.5.4}$$

Með sama hætti og áður fáum við *aðra formúlu Greens*,

$$\iint_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \iiint_D \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\, dV. \tag{17.5.5}$$

Nú er nauðsynlegt að samhæfa ritháttinn fyrir heildi í öllum víddum, til þess að þurfa ekki að endurtaka röksemdafærslur, sem eru óháðar víddinni á rúminu. Við hættum því að skrifa margföld heildi og táknum óháðu breyturnar með $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ o.s.frv. Ef fall u er gefið á einhverju opnu mengi D í $\mathbb{R}^n$ sem hefur samfellt deildanlegan jaðar ∂D, þá táknum við rúmheildið af u yfir D og flatarheildið af u yfir ∂D með

$$\int_D u\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_{\partial D} u\,dS.$$

Ef víddin er 2, þá er dS bogalengdarfrymi, en ef víddin er 3, þá er dS flatarmálsfrymi. Gauss-formúlurnar gilda raunar þó svo að jaðarinn sé ekki samfellt deildanlegur í öllum punktum. Í tveimur víddum dugir að hann sé samfellt deildanlegur á köflum og í þremur víddum mega vera horn og brot í jaðrinum. Sem dæmi getum við tekið tening eða einhvern annan margflötung. Við munum segja að jaðar á svæði X í $\mathbb{R}^n$ sé *sléttur*, ef hægt er að beita Gauss-setningunni á samfelld vigursvið $\vec{F} : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ sem eru samfellt deildanleg á X.

Við eigum eftir að sjá Green-formúlurnar notaðar á margvíslegan hátt. Ein skemmtileg beiting á þeim er sönnun á *meðalgildissetningunni*. Gerum nú ráð fyrir að X sé opið hlutmengi í $\mathbb{R}^3$ og að X innihaldi $\overline{D}$ þar sem D er eitthvert takmarkað svæði með sléttan jaðar. Ef $u \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$, þá gefur önnur formúla Greens að

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_D \Delta u\,dx. \tag{17.5.6}$$

Ef u er þýtt fall, þá fáum við

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0. \tag{17.5.7}$$

Nú skulum við láta $D = \overline{B}(0, r)$ vera lokuðu kúluna með miðju í 0 og geislann r. Athugum að ytri þvervigurinn á $\partial B(0, r)$ í punktinum $x = (x_1, x_2, x_3)$ er $\vec{n} = \vec{e}_r = (x_1/r, x_2/r, x_3/r)$. Þar með er

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{x_1}{r}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{x_2}{r}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{x_3}{r}\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial r},$$

þar sem fallið v er framsetning á u í kúluhnitum,

$$v(r, \theta, \phi) = u(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

Nú stikum við yfirborð kúlunnar og fáum

$$\int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta, \phi)\, r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi. \tag{17.5.8}$$

Flatarmál kúluyfirborðsins er $a(\partial B(0, r)) = 4\pi r^2$ svo meðalgildi fallsins u yfir $\partial B(0, r)$ er

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(\partial B(0, r))} \int_{\partial B(0,r)} u\,dS &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} v(r, \theta, \phi)\, r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} v(r, \theta, \phi)\, \sin\theta\, d\theta d\phi.\end{aligned}$$

Ef við gefum okkur að u sé þýtt fall, þá gefa (17.5.7) og (17.5.8) að

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{a(\partial B(0,r))}\int_{\partial B(0,r)} u\, dS\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,\phi)\,\sin\theta\, d\theta d\phi = 0.$$

Þetta meðalgildi er því óháð geislanum r á kúlunni. Greinilegt er að

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{a(\partial B(0,r))}\int_{\partial B(0,r)} u\, dS\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v(0,\theta,\phi)\,\sin\theta\, d\theta d\phi = u(0).$$

Þar með höfum við:

Setning 17.5.1 (*Meðalgildissetning*). *Látum u vera þýtt fall á opnu mengi X í $\mathbb{R}^3$ og gerum ráð fyrir að lokaða kúlan $\overline{B}(\alpha, r)$ með miðju í α og geislann r sé innihaldin í X. Þá er*

$$u(\alpha) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(\alpha,r)} u\, dS.$$

□

Sönnun: Við höfum sannað þessa reglu í sértilfellinu $\alpha = 0$ hér að framan og fáum almenna tilfellið með því að hliðra upphafspunktinum í α. ■

Með nákvæmlega sömu aðferð er hægt að sanna meðalgildissetninguna í öllum rúmvíddum n.

17.6 Há- og lággildislögmál fyrir þýð föll

Mikilvægasta afleiðing meðalgildissetningarinnar er:

Setning 17.6.1 (*Há- og lággildislögmál*). *Látum X vera takmarkað svæði í $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ og látum $u : \overline{X} \to \mathbb{R}$ vera fall sem er þýtt á X og samfellt á lokuninni $\overline{X}$. Þá tekur u hæsta og lægsta gildi sitt á jaðrinum ∂X. Ef hæsta eða lægsta gildi er tekið í innri punkti, þá er u fastafall.* □

Sönnun: Fyrri staðhæfingin leiðir beint af þeirri síðari. Fyrst u er samfellt á $\overline{X}$, þá tekur u hæsta gildi sem við táknum með M. Við setjum $A = \{z; u(z) = M\}$. Ef $A \neq \overline{X}$, þá hefur A jaðarpunkt $\alpha \in X$. Sérhver lokuð kúla $\overline{B}(\alpha, r) \subset X$ sker bæði A og $X \setminus A$ og þar með er hægt að velja r þannig að einhver opinn flötur í jaðrinum $\partial B(\alpha, r)$ skeri $X \setminus A$. Á þessum opna fleti er $u < M$ og þar með er meðalgildi u yfir allan jaðarinn $< M$. Gildið í miðpunktinum α er M, svo þetta er mótsögn við meðalgildisregluna. Við höfum þar með sannað að hágildi er ekki tekið í innri punkti nema u sé fastafall. Við fáum lággildislögmálið með því að beita hágildislögmálinu á $-u$. ■

Af hágildislögmálinu leiðir síðan ótvíræðni í lausn Dirichlet-verkefnisins fyrir Poisson-jöfnuna:

Setning 17.6.2 *Látum X vera takmarkað svæði í $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, og gerum ráð fyrir að til sé $u \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$ sem uppfyllir*

$$\Delta u = f \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \qquad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial X,$$

þar sem $f \in C(X)$ og $\varphi \in C(\partial X)$ eru gefin föll. Þá er u ótvírætt ákvarðað. □

Sönnun: Ef u_1 og u_2 eru tvær lausnir á verkefninu, þá uppfyllir mismunurinn $v = u_1 - u_2$ Laplace-jöfnuna $\Delta v = 0$ á X og $v = 0$ á ∂X. Með því að beita há- og lággildislögmálinu á föllin $\operatorname{Re} v$ og $\operatorname{Im} v$, þá fáum við að v er núllfallið og þar með að $u_1 = u_2$. ■

17.7 Green-föll

Í þessari grein ætlum við að fást við úrlausn á Poisson-jöfnunni með Dirichlet-jaðarskilyrðum á svæðum $X \subset \mathbb{R}^n$, þar sem n getur verið 2 eða 3,

$$\Delta u = f \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \qquad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial X, \tag{17.7.1}$$

og við sýnum fram á að oft sé hægt að setja lausnina fram með heildum af gerðinni

$$u(x) = \int_{\partial X} P_X(x,\xi)\varphi(\xi)\, dS(\xi) + \int_X G_X(x,\xi) f(\xi)\, d\xi \qquad x \in X, \tag{17.7.2}$$

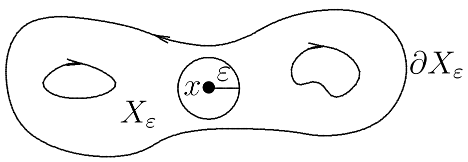
þar sem P_X og G_X nefnast *Poisson-kjarni* og *Green-fall fyrir Laplace-virkjann á svæðinu* X. Byrjum á því að gera ráð fyrir að X sé opið takmarkað hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ með sléttan jaðar. Við skilgreinum fallið E með

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n = 2, \\ \dfrac{-1}{4\pi|x|}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n = 3. \end{cases}$$

Munið að $|x|$ táknar lengd vigurs í $\mathbb{R}^n$. Athugið að fallið E er þýtt á $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Við festum nú einn punkt $x \in X$ og lítum á fallið

$$\xi \mapsto E(x - \xi) = E(\xi - x).$$

Þetta fall er þýtt á $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ og tekur gildið $-\infty$ í x, svo við skerum litla kúlu $\overline{B}(x, \varepsilon)$ umhverfis x úr X og lítum á $X_\varepsilon = X \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$ eins og sýnt er á myndinni.



Mynd 17.2. Svæðið X_ε.

Önnur formúla Greens gefur okkur þá

$$\int_{\partial X_\varepsilon} \Big(u(\xi)\frac{\partial E}{\partial n}(x-\xi) - E(x-\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\Big)\, dS(\xi) = -\int_{X_\varepsilon} E(x-\xi)\Delta u(\xi)\, d\xi. \tag{17.7.3}$$

Jaðarinn ∂X_ε samanstendur af tveimur hlutum, ∂X og $\partial B(x,\varepsilon)$. Í punkti ξ á hringnum $\partial B(x,\varepsilon)$ er stefna ytri þvervigursins inn í kúluna og því er

$$\frac{\partial E}{\partial n}(x-\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(\dfrac{1}{2\pi}\ln r\Big)\Big|_{r=\varepsilon} = -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}, & n=2,\\ -\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(\dfrac{-1}{4\pi r}\Big)\Big|_{r=\varepsilon} = \dfrac{-1}{4\pi\varepsilon^2}, & n=3.\end{cases}$$

Þar með er

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(\xi)\frac{\partial E}{\partial n}(x-\xi)\, dS(\xi) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{a(\partial B(x,\varepsilon))}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u\, dS = -u(x). \tag{17.7.4}$$

Athugið að síðasta markgildið er tekið af meðalgildi u á $\partial B(x,\varepsilon)$ og vegna samfelldni u stefnir það á $u(x)$. Ef $n=2$, þá er seinni liðurinn í vinstri hlið (17.7.3) jafn

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} E(x-\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\, dS(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon\frac{1}{a(\partial B(x,\varepsilon))}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0. \tag{17.7.5}$$

Ef $n=3$, fæst sams konar markgildi með ε í stað $\varepsilon\ln\varepsilon$. Fyrst fallið $\xi\mapsto E(x-\xi)$ er heildanlegt í grennd um x, þá fáum við að

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X_\varepsilon} E(x-\xi)\Delta u(\xi)\, d\xi = \int_X E(x-\xi)\Delta u(\xi)\, d\xi. \tag{17.7.6}$$

Nú getum við látið $\varepsilon\to 0$ í (17.7.3) og notfært okkur (17.7.4), (17.7.5) og (17.7.6). Við fáum þá

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_{\partial X}\Big(u(\xi)\frac{\partial E}{\partial n}(x-\xi) - E(x-\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\Big)\, dS(\xi)\\ &+\int_X E(x-\xi)\Delta u(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{17.7.7}$$

Látum nú v vera þýtt fall á X sem er samfellt á lokuninni og beitum annarri formúlu Greens,

$$0 = \int_{\partial X}\Big(u(\xi)\frac{\partial v}{\partial n}(\xi) - v(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\Big)\, dS(\xi) + \int_X v(\xi)\Delta u(\xi)\, d\xi. \tag{17.7.8}$$

Nú leggjum við saman (17.7.7) og (17.7.8) og fáum þá

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_{\partial X} u(\xi)\Big(\frac{\partial E}{\partial n}(x-\xi) + \frac{\partial v}{\partial n}(\xi)\Big)\, dS(\xi)\\ &-\int_{\partial X}\Big(E(x-\xi)+v(\xi)\Big)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\, dS(\xi)\\ &+\int_X\Big(E(x-\xi)+v(\xi)\Big)\Delta u(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{17.7.9}$$

Hugsum okkur nú að við gætum ákvarðað fall v sem er háð x og ξ þannig að $\xi \mapsto v(x,\xi)$ er þýtt og $E(x-\xi)+v(x,\xi)=0$, ef $x\in\partial X$ og $\xi\in X$. Þá verður miðliðurinn í (17.7.9) að núlli.

Skilgreining 17.7.1 *Green-fall* á svæðinu X er fall $G_X : \overline{X}\times\overline{X}\to\mathbb{C}$, þannig að fyrir sérhvert $\xi\in X$ er $x\mapsto G_X(x,\xi)$ tvisvar samfellt deildanlegt í $X\setminus\{\xi\}$ og

(i) $\Delta_x G_X(x,\xi)=0$ á $X\setminus\{\xi\}$.

(ii) $G_X(x,\xi)=0$ ef $x\in\partial X$ og $\xi\in X$. Ef X er ótakmarkað, þá er

$$\lim_{\substack{bz\to\infty\\ z\in X}} G_X(x,\xi)=0.$$

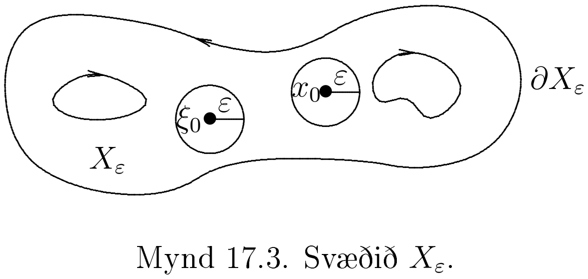
(iii) Unnt er að skrifa $G_X(x,\xi)=E(x-\xi)+w(x,\xi)$, þar sem fallið $x\mapsto w(x,\xi)$ er þýtt á öllu X. □

Það eru einkum tveir eiginleikar Green-fallsins sem við þurfum að nota, ótvíræðni og samhverfa:

Setning 17.7.2 *Látum X vera takmarkað svæði með sléttan jaðar og gerum ráð fyrir að til sé Green-fall G_X á X. Þá er G_X ótvírætt ákvarðað og $G_X(x,\xi)=G_X(\xi,x)$ fyrir öll $x,\xi\in\overline{X}$.* □

Sönnun: Hugsum okkur að við höfum tvö Green-föll $G_j(x,\xi)=E(x-\xi)+w_j(x,\xi)$, $j=1,2$ á X. Skilyrðið (iii) segir okkur að fyrir sérhvert $\xi\in X$ er fallið $x\mapsto G_1(x,\xi)-G_2(x,\xi)=w_1(x,\xi)-w_2(x,\xi)$ þýtt og það tekur gildið 0 á jaðrinum. Þar með er þetta núllfallið og við höfum $G_1=G_2$.

Til þess að sanna samhverfuna, þá veljum við tvo punkta x_0 og ξ_0. Við ætlum síðan að beita annarri formúlu Greens á föllin $u(x)=G_X(x,x_0)$ og $v(x)=G_X(x,\xi_0)$ til þess að sanna að $G_X(\xi_0,x_0)=u(\xi_0)=v(x_0)=G_X(x_0,\xi_0)$. Ef $x_0=\xi_0$, þá er ekkert að sanna, svo við megum gera ráð fyrir að $x_0\neq\xi_0$. Við látum ε vera svo lítið að skífurnar $\overline{B}(x_0,\varepsilon)$ og $\overline{B}(\xi_0,\varepsilon)$ séu sundurlægar og innihaldnar í X. Við lítum síðan á mengið $X_\varepsilon = X\setminus\big(\overline{B}(x_0,\varepsilon)\cup\overline{B}(\xi_0,\varepsilon)\big)$.



Mynd 17.3. Svæðið X_ε.

Nú er $\Delta u=\Delta v=0$ á X_ε og $u=v=0$ á ∂X. Jaðarinn á X_ε er $\partial X_\varepsilon=\partial X\cup\partial B(x_0,\varepsilon)\cup\partial B(\xi_0,\varepsilon)$. Ef við beitum annarri formúlu Greens, þá fáum við

$$0=\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\int_{\partial B(\xi_0,\varepsilon)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \tag{17.7.10}$$

Hér er ytri þverafleiðan tekin út úr svæðinu X_ε. Athugum síðan að í tilfellinu $n = 2$ er

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x - x_0| + w(x, x_0) \quad \text{og} \quad v(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x - \xi_0| + w(x, \xi_0).$$

Í punkti $x = x_0 + i\varepsilon e^{it} \in \partial B(x_0, \varepsilon)$ er

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon + w(x_0 + \varepsilon e^{it}, x_0) \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{-1}{2\pi\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial r}w(x_0 + \varepsilon e^{it}, x_0),$$

og í punkti $x = \xi_0 + i\varepsilon e^{it} \in \partial B(\xi_0, \varepsilon)$ er

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon + w(\xi_0 + \varepsilon e^{it}, \xi_0) \quad \text{og} \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x) = \frac{-1}{2\pi\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial r}w(\xi_0 + \varepsilon e^{it}, \xi_0).$$

Með nákvæmlega sömu röksemdafærslu og leiddi til (17.7.4) og (17.7.5) fáum við að hægt er að taka markgildi í (17.7.10) og að það er $0 = v(x_0) - u(\xi_0)$, sem jafngildir því að $G_X(x_0, \xi_0) = G_X(\xi_0, x_0)$. Tilfellið $n = 3$ er meðhöndlað á nákvæmlega sama hátt. ■

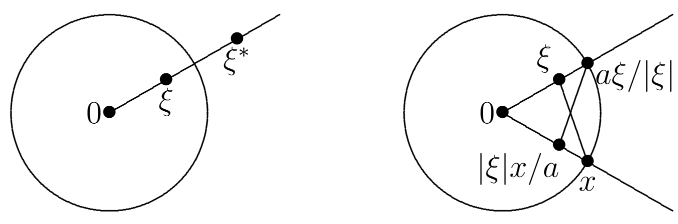
Niðurstaðan úr þessum erfiðu útreikningum er, að ef G_X er Green-fall takmarkaðs svæðis X og við gerum ráð fyrir að ytri þverafleiðan $\partial G_X(x, \xi)/\partial n$ af G_X með tilliti til ξ sé til ef $x \in X$ og $\xi \in \partial X$, þar sem ekki er brot á jaðrinum ∂X, þá gefur (17.7.9) okkur

$$u(x) = \int_{\partial X} \frac{\partial G_X}{\partial n}(x, \xi)u(\xi)\, dS(\xi) + \int_X G_X(x, \xi)\Delta u(\xi)\, d\xi. \tag{17.7.11}$$

Einnig fáum við lausnarformúlu fyrir verkefnið $\Delta u = f$ á X með $u = \varphi$ á ∂X, þar sem f er gefið samfellt fall á X og φ er gefið samfellt fall á ∂X, því

$$u(x) = \int_{\partial X} \frac{\partial G_X}{\partial n}(x, \xi)\varphi(\xi)\, dS(\xi) + \int_X G_X(x, \xi)f(\xi)\, d\xi. \tag{17.7.12}$$

Sýnidæmi 17.7.3 (*Green-fall skífu og kúlu*). Látum nú $D_a = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < a\}$ vera skífu/kúlu í $\mathbb{R}^n$ með miðpunkt 0 og geisla a. Til þess að ákvarða Green-fall D_a, þá þurfum við að finna fall w_a þannig að $G_{D_a}(x, \xi) = E(x - \xi) + w_a(x, \xi)$ uppfylli skilyrðin í skilgreiningu 17.7.1. Þetta er hægt að gera með svokallaðri *speglunaraðferð*. Hún er hugsuð þannig að fyrst tökum við $\xi \in D_a$, $\xi \neq 0$. Við lítum síðan á spegilpunkt ξ um hringinn/kúluflötinn ∂D_a, sem táknaður er með ξ^*. Hann liggur á geislanum frá 0 gegnum ξ utanvert við ∂D_a og uppfyllir $|\xi||\xi^*| = a^2$. Þar með er $\xi^* = \xi a^2/|\xi|^2$.



Mynd 17.3. Speglun um hring og kúluflöt.

Í ljós kemur að hægt er að velja $w_a(x,\xi) = -E((x-\xi^*)|\xi|/a)$. Fyrst ξ^* er utanvert við hringinn og E er þýtt á $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, þá er ljóst að fallið $x \mapsto w_a(x,\xi)$ er þýtt á D_a, svo skilyrði (i) og (iii) í skilgreiningu 17.7.1 eru uppfyllt. Til þess að sanna að (ii) sé uppfyllt þá athugum við, að ef $x \in \partial D_a$, þá eru þríhyrningarnir með hornpunktana $0, x, \xi$ og $0, a\xi/|\xi|, |\xi|x/a$ einslaga og þar með er

$$|x-\xi| = \big||\xi|x/a - a\xi/|\xi|\big| = |x - a^2\xi/|\xi|^2||\xi|/a = |x-\xi^*||\xi|/a.$$

Þetta segir okkur að $G_{D_a}(x,\xi) = E(x-\xi) - E((x-\xi^*)|\xi|/a) = 0$ ef $x \in \partial D_a$. Niðurstaðan er nú að

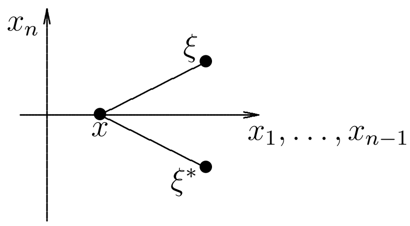
$$\begin{aligned} G_{D_a}(x,\xi) &= E(x-\xi) - E((x-a^2\xi/|\xi|^2)|\xi|/a) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi| - \dfrac{1}{2\pi}\ln\big(|x-a^2\xi/|\xi|^2||\xi|/a\big), & n=2, \\ \dfrac{-1}{4\pi|x-\xi|} + \dfrac{1}{4\pi|x-a^2\xi/|\xi|^2||\xi|/a}, & n=3. \end{cases} \end{aligned} \tag{17.7.13}$$

□

Sýnidæmi 17.7.4 (*Green-fall hálfplans og hálfrúms.*). Skoðum nú $\mathbb{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, sem er efra hálfplanið/hálfrúmið. Jaðar þess $\partial\mathbb{H}_+$ er rauntalnalínan $\mathbb{R}$ í $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, ef $n=2$, en x_1x_2-planið, ef $n=3$. Eftir að hafa séð speglunaraðferðina í sýnidæmi 17.7.3, þá sjáum við í hendi okkar að skilyrðin í skilgreiningu 17.7.1 eru uppfyllt fyrir

$$G_{\mathbb{H}_+}(x,\xi) = E(x-\xi) - E(x-\xi^*),$$

þar sem ξ^* táknar núna spegilpunkt ξ um línuna/planið $\partial\mathbb{H}_+$, $\xi^* = (\xi_1, -\xi_2)$ ef $n=2$ og $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$ ef n = 3.



Mynd 17.4. Speglun um línu og plan.

Niðurstaðan er því

$$G_{\mathbb{H}_+}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi| - \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi^*|, & n=2,\ \xi^* = (\xi_1,-\xi_2), \\ \dfrac{-1}{4\pi|x-\xi|} + \dfrac{1}{4\pi|x-\xi^*|}, & n=3,\ \xi^* = (\xi_1,\xi_2,-\xi_3). \end{cases} \tag{17.7.14}$$

□

Nú skulum við innleiða ritháttinn z og ζ fyrir punkta í $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eins og venja er í tvinnfallagreiningu og láta $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ tákna einingarskífuna í $\mathbb{C}$. Auðvelt er að sannfæra sig út frá (17.7.13) um að

$$G_{\mathbb{E}}(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\bigg(\ln|x-\xi| - \ln|1-\bar{\zeta}z|\bigg) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{x-\xi}{1-\bar{\zeta}z}\right|.$$

Gerum nú ráð fyrir að X og Y séu opin mengi í $\mathbb{C}$, að $F : \overline{X} \to \overline{Y}$ sé samfelld og gangtæk vörpun, sem er fáguð á X. Gerum einnig ráð fyrir að við þekkjum Green-fall mengisins Y og að við viljum ákvarða Green-fall X. Þetta reynist vera auðvelt, því

$$G_X(z, \zeta) = G_Y(F(z), F(\zeta)), \qquad z, \zeta \in \overline{X}. \tag{17.7.15}$$

Til þess að sjá að þessi formúla gildir, þá athugum við að hægt er að skrifa

$$G_Y(z_1, \zeta_1) = \frac{1}{2\pi} \ln|z_1 - \zeta_1| + w_Y(z_1, \zeta_1),$$

og því uppfyllir

$$G_X(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \zeta| + \frac{1}{2\pi} \ln|(F(z) - F(\zeta))/(z - \zeta)| + w_Y(F(z), F(\zeta)),$$

skilyrðin (i)-(iii) í skilgreiningu 17.7.3, því fallið

$$z \mapsto w_X(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln|(F(z) - F(\zeta))/(z - \zeta)| + w_Y(F(z), F(\zeta))$$

er þýtt, því samskeyting af þýðu og fáguðu falli er þýtt samkvæmt setningu 17.2.3.

Sýnidæmi 17.7.5 Í sýnidæmi 17.3.1 skoðuðum við svæðið sem takmarkast af hjartaferlinum $r = 2(1 + \cos\theta)$, þ.e.

$$X = \{z = re^{i\theta}; r < 2(1 + \cos\theta)\}.$$

Við sáum þá að vörpunin $z \mapsto z^{\frac{1}{2}} - 1$ varpar $\overline{X}$ á $\overline{\mathbb{E}}$ og því er

$$G_X(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|z^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}| - \ln|1 - (z^{\frac{1}{2}} - 1)(\overline{\zeta}^{\frac{1}{2}} - 1)| \right), \qquad z, \zeta \in \overline{X}.$$

□

17.8 Poisson-kjarnar

Í grein 17.3 leystum við Dirichlet-verkefnið fyrir hringskífu og í grein 17.4 leystum við Dirichlet-verkefnið fyrir hálfplan. Í báðum tilfellunum leiddum við út lausnarformúlu, sem er heildi yfir jaðarinn á svæðinu og hægt er að líta á það sem földun á jaðargildunum og kjarna, sem við nefndum Poisson-kjarna. Nú ætlum við að alhæfa þessar formúlur, en við sáum í (17.7.12) að lausnarformúla fyrir verkefnið

$$\Delta u = 0 \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \qquad u = \varphi \quad \text{á} \quad \partial X, \tag{17.8.1}$$

er gefin með heildinu

$$u(z) = \int_{\partial X} \frac{\partial G_X}{\partial n}(z, \zeta)\varphi(\zeta)\, dS(\zeta). \tag{17.8.2}$$

Skilgreining 17.8.1 Látum Xvera svæði í $\mathbb{C}$ og látum G_X vera Green-fall á X. Gerum ráð fyrir að jaðarinn ∂X sé samfellt deildanlegur á köflum og skilgreinum

$$P_X(z,\zeta) = \frac{\partial G_X}{\partial n}(z,\zeta),$$

ef $z \in X$ og $\zeta \in \partial X$ er punktur, þar sem ytri þvervigurinn $\vec{n}(\zeta)$ er vel skilgreindur og

$$\frac{\partial G_X}{\partial n}(z,\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{G_X(z,\zeta - \varepsilon\vec{n}(\zeta)) - G_X(z,\zeta)}{-\varepsilon}.$$

□

Auðvelt er að sannfæra sig um að

$$P_{\mathbb{E}}(z,e^{it}) = \frac{\partial G_{\mathbb{E}}}{\partial r}(z,re^{it})\bigg|_{r=1} = \frac{1-|z|^2}{2\pi|z-e^{it}|^2},$$

í samræmi við útreikningana í grein 17.3, og að

$$P_{\mathbb{H}_+}(z,\zeta) = -\frac{\partial G_{\mathbb{H}_+}(z,\zeta+i\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} = \frac{\zeta}{\pi(z^2+\zeta^2)},$$

í samræmi við útkomuna í grein 17.4.

Gerum nú ráð fyrir að við höfum gagntæka vörpun $F : \overline{X} \to \overline{Y}$ sem varpar jaðrinum ∂X gagntækt á ∂Y og er fáguð á X. Til einföldunar skulum við gera ráð fyrir að $\zeta \mapsto G_X(z,\zeta)$ sé samfellt deildanlegt í grennd um $\overline{X}$ fyrir öll $z \in X$ og að $\zeta \mapsto G_Y(z,\zeta)$ sé samfellt deildanlegt í grennd um $\overline{Y}$ fyrir öll $z \in Y$. Ef $\zeta \in \partial X$ og $\gamma(s)$ er stikun á ∂X í grennd um ζ með tilliti til bogalengdarinnar s, $\gamma(0) = \zeta$ og umferðarstefnan er jákvæð miðað við svæðið X, þá er einingarsnertill í ζ gefinn sem $\vec{T}(\zeta) = \gamma'(0)$ og einingarþvervigurinn er því $\vec{n}(\zeta) = -i\vec{T}(\zeta) = -i\gamma'(0)$.

Ef u er samfellt deildanlegt fall í grennd um ζ, þá er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) &= \operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\vec{n}(\zeta) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\zeta) - i\frac{\partial u}{\partial \eta}(\zeta)\right)(-i)\gamma'(0)\right) \\
&= 2\operatorname{Im}\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}(\zeta)\gamma'(0)\right).
\end{aligned}$$

Nú er $F(\gamma(s))$ stikun á jaðrinum ∂Y umhverfis punktinn $F(\zeta)$ og snertill er $\big(F(\gamma)\big)'(0) = F'(\zeta)\gamma'(0)$. Einingarsnertill er síðan $F'(\zeta)\gamma'(0)/|F'(\zeta)|$. Nú skrifum við $u = v(F)$, þar sem v er samfellt deildanlegt í grennd um $F(\zeta)$. Þá sjáum við að

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) &= 2\operatorname{Im}\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}(F(\zeta))F'(\zeta)\gamma'(0)\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial n}(F(\zeta))|F'(\zeta)|.
\end{aligned}$$

Nú beitum við þessari formúlu á fallið $z \mapsto G_X(z,\zeta) = G_Y(F(z),F(\zeta))$ og fáum samband milli Poisson-kjarnanna á X og Y,

$$P_X(z,\zeta) = P_Y(F(z),F(\zeta))|F'(\zeta)|, \qquad z \in X,\ \zeta \in \partial X. \tag{17.8.3}$$

17.9 Hnikareikningur og jaðargildisverkefni

Oft eru jaðargildisverkefni jafngild ákveðnum útgildisverkefnum, sem snúast um að hámarka eða lágmarka ákveðin orkuheildi. Gott dæmi er Dirichlet-verkefnið fyir Poisson-jöfnuna,

$$-\Delta u = f \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \qquad u = g \quad \text{á} \quad \partial X. \tag{17.9.1}$$

Það tengist orkuheildinu

$$\mathcal{E}[w] = \tfrac{1}{2}\int_X |\nabla w|^2\,dx - \int_X fw\,dx, \tag{17.9.2}$$

þar sem við gerum ráð fyrir að X sé takmarkað svæði í $\mathbb{R}^n$ með sléttan jaðar og f og g eru gefin samfelld föll á X og ∂X. Við hugsum okkur að vörpunin $w \mapsto \mathcal{E}[w]$ sé skilgreind á V_g, mengi allra falla $w \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$ sem uppfylla jaðarskilyrðið $u = g$ á ∂X. Fall $v \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$, sem uppfyllir óhliðruðu jaðarskilyrðin, nefnist *leyfileg hnikun á föllum* í V_g. Athugið að fyrir slík föll er $w + sv \in V_g$ fyrir öll $w \in V_g$ og öll $s \in \mathbb{R}$ og við fáum að orkuheildið er

$$\mathcal{E}[w+sv] = \mathcal{E}[w] + s\int_X \big(\nabla w\cdot\nabla v - fv\big)\,dx + \tfrac{1}{2}s^2\int_X |\nabla v|^2\,dx.$$

Ef við beitum fyrstu formúlu Greens og notfærum okkur að $v = 0$, á ∂X, þá fáum við

$$\mathcal{E}[w+sv] = \mathcal{E}[w] - s\int_X \big(\Delta w + f\big)v\,dx + \tfrac{1}{2}s^2\int_X |\nabla v|^2\,dx. \tag{17.9.3}$$

Af þessu sjáum við að

$$\frac{d}{ds}\mathcal{E}[w+sv]\bigg|_{s=0} = -\int_X \big(\Delta w + f\big)v\,dx \tag{17.9.4}$$

og

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}[w+sv]\bigg|_{s=0} = \int_X |\nabla v|^2\,dx. \tag{17.9.5}$$

Setning 17.9.1 (*Lögmál Dirichlets*). *Fallið $u \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$ er lausn á Dirichlet-verkefninu (17.9.1) þá og því aðeins að $E[w] \geq E[u]$ fyrir öll $w \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$ sem uppfylla $w = g$ á ∂X.* □

Sönnun: Ef u er lausn á (17.9.1) og $w \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$ uppfyllir $w = g$ á ∂X, þá er $v = w - u$ leyfileg hnikun á föllum í V_g. Þar með gefur (17.9.3) að

$$\mathcal{E}[w] = \mathcal{E}[u+v] = \mathcal{E}[u] + \tfrac{1}{2}\int_X |\nabla v|^2\,dx \geq \mathcal{E}[u].$$

Öfugt, ef u er fall í V_g sem lágmarkar orkuheildið og v er leyfileg hnikun á föllum í V_g, þá er afleiðan af fallinu $s \mapsto \mathcal{E}[u+sv]$ í punktinum $s = 0$ jöfn 0. Þar með gefur (17.9.4) okkur að

$$\int_X \big(\Delta w + f\big)v\,dx = 0.$$

Fyrst v er ótiltekin leyfileg hnikun á föllum í V_g, þá gefur þetta að $-\Delta u = f$ á X. Við höfum því sýnt að u er lausn á (17.9.1). ■

Dirichlet-lögmálið og aðrar hliðstæðar lágmörkunarsetningar fyrir önnur jaðargildisverkefni, eru ákaflega mikilvægar í tölulegri greiningu, þegar verið er að finna nálgunarlausnir á jaðargildisverkefnum. Aðferðin er kennd við Rayleigh og Ritz. Hún snýst um að velja fyrst fall v_0 á $\overline{X}$, sem uppfyllir hliðraða jaðarskilyrðið $v_0 = g$ á ∂X eða er nálgun á þessu skilyrði. Síðan eru valin föll $v_1, \dots, v_N$ á $\overline{X}$ sem uppfylla óhliðruð jaðarskilyrði. Þvínæst er vörpunin

$$\mathbb{R}^N \ni c = (c_1, \dots, c_N) \mapsto \mathcal{E}[v_0 + c_1 v_1 + \cdots + c_N v_N]$$

lágmörkuð. Út frá skilyrðinu

$$\frac{\partial}{\partial c_j}\mathcal{E}[v_0 + c_1 v_1 + \cdots + c_N v_N] = 0, \qquad j = 1, \dots, N,$$

sést með beinum reikningi að lágmarkið er tekið í falli $v = v_0 + c_1 v_1 + \cdots + c_N v_N$, þar sem c uppfyllir línulegt jöfnuhneppi $Ac = b$. Stuðlafylkið $A = \big(a_{jk}\big)$ og hægri hliðin $b = (b_1, \dots, b_N)$ eru gefin með

$$a_{jk} = \int_X \nabla v_j \cdot \nabla v_k \, dx, \qquad b_j = \int_X f v_j \, dx - \int_X \nabla v_0 \cdot \nabla v_j \, dx.$$

Grunnföllin $v_0, v_1, \dots, v_N$ er hægt að velja á marga mismunandi vegu og með skynsamlegu vali á þeim er hægt að sýna fram á að skekkjan $|u - v|$ verði lítil á öllu svæðinu X.

17.10 Æfingardæmi

1. Sýnið að í pólhnitum séu virkjarnir ∂_z og $\partial_{\bar{z}}$ gefnir með formúlunum

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{e^{-i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

Hér er átt við að ef $v(r,\theta) = u(re^{i\theta}) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, þá er

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = \frac{e^{-i\theta}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) - \frac{i}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{i}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\right).$$

2. Notið formúlurnar í síðasta dæmi til þess að leiða út formúluna fyrir Laplace-virkjann í pólhnitum.

3. Sýnið að $\Delta = 4\partial^2/\partial z \partial \bar{z} = 4\partial^2/\partial \bar{z}\partial z$.

4. Sýnið að $\partial_z \overline{f} = \overline{\partial_{\bar{z}} f}$ og $\partial_{\bar{z}} \overline{f} = \overline{\partial_z f}$.

5. Sannið keðjuregluna á forminu (17.2.5) og (17.2.6).

6. Sýnið að Poisson-kjarninn sé þýtt fall á efra hálfplaninu og staðfestið að taka megi afleiður af fallinu u í (17.4.3) með því að deilda undir heildið í hægri hliðinni.

7. Sýnið að $P_{\mathbb{H}_+}(\cdot, y) \to \delta_0$ í veikum skilningi og síðan að $P_{\mathbb{H}_+}(\cdot, y) * \varphi(x) \to \varphi(x)$, ef $y \to 0$, fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}$ og sérhvert samfellt takmarkað fall φ.

8. Notið niðurstöðurnar úr dæmi 1 og 2 til þess að sanna að (17.4.3) sé lausnarformúla fyrir verkefnið (17.4.1).

9. Notið speglunaraðferð og Green-fallið fyrir efra hálfplanið til þess að finna Green-fallið fyrir fjórðunginn $D = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$.

10. Sýnið að vörpunin $z \mapsto z + 1/z$ varpi $X = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ gagntækt á efra hálfplanið og ákvarðið síðan G_X.

11. Notið niðurstöðuna úr dæmi 2 til þess að finna G_X, þar sem
$X = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; |z| > 1, 0 < y < x\}$.

12. Notið speglun og formúluna fyrir Green-fallið á hring til þess að finna Green-fall á hálfhring $X = \{z; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ og fjórðung úr hring $Y = \{z; |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

13. Notið formúluna (17.8.3) til þess að reikna út Poisson-kjarnann fyrir svæðið sem afmarkast af hjartaferlinum.

14. Sýnið að Poisson-kjarninn fyrir kúluna D_a í $\mathbb{R}^3$ er

$$P_{D_a}(x, \xi) = \frac{a^2 - |x|^2}{4\pi|x - \xi|^3}.$$

15. Sýnið að Poisson-kjarninn fyrir hálfrúmið $\mathbb{H}_+$ í $\mathbb{R}^3$ sé

$$P_{\mathbb{H}_+}(x, \xi) = \frac{x_3}{2\pi\big((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2\big)^{3/2}}.$$

16. Látum X vera takmarkað svæði í $\mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{X})$ og gerum ráð fyrir að

$$\int_X Fv\, dx = 0, \qquad v \in C(\overline{X}), \quad v = 0 \ \text{ á } \ \partial X.$$

Sýnið að F sé núllfallið. Gerum ráð fyrir að jaðarinn ∂X á X sé sléttur og að

$$\int_{\partial X} Fv\, dS = 0, \qquad v \in C(\overline{X}).$$

Sýnið að $F = 0$ á ∂X.

17. Látum X vera takmarkað svæði í $\mathbb{R}^n$ með sléttan jaðar og gerum ráð fyrir að Neumann-verkefnið: $\Delta u = f$ á X og $\partial u/\partial n = g$ á ∂X, hafi lausn. Sýnið að

$$\int\limits_X f\, dx = \int\limits_{\partial X} g\, dS.$$

Skilgreinum orkuheildið fyrir Neumann-verkefnið með

$$E[w] = \tfrac{1}{2}\int_X |\nabla w|^2\, dx - \int_{\partial X} gw\, dS,$$

þar sem $w \in C^2(X) \cap C(\overline{X})$. Sýnið að orkuheildið taki lággildi í lausninni á Neumann-verkefninu.

18. Látum X vera takmarkað svæði í $\mathbb{R}^n$ og gefum okkur að til sé lausn á Robin-verkefninu

$$\Delta u = f \quad \text{á} \quad X \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h \quad \text{á} \quad \partial X,$$

þar sem f er samfellt fall á X, α og h eru samfelld föll á jaðrinum ∂X og $\alpha \geq 0$ er ekki núllfallið. Sýnið að lausnin er ótvírætt ákvörðuð. Setjið fram orkuheildi sem hefur lausnina sem lággildi.

Kafli 18

BYLGJUJAFNAN

18.1 Inngangur

Við höfum séð í ýmsum sýnidæmum að bylgjujafnan er ákaflega mikilvæg í eðlisfræðinni. Í einni rúmvídd geta lausnir hennar lýst sveiflum strengs og langsveiflum í bitum, í tveimur rúmvíddum geta lausnirnar lýst sveiflum himnu og í þremur víddum geta lausnir hennar verið rafsegulbylgjur, hljóðbylgjur í lofti og þrýstibylgjur í vökvum. Við höfum fram til þessa mest fengist við að reikna út lausnir á bylgjujöfnunni, sem eru skilgreindar á takmörkuðum svæðum í rúminu, og beittum Fourier-röðum og eiginfallaröðum til þess. Nú ætlum við að fjalla um formúlur sem gilda um lausnir á öllu rúminu.

18.2 Einvíða bylgjujafnan á öllu rúminu

Við tökum nú fyrir einvíðu bylgjujöfnuna,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{18.2.1}$$

og byrjum á því að finna almenna lausn á henni sem er skilgreind fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og öll $t \in \mathbb{R}$. Aðferðin byggir á þeirri einföldu staðreynd að hægt er að þátta hlutafleiðuvirkjann í samskeytingu tveggja línulegra fyrsta stigs virkja

$$\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x). \tag{18.2.2}$$

Við sjáum nú að sérhvert fall af gerðinni

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{18.2.3}$$

þar sem $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ er lausn á bylgjujöfnunni (18.2.1), því $(\partial_t - c\partial_x)f(x+ct) = 0$ og $(\partial_t + c\partial_x)g(x-ct) = 0$. Til þess að sýna fram á að sérhver lausn sé af gerðinni (18.2.3), þá skiptum við yfir í svokölluð *kennihnit*, en það felst í því að innleiða hnit þannig að hnitaásarnir verði kennilínur fyrsta stigs virkjanna í þáttuninni (18.2.2). Við skilgreinum

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct, \tag{18.2.4}$$

leysum síðan x og t út úr þessum jöfnum

$$x = (\xi + \eta)/2, \qquad t = (\xi - \eta)/2c \tag{18.2.5}$$

og skilgreinum fallið $v(\xi, \eta) = u((\xi + \eta)/2, (\xi - \eta)/2c) = u(x, t)$. Keðjureglan gefur

$$\begin{aligned}
\partial_\xi v(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\partial_x u(x, t) + \frac{1}{2c}\partial_t u(x, t) \\
&= \frac{1}{2c}\big(\partial_t u(x, t) + c\partial_x u(x, t)\big), \\
\partial_\eta v(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\partial_x u(x, t) - \frac{1}{2c}\partial_t u(x, t) \\
&= -\frac{1}{2c}\big(\partial_t u(x, t) - c\partial_x u(x, t)\big).
\end{aligned}$$

Þessi útreikningur segir okkur að $\partial_t + c\partial_x = 2c\partial_\xi$ og $\partial_t - c\partial_x = -2c\partial_\eta$. Þar með er

$$\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)u(x, t) = -4c^2\partial_\xi\partial_\eta v(\xi, \eta). \tag{18.2.6}$$

Nú sjáum við að u er lausn á bylgjujöfnunni þá og því aðeins að $\partial_\xi\partial_\eta v = 0$. Þetta segir okkur að $\partial_\eta v$ sé óháð ξ, $\partial_\eta v(\xi, \eta) = h(\eta)$. Við heildum nú þessa jöfnu,

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + \int_0^\eta h(\tau)\, d\tau = f(\xi) + g(\eta).$$

Hér er heildunarfastinn $f(\xi)$ háður ξ og $g(\eta)$ er stofnfall af h. Með því að skipta aftur yfir í (x, t)-hnitin, þá fæst niðurstaðan:

Setning 18.2.1 *Sérhver lausn $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ á bylgjujöfnunni $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ er af gerðinni $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, þar sem $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Ef $u(x, t) = f_1(x + ct) + g_1(x - ct)$ er önnur slík framsetning á lausninni, þá er til fasti A þannig að $f_1(x) = f(x) + A$ og $g_1(x) = g(x) - A$.* □

Sönnun: Við eigum aðeins eftir að sanna síðustu staðhæfinguna. Athugum að $\partial_x u(x, 0) = f'(x) + g'(x) = f_1'(x) + g_1'(x)$ og $\partial_t u(x, 0)/c = f'(x) - g'(x) = f_1'(x) - g_1'(x)$. Út úr þessu lesum við að $f_1(x) = f(x) + A$ og $g_1(x) = g(x) + B$ þar sem A og B eru heildunarfastar. Að lokum, þá gefur jafnan $u(x, 0) = f_1(x) + g_1(x) = f(x) + g(x) + A + B = f(x) + g(x)$ okkur að $A + B = 0$. ■

Lausnin u í 18.2.1 samanstendur af tveimur bylgjum, sem hreyfast eftir x-ásnum sem föll af tíma. Graf fallsins $x \mapsto f(x + ct)$ er hliðrum á grafi fallsins f um $-ct$ og sú færsla með tíma er lýsing á bylgju, sem berst til vinstri á ásnum með hraðanum $-c$. Graf fallsins $x \mapsto g(x - ct)$ er hliðrun á grafi fallsins g um ct og því lítum við á það sem bylgju, sem berst til hægri á ásnum með hraðanum c.

18.3 Bylgjujafnan með upphafsskilyrðum

Nú skulum við snúa okkur að upphafsgildisverkefninu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{18.3.1}$$

Hér á að túlka upphafsgildin þannig að

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{t\to 0+} \partial_t u(x,t) = \psi(x).$$

Sérhverja lausn u á bylgjujöfnunni má rita sem $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ og því segja upphafskilyrðin að

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \qquad \partial_t u(x,0) = cf'(x) - cg'(x) = \psi(x).$$

Þessar jöfnur gefa síðan

$$f'(x) + g'(x) = \varphi'(x), \qquad f'(x) - g'(x) = \psi(x)/c.$$

Við leysum þær og fáum

$$f'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2c}\psi(x), \qquad g'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2c}\psi(x).$$

Að lokum fáum við með heildun

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(y)\,dy + A, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(y)\,dy + B, \end{aligned}$$

þar sem A og B eru heildunarfastar. Skilyrðið $u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) + A + B$ segir okkur að $A + B = 0$ og þar með er niðurstaðan fengin:

Setning 18.3.1 *Upphafsgildisverkefnið (18.3.1) hefur ótvírætt ákvarðaða lausn*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\,d\xi. \tag{18.3.2}$$

□

Athugum að fyrri liðurinn í (18.3.2) er meðaltalið af gildum fallsins φ í punktunum $x + ct$ og $x - ct$ og síðari liðurinn er margfeldið af t og meðaltalinu af gildum ψ á bilinu $[x - ct, x + ct]$. Heildið í (18.3.2) er unnt að rita sem földun

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} E_t(x-y)\psi(y)\,dy = \big(E_t * \psi\big)(x),$$

þar sem fallið E er skilgreint með

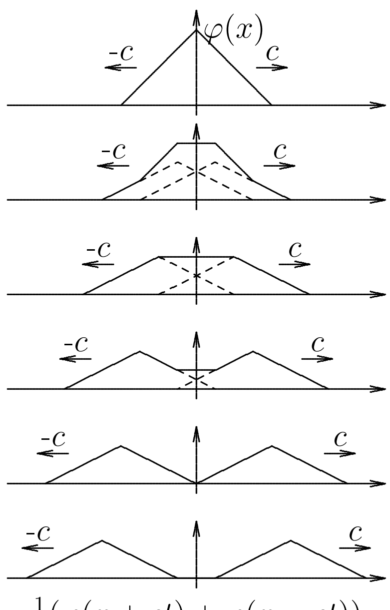
$$E_t(x) = E(x,t) = \begin{cases} 1/2c, & |x| \le ct, \\ 0, & |x| > ct. \end{cases} \tag{18.3.3}$$

Í útreikningum okkar þurfum við ýmist að líta á E sem fall af tveimur breytistærðum (x,t) eða sem fall af einni breytistærð x fyrir fast t. Í fyrra tilfellinu skrifum við $E(x,t)$, en í því síðara skrifum við $E_t(x)$. Við sjáum einnig að fyrri liðurinn í hægri hlið (18.3.2) er

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\big) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi(y)\,dy\right) = \frac{\partial}{\partial t}E_t * \varphi(x).$$

Þar með er hægt að umskrifa (18.3.2) sem

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(E_t * \varphi\big)(x) + E_t * \psi(x). \tag{18.3.4}$$



Mynd 15.1. Lausn bylgjujöfnunnar með $\psi = 0$.

Nú er tilvalið að líta aftur á upphafsgildisverkefnið (18.3.1) og leiða (18.3.2) út með því að beita Fourier-ummyndun. Athugum fyrst að

$$\begin{aligned}\widehat{E}_t(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}E_t(x)\,dx = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} e^{-ix\xi}\,dx \\ &= \frac{1}{2c}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-ct}^{ct} = \frac{\sin(ct\xi)}{c\xi}.\end{aligned}$$

Nú gerum við ráð fyrir því að bæði föllin φ og ψ séu heildanleg og að lausnin u sé heildanlegt fall af x fyrir fast t. Við látum $\widehat{u}(\xi,t)$ tákna Fourier-myndina af u með tilliti til x fyrir fast t. Við gerum einnig ráð fyrir að flytja megi afleiður af u með tilliti til t fram fyrir Fourier-heildið,

$$\mathcal{F}\{\partial_t^j u\}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\partial_t^j u(x,t)\,dx = \partial_t^j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}u(x,t)\,dx = \partial_t^j \widehat{u}(\xi,t).$$

Reikniregla (ix) í setningu 6.2.3 gefur okkur

$$\mathcal{F}\{\partial_x^2 u\}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\partial_x^2 u(x,t)\,dx = (i\xi)^2\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t).$$

Ef vil tökum nú Fourier-mynd af öllum liðunum í (18.3.1), þá fáum við að $\widehat{u}(\xi,t)$ verður að uppfylla

$$\begin{cases} \partial_t^2\widehat{u}(\xi,t) + c^2\xi^2\widehat{u}(\xi,t) = 0, & \xi\in\mathbb{R},\ t>0,\\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \partial_t\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\psi}(\xi), & \xi\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{18.3.5}$$

Þetta er annars stigs venjuleg afleiðujafna í t, fyrir fast ξ með upphafsskilyrðum. Afleiðuvirkinn er $D_t^2 + c^2\xi^2$ og því er lausnin

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi,t) &= \cos(ct\xi)\widehat{\varphi}(\xi) + \frac{\sin(ct\xi)}{c\xi}\widehat{\psi}(\xi)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\widehat{E}_t(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) + \widehat{E}_t(\xi)\widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Nú beitum við andhverfuformúlu Fouriers og földunarreglunni (xi) í setningu 6.4.1, og fáum formúluna (18.3.4) aftur

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{u}(\xi,t)\,d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{E}_t(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{E}_t(\xi)\widehat{\psi}(\xi)\,d\xi\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{E}_t(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\bigg) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{E}_t(\xi)\widehat{\psi}(\xi)\,d\xi\\ &= \partial_t\big(E_t*\varphi\big)(x) + E_t*\psi(x). \end{aligned}$$

18.4 Hliðraða bylgjujafnan

Nú skulum við ákvarða lausn á hliðruðu bylgjujöfnunni með óhliðruðum upphafsskilyrðum,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{18.4.1}$$

og beita til þess Fourier-ummyndun. Með nákvæmlega sömu rökum og leiddu til (18.3.5) fáum við nú að

$$
(18.4.2)\qquad \begin{cases} \partial_t^2\widehat{u}(\xi,t)+c^2\xi^2\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(\xi,t), & \xi\in\mathbb{R},\ t>0,\\ \widehat{u}(\xi,0)=\partial_t\widehat{u}(\xi,0)=0, & \xi\in\mathbb{R}. \end{cases}
$$

Green-fall afleiðuvirkjans $D_t^2+c^2\xi^2$ er $G_\xi(t,\tau)=g(\xi,t-\tau)$, þar sem $g(\xi,t)=\sin(ct\xi)/c\xi=\widehat{E}_t(\xi)=\widehat{E}(\xi,t)$. Lausnin á (18.4.2) er því

$$
\widehat{u}(\xi,t)=\int_0^t g(\xi,t-\tau)\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\tau=\int_0^t \widehat{E}(\xi,t-\tau)\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\tau
$$

og andhverfuformúla Fouriers og földunarreglan segja okkur að

$$
\begin{aligned}
(18.4.3)\qquad u(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi}\left(\int_0^t \widehat{E}(\xi,t-\tau)\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\tau\right)d\xi\\
&=\int_0^t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi}\widehat{E}(\xi,t-\tau)\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\xi\right)d\tau\\
&=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}E(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dy\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Földun tveggja falla F og G á $\mathbb{R}^n$ er skilgreind með heildinu

$$
F*G(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}F(\xi-\eta)G(\eta)\,d\eta,\qquad \xi\in\mathbb{R}^n.
$$

Nú er $E(x,t)=0$ ef $t<0$ og ef við skilgreinum $f(x,t)=0$ fyrir $t<0$, þá fáum við formúluna

$$
(18.4.4)\qquad u(x,t)=E*f(x,t),\qquad x\in\mathbb{R},\ t>0.
$$

Lítum nú aftur á formúluna (18.4.3) og stingum inn skilgreiningunni á E,

$$
\begin{aligned}
(18.4.5)\qquad u(x,t)&=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}E(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dy\,d\tau\\
&=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(y,\tau)\,dyd\tau\\
&=\frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)}f(y,\tau)\,dyd\tau,
\end{aligned}
$$

þar sem $T(x,t)$ táknar þríhyrninginn í (y,τ)-planinu með hornpunktana (x,t), $(x-ct,0)$ og $(x+ct,0)$.

18.5 Formúlur d'Alemberts, Poissons og Kirchhoffs

Niðurstaðan úr útreikningum okkar í síðustu tveimur greinum er mun víðtækari en forsendur okkar sögðu til um. Við gerðum ráð fyrir því að föllin u, f, φ og ψ væru heildanleg með tilliti til x á öllum ásnum $\mathbb{R}$ og gátum leitt út formúlu fyrir u. Nú kemur í ljós að formúlan gildir fyrir miklu stærri flokk af föllum:

Setning 18.5.1 (*d'Alembert-formúlan*). *Látum f vera samfellt deildanlegt fall á $\{(x,t); t>0\}$, samfellt á $\{(x,t); t \geq 0\}$ og $f(x,t) = 0$ ef $t < 0$, látum φ vera tvisvar samfellt deildanlegt fall á $\mathbb{R}$ og ψ vera samfellt deildanlegt á $\mathbb{R}$. Þá hefur upphafsgildisverkefnið*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{18.5.1}$$

ótvírætt ákvarðaða lausn, sem gefin er með formúlunni

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2c} \iint\limits_{T(x,t)} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\big(E_t * \varphi\big)(x) + E_t * \psi(x) + E * f(x,t), \end{aligned} \tag{18.5.2}$$

þar sem fallið E er skilgreint í (18.3.3) og $T(x,t)$ táknar þríhyrninginn með hornpunktana (x,t), $(x-ct,0)$ og $(x+ct,0)$. □

Sönnun: Við byrjum á ótvíræðninni. Látum u_1 og u_2 vera tvær lausnir á (18.5.1). Þá er mismunurinn u lausn á óhliðruðu jöfnunni með $\varphi = \psi = 0$. Samkvæmt setningu 15.3.1 er u núllfallið og þar með er $u_1 = u_2$. Þetta segir okkur að lausnin á (18.5.1) er ótvírætt ákvörðuð ef við getum sýnt fram á að fallið sem gefið er með (18.5.2) er lausn.

Setning 15.3.1 segir okkur að summan af tveimur fyrstu liðunum í lausnarformúlunni leysi óhliðruðu jöfnuna með hliðruðum upphafsskilyrðum. Við eigum aðeins eftir að staðfesta að tvöfalda heildið skilgreini lausn á hliðruðu jöfnunni með óhliðruðum upphafsskilyrðum. Þessi liður er gefinn með

$$v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\, dy \right) d\tau$$

og út frá þessari framsetningu er auðvelt að reikna út hlutafleiðurnar,

$$\begin{aligned} \partial_t v(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-t)}^{x+c(t-t)} f(y,t)\, dy \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(c \cdot f(x+c(t-\tau),\tau) - (-c)\cdot f(x-c(t-\tau),\tau) \Big)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \Big(f(x+c(t-\tau),\tau) + f(x-c(t-\tau),\tau) \Big)\, d\tau, \end{aligned}$$

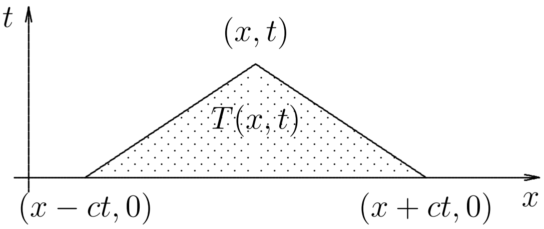
$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 v(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(f(x+c(t-t),t)+f(x-c(t-t),t)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(c\partial_x f(x+c(t-\tau),\tau)+(-c)\partial_x f(x-c(t-\tau),\tau)\Big)\,d\tau \\
&= f(x,t)+\frac{c}{2}\int_0^t \Big(\partial_x f(x+c(t-\tau),\tau)-\partial_x f(x-c(t-\tau),\tau)\Big)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\partial_x v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(f(x+c(t-\tau),\tau)-f(x-c(t-\tau),\tau)\Big)d\tau,
$$

$$
\partial_x^2 v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(\partial_x f(x+c(t-\tau),\tau)-\partial_x f(x-c(t-\tau),\tau)\Big)d\tau.
$$

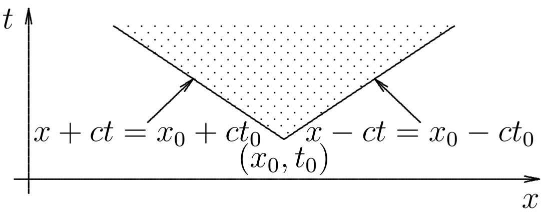
Af þessum formúlum sést greinilega að v uppfyllir hliðruðu bylgjujöfnuna með óhliðruðum upphafsskilyrðum. ■

Þríhyrningurinn $T(x,t)$ nefnist *ákvörðunarsvæði* punktins (x,t). Þessi nafngift er til komin vegna þess að gildi lausnarinnar ákvarðast af gildum φ í tveimur hornpunktum þríhyrningsins, $(x-ct,0)$ og $(x+ct,0)$, af gildum ψ á hliðinni á milli þessara punkta og gildum hægri hliðar bylgjujöfnunnar f á þríhyrningnum.



Mynd 15.2. Ákvörðunarsvæði punktsins (x,t).

Ef (x_0,t_0) er punktur í (x,t)-planinu, þá nefnist svæðið milli línanna $x+ct=x_0+ct_0$ og $x-ct=x_0-ct_0$ þar sem $t\geq t_0$, *áhrifasvæði* punktsins (x_0,t_0). Gildi lausnarinnar u í sérhverjum punkti (x,t) í áhrifasvæði punktsins (x_0,t_0) verður þannig fyrir áhrifum af gildi fallsins f í punktinum (x_0,t_0). Ef $t_0=0$ og $x-ct\leq x_0\leq x+ct=x_0$, þá verður $u(x,t)$ fyrir áhrifum af gildi ψ í x_0. Ef $t_0=0$ og $x+ct=x_0$ eða $x-ct=x_0$, þá verður gildi lausnarinnar einnig fyrir áhrifum af gildum φ í x_0.



Mynd 15.3. Áhrifasvæði punktsins (x_0,t_0).

Formúla d'Alemberts á sér hliðstæðu í tveimur og þremur rúmvíddum. Þá lítum við á verkefnið

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\Delta u = f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \partial_t u(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{18.5.3}$$

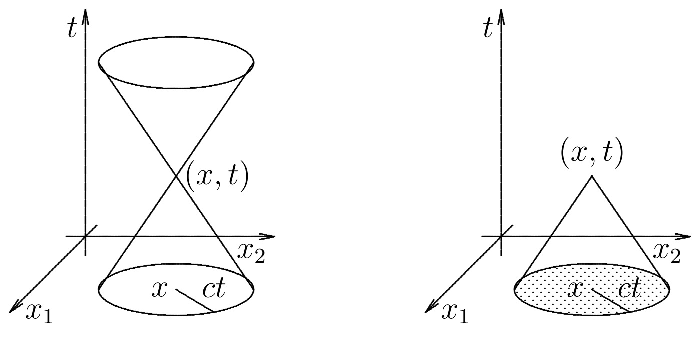
þar sem við táknum hnit punktanna með $x=(x_1,\dots,x_n)$ og látum Δ tákna Laplace-virkjann á $\mathbb{R}^n$. Ef víddin n er 2, þá hefur verkefnið ótvírætt ákvarðaða lausn, sem gefin er með *Poisson-formúlunni*,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg(\frac{1}{2\pi c}\iint_{S(x,ct)} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{c^2t^2-|x-\xi|^2}}\,dA(\xi)\bigg)\\ &\quad+\frac{1}{2\pi c}\iint_{S(x,ct)} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{c^2t^2-|x-\xi|^2}}\,dA(\xi)\\ &\quad+\frac{1}{2\pi c}\int_0^t\iint_{S(x,c(t-\tau))} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}\,dA(\xi)d\tau, \end{aligned} \tag{18.5.4}$$

þar sem $S(x,r)$ táknar opnu skífuna með miðju í x og geislann r, $|x|$ táknar lengd x og dA táknar flatarmálsfrymið. Ef víddin n er 3, þá er lausnin hins vegar gefin með *Kirchhoff-formúlunni*,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg(\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{\partial B(x,ct)} \varphi(\xi)\,dS(\xi)\bigg)\\ &\quad+\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{\partial B(x,ct)} \psi(\xi)dS(\xi)\\ &\quad+\frac{1}{4\pi c^2}\iiint_{B(x,ct)} \frac{f(\xi,t-|x-\xi|/c)}{|x-\xi|}\,dV(\xi), \end{aligned} \tag{18.5.5}$$

þar sem $B(x,r)$ táknar kúlu með miðju í x og geislann r, $\partial B(x,r)$ táknar yfirborð hennar, dS táknar flatarmálsfrymið á yfirborðinu og dV táknar rúmmálsfrymið.



Mynd 15.4. Ljóskeila og ákvörðunarsvæði.

Ef $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, þá nefnast mengin

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \{(\xi,\tau); |x-\xi|\le c|t-\tau|\},\\ V(x,t)^+ &= \{(\xi,\tau)\in V(x,t); \tau\ge t\},\\ V(x,t)^- &= \{(\xi,\tau)\in V(x,t); \tau\le t\}, \end{aligned}$$

ljóskeila, *framtíðarljóskeila* og *fortíðarljóskeila* í punktinum (x, t) í tímarúminu. Á formúlum Poissons og Kirchhoffs sjáum við að það er mikill eðlismunur á bylgjuútbreiðslu í tveimur og þremur víddum. Í tveimur víddum ákvarðast lausnin $u(x, t)$ af gildum f í fortíðarljóskeilunni á tímabilinu $[0, t]$ og af gildum φ og ψ í skurðplani fortíðarljóskeilunnar í (x, t) við planið $t = 0$. (Athugið að við hugsum okkur að punktarnir $x \in \mathbb{R}^n$ liggi í tímarúminu við tímann $t = 0$.) Því er eðlilegt að skilgreina *ákvörðunarsvæði* punktsins (x, t) sem mengið $T(x, t) = \{(\xi, \tau) \in V^-(x, t); 0 \le \tau \le t\}$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}^2$ og $t > 0$. Í þremur rúmvíddum ákvarðast $u(x, t)$ af gildum f á yfirborði fortíðarljóskeilunnar á tímabilinu $[0, t]$ og af gildum φ og ψ í skurðplani yfirborðs fortíðarljóskeilunnar $\partial V^-(x, t)$ og plansins $t = 0$. Í þremur víddum er því eðlilegt að skilgreina ákvörðunarsvæði punktsins (x, t), sem mengið $T(x, t) = \{(\xi, \tau) \in \partial V^-(x, t); 0 \le \tau \le t\}$. *Áhrifasvæði punktsins* (x, t) er eðlilegt að skilgreina sem framtíðarljóskeiluna, ef rúmvíddin er 2, en yfirborð framtíðarljóskeilunnar ef rúmvíddin er 3. Sá eiginleiki bylgjuvirkjans í þremur víddum, að gildi lausnar á hliðruðu bylgjujöfnunni í punkti (x, t) skuli eingöngu ráðast af gildunum á yfirborði fortíðarljóskeilunnar, er nefnt *lögmál Huygens*.

Yfirborðsbylgjur á vatni uppfylla tvívíða jöfnu, sem er áþekk bylgjujöfnunni, en miklu flóknari í úrlausn. Fyrir litlar bylgjur er hægt að gefa sér að lausnir bylgjujöfnunnar séu góð nálgun á yfirborðsbylgjum. Ef steini er kastað í vatn í punktinum x_0 við tímann t_0, þá fer yfirborðsbylgja eftir vatninu og við getum gert ráð fyrir því að frávik efnispunkts $u(x, t)$ í x við tímann t sé gefið sem lausn á (18.5.3), þar sem $\varphi = 0$, $\psi = 0$ og f er alls staðar 0 nema í lítilli grennd um (x_0, t_0). Bylgjan kemur í punktinn x við tímann $t = |x - x_0|/c$. Poisson-formúlan segir nú að áhrif bylgjunnar muni vara áfram í punktinum x fyrir öll $t \ge t_0 + |x - x_0|/c$.

Lítum nú á ljósgjafa í punktinum $x_0 \in \mathbb{R}^3$ sem gefur frá sér merki sem varir örstutta stund við tímann t_0. Bylgjan u sem berst frá honum er lausn á (18.5.3) með $\varphi = 0$, $\psi = 0$ og f er alls staðar 0 nema í lítilli grennd um (x_0, t_0). Nú sjáum við á Kirchhoff-formúlunni að þegar t er orðið það stórt að yfirborð ljóskeilunnar í (x, t) sker ekki svæðið þar sem f er frábrugðið 0, þá eru engin áhrif af ljósmerkinu í punktinum x. Ljósið er horfið.

18.6 Kúlubylgjur

Lausn á bylgjujöfnunni í þremur rúmvíddum, sem er einungis háð (r, t), þar sem $r = |x|$ er lengd vigursins $x = (x_1, x_2, x_3)$, nefnist kúlubylgja. Með því að nota formúluna fyrir Laplace-virkjann í kúluhnitum í viðauka D, fáum við að $u(r, t)$ er lausn á jöfnunni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0. \tag{18.6.1}$$

Nú skilgreinum við fallið $v(r, t) = ru(r, t)$ og sjáum að

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right). \tag{18.6.2}$$

Þar með er u kúlubylgja þá og því aðeins að v sé lausn á bylgjujöfnunni í einni rúmvídd.

Nú skulum við líta á bylgjujöfnuna í þremur víddum með kúlusamhverfri hægri hlið og kúlusamhverfum upphafsgildum. Lausnin u uppfyllir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = f(r,t), & r > 0,\ t > 0, \\ u(r,0) = \varphi(r), \quad \partial_t u(r,0) = \psi(r), & r > 0. \end{cases} \tag{18.6.3}$$

Við gerum ráð fyrir því að f sé samfellt á $\{(r,t); r \geq 0, t \geq 0\}$ og að φ og ψ séu samfelld á $\{r; r \geq 0\}$. Hliðstætt verkefni fyrir fallið v er þá

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} = rf(r,t), & r > 0,\ t > 0, \\ v(r,0) = r\varphi(r), \quad \partial_t v(r,0) = r\psi(r), & r \geq 0, \\ v(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{18.6.4}$$

Við munum leysa þessi verkefni þegar við höfum fjallað um speglanir á bylgjum.

18.7 Speglanir á bylgjum

Formúla d'Alemberts lýsir lausnum einvíðu bylgjujöfnunnar á öllum raunásnum. Með því að beita svokallaðri *speglunaraðferð* getum við notað hana til þess að leysa bylgjujöfnuna með jaðarskilyrðum. Þetta er auðvelt að útskýra í:

Sýnidæmi 18.7.1 Lítum á verkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{18.7.1}$$

þar sem f er gefið fall á $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; x > 0, t > 0\}$ og φ og ψ eru föll á jákvæða ásnum. Við byrjum á því að framlengja skilgreiningarsvæði f, φ og ψ þannig að þau verði oddstæð föll af x,

$$\begin{cases} f_O(x,t) = f(x,t), \\ f_O(0,t) = 0, \\ f_O(x,t) = -f(-x,t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_O(x) = \varphi(x), \\ \varphi_O(0) = 0, \\ \varphi_O(x) = -\varphi(-x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_O(x) = \psi(x), & x > 0, \\ \psi_O(0) = 0, & x = 0, \\ \psi_O(x) = -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

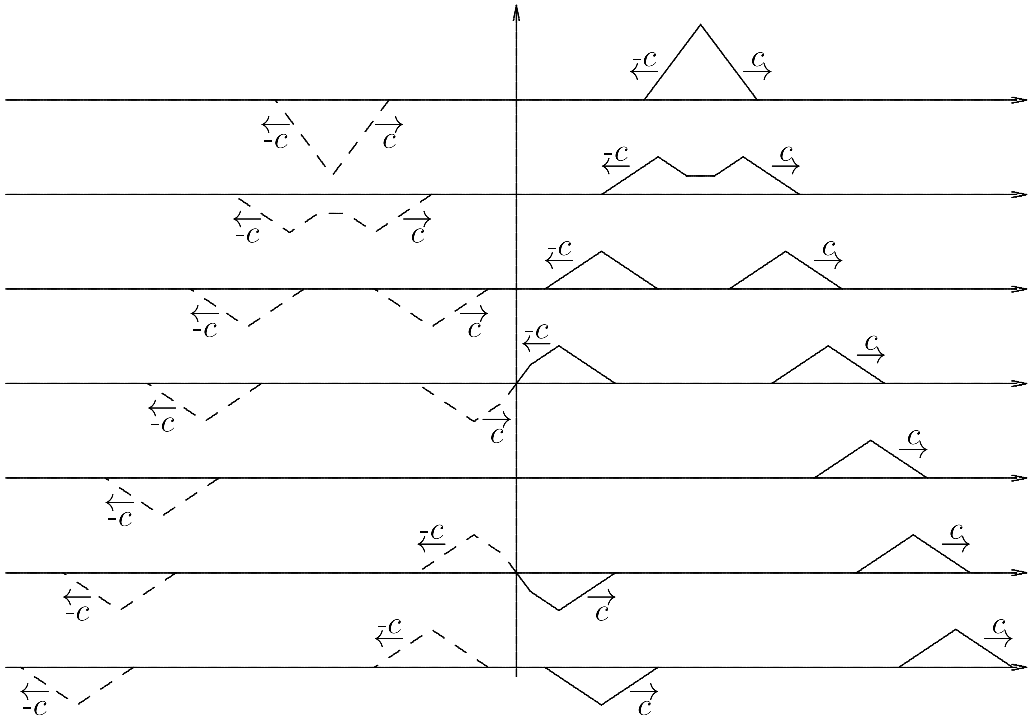
Síðan skrifum við d'Alembert-formúluna upp

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi_O(x+ct) + \varphi_O(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_O(y)\,dy + \frac{1}{2c}\iint\limits_{T(x,t)} f_O(y,\tau)\,dyd\tau.$$

Ef φ_O er tvisvar samfellt deildanlegt, ψ_O er samfellt deildanlegt og f_O er samfellt deildanlegt, þá er bylgjujafnan uppfyllt með réttum upphafsskilyrðum. Í kafla 18 munum við sjá hvernig hægt er að gefa bylgjujöfnunni merkingu, ef föllin eru ekki tvisvar samfellt deildanleg. Nú kemur einnig í ljós að jaðarskilyrðið er uppfyllt, því

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi_O(ct) + \varphi_O(-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \psi_O(y)\, dy \\ + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{-c(t-\tau)}^{c(t-\tau)} f_O(y,\tau)\, dy\, d\tau,$$

öll föllin eru oddstæð og þar með eru allir liðirnir 0. Tilfellinu $\psi = 0$ og $f = 0$ eru auðvelt að lýsa sem speglun á bylgjutoppi, sem kemur inn í punktinn $x = 0$ á hraðanum $-c$, speglast þannig að hann kemur öfugur til baka og fer frá punktinum $x = 0$ með hraðanum c. Af þessum eiginleika er nafnið á lausnaraðferðinni dregið.



Mynd 15.5. Speglun bylgju.

Ef $x - ct > 0$, þá nær ákvörðunarsvæði punktsins (x,t) ekki inn á hálfplanið $\{(x,t); x \leq 0\}$ og lausnarformúlan hefur sama form og áður,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\, dy + \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} f(y,\tau)\, dy d\tau.$$

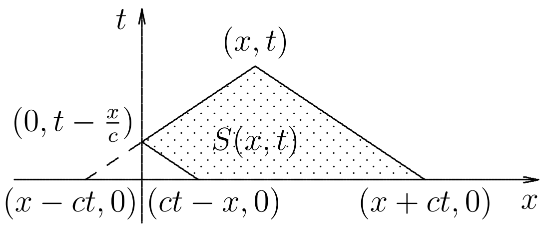
Ef hins vegar $x - ct < 0$, þá notfærum við okkur að

$$\int_{x-ct}^{ct-x} \psi_O(y)\, dy = 0, \qquad \int_{x-c(t-\tau)}^{c(t-\tau)-x} f_O(y,\tau)\, dy = 0,$$

og fáum formúluna

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\big) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2c}\iint_{S(x,t)} f(y,\tau)\,dyd\tau.$$

þar sem $S(x,t)$ táknar ferhyrninginn með hornpunktana (x,t), $(x+ct,0)$, $(ct-x,0)$ og $(0,t-x/c)$. Við getum því litið svo á að ákvörðunarsvæðið sé $S(x,t)$ í tilfellinu $x-ct<0$. $\square$



Mynd 15.6. Ákvörðunarsvæði punktsins (x,t), $x-ct<0$.

Sýnidæmi 18.7.2 Nú skulum við sjá hvernig hliðruð jaðarskilyrði eru meðhöndluð, með því að líta á verkefnið

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x>0,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \partial_t u(x,0)=0, & x>0,\\ u(0,t)=g(t), & t>0, \end{cases} \tag{18.7.2}$$

þar sem fallið g er skilgreint á jákvæða ásnum. Við byrjum á því að finna fall $w(x,t)$, sem uppfyllir hliðraða jaðarskilyrðið, og skrifum $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$. Hér er einfaldast að setja $w(x,t)=g(t)$. Þá verður v að vera lausn á verkefninu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -g''(t), & x>0,\ t>0,\\ v(x,0)=-g(0), \quad \partial_t v(x,0)=-g'(0), & x>0\\ v(0,t)=0, & t>0, \end{cases}$$

en þetta verkefni leystum við í sýnidæmi 18.7.1, með $f(x,t)=-g''(t)$, $\varphi(x)=-g(0)$ og $\psi(x)=-g'(0)$. Oddstæðar framlengingar á þessum föllum eru $f_O(x,t)=-g''(t)\mathrm{sign}(x)$, $\varphi_O(x)=-g(0)\mathrm{sign}(x)$, $\psi_O(x)=-g'(0)\mathrm{sign}(x)$. Ef við stingum þessum föllum inn í d'Alembert-formúluna, þá fáum við

$$\begin{aligned} u(x,t) = g(t) &- \frac{g(0)}{2}\big(\mathrm{sign}(x+ct)+\mathrm{sign}(x-ct)\big) - \frac{g'(0)}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\mathrm{sign}(y)\,dy\\ &- \frac{1}{2c}\int_0^t g''(\tau)\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\mathrm{sign}(y)\,dyd\tau. \end{aligned}$$

$\square$

Sýnidæmi 18.7.3 Nú skulum við breyta verkefninu 18.7.1 og setja inn flæðisskilyrði í stað fallsjaðarskilyrðis,

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x > 0,\ t > 0,\\
u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x > 0,\\
\partial_x u(0,t) = 0, & t > 0,
\end{cases}
\tag{18.7.3}
$$

Nú byrjum við á því að framlengja skilgreiningarsvæði f, φ og ψ þannig að þau verði jafnstæð föll af x,

$$
\begin{cases} f_J(x,t) = f(x,t), \\ f_J(x,t) = f(-x,t), \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \varphi_J(x) = \varphi(x), \\ \varphi_J(x) = \varphi(-x), \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \psi_J(x) = \psi(x), & x > 0, \\ \psi_J(x) = \psi(-x), & x < 0, \end{cases}
$$

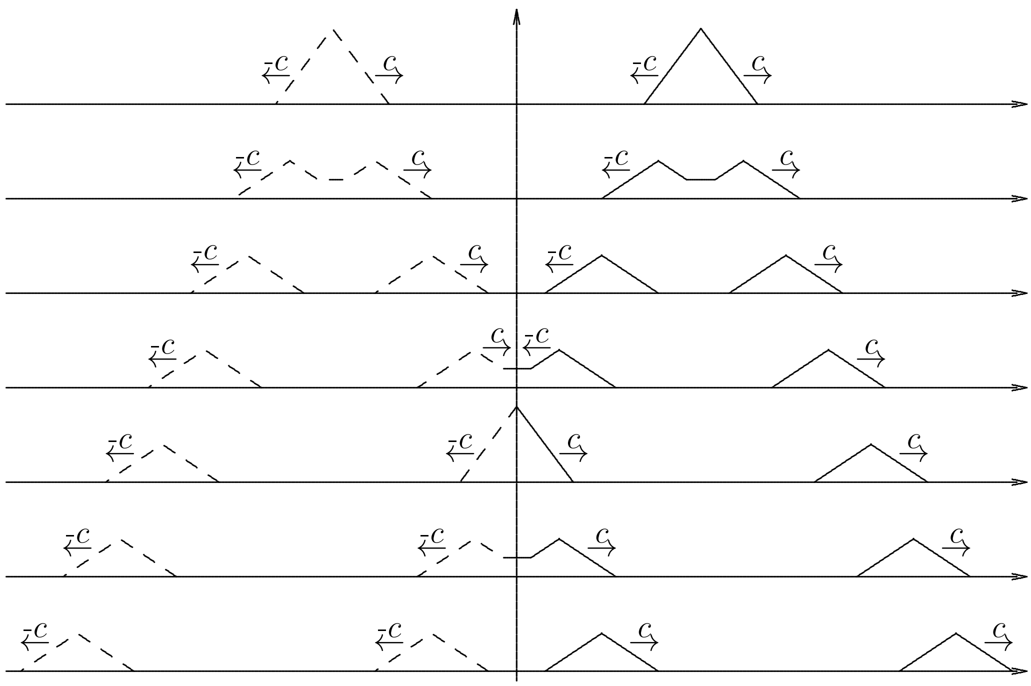
og $f_J(0,t) = \lim_{x\to 0+} f(x,t)$, $\varphi_J(0) = \lim_{x\to 0+} \varphi(x)$ og $\psi_J(0) = \lim_{x\to 0+} \psi(x)$. Síðan skrifum við d'Alembert-formúluna upp

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi_J(x+ct) + \varphi_J(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_J(y)\,dy + \frac{1}{2c}\iint\limits_{T(x,t)} f_J(y,\tau)\,dyd\tau.
$$

Nú kemur í ljós að jaðarskilyrðið er uppfyllt, því

$$
\begin{aligned}
\partial_x u(0,t) &= \frac{1}{2}\big(\varphi_J{}'(ct) + \varphi_J{}'(-ct)\big) + \frac{1}{2c}\big(\psi_J(ct) - \psi_J(-ct)\big)\\
&\quad + \frac{1}{2c}\int_0^t \big(f_J(c(t-\tau),\tau) - f_J(-c(t-\tau),\tau)\big)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Fallið $\varphi_J{}'$ er oddstætt, svo það er greinilegt að $\partial_x u(0,t) = 0$. Mynd okkar af speglun bylgjunnar í tilfellinu $\psi = 0$ og $f = 0$ er:



Mynd 15.7. Speglun bylgju.

□

Sýnidæmi 18.7.4 Við getum einnig leyst hliðstætt verkefni og í síðasta sýnidæmi með hliðruðum jaðarskilyrðum

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & x > 0, \\ \partial_x u(0,t) = g(t), & t > 0. \end{cases} \tag{18.7.4}
$$

Alveg eins og í sýnidæmi 18.7.2 þá byrjum við á því að finna fall w sem uppfyllir hliðraða jaðarskilyrðið. Í þessu tilfelli er heppilegt að velja $w(x,t) = xg(t)$. Við ritum síðan lausnina á forminu $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$. Þá verður v að vera lausn á verkefninu

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -xg''(t), & x > 0,\ t > 0, \\ v(x,0) = -xg(0), \quad \partial_t v(x,0) = -xg'(0), & x > 0, \\ \partial_x v(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{18.7.5}
$$

Jafnstæðar framlengingar á þessum föllum eru $f_J(x,t) = -|x|g''(t)$, $\varphi_J(x) = -|x|g(0)$ og $\psi_J(x) = -|x|g'(0)$. Því verður niðurstaðan,

$$
\begin{aligned} u(x,t) = xg(t) &- \frac{g(0)}{2}\big(|x+ct| + |x-ct|\big) - \frac{g'(0)}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |y|\, dy \\ &- \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} |y| g(\tau)\, dy d\tau. \end{aligned}
$$

□

Sýnidæmi 18.7.5 (*Sveiflandi strengur; framhald*). Í sýnidæmi 8.7.5 litum við á einvíðu bylgjujöfnuna og fundum formúlu fyrir sveiflur strengs sem festur er niður í báðum endapunktum með gefnum upphafsskilyrðum. Útslag strengsins er lausn verkefnisins

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{18.7.6}
$$

Lausnina fundum við með því að liða föllin φ og ψ í Fourier-raðir,

$$
\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\big(n\pi x/L\big), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\big(n\pi x/L\big), \tag{18.7.7}
$$

og ganga út frá þeirri lausnartilgátu að u væri af sams konar gerð,

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\big(n\pi x/L\big).
$$

Niðurstaðan var síðan að

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + \frac{\psi_n L}{n\pi c} \sin\big(n\pi ct/L\big) \right) \sin\big(n\pi x/L\big). \tag{18.7.8}$$

Verkefnið (18.7.6) er einnig hægt að leysa með speglunaraðferð. Það er einfaldlega gert þannig að skilgreiningarsvæði fallanna ϕ og ψ er framlengt yfir á allan raunásinn, þannig að út komi oddstæð $2L$-lotubundin föll φ_O og ψ_O. Síðan er d'Alembert formúlan skrifuð upp,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi_O(x+ct) + \varphi_O(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_O(y)\, dy, \tag{18.7.9}$$

og það er auðvelt að sannfæra sig um að þessi formúla gefi einnig 'lausn. Það er líka auðvelt að sýna fram á að (18.7.9) leiði beint af (18.7.8). Til þess athugum við fyrst að Fourier-raðirnar í (18.7.7) eru $2L$-lotubundin oddstæð föll á öllu $\mathbb{R}$ og því er

$$\varphi_O(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\big(n\pi x/L\big), \quad \psi_O(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\big(n\pi x/L\big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Samlagningarformúlurnar fyrir kósínus og sínus gefa okkur

$$\begin{aligned}
\cos\big(n\pi ct/L\big)\sin\big(n\pi x/L\big) &= \frac{1}{2}\big(\sin\big(n\pi(x+ct)/L\big) + \sin\big(n\pi(x-ct)/L\big)\big) \\
\frac{L}{n\pi c}\sin\big(n\pi ct/L\big)\sin\big(n\pi x/L\big) &= \frac{-L}{2n\pi c}\big(\cos\big(n\pi(x+ct)/L\big) - \cos\big(n\pi(x-ct)/L\big)\big) \\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin\big(n\pi y/L\big)\, dy.
\end{aligned}$$

Nú smeygjum við þessum formúlum inn í (18.7.8) og fáum

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{1}{2}\Big(\sin\big(n\pi(x+ct)/L\big) + \sin\big(n\pi(x-ct)/L\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin\big(n\pi y/L\big)\, dy \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\big(n\pi(x+ct)/L\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\big(n\pi(x-ct)/L\big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\big(n\pi y/L\big)\Big)\, dy \\
&= \frac{1}{2}\big(\varphi_O(x+ct) + \varphi_O(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_O(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Við höfum því fengið nýja framsetningu á d'Alembert formúlunni með Fourier-röðum. □

18.8 Úrlausn á bylgjujöfnum með Laplace-ummyndun

Við höfum nú séð hvernig hægt er að beita Fourier-ummyndun til þess að finna formúlur fyrir lausnir á bylgjujöfnunni sem skilgreindar eru á öllum rauntalnaásnum. Ef lausnin er gefin á hálfás, til dæmis jákvæða tímaásnum, þá er oft snjallt að beita Laplace-ummyndun til þess að ákvarða lausnarformúlu. Við lítum á tvö dæmi:

Sýnidæmi 18.8.1 (*Bylgjujafnan á hálflínu*). Við skulum ákvarða formúlu fyrir lausn bylgjujöfnunnar í einni rúmvídd á hálflínu með óhliðruðum upphafsskilyrðum og hliðruðu jaðarskilyrði,

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0,\ t > 0,\\
u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & x > 0,\\
u(0,t) = g(t), & t > 0,\\
\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, & t > 0.
\end{cases}
\tag{18.8.1}
$$

Við látum $U(x,s)$ og $G(s)$ tákna Laplace-myndir u og g með tilliti til t,

$$
U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt, \qquad G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt.
$$

Samkvæmt reiknireglu (7.3.3) er

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\partial_t^2 u\}(x,s) &= \int_0^\infty e^{-st} \partial_t^2 u(x,t)\,dt\\
&= s^2 U(x,s) - s u(x,0) - \partial_t u(x,0) = s^2 U(x,s).
\end{aligned}
$$

Við gerum ráð fyrir að hægt sé að taka afleiður með tilliti til x fram fyrir Laplace-heildið og fáum því

$$
\mathcal{L}\{\partial_x^2 u\}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} \partial_x^2 u(x,t)\,dt = \partial_x^2 \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt = \partial_x^2 U(x,s).
$$

Eftir Laplace-ummyndun verður því verkefnið (18.8.1) að

$$
\begin{cases}
s^2 U(x,s) - c^2 \partial_x^2 U(x,s) = 0,\\
U(0,s) = G(s),\\
\lim\limits_{x\to+\infty} U(x,s) = 0.
\end{cases}
$$

Hér höfum við venjulega afleiðujöfnu í x og lausn hennar er af gerðinni

$$
U(x,s) = A(s) e^{-(s/c)x} + B(s) e^{(s/c)x}.
$$

Jaðarskilyrðið að $U(x,s) \to 0$ ef $x \to +\infty$ segir okkur að $B(s) = 0$ fyrir öll $s > 0$. Skilyrðið $U(0,s) = G(s)$ segir okkur að $A(s) = G(s)$. Þar með er

$$
U(x,s) = G(s) e^{-(s/c)x} = e^{-(x/c)s} \mathcal{L}\{g\}(s).
$$

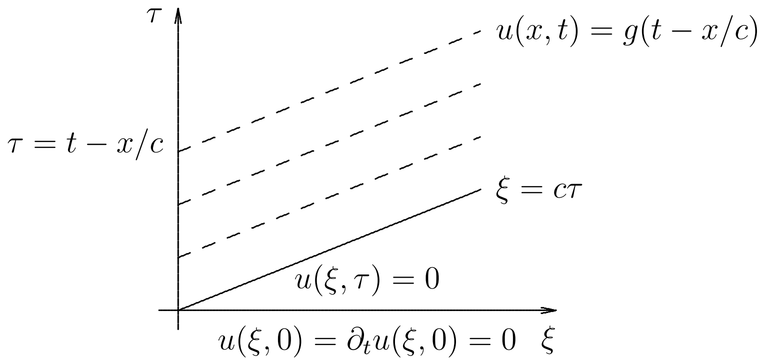
Nú gefur reikniregla (ii) í setningu 7.1.5 okkur að

$$U(x,s) = \mathcal{L}\{H(t-x/c)g(t-x/c)\}(s),$$

þar sem H táknar Heaviside-fallið. Lausnin er þar með fundin

$$u(x,t) = H(t-x/c)g(t-x/c), \qquad t>0,\ x>0.$$

Það er auðvelt að túlka þessa formúlu. Við lítum á punktinn (x,t) í (ξ,τ)-plani. Önnur kennilína bylgjuvirkjans í gegnum hann er gefin með jöfnunni $\xi - c\tau = x - ct$. Ef hún sker jákvæða τ-ásinn, þá er það í punktinum $(0, t-x/c)$. Gildið á u í (x,t) er jafnt gildi g í skurðpunktinum. Ef þessi kennilína í gegnum (x,t) sker ekki jákvæða τ-ásinn, þá er gildi u í (x,t) jafnt 0.



Mynd 15.8 Skurðpunktur kennilínu við τ-ás.

Nú skulum við líta á $u(x,t)$ sem styrk merkis, sem berst til hægri á x-ásnum með hraðanum c. Styrknum er stýrt í punktinum $x=0$ þannig að $u(x,t) = g(t)$ er gefið fall og stykurinn er 0 í upphafi við tímann $t=0$. Ef $t < x/c$, þá er tíminn of skammur til þess að merkið nái að berast frá 0 til x og því er $u(x,t) = 0$ í þessu tilfelli. Ef $t \geq x/c$, þá er $u(x,t) = g(t-x/c)$, því það tekur tímann x/c fyrir merkið að berast frá 0 til x. □

Sýnidæmi 18.8.2 (*Bylgjujafnan á takmörkuðu bili*). Við ákvörðum hér formúlu fyrir lausn bylgjujöfnunnar á takmörkuðu bili með óhliðruðum upphafsskilyrðum og hliðruðu jaðarskilyrði í öðrum endapunktinum,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x>0,\ t>0, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & x>0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = b(t), & t>0. \end{cases} \tag{18.8.2}$$

Við látum $U(x,s)$ og $B(s)$ tákna Laplace-myndir fallanna u og b með tilliti til t. Á hliðstæðan hátt og í síðasta sýnidæmi fáum við jaðargildisverkefni fyrir $U(x,s)$,

$$\begin{cases} s^2U(x,s) - c^2\partial_x^2 U(x,s) = 0, \\ U(0,s) = 0, \quad U(L,s) = B(s). \end{cases}$$

Þetta er sama jafna og í síðasta sýnidæmi, en hér hentar best að setja lausnina fram sem

$$U(x,s) = C(s)\cosh\big((s/c)x\big) + D(s)\sinh\big((s/c)x\big).$$

Stuðlarnir $C(s)$ og $D(s)$ ákvarðast nú út frá jaðarskilyrðunum, $C(s) = 0$ og $D(s) = B(s)/\sinh\big((s/c)L\big)$. Þar með er

$$U(x,s) = B(s)\frac{\sinh\big((s/c)x\big)}{\sinh\big((s/c)L\big)}.$$

Nú athugum við að

$$\begin{aligned}\frac{\sinh\big((s/c)x\big)}{\sinh\big((s/c)L\big)} &= \frac{e^{(s/c)x} - e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L}\big(1 - e^{-(2s/c)L}\big)} \\ &= e^{-sL/c}\big(e^{sx/c} - e^{-sx/c}\big)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s(2nL)/c} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(e^{-s((2n+1)L-x)/c} - e^{-s((2n+1)L+x)/c}\Big).\end{aligned}$$

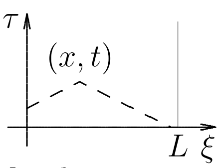
Þar með er

$$U(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(e^{-s((2n+1)L-x)/c} - e^{-s((2n+1)L+x)/c}\Big)B(s).$$

Nú segir regla (ii) í setningu 7.1.3 okkur að $\mathcal{L}\{H(t-\alpha)b(t-\alpha)\}(s) = e^{-s\alpha}B(s)$. Við beitum þessari reglu á sérhvern lið í summunni og fáum formúlu fyrir lausnina

$$\begin{aligned}u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(&H\big(t-((2n+1)L-x)/c\big)b\big(t-((2n+1)L-x)/c\big) \\ &-H\big(t-((2n+1)L+x)/c\big)b\big(t-((2n+1)L+x)/c\big)\Big).\end{aligned}$$

Það er auðvelt að túlka þess formúlu líkt og í síðasta sýnidæmi. Eins og þar hugsum við okkur að $u(x,t)$ sé styrkur merkis, sem berst eftir bilinu $[0,L]$ á x-ásnum með hraðanum c. Styrknum er stýrt í punktinum $x = L$ þannig að $u(L,t) = b(t)$ er gefið fall og í punktinum $x = 0$ er því stýrt þannig að $u(0,t) = 0$. Merkið er þá bylgja, sem berst fram og aftur eftir bilinu $[0,L]$. Í hvert skipti sem hún kemur að öðrum hvorum endapunkti bilsins, þá speglast hún og kemur öfug til baka. Nú skulum við rýna í lausnarformúluna og sjá hvernig hún breytist með tíma:

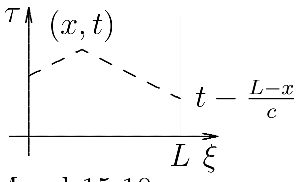


Mynd 15.9.

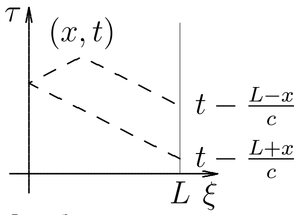
(i) Ef $0 \le t < (L-x)/c$, þá er

$$u(x,t) = 0.$$

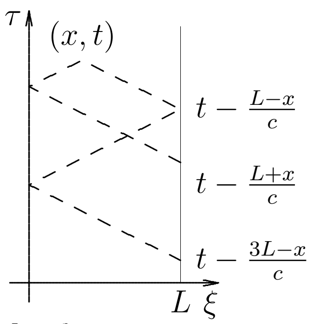
Tíminn er of skammur til þess að merki nái að berast frá L til x.



Mynd 15.10.



Mynd 15.11.



Mynd 15.12.

(ii) Ef $(L-x)/c \le t < (L+x)/c$, þá er

$$u(x,t) = b(t - \frac{L-x}{c}).$$

Merki hefur náð að berast frá L til x.

(iii) Ef $(L+x)/c \le t < (3L-x)/c$, þá er

$$u(x,t) = b(t - \frac{L-x}{c}) - b(t - \frac{L+x}{c}).$$

Hér hefur bæst við merki, sem borist hefur frá L til 0, þar sem það speglast, og þaðan til x.

(iv) Ef $(3L-x)/c \le t < (3L+x)/c$, þá er

$$u(x,t) = b(t - \frac{L-x}{c}) - b(t - \frac{L+x}{c}) + b(t - \frac{3L-x}{c}).$$

Hér hefur bæst við merki, sem borist hefur frá L til 0, til baka frá 0 til L og þaðan til x. Í báðum endapunktum hefur merkið speglast. Á þennan hátt fjölgar liðunum í summunni með tímanum.

$\square$

18.9 Æfingardæmi

1. Reiknið út Fourier-mynd lausnarinnar á símajöfnunni með upphafsskilyrðum,

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \alpha\partial_t^2 u + \beta\partial_t u + \gamma u, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

þar sem við gefum okkur að φ og ψ séu heildanleg föll á $\mathbb{R}$. Sýnið að í tilfellinu $\varphi = 0$ og $\gamma = 0$ sé til lausnarformúla af gerðinni

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-y,t)\psi(y)\,dy,$$

án þess að reyna að reikna fallið E út.

2. Reiknið út Fourier-myndina af lausninni á upphafsgildisverkefninu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = f(x,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x).$$

3. * Beitið Fourier-ummyndun til þess að ákvarða formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_y u(x,0) = h(x), \end{cases}$$

þar sem f, g og h eru heildanleg föll af x á $\mathbb{R}$.

4. Skrifið upp lausnarformúluna fyrir kúlubylgjur, með því að leysa verkefnið (18.6.3).

5. Beitið speglunaraðferð og d'Alembert formúlunni til þess að reikna út $u(\frac{1}{2}, 2)$, þar sem u er lausnin á bylgjujöfnunni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ \partial_x u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 4x(1-x),\ \partial_t u(x,0) = x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Lítum á föllin $u(x,t)$ og $v(x,t)$, sem eru lausnir

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \partial_t u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ v(x,0) = 0,\ \partial_t v(x,0) = \psi(x), & 0 < x < 1, \\ \partial_x v(0,t) = \partial_x v(1,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

þar sem φ og ψ eru 2-lotubundin föll, φ er oddstætt ψ er jafnstætt og þau uppfylla $\varphi(x) = \psi(x) = 2x$, ef $0 \le x \le 1/2$, og $\varphi(x) = \psi(x) = 2 - 2x$, ef $1/2 \le x \le 1$. Beitið d'Alembert formúlunni til þess að reikna út $u(\frac{1}{3}, 2)$, $u(\frac{4}{5}, 2)$, $v(\frac{1}{2}, 3)$ og $v(\frac{7}{4}, 3)$.

7. (*Símajafnan*). Ef u táknar straum eða spennu í rafstreng, til dæmis símalínu, þá gefa Maxwell-jöfnurnar

$$\partial_x^2 u = \alpha \partial_t^2 u + \beta \partial_t u + \gamma u.$$

þar sem $\alpha = LC$, $\beta = (RC + LG)$, $\gamma = RG$, C táknar rýmd strengsins á lengdareiningu, G táknar lekaleiðni á lengdareiningu, R táknar viðnám á lengdareiningu og L táknar sjálfspan á lengdareiningu. Nú viljum við ákvarða spennu í löngum streng, þar sem merki er gefið í öðrum endapunktinum. Við hugsum okkur því að strengurinn sé óendanlega langur og leysum því símajöfnuna á $\{(x,t); x > 0, t > 0\}$ með hliðarskilyrðunum

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, \quad u(0,t) = f(t).$$

(i) Gefið ykkur að lausn sé til og reiknið út Laplace-mynd hennar með tilliti til tíma.

(ii) Reiknið út u í sértilfellinu, þegar $\beta^2 = 4\alpha\gamma$. Sýnið að þá fáist einföld deyfð bylgja, sem berst eftir x ásnum. Ákvarðið hraða og deyfingarstuðul bylgjunnar.

Kafli 19

VARMALEIÐNIJAFNAN

19.1 Hitakjarninn

Í þessum kafla ætlum við að fjalla um úrlausn á varmaleiðnijöfnunni á öllu rúminu. Við skulum byrja á því að leiða út formúlu fyrir lausn á einvíðu varmaleiðnijöfnunni með upphafsskilyrðum

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{19.1.1}$$

og beita Fourier-ummyndun til þess. Við gerum ráð fyrir að u sé heildanlegt fall af x fyrir fast t, að φ sé heildanlegt og látum $\widehat{u}(\xi, t)$ og $\widehat{\varphi}(\xi)$ vera Fourier-myndir $u(x,t)$ og $\varphi(x)$ með tilliti til x. Við gefum okkur einnig að

$$\mathcal{F}\{\partial_t u\}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \partial_t u(x,t)\, dx = \partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x,t)\, dx = \partial_t \widehat{u}(\xi, t).$$

Samkvæmt setningu 6.2.3 (ix) er

$$\mathcal{F}\{\partial_x^2 u\}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \partial_x^2 u(x,t)\, dx = (i\xi)^2 \widehat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Við tökum nú Fourier-mynd af öllum liðunum í (19.1.1) og fáum að $\widehat{u}$ verður að uppfylla

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi, t) + \kappa \xi^2 \widehat{u}(\xi, t) = 0, & \xi \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\varphi}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{19.1.2}$$

Þetta er fyrsta stigs afleiðujafna í t, þar sem virkinn er $D_t + \kappa\xi^2$. Lausnin er því ótvírætt ákvörðuð

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-\kappa t \xi^2} \widehat{\varphi}(\xi). \tag{19.1.3}$$

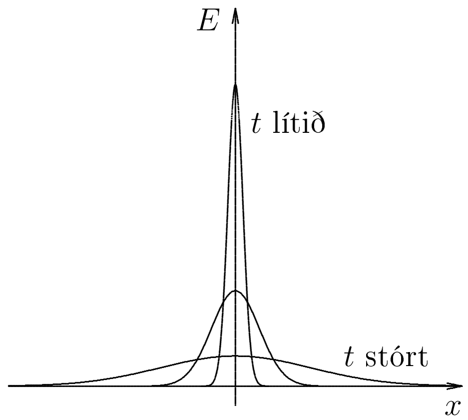
Í sýnidæmi 6.2.2 sáum við að $\mathcal{F}\{e^{-x^2}\}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$. Samkvæmt setningu 6.2.3 (iv) er

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \mathcal{F}\{e^{-ax^2}\}(\xi) &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \mathcal{F}\{e^{-(\sqrt{a}x)^2}\}(\xi) \\ &= e^{-(\xi/\sqrt{a})^2/4} = e^{-\xi^2/4a}. \end{aligned}$$

Ef við veljum $a = 1/4\kappa t$ í þessari formúlu, þá sjáum við að $e^{-\kappa t\xi^2}$ er Fourier-myndin af fallinu E sem gefið er með formúlunni

$$E(x,t) = E_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R},\ t \leq 0. \end{cases} \tag{19.1.4}$$

Skilgreining 19.1.1 Fallið E nefnist *hitakjarni* eða *varmaleiðnikjarni.* □



Mynd: Varmaleiðnikjarninn.

Formúlan (19.1.3) segir okkur nú að $\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{E}_t(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$, og því gefur andhverfuformúla Fouriers og földunarreglan okkur að

$$u(x,t) = E_t * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-(x-y)^2/4\kappa t}\varphi(y)\,dy, \qquad t > 0. \tag{19.1.5}$$

Áður en lengra er haldið skulum við rannsaka nokkra eiginleika hitakjarnans. Athugum fyrst að

$$\lim_{t\to 0+} E_t(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \tag{19.1.6}$$

og

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_t(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\,dy = 1. \tag{19.1.7}$$

Af (19.1.6) leiðir síðan að fyrir samfelld takmörkuð föll φ gildir

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} E_t * \varphi(x) &= \lim_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-(x-y)^2/4\kappa t}\varphi(y)\,dy \\ &= \lim_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\varphi(x - \sqrt{4\kappa t}y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \lim_{t\to 0+} \varphi(x - \sqrt{4\kappa t}y)\,dy \\ &= \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\,dy = \varphi(x). \end{aligned}$$

Þessi formúla segir okkur að E_t stefni á δ_0 í veikum skilningi ef $t \to 0+$. Það er auðveldur reikningur að sannfæra sig um að E uppfylli varmaleiðnijöfnuna

$$(\partial_t - \kappa\partial_x^2)E(x,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{19.1.8}$$

því

$$\begin{aligned}
\partial_t E(x,t) &= -\frac{1}{2t}E(x,t) + \frac{x^2}{4\kappa t^2}E(x,t),\\
\partial_x E(x,t) &= -\frac{x}{2\kappa t}E(x,t),\\
\partial_x^2 E(x,t) &= -\frac{1}{2\kappa t}E(x,t) - \frac{x}{2\kappa t}\partial_x E(x,t),\\
&= -\frac{1}{2\kappa t}E(x,t) + \frac{x^2}{4\kappa^2 t^2}E(x,t).
\end{aligned}$$

Af (19.1.8) leiðir nú að fallið u sem gefið er með (19.1.5) er lausn á varmaleiðnijöfnunni, því

$$(\partial_t - \kappa\partial_x^2)u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t - \kappa\partial_x^2)E(x-y,t)\varphi(y)\,dy = 0. \tag{19.1.9}$$

Hér þarf lesandinn aðeins að staldra við og sannfæra sig um að setning Lebesgues í viðauka C gefi að það megi taka afleiður með tilliti til x og t undir földunarheildið. Niðurstaða þessara útreikninga okkar er:

Setning 19.1.2 *Upphafsgildisverkefnið*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\ u(x,0) = \lim_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{19.1.10}$$

þar sem φ er gefið samfellt og takmarkað fall á $\mathbb{R}$, hefur lausn u sem gefin er með formúlunni

$$u(x,t) = E_t * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_t(x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{19.1.11}$$

þar sem hitakjarninn er gefinn með formúlunni

$$E(x,t) = E_t(x) = H(t)\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}e^{-x^2/4\kappa t}, \qquad (x,t) \neq (0,0). \tag{19.1.12}$$

□

19.2 Hliðraða varmaleiðnijafnan

Þá snúum við okkur að hliðruðu varmaleiðnijöfnunni og leysum hana með óhliðruðu upphafsskilyrði

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{19.2.1}$$

Með því að beita Fourier-ummyndun eins og áður, þá fáum við verkefnið

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + \kappa\xi^2 \widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \widehat{u}(\xi,0) = 0, & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{19.2.2}$$

Þetta er fyrsta stigs hliðruð afleiðujafna í t með óhliðruð upphafsskilyrði. Virkinn er $D_t + \kappa\xi^2$ og Green-fall hans er $G_\xi(t,\tau) = e^{-\kappa(t-\tau)\xi^2} = \widehat{E}_{t-\tau}(\xi)$. Lausnin er því

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_0^t e^{-\kappa(t-\tau)x^2} \widehat{f}(\xi,t)\, d\tau = \int_0^t \widehat{E}_{t-\tau}(\xi)\widehat{f}(\xi,t)\, d\tau. \tag{19.2.3}$$

Nú beitum við andhverfuformúlu Fouriers og földunarreglunni og fáum

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\bigg(\int_0^t \widehat{E}_{t-\tau}(\xi)\widehat{f}(\xi,\tau)\, d\tau\bigg)\, d\xi \\ &= \int_0^t \bigg(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{E}_{t-\tau}(\xi)\widehat{f}(\xi,\tau)\, d\xi\bigg)\, d\tau \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} E_{t-\tau}(x-y) f(y,\tau)\, dy d\tau \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\, dy d\tau. \end{aligned}$$

Ef við framlengjum skilgreiningarsvæði fallsins f þannig að $f(x,t) = 0$ ef $t \le 0$, þá sjáum við að

$$u(x,t) = E * f(x,t), \qquad t > 0.$$

Við skulum nú taka saman útreikninga okkar:

Setning 19.2.1 *Látum f vera samfellt fall á opna efra hálfplaninu $\{(x,t); t > 0\}$, sem er takmarkað á lokuninni $\{(x,t); t \ge 0\}$ og tekur gildið 0 á neðra hálfplaninu $\{(x,t); t < 0\}$ og látum φ vera samfellt takmarkað fall á $\mathbb{R}$. Þá hefur upphafsgildisverkefnið*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{19.2.4}$$

ótvírætt ákvarðaða lausn u, sem gefin er með formúlunni

$$u(x,t) = E_t * \varphi(x) + E * f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{19.2.5}$$

þar sem E táknar hitakjarnann, sem skilgreindur er með formúlunni (19.1.12).

□

Það er einfalt að alhæfa þetta verkefni fyrir varmaleiðnijöfnuna í hvaða rúmvídd sem er,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = \lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{19.2.6}$$

þar sem f er samfellt fall á $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; t \geq 0\}$, φ er samfellt fall á $\mathbb{R}^n$ og bæði f og φ eru takmörkuð. Hitakjarninn verður

$$E(x,t) = E_t(x) = H(t)\frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}}e^{-x^2/4\kappa t}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \neq (0,0), \tag{19.2.7}$$

og lausnarformúlan alhæfist í

$$u(x,t) = E_t * \varphi(x) + E * f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{19.2.8}$$

Við eftirlátum lesandanum að staðfesta að (19.2.8) gefi lausn á (19.2.6).

19.3 Úrlausn á varmaleiðnijöfnum með Laplace-ummyndun

Við höfum áður séð hvernig hægt er að beita Laplace-ummyndun til þess að leysa bylgjujöfnuna með óhliðruðum upphafsskilyrðum og hliðruðum jaðarskilyrðum á hálfás. Við byrjum á hliðstæðu verkefni fyrir varmaleiðnijöfnuna:

Sýnidæmi 19.3.1 (*Varmaleiðni á hálflínu*). Nú tökum við varmaleiðnijöfnuna á hálflínu fyrir og leysum hana með óhliðruðum upphafsskilyrðum og hliðruðu jaðarskilyrði,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = f(t), & t > 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{19.3.1}$$

Við látum $U(x,s)$ og $F(s)$ tákna Laplace-myndir $u(x,t)$ og $f(t)$ með tilliti til t eins og áður. Við fáum þá verkefnið

$$\begin{cases} sU(x,s) - \kappa\partial_x^2 U(x,s) = 0, \\ U(0,s) = F(s), \\ \lim\limits_{x\to+\infty} U(x,s) = 0. \end{cases}$$

Almenn lausn þessarar jöfnu er

$$U(x,s) = A(s)e^{-\sqrt{s/\kappa}\,x} + B(s)e^{\sqrt{s/\kappa}\,x}.$$

Síðara jaðarskilyrðið gefur $B(s) = 0$ og hið fyrra að $A(s) = F(s)$. Þar með er

$$U(x,s) = e^{-\sqrt{s/\kappa}\,x}F(s).$$

Ef við getum fundið fall $g(x,t)$, þannig að

$$\mathcal{L}\{g\}(x,s) = e^{-\sqrt{s/\kappa}\,x},$$

þá gefur földunarreglan í setningu 10.3.1 okkur að

$$u(x,t) = \int_0^t g(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Í næsta sýnidæmi sýnum við fram á að

$$g(x,t) = \frac{x}{t} E(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi\kappa}\, t^{\frac{3}{2}}} e^{-x^2/4\kappa t},$$

þar sem $E(x,t)$ táknar varmaleiðnikjarnann. Svarið er því

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi\kappa}} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-x^2/4\kappa(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau, \qquad x > 0,\ t > 0.$$

□

Sýnidæmi 19.3.2 (*Laplace-mynd varmaleiðnikjarnans*). Við höfum

$$\mathcal{L}\{E\}(x,s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{e^{-x^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{4\kappa s}} e^{-\sqrt{s/\kappa}\, x}. \tag{19.3.2}$$

Til þess að staðfesta þessa formúlu á nefnum við fyrst að í grein 16.1 sýndum við fram á að E uppfyllir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 E}{\partial^2 x} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ E(x,0) = 0, & x > 0, \\ E(0,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}, & t > 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} E(x,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Þetta er sértilfelli af (19.3.1). Samkvæmt sýnidæmi 6.1.3 og formúlu (3.7.6) er

$$\mathcal{L}\{E\}(0,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}} \mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}(s) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{\sqrt{4\pi\kappa} s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\pi\kappa s}} = \frac{1}{\sqrt{4\kappa s}}.$$

Með nákvæmlega sömu röksemdafærslu og í síðasta sýnidæmi fáum við því

$$\mathcal{L}\{E\}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{4\kappa s}} e^{-\sqrt{s/\kappa} x}.$$

Nú er auðvelt að staðfesta lausnarformúluna í síðasta sýnidæmi, því

$$-2\kappa \partial_x E(x,t) = -2\kappa\big(-2x/4\kappa t\big) E(x,t) = \frac{x}{t} E(x,t)$$

og

$$\mathcal{L}\{-2\kappa\partial_x E\}(x,s) = -2\kappa\partial_x \mathcal{L}\{E\}(x,s) = -2\kappa \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{4\kappa s}} e^{-\sqrt{s/\kappa}\, x}\right) = e^{-\sqrt{s/\kappa}\, x}.$$

□

19.4 Æfingardæmi

1. Beitið Fourier-ummyndun til þess að reikna út lausn á upphafsgildisverkefninu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

2. Beitið Fourier-ummyndun til þess að reikna út lausn á upphafsgildisverkefninu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au = f(x,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

3. Beitið speglunaraðferð til þess að finna formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

þar sem φ er takmarkað fall á $\mathbb{R}$ og sýnið fram á að hægt sé að skrifa hana sem

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} (E_t(x-y) - E_t(x+y))\varphi(y)\, dy,$$

þar sem E_t táknar hitakjarnann. Finnið einnig formúlu fyrir lausn verkefnisins, þar sem jaðarskilyrðinu $u(0,t) = 0$ er breytt í $\partial_x u(0,t) = 0$ og sýnið hvernig þetta heildi breytist.

4. Beitið speglunaraðferð til þess að finna formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

þar sem f er takmarkað samfellt fall á $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

5. Finnið formúlu fyrir lausnina á verkefninu

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = h(t), & t > 0, \end{cases}$$

þar sem h er samfellt deildanlegt á jákvæða raunásnum.
[*Leiðbeining:* Setjið $v(x,t) = u(x,t) - h(t)$ og sýnið að v sé lausn á hliðruðu varmaleiðnijöfnunni með hliðruðu upphafsskilyrði.]

6. Beitið speglunaraðferð til þess að finna formúlu fyrir lausn verkefnisins

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ \partial_x u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

þar sem f er takmarkað samfellt fall á $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

7. Finnið formúlu fyrir lausnina á verkefninu

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ \partial_x u(0,t) = h(t), & t > 0, \end{cases}$$

þar sem h er samfellt deildanlegt á jákvæða raunásnum.
[*Leiðbeining:* Setjið $v(x,t) = u(x,t) - xh(t)$ og sýnið að v sé lausn á hliðruðu varmaleiðnijöfnunni með hliðruðu upphafsskilyrði.]

8. Takið saman niðurstöður dæmanna 3-7 og skrifið upp lausnarformúlur fyrir lausnir verkefnanna

$$\begin{cases} \partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0, \\ u(0,t) = h(t), & t > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0, \\ \partial_x u(0,t) = h(t), & t > 0, \end{cases}$$

með sömu forsendum og áður um föllin f, φ og h.

9. Leysið verkefnið

$$\partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = f(t), \qquad x > 0,\ t > 0.$$

10. Notið niðurstöðuna úr sýnidæmi 16.3.1 til þess að sýna að

$$\mathcal{L}\{\operatorname{erfc}\big(\alpha/(2\sqrt{t})\big)\}(s) = \frac{1}{s}e^{-\alpha\sqrt{s}},$$

þar sem $\operatorname{erfc} = 1 - \operatorname{erf}$ og erf táknar skekkjufallið,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

11. Varmaleiðni í stöng af lengd L, með upphafshitastig 0, annan endann við hitastig 0 og hinn við $f(t)$ er lausn á verkefninu

$$\partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = f(t), \qquad x > 0,\ t > 0.$$

(i) Sýnið að Laplace-mynd lausnarinnar u með tilliti til t sé

$$U(x,s) = F(s)\frac{\sinh\big(x\sqrt{s/\kappa}\big)}{\sinh\big(L\sqrt{s/\kappa}\big)},$$

þar sem F er Laplace-mynd f.

(ii) Látum $v(x,t)$ tákna lausn í sértifellinu þegar f er fastafallið 1. Sannið formúlu Duhamels,

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg(\int_0^t v(x,t-\tau)f(\tau)\, d\tau\bigg).$$

(iii) Notið niðurstöðuna úr dæmi 2 og sömu tækni og í sýnidæmi 15.8.2 til þess að sýna að

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\operatorname{erf}\Big(\frac{(2n+1)L+x}{\sqrt{4\kappa t}}\Big) - \operatorname{erf}\Big(\frac{(2n+1)L-x}{\sqrt{4\kappa t}}\Big)\bigg).$$

Kafli 20

DREIFIFÖLL OG VEIKAR LAUSNIR Á HLUTAFLEIÐUJÖFNUM

20.1 Inngangur

Í greinum 2.8, 6.9 og 7.6 kynntumst við nokkrum undirstöðuhugtökum um dreififöll á rauntalnalínunni $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Auðvelt er að alhæfa þau hugtök yfir á rúmið $\mathbb{R}^n$ í hærri víddum. Reyndar eru dreififöllin mun mikilvægari við úrlausn á hlutafleiðujöfnum en við úrlausn á venjulegum afleiðujöfnum. Í þessum stutta kafla kynnumst við örlítið veikum hlutafleiðum, veikum lausnum á hlutafleiðujöfnum og grunnlausnum á hlutafleiðujöfnum. Einnig sjáum við eðlisfræðilega túlkun á Green-föllum fyrir Laplace-virkjann.

20.2 Veik markgildi, veikar afleiður og föll Diracs

Í setningu 2.5.2 og fylgisetningu 2.5.4 sáum við að lausnin á verkefninu

(20.2.1)
$$\begin{cases} P(D)u = (a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0)u = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0, \end{cases}$$

er gefin með formúlunni

(20.2.2)
$$u(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

þar sem fallið g uppfyllir $P(D)g = 0$, $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(m-2)}(0) = 0$, og $g^{(m-1)}(0) = 1/a_m$. Nú skulum við athuga hvernig lausnin breytist með f. Látum því f_j vera runu af samfelldum föllum á $\mathbb{R}$ og u_j vera lausnina á (20.2.1), sem gefin er með (20.2.2) með f_j í hlutverki f. Ef f_j stefnir á f í jöfnum mæli á sérhverju takmörkuðu bili á $\mathbb{R}$, þá fáum við með því að skipta á heildi og markgildi að

$$\begin{aligned}\lim_{j\to+\infty} u_j(t) &= \lim_{j\to+\infty}\int_0^t g(t-\tau)f_j(\tau)\,d\tau\\ &= \int_0^t g(t-\tau)\lim_{j\to+\infty} f_j(\tau)\,d\tau\\ &= \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = u(t).\end{aligned}$$

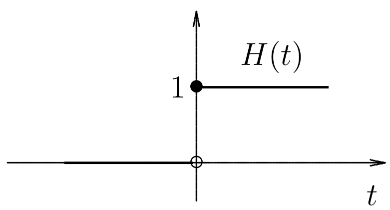
Það er raunar auðvelt að sannfæra sig um að $u^{(k)} \to u^{(k)}$ í jöfnum mæli á sérhverju takmörkuðu bili á $\mathbb{R}$ ef $0 \leq k \leq m$.

Nú ætlum við að sjá hvað gerist ef við stingum ósamfelldu falli f inn í lausnarformúluna 20.2.2. Til þess að einfalda útreikninga okkar þá skilgreinum við fallið E með

(20.2.3)
$$E(t) = H(t)g(t) = \begin{cases} g(t), & t \geq 0,\\ 0, & t < 0,\end{cases}$$

þar sem H táknar *Heaviside-fallið*

(20.2.4)
$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0,\\ 0, & t < 0,\end{cases}$$



Mynd 2.5. Heaviside-fallið.

Í því tilfelli að $f(t) = 0$ ef $t < 0$, þá er lausnarformúlan (20.2.2) ekkert annað en

(20.2.5)
$$u = E * f,$$

þar sem $\varphi * \psi$ táknar *földun* tveggja falla φ og ψ,

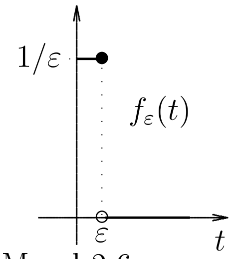
(20.2.6)
$$\varphi * \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy.$$

Földun er ein af undirstöðuaðgerðunum í fallafræði og hún mun oft koma fyrir hjá okkur. Í útleiðslu okkar á lausnarformúlunni (20.2.2) gengum við út frá því að hægri hlið jöfnunnar f væri samfellt fall. Í margs konar útreikningum vilja menn setja inn föll sem eru ósamfelld. Lítum á eitt slíkt dæmi:

Sýnidæmi 20.2.1 (*Deyfð sveifla; framhald*). Lítum nú enn einu sinni á deyfðan sveifil úr sýnidæmi 1.1.1 og látum nú $u(t)$ tákna færslu hans frá jafnvægisstöðu og $f(t)$ tákna summu ytri krafta sem á hann verka. *Atlag* kraftsviðsins f á tímabilinu $[\alpha, \beta]$ er skilgreint sem heildið

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt,$$

þar sem $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$. Við skulum nú skilgreina kraftsvið f_ε sem líkir eftir því að sveiflinum sé komið af stað með því að slá snöggt í hann af miklum krafti,



Mynd 2.6.

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & t \in [0, \varepsilon], \\ 0, & t \notin [0, \varepsilon]. \end{cases} \tag{20.2.7}$$

Atlag þessa kraftsviðs er

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\, dt = 1, \text{ og } \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \tag{20.2.8}$$

Ef u_ε táknar útslag sveifilsins, þá gefur lausnarformúlan (20.2.5) okkur að

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) = E * f_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t-\tau) f_\varepsilon(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon E(t-\tau)\, d\tau = \int_0^1 E(t - \varepsilon\sigma)\, d\sigma \\ &\to E(t), \qquad \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{20.2.9}$$

Nú er eðlilegt að spyrja, hvort hægt sé að taka markgildi af kraftsviðinu f_ε ef $\varepsilon \to 0$ og fá út kraftsvið sem hefur eðlisfræðilega merkingu. Samkvæmt (20.2.8) þarf markfallið δ þá að uppfylla

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1, \qquad \text{og} \qquad \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \tag{20.2.10}$$

Nú er okkur mikill vandi á höndum, því seinna skilyrðið skilgreinir fall, sem hefur heildið 0 og því stangast þessi tvö skilyrði á. Til þess að komast út úr þessum vandræðum þurfum við að líta á markgildið í (20.2.8) í nýju ljósi og jafnframt að alhæfa fallshugtakið. □

Áður en við getum alhæft fallshugtakið þurfum við að innleiða nokkur ný hugtök. Ef φ er samfellt fall á opnu hlutmengi X af $\mathbb{R}$, þá nefnist minnsta lokaða mengi sem inniheldur $\{x \in X; \varphi(x) \neq 0\}$ *stoð* fallsins φ og hún er táknuð með $\operatorname{supp} \varphi$. Hlutmengi af $\mathbb{R}$ sem er bæði lokað og takmarkað er sagt vera *þjappað*. Við látum $C_0^k(X)$, þar sem $0 \leq k \leq \infty$, tákna mengi allra k sinnum samfellt deildanlegra falla á $\mathbb{R}$ sem hafa þjappaða stoð í X. Þetta er línulegt hlutrúm í $C^k(\mathbb{R})$. Rúmið $C_0^\infty(X)$ er oft táknað með $\mathcal{D}(X)$ og stök þess eru oft nefnd *prófunarföll*.

Nú skulum við líta á fall f sem er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af X. Það skilgreinir á eðlilegan hátt línulega vörpun

$$u_f : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}, \qquad u_f(\varphi) = \int_X f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{20.2.11}$$

Athugið að einungis er heildað yfir þjappað hlutmengi af X, því sérhvert fall φ í $C_0^\infty(X)$ er 0 alls staðar nema á þjöppuðu hlutmengi. Ef við skilgreinum margfeldið $f(x)\varphi(x)$ sem 0 fyrir utan $\operatorname{supp}\varphi$, þá breytist heildið ekki þó við skrifum $\int_{-\infty}^{+\infty}$ í stað $\int_X$. Það er einmitt með því að líta á þessar línulegu varpanir, sem okkur tekst að alhæfa fallshugtakið og þar með að gefa föllum eins og δ í (20.2.10) merkingu.

Skilgreining 20.2.2 Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{R}$. Línuleg vörpun

$$u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$$

nefnist *dreififall* á X ef hún er samfelld í þeim skilningi að

$$u(\varphi_j) \to u(\varphi), \qquad j \to +\infty, \tag{20.2.12}$$

þar sem föllin φ_j hafa öll stoð í sama þjappaða hlutmenginu K í X og $\varphi_j^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$ fyrir öll $k = 0, 1, 2 \dots$. Mengi allra dreififalla á X táknum við með $\mathbb{D}'(X)$. $\square$

Þessi skilgreining kann að virðast erfið við fyrstu sýn, en í flestum dæmum sem við tökum er auðvelt að staðfesta að (20.2.12) gildi. Þannig er línulega vörpunin u_f í (20.2.11) dreififall, því

$$\begin{aligned}\lim_{j\to+\infty} u_f(\varphi_j) &= \lim_{j\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_j(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lim_{j\to+\infty} \varphi_j(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = u_f(\varphi),\end{aligned}$$

því við megum skipta á heildi og markgildi, þegar við höfum samleitni í jöfnum mæli. Athugum að tvö föll f og g skilgreina sama dreififallið, $u_f = u_g$, ef

$$u_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx = u_g(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X).$$

Þetta þýðir samt ekki að $f(x) = g(x)$ í sérhverjum punkti $x \in X$, því þessi heildi breytast ekki, þó gildum fallanna f og g sé breytt í einstaka punktum.

$\mathbb{D}'(X)$ er greinilega línulegt rúm, þar sem summa tveggja dreififalla u og v er skilgreind með

$$\big(u + v\big)(\varphi) = u(\varphi) + v(\varphi),$$

og margfeldi tölunnar $\alpha \in \mathbb{C}$ og u er skilgreint með

$$\big(\alpha u\big)(\varphi) = \alpha u(\varphi).$$

Ef $\psi \in C^\infty(X)$, þá skilgreinum við margfeldi ψ og u með

$$\big(\psi u\big)(\varphi) = u(\psi\varphi).$$

Þetta er eðlileg alhæfing á margföldun fallanna f og ψ, því

$$\big(\psi u_f\big)(\varphi) = u_f(\psi\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)\varphi(x)\,dx = u_{f\psi}(\varphi).$$

Skilgreining 20.2.3 Látum $a \in \mathbb{R}$ og skilgreinum δ_a með

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \tag{20.2.13}$$

þar sem φ er samfellt í einhverri grennd um a. Greinilega er δ_a dreififall á sérhverju opnu mengi sem inniheldur a og það nefnist *δ-fall Diracs* í punktinum a eða *Dirac-delta-fall* í punktinum a. Ef $a = 0$, þá skrifum við aðeins δ í stað δ_0. □

Í mörgum bókum er δ-fall Diracs skilgreint, sem fallið sem uppfyllir skilyrðin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)\,dt = 1, \qquad \text{og} \qquad \delta_a(t) = \begin{cases} +\infty, & t = a, \\ 0, & t \neq a. \end{cases} \tag{20.2.14}$$

Eins og við gátum um í sýnidæmi 20.2.1, þá fá þessi skilyrði ekki staðist saman, því síðara skilyrðið hefur í för með að heildið er 0. Hins vegar er rétt að muna eftir þessum tveimur skilyrðum, þegar verið er að túlka niðurstöður útreikninga með dreififöllum, þar sem δ-föll koma fyrir.

Skilgreining 20.2.4 Látum u_j vera runu í $\mathbb{D}'(X)$. Við segjum að u_j stefni á $u \in \mathbb{D}'(X)$ og táknum það með $u_j \to u$ og $\lim_{j\to+\infty} u_j = u$, ef

$$\lim_{j\to+\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X). \tag{20.2.15}$$

Ef öll dreififöllin u_j eru af gerðinni u_{f_j}, þar sem f_j eru heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af X, þá segjum við að f_j stefni á u *í veikum skilningi* eða að *f_j stefni á u í skilningi dreififalla*. Þetta þýðir að

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)\,dx \to u(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X), \tag{20.2.16}$$

og við táknum þessa samleitni einnig með $f_j \to u$ og $\lim_{j\to+\infty} f_j = u$. □

Ef u_ε eru dreififöll sem háð eru breytunni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ þá skilgreinum við $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ með hliðstæðum hætti. Sama er að segja um $\lim_{t\to+\infty} u_t$ ef u_t eru dreififöll sem háð eru samfelldu breytunni t og t stefnir á $+\infty$. Það er enginn vandi að finna runur af föllum sem stefna á δ_a:

Setning 20.2.5 *Gerum ráð fyrir að f sé heildanlegt fall á $\mathbb{R}$, að $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ og skilgreinum $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} f((x-a)/\varepsilon)$. Þá stefnir f_ε á δ_a í skilningi dreififalla ef $\varepsilon \to 0$.* □

Sönnun: Við höfum

$$\begin{aligned} u_{f_\varepsilon}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-1} f((x-a)/\varepsilon)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(a+\varepsilon y)\,dy \to \varphi(a)\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \\ &= \varphi(a) = \delta_a(\varphi). \end{aligned}$$

Hér eru breytuskiptin í heilduninni $y = (x-a)/\varepsilon$, $x = a + \varepsilon y$, $dy = \varepsilon^{-1}dx$. Lebesgue-setningin í viðauka C gefur okkur að það megi taka markgildi undir heildið. ■

Setning 20.2.6 *Ef f_ε er fjölskylda af föllum á $\mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, og $f_\varepsilon \to \delta$ í veikum skilningi, þá gildir*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon * \varphi(x) = \varphi(x), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Sönnun: Við tökum $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ og skilgreinum $\psi_x(y) = \varphi(x-y)$. Þá gildir

$$\begin{aligned} f_\varepsilon * \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(y)\varphi(x-y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(y)\psi_x(y)\,dy \to \psi_x(0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

■

Setning 20.2.7 *Ef a er punktur í opna menginu $X \subset \mathbb{R}$ og $\psi \in C^\infty(X)$, þá er $\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a$, þ.e. aðgerðin að margfalda δ_a með fallinu ψ er sú sama og að margfalda δ_a með tvinntölunni $\psi(a)$.* □

Sönnun: $\big(\psi\delta_a\big)(\varphi) = \delta_a(\psi\varphi) = \psi(a)\varphi(a) = \psi(a)\delta_a(\varphi)$. ■

Sýnidæmi 20.2.8 (*Deyfð sveifla; framhald*). Í sýnidæmi 2.8.1 litum við á kraftsvið sem verkaði á sveifilinn örskamma stund. Við skulum nú líta aftur á þetta dæmi en hafa almennt kraftsvið f með atlag 1, $f(t) = 0$ ef $t \notin [0,1]$ og skilgreina kraftsviðið $f_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}f(t/\varepsilon)$. Þá hefur f_ε atlagið 1 og $f_\varepsilon(t) = 0$ ef $t \notin [0,\varepsilon]$. Frávikið u_ε frá jafnvægisstöðunni uppfyllir

(20.2.17) $$mu''_\varepsilon + cu_\varepsilon{}' + ku_\varepsilon = f_\varepsilon, \qquad u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = 0,$$

og er þá gefið með földunarheildinu

(20.2.18) $$u_\varepsilon = E * f_\varepsilon.$$

Í setningu 20.2.5 sýndum við fram á að $f_\varepsilon \to \delta$ og því er eðlilegt að túlka δ sem kraftsvið með atlag 1, sem verkar einungis við tímann $t = 0$. Við fáum nú

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) = E * f_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t-\tau)f_\varepsilon(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^1 E(t-\varepsilon\tau)f(\tau)\,d\tau \to E(t)\int_0^1 f(\tau)\,d\tau = E(t) \end{aligned}$$

og því er eðlilegt að túlka fallið E sem svörun sveifilsins við kraftsviðinu δ. Það er greinilegt að E uppfyllir óhliðruðu jöfnuna $mE'' + cE' + kE = 0$ á menginu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, en E er ekki tvisvar deildanlegt í punktinum $t = 0$, því

$$\lim_{t\to 0-} E'(t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0+} E'(t) = g'(0) = 1/m \neq 0.$$

Ef við skiptum nú á u_ε og og markgildinu E í (20.2.17) og á f_ε og δ, þá fáum við jöfnuna

$$mE'' + cE' + kE = \delta. \tag{20.2.19}$$

Þessi jafna hefði merkingu ef δ væri samfellt fall, en til þess að gefa henni merkingu verðum við að alhæfa hugtakið afleiða. □

Látum nú $f \in C^1(\mathbb{R})$ og lítum á dreififallið $u_{f'}$. Það uppfyllir

$$\begin{aligned} u_{f'}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -u_f(\varphi'). \end{aligned}$$

Nú er ljóst að $\varphi \mapsto -u_f(\varphi')$ er línuleg vörpun og að hún skilgreinir dreififall. Ef $f \in C^k(\mathbb{R})$, þá fáum við með ítrekaðri hlutheildun að

$$u_{f^{(k)}}(\varphi) = (-1)^k u_f(\varphi^{(k)}). \tag{20.2.20}$$

Þessa formúlu leggjum við til grundvallar á skilgreiningu á afleiðum dreififalla:

Skilgreining 20.2.9 Látum $u \in \mathbb{D}'(X)$ vera dreififall á opnu hlutmengi X í $\mathbb{R}$. Þá er afleiða þess u' skilgreind sem dreififallið

$$u'(\varphi) = -u(\varphi'), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X), \tag{20.2.21}$$

og fyrir sérhverja heiltölu $k > 0$ skilgreinum við k-tu afleiðuna $u^{(k)}$ af u sem dreififallið

$$u^{(k)}(\varphi) = (-1)^k u(\varphi^{(k)}), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X).$$

Ef $u = u_f$, þar sem fallið f er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af X, þá nefnist $(u_f)'$ *veika afleiðan* af f eða *afleiða f í skilningi dreififalla* og við skrifum þá f' í stað $(u_f)'$, þegar ekki er um að villast að átt er við veiku afleiðuna. □

Eins og fram hefur komið, þá er veika k-ta afleiðan af $f \in C^k(X)$ ekkert annað en dreififallið sem $f^{(k)}$ skilgreinir, þ.e.a.s.

$$(u_f)^{(k)} = u_{f^{(k)}},$$

og því getum við litið á afleiður dreififalla sem alhæfingu á afleiðum venjulegra falla.

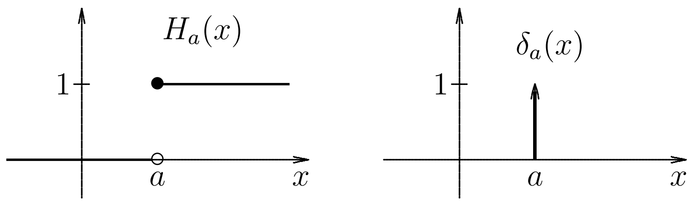
Sýnidæmi 20.2.10 Við skulum nú reikna út veiku afleiðuna af Heaviside-fallinu,

$$\begin{aligned}\big(u_H\big)'(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx \\ &= -\Big[\varphi(x)\Big]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \delta(\varphi)\end{aligned}$$

Niðurstaðan er því formúlan

$$H' = \delta. \tag{20.2.22}$$

Heaviside-fallið er deildanlegt í venjulegum skilningi og hefur afleiðuna $H'(x) = 0$ í sérhverjum punkti $x \neq 0$. Í punktinum $x = 0$ er H ósamfellt og tekur stökkið 1 þegar farið er yfir ósamfelluna frá vinstri til hægri, $H(0+) - H(0-) = 1$. Við getum því litið svo á að hallatala H sé $+\infty$ í þessum eina punkti, en að hún sé 0 alls staðar annars staðar. Í þessu samhengi er því eðlilegt að túlka δ sem fallið sem uppfyllir $\delta(x) = +\infty$ ef $x = 0$ og $\delta(x) = 0$ ef $x \neq 0$.



Mynd 2.7. Heaviside fallið H_a og afleiðan δ_a.

Ef við lítum á hliðraða Heaviside-fallið $H_a(x) = H(x-a)$, þá fæst með sama hætti og hér að ofan að $H'_a = \delta_a$. Mjög algengt er að δ_a sé táknað með $\delta(x-a)$ og þá er einnig algengt að graf δ_a sé táknað með lóðréttri ör eins og sýnt er á myndinni. □

Setning 20.2.11 *Ef* $u \in \mathbb{D}'(X)$ *og* $\psi \in C^\infty(X)$ *þá gildir regla Leibniz*

$$\big(\psi u\big)' = \psi' u + \psi u' \tag{20.2.23}$$

□

Sönnun: Ef $\varphi \in C_0^\infty(X)$, þá er

$$\begin{aligned}
\big(\psi u\big)'(\varphi) &= -\big(\psi u\big)(\varphi') = -u(\psi\varphi') = -u((\psi\varphi)' - \psi'\varphi)\\
&= u(\psi'\varphi) - u((\psi\varphi)') = \big(\psi' u\big)(\varphi) + u'(\psi\varphi)\\
&= \big(\psi' u\big)(\varphi) + \big(\psi u'\big)(\varphi) = \big(\psi' u + \psi u'\big)(\varphi).
\end{aligned}$$

■

Setning 20.2.12 *Látum $f \in PC^1(X)$, þar sem X er opið hlutmengi í $\mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að f sé deildanlegt alls staðar á X nema í punktunum $a_1, a_2, \dots, a_N$. Látum $f'(x)$ vera skilgreint sem afleiðuna af f í punktum, þar sem f er deildanlegt, og gerum ráð fyrir að f' taki einhver önnur gildi í punktunum a_j. Þá er*

$$\big(u_f\big)' = u_{f'} + \sum_j \big(f(a_j+) - f(a_j-)\big)\delta_{a_j}. \tag{20.2.24}$$

Ef $f \in PC^1(X) \cap C(X)$, þá er

$$\big(u_f\big)' = u_{f'}. \tag{20.2.25}$$

□

Sönnun: Látum $\varphi \in C_0^\infty(X)$ með $\operatorname{supp}\varphi \subset [\alpha, \beta]$ og veljum bilið $[\alpha, \beta]$ það stórt að $a_1, \dots, a_N \in [\alpha, \beta]$. Samkvæmt skilgreiningu er

$$\big(u_f\big)'(\varphi) = -u_f(\varphi') = -\int_\alpha^\beta f(x)\varphi'(x)\,dx$$

Nú þurfum við að framkvæma hlutheildun, en til þess að geta það þurfum við að skipta $[\alpha, \beta]$ í hlutbil, þar sem f er samfellt deildanlegt. Ef við setjum $a_0 = \alpha$ og $a_{N+1} = \beta$, þá er

$$\begin{aligned}
\big(u_f\big)'(\varphi) &= \sum_{j=0}^N -\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx\\
&= \sum_{j=0}^N \bigg(-\Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{a_j}^{a_{j+1}} + \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx\bigg)\\
&= \sum_{j=0}^N \bigg(\big(f(a_j+)\varphi(a_j) - f(a_{j+1}-)\varphi(a_{j+1})\big) + \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx\bigg)
\end{aligned}$$

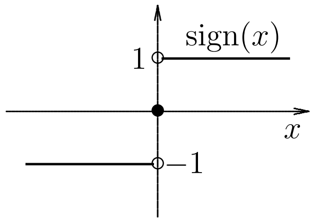
Nú notfærum við okkur að $\varphi(a_0) = \varphi(a_{N+1}) = 0$ og fáum

$$\begin{aligned}
\big(u_f\big)'(\varphi) &= \sum_{j=1}^N \big(f(a_j+) - f(a_j-)\big)\varphi(a_j) + \int_\alpha^\beta f'(x)\varphi(x)\,dx\\
&= \sum_{j=1}^N \big(f(a_j+) - f(a_j-)\big)\delta_{a_j}(\varphi) + u_{f'}(\varphi).
\end{aligned}$$

Síðasta staðhæfingin er augljós, því $f(a_j+) - f(a_j-) = 0$ ef f er samfellt í a_j.

■

Sýnidæmi 20.2.13 Fallið $f(x) = |x|$ er samfellt á $\mathbb{R}$, óendanlega oft samfellt deildanlegt á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ og hefur afleiðuna $f'(x) = \mathrm{sign}(x)$ ef $x \neq 0$, þar sem sign táknar formerkisfallið



Mynd 2.8. Formerkisfallið

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Fallið sign er því veika afleiðan af f. Nú hefur fallið sign afleiðuna 0 á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ og tekur stökkið 2 í punktinum 0. Þar með er $f'' = 2\delta$ í merkingu dreififalla. □

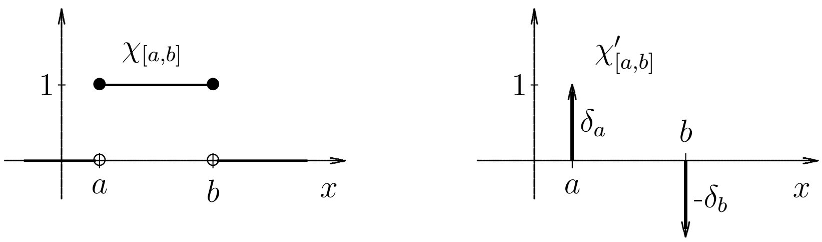
Sýnidæmi 20.2.14 Látum $\chi_{[a,b]}$ tákna kennifallið fyrir lokaða bilið $[a, b]$ á $\mathbb{R}$,

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Þetta fall er óendanlega oft samfellt deildanlegt á $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ með afleiðuna 0 og tekur stökkið 1 í $x = a$ og -1 í b. þar með er veika afleiðan

$$\chi_{[a,b]}{}' = \delta_a - \delta_b.$$

□



Mynd 2.9. Kennifall bilsins $[a, b]$.

Nú þegar við höfum skilgreint afleiður af dreififöllum, þá getum við skilgreint afleiðuvirkjann D^k sem úthlutar dreififallinu u afleiðunni $u^{(k)}$, $D^k u = u^{(k)}$. Í framhaldi af því getum við síðan skilgreint línulega afleiðuvirkja

(20.2.26)
$$\begin{aligned} P(D)u &= \big(a_m D^m + \cdots + a_1 D + a_0\big)u \\ &= a_m u^{(m)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u \end{aligned}$$

og myndað afleiðujöfnur fyrir dreififöll

(20.2.27)
$$P(D)u = f,$$

þar sem f er gefið dreififall. Stuðlarnir a_j geta staðið fyrir tvinntölur eða jafnvel föll í $C^\infty(X)$. Dreififallalausn er síðan $u \in \mathbb{D}'(X)$ sem uppfyllir jöfnuna.

Skilgreining 20.2.15 Látum $P(D)$ vera afleiðuvirkja með fastastuðla. Dreififall u sem uppfyllir jöfnuna

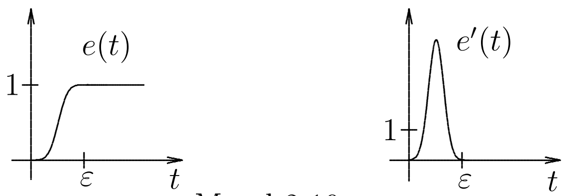
$$P(D)u = \delta \tag{20.2.28}$$

nefnist *grunnlausn* afleiðuvirkjans $P(D)$. □

Sýnidæmi 20.2.16 (*RLC-rás; framhald*). Í sýnidæmi 1.1.2 sáum við að straumurinn $i(t)$ í lokaðri straumrás með viðnámi R, spólu með spanstuðul L og þétti með rýmd C uppfyllir

$$Li''(t) + Ri'(t) + C^{-1}i(t) = e'(t),$$

þar sem $e(t)$ táknar frumspennu spennugjafans. Ef við hugsum okkur að $i(t) = e(t) = 0$ ef $t < 0$, að spennan vaxi á örskömmu tímabili $[0, \varepsilon]$ frá 0 og upp í 1 og $e(t) = 1$ ef $t \geq \varepsilon$, þá er e mjög nálægt því að vera Heaviside-fallið.



Mynd 2.10.

Nú er $H' = \delta$ í veikum skilningi og því má búast við því að straumurinn i sé nálægt því að vera grunnlausnin

$$Lu'' + Ru' + C^{-1}u = \delta.$$

□

Setning 20.2.17 *Látum $P(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$ vera margliðu með tvinntölustuðla og $a_m \neq 0$. Látum G tákna Green-fall virkjans $P(D)$, $G(t, \tau) = g(t - \tau)$, þar sem g er fallið sem uppfyllir $P(D)g = 0$, $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(m-2)}(0) = 0$ og $g^{(m-1)}(0) = 1/a_m$. Þá er fallið $E = H \cdot g$ grunnlausn virkjans $P(D)$.* □

Sönnun: Fallið g er óendanlega oft deildanlegt svo við getum tekið veikar afleiður af E sem margfeldi af g og dreififallinu sem H skilgreinir. Til einföldunar skrifum við E og H í stað u_E og u_H og tökum veikar afleiður. Regla Leibniz og reglan $\psi\delta = \psi(0)\delta$ gefa okkur þá

$$\begin{aligned}
E' &= g'H + gH' = g'H + g\delta \\
&= g'H + g(0)\delta = g'H, \\
E'' &= g''H + g'H' = g''H + g'\delta \\
&= g''H + g'(0)\delta = g''H, \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
E^{(m-1)} &= g^{(m-1)}H + g^{(m-2)}H' = g^{(m-1)}H + g^{(m-2)}\delta \\
&= g^{(m-1)}H + g^{(m-2)}(0)\delta = g^{(m-1)}H, \\
E^{(m)} &= g^{(m)}H + g^{(m-1)}H' = g^{(m)}H + g^{(m-1)}\delta \\
&= g^{(m)}H + g^{(m-1)}(0)\delta = g^{(m)}H + (1/a_m)\delta.
\end{aligned}$$

Tökum nú saman liðina

$$\begin{aligned}P(D)E &= \big(a_mD^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1D + a_0\big)E\\ &= a_m((1/a_m)\delta + g^{(m)}H) + a_{m-1}g^{(m-1)}H + \cdots + a_1g'H + a_0gH\\ &= \delta + \big(P(D)g\big)H = \delta.\end{aligned}$$

■

Í setningu 2.7.4 voru sett fram fjögur skilyrði, sem einkenna Green-fallið fyrir jaðargildisverkefnið

$$P(x,D)u = f, \qquad Bu = 0.$$

Með samskonar útreikningum og í sönnuninni á 20.2.17 fáum við að skilyrðin (i)-(iii) gefa

$$P(x,D_x)G_B(x,\xi) = \delta_\xi, \qquad \xi \in]a,b[,$$

og skilyrðið (iv) gefur síðan að $G_B(x,\xi)$ sem fall af x er lausnin á jaðargildisverkefninu

$$P(x,D)u = \delta_\xi, \qquad Bu = 0.$$

20.3 Veik markgildi og δ-föll Diracs

Í grein 2.8 sáum við fyrst skilgreiningu og túlkun á Dirac-fallinu δ_a. Það á sér hliðstæða skilgreiningu í hærri víddum.

Skilgreining 20.3.1 Látum $a \in \mathbb{R}^n$ og skilgreinum δ_a með

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \tag{20.3.1}$$

þar sem φ er samfellt í einhverri grennd um a. Við getum litið á δ_a sem línulega vörpun $C(X) \to \mathbb{C}$ á sérhverju opnu hlutmengi X í $\mathbb{R}^n$ sem inniheldur a. Vörpunin δ_a nefnist *δ-fall Diracs* í punktinum a eða *Dirac-delta-fall* í punktinum a. Ef $a = 0$, þá skrifum við aðeins δ í stað δ_0. □

Dirac-fallið δ_a er oft skilgreint í bókum, sem fallið á $\mathbb{R}^n$ sem uppfyllir

$$\delta_a(x) = \begin{cases} +\infty, & x = a,\\ 0, & x \neq a,\end{cases} \qquad \text{og} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \delta_a(x)\,dx = 1. \tag{20.3.2}$$

Alveg eins og í einvíða tilfellinu fá þessi skilyrði ekki staðist stærðfræðilega, því fall sem skilgreint er með fyrri formúlunni hefur heildi jafnt 0, sem stangast á við síðara skilyrðið. Þess vegna er δ-fall ekki fall í venjulegum skilningi og við verðum að notast við skilgreininguna 20.3.1. Hins vegar er gott að muna eftir skilyrðunum (20.3.2) þegar verið er að framkvæma og túlka útreikninga.

Hugtakið dreififall er skilgreint eins og í einvíða tilfellinu, en áður en við getum sett skilgreininguna fram þurfum við að innleiða nokkur ný hugtök. Ef φ er samfellt fall á opnu hlutmengi X í $\mathbb{R}^n$, þá nefnist minnsta lokaða mengi sem inniheldur $\{x \in X; \varphi(x) \neq 0\}$ *stoð* fallsins φ og hún er táknuð með $\operatorname{supp}\varphi$. Hlutmengi af $\mathbb{R}^n$ sem er bæði lokað og takmarkað er sagt vera *þjappað*. Við látum $C_0^k(X)$, þar sem $0 \leq k \leq \infty$, tákna mengi allra k sinnum samfellt deildanlegra falla á $\mathbb{R}^n$ sem hafa þjappaða stoð í X. Þetta er línulegt hlutrúm í $C^k(\mathbb{R}^n)$. Rúmið $C_0^\infty(X)$ er oft táknað með $\mathcal{D}(X)$ og stök þess eru oft nefnd *prófunarföll.*

Nú skulum við líta á fall f sem er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af X. Það skilgreinir á eðlilegan hátt línulega vörpun

$$u_f : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}, \qquad u_f(\varphi) = \int_X f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{20.3.3}$$

Athugið að einungis er heildað yfir þjappað hlutmengi af X, því sérhvert fall φ í $C_0^\infty(X)$ er 0 alls staðar nema á þjöppuðu hlutmengi. Ef við skilgreinum margfeldið $f(x)\varphi(x)$ sem 0 fyrir utan $\operatorname{supp}\varphi$, þá breytist heildið ekki þó við skrifum $\int_{\mathbb{R}^n}$ í stað $\int_X$. Nú kemur skilgreiningin óbreytt frá einvíða tilfellinu:

Skilgreining 20.3.2 Látum X vera opið hlutmengi af $\mathbb{R}^n$. Línuleg vörpun

$$u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$$

nefnist *dreififall* á X ef hún er samfelld í þeim skilningi að

$$u(\varphi_j) \to u(\varphi), \qquad j \to +\infty, \tag{20.3.4}$$

fyrir sérhverja runu φ_j í $C_0^\infty(X)$, þar sem föllin φ_j hafa öll stoð í sama þjappaða hlutmenginu K í X og um sérhvern hlutafleiðuvirkja ∂^α gildir að $\partial^\alpha\varphi_j \to \partial^\alpha\varphi$ í jöfnum mæli á $\mathbb{R}^n$. Mengi allra dreififalla á X táknum við með $\mathcal{D}'(X)$. Við skrifum einnig $\langle u, \varphi\rangle$ í staðinn fyrir $u(\varphi)$. □

Dirac-föll koma oft fyrir sem veik markgildi af föllum, þar sem hugtakið *veik samleitni* er skilgreint eins og í einni vídd:

Skilgreining 20.3.3 Látum u_j vera runu í $\mathcal{D}'(X)$. Við segjum að u_j stefni á $u \in \mathcal{D}'(X)$, og táknum það með $u_j \to u$ og $\lim_{j\to+\infty} u_j = u$, ef

$$\lim_{j\to+\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X). \tag{20.3.5}$$

Ef öll dreififöllin u_j eru af gerðinni u_{f_j}, þar sem f_j er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af X, þá segjum við að f_j stefni á u *í veikum skilningi* eða að f_j *stefni á u í skilningi dreififalla.* Þetta þýðir að

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\varphi(x)\, dx \to u(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X), \tag{20.3.6}$$

og við táknum þessa samleitni einnig með $f_j \to u$ og $\lim_{j\to+\infty} f_j = u$. □

Ef u_ε eru dreififöll sem háð eru breytunni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ þá skilgreinum við $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ með hliðstæðum hætti. Sama er að segja um $\lim_{t\to+\infty} u_t$ ef u_t eru dreififöll sem háð eru samfelldu breytunni t.

Setning 20.3.4 *Ef $f_\varepsilon \to \delta_0$, þá gildir*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon * \varphi(x) = \varphi(x), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Sönnun: Við tökum $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ og skilgreinum $\psi_x(y) = \varphi(x-y)$. Þá gildir

$$\begin{aligned} f_\varepsilon * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(y)\varphi(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(y)\psi_x(y)\,dy \to \psi_x(0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

■

Auðvelt er að finna föll sem stefna á δ-föll í veikum skilningi:

Setning 20.3.5 *Látum f vera heildanlegt fall á $\mathbb{R}^n$ með heildi jafnt 1 og setjum $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}f(x/\varepsilon)$. Þá stefnir f_ε á δ_0 í veikum skilningi ef $\varepsilon \to 0$.* □

Sönnun: Ef φ er takmarkað samfellt fall á $\mathbb{R}^n$, þá er

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}f(x/\varepsilon)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy \\ &\to \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy = \varphi(0) = \delta_0(\varphi). \end{aligned}$$

■

Sýnidæmi 20.3.6 (*Varmaleiðnikjarninn*). Í grein 16.2 sáum við hvernig varmaleiðnijafnan $\partial_t u - \kappa\Delta u = f$ er leyst á $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ með upphafsgildum $u(x,0) = \varphi(x)$ fyrir $x \in \mathbb{R}^n$. Þar fengum við að lausnin er gefin með földun $u(x,t) = E_t * \varphi + E * f$, þar sem E táknar varmaleiðnikjarnann.

$$E(x,t) = E_t(x) = H(t)\big(4\pi\kappa t\big)^{-n/2} e^{-x^2/4\kappa t}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \neq (0,0).$$

Við sjáum nú að ef við tökum $f(x) = \big(4\pi\big)^{-n/2}e^{-x^2/4}$ og setjum $\varepsilon = \sqrt{\kappa t}$, þá gefur setning 20.3.5 að

$$E_t \to \delta_0, \qquad t \to 0+\,.$$

□

Sýnidæmi 20.3.7 (*Poisson-kjarninn á efra hálfplaninu*). Annað áhugavert val á föllum sem stefna á δ-fallið er Poisson-kjarninn fyrir efra hálfplanið, sem kom fyrir í lausnarformúlunni fyrir Dirichlet-verkefnið á efra hálfplaninu í grein 17.4,

$$P_{\mathbb{H}_+}(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Ef við setjum nú $f(x) = 1/\pi(x^2+1)$, þá uppfyllir f skilyrðin í setningu 20.3.5 og $f_\varepsilon(x) = P_{\mathbb{H}_+}(x,\varepsilon)$. Þar með fáum við

$$P_{\mathbb{H}_+}(\cdot,y) \to \delta_0, \qquad y \to 0+\,.$$

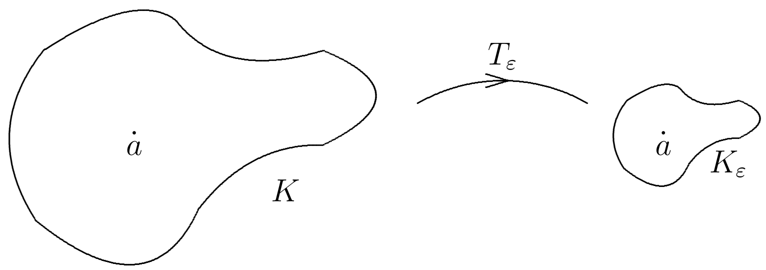
□

Snúum okkur nú að eðlisfræðilegum líkönum, þar sem δ-föll koma fyrir á náttúrulegan hátt:

Sýnidæmi 20.3.8 (*Massaþéttleiki, þyngdarmætti*). Lítum á hlut með massa M í þrívíðu rúmi á takmörkuðu svæði K og látum ϱ vera massaþéttleika hans. Þá er $\varrho(x) = 0$ ef $x = (x_1, x_2, x_3) \notin K$ og massi hlutarins er

$$M = \int_K \varrho(x)\, dx.$$

Hugsum okkur nú að a sé punktur í K og að massinn skreppi saman þannig að ögn í punkti x flyst yfir í punktinn $y = T_\varepsilon(x) = a + \varepsilon(x - a)$.



Mynd 18.1. Vörpunin T_ε.

Massaþéttleiki hinnar nýju massadreifingar í $K_\varepsilon = \{y = a + \varepsilon(x - a); x \in K\}$ er

$$\varrho_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-3}\varrho(a + (y - a)/\varepsilon).$$

Athugið að stuðullinn ε^{-3} er til kominn vegna þess að vörpunin T_ε breytir rúmmáli í hlutfallinu ε^3 og andhverfa hennar breytir rúmmáli í hlutfallinu ε^{-3}. Nú fáum við að

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \varrho_\varepsilon(y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon^{-3}\varrho(a + (y - a)/\varepsilon)\, dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)\, dx = M,\\
\int_{\mathbb{R}^3} \varrho_\varepsilon(y)\varphi(y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon^{-3}\varrho(a + (y - a)/\varepsilon)\varphi(y)\, dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)\varphi(a + \varepsilon(x - a))\, dx \to \varphi(a)\int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)\, dx = M\delta_a(\varphi).
\end{aligned}$$

Þessi útreikningur segir okkur að massaþéttleikinn ϱ_ε stefni á $M\delta_a$ í veikum skilningi. Við túlkum því δ_a sem massaþéttleika einingarpunktmassa í punktinum a.

Lítum nú á þyngdarmættið u_ε sem massinn skapar í rúminu. Samkvæmt þyngdarlögmáli Newtons er það gefið með formúlunni

$$u_\varepsilon(x) = -G\int_{K_\varepsilon} \frac{\varrho_\varepsilon(y)}{4\pi|x - y|}\, dy, \tag{20.3.7}$$

þar sem G táknar þyngdarfastann. Við getum skrifað þessa formúlu sem földunarheildi

$$u_\varepsilon(x) = G\big(E * \varrho_\varepsilon\big)(x), \tag{20.3.8}$$

þar sem

$$E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \tag{20.3.9}$$

táknar *Newton-mættið.* Ef við látum $\varepsilon \to 0$, þá fáum við

$$u_\varepsilon(x) \to \frac{-GM}{4\pi|x-a|} = GME(x-a). \tag{20.3.10}$$

Við getum því litið á Newton-mættið sem þyngdarmættið, sem punktmassi $M = 1/G$ í upphafspunkti skapar í rúminu. □

Sýnidæmi 20.3.9 (*Hleðsluþéttleiki, rafstöðumætti*). Nú skulum við líta á fallið ϱ í síðasta dæmi sem hleðsluþéttleika í K með heildarhleðsluna Q. Með nákvæmlega sömu rökum og áður fáum við þá að $\varrho_\varepsilon \to Q\delta_a$. Við túlkum því δ_a sem hleðsluþéttleika eingarpunkthleðslu í punktinum a.

Mætti rafstöðusviðsins sem hleðsludreifingin skapar í rúminu er gefin með

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{K_\varepsilon} \frac{\varrho_\varepsilon(y)}{4\pi|x-y|}\,dy = -\frac{1}{\epsilon_0}E * \varrho_\varepsilon(x), \tag{20.3.11}$$

þar sem E táknar Newton-mættið eins og áður og ϵ_0 er rafsvörunarstuðullinn í tómarúmi. Ef við látum $\varepsilon \to 0$, þá fáum við

$$u_\varepsilon(x) \to \frac{Q}{\epsilon_0}\cdot\frac{1}{4\pi|x-a|} = -\frac{Q}{\epsilon_0}E(x-a).$$

Við sjáum því að E er rafstöðumættið sem neikvæð hleðsla með styrk ϵ_0 í upphafspunkti hnitakerfisins skapar í rúminu. Í rafstöðufræði kallast $-E(x) = 1/4\pi|x|$ *Coulomb-mætti.* □

20.4 Veikar afleiður og grunnlausnir

Látum nú $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ og lítum á dreififallið $u_{\partial_j f}$. Með því að hlutheilda með tilliti til breytistærðarinnar x_j, þá fáum við

$$u_{\partial_j f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -u_f(\partial_j\varphi).$$

Nú er ljóst að $\varphi \mapsto -u_f(\partial_j\varphi)$ er línuleg vörpun og að hún skilgreinir dreififall. Ef $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, þá fáum við með ítrekaðri hlutheildun að

$$u_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u_f(\partial^\alpha\varphi). \tag{20.4.1}$$

Þessa formúlu leggjum við til grundvallar á skilgreiningu á afleiðum dreififalla:

Skilgreining 20.4.1 Látum u vera dreififall á opnu hlutmengi X í $\mathbb{R}^n$. Þá er hlutafleiða þess $\partial_j u$ skilgreind með

$$\partial_j u(\varphi) = -u(\partial_j \varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X), \tag{20.4.2}$$

og fyrir sérhvert fjölnúmer α skilgreinum við afleiðuna $\partial^\alpha u$ af u sem dreififallið

$$\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X).$$

Ef $u = u_f$, þar sem fallið f er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af X, þá nefnist $\partial^\alpha(u_f)$ *veika α hlutafleiðan* af f eða *α hlutafleiða f í skilningi dreififalla* og við skrifum þá $\partial^\alpha f$ í stað $\partial^\alpha(u_f)$, þegar ekki er um að villast að átt er við veiku hlutafleiðuna. □

Eins og fram hefur komið, þá er veika α hlutafleiðan af $f \in C^k(X)$ ekkert annað en dreififallið sem $\partial^\alpha f$ skilgreinir, þ.e.a.s.

$$\partial^\alpha(u_f) = u_{\partial^\alpha f},$$

og því getum við litið á hlutafleiður dreififalla sem alhæfingu á afleiðum venjulegra falla.

Við skilgreinum síðan hlutafleiðuvirkjann ∂^α, en hann úthlutar dreififallinu u hlutafleiðunni $\partial^\alpha u$. Í framhaldi af því getum við síðan skilgreint línulega hlutafleiðuvirkja

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha \tag{20.4.3}$$

og myndað afleiðujöfnur fyrir dreififöll

$$P(\partial)u = f, \tag{20.4.4}$$

þar sem f er gefið dreififall. Stuðlarnir a_α geta staðið fyrir tvinntölur eða jafnvel föll í $C^\infty(X)$. *Dreififallalausn* eða *veik lausn* er síðan $u \in \mathcal{D}'(X)$ sem uppfyllir jöfnuna.

Sýnidæmi 20.4.2 (*Veikar lausnir bylgjujöfnunnar*). Í grein 15.2 sáum við að lausn á bylgjujöfnunni $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 u = 0$ á $\mathbb{R}^2$ er af gerðinni

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{20.4.5}$$

og til þess að staðfesta að þetta sé lausn þá þarf að gera ráð fyrir að föllin f og g séu tvisvar samfellt deildanleg. Það kemur í ljós að bylgjujafnan er uppfyllt í veikum skilningi fyrir u af gerðinni (20.4.5), ef við gerum einungis ráð fyrir að föllin f og g séu heildanleg á takmörkuðum bilum. Við skulum nú staðfesta að þetta sé rétt.

Veika afleiðan af u er gefin með

$$\begin{aligned}\langle (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u, \varphi\rangle &= \langle u, (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)\varphi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x+ct) + g(x-ct)\big)\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi(x,t)\,dxdt,\end{aligned}$$

þar sem $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nú skiptum við yfir í kennihnit eins og í (18.2.4) og (18.2.5) og setjum $\psi(\xi,\eta) = \varphi(x,t)$. Þá er $\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi(x,t) = -4c^2\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)$ samkvæmt (18.2.6). Jacobi-ákveða hnitaskiptanna $(\xi,\eta) \mapsto (x,t)$ er $-1/2c$ og þar með er

$$\begin{aligned}\langle\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)u,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(\xi)+g(\eta)\big)\big(-4c^2\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\big)\,\frac{1}{2c}\,d\xi d\eta\\ &= -2c\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_\eta\partial_\xi\psi(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi\\ &\quad -2c\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0.\end{aligned}$$

Athugið að hér höfum við notfært okkur að ψ er 0 fyrir utan takmarkað mengi og því er

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_\eta\partial_\xi\psi(\xi,\eta)\,d\eta &= \Big[\partial_\xi\psi(\xi,\eta)\Big]_{\eta\to-\infty}^{\eta\to+\infty} = 0,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\,d\xi &= \Big[\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\Big]_{\xi\to-\infty}^{\xi\to+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Á mynd 15.1 er útbreiðslu bylgju lýst. Það eru brot í ferlinum, en það kemur ekki að sök, því við tökum lausn í veikum skilningi. □

Skilgreining 20.4.3 Látum $P(\partial)$ vera afleiðuvirkja með fastastuðla. Dreififall E sem uppfyllir jöfnuna

$$P(\partial)E = \delta \tag{20.4.6}$$

nefnist *grunnlausn* afleiðuvirkjans $P(\partial)$. □

Grunnlausnir hlutafleiðuvirkja eru mjög mikilvægar vegna þess að með þeim er hægt að ákvarða sérlausnir. Til þess að sjá það skulum við athuga að ef $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, þá er

$$\partial^\alpha u(\varphi) = \langle\partial^\alpha u,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u,\partial^\alpha\varphi\rangle = \langle u,(-\partial)^\alpha\varphi\rangle$$

og þar með er

$$\langle P(\partial)u,\varphi\rangle = \langle\sum a_\alpha\partial^\alpha u,\varphi\rangle = \langle u,\sum a_\alpha\big(-\partial\big)^\alpha\varphi\rangle = \langle u,P(-\partial)\varphi\rangle.$$

Athugum nú að fyrir fall F, sem er heildanlegt á þjöppuðum hlutmengjum í $\mathbb{R}^n$ er földunin $F*\varphi$ vel skilgreind ef $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ með formúlunni

$$F*\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\varphi(x-y)\,dy$$

og greinilegt er að $F*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, því við megum taka afleiður með tilliti til x undir heildið. Við fáum þá

$$\begin{aligned}P(\partial)\,F*\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(y)P(\partial_x)\varphi(x-y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(y)P(-\partial_y)\varphi(x-y)\,dy\\ &= \langle u_F, P(-\partial)\varphi(x-\cdot)\rangle\\ &= \langle P(\partial)u_F,\varphi(x-\cdot)\rangle.\end{aligned}$$

Hér táknar $P(-\partial)\varphi(x-\cdot)$ að hlutafleiðuvirkinn $P(-\partial)$ er látinn verka á $\varphi(x-y)$ með tilliti til y. Ef dreififallið $E = u_F$ er grunnlausn hlutafleiðuvirkjans $P(\partial)$, þá fáum við

$$P(\partial)\, F * \varphi(x) = \langle P(\partial)u_F, \varphi(x-\cdot)\rangle = \langle \delta, \varphi(x-\cdot)\rangle = \varphi(x).$$

Þar með er $u = F * \varphi$ lausn á hliðruðu jöfnunni $P(\partial)u = \varphi$.

Skilgreining 20.4.4 Ef $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, þá skilgreinum við földun u og φ með formúlunni

$$u * \varphi(x) = u(\varphi(x-\cdot)) = \langle u, \varphi(x-\cdot)\rangle. \tag{20.4.7}$$

□

Það er ekki erfitt að sýna fram á að $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ef $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ er grunnlausn hlutafleiðuvirkjans $P(\partial)$, þá er $u = E*\varphi$ sérlausn jöfnunnar $P(\partial)u = \varphi$. Þegar eiginleikar grunnlausnarinnar E eru þekktir þá er oft hægt að skipta á fallinu φ og falli f sem er ekki eins oft deildanlegt og φ og jafnvel ekki með þjappaða stoð, þannig að $u = E * f$ sé vel skilgreind lausn á $P(\partial)u = f$.

20.5 Grunnlausn bylgjuvirkjans

Í setningu 15.5.1 er að finna lausn einvíðu bylgjujöfnunnar $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 u = f$ með upphafsskilyrðum $u(x,0) = \varphi(x)$ og $\partial_t u(x,0) = \psi(x)$. Hún er gefin með d'Alembert-formúlunni

$$u(x,t) = \partial_t\big(E_t * \varphi\big)(x) + E_t * \psi(x) + E * f(x,t),$$

þar sem fallið E er gefið með

$$E(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct-x)H(ct+x) = \begin{cases} 1/2c, & |x| \le ct, \\ 0, & |x| > ct. \end{cases} \tag{20.5.1}$$

Þetta fall reynist vera grunnlausn bylgjuvirkjans. Til þess að staðfesta það, þurfum við að sýna að

$$\langle \big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle = \langle E, \big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi\rangle = \varphi(0,0), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Við notum nú sama rithátt og í grein 15.2, skiptum yfir í kennihnit og fáum þá á sama hátt og í sýnidæmi 18.3.2

$$\begin{aligned}
\langle \big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2c}H(ct-x)H(ct+x)\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi(x,t)\,dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2c}H(-\eta)H(\xi)(-4c^2\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta))\frac{1}{2c}\,d\xi d\eta \\
&= -\int_{-\infty}^{0}\bigg(\int_{0}^{+\infty} \partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\,d\xi\bigg)\,d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{0} \partial_\eta\psi(0,\eta)\,d\eta = \psi(0,0) = \varphi(0,0).
\end{aligned}$$

20.6 Grunnlausn varmaleiðnivirkjans

Varmaleiðnikjarninn E reynist vera grunnlausn varmaleiðnijöfnunnar. Við skulum sýna fram á það í tilfellinu $n = 1$. Tilfellið $n > 1$ gengur nánast eins fyrir sig. Til þess þurfum við að sýna að

$$\langle\big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle = \langle E, \big(-\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)\varphi\rangle = \varphi(0,0), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{20.6.1}$$

Við athugum að $E(x,t) = 0$ ef $t < 0$, svo

$$\langle\big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,t)\big(-\partial_t\varphi(x,t) - \kappa\partial_x^2\varphi(x,t)\big)\, dxdt. \tag{20.6.2}$$

Ef x er haldið föstu og heildað er með tilliti til t, þá fæst

$$\int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\big(-\partial_t\varphi(x,t)\big)\, dt = -\Big[E(x,t)\varphi(x,t)\Big]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t E(x,t)\varphi(x,t)\, dt. \tag{20.6.3}$$

Nú skulum við halda t föstu og hlutheilda með tilliti til x tvisvar sinnum. Fyrst $\varphi = 0$ fyrir utan takmarkað mengi, þá er

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,t)\partial_x^2\varphi(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 E(x,t)\varphi(x,t)\, dx. \tag{20.6.4}$$

Nú notfærum við okkur (20.6.3) og (20.6.4) í (20.6.2) og fáum þá

$$\begin{aligned}\langle\big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\, dx \\ &\qquad + \int_\varepsilon^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E(x,t)\varphi(x,t)\, dxdt\bigg) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa\varepsilon}} e^{-x^2/4\kappa\varepsilon}\varphi(x,\varepsilon)\, dx\bigg).\end{aligned}$$

Hér höfum við notfært okkur að E er lausn á varmaleiðnijöfnunni ef $t > 0$. Nú skiptum við um breytistærð og fáum að lokum

$$\langle\big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\varphi(\sqrt{4\kappa\varepsilon}\, y, \varepsilon)\, dy = \varphi(0,0).$$

20.7 Grunnlausn Laplace-virkjans

Nú snúum við okkur að Laplace-virkjanum. Í útreikningum okkar á Green-föllum í grein 17.7, gegndi fallið E, sem skilgreint er með

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n = 2, \\ \dfrac{-1}{4\pi|x|}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n = 3, \end{cases} \tag{20.7.1}$$

lykilhlutverki. Það reynist vera grunnlausn Laplace-virkjans. Við byrjum á tilfellinu $n = 2$. Athugum að formúlan yfir Laplace-virkjann í pólhnitum í viðauka D gefur að fyrir föll v af gerðinni $v(x_1, x_2) = g(r)$ er

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\Big(r\partial_r\big(r\partial_r\big) + \partial_\theta^2\Big)g(r) = \frac{1}{r}\big(rg'(r)\big)',$$

svo það er greinilegt að $\Delta E = 0$ á $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Til þess að staðfesta að E sé grunnlausn, þá þurfum við að sanna að

$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle E, \Delta\varphi\rangle = \delta(\varphi) = \varphi(0,0), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{20.7.2}$$

Við snúum þessari formúlu yfir í pólhnit og setjum $\psi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Þá fáum við að

$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle E, \Delta\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \ln r\left[\frac{1}{r}\partial_r\big(r\partial_r\psi\big) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\psi\right] r\,drd\theta.$$

Fallið ψ er 2π-lotubundið í θ og því er heildið af seinni liðnum 0. Við höfum einnig að $\psi(r,\theta) = 0$, ef r er nógu stórt, og því fáum við með hlutheildun

$$\begin{aligned}
\langle E, \Delta\varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \big(\ln r\big)\partial_r\big(r\partial_r\psi\big)\,drd\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Big[\big(\ln r\big)r\partial_r\psi\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \partial_r\psi\,dr\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(0,\theta)\,d\theta = \varphi(0,0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta = \varphi(0,0).
\end{aligned}$$

Í tilfellinu $n = 3$ er E gefið með formúlunni

$$E(x) = \frac{-1}{4\pi r}, \qquad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \tag{20.7.3}$$

Til þess að sýna fram á að þetta sé grunnlausn, þá snúum við yfir í kúluhnit og setjum $\psi(r,\theta,\phi) = \varphi(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$. Laplace-virkinn í kúluhnitum er gefinn í viðauka D. Þar með er

$$\begin{aligned}
\langle E, \Delta\varphi\rangle = \frac{-1}{4\pi}&\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \\
&\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2\partial_r\psi\big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\big(\sin\theta\partial_\theta\psi\big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi\right]r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi.
\end{aligned}$$

Nú er ψ 2π-lotubundið sem fall af ϕ og því er heildið af síðasta liðnum 0. Við höfum einnig að

$$\int_0^\pi \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\big(\sin\theta\partial_\theta\psi\big)r^2\sin\theta\,d\theta = \Big[\sin\theta\partial_\theta\psi\Big]_0^\pi = 0.$$

Eftir stendur því

$$\begin{aligned}\langle \Delta E, \varphi\rangle &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\partial_r\big(r^2\partial_r\psi\big)\sin\theta\, drd\theta d\phi\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{1}{r}r^2\partial_r\psi\right]_0^\infty + \int_0^\infty \partial_r\psi\, dr\right)\sin\theta\, d\theta d\phi\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(0,\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta d\phi = \varphi(0).\end{aligned}$$

Sýnidæmi 20.7.1 (*Hleðsluþéttleiki á línu og grunnlausn Laplace-virkjans*). Í sýnidæmi 18.2.9 sáum við að Coulomb-mættið er rafmætti sem hleðsla $Q = \epsilon_0$ í upphafspunktinum skapar í rúminu $\mathbb{R}^3$. Hugsum okkur nú jafna hleðsludreifingu ϱ_ℓ $[C/m]$ á línu ℓ í þrívíðu rúmi og veljum hnitakerfið þannig að línan fari gegnum punktinn (ξ, η) í planinu $\mathbb{R}^2$ og standi hornrétt á það. Með svipuðum rökum og í sýnidæmi 18.2.9 getum við sýnt fram á að þessi hleðsludreifing sé veikt markgildi af samfelldri hleðsludreifingu í sívalningi S_r með geislann r umhverfis línuna ℓ, sem skreppur saman í hleðsludreifingu á línunni ef $r \to 0+$. Við fáum þá að hleðsluþéttleikinn er dreififallið $\varrho_\ell\delta_\zeta$ og að rafmættið er lausn á tvívíðu Laplace-jöfnunni

$$\Delta V = -(\varrho_\ell/\epsilon_0)\delta_\zeta.$$

Mættið er þar með gefið með

$$V(z) = \frac{-\varrho_\ell}{\epsilon_0}E(z-\zeta) = \frac{-\varrho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln|z-\zeta|,$$

þar sem $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Grunnlausnin $E(z) = \big(\ln|z|\big)/2\pi$ er því sjálf rafstöðumættið sem línuhleðslan af styrk $-\epsilon_0$ á línunni gegnum $\zeta = 0$ skapar í rúminu. □

Sýnidæmi 20.7.2 (*Green-föll í rafstöðufræði*). Látum X vera takmarkað svæði í þrívíðu rúmi og gerum ráð fyrir að jaðar þess sé úr leiðandi efni. Ef punkthleðsla Q er staðsett í punktinum ξ í X þá skapast rafmætti u í svæðinu X sem uppfyllir $-\epsilon\Delta u = Q\delta_\xi$, því hleðsluþéttleikinn er $Q\delta_\xi$, og u er núll á jaðrinum. Ef við gefum okkur að til sé Green-fall á svæðinu X, þá uppfyllir fallið

$$x \mapsto v(x) = G(x,\xi) = E(x-\xi) + w_X(x,\xi)$$

jöfnuna $\Delta v = \delta_\xi$ og v er núll á jaðrinum. Þar með segir ótvíræðnisetningin fyrir Dirichlet-verkefnið að

$$u(x) = -\frac{Q}{\epsilon}G(x,\xi), \qquad x \in X.$$

□

20.8 Fourier-ummyndun af dreififöllum og grunnlausnir

Við ætlum nú að reifa mjög lauslega hvernig Fourier-ummyndun er alhæfð yfir á dreififöll. Við skulum byrja á því að taka $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Þá segir reikniregla (xii) að

$$u_{\widehat{f}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx = u_f(\widehat{\varphi}). \tag{20.8.1}$$

Út frá þessari formúlu gæti maður í fljótheitum ályktað að hægt sé að skilgreina Fourier-mynd $\widehat{u}$ af hvaða dreififalli $u \in \mathbb{D}'(\mathbb{R})$ sem er með formúlunni $\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi})$. Það er rangt, því $\widehat{\varphi} \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$ og þar með er $u(\widehat{\varphi})$ ekki skilgreint. Við skilgreinum nú nýtt fallarúm sem inniheldur $C_0^\infty(\mathbb{R})$:

Skilgreining 20.8.1 Rúm allra falla $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, sem uppfylla

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |x^\mu \varphi^{(\nu)}(x)| < +\infty, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, \tag{20.8.2}$$

nefnist *fallarúm Schwartz* eða *Schwartz-fallarúmið*. Við táknum það með $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\square$

Athugið að $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ og að skilyrðið (20.8.2) segir að sérhver afleiða af falli í $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stefni hraðar á 0 í $\pm\infty$ en hvaða neikvætt veldi af x sem er. Dæmi um fall $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R})$ er $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

Skilgreining 20.8.2 Línuleg vörpun $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, nefnist *Schwartz-dreififall* , ef hún er samfelld í þeim skilningi að

$$u(\varphi_j) \to u(\varphi), \qquad j \to +\infty, \tag{20.8.3}$$

þar sem $\varphi_j \to \varphi$ í $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, en með því er átt við að

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |x^\mu (\varphi_j^{(\nu)}(x) - \varphi^{(\nu)}(x))| \to 0, \qquad j \to +\infty, \tag{20.8.4}$$

fyrir öll $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$. Rúm allra Schwartz-dreififalla nefnum við *dreififallrúm Schwartz* eða *Schwartz-dreififallarúmið* og við táknum það með $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$\square$

Sérhvert stak í $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ skilgreinir sjálfkrafa stak í $\mathbb{D}'(\mathbb{R})$ og því getum við litið á $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sem hlutrúm í $\mathbb{D}'(\mathbb{R})$. Reiknireglurnar (ix) og (x) segja okkur að Fourier-ummyndunin sé gagntæk vörpun á $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ og jafnframt að $\widehat{\varphi}_j \to \widehat{\varphi}$ í $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ef $\varphi_j \to \varphi$ í $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Þess vegna fæst eðlileg alhæfing á Fourier-ummyndun frá $L^1(\mathbb{R})$ yfir á $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

Skilgreining 20.8.3 Ef $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, þá skilgreinum við Fourier-myndina $\widehat{u} = \mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ með formúlunni

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}). \tag{20.8.5}$$

$\square$

Það er ljóst að sérhvert fall $f \in L^1(\mathbb{R})$ skilgreinir Schwartz-dreififall, $u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, og að (20.8.5) er alhæfing á (20.8.1).

Sýnidæmi 20.8.4 Dirac-fallið δ_a er greinilega í $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ og

$$\widehat{\delta}_a(\varphi) = \widehat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixa}\varphi(x)\, dx. \tag{20.8.6}$$

Þar með er $\widehat{\delta}_a$ gefið sem u_f með $f(\xi) = e^{-ia\xi}$. Við skrifum því

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = e^{-ia\xi}. \tag{20.8.7}$$

Við getum einnig litið svo á að hér hafi δ-fallið í punktinum a verkað á fallið $x \mapsto e^{-ix\xi}$, en samkvæmt skilgreiningu úthlutar δ_a fallinu φ gildi sínu $\varphi(a)$ í punktinum a. $\square$

Sýnidæmi 20.8.5 Lítum nú á dreififallið $u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ með $f(x) = \cos x$,

$$u_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\, \varphi(x)\, dx.$$

Við notum nú andhverfuformúlu Fouriers og fáum

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_f(\varphi) = u_f(\widehat{\varphi}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\, \widehat{\varphi}(x)\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\widehat{\varphi}(x)\, dx + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix}\widehat{\varphi}(x)\, dx \\
&= \pi\big(\varphi(1) + \varphi(-1)\big) = \pi\big(\delta_1(\varphi) + \delta_{-1}(\varphi)\big).
\end{aligned}$$

Formúlan verður því

$$\widehat{\cos} = \pi\big(\delta_1 + \delta_{-1}\big). \tag{20.8.8}$$

$\square$

Reiknireglurnar (ix) og (x) eru óbreyttar fyrir Fourier-myndir Schwartz-dreififalla, því

$$\mathcal{F}\{u'\} = i\xi\mathcal{F}u, \qquad \mathcal{F}\{xu\} = i\big(\mathcal{F}u\big)', \tag{20.8.9}$$

með þrepun fæst,

$$\mathcal{F}\{u^{(k)}\} = (i\xi)^k\mathcal{F}u, \qquad \mathcal{F}\{x^k u\} = i^k\big(\mathcal{F}u\big)^{(k)}, \tag{20.8.10}$$

og að lokum

$$\mathcal{F}\{P(D)u\} = P(i\xi)\mathcal{F}u,$$

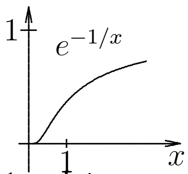
ef $P(D)$ er afleiðuvirki með fastastuðla. Látum nú E vera grunnlausn virkjans $P(D)$ og gerum ráð fyrir að $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Þá uppfyllir E jöfnuna $P(D)E = \delta$. Ef við tökum Fourier-mynd beggja vegna jafnaðarmerkisins og gefum okkur að $\xi \mapsto P(i\xi)$ hafi enga núllstöð á raunásnum, þá fáum við

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{1}{P(i\xi)}. \tag{20.8.11}$$

Við reiknuðum út andhverfu Fourier-myndina af þessu falli í setningu 6.5.2. Niðurstaðan verður því:

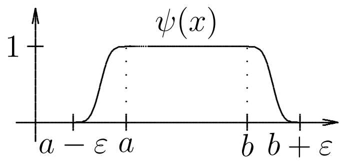
Setning 20.8.6 *Látum P vera margliðu af stigi ≥ 2, gerum ráð fyrir að P hafi engar núllstöðvar á þverásnum og látum E vera andhverfu Fourier-myndina af fallinu $\xi \mapsto 1/P(i\xi)$, sem gefið er með formúlunni (16.5.7). Þá er E grunnlausn afleiðuvirkjans $P(D)$.*
$\square$

20.9 Æfingardæmi



1. Látum $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera fallið, sem skilgreint er með $\varphi(x) = x^{-a}e^{-1/x}$ ef $x > 0$ og $\varphi(x) = 0$ ef $x \leq 0$, þar sem $a \in \mathbb{R}$. Sýnið að $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. [*Leiðbeining:* Sýnið með þrepun að $\varphi^{(n)}(x) = x^{-a}P_n(1/x)e^{-1/x}$, $x > 0$, þar sem P_n er margliða og að af því leiði að $\varphi^{(n)}(0)$ er til fyrir öll n.]

1. Látum a og b vera tvær rauntölur, $a < b$. Notið niðurstöðuna úr dæmi 1 til þess að sýna að til sé fall $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ þannig að $\varphi(x) > 0$, ef $x \in]a, b[$, $\varphi(x) = 0$, ef $x \notin]a, b[$ og $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$.



3. Látum $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ og $\varepsilon > 0$. Sýnið að til sé fall $\psi \in C_0^\infty([a - \varepsilon, b + \varepsilon])$ þannig að $\psi(x) = 1$ ef $x \in [a, b]$. [*Leiðbeining:* Látum φ vera fallið í dæmi 2, þar sem skipt er á a og $-\varepsilon/2$ og b og $\varepsilon/2$ og látum fallið χ vera skilgreint sem $\chi(x) = 1$ ef $x \in [a - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2]$ og $\chi(x) = 0$ ef $x \notin [a - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2]$. Setjið síðan $\psi(x) = \chi * \varphi(x)$.]

2. Látum $f, g \in C(X)$, þar sem X er opið mengi á $\mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að $u_f = u_g$. Sýnið að $f = g$.

3. Fyrir sérhvert $t \in \mathbb{R}$ skilgreinum við $f_t(x) = t^N e^{itx}$, þar sem N er jákvæð heiltala. Sýnið að $f_t \to 0$ í veikum skilningi ef $t \to \pm\infty$.

[*Leiðbeining:* Hlutheildið þar til veldið á t hefur lækkað niður í -1.]

4. * Látum f_t vera fallið $f_t(x) = tH(x)e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$, þar sem H er Heaviside-fallið. Sýnið að $f_t \to i\delta$ í veikum skilningi ef $t \to +\infty$.

5. Sýnið að $f_t(x) = t^2|x|\cos(tx) \to -2\delta$ í veikum skilningi ef $t \to +\infty$.

6. Reiknið út $x^j\delta_0^{(k)}$ fyrir allar heilar tölur $j \geq 0$ og $k \geq 0$.

7. Ákvarðið allar veikar lausnir á $\mathbb{R}$ á jöfnunum:
(i) $xu' = \delta_0$, (ii) $xu' = \delta_1 - \delta_{-1}$, (iii) $u'' = \delta_0{}' - 2\delta_1$.

8. Reiknið út Fourier-myndir dreififallanna u_f þar sem $f(x)$ er gefið með formúlunum
a) $\sin x$, b) x^k, c) $(1 + x)^6$.

9. Reiknið út Fourier-myndir dreififallanna u, sem gefin eru og skrifið $\widehat{u}(\xi) = F(\xi)$ ef Fourier-myndin er á forminu u_F, þar sem F er fall:
a) $\delta_a^{(k)}$, b) $\delta_a - \delta_{-a}$, c) $\delta_a + \delta_{-a}$.

10. abcd) Sýnið með beinum reikningum að föllin E, sem fengust í dæmi 6.5.3 séu grunnlausnir afleiðuvirkjanna $P(D)$.

Kafli 21

MISMUNAAÐFERÐIR

21.1 Inngangur

Nú snúum við okkur að tölulegum aðferðum til þess að nálga lausnir á upphafs- og jaðargildisverkefnum fyrir venjulegar afleiðujöfnur og hlutafleiðujöfnur, en fram til þessa höfum við einungis fengist við fræðilegar lausnir. Það er undantekning frekar en regla að hægt sé að finna lausnarformúlu fyrir verkefnin, þannig að við þurfum að geta fundið nálganir á lausnum. Það er sjálfsagt að reyna að hafa aðferðirnar eins almennar og kostur er. Í þessum kafla fjöllum við um *mismunaaðferðir* (e. *finite difference methods*) og í næsta kafla fjöllum við um *bútaaðferðir* (e. *finite element methods*).

Mismunaaðferðirnar hafa marga góða þann kosti og einkum þann að auðvelt er að útfæra þær. Þær hafa hins vegar þann ókost að snúið er að útfæra þær fyrir hlutafleiðujöfnur á öðrum svæðum en rétthyrningum. Bútaaðferðirnar eru aftur á móti flóknari í útfærslu, en hafa þann kost að hægt er að útfærða þær á alls kyns svæðum í planinu.

Við lítum fyrst á jaðargildisverkefni fyrir almenna annars stigs afleiðujöfnu á bili $[a, b]$ með raungildum stuðlum $a_0, a_1, a_2 \in C[a, b]$,

$$(21.1.1)\qquad \begin{cases} Lu = a_2u'' + a_1u' + a_0u = f, & \text{á }]a, b[\\ B_1u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = \gamma_1, & (\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0), \\ B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, & (\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

og raungildri hægri hlið f. Við munum eftir því að tilvistarsetningarnar fyrir annars stigs jöfnur gerðu ráð fyrir því að a_2 hefði enga núllstöð á bilinu og þess vegna er engin takmörkun að gera ráð fyrir að $a_2(x) < 0$ í öllum punktum $x \in [a, b]$.

Í kafla 14 umrituðum við virkjann yfir á Sturm-Liouville form,

$$Lu = \varrho^{-1}\big(-(pu')' + qu\big) = f,$$

með

$$p = \exp\Big(\int a_1(x)/a_2(x)\, dx + C\Big), \quad q = -a_0p/a_2 \ \text{ og } \ \varrho = -p/a_2.$$

Afleiðujafnan $Lu = f$ jafngildir því $-(pu')' + qu = \varrho f$. Með því að skipta út ϱf fyrir f í þessari jöfnu, þá sjáum við að það er engin takmörkun að gera ráð fyrir að $\varrho = 1$ og því ætlum við að takmarka okkur við verkefnið

$$
\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = -pu'' - p'u' + qu = f, & \text{á }]a,b[\\ B_1u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = \gamma_1, & (\alpha_1,\beta_1) \neq (0,0), \\ B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, & (\alpha_2,\beta_2) \neq (0,0), \end{cases} \tag{21.1.2}
$$

þar sem við gerum ráð fyrir að $p \in C^1[a,b]$, $p(x) > 0$, $q \in C[a,b]$ og $q(x) \in \mathbb{R}$ fyrir öll $x \in [a,b]$.

Kosturinn við þessa framsetningu er að aðferðirnar alhæfast yfir á jaðargildisverkefni fyrir hlutafleiðujöfnur af gerðinni

$$
\begin{cases} Lu = -\nabla\cdot(p\nabla u) + qu = -p\nabla^2 u - \nabla p \cdot \nabla u + qu = f, & \text{á } D \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = \gamma, \qquad \text{á } \partial D, \end{cases} \tag{21.1.3}
$$

þar sem D svæði í planinu $\mathbb{R}^2$, ∂D táknar jaðar þess, $p \in C^1(D)$, $q, f \in C(D)$ eru gefin föll á D og α, β og γ eru gefin föll á jaðrinum.

Við gerum ráð fyrir að í sérhverjum punkti (x,y) á ∂D sé $(\alpha(x,y), \beta(x,y)) \neq (0,0)$.

Athugið að í öllum punktum (x,y) á ∂D þar sem $\beta(x,y) = 0$ er gildi lausnarinnar gefið, $u(x,y) = \gamma(x,y)/\alpha(x,y)$. Munið að $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ og $\mathbf{n}$ táknar ytri þvervigurinn á jaðarinn. Ef svæðið hefur horn, þá er ytri þvervigurinn ekki vel skilgreindur þar, svo við verðum að túlka jaðargildin þannig að jafnan gildi í öllum punktum þar sem β er núll og í öllum punktum þar sem þvervigurinn er til.

Eðlilega er miklu flóknara að fást við nálganir á hlutafleiðujöfnum á almennum svæðum miðað við nálganir á venjulegum afleiðujöfnum á bili, en aðferðirnar sem við fáumst við hér eins hugsaðar og bera sömu nöfn, mismunaaðferðir.

21.2 Mismunaaðferð fyrir venjulegar afleiðujöfnur

Mismunaaðferðir eru til í mörgum afbrigðum og við skulum lýsa einfaldasta afbrigðinu í fyrstu umferð. Við byrjum á því að velja okkur skiptingu

$$
a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b
$$

á bilinu $[a,b]$. Einfaldast er að taka jafna skiptingu. Látum $h = (b-a)/N$ tákna lengd hlutbilanna. Þá er $x_j = a + jh$, $j = 0,\dots,N$, og þar með $x_{j-1} = x_j - h$ og $x_{j+1} = x_j + h$.

Í punktunum x_j uppfyllir lausnin u á (21.1.1) jöfnurnar

$$
\begin{cases} \alpha_1 u(x_0) - \beta_1 u'(x_0) = \gamma_1, \\ a_2(x_j)u''(x_j) + a_1(x_j)u'(x_j) + a_0(x_j)u(x_j) = f(x_j), & j = 1,\dots,N-1, \\ \alpha_2 u(x_N) + \beta_2 u'(x_N) = \gamma_2. \end{cases} \tag{21.2.1}
$$

Til einföldunar skrifum við $u_j = u(x_j)$ og $f_j = f(x_j)$. Við ætlum nú að setja fram $(N+1)\times(N+1)$ línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ fyrir nálgunargildi þar sem hnit lausnarinnar $\mathbf{c}$ eru nálgunargildi $c_j \approx u_j$. Hugmyndin er nú að skipta út gildunum á afleiðunum $u'(x_j)$ og $u''(x_j)$ fyrir mismunakvóta í þessum jöfnum, stinga síðan c_j inn í mismunakvótana og setja fram línulegt jöfnuhneppi sem nálgunargildin eiga að uppfylla.

Mismunajafna í vinstri endapunkti

Í endapunktinum $a = x_0$ notum við nálgum við afleiðu með mismunakvóta

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

skiptum á afleiðunni og mismunakvótanum í fyrstu jöfnu (21.2.1)

$$\alpha_1 u_0 - \beta_1 \frac{u_1 - u_0}{h} \approx \gamma_1$$

og stingum að lokum inn c_0 og c_1 inn í hana í stað u_0 og u_1 til þess að fá mismunajöfnu

$$\alpha_1 c_0 - \beta_1 \frac{c_1 - c_0}{h} = \gamma_1.$$

Mismunajafna í innri punktum bilsins

Í innri punktum bilsins x_j, $j = 1, \dots, N-1$, nálgum við afleiður með miðsettum mismunakvótum

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \qquad \text{og} \qquad u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2},$$

skiptum á afleiðum og mismunakvótum í miðjöfnu (21.2.1)

$$a_2(x_j)\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + a_1(x_j)\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + a_0(x_j)u_j \approx f_j,$$

og stingum inn c_{j-1}, c_j og c_{j+1} fyrir u_{j-1}, u_j og u_{j+1} til þess að fá jöfnur fyrir nálgunargildin

$$a_2(x_j)\frac{c_{j-1} - 2c_j + c_{j+1}}{h^2} + a_1(x_j)\frac{c_{j+1} - c_{j-1}}{2h} + a_0(x_j)c_j = f_j.$$

Mismunajafna í hægri endapunkti

Í hægri endapunktinum $b = x_N$ notum við nálgunarformúluna

$$u'(x) \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h},$$

skiptum á afleiðu og mismunakvóta í síðustu jöfnu (21.2.1)

$$\alpha_2 u_N + \beta_2 \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \approx \gamma_2$$

og stingum síðan inn c_{N-1} og c_N fyrir u_{N-1} og u_N til þess að fá nálgunarjöfnuna

$$\alpha_2 c_N + \beta_2 \frac{c_N - c_{N-1}}{h} = \gamma_2.$$

Heppið

Nú drögum við nálgunarjöfnurnar saman í eitt línulegt $(N+1)\times(N+1)$ hneppi,

$$
\begin{cases}
\alpha_1 c_0 - \beta_1 \dfrac{c_1 - c_0}{h} = \gamma_1, \\
a_2(x_j)\dfrac{c_{j-1} - 2c_j + c_{j+1}}{h^2} + a_1(x_j)\dfrac{c_{j+1} - c_{j-1}}{2h} + a_0(x_j)c_j = f_j, \\
\alpha_2 c_N + \beta_2 \dfrac{c_N - c_{N-1}}{h} = \gamma_2.
\end{cases} \tag{21.2.2}
$$

Það er betra að skoða þetta hneppi eftir að búið er að raða breytunum í rétta röð,

$$
\begin{cases}
\big(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{h}\big)c_0 - \frac{\beta_1}{h}c_1 = \gamma_1, \\
\big(\frac{a_2(x_j)}{h^2} - \frac{a_1(x_j)}{2h}\big)c_{j-1} + \big(-\frac{2a_2(x_j)}{h^2} + a_0(x_j)\big)c_j + \big(\frac{a_2(x_j)}{h^2} + \frac{a_1(x_j)}{2h}\big)c_{j+1} = f_j, \\
-\frac{\beta_2}{h}c_{N-1} + \big(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{h}\big)c_N = \gamma_2,
\end{cases} \tag{21.2.3}
$$

þar sem $j = 1, \dots, N-1$ í miðjöfnunni.

Það er auðvelt að búa til forrit sem les inn öll gögnin sem gefin eru í jaðargildisverkefninu (21.1.1) auk tölunnar N og reiknar út nálgunargildin. Fyrstu dæmin í dæmakaflanum fjalla um þetta viðfangsefni.

Það er fróðlegt að glöggva sig á útleiðslunni með því að fara í gegnum hana í ákveðnu dæmi:

Sýnidæmi 21.2.1 Reiknum út nálgunargildi fyrir jaðargildisverkefnið

$$
\begin{cases}
-(1+x)u'' - u' + 2u = -((1+x)u')' + 2u = f, \quad \text{á }]0,1[, \\
u(0) = 1, \qquad u(1) + u'(1) = 0,
\end{cases}
$$

í punktunum $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ og 1.

Lausn: Skiptingin er $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ og $x_3 = 1$ og billengdin $h = \frac{1}{3}$. Við getum að sjálfsögðu stungið viðeigandi gildum inn í jöfnuhneppið hér fyrir framan, en það er bæði einfaldara og lærdómsríkara að leiða jöfnurnar út.

Punktur $x_0 = 0$: Hér er gildið á u gefið, $u(0) = 1$. Nálgunarjafnan segir ekkert meira en að nálgunargildið á að vera rétta gildið,

$$
c_0 = 1.
$$

Punktur $x_1 = \frac{1}{3}$: Við setjum mismunakvótana inn fyrir afleiðurnar og fáum

$$
-(1+x_1)\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} - \frac{u_2 - u_0}{2h} + 2u_1 \approx f_1.
$$

Nú gerum við jöfnu úr þessu sem nálgunargildin eiga að uppfylla,

$$
-(1+\tfrac{1}{3})\frac{c_0 - 2c_1 + c_2}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{c_2 - c_0}{2\cdot\frac{1}{3}} + 2c_1 = \tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{21}{2}c_0 + 26c_1 - \tfrac{27}{2}c_2 = \tfrac{1}{3}.
$$

Punktur $x_2 = \frac{2}{3}$: Við endurtökum þessa reikninga en hækkum númerið um 1 á öllum liðum

$$-(1+x_2)\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} - \frac{u_3 - u_1}{2h} + 2u_2 \approx f_2.$$

Tilsvarandi jafna fyrir nálgunargildin er því

$$-(1+\tfrac{2}{3})\frac{c_1 - 2c_2 + c_3}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{c_3 - c_1}{2\cdot\frac{1}{3}} + 2c_2 = \tfrac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{27}{2}c_1 + 32c_2 - \tfrac{33}{2}c_2 = \tfrac{2}{3}.$$

Punktur $x_3 = 1$: Nú líkjum við eftir jaðarskilyrðinu

$$u_3 + \frac{u_3 - u_2}{h} \approx 0.$$

Jafnan fyrir nálgunargildin er

$$c_3 + \frac{c_3 - c_2}{\frac{1}{3}} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -3c_2 + 4c_3 = 0.$$

Nú eru allar jöfnurnar komnar og við setjum þær fram á fylkjaformi $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{21}{2} & 26 & -\frac{27}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{27}{2} & 32 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Niðurstaðan er $c_0 = 1.0000$, $c_1 = 0.6756$, $c_2 = 0.4987$ og $c_3 = 0.3740$. $\square$

Skekkjumat

Áður en við segjum skilið við þetta jöfnuhneppi, þá skulum við leggja mat á stigið í nálgunarformúlunum sem við höfum notað Það gerum við með því að taka fall $\varphi \in C^4(I)$ á bili I sem inniheldur punktinn og nota formúlu Taylors, sem segir að

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) &= \varphi(x) + \varphi'(x)h + \tfrac{1}{2}\varphi''(x)h^2 + \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)h^3 + \tfrac{1}{24}\varphi^{(4)}(\xi)h^4, \\ \varphi(x-h) &= \varphi(x) - \varphi'(x)h + \tfrac{1}{2}\varphi''(x)h^2 - \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)h^3 + \tfrac{1}{24}\varphi^{(4)}(\eta)h^4. \end{aligned}$$

þar sem ξ er á milli x og $x+h$ og η er á milli x og $x-h$. Skekkjurnar í nálgununum sem við höfum notað eru

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= -\tfrac{1}{2}\varphi''(x)h - \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)h^2 - \tfrac{1}{24}\varphi^{(4)}(\xi)h^3, \\ \varphi'(x) - \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} &= \tfrac{1}{2}\varphi''(x)h - \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)h^2 + \tfrac{1}{24}\varphi^{(4)}(\eta)h^3, \\ \varphi'(x) - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} &= -\tfrac{1}{12}\varphi'''(x)h^2 - \tfrac{1}{48}\big(\varphi^{(4)}(\xi) - \varphi^{(4)}(\eta)\big)h^3, \\ \varphi''(x) - \frac{\varphi(x-h) - 2\varphi(x) + \varphi(x+h)}{h^2} &= -\tfrac{1}{24}\big(\varphi^{(4)}(\xi) + \varphi^{(4)}(\eta)\big)h^2. \end{aligned}$$

Hér sjáum við að fyrstu tvær formúlurnar gefa okkur skekkju af fyrsta stigi í h, sem þýðir að hægt er að meta skekkjuna minni en Ch ar sem C er fasti, en hinar gefa okkur skekkju af öðru stigi sem þýðir að hægt er að meta skekkjuna með Ch^2, sem er að sjálfsögðu miklu betra.

Þegar við leiðum út nálgunarjöfnur fyrir jaðargildisverkefni, þá reynum við að haga því þannig að allar nálganir sem við gerum séu af sama stigi. Í þessu fyrsta afbrigði er þessu ekki þannig háttað, því við notuðum aðeins fyrsta stigs nálgun í jaðarskilyrðunum en annars stigs nálgun á afleiðunum í innri punktum. Næst ætlum við að bæta úr þessu.

21.3 Heildun yfir hlutbil

Það eru margar leiðir til þess að setja fram nálgunarjöfnuhneppi fyrir jaðargildisverkefnið okkar. Nú ætlum við að kynna til sögunnar aðra aðferð fyrir sama verkefni, en nota Sturm-Liouville-gerð þess,

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, & \text{á }]a,b[\\ \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2. \end{cases} \tag{21.3.1}$$

Ef $[c,d] \subset [a,b]$ er hlutbil og við heildum alla liði afleiðujöfnunnar $Lu = f$ yfir þetta bil, þá fáum við jöfnuna

$$p(c)u'(c) - p(d)u'(d) + \int_c^d q(x)u(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx. \tag{21.3.2}$$

Nú ætlum við að setja fram nálgunarjöfnu fyrir þessa jöfnu með því að skipta út afleiðunum fyrir mismunakvóta og heildunum fyrir nálganir byggðar á einu fallgildi í $[c,d]$.

Við gerum áfram ráð fyrir að skiptingin á bilinu sé jöfn $x_j = a + jh$, látum $m_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) = x_j + \frac{1}{2}h$ tákna miðpunkta hlutbilanna $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ og til einföldunar setjum við $u_j = u(x_j)$, $f_j = f(x_j)$, $p_j = p(x_j)$, $p(m_j) = p_{j+\frac{1}{2}}$ og $q_j = q(x_j)$ fyrir öll j. Athugið að við skrifum $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ o.s.frv..

Mismunajafna í vinstri endapunkti bilsins

Við nýtum okkur að u er lausn á afleiðujöfnunnar og heildum alla liði hennar yfir bilið $[x_0, m_0]$,

$$p(x_0)u'(x_0) - p(m_0)u'(m_0) + \int_{x_0}^{m_0} qu\,dx = \int_{x_0}^{m_0} f\,dx,$$

leysum síðan $u'(x_0) = u'(a)$ út úr þessari jöfnu

$$u'(x_0) = \frac{1}{p(x_0)}\left(p(m_0)u'(m_0) - \int_{x_0}^{m_0} q(x)u(x)\,dx + \int_{x_0}^{m_0} f(x)\,dx\right)$$

og setjum inn í jaðarskilyrðið í x_0. Það gefur okkur jöfnuna

$$\alpha_1 u(x_0) - \frac{\beta_1}{p(x_0)}\left(p(m_0)u'(m_0) - \int_{x_0}^{m_0} qu\,dx + \int_{x_0}^{m_0} f\,dx\right) = \gamma_1.$$

Nú er $m_0 - x_0 = \frac{1}{2}h$, svo við fáum nálgunarjöfnu með því að skipta á afleiðu og mismunakvóta og nálga heildin með margfeldi af billengd og gildi í vinstri endapunkti hlutbilsins,

$$\alpha_1 u_0 - \frac{\beta_1}{p_0}\left(p_{\frac{1}{2}}\frac{u_1 - u_0}{h} - \tfrac{1}{2}hq_0u_0 + \tfrac{1}{2}hf_0\right) \approx \gamma_1.$$

Næst setjum við inn nálgunargildin c_0 og c_1 í stað u_0 og u_1 og búum til nálgunarjöfnu

$$\alpha_1 c_0 - \frac{\beta_1}{p_0}\left(p_{\frac{1}{2}}\frac{c_1 - c_0}{h} - \tfrac{1}{2}hq_0c_0 + \tfrac{1}{2}hf_0\right) = \gamma_1.$$

Mismunajöfnur í innri punktum skiptingarinnar

Tökum nú $j = 1, \dots, N-1$. Þá er x_j miðpunktur bilsins $[m_{j-1}, m_j]$, sem hefur lengdina h og (21.3.2) gefur

$$p(m_{j-1})u'(m_{j-1}) - p(m_j)u'(m_j) + \int_{m_{j-1}}^{m_j} q(x)u(x)\,dx = \int_{m_{j-1}}^{m_j} f(x)\,dx.$$

Við nálgum afleiðugildin með mismunakvótum

$$u'(m_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \qquad \text{og} \qquad u'(m_{j-1}) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h},$$

heildin með miðpunktsnálgun

$$\int_{m_{j-1}}^{m_j} q(x)u(x)\,dx \approx hq_ju_j \qquad \text{og} \qquad \int_{m_{j-1}}^{m_j} f(x)\,dx \approx hf_j$$

og búum til nálgunarjöfnu með því að skipta út afleiðugildunum fyrir mismunakvótana og heildunum fyrir miðpunktsnálganirnar,

$$p_{j-\frac{1}{2}}\frac{u_j - u_{j-1}}{h} - p_{j+\frac{1}{2}}\frac{u_{j+1} - u_j}{h} + hq_ju_j \approx hf_j.$$

Við breytum þessari nálgunarjöfnu í venjulega jöfnu með því að setja inn nálgunargildin c_{j-1}, c_j og c_{j+1} fyrir réttu fallgildin u_{j-1}, u_j og u_{j+1} og deila öllum liðum með h

$$p_{j-\frac{1}{2}}\frac{c_j - c_{j-1}}{h^2} - p_{j+\frac{1}{2}}\frac{c_{j+1} - c_j}{h^2} + q_jc_j = f_j.$$

Mismunajafna í hægri endapunkti

Nú þurfum við að finna nálgunarjöfnu fyrir jaðarskilyrðið í punktinum $b = x_N$,

$$\alpha_2 u(x_N) + \beta_2 u'(x_N) = \gamma_2.$$

Við heildum alla liði afleiðujöfnunnar yfir bilið $[m_{N-1}, x_N]$ og fáum

$$-p(x_N)u'(x_N) + p(m_{N-1})u'(m_{N-1}) + \int_{m_{N-1}}^{x_N} q(x)u(x)\,dx = \int_{m_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx,$$

leysum $u'(x_N)$ út úr þessari jöfnu

$$u'(x_N) = \frac{1}{p(x_N)}\left(p(m_{N-1})u'(x_{N-1}) + \int_{x_{N-1}}^{x_N} q(x)u(x)\,dx - \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx\right)$$

og stingum inn í jaðarskilyrðið

$$\alpha_2 u(x_N) + \frac{\beta_2}{p(x_N)}\left(p(m_{N-1})u'(m_{N-1}) + \int_{m_{N-1}}^{x_N} qu\,dx - \int_{m_{N-1}}^{x_N} f\,dx\right) = \gamma_2.$$

Síðan skiptum við á afleiðu og mismunakvóta og nálgum heildin með margfeldi af billengd og gildi í hægri endapunkti hlutbilsins,

$$\alpha_2 u_N + \frac{\beta_2}{p_N}\left(p_{N-\frac12}\frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \tfrac12 h q_N u_N - \tfrac12 h f_N\right) \approx \gamma_2.$$

Við setjum að lokum c_{N-1} og c_N í stað u_{N-1} og u_N og erum þá komin með síðustu jöfnuna fyrir nálgunargildin

$$\alpha_2 c_N + \frac{\beta_2}{p_N}\left(p_{N-\frac12}\frac{c_N - c_{N-1}}{h} + \tfrac12 h q_N c_N - \tfrac12 h f_N\right) = \gamma_2.$$

Nálgunarjöfnuhneppið

Línulega jöfnuhneppið fyrir nálgunargildin, sem við leiddum út hér að framan er

$$\begin{cases} \alpha_1 c_0 - \dfrac{\beta_1}{p_0}\left(p_{\frac12}\dfrac{c_1 - c_0}{h} - \tfrac12 h q_0 c_0 + \tfrac12 h f_0\right) = \gamma_1. \\ p_{j-\frac12}\dfrac{c_j - c_{j-1}}{h^2} - p_{j+\frac12}\dfrac{c_{j+1} - c_j}{h^2} + q_j c_j = f_j. \\ \alpha_2 c_N + \dfrac{\beta_2}{p_N}\left(p_{N-\frac12}\dfrac{c_N - c_{N-1}}{h} + \tfrac12 h q_N c_N - \tfrac12 h f_N\right) = \gamma_2. \end{cases} \tag{21.3.3}$$

Nú röðum við óþekktu stærðunum í rétta röð og fáum $(N+1)\times(N+1)$ línulegt jöfnuheppi fyrir gildin c_j,

$$\begin{cases} \left(\alpha_1 + \dfrac{\beta_1}{p_0}\left(\dfrac{p_{\frac12}}{h} + \tfrac12 h q_0\right)\right)c_0 - \dfrac{\beta_1 p_{\frac12}}{p_0 h}c_1 = \gamma_1 + \tfrac12\dfrac{\beta_1 h f_0}{p_0}, \\ -\dfrac{p_{j-\frac12}}{h^2}c_{j-1} + \left(\dfrac{p_{j-\frac12} + p_{j+\frac12}}{h^2} + q_j\right)c_j - \dfrac{p_{j+\frac12}}{h^2}c_{j+1} = f_j, \\ -\dfrac{\beta_2 p_{N-\frac12}}{p_N h}c_{N-1} + \left(\alpha_2 + \dfrac{\beta_2}{p_N}\left(\dfrac{p_{N-\frac12}}{h} + \tfrac12 h q_N\right)\right)c_N = \gamma_2 + \tfrac12\dfrac{\beta_2 h}{p_N}f_N. \end{cases} \tag{21.3.4}$$

Sýnidæmi 21.3.1 Reiknum út nálgunargildi fyrir jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} -(1+x)u'' - u' + 2u = -((1+x)u')' + 2u = f, & \text{á }]0,1[, \\ u(0) = 1, \qquad u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

í punktunum $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ og 1 með því að beita heildun yfir hlutbil.

Lausn: Þetta er endurtekning á sýnidæmi 21.2.1. Skiptingin er $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ og $x_3 = 1$ og billengdin $h = \frac{1}{3}$. Miðpunktarnir eru $m_0 = \frac{1}{6}$, $m_1 = \frac{1}{2}$ og $m_2 = \frac{5}{6}$. Við förum líkt að og í úrlausn okkar á sýnidæmi 21.2.1 og útfærum heildunina yfir hlutbilin.

Punktur $x_0 = 0$: Hér er gildið á u gefið og nálgunarjafnan er $c_0 = 1$.

Punktur $x_1 = \frac{1}{3}$: Heildum yfir hlutbilið $[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$,

$$-\Big[(1+x)u'(x)\Big]_{m_0}^{m_1} + 2\int_{m_0}^{m_1} u(x)\,dx = \tfrac{7}{6}u'(\tfrac{1}{6}) - \tfrac{3}{2}u'(\tfrac{1}{2}) + 2\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} u(x)\,dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} x\,dx = \tfrac{1}{9}.$$

Við skiptum út afleiðum fyrir mismunakvóta og miðpunktsnálgun fyrir heildið í þessari jöfnu,

$$\tfrac{7}{6}\frac{u_1 - u_0}{h} - \tfrac{3}{2}\frac{u_2 - u_1}{h} + 2hu_1 \approx \tfrac{1}{9},$$

búum til nálgunarjöfnur og deilum að lokum öllum liðum með $h = \frac{1}{3}$

$$\tfrac{7}{6}\frac{c_1 - c_0}{\frac{1}{3}} - \tfrac{3}{2}\frac{c_2 - c_1}{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \tfrac{1}{3}c_1 = \tfrac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{21}{2}c_0 + 26c_1 - \tfrac{27}{2}c_2 = \tfrac{1}{3}.$$

Punktur $x_2 = \frac{2}{3}$: Við heildum yfir hlutbilið $[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$ og endurtökum reikningana, en það þýðir hækkum á númerinu um 1 á öllum liðum

$$-\Big[(1+x)u'(x)\Big]_{m_1}^{m_2} + 2\int_{m_1}^{m_2} u(x)\,dx = \tfrac{3}{2}u'(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{11}{6}u'(\tfrac{5}{6}) + 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} u(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} x\,dx = \tfrac{2}{9}.$$

Við skiptum út afleiðum fyrir mismunakvóta og miðpunktsnálgun fyrir heildið

$$\tfrac{3}{2}\frac{u_2 - u_1}{h} - \tfrac{11}{6}\frac{u_3 - u_2}{h} + 2hu_2 \approx \tfrac{2}{9}.$$

Nú setjum við nálgunargildin í stað réttu gildanna, deilum einnig öllum liðum með $h = \frac{1}{3}$ og búum til nálgunarjöfnur

$$\tfrac{3}{2}\frac{c_2 - c_1}{\frac{1}{3}} - \tfrac{11}{6}\frac{c_3 - c_2}{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \tfrac{1}{3}c_2 = \tfrac{2}{9} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{27}{2}c_1 + 32c_2 - \tfrac{33}{2}c_3 = \tfrac{2}{3}.$$

Punktur $x_3 = 1$: Við heildum yfir hlutbilið $[\frac{5}{6}, 1]$ og fáum

$$-\Big[(1+x)u'(x)\Big]_{m_2}^{x_3} + 2\int_{m_2}^{x_3} u(x)\,dx = \tfrac{11}{6}u'(\tfrac{5}{6}) - 2u'(1) + 2\int_{\frac{5}{6}}^{1} u(x)\,dx = \int_{\frac{5}{6}}^{1} x\,dx = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{72}.$$

Í útleiðslunni hér að framan, leystum við $u'(1)$ úr úr þessari jöfnu og stungum inn í jöfnuna fyrir jaðargildin. Við getum eins snúið því við leyst $u'(1) = -u(1) = -u_3$ út úr jaðargildunum og stungið inn í þessa jöfnu. Það gefur

$$\tfrac{11}{6}\frac{u_3 - u_2}{h} + 2u_3 + 2 \cdot \tfrac{1}{6}u_3 \approx \tfrac{11}{72}.$$

Þetta gefur okkur síðustu nálgunarjöfnuna og við deilum í alla liði hennar með $h = \frac{1}{3}$

$$\tfrac{11}{6}\frac{c_3 - c_2}{\frac{1}{3}} + 2c_3 + \tfrac{1}{3}c_3 = \tfrac{11}{72} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{33}{2}c_2 + \tfrac{47}{2}c_3 = \tfrac{11}{24}.$$

Þrjár fyrstu línur jöfnuhneppisins $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eru þær sömu og í jöfnuhneppinu í 21.5.1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{21}{2} & 26 & -\frac{27}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{27}{2} & 32 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{33}{2} & \frac{47}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}$$

Niðurstaðan er $c_0 = 1.0000$, $c_1 = 0.7119$, $c_2 = 0.5192$ og $c_3 = 0.3840$. □

Nálgunarjöfnur fyrir almennar skiptingar

Í útleiðslu okkar hér að framan gerðum við ráð fyrir að skiptingin væri jöfn. Ef við höfum almenna skiptingu, látum $h_j = x_{j+1} - x_j$ tákna lengdina á hlutbilinu $[x_j, x_{j+1}]$ og heildum yfir hlutbil eins og hér að framan, þá fáum við nýtt jöfnuhneppi fyrir nálgunargildin,

(21.3.5)
$$\begin{cases} \left(\alpha_1 + \dfrac{\beta_1}{p_0}\left(\dfrac{p_{\frac{1}{2}}}{h_0} + \tfrac{1}{2}h_0 q_0\right)\right)c_0 - \dfrac{\beta_1 p_{\frac{1}{2}}}{p_0 h_0}c_1 = \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\dfrac{\beta_1 h_0 f_0}{p_0}, \\ -\dfrac{2p_{j-\frac{1}{2}}}{(h_{j-1}+h_j)h_j}c_{j-1} + \left(\dfrac{2p_{j-\frac{1}{2}}}{(h_{j-1}+h_j)h_{j-1}} + \dfrac{2p_{j+\frac{1}{2}}}{(h_{j-1}+h_j)h_j} + q_j\right)c_j - \dfrac{2p_{j+\frac{1}{2}}}{(h_{j-1}+h_j)h_j}c_{j+1} = f_j, \\ -\dfrac{\beta_2 p_{N-\frac{1}{2}}}{p_N h_{N-1}}c_{N-1} + \left(\alpha_2 + \dfrac{\beta_2}{p_N}\left(\dfrac{p_{N-\frac{1}{2}}}{h_{N-1}} + \tfrac{1}{2}h_{N-1}q_N\right)\right)c_N = \gamma_2 + \tfrac{1}{2}\dfrac{\beta_2 h_{N-1}}{p_N}f_N. \end{cases}$$

Línuleg brúun og þúfugrunnföll

Þegar nálgunargildin $c_j \approx u_j$ hafa verið ákvörðuð út frá mismunajöfnunum, er eðlilegt að nota línulega brúun á milli þeirra til þess að finna fall v sem nálgar u í öllum punktum bilsins $[a, b]$

Þess vegna skilgreinum við *nálgunarfall* $v \in C[a, b]$, sem tekur gildið c_j í punktinum x_j og er þannig að graf þess á bilinu $[x_j, x_{j+1}]$ er línustrik. Þá er auðvelt að sjá að

(21.3.6)
$$v = c_0\varphi_0 + \cdots + c_N\varphi_N,$$

Þar sem $\big(\varphi_j\big)_{j=0}^N$ tákna *þúfugrunnföllin* sem skiptingin $\big(x_j\big)_{j=0}^N$ skilgreinir, en φ_j er samfellda fallið sem tekur gildið 1 í x_j, tekur gildið 0 í öllum hinum skiptingarpunktunum og hefur graf sem er línustrik á sérhverju hlutbilanna $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, N-1$. Við getum skrifað upp formúlur fyrir föllunum φ_j og afleiðum þeirra,

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{annars}, \end{cases} \qquad \varphi_0'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{h_0}, & x \in]x_0, x_1[, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_1], \end{cases}$$

(21.3.7)
$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{h_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{annars}. \end{cases} \quad \varphi_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{j-1}}, & x \in]x_{j-1}, x_j[, \\ \frac{-1}{h_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases}$$

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{m-1}}{h_{m-1}}, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ 0, & \text{annars}. \end{cases} \quad \varphi_m'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{m-1}}, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ 0, & \text{annars}. \end{cases}$$

21.4 Staðarskekkjur í mismunasamböndum

Lítum nú aftur á jafna skiptingu á $[a, b]$ með billengd $h = (b - a)/N$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b, \quad x_j = x_0 + jh, \quad m_j = x_j + \tfrac{1}{2}h.$$

Í þessum punktum uppfyllir lausnin u á jaðargildisverkefninu jöfnuhneppið

(21.4.1)
$$\begin{cases} B_1u = \alpha_1 u_0 - \beta_1 u'(x_0) = \gamma_1 \\ Lu(x_j) = -p(x_j)u''(x_j) - p'(x_j)u'(x_j) + q_j u_j = f_j, \\ B_2u = \alpha_2 u_N + \beta_2 u'(x_N) = \gamma_2, \end{cases}$$

þar sem $j = 1, \ldots, N - 1$. Samkvæmt (21.3.3) uppfyllir nálgunarlausnin

$$v(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_N\varphi_N(x),$$

jöfnuhneppið
(21.4.2)
$$\begin{cases} M_0v = \alpha_1 v(x_0) - \dfrac{\beta_1}{p_0}\bigg(p_{\frac{1}{2}}\dfrac{v(x_1) - v(x_0)}{h} - \tfrac{1}{2}hq_0v(x_0) + \dfrac{1}{2}hf_0\bigg) = \gamma_1, \\ M_jv = -p_{j+\frac{1}{2}}\dfrac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h^2} + p_{j-\frac{1}{2}}\dfrac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h^2} + q_jv(x_j) = f_j, \\ M_Nv = \alpha_2 v(x_N) + \dfrac{\beta_2}{p_N}\bigg(p_{N-\frac{1}{2}}\dfrac{v(x_N) - v(x_{N-1})}{h} + \tfrac{1}{2}hq_Nv(x_N) - \tfrac{1}{2}hf_N\bigg) = \gamma_2, \end{cases}$$

þar sem $j = 1, \ldots, N - 1$. Athugið að við getum reiknað út $M_0\varphi, \ldots, M_n\varphi$ fyrir hvaða $\varphi \in C[a, b]$ sem er og þá sérstaklega lausnina u á jaðargildisverkefninu. Við köllum M_j *mismunavirkja* (e. *difference operator*) vegna þess að M_j er vörpun sem úthlutar falli φ gildi $M_j\varphi$ sem er skilgreint út frá mismunakvótum fallsins φ. Til þess að kanna samræmið milli jöfnuhneppanna (21.4.1) og (21.4.2) stingum við $u(x)$ í stað $v(x)$ inn í síðara jöfnuhneppið og tökum mismuninn,

$$S_0u = B_1u - M_0u, \quad S_ju = Lu(x_j) - M_ju, \; j = 1, \ldots, N - 1, \qquad S_Nu = B_2u - M_Nu.$$

Þessar stærðir nefnast *staðarskekkjur* (e. *local truncation error*) *mismunavirkjanna* M_j í punktunum x_j. Við segjum að mismunasamböndin $M_0u, \dots, M_Nu$ *samræmist* jaðargildisverkefninu (21.1.2) ef allar staðarskekkjurnar S_ju stefna á 0 þegar fínleiki skiptingarinnar h stefnir á 0. Þetta þýðir að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að

$$|S_ju| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll } j = 0, \dots, N \quad \text{og} \quad h = (b-a)/N < \delta.$$

Setning Taylors

Áður en við hefjum glímuna við að meta staðarskekkjur í mismunasamböndum, skulum við rifja upp setningu Taylors sem er helsta tólið sem við höfum til þess að gera staðbundnar nálganir á föllum. Hún segir að fyrir sérhvert fall $\varphi \in C^m(I)$, þar sem I er bil og sérhvern punkt $x \in I$, gildir

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + \tfrac{1}{2}\varphi''(x)h^2 + \cdots + \tfrac{1}{m!}\varphi^{(m)}(x)h^m + \varepsilon_m(x,h)$$

þar sem skekkjan $\varepsilon_m(x,h)$ í nálgun á $\varphi(x+h)$ með Taylor-margliðu φ í hægri hlið jöfnunnar uppfyllir

$$\frac{\varepsilon_m(x,h)}{h^m} \to 0, \qquad h \to 0.$$

Ef $\varphi \in C^{m+1}(I)$, þá er til punktur ξ milli x og $x+h$ þannig að

$$\varepsilon_m(x,h) = \tfrac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}$$

og við fáum betra mat,

$$|\varepsilon_m(x,h)| \le Ch^{m+1},$$

með $C \ge \max_{t\in I} \frac{1}{(m+1)!}|\varphi^{(m+1)}(t)|$.

Stig og óvera

Við þurfum oft að meta stærðir $\chi(h)$ og viljum gefa til kynna hversu hratt þær stefna á 0 ef h stefnir á 0. Þá er eðlilegt að bera $\chi(h)$ saman við veldi h^k með veldisvísinn $k \in \mathbb{R}_+$, $(k \ge 0)$. Við segjum að $\chi(h)$ sé af *stigi* k eða k*-ta stigi* eða að $\chi(h)$ sé *stórt o af* h^k og táknum það með $\chi(h) = O(h^k)$, ef til eru fastar $C > 0$ og $c > 0$, þannig að

$$|\chi(h)| \le Ch^k, \qquad h \in]0, c].$$

Við segjum að $\chi(h)$ sé *óvera af* h^k eða að $\chi(h)$ sé *lítið o af* h^k og táknum það $\chi(h) = o(h^k)$, ef

$$\frac{\chi(h)}{h^k} \to 0, \qquad h \to 0.$$

Ef $0 \le j < k$ og $\chi(h) = O(h^k)$ (eða $\chi(h) = o(h^k)$), þá er $\chi(h)/h^j = O(h^{k-j})$ (eða $\chi(h)/h^j = o(h^{k-j})$).

Ef við stillum upp jöfnum

$$\chi(h) = O(1),\ \chi(h) = o(1),\ \chi(h) = O(h),\ \chi(h) = o(h),\ \chi(h) = O(h^2),\ \chi(h) = o(h^2), \dots.$$

og lítum á þær sem skekkjumat, þá fer matið á $\chi(h)$ sem við lesum út úr þessum jöfnum batnandi þegar við lesum línuna frá vinstri til hægri.

Sem dæmi er eðlilegt að taka Taylor-nálgunina sem við nefndum hér að framan, en setning Taylors segir að

$$\varepsilon_m(x,h) = o(h^m) \quad \text{ef } \ \varphi \in C^m[a,b] \quad \text{ og } \quad \varepsilon_m(x,h) = O(h^{m+1}) \quad \text{ef } \ \varphi \in C^{m+1}[a,b].$$

Hugsum okkur að við séum með tvö föll χ_1 og χ_2 og að við höfum skekkjumatið $\chi_1(h) = O(h^{k_1})$ og $\chi_2(h) = O(h^{k_2})$. Þá er

$$|\chi_1(h)\chi_2(h)| \le C_1 h^{k_1} C_2 h^{k_2} = C_1 C_2 h^{k_1+k_2}$$

sem segir okkur að $\chi_1(h)\chi_2(h) = h^{k_1+k_2}$. Fyrir summuna höfum við hins vegar

$$|\chi_1(h) + \chi_2(h)| \le C_1 h^{k_1} + C_2 h^{k_2} \le (C_1 + C_2) h^{\min\{k_1,k_2\}}, \qquad h \le 1,$$

og það segir okkur að $\chi_1(h) + \chi_2(h) = O(h^{\min\{k_1,k_2\}})$.

Athugið að þegar skrifað er $\chi_1(h) = \chi_2(h) + O(h^k)$, þá er átt við að nálgunin á $\chi_1(h)$ með $\chi_2(h)$ hafi skekkju af stigi k, sem jafngildir því að segja að $\chi_1(h) - \chi_2(h) = O(h^k)$.

Mat á staðarskekkju

Þegar við metum staðarskekkju í mismunasamböndunum, þá skrifum við punktana $x_{j-1} = x_j - h$ og $x_{j+1} = x_j + h$ og lítum á $S_j u$ sem fall af h. Síðan viljum við finna hæsta mögulega veldi á k þannig að $S_j u(h) = O(h^k)$ eða $S_j u(h) = o(h^k)$.

Staðarskekkja í vinstri endapunkti

Við lítum nú á vinstri endapunktinn $x_0 = a$ og könnum staðarskekkju nálgunarlausnarinnar í honum. Til einföldunar skulum við skrifa x í stað x_0,

$$\begin{aligned}
S_0 u(h) &= \alpha_1 u(x) - \beta_1 u'(x) \\
&\quad - \alpha_1 u(x) + \frac{\beta_1}{p(x)}\Big(p(x + \tfrac{1}{2}h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \tfrac{1}{2}hq(x)u(x) + \tfrac{1}{2}hf(x)\Big) \\
&= -\frac{\beta_1}{p(x)}\Big(p(x)u'(x) - p(x + \tfrac{1}{2}h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \tfrac{1}{2}hq(x)u(x) - \tfrac{1}{2}hf(x)\Big)
\end{aligned}$$

Samkvæmt forsendu er $p \in C^1[a,b]$ og af því leiðir að $u \in C^2[a,b]$. Af Taylor-setningunni leiðir því að

$$\begin{aligned}
p(x + \tfrac{1}{2}h) &= p(x) + \tfrac{1}{2}hp'(x) + o(h) \\
\frac{u(x+h) - u(x)}{h} &= u'(x) + \tfrac{1}{2}hu''(x) + o(h).
\end{aligned}$$

Nú margföldum við saman alla liði og fáum

$$\begin{aligned} p(x+\tfrac{1}{2}h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} &= \big(p(x)+\tfrac{1}{2}hp'(x)+o(h)\big)\big(u'(x)+\tfrac{1}{2}hu''(x)+o(h)\big) \\ &= p(x)u'(x)+\tfrac{1}{2}h\big(p(x)u''(x)+p'(x)u'(x)\big)+o(h). \end{aligned}$$

Með því að setja þessar nálganir inn í formúluna hér að framan og notfæra okkur að u uppfyllir afleiðujöfnuna í punktinum x fáum við

$$S_0u(h) \;=\; -\frac{\beta_1 h}{2p(x)}\Big(-p(x)u''(x) - p'(x)u'(x) + q(x)u(x) - f(x)\Big) + o(h) \;=\; o(h).$$

Annar en síðri möguleiki á nálgun jaðarskilyrðisins

Nú er tækifæri til þess að útskýra hvers vegna við völdum ekki nálgunina

$$\alpha_1 u_0 - \beta_1\frac{u_1-u_0}{h} \approx \gamma_1,$$

en hún gefur af sér mismunajöfnuna

$$\widetilde{M}_0 v = \alpha_1 v(x_0) - \beta_1\frac{v(x_1)-v(x_0)}{h} = \gamma_1,$$

og staðarskekkjuna (hér er $x = x_0$),

$$\widetilde{S}_0u(h) = B_1u - \widetilde{M}_0u = -\beta_1\Big(u'(x) - \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\Big) = \beta_1\big(-\tfrac{1}{2}hu''(x)+o(h)\big) = O(h).$$

Fyrri nálgunaraðferðin er betri því hún hefur staðarskekkju $S_0u(h) = o(h)$, sem er betra mat en $O(h)$.

Staðarskekkja í innri punktum

Tökum nú innri punkt í skiptingunni x_j með $j = 1, \dots, N-1$. Fyrir hann er

$$\begin{aligned} S_ju(h) =& Lu(x_j) - M_ju \\ =& -p(x_j)u''(x_j) - p'(x_j)u'(x_j) \\ &+ p(m_j)\frac{u(x_j+h)-u(x_j)}{h^2} + p(m_{j-1})\frac{u(x_j-h)-u(x_j)}{h^2} \end{aligned}$$

Nú þurfum við fjórar Taylor-liðanir. Til einföldunar setjum við x í stað x_j og fáum

$$\begin{aligned} p(m_j) &= p(x+\tfrac{1}{2}h) = p(x) + \tfrac{1}{2}p'(x)h + o(h), \\ p(m_{j-1}) &= p(x-\tfrac{1}{2}h) = p(x) - \tfrac{1}{2}p'(x)h + o(h), \\ \frac{u(x+h)-u(x)}{h^2} &= \frac{1}{h}u'(x) + \tfrac{1}{2}u''(x) + o(1), \\ \frac{u(x-h)-u(x)}{h^2} &= -\frac{1}{h}u'(x) + \tfrac{1}{2}u''(x) + o(1), \end{aligned}$$

Þetta gefur

$$
\begin{aligned}
p(m_j)&\frac{u(x+h)-u(x)}{h^2}+p(m_{j-1})\frac{u(x-h)-u(x)}{h^2}\\
&=\big(p(x)+\tfrac{1}{2}p'(x)h+o(h)\big)\big(\frac{1}{h}u'(x)+\tfrac{1}{2}u''(x)+o(1)\big)\\
&+\big(p(x)-\tfrac{1}{2}p'(x)h+o(h)\big)\big(-\frac{1}{h}u'(x)+\tfrac{1}{2}u''(x)+o(1)\big)\\
&=p(x)u''(x)+p'(x)u'(x)+o(1)
\end{aligned}
$$

Af þessu leiðir að

$$
S_ju(h)=o(1)\to 0, \qquad h\to 0.
$$

Þetta segir okkur að það er samræmi milli afleiðujöfnunnar og mismunajöfnunnar í punktinum x_j.

Staðarskekkja í innri punktum með betri forsendum

Þegar við fengumst við veldaraðalausnir á afleiðujöfnum, þá sáum við að lausn u á jöfnunni $Lu = f$ er gefin með veldaröð í grennd um sérhvern punkt, ef föllin p, q og f eru gefin með veldaröðum í grennd um sérhvern punkt. Fallið u er þá óendanlega oft deildanlegt og við getum tekið eins marga liði í Taylor-nálgun og við viljum. Setjum til einföldunar x í stað x_j og lítum aftur á Taylor-liðanir okkar,

$$
\begin{aligned}
p(m_j)&=p(x+\tfrac{1}{2}h)=p(x)+\tfrac{1}{2}p'(x)h+O(h^2),\\
p(m_{j-1})&=p(x-\tfrac{1}{2}h)=p(x)-\tfrac{1}{2}p'(x)h+O(h^2),\\
\frac{u(x+h)-u(x)}{h^2}&=\frac{1}{h}u'(x)+\tfrac{1}{2}u''(x)+\tfrac{1}{6}u'''(x)h+O(h^2),\\
\frac{u(x-h)-u(x)}{h^2}&=-\frac{1}{h}u'(x)+\tfrac{1}{2}u''(x)-\tfrac{1}{6}u'''(x)h+O(h^2).
\end{aligned}
$$

Við fáum nú endurbót á reikningi okkar hér að framan því þriðja stigs afleiðan fellur út

$$
\begin{aligned}
p(m_j)&\frac{u(x+h)-u(x)}{h^2}+p(m_{j-1})\frac{u(x-h)-u(x)}{h^2}\\
&=\big(p(x)+\tfrac{1}{2}p'(x)h+O(h^2)\big)\big(\frac{1}{h}u'(x)+\tfrac{1}{2}u''(x)+\tfrac{1}{6}u'''(x)h+O(h^2)\big)\\
&+\big(p(x)-\tfrac{1}{2}p'(x)h+O(h^2)\big)\big(-\frac{1}{h}u'(x)+\tfrac{1}{2}u''(x)-\tfrac{1}{6}u'''(x)h+O(h^2)\big)\\
&=p(x)u''(x)+p'(x)u'(x)+O(h^2)
\end{aligned}
$$

Af þessu leiðir að skekkjumatið verður miklu betra,

$$
S_ju(h)=O(h^2).
$$

miðað við $S_ju(h) = o(1)$ sem fæst þegar aðeins má gera ráð fyrir að $p \in C^1[a,b]$ og $u \in C^2[a,b]$. Athugið að við getum ekki fengið skekkumat með hærra stigi en 2, þótt við tækjum fleiri liðið því fjórða stigs liðurinn hverfur ekki eins og þriðja stigs liðurinn gerir hér.

Staðarskekkja í hægri endapunkti $x_N = b$

Nú gefum við okkur aftur að $p \in C^1[a,b]$ og $u \in C^2[a,b]$ og lítum á hægri endapunkt $x_N = b$. Til einföldunar skrifum við x í stað x_N. Þá er

$$S_N u(h) = -\frac{\beta_2}{p(x)}\bigg(-p(x)u'(x) - p(x-\tfrac{1}{2}h)\frac{u(x-h)-u(x)}{h} + \tfrac{1}{2}hq(x)u(x) - \tfrac{1}{2}hf(x)\bigg)$$

Með Taylor-liðun fáum við

$$\begin{aligned} p(x-\tfrac{1}{2}h)\frac{u(x-h)-u(x)}{h} &= \big(p(x) - \tfrac{1}{2}hp'(x) + o(h)\big)\big(-u'(x) + \tfrac{1}{2}hu''(x) + o(h)\big) \\ &= -p(x)u'(x) + \tfrac{1}{2}h\big(p(x)u''(x) + p'(x)u'(x)\big) + o(h) \end{aligned}$$

Við smeygjum hægri hliðinni inn í jöfnuna hér að framan, notfærum okkur að u er lausn á afleiðujöfnunni og fáum

$$S_N u(h) = -\frac{\beta_2 h}{2p(x)}\bigg(-p(x)u''(x) - p'(x)u'(x) + q(x)u(x) - f(x)\bigg) + o(h) = o(h).$$

Ef við getum rökstutt að $p \in C^2[a,b]$ og $u \in C^3[a,b]$, eins og í tilfellinu þegar p, q og f eru gefin með veldaröðum í grennd um sérhvern punkt, þá höfum við betri Taylor-nálganir

$$\begin{aligned} p(x-\tfrac{1}{2}h)\frac{u(x-h)-u(x)}{h} &= \big(p(x) - \tfrac{1}{2}hp'(x) + O(h^2)\big)\big(-u'(x) + \tfrac{1}{2}hu''(x) + O(h^2)\big) \\ &= -p(x)u'(x) + \tfrac{1}{2}h\big(p(x)u''(x) + p'(x)u'(x)\big) + O(h^2). \end{aligned}$$

Það gefur skekkjumatið $S_N u(h) = O(h^2)$ sem bætir $o(h)$-matið hér að framan.

Samantekt á mismunaaðferð með heildun yfir hlutbil

Við höfum nú farið í gegnum útfærslu á mismunaaðferð með heildun yfir hlutbil til þess að finna nálgun á lausn $u(x)$ á (21.1.2). Við reiknum út nálgunarfall $v = c_0\varphi_0 + \cdots + c_N\varphi_N$, þar sem $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ eru þúfugrunnföll fyrir skiptingu $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ á bilinu $[a,b]$, sem má velja hvernig sem er, og stuðlarnir c_j eru lausn á ákveðnu línulegu jöfnuhneppi, sem við leiddum út frá afleiðujöfnunni og jaðarskilyrðunum. Útleiðslan miðast við að við fengjum góða nálgun á $u(x_j)$ með c_j. Þetta gerðum við með því að heilda jöfnuna sem lausnin u uppfyllir yfir bil milli miðpunkta bilanna sitt hvorum megin við x_j, skipta út afleiðum fyrir mismunakvóta og heildum fyrir eins punkts nálganir og bjuggum þannig til nálgunarjöfnuhneppi. Við höfum ekki sannað að nálgunarlausnin $v(x)$ stefni á $u(x)$ ef fínleiki skiptingarinnar stefnir á 0, en við höfum sýnt að það er samræmi milli u og v í þeim skilningi að staðarskekkjurnar mismunasambandanna sem úrlausnin byggir á stefna allar á 0.

21.5 Mismunaaðferð fyrir hlutafleiðujöfnur

Nú tökum við fyrir jaðargildisverkefnið (21.1.3) og leiðum út nálgunarjöfnur í punktum í rétthyrndu neti í plani. Við köllum aðferðina *heildun yfir hlutsvæði*, en hún er alhæfing á heildun yfir hlutbil sem við sáum hér fyrr í kaflanum. Það er ákveðin hagræðing í því til þess að byrja með að skipta jaðrinum í tvö sundurlæg mengi $\partial D = \partial_1 D \cup \partial_2 D$, þar sem

$$\partial_1 D = \{(x,y) \in \partial D\,;\, \beta(x,y) = 0\} \qquad \text{og} \qquad \partial_2 D = \{(x,y) \in \partial D\,;\, \beta(x,y) \neq 0\}.$$

Í punktum $(x,y) \in \partial_1 D$ eru gildi lausnarinnar gefin $u(x,y) = \gamma(x,y)/\alpha(x,y)$, svo við getum eins skipt út γ fyrir γ/α á þessum hluta jaðarsins. Við skulum því gera ráð fyrir að jaðargildisverkefnið sé

$$\begin{cases} Lu = -\nabla \cdot (p\nabla u) + qu = f, & \text{á } D \\ u = \gamma, & \text{á } \partial_1 D, \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = \gamma, & \text{á } \partial_2 D, \end{cases} \tag{21.5.1}$$

Ef $\partial_1 D = \partial D$, þá erum við með *Dirichlet jaðarskilyrði*, sem þýðir að lausnin er þekkt á öllum jaðrinum.

Net

Hugsum okkur að svæðið D sé innihaldið í rétthyrningnum

$$R = \{(x,y)\,;\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

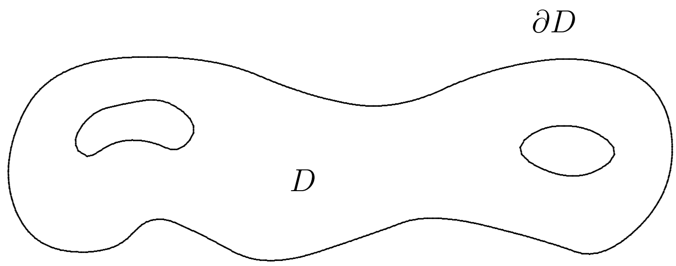
Tökum nú $h > 0$ og lítum á rétthyrnda netið með möskvastærðina h gegnum hornpunktinn (a,c), en það hefur hnútpunktana

$$x = a + mh \qquad \text{og} \qquad y = c + nh, \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Línurnar gegnum hnútpunktana eru stikaðar með

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (a + mh, t) \qquad \text{og} \qquad \mathbb{R} \ni s \mapsto (s, c + nh).$$

Línurnar skera $\overline{D} = D \cup \partial D$ í punktum (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, M$, sem er raðað þannig að punktar númer 1 til $N \leq M$ eru í $D \cup \partial_2 D$, þar sem fallgildi u eru óþekkt, en (x_j, y_j) fyrir $j = N+1, \ldots, M$ eru þá punktarnir í $\partial_1 D$, þar sem fallgildi u eru þekkt.



Mynd: *Svæðið D. Teiknið inn netið og merkið punktana* (x_j, y_j)*!*

Heildun yfir hlutsvæði

Sundurleitnisetningin, sem einnig er nefnd Gauss-setning, segir að

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{V}\, dA = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, ds, \tag{21.5.2}$$

fyrir sérhvert samfellt deildanlegt vigursvið $\mathbf{V}$ sem skilgreint er í grennd um $\overline{\Omega}$. Gera þarf ráð fyrir að jaðarinn $\partial\Omega$ hafi samfelldan ytri þvervigur alls staðar nema í endanlega mörgum punktum. Sundurleitnisetningin gildir þannig á öllum þríhyrningum og ferhyrningum, en það eru svæðin sem við heildum einkum yfir. Hér táknar $dA = dxdy$ flatarmálsfrymið í $\mathbb{R}^2$ og ds bogalengdarfrymið á jaðrinum $\partial\Omega$.

Í sértilfellinu $\mathbf{V} = p\nabla u$ er

$$\nabla \cdot \big(p\nabla u\big) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

og þá gildir

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \big(p\nabla u\big)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

um sérhvert tvisvar samfellt deildanlegt fall u. Lausn hlutafleiðujöfnunnar uppfyllir því

$$-\int_{\partial\Omega} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \iint_\Omega qu\, dxdy = \iint_\Omega f\, dxdy \tag{21.5.3}$$

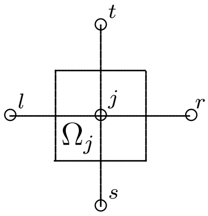
ef við gerum ráð fyrir að $\Omega \subset D$.

Nú skiptum við svæðinu D skipulega í hlutsvæði og notum þessi heildi til þess að leiða út nálgunarjöfnur fyrir gildi lausnarinnar $u(x_j, y_j)$ í punktunum (x_j, y_j). Tilsvarandi nálgunargildi táknum við með c_j, $j = 1, \dots, N$ og við setjum

$$c_j = u(x_j, y_j) = \gamma(x_j, y_j) = \gamma_j, \qquad j = N+1, \dots, M,$$

í punktunum þar sem gildi lausnarinnar eru gefin.

Nálgunarjafna í innri punkti



Innri punktur

Gerum nú ráð fyrir að (x_j, y_j) sé innri punktur í D og að grannar hans eftir netlínunum séu allir hnútpunktar í netinu. Látum Ω_j vera ferninginn með miðju í (x_j, y_j) og kantlengdina h. Látum granna (x_j, y_j) eftir netlínunum vera (x_l, y_l), (x_r, y_r), (x_s, y_s) og (x_t, y_t), eins og myndin sýnir, $m_{j,k}$ vera miðpunkt striksins milli (x_j, y_j) og (x_k, y_k) og $S_{j,k}$ vera þann kant á Ω_j sem næstur er (x_k, y_k) fyrir $k = l, r, s, t$. Þá er

$$\int_{\partial\Omega_j} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \sum_{k=l,r,s,t} \int_{S_{j,k}} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Heildið yfir strikið $S_{j,k}$ er nálgað með margfeldi af gildi heildisstofnsins í miðpunkti striksins og lengd þess,

$$\int_{S_{j,k}} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx p(m_{j,k})\frac{\partial u}{\partial n}(m_{j,k})h \approx p(m_{j,k})\frac{u(x_k, y_k) - u(x_j, y_j)}{h}h.$$

Flatarheildin í jöfnu (21.5.3) með Ω_j í hlutverki Ω eru nálguð með miðpunktsreglu þannig að gildi heildisins er nálgað með margfeldi af gildi heildisstofnsins í miðpunktinum (x_j, y_j) og flatarmáli Ω_j,

$$\iint_{\Omega_j} qu\, dxdy \approx q(x_j, y_j)u(x_j, y_j)\, h^2 \quad \text{og} \quad \iint_{\Omega_j} f\, dxdy \approx f(x_j, y_j)\, h^2.$$

Til styttingar á formúlunum setjum við nú $u_k = u(x_k, y_k)$, $q_k = q(x_k, y_k)$, $f_k = f(x_k, y_k)$ og $p_{j,k} = p(m_{j,k})$. Nálgunarjafnan fyrir (21.5.3) með $\Omega = \Omega_j$ verður því

$$-p_{j,l}(u_l - u_j) - p_{j,r}(u_r - u_j) - p_{j,s}(u_s - u_j) - p_{j,t}(u_t - u_j) + q_j u_j h^2 \approx f_j h^2.$$

Nú deilum við öllum liðum með h^2, setjum við nálgunargildin c_k inn í stað u_k fyrir $k = j, l, r, s, t$ og setjum þetta samband fram með línulegri jöfnu sem nálgunargildin eiga að uppfylla,

$$\begin{aligned}(21.5.4)\quad & \big(h^{-2}\big(p_{j,l} + p_{j,r} + p_{j,s} + p_{j,t}\big) + q_j\big)c_j \\ &\qquad - h^{-2}p_{j,l}c_l - h^{-2}p_{j,r}c_r - h^{-2}p_{j,s}c_s - h^{-2}p_{j,t}c_t = f_j.\end{aligned}$$

Í tilfellinu þegar p er fasti, segjum $p = 1$, þá fáum við einfaldari jöfnu

$$(21.5.5)\qquad \big(4h^{-2} + q_j\big)c_j - h^{-2}c_l - h^{-2}c_r - h^{-2}c_s - h^{-2}c_t = f_j.$$

Punktuppsprettur

Í útleiðslunni hér að framan gerum við alltaf ráð fyrir að f sé samfellt fall á $\overline{D} = D \cup \partial D$. Aðferðin sem við notum, heildun yfir hlutsvæði, leyfir okkur að bæta punktuppsprettum $\sum_{s=1}^{\mu} Q_s \delta_{P_s}$ við fallið f og líta á hægri hliðina í hlutafleiðujöfnunni sem $f + \sum_{s=1}^{\mu} Q_s \delta_{P_s}$. Hér er $\delta_{P_s}(x, y)$ Dirac-fall í punktinum $P_s = (\xi_s, \eta_s)$. Við gerum ráð fyrir að þetta séu ólíkir punktar og að skipting okkar í hlutsvæði sé það fín að í mesta lagi einn punktur P_s geti verið í hverjum rétthyrningi Ω_j. Í kafla 20 eru Dirac-föllin útskýrð sem veik markgildi af föllum, en það eina sem við þurfum að vita um þau í þessu samhengi er að

$$\iint_{\Omega} \delta_{P_s}(x, y)\, dxdy = \begin{cases} 1, & P_s \in \Omega, \\ 0, & P_s \notin \Omega. \end{cases}$$

Þegar verið er að útfæra aðferðina með þessu afbrigði af hægri hlið er athugað hvort einhver punktanna P_s liggur í Ω_j. Ef P_t gerir það, þá er

$$\iint_{\Omega_j} \big(f + \sum_{s=1}^{\mu} Q_s \delta_{P_s}(x, y)\big)\, dxdy \approx f(x_j, y_j)\, h^2 + Q_t.$$

Síðan er jafnan stöðluð með því að deila með h^2 og þá kemur $b_j = f(x_j, y_j) + Q_t/h^2$ í hægri hlið nálgunarjöfnunnar. Í forritum fyrir aðferðina á rétthyrningi er best að framkvæma þessa aðgerð í blálokin þegar allt annað í nálgunarjöfnuhneppinu hefur verið reiknað.

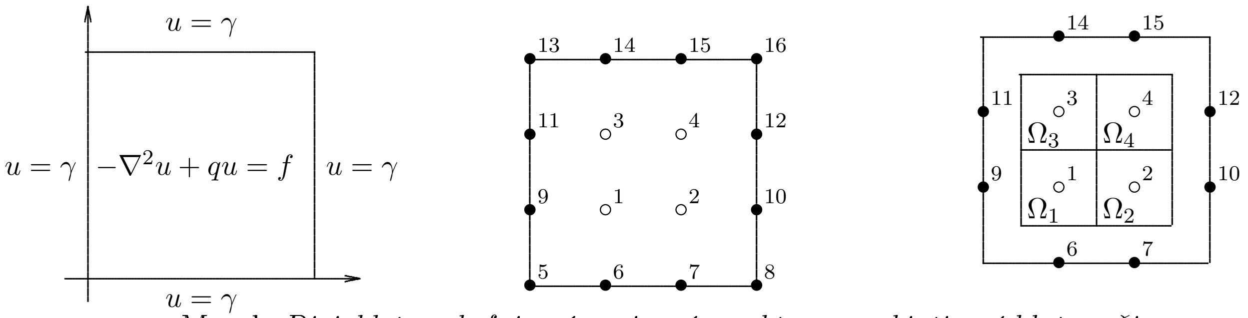
Dirichlet verkefni á rétthyrningi

Sýnidæmi 21.5.1 Lítum nú á $D = \{(x, y)\,;\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ og Dirichlet verkefnið

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + qu = f, & \text{í } D, \\ u(x, y) = \gamma(x, y), & (x, y) \in \partial D, \end{cases}$$

Athugið að þetta er tilfellið $p = 1$. Ákvörðum línulegt jöfnuhneppi með mismunaaðferð fyrir gildi lausnarinnar í punktunum $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Lausn: Við númerum þessa punkta í sömu röð (x_j, y_j) með $j = 1, 2, 3, 4$ og númerum aðra punkta netsins (x_j, y_j) með $j = 5, 6, \ldots, 16$ eins og myndin sýnir



Mynd: *Dirichlet-verkefni, númering á punktum og skipting í hlutsvæði*

Nálgunargildin í þeim síðarnefndu eru réttu gildin á jaðrinum, $c_j = \gamma(x_j, y_j) = \gamma_j$, $j = 5, 6, \ldots, 16$ og $h^{-2} = 9$. Samkvæmt jöfnu (21.5.5) eru jöfnurnar fjórar

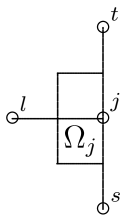
$$\begin{aligned} (36 + q_1)c_1 - 9c_2 - 9c_3 - 9c_6 - 9c_9 &= f_1, \\ (36 + q_2)c_2 - 9c_1 - 9c_4 - 9c_7 - 9c_{10} &= f_2, \\ (36 + q_3)c_3 - 9c_1 - 9c_4 - 9c_{11} - 9c_{14} &= f_3, \\ (36 + q_4)c_4 - 9c_2 - 9c_3 - 9c_{12} - 9c_{15} &= f_4. \end{aligned}$$

Við fáum nálgunargildin með því að leysa jafngilt hneppi,

$$\begin{bmatrix} 36 + q_1 & -9 & -9 & 0 \\ -9 & 36 + q_2 & 0 & -9 \\ -9 & 0 & 36 + q_3 & -9 \\ 0 & -9 & -9 & 36 + q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + 9\gamma_6 + 9\gamma_9, \\ f_2 + 9\gamma_7 + 9\gamma_{10}, \\ f_3 + 9\gamma_{11} + 9\gamma_{14}, \\ f_4 + 9\gamma_{12} + 9\gamma_{15}. \end{bmatrix}.$$

□

Blandað jaðarskilyrði



Jaðarpunktur

Látum nú $(x_j, y_j) \in \partial_2 D$ vera jaðarpunkt, þar sem við höfum blandað jaðarskilyrði og gerum ráð fyrir að strikið S_j milli miðpunktanna $m_{j,s}$ og $m_{j,t}$ liggi allt í $\partial_2 D$. Við táknum strikin milli (x_j, y_j) og hinna punktanna með $S_{j,l}$, $S_{j,s}$ og $S_{j,t}$. Þá er

$$\int_{\partial\Omega_j} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \sum_{k=l,s,t} \int_{S_{j,k}} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \int_{S_j} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Nálgunin á vegheildinu á vinstri kantinum verður sú sama og áður,

$$\int_{S_{j,l}} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx p_{j,l}\frac{u_l - u_j}{h} h$$

Efri og neðri kantarnir á Ω_j hafa lengdina $\frac{1}{2}h$, svo nálganir á heildunum yfir þá verða

$$\int_{S_{j,s}} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx p_{j,s}\frac{u_s - u_j}{h}\tfrac{1}{2}h \qquad \text{og} \qquad \int_{S_{j,t}} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx p_{j,t}\frac{u_t - u_j}{h}\tfrac{1}{2}h.$$

Í punktinum (x_j, y_j) höfum við jaðarskilyrði

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(x_j, y_j) = \frac{\alpha(x_j, y_j)u(x_j, y_j) - \gamma(x_j, y_j)}{\beta(x_j, y_j)} = \frac{\alpha_j u_j - \gamma_j}{\beta_j},$$

sem gefur nálgunina

$$-\int_{S_j} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx p_j\frac{\alpha_j u_j - \gamma_j}{\beta_j} h.$$

Flatarmál Ω_j er $\frac{1}{2}h^2$. Nú er (x_j, y_j) ekki miðpunktur Ω_j heldur jaðarpunktur, en það breytir því ekki að eðlilegt er að nálga flatarheildin í (21.5.3) fyrir $\Omega = \Omega_j$ með

$$\iint_{\Omega_j} qu\, dxdy \approx q_j u_j \tfrac{1}{2}h^2 \qquad \text{og} \qquad \iint_{\Omega_j} f\, dxdy \approx f_j \tfrac{1}{2}h^2.$$

Nú röðum við þessu saman í nálgunarjöfnu fyrir (21.5.3) með Ω_j í hlutverki Ω,

$$-p_{j,l}(u_l - u_j) - \tfrac{1}{2}p_{j,s}(u_s - u_j) - \tfrac{1}{2}p_{j,t}(u_t - u_j) + p_j\frac{\alpha_j u_j - \gamma_j}{\beta_j}h + \tfrac{1}{2}h^2 q_j u_j \approx \tfrac{1}{2}h^2 f_j.$$

Nú skiptum við út u_k í staðinn fyrir c_k fyrir $k = j, l, s, t$, deilum öllum liðum með $\frac{1}{2}h^2$ og fáum jöfnu fyrir nálgunargildin

$$-2h^{-2}p_{j,l}(c_l - c_j) - h^{-2}p_{j,s}(c_s - c_j) - h^{-2}p_{j,t}(c_t - c_j) + 2h^{-1}p_j\frac{\alpha_j c_j - \gamma_j}{\beta_j} + q_j c_j = f_j.$$

Að lokum tökum við saman liðina í jöfnuna

$$(21.5.6) \quad \big(2h^{-2}p_{j,l} + h^{-2}p_{j,s} + h^{-2}p_{j,t} + 2h^{-1}p_j\tfrac{\alpha_j}{\beta_j} + q_j\big)c_j \\ - 2h^{-2}p_{j,l}c_l - h^{-2}p_{j,s}c_s - h^{-2}p_{j,t}c_t = f_j + 2h^{-1}p_j\tfrac{\gamma_j}{\beta_j}.$$

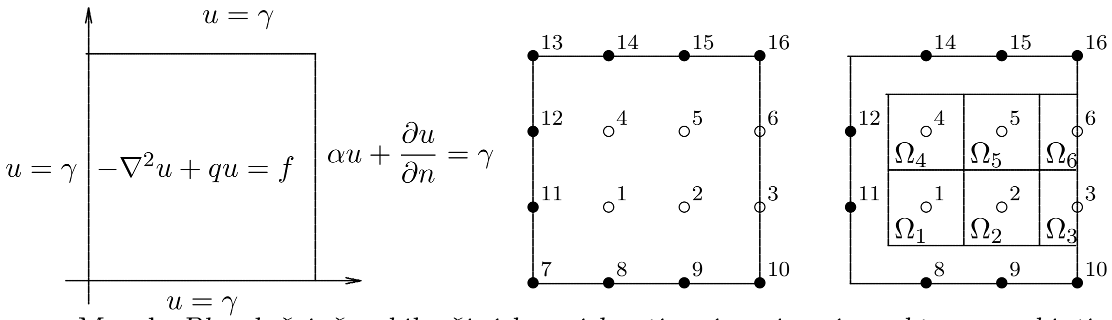
Það er þess virði að skrifa sérstaklega upp tilfellið þegar $p = 1$,

$$\left(4h^{-2} + q_j + 2h^{-1}\tfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right)c_j - 2h^{-2}c_l - h^{-2}c_s - h^{-2}c_t = f_j + 2h^{-1}\tfrac{\gamma_j}{\beta_j} \tag{21.5.7}$$

Sýnidæmi 21.5.2 Breytum nú jaðargildisverkefninu í sýnidæmi 21.5.1 þannig að við höfum blandað jaðarskilyrði á hægri kantinum,

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + qu = f, & \text{í } D, \\ u(x,y) = \gamma(x,y), & (x,y) \in \partial_1 D, \\ \alpha(x,y)u(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \gamma(x,y), & (x,y) \in \partial_2 D, \end{cases}$$

Þar sem $\partial_1 D$ er sammengi þriggja kanta á rétthyrningnum D, þar sem $y = 0$, $x = 0$ og $y = 1$, og $\partial_2 D$ er hægri kanturinn þar sem $x = 1$. Ákvörðum línulegt jöfnuhneppi með mismunaaðferð fyrir gildi lausnarinnar í $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(1, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ og $(1, \frac{2}{3})$,



Mynd: *Blandað jaðarskilyrði á hægri kanti, númering á punktum og skipting í hlutsvæði.*

Lausn: Hér erum við aðeins að einfalda okkur lífið með því að setja $\beta = 1$ á $\partial_2 D$. Við erum með 6 punkta (x_j, y_j) með $j = 1, 2, \ldots, 6$, þar sem gildin eru óþekkt. Nálgunargildin í hinum punktunum (x_j, y_j) með $j = 7, 8, \ldots, 16$ eru gefin

$$c_j = u(x_j, y_j) = \gamma(x_j, y_j) = \gamma_j, \qquad j = 7, 8, \ldots, 16.$$

Við fylgjum jöfnu (21.5.5) fyrir punkta númer $j = 1, 2, 4, 5$ en jöfnu (21.5.7) fyrir punkta $j = 3, 6$. Þá er línulega jöfnuhneppið

$$\begin{aligned}
(36 + q_1)c_1 - 9c_2 - 9c_4 - 9c_8 - 9c_{11} &= f_1, \\
(36 + q_2)c_2 - 9c_1 - 9c_3 - 9c_5 - 9c_9 &= f_2, \\
(36 + q_3 + 6\alpha_3)c_3 - 18c_2 - 9c_6 - 9c_{10} &= f_3 + 6\gamma_3, \\
(36 + q_4)c_4 - 9c_1 - 9c_5 - 9c_{12} - 9c_{14} &= f_4. \\
(36 + q_5)c_5 - 9c_2 - 9c_4 - 9c_6 - 9c_{15} &= f_5. \\
(36 + q_6 + 6\alpha_6)c_6 - 9c_3 - 18c_5 - 9c_{16} &= f_6 + 6\gamma_6.
\end{aligned}$$

Við fáum nálgunargildin með því að leysa jafngilt hneppi,

$$\begin{bmatrix} 36+q_1 & -9 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 36+q_2 & -9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 36+q_3+6\alpha_3 & 0 & 0 & -9 \\ -9 & 0 & 0 & 36+q_4 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -9 & 36+q_5 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -18 & 36+q_6+6\alpha_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_1+9\gamma_8+9\gamma_{11} \\ f_2+9\gamma_9 \\ f_3+9\gamma_{10}+6\gamma_3 \\ f_4+9\gamma_{12}+9\gamma_{14} \\ f_5+9\gamma_{15} \\ f_6+9\gamma_{16}+6\gamma_6 \end{bmatrix}.$$

□

Mismunaaðferðin hentar lang best þegar hlutafleiðujafnan er leyst á rétthyrningi og allir punktarnir (x_j, y_j), $j = 1, 2, \dots, M$, eru hnútpunktar netsins. Það er alveg vandræðalaust að setja upp nálgunarjöfnuhneppi á svæðum sem hafa aðra lögun, til dæmis á marghyrningum.

Jaðargildisverkefni á þríhyrningi

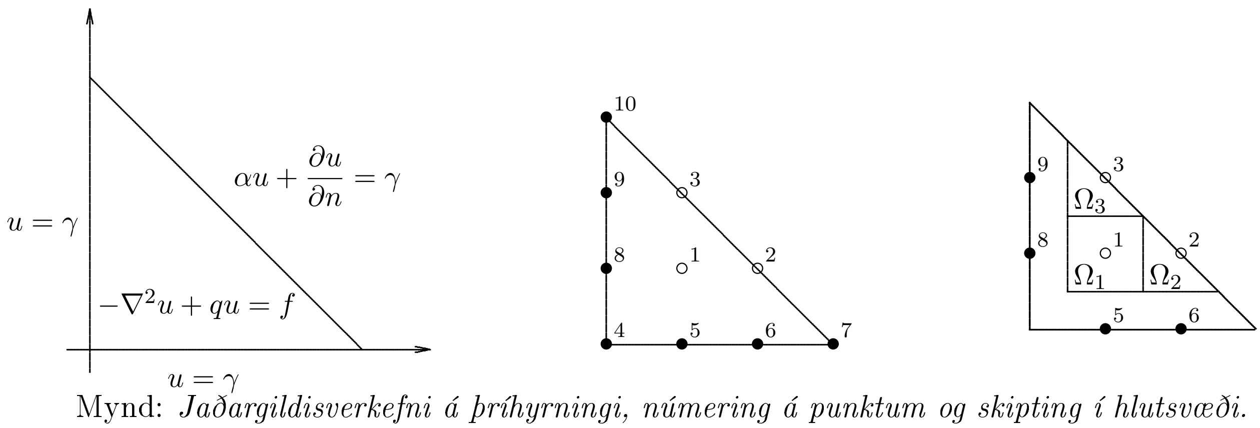
Sýnidæmi 21.5.3 Breytum nú svæðinu í sýnidæmi 21.5.2 í þríhyrning,

$$D = \{(x, y)\,;\, 0 < y < 1 - x\}$$

og setjum blandað jaðarskilyrði á langhliðina. Þá er $\partial_1 D$ sammengi skammhliða þríhyrningsins og $\partial_2 D$ er langhliðin,

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + qu = f, & \text{í } D, \\ u(x,y) = \gamma(x,y), & (x,y) \in \partial_1 D, \\ \alpha(x,y)u(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \gamma(x,y), & (x,y) \in \partial_2 D, \end{cases}$$

Nú ætlum við að setja upp nálgunarjöfnuhneppi fyrir þrjá punkta $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ og $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.



Mynd: *Jaðargildisverkefni á þríhyrningi, númering á punktum og skipting í hlutsvæði.*

Lausn: Myndin sýnir uppröðun punktanna og hlutsvæðin sem við notum við að leiða út jöfnurnar. Við setjum $c_j = \gamma(x_j, y_j) = \gamma_j$, $j = 4, \dots, 10$. Fyrsti punkturinn er innri punktur og við vitum hvernig nálgunarjafnan sem svarar til hans er leidd út,

$$(36 + q_1)c_1 - 9c_2 - 9c_3 = f_1 + 9\gamma_5 + 9\gamma_8.$$

Fyrir $j = 2, 3$ er lengd skástriksins S_j í $\partial\Omega_j$ jöfn $\sqrt{2}\,h$ og jaðarskilyrðið er

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(x_j, y_j) = \alpha(x_j, y_j)u(x_j, y_j) - \gamma(x_j, y_j) = \alpha_j u_j - \gamma_j,$$

og því gefur miðpunktsnálgun á heildinu yfir S_j

$$-\int_{S_j} p\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx \big(\alpha_j u_j - \gamma_j\big)\sqrt{2}\,h.$$

Flatarmál þríhyrninganna Ω_j er $\frac{1}{2}h^2$ og því er eðlilegt að nálga flatarheildin

$$\iint_{\Omega_j} qu\, dxdy \approx q_j u_j \tfrac{1}{2}h^2 \qquad \text{og} \qquad \iint_{\Omega_j} f\, dxdy \approx f_j \tfrac{1}{2}h^2$$

Eftir að hafa deilt öllum liðum í nálgunarjöfnunum með $\frac{1}{2}h^2$ og sett c_j í stað u_j fáum við

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2}h^{-1}\big(\alpha_2 c_2 - \gamma_2\big) - 2h^{-2}(c_1 - c_2) - 2h^{-2}(c_6 - c_2) + q_2 c_2 = f_2,\\
2\sqrt{2}h^{-1}\big(\alpha_3 c_3 - \gamma_3\big) - 2h^{-2}(c_1 - c_3) - 2h^{-2}(c_9 - c_3) + q_3 c_3 = f_3.
\end{aligned}$$

Nú setjum við inn $h = \frac{1}{3}$ og röðum liðunum jöfnuhneppi sem við setjum

$$\begin{bmatrix} 36 + q_1 & -9 & -9 \\ -18 & 36 + q_2 + 6\sqrt{2}\alpha_2 & 0 \\ -18 & 0 & 36 + q_3 + 6\sqrt{2}\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + 9\gamma_5 + 9\gamma_8 \\ f_2 + 18\gamma_6 + 6\sqrt{2}\gamma_2 \\ f_3 + 18\gamma_9 + 6\sqrt{2}\gamma_3 \end{bmatrix}.$$

□

21.6 Almenn mismunaaðferð á rétthyrningi

Við látum nú $D =]a, b[\times]c, d[= \{(x, y)\,;\, a < x < b, c < y < d\}$ tákna rétthyrning í planinu $\mathbb{R}^2$ með hliðar samsíða ásunum. Við ætlum að líta á almennt jaðargildisverkefni

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \big(p\nabla u\big) + qu = f, & \text{í } D, \\ \alpha u + \beta\dfrac{\partial u}{\partial n} = \gamma, & \text{á } \partial D, \end{cases} \tag{21.6.1}$$

hugsa okkur að föllin α, β og γ séu gefin á öllum jaðrinum, þannig að í þeim felist bæði Dirichlet-jaðarskilyrði og blönduð jaðarskilyrði. Við gerum því ráð fyrir að í jaðarpunktum (x, y), þar sem $\beta(x, y) = 0$ gildi $\alpha(x, y) \neq 0$ og að þar með sé gildið $u(x, y) = \gamma(x, y)/\alpha(x, y)$.

Á hornunum er ytri þvervigurinn $\mathbf{n}$ ekki skilgreindur. Þar má leyfa föllunum α, β og γ að vera ósamfelldum. Til þess að nálga vegheildi yfir tvö línustrik sem liggja að hornunum þá tökum við bara gildi á α, β og γ í miðpunktum strikanna sitt hvorum megin.

Við verðum að velja tölurnar a, b, c og d þannig að hægt sé að skipta D í reglulegt net með kantlengdina h. Þetta þýðir að $N = (b-a)/h$ og $M = (d-c)/h$ verði heilar tölur. Til þess að leysa þetta verkefni verðum við að hafa þrjú hnitakerfi í kollinum samtímis og við verðum að hafa ritháttt yfir þau öll:

(1) **Hnit netpunkta í (x, y)-plani:** Við erum bundin af því að `matlab` leyfir okkur ekki að númera stök vigra frá 0, svo við skulum láta $\ell = N + 1$ tákna fjölda punkta í hverri línu og skilgreina skiptinguna $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_\ell = b$, þannig að $x_j = a + (j-1)h$, $j = 1, \ldots, \ell$. Ef við látum $m = M + 1$ tákna fjölda lína þá er skiptingin $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$ með $y_k = c + (k-1)h$, $k = 1, \ldots, m$. Heildarfjöldi netpunkta er $n = \ell \cdot m = (N+1)(M+1)$.

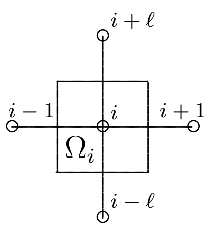
(2) **Tvívíð númering netpunkta (j, k):** Hér eru j og k heiltölur með $1 \le j \le \ell$ og $1 \le k \le m$.

(3) **Einföld númering netpunkta i:** Við setjum einfalda númeringu á alla punkta netsins þannig að tvívíða númerið (j, k) gefi $i = j + (k-1)\ell$, þ.e.a.s. við númerum punktana eftir láréttu línunum frá vinstri til hægri, byrjum neðst og förum upp. Öfugt, ef gefin er talan i, þá þurfum við að geta reiknað út (j, k). Ef $\ell = N + 1$ gengur upp í i, þá er $j = \ell$ og $k = i/\ell$. Ef hins vegar ℓ gengur ekki upp í i þá er j afgangurinn af i eftir deilingu með ℓ, $j = i \mod \ell$, og $k = 1 + \lfloor i/\ell \rfloor$, þar sem $\lfloor t \rfloor$ er stærsta heiltala $\le t$. Ég mæli með því að þið notið `matlab` skipanirnar `floor`, sem gefur heiltöluhlutann af rauntölu og `mod` sem gefur afgang við heiltöludeilingu, til þess að búa til fall fyrir þennan útreikning, því þið þurfið oft á honum að halda.

Uppbygging forrits

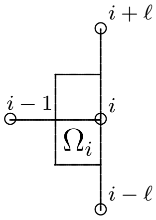
Veigmesti hluti forrits til þess að finna nálgun á (21.6.1) er úrreikningur á $n \times n$ jöfnuhneppi $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ þar sem stakið c_i í lausnarvigrinum $\mathbf{c}$ er nálgunargildi fyrir $u(x_j, y_k)$. Það er margt sem þarf að skoða:

Innri punktar:



Lítum fyrst á punkt (x_j, y_j) í netinu með númerið i þar sem $1 < j < \ell$ og $1 < k < m$. Einu stökin í A í línu i sem eru frábrugðin 0 eru fimm talsins $a_{i,i-\ell}$, $a_{i,i-1}$, $a_{i,i+1}$, $a_{i,i+\ell}$ og $a_{i,i}$ og gildi þeirra eru lesin út úr jöfnu (21.5.6). Í hægri hliðinni stendur $b_i = f_i = f(x_j, y_k)$.

Innri punktar á jöðrum: Við lítum nú á punktana á jaðrinum ∂D sem eru ekki hornpunktar, segjum að við tökum punkt á hægri jaðri eins og myndin sýnir. Ef $\beta(x_j, y_k) = 0$, þá er fallsjaðarskilyrði og jafnan í punktinum i verður



$$c_i = \gamma(x_j, y_k)/\alpha(x_j, y_k).$$

Eina stakið í línu i í A sem er frábrugðið 0 er $a_{i,i} = 1$ og í hægri hliðinni stendur $b_i = \gamma(x_j, y_k)/\alpha(x_j, y_k)$. Ef hins vegar $\beta(x_j, y_k)) \neq 0$, þá er það jafna (21.5.6) sem gildir með ($\alpha_2 = \alpha$, $\beta_2 = \beta$ og $\gamma_2 = \gamma$). Eins er farið að við punktana á hinum köntunum.

Hornpunktar: Byrja þarf á því að athuga hvort $\beta(x_j, y_k) = 0$ til þess að sjá út hvort fallgildið er gefið í punktinum. Ef svo er þá eru stuðlarnir settir inn í fylkið eins og í síðasta lið. Ef hins vegar $\beta(x_j, y_k) \neq 0$, þá þarf að skrifa upp mismunajöfnur og taka tillit til þess að þarna geta föllin α, β og γ verið ósamfelld. Gerið grein fyrir því hvernig jöfnurnar eru leiddar út í öllum fjórum hornpunktunum með skýringarmyndum.

Punktuppsprettur: Við viljum leyfa að hægri hlið jöfnunnar hafi punktuppsprettur í nokkrum punktum. Það gerum við með því að skipta á f og $f + \sum_{s=1}^{\mu} Q_s \delta_{(\xi_s, \eta_s)}$, þar sem $\delta_{(\xi_s, \eta_s)}$ táknar Dirac-delta-fall í punktinum (ξ_s, η_s). Allir þessir punktar þurfa að vera innri netpunktar, segjum (x_j, y_k). Ef númer hans er i, þá á að setja $b_i = f(x_j, y_k) + h^{-2} Q_s$.

Gefin gildi í einstaka netpunktum: Auðvelt er að lausnina til þess að taka ákveðin gildi í nokkrum völdum innri punktum í rétthyrningnum R. Segjum að við höfum einhverja punkta (z_s, w_s), $s = 1, \ldots, \mu$ og að við viljum að fallið u takið gildið U_s í næsta netpunkti við (z_s, w_s). Segjum að hann sé (x_j, y_k) og að númerið sé i. Þá setjum við öll stökin í línu i í A jöfn 0 nema $a_{i,i} = 1$. Í hægri hliðina setjum við $b_i = U_s$.

Útreikningur á lausn: Þegar fylkið A hefur verið reiknað út er rétt að gefa skipunina `sparse` í `Matlab` til þess að nýta sér að fylkið er rýrt (e. *sparse*) og flýta fyrir úrlausn jöfnuhneppisins: `S=sparse(A); c=S\b;` Það þarf að ganga á nágunargildin i finna númeringuna (j, k) og stinga nálgunarlausninni inn í fylkið W þannig að $W_{jk} = c_i$. Hér lýkur úrlausnarferlinu.

Teikning á nálgunarlausn: Graf lausninarinnar er teiknað með `surf(x,y,W')` og jafnhæðarlínur hennar með `contour(x,y,W')` (Athugið að hér hefur fylkinu verið bylt til þess að teikningarnar komi rétt út í xy-hnitunum.)

21.7 Æfingardæmi

1. Lítum á fjögur jaðargildisverkefni af gerðinni (21.1.2):
a) $[a,b]=[0,1]$, $p(x)=1+x$, $q(x)=x$, $f(x)=(x+1)(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2)$, $u(a)=\frac{1}{2}$, $u'(b)=2$.
b) $[a,b]=[-1,1]$, $p(x)=1+e^{-x}$, $q(x)=1+x$, $f(x)=xe^x$, $u(a)-u'(a)=0$, $u'(b)=e$.
c) $[a,b]=[1,2]$, $p(x)=x$, $q(x)=1/x$, $f(x)=-2$, $u'(a)=0$, $u(b)-2u'(b)=-2$.
d) $[a,b]=[1,2]$, $p(x)=1/x$, $q(x)=x$, $f(x)=0$, $u(a)=1/\sqrt{e}$, $u(b)+2u'(b)=0$.
Staðfestið að jafnan $Lu=-(pu')'+qu=f$ sé uppfyllt á $[a,b]$ fyrir gefnu föllin p, q, f og að jaðarskilyrðin séu uppfyllt í tilfellunum:
a) $u(x)=\frac{1}{2}(1+x)^2$, **b)** $u(x)=e^x$, **c)** $u(x)=x\ln x-x$, **d)** $u(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

2. **abcd)** Útfærið mismunaaðferðina í grein 21.2 fyrir dæmi **1abcd)** með $N=3$, og finnð hámarksskekkjuna $\max_{j=0,\dots,N}|u(x_j)-c_j|$.

3. **abcd)** Útfærið mismunaaðferðina í grein 21.3, heildun yfir hlutbil, fyrir dæmi **1abcd)** með $N=3$, og finnð hámarksskekkjuna $\max_{j=0,\dots,N}|u(x_j)-c_j|$.

4. Búið til `Matlab` forrit sem les inn öll gögnin í jaðargildisverkefninu (21.1.1) ásamt tölunni N og ákvarðar nálgunarlausn samkvæmt jöfnu (21.2.3).
abcd) Prófið forritið á jaðargildisverkefnið í dæmi **1abcd)** fyrir $N=2,4,8,16$.
(i) Teiknið upp nálgunina og réttu lausnina.
(ii) Reiknið út hámarksskekkjuna $\max_{j=0,\dots,N}|u(x_j)-c_j|$ fyrir $N=2,4,8,16$.
(iii) Ef hámarksskekkjan er $O(h)$, þá á að helmingast hún ef N tvöfaldast. Gerist það?

5. Búið til `Matlab` forrit sem les inn öll gögnin í jaðargildisverkefninu (21.1.2) ásamt tölunni N og ákvarðar nálgunarlausn samkvæmt jöfnu (21.3.4).
abcd) Prófið forritið á jaðargildisverkefnið í dæmi **1abcd)** fyrir $N=2,4,8,16$.
(i) Teiknið upp nálgunina og réttu lausnina.
(ii) Reiknið út hámarksskekkjuna $\max_{j=0,\dots,N}|u(x_j)-c_j|$ fyrir $N=2,4,8,16$.
(iii) Ef hámarksskekkjan er $O(h^2)$, þá á fjórðungast hún nokkurn veginn ef N tvöfaldast. Gerist það?

6. Látum χ vera fall á $]0,\delta[$, $\delta>0$, $0<j<k$. Sýnið:
(i) Ef $\chi(h)=O(h^k)$, þá er $\chi(h)=o(h^j)$.
(ii) Ef $\chi(h)=O(h^k)$, þá er $\chi(h)/h^j=O(h^{k-j})$.
(iii) Ef $\chi(h)=o(h^k)$, þá er $\chi(h)/h^j=o(h^{k-j})$.

7. Látum χ_1 og χ_2 vera föll á $]0,\delta[$, $\delta>0$, $k_1>0$ og $k_2>0$. Sýnið:
(i) Ef $\chi_1(h)=o(h^{k_1})$ og $\chi_2(h)=O(h^{k_2})$, þá er $\chi_1(h)\chi_2(h)=o(h^{k_1+k_2})$.
(ii) Ef $\chi_1(h)=o(h^{k_1})$ og $\chi_2(h)=o(h^{k_2})$, þá er $\chi_1(h)+\chi_2(h)=o(h^{\min\{k_1,k_2\}})$.

8. Sýnið: Ef $p\in C^2[a,b]$ og $u\in C^3[a,b]$, þá er $S_0u=O(h^2)$.

9. Sýnið síðan að ekki fáist betri staðarskekkja en $S_ju(h)=O(h^2)$, þótt við gefum okkur að $p\in C^3[a,b]$ og $u\in C^5[a,b]$ og liðum þessi föll í Taylor-liðanir

$$\begin{aligned}u(x+h)&=u(x)+u'(x)h+\tfrac{1}{2}u''(x)h^2+\tfrac{1}{6}u'''(x)h^3+\tfrac{1}{24}u^{(iv)}(x)h^4+O(h^5),\\ p(x+h)&=p(x)+p'(x)h+\tfrac{1}{2}p''(x)h^2+O(h^3).\end{aligned}$$

10. Látum $D = \{(x, y)\,;\, a < x < b, c < y < d\}$ og lítum á Dirichlet-verkefnið

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \big(p\nabla u\big) + qu = f & \text{á} \;\; D, \\ u = \gamma, & \text{á} \;\; \partial D. \end{cases}$$

a) $a = c = 0$, $b = d = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $f = 0$, $\gamma(0, y) = y/(1 + y^2)$, $\gamma(1, y) = y/(4 + y^2)$, $\gamma(x, 0) = 0$ og $\gamma(x, 1) = 1/(2 + 2x + x^2)$.
b) $a = c = 0$, $b = d = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $f = x^2 + y^2$, $\gamma(0, y) = \gamma(x, 0) = 0$, $\gamma(1, y) = -\frac{1}{2}y^2$ og $\gamma(x, 1) = -\frac{1}{2}x^2$.
c) $a = 1$ $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $f = 0$, $\gamma(1, y) = \ln(y^2+1)$, $\gamma(2, y) = \ln(y^2+4)$, $\gamma(x, 0) = 2\ln x$ og $\gamma(x, 1) = \ln(x^2 + 1)$.
d) $a = c = -1$, $b = d = 1$, $p = 1$, $q = -52$, $f = 0$, $\gamma(-1, y) = \cos(6y - 4)$, $\gamma(1, y) = \cos(6y + 4)$, $\gamma(x, -1) = \cos(4x - 6)$ og $\gamma(x, 1) = \cos(4x + 6)$.
Staðfestið að fallið u sé lausnir verkefnisins: **a)** $u(x, y) = \frac{y}{(x+1)^2+y^2}$, **b)** $u(x, y) = -\frac{1}{2}(xy)^2$, **c)** $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, **d)** $u(x, y) = \cos(4x + 6y)$.

11. abcd) Lítum á Dirichlet-verkefnin í síðasta dæmi.

(i) Beitið aðferðinni heildun yfir hlutbil til þess að leiða út nálgunarjöfnur fyrir nálgunargildi $c_1, \ldots, c_4$ í fjórum innri punktum rétthyrningsins, eins og gert er í grein 21.5.

(ii) Leysið jöfnurnar og berið nálgunina saman við réttu lausnina.

12. Búið til `matlab`-forrit sem les inn gögnin sem gefin eru í almenna Dirichlet-verkefninu í dæmi **10** ásamt kantlengdinni h og skilar út nálgunarlausn. Athugið að talan h þarf að vera valin þannig að hún sé sameiginleg billengd í skiptingum á bilunum $[a, b]$ og $[c, d]$. Hér er átt við að það þarf að sjá til þess að til séu náttúrlegar tölur m og n þannig að $h = (b - a)/m = (d - c)/n$.

abcd) Prófið forritið á gögnunum í næst síðasta dæmi. Notið réttu lausnirnar til þess að reikna út hámarksskekkju með $m = n = 3$.

13. Notið forritið úr síðasta dæmi til þess að kanna hvort skekkjan í reikningunum í síðasta dæmi er $O(h^2)$ með því að keyra nokkrar keyrslur og helminga kantlengdina í hvert skipti.

14. abcd) (i) Sýnið að föllin $u(x, y)$ í dæmi 10 séu lausnir á jaðargildisverkefnunum.

(ii) Lesið út hvernig föllin α, β og γ eru skilgreind í hverju tilfelli fyrir sig.

$$\textbf{a)} \begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad \text{á} \;\; D = \{(x, y)\,;\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, & \\ u(x, 0) = 0, \quad 2u(x, 1) + (x^2 + 2x + 2)\partial_y u(x, 1) = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = \frac{y}{y^2+1}, \quad \partial_x u(1, y) = -\frac{4y}{(y^2+4)^2}, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

$$\textbf{b)} \begin{cases} -\nabla^2 u = x^2 + y^2, \quad \text{á} \;\; D = \{(x, y)\,;\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, & \\ \partial_y u(x, 0) = 0, \quad -2u(x, 1) + \partial_y u(x, 1) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = -\frac{1}{2}y^2, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

$$\textbf{c)} \begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad \text{á} \;\; D = \{(x, y)\,;\, 1 < x < 2, 0 < y < 1\}, & \\ \partial_y u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \ln(x^2 + 1), & 1 < x < 2, \\ \partial_x u(1, y) = \frac{y}{y^2+1}, \quad u(2, y) = \ln(y^2 + 4), & 0 < y < 1. \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} -\nabla^2 u - 52u = 0, \quad \text{á} \ D = \{(x,y)\,;\, -1 < x < 1, -1 < y < 1\}, \\ \partial_y u(x,-1) = -6\sin(4x-6), \quad u(x,1) = \cos(4x+6), & -1 < x < 1, \\ u(-1,y) = \cos(6y-4), \quad u(1,y) = \cos(6x+4), & -1 < y < 1. \end{cases}$$

15. (i) Beitið heildun yfir hlutbil til þess leiða út nálgunarjöfnuhneppi fyrir jaðargildisverkefnin sem gefin eru í síðasta dæmi í punktunum sem gefnir eru.

(ii) Reiknið út nálgunargildin og berið þau saman við rétta lausn.

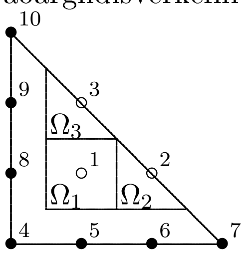
a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ og $(1, 1)$.

b) $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $(\frac{1}{2}, 1)$.

c) $(1, 0)$, $(\frac{3}{2}, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$ og $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

d) $(-\frac{1}{3}, -1)$, $(\frac{1}{3}, -1)$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, 1)$ og $(\frac{1}{3}, 1)$.

16. Við lítum á þríhyrningssvæðið $D = \{(x,y)\,;\, 0 < y < 1-x, 0 < x < 1\}$ og eftirfarandi jaðargildisverkefni á því:



$$\begin{cases} -\nabla^2 u + u = 1, & \text{á } D, \\ u(x,0) = 1 - x, & 0 < x < 1, \\ u(0,y) = 1 - y, & 0 < y < 1, \\ (1+x)u(x, 1-x) + \dfrac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) = xy, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(i) Veljið punkta $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$ og hlutsvæði Ω_1, Ω_2 og Ω_3 eins og sýnt eru á myndinni. Leiðið út 3×3 jöfnuhneppi fyrir $c_1 \approx u(x_1, y_1)$, $c_2 \approx u(x_2, y_2)$ og $c_3 \approx u(x_3, y_3)$ með mismunaaðferð sem byggir á heildun yfir hlutsvæðin þrjú.

(ii) Reiknið út nálgunargildin.

Kafli 22

BÚTAAÐFERÐIR

22.1 Inngangur

Nú ætlum við að líta á sömu jaðargildisverkefnin og í síðasta kafla, en kynna til sögunnar nýjar nálgunaraðferðir. Verkefnin eru annars vegar venjuleg afleiðujafna af Sturm-Liouville-gerð með almennum jaðarskilyrðum

$$
(22.1.1) \qquad \begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, & \text{á }]a,b[, \\ B_1u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = \gamma_1, & (\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0), \\ B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, & (\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0), \end{cases}
$$

og hins vegar hlutafleiðujafna í tveimur rúmvíddum af sundurleitnigerð á svæði $D \subset \mathbb{R}^2$ með jaðri ∂D með almennum jaðarskilyrðum

$$
(22.1.2) \qquad \begin{cases} Lu = -\nabla \cdot (p \nabla u) + qu = f, & \text{á } D, \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = \gamma, & \text{á } \partial D. \end{cases}
$$

Forsendur okkar um stuðlana í virkjunum og stuðlana í jaðarskilyrðunum eru þær sömu og í síðasta kafla.

Nálgunaraðferðin sem við ætlum að fást við er mjög almenn. Hún er kennd við rússneskan stærðfræðing, Boris Galerkin. Það er auðveldast að lýsa henni fyrir Dirichlet-verkefnið, þegar lausnin $u(x)$ í fyrra verkefninu og $u(x, y)$ í seinna verkefninu er gefin á jaðrinum. Það verður fyrsta takmark okkar og að því loknu fjöllum við um almenn jaðarskilyrði. Aðferð Galerkins í ákveðnu sértilfelli er kölluð bútaaðferð (e. *finite element method*) og hana útfærum við í smáatriðum. Þótt almenna nálgunaraðferðin beri nafn Galerkins, þá ber þess að geta að svisslendingurinn Walther Ritz hafði áður sýnt hvernig lágmörkunarverkefi leiði af sér jaðargildisverkefni fyrir hlutafleiðujöfnur. Ritz er því stundum nefndur sem höfundur aðferðarinnar.

22.2 Hlutheildun, innfeldi og tvílínulegt form

Við ætlum nú að bera saman hlutheildun í einni og tveimur víddum. Hún byggir á undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar og sundurleitnisetningu Gauss. Með því að beita hlutheildun getum við sett fram svokallaða *veika framsetningu* jaðargildisverkefnanna (22.1.1) og (22.1.2), en Galerkin-aðferð byggir á henni.

Um hlutheildun

Látum nú V tákna rúm allra raungildra falla φ sem eru samfelld á $[a,b]$ og samfellt deildanleg á köflum. Með táknmáli okkar er

$$V = \{\varphi \in C[a,b] \cap PC^1[a,b]\,;\, \varphi(x) \in \mathbb{R}, x \in [a,b]\}.$$

Ef $\varphi \in V$, þá gildir samkvæmt skilgreiningu að til er skipting $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ á bilinu $[a,b]$ og föll $\chi_j \in C^1[x_j, x_{j+1}]$ þannig að einskorðun φ við bilið $[x_j, x_{j+1}]$ er jöfn χ_j. Þetta þýðir að afleiður fallsins φ frá vinstri og hægri eru til í öllum innri skiptipunktum. Athugið að fallið φ er samfellt deildanlegt í grennd um alla nema endanlega marga punkta í bilinu $[a,b]$ og þessir punktar eru allir innri punktar í skiptingunni sem tekin er. Ef afleiða φ er ekki til í punkti x_j, þá skilgreinum við

$$\varphi'(x_j) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi'(x_j+) + \varphi'(x_j-)\big).$$

Með þessu verður φ' heildanlegt fall á $[a,b]$ og undirstöðusetningin gefur

$$\varphi(x) = \varphi(c) + \int_c^x \varphi'(t)\,dt, \qquad x, c \in [a,b].$$

Formúlan fyrir hlutheildun gildir einnig, ef við veljum tvö föll φ og ψ í V,

$$-\int_c^d \psi'(x)\varphi(x)\,dx = \int_c^d \psi(x)\varphi'(x)\,dx - \big[\psi(x)\varphi(x)\big]_c^d \qquad c, d \in [a,b].$$

Ef $\psi = pv'$, þar sem $v \in C^2[a,b]$, þá verður þessi formúla

$$-\int_a^b (p(x)v'(x))'\varphi(x)\,dx = \int_a^b p(x)v'(x)\varphi'(x)\,dx - \big[p(x)v'(x)\varphi(x)\big]_a^b. \tag{22.2.1}$$

Sundurleitnisetning og hlutheildun

Nú skulum við sjá hvernig sundurleitnisetning Gauss gefur okkur formúlu sem er hliðstæða hlutheildunar. Látum $\mathbf{V} = (v, w)$ vera vigursvið af tveimur rúmbreytistærðum (x,y) og $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ vera samfellt deildanlegt fall. Þá gefur Leibniz-reglan

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{V}) = \frac{\partial(v\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(w\varphi)}{\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\varphi + \left(v\frac{\partial \varphi}{\partial x} + w\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (\nabla \cdot \mathbf{V})\varphi + \mathbf{V} \cdot \nabla\varphi.$$

Í sértilfellinu $\mathbf{V} = p\nabla u$ er þessi formúla

$$\nabla \cdot \big(\varphi p \nabla u\big) = \big(\nabla \cdot (p\nabla u)\big)\varphi + p\nabla u \cdot \nabla\varphi.$$

Sundurleitnisetnig Gauss gefur

$$\iint_D \nabla \cdot (\varphi p \nabla u)\,dA = \int_{\partial D} p\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\,ds$$

og af síðustu tveimur formúlum leiðir

$$-\iint\limits_{D} \nabla\cdot\big(p\nabla u\big)\varphi\,dA = -\int\limits_{\partial D} p\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\,ds + \iint\limits_{D} p\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dA. \tag{22.2.2}$$

Þessi formúla er hliðstæða hlutheildunar í tveimur rúmvíddum.

Innfeldi

Ef φ og ψ eru tvö raungild heildanleg föll á bilinu $[a,b]$, þá skilgreinum við innfeldi þeirra með formúlunni

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \varphi\psi\,dx. \tag{22.2.3}$$

Ef hins vegar φ og ψ eru tvö raungild heildanleg föll á lokuninni $\overline{D} = D\cup\partial D$, þá skilgreinum við innfeldi þeirra með

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \iint_D \varphi(x,y)\psi(x,y)\,dxdy = \iint_D \varphi\psi\,dA. \tag{22.2.4}$$

Tvílínulegt form sem L gefur af sér

Ef L táknar afleiðuvirkjann í (22.1.1), þá notum við stuðlana p og q til þess að skilgreina *tvílínulega formið sem L gefur af sér* með

$$\langle\varphi,\psi\rangle_L = \int_a^b \big(p\varphi'\psi' + q\varphi\psi\big)\,dx, \qquad \varphi,\psi\in V, \tag{22.2.5}$$

Ef hins vegar L táknar hlutafleiðuvirkjann (22.1.2), þá skilgreinum við á hliðstæðan máta

$$\langle\varphi,\psi\rangle_L = \iint\limits_{D} \big(p\,\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + q\,\varphi\psi\big)\,dA. \tag{22.2.6}$$

Hér þurfum við að gera ráð fyrir því að fyrsta stigs hlutafleiður φ og ψ séu skilgreindar og takmarkaðar á D til þess að heildin séu til.

Sambandið við jaðargildisverkefnin

Nú getum við tengt innfeldið og tvílínulega formið við jaðargildisverkefnin. Látum fyrst L vera virkjann í (22.1.1) og $v\in C^2[a,b]$. Hlutheildunin (22.2.1) gefur okkur

$$\langle Lv,\varphi\rangle = \int_a^b \big(pv'\varphi' + qv\varphi\big)\,dx - \big[pv'\varphi\big]_a^b = \langle v,\varphi\rangle_L - \big[pv'\varphi\big]_a^b. \tag{22.2.7}$$

Í sértilfellinu þegar $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ og $v=u$ er lausnin á $Lu=f$ fáum við

$$\langle u,\varphi\rangle_L = \langle f,\varphi\rangle, \qquad \varphi\in V,\ \varphi(a)=\varphi(b)=0. \tag{22.2.8}$$

Nú lítum við á virkjann L í seinna verkefninu (22.1.2) og $v \in C^2(\overline{D})$. Þá gefur (22.2.2) að fyrir sérhvert $v \in C^2(\overline{D})$ gildir

$$\begin{aligned}\iint_D (Lv)\varphi\, dA &= \iint_D \big(p\,\nabla v \cdot \nabla\varphi + qv\varphi\big)\, dA - \int_{\partial D} p\frac{\partial v}{\partial n}\varphi\, ds \\ &= \langle v, \varphi\rangle_L - \int_{\partial D} p\frac{\partial v}{\partial n}\varphi\, ds.\end{aligned} \tag{22.2.9}$$

Í sértilfellinu þegar $v = u$ er lausn $Lu = f$ og $\varphi = 0$ á jaðrinum ∂D fáum við

$$\langle u, \varphi\rangle_L = \langle f, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in C^1(\overline{D}), \quad \varphi = 0 \text{ á } \partial D. \tag{22.2.10}$$

22.3 Aðferð Galerkins fyrir Dirichlet-verkefnið

Nú getum við útskýrt aðferð Galerkins í því tilfelli þegar við höfum Dirichlet-jaðarskilyrði á öllum jaðrinum.

Galerkin-aðferð í einni vídd fyrir Dirichlet-verkefni

Í þessu sértilfelli er fyrra verkefnið jafngilt

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, & \text{á }]a, b[, \\ u(a) = \gamma_1/\alpha_1, \quad u(b) = \gamma_2/\alpha_2. \end{cases} \tag{22.3.1}$$

Jafnan (22.2.8) nefnist *veikt framsetning* á þessu jaðargildisverkefni. Athugið að hér gætum við einfaldað okkur lífið aðeins með því að taka $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, en vegna alhæfinganna sem á eftir koma skulum við hafa þetta svona.

Í aðferð Galerkins er byrjað á að finna eitthvert fall $\psi_0(x)$ sem uppfyllir jaðarskilyrðin $\psi_0(a) = \gamma_1/\alpha_1$ og $\psi_0(b) = \gamma_2/\alpha_2$. Síðan eru valin línulega óháð föll $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ sem uppfylla óhliðruðu jaðarskilyrðin í endapunktunum, $\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0$. Nálgunarfall $v(x)$ fyrir lausnina $u(x)$ er síðan valið af gerðinni

$$v = \psi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_N\varphi_N, \tag{22.3.2}$$

þar sem stuðlarnir c_j í línulegu samantektinni eiga að uppfylla

$$\langle v, \varphi_j\rangle_L = \langle f, \varphi_j\rangle, \qquad j = 1, 2, \dots, N. \tag{22.3.3}$$

Eins og áður var getið, þá segir formúla (22.2.8) að lausnin u uppfylli þessa jöfnu, með u í hlutverki v og φ í hlutverki φ_j fyrir sérhvert fall $\varphi \in V$ með $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Nú athugum við að (22.3.3) er línulegt jöfnuhneppi

$$\langle \psi_0, \varphi_j\rangle_L + \sum_{k=1}^{N} c_k\langle \varphi_k, \varphi_j\rangle_L = \langle f, \varphi_j\rangle, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Við getum sett það fram á fylkjaformi $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$, þar sem $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1}^{N}$ er samhverft $N \times N$ fylki með

$$a_{jk} = \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_L = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_L, \qquad j,k = 1, \dots, N. \tag{22.3.4}$$

Stuðlarnir í hægri hliðinni eru gefnir með

$$b_j = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle \psi_0, \varphi_j \rangle_L, \qquad j = 1, \dots, N. \tag{22.3.5}$$

Til þess að reikna út nálgunina v þurfum við að reikna út alla stuðla hneppisins og leysa það síðan, til þess að komast að því hver gildin c_j í línulegu samantektinni (22.3.2) eru.

Galerkin-aðferð í tveimur víddum fyrir Dirichlet-verkefni

Lítum nú á Dirichlet-verkefnið í tveimur rúmvíddum,

$$\begin{cases} Lu = -\nabla \cdot (p \nabla u) + qu = f, & \text{á } D, \\ u = \gamma/\alpha, \qquad \text{á } \partial D. \end{cases} \tag{22.3.6}$$

Aðferð Galerkins er alveg eins fyrir þetta verkefni. Við byrjum á að velja $\psi_0(x,y)$ á $\overline{D}$, sem tekur réttu gildin $\gamma(x,y)/\alpha(x,y)$ í öllum punktum $(x,y) \in \partial D$. Síðan veljum við línulega óháð föll $\varphi_1(x,y), \dots, \varphi_N(x,y)$ sem eru núll á ∂D. Nálgunarfallið $v(x,y)$ fyrir lausnina $u(x,y)$ er gefið með (22.3.2) og stuðlarnir $c_1, \dots, c_N$ eru eiga að uppfylla línulega jöfnuheppið (22.3.3). Jöfnuheppið $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ er alveg eins og í einvíða tilfellinu, en skilgreiningarnar á innfeldi og tvílínulegu formi eru samkvæmt jöfnum (22.2.4) og (22.2.6).

22.4 Aðferð Galerkins með almennum jaðarskilyrðum

Nú ætlum við að halda áfram athugun okkar á jaðargildisverkefnunum (22.1.1) og (22.1.2) og sýna hvernig aðferð Galerkins er útfærð fyrir þau í öllum tilfellum. Fyrst þurfum við að leiða út það sem kallað er *veik framsetning á jaðargildisverkefnunum*, en það er formúla

$$\langle u, \varphi \rangle_{L,B} = \langle f, \varphi \rangle + T_B(\varphi), \qquad \varphi \in V_B, \tag{22.4.1}$$

þar sem $(\psi, \varphi) \mapsto \langle \psi, \varphi \rangle_{L,B}$ er tvílínulegt form sem er bæði háð virkjanum L og jaðarskilyrðunum B, $\varphi \mapsto T_B(\varphi)$ er línulegt form sem er háð jaðarskilyrðunum og V_B er rúm af föllum, sem skilgreint er út frá jaðarskilyrðunum, þannig að öll föllin í V_B taka gildið 0 í punktunum á jaðrinum, þar sem gildi réttu lausnarinnar eru gefin.

Þegar veika formið liggur fyrir er auðvelt að útskýra hvernig aðferðin er útfærð. Nálgunarlausnin v á alltaf að taka sömu gildi og rétta lausnin u í þeim punktum jaðarsins þar sem réttu gildin eru þekkt. Fyrst þarf að finna fall ψ_0 sem skilgreint er á $[a,b]$ fyrir einvíða verkefnið og á $\overline{D}$ fyrir tvívíða verkefnið sem tekur sömu gildi og rétta lausnin u í öllum punktum jaðarsins þar sem u er þekkt.

Í einvíða tilfellinu er jaðarinn einungis tveir punktar a og b. Ef jaðarskilyrðin segja að lausnin $u(x)$ sé gefin í öðrum eða báðum endapunktum bilsins, þá skilgreinum við fall

$\psi_0(x)$ í V sem tekur þessi gildi, $\psi_0(a) = \gamma_1/\alpha_1$ ef $\beta_1 = 0$ og $\psi_0(b) = \gamma_2/\alpha_2$ ef $\beta_2 = 0$. Ef $\beta_1 \neq 0$ og $\beta_2 \neq 0$, þá er ψ_0 núllfallið.

Í tvívíða tilfellinu skilgreinum við $\partial_1 D = \{(x,y) \in \partial D\,;\, \beta(x,y) = 0\}$ og veljum okkur fall $\psi_0(x,y)$ á $\overline{D}$ sem tekur sömu gildi og lausnin $u(x,y)$ á $\partial_1 D$, $\psi_0(x,y) = \gamma(x,y)/\alpha(x,y)$. Ef $\partial_1 D$ er tóma mengið, þá er ψ_0 núllfallið.

Þegar það er klárt hvað ψ_0 á að vera, þá veljum við föll $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in V_B$ og látum nálgunarfallið $v = \psi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + \varphi_N$ uppfylla línulega jöfnuhneppið

$$\langle v, \varphi_j \rangle_{L,B} = \langle f, \varphi_j \rangle + T_B(\varphi_j), \qquad j = 1, \dots, N. \tag{22.4.2}$$

Alveg eins og í síðustu grein athugum við að (22.4.2) er línulegt jöfnuhneppi

$$\langle \psi_0, \varphi_j \rangle_{L,B} + \sum_{k=1}^{N} c_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_{L,B} = \langle f, \varphi_j \rangle + T_B(\varphi_j), \qquad j = 1, \dots, N.$$

Við getum sett það fram á fylkjaformi $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$, þar sem $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1}^{N}$ er samhverft $N \times N$ fylki með

$$a_{jk} = \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_{L,B} = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_{L,B}, \qquad j,k = 1, \dots, N. \tag{22.4.3}$$

Stuðlarnir í hægri hliðinni eru gefnir með

$$b_j = \langle f, \varphi_j \rangle + T_B(\varphi_j) - \langle \psi_0, \varphi_j \rangle_{L,B}, \qquad j = 1, \dots, N. \tag{22.4.4}$$

Til þess að reikna út nálgunina v þurfum við að reikna út alla stuðla hneppisins og leysa það síðan, til þess að komast að því hver gildin c_j í línulegu samantektinni (22.4.2) eru.

Nú þurfum við að ganga skipulega á öll tilfellin í (22.1.1) og (22.1.2) og leiða út veika framsetningu og skilgreina $\langle \varphi, \psi \rangle_{L,B}$ og $T_B(\varphi)$ þannig að (22.4.1) gildi fyrir þau öll.

Almenn jaðarskilyrði í einni vídd

Við byggjum á formúlunni (22.2.7) sem við getum ritað

$$\langle u, \varphi \rangle_L + p(a)u'(a)\varphi(a) - p(b)u'(b)\varphi(b) = \langle f, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in V. \tag{22.4.5}$$

Við þurfum að skipta jaðarskilyrðunum í fjögur tilvik.

Blönduð jaðarskilyrði í báðum endapunktum:

Við lítum fyrst á verkefnið

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, \\ B_1 u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \quad \beta_1 \neq 0, \\ B_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, \quad \beta_2 \neq 0. \end{cases} \tag{22.4.6}$$

Jaðarskilyrðin jafngilda $u'(a) = (\alpha_1 u(a) - \gamma_1)/\beta_1$ og $-u'(b) = (\alpha_2 u(b) - \gamma_2)/\beta_2$. Við stingum þeim inn í (22.4.5) og fáum

$$\langle u, \varphi \rangle_L + \frac{p(a)}{\beta_1}(\alpha_1 u(a) - \gamma_1)\varphi(a) + \frac{p(b)}{\beta_2}(\alpha_2 u(b) - \gamma_2)\varphi(b) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Jafngild jafna

$$\langle u, \varphi \rangle_L + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1} u(a)\varphi(a) + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2} u(b)\varphi(b) = \langle f, \varphi \rangle + \frac{p(a)\gamma_1}{\beta_1}\varphi(a) + \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2}\varphi(b) \tag{22.4.7}$$

nefnist *veik framsetning jaðargildisverkefnisins* (22.4.6). Við skilgreinum $V_B = V$, tvílínulega formið með

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L,B} = \langle \varphi, \psi \rangle_L + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1}\varphi(a)\psi(a) + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2}\varphi(b)\psi(b), \qquad \varphi, \psi \in V_B,$$

og línulega formið T_B með

$$T_B(\varphi) = \frac{p(a)\gamma_1}{\beta_1}\varphi(a) + \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2}\varphi(b), \qquad \varphi \in V_B.$$

Fallsjaðarskilyrði í vinstri endapunkti

Nú breytum við jaðarskilyrðunum og gerum ráð fyrir að $u \in C^2[a, b]$ sé lausn á verkefninu

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, \\ B_1 u = \alpha_1 u(a) = \gamma_1, \\ B_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, \quad \beta_2 \neq 0. \end{cases} \tag{22.4.8}$$

Við skilgreinum $V_B = \{\varphi \in V\,; \varphi(a) = 0\}$. Seinna jaðarskilyrðið jafngildir $-u'(b) = (\alpha_2 u(b) - \gamma_2)/\beta_2$ og við sjáum að fyrir $\varphi \in V_B$ er (22.4.5) jafngilt

$$\langle u, \varphi \rangle_L + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2} u(b)\varphi(b) = \langle f, \varphi \rangle + \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2}\varphi(b). \tag{22.4.9}$$

Þetta er veik framsetning á (22.4.8). Við skilgreinum því

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L,B} = \langle \varphi, \psi \rangle_L + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2}\varphi(b)\psi(b), \quad \text{og} \quad T_B(\varphi) = \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2}\varphi(b), \qquad \varphi, \psi \in V_B.$$

Fallsjaðarskilyrði í hægri endapunkti

Nú breytum við jaðarskilyrðinu aftur og gerum ráð fyrir að $u \in C^2[a, b]$ sé lausn á

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, \\ B_1 u = \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \quad \beta_1 \neq 0 \\ B_2 u = \alpha_2 u(b) = \gamma_2. \end{cases} \tag{22.4.10}$$

Við skilgreinum $V_B = \{\varphi \in V\,;\, \varphi(b) = 0\}$ og athugum að fyrra jaðarskilyrðið jafngildir $u'(a) = (\alpha_1 u(a) - \gamma_1)/\beta_1$. Þetta notum við í (22.4.5) og fáum með sama hætti og hér að framan að

$$\langle u, \varphi\rangle_L + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1} u(a)\varphi(a) = \langle f, \varphi\rangle + \frac{p(a)\gamma_1}{\beta_1}\varphi(a), \qquad \varphi \in V_B.$$

Þetta er veik framsetning jaðargildisverkefnisins (22.4.10). Við skilgreinum

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L,B} = \langle \varphi, \psi\rangle_L + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1}\varphi(a)\psi(a) \quad \text{og} \quad T_B(\varphi) = \frac{p(a)\gamma_1}{\alpha_2}\varphi(a), \qquad \varphi, \psi \in V_B.$$

Fallsjaðarskilyrði í báðum endapunktum

Nú erum við komin að Dirichlet-verkefninu, sem við lýstum í síðustu grein,

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, \\ B_1 u = \alpha_1 u(a) = \gamma_1, \\ B_2 u = \alpha_2 u(b) = \gamma_2. \end{cases} \tag{22.4.11}$$

Við vitum að í þessu tilfelli gildir um öll $\varphi \in V$ með $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ að

$$\langle u, \varphi\rangle_L = \langle f, \varphi\rangle,$$

og því skilgreinum við rúmið $V_B = \{\varphi \in V\,;\, \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$, $\langle \varphi, \psi\rangle_{L,B} = \langle \varphi, \psi\rangle_L$ og $T_B(\varphi) = 0$ fyrir öll $\varphi, \psi \in V_B$.

Almenn jaðarskilyrði í tveimur víddum

Nú snúum við okkur að því að finna veika framsetningu á jaðargildisverkefninu (22.1.2). Við höfum að $\partial_1 D = \{(x, y)\,;\, \beta(x, y) = 0\}$, skilgreinum $\partial_2 D = \{(x, y)\,;\, \beta(x, y) \neq 0\}$ og látum V_B tákna rúm allra falla $\varphi \in C^2(\overline{D})$ þannig að $\varphi(x, y) = 0$ í öllum punktum $(x, y) \in \partial_1 D$. Við höfum

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\alpha u - \gamma}{\beta}, \qquad \text{á } \partial_2 D,$$

og því segir formúla (22.2.9) að rétta lausnin uppfylli

$$\langle u, \varphi\rangle_L + \int_{\partial_2 D} \frac{p\alpha}{\beta} u\varphi\, ds = \langle f, \varphi\rangle + \int_{\partial_2 D} \frac{p\gamma}{\beta}\varphi\, ds, \qquad \varphi \in V_B.$$

Þetta er veikt form jaðargildisverkefnisins (22.1.2). Nú skilgreinum við

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L,B} = \langle \varphi, \psi\rangle_L + \int_{\partial_2 D} \frac{p\alpha}{\beta}\varphi\psi\, ds \quad \text{og} \quad T_B(\varphi) = \int_{\partial_2 D} \frac{p\gamma}{\beta}\varphi\, ds, \qquad \varphi, \psi \in V_B.$$

Með þessum rithætti er veik framsetning (22.1.1) og (22.1.2) í öllum tilfellunum gefin með (22.4.1). Nú skulum við taka fyrir tvö sýnidæmi um útleiðslu á veikri framsetningu og nálgun með annars stigs margliðu með aðferð Galerkins.

Sýnidæmi 22.4.1 Lítum á jaðargildisverkefnið

$$-((1+x)u')' + x^2u = 1 - x, \quad x \in]0,1[, \quad u(0) - u'(0) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Við skulum leiða út veikt form jaðargildisverkefnisins og útskýra hvernig grunnföll eru valin þegar nálgunarlausn á að vera margliða af stigi ≤ 2.

Lausn: Í þessu verkefni er blandað jaðarskilyrði í $x = 0$ og fallsjaðarskilyrði í $x = 1$. Við eigum því að taka grunnfall $\varphi \in V$, sem uppfyllir $\varphi(1) = 0$, margfalda það við $Lu(x)$ og hlutheilda. Þá fæst jafnan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x)\varphi(x)\,dx &= \int_0^1 Lu(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^1 \big(-((1+x)u'(x))' + x^2u(x)\big)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \big((1+x)u'(x)\varphi'(x) + x^2u(x)\varphi(x)\big)\,dx - \Big[(1+x)u'(x)\varphi(x)\Big]_0^1 \\
&= \int_0^1 \big((1+x)u'(x)\varphi'(x) + x^2u(x)\varphi(x)\big)\,dx + u'(0)\varphi(0) \\
&= \int_0^1 \big((1+x)u'(x)\varphi'(x) + x^2u(x)\varphi(x)\big)\,dx + (u(0)-1)\varphi(0).
\end{aligned}$$

Í síðasta liðnum notuðum við að rétta lausnin uppfyllir jaðarskilyrðið $u'(0) = u(0) - 1$. Veika formið er því jafngilda jafnan

$$\int_0^1 \big((1+x)u'(x)\varphi'(x) + x^2u(x)\varphi(x)\big)\,dx + u(0)\varphi(0) = \int_0^1 (1-x)\varphi(x)\,dx + \varphi(0).$$

sem segir okkur jafnframt að $\langle u, \varphi\rangle_{L,B}$ er það sem stendur vinstra megin jafnaðarmerkisins og $\langle f, \varphi\rangle + T_B(\varphi)$ er það sem stendur hægra megin.

Nálgunarfallið er annars stigs margliða $v(x)$ sem uppfyllir rétt jaðarskilyrði $v(1) = 2$. Við getum því tekið $\psi_0(x) = 2$ og við þurfum að velja tvær línulega óháðar margliður af stigi ≤ 2 sem taka gildið 0 í $x = 1$. Við veljum $\varphi_1(x) = 1 - x$, $\varphi_2(x) = 1 - x^2$. Þá er $v(x) = 2 + c_1(1-x) + c_2(1-x^2)$, þar sem c_1 og c_2 eru rauntölur. Línulega jöfnuhneppið sem stuðlarnir c_1 og c_2 uppfylla er

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Þar sem

$$a_{jk} = \langle \varphi_j, \varphi_k\rangle_{L,B} = \int_0^1 \big((1+x)\varphi_j'(x)\varphi_k'(x) + x^2\varphi_j(x)\varphi_k(x)\big)\,dx + \varphi_j(0)\varphi_k(0)$$

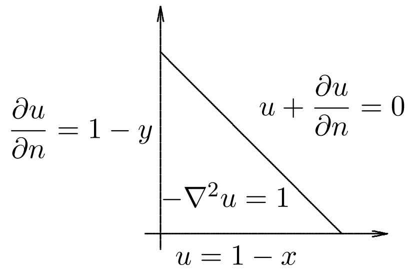
og

$$\begin{aligned}
b_j &= \langle f, \varphi_j\rangle + T_B(\varphi_j) - \langle \psi_0, \varphi_j\rangle_{L,B} \\
&= \int_0^1 (1-x)\varphi_j(x)\,dx + \varphi_j(0) - 2\int_0^1 x^2\varphi_j(x)\,dx - 2\varphi_j(0).
\end{aligned}$$

Nú er lesandanum eftirlátið að reikna út alla stuðlana og leysa hneppið. □

Sýnidæmi 22.4.2 Látum D vera opna þríhyrninginn sem afmarkast af línunum sem hafa jöfnurnar $y = 0$, $x = 0$ og $x + y = 1$, $D = \{(x, y)\,;\, 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$ og lítum á verkefnið.

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 & \text{á} \quad D, \\ u(x, 0) = 1 - x, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(0, y) = 1 - y, & 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) + u(x, 1-x) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$



Við skulum beita Galerkins til þess að ákvarða nálgunarlausn af gerðinni

$$v(x, y) = a + bx + cy + dxy.$$

Lausn: Jaðarinn $\partial_1 D$ er lárétta línustrikið $\{(x, 0)\,;\, 0 \le x \le 1\}$ og $\partial_2 D$ sammengi lóðrétta striksins $\{(0, y)\,;\, 0 < y \le 1\}$ og skástriksins $\{(x, 1 - x)\,;\, 0 \le x < 1\}$.

Fyrst þurfum við að leiða út veikt form jaðargildisverkefnisins. Við tökum því φ sem er 0 á $\partial_1 D$ margföldum báðar hliðar afleiðujöfnunnar með φ og heildum síðan yfir D. Þá fæst

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dA - \int_{\partial_2 D} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, ds = \iint_D \varphi \, dA.$$

Nú setjum við inn gildin fyrir $\partial u / \partial n$ á $\partial_2 D$ og fáum

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dA - \int_0^1 (1 - y)\varphi(0, y)\, dy + \int_0^1 u(x, 1 - x)\varphi(x, 1 - x)\sqrt{2}\, dx = \iint_D \varphi \, dA.$$

Veikt form jaðargildisverkefnisins er því

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dA + \int_0^1 u(x, 1 - x)\varphi(x, 1 - x)\sqrt{2}\, dx = \iint_D \varphi \, dA + \int_0^1 (1 - y)\varphi(0, y)\, dy.$$

Athugið að $\langle u, \varphi \rangle_{L,B}$ stendur vinstra megin jafnaðarmerkisins og $\langle f, \varphi \rangle + T_B(\varphi)$ stendur hægra mengin.

Nú er komið að því að skoða nálgnarfallið. Við verðum að velja $\psi_0(x, y) = 1 - x$ sem jafngildir því að setja $a = 1$ og $b = -1$. Hinir liðirnir cy og dxy eru báðir 0 á $\partial_1 D$ og því er eðlilegt að velja grunnföllin $\varphi_1(x, y) = y$ og $\varphi_2(x, y) = xy$. Nálgunarlausnin er því $v(x, y) = \psi_0(x, y) + c_1\varphi_1(x, y) + c_2\varphi_2(x, y)$ þar sem stuðlarnir c_1 og c_2 eru leystir út úr $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$, þar sem

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) dydx + \int_0^1 \varphi_j(x, 1 - x)\varphi_k(x, 1 - x)\sqrt{2}\, dx \\ b_j &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \varphi_j \, dydx + \int_0^1 (1 - y)\varphi_j(0, y)\, dy \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dydx - \int_0^1 \varphi_0(x, 1 - x)\varphi_j(x, 1 - x)\sqrt{2}\, dx. \end{aligned}$$

Nú er ekkert annað í boði en reikna út öll heildin

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big(0^2+1^2\big)\,dydx + \sqrt{2}\int_0^1 \big(1-x\big)^2\,dx = \tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{3},\\
a_{12} = a_{21} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big(y\cdot 0 + x\cdot 1\big)\,dydx + \sqrt{2}\int_0^1 \big(x(1-x)(1-x)\big)\,dx = \tfrac{1}{6}+\tfrac{\sqrt{2}}{12},\\
a_{22} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big(y^2+x^2\big)\,dydx + \sqrt{2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^2\,dx = \tfrac{1}{6}+\tfrac{\sqrt{2}}{30},\\
b_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dydx + \int_0^1 (1-y)y\,dy - \int_0^1 \int_0^{1-x} \big((-1)\cdot 0 + 0\cdot 1\big)\,dydx\\
&\quad - \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)(1-x)\,dx = \tfrac{1}{3}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\\
b_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,dydx + \int_0^1 (1-y)\cdot 0\,dy - \int_0^1 \int_0^{1-x} \big((-1)\cdot y + 0\cdot x\big)\,dydx\\
&\quad - \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)x(1-x)\,dx = \tfrac{5}{24}-\tfrac{\sqrt{2}}{12}
\end{aligned}
$$

Hneppið sem við þurfum að leysa er

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12} \\ \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{5}{24}-\frac{\sqrt{2}}{12} \end{bmatrix}
$$

Svarið er $c_1 = -0.4360$ og $c_2 = 1.0034$ og því er nálgunarlausnin

$$
v(x,y) = 1 - x - 0.4360\cdot y + 1.0034\cdot xy.
$$

□

22.5 Bútaaðferð í einni vídd

Við höfum nú lýst aðferð Galerkins mjög almennt, en til þess að hún verði nothæf sem nálgunaraðferð þurfum við að velja góð grunnföll þannig að auðvelt sé að ákvarða heildin sem koma fyrir í stuðlunum a_{jk} og b_j og að úrlausn jöfnuheppisins verði þægileg.

Lang auðveldast er að velja þúfugrunnföll á $[a,b]$ fyrir ótiltekna skiptingu

$$
a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.
$$

Munið að fyrir sérhvert $j = 0,\dots,N$ er φ_j fallið sem tekur gildið 1 í x_j, 0 í öllum öðrum punktum skiptingarinnar og hefur graf sem er línustrik yfir sérhverju hlutbilanna $[x_j, x_{j+1}]$. (Nú þarf lesandinn að teikna sér þrjár myndir. Sú fyrsta sýnir gröf fallanna φ_0 og φ_1, önnur sýnir gröf fallanna φ_{j-1}, φ_j og φ_{j+1} fyrir ótiltekinn innri punkt x_j í skiptingunni og sú þriðja sýnir gröf fallanna φ_{N-1} og φ_N.) Við höfum formúlur (21.3.7) fyrir φ_j og φ_j', en við getum komist að mestu af án þeirra þegar við reiknum út heildin. Athugið að hér látum við j hlaupa frá 0 til N en ekki frá 1 til N eins og gert er hér að framan.

Kostirnir við þetta val á grunnföllum eru einkum tveir:

(i) Ef $|j-k|>1$, þá er $a_{jk}=0$ og því er A sé þríhornalínufylki. Við þurfum því í mesta lagi að reikna út þrjú stök í hverri línu fylkisins og úrlausn línulega jöfnuhneppisins er hraðvirk fyrir stór hneppi.

(ii) Auðvelt er að taka góðar nálganir á heildunum sem koma fyrir í a_{jk} og b_j.

Blönduð jaðarskilyrði í báðum endapunktum

Nálgunarlausnin $v(x)$ er af gerðinni

$$v(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_N\varphi_N(x).$$

þar sem $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_N]^T$ er lausn á línulegu jöfnuhneppi $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ þar sem stuðlarnir fylkisins eru

$$a_{jk} = \langle\varphi_j, \varphi_k\rangle_{L,B} = \langle\varphi_j, \varphi_k\rangle_L + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1}\varphi_j(a)\varphi_k(a) + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2}\varphi_j(b)\varphi_k(b)$$

og stuðlar hægri hliðarinnar eru

$$b_j = \langle f, \varphi_j\rangle + T_B(\varphi_j) = \langle f, \varphi_j\rangle + \frac{p(a)\gamma_1}{\beta_1}\varphi_j(a) + \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2}\varphi_j(b).$$

Athugum nú að $\varphi_0(a) = 1$, $\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0$, fyrir $j = 1, \dots, N-1$, og $\varphi_N(b) = 1$. Þetta segir okkur að áhrif jaðarskilyrðanna gætir aðeins í 0-tu jöfnu og N-tu jöfnu.

Í 0-tu línu jöfnuhneppins höfum við aðeins tvö stök frábrugðin núlli í fylkinu og stakið í hægri hliðinni,

$$\begin{aligned}
a_{00} &= \int_{x_0}^{x_1} \big(p(\varphi_0')^2 + q\varphi_0^2\big)\,dx + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1} \approx \frac{p(m_0)}{h_0} + \frac{h_0 q(m_0)}{3} + \frac{p(a)\alpha_1}{\beta_1}\\
a_{01} &= \int_{x_0}^{x_1} \big(p\varphi_0'\varphi_1' + q\varphi_0\varphi_1\big)\,dx \approx -\frac{p(m_0)}{h_0} + \frac{h_0 q(m_0)}{6}.\\
b_0 &= \int_{x_0}^{x_1} f\varphi_0\,dx + \frac{p(a)\gamma_1}{\beta_1} \approx \frac{h_0(2f(x_0) + f(x_1))}{6} + \frac{p(a)\gamma_1}{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Hér höfum við nálgað fallgildin $p(x)$ og $q(x)$ á bilinu $[x_0, x_1]$ með gildunum $p(m_0)$ og $q(m_0)$ í miðpunktinum og reiknað heildin síðan nákvæmlega, en það er hægt að gera með reglu Simpsons. Skýringin á nálgunarformúlunum sem notaðar eru til þess að reikna stuðlana b_j er að við nálgum fallið f með línulegri brúun á hverju hlutbilanna $[x_j, x_{j+1}]$,

$$f(x) \approx f(x_0)\varphi_0(x) + f(x_1)\varphi_1(x) + \cdots + f(x_N)\varphi_N(x),$$

margföldum summuna með grunnföllunum og heildum síðan. Í línum jöfnuhneppisins númer $j = 1, \dots, N-1$ eru í mesta lagi þrjú stök í fylkinu A frábrugðin 0 og síðan höfum við stakið í hægri hliðinni,

$$
\begin{aligned}
a_{j,j-1} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(p\varphi_{j-1}'\varphi_j' + q\varphi_{j-1}\varphi_j\big)\, dx \approx -\frac{p(m_{j-1})}{h_{j-1}} + \frac{h_{j-1}q(m_{j-1})}{6},\\
a_{j,j} &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \big(p(\varphi_j')^2 + q\varphi_j^2\big)\, dx \approx \frac{p(m_{j-1})}{h_{j-1}} + \frac{p(m_j)}{h_j} + \frac{h_{j-1}q(m_{j-1}) + h_j q(m_j)}{3},\\
a_{j,j+1} &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \big(p\varphi_j'\varphi_{j+1}' + q\varphi_j\varphi_{j+1}\big)\, dx \approx -\frac{p(m_j)}{h_j} + \frac{h_j q(m_j)}{6},\\
b_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f\varphi_j\, dx \approx \frac{h_{j-1}(f(x_{j-1}) + 2f(x_j)) + h_j(2f(x_j) + f(x_{j+1}))}{6}.
\end{aligned}
$$

Hér höfum við nálgað fallgildin $p(x)$ og $q(x)$ á bilinu $[x_{j-1}, x_j]$ með gildunum $p(m_{j-1})$ og $q(m_{j-1})$ í miðpunktinum og fallgildin á bilinu $[x_j, x_{j+1}]$ með $p(m_j)$ og $q(m_j)$. Síðan reiknum við heildin yfir bilin nákvæmlega.

Í síðustu línunni númer N verða tvö stök frábrugðin 0 í fylkinu og svo hægri hliðin

$$
\begin{aligned}
a_{N,N-1} &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \big(p\varphi_{N-1}'\varphi_N' + q\varphi_{N-1}\varphi_N\big)\, dx \approx -\frac{p(m_{N-1})}{h_{N-1}} + \frac{h_{N-1}q(m_{N-1})}{6},\\
a_{NN} &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \big(p\big(\varphi_N'\big)^2 + q\varphi_N^2\big)\, dx + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2} \approx \frac{p(m_{N-1})}{h_{N-1}} + \frac{h_{N-1}q(m_{N-1})}{3} + \frac{p(b)\alpha_2}{\beta_2},\\
b_N &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} f\varphi_N\, dx + \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2} \approx \frac{h_{N-1}(f(x_{N-1}) + 2f(x_N))}{6} + \frac{p(b)\gamma_2}{\beta_2}.
\end{aligned}
$$

Nákvæmnin nálguninni ræðst af stærstu billengdinni $\max_{1\leq i\leq N-1} h_i$. Auðvitað hefði mátt nálga p, q og f með einhverjum öðrum hætti í heildunum til þess að fá meiri nákvæmni. Ef við hefðum til dæmis notað reglu Simpsons á $a_{j,j-1}$, þá hefðum við fengið

$$
\begin{aligned}
a_{j,j-1} &\approx -\frac{p(x_{j-1}) + 4p(m_{j-1}) + p(x_j)}{6h_{j-1}} + \frac{h_{j-1}(q(x_{j-1})\cdot 0 + 4q(m_{j-1})\cdot \frac{1}{4} + q(x_j)\cdot 0)}{6}\\
&= -\frac{p(x_{j-1}) + 4p(m_{j-1}) + p(x_j)}{6h_{j-1}} + \frac{h_{j-1}q(m_{j-1})}{6}.
\end{aligned}
$$

Fallsjaðarskilyrði

Athugum nú aftur að $\varphi_0(a) = 1$, $\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0$, fyrir $j = 1, \dots, N-1$, og $\varphi_N(b) = 0$. Þetta segir okkur að nálgunarfallið v uppfyllir $v(a) = c_0$ og $v(b) = c_N$. Ef $\beta_1 = 0$, þá er $u(a) = \gamma_1/\alpha_1$ og við verðum að sjá til þess að $c_0 = \gamma_1/\alpha_1$. Við höldum í jöfnuhneppið hér að framan en breytum 0-tu jöfnunni, þannig að stuðlarnir verði

$$
a_{00} = 1, \quad a_{0j} = 0,\ j = 1, \dots, N,\ b_0 = \gamma_1/\alpha_1.
$$

Ef $\beta_2 = 0$, þá er $u(b) = \gamma_2/\alpha_2$ og við verðum að sjá til þess að $c_N = \gamma_2/\alpha_2$. Breytingin sem við þurfum að gera á jöfnuhneppinu hér að framan er að í síðustu línunni verður

$$
a_{Nj} = 0,\ j = 0, \dots, N-1, \quad a_{NN} = 1, \quad b_N = \gamma_2/\alpha_2.
$$

Nú er auðvelt að sannfæra sig um að við fáum rétta nálgun með aðferð í tilfellunum þremur þegar lausnin er þekkt í öðrum eða báðum endapunktum.

Punktuppsprettur

Við gerum alltaf ráð fyrir því að fallið f sé samfellt, en Galerkin aðferðin leyfir okkur að bæta við það punktuppsprettum $\sum_{k=1}^{\nu} Q_k\delta_{r_k}$ í nokkrum ólíkum punktum r_k á bilinu $[a, b]$. Það eina sem við þurfum að vita er að

$$\langle f + \sum_{k=1}^{\nu} Q_k\delta_{r_k}, \varphi_j\rangle = \langle f, \varphi_j\rangle + \sum_{k=1}^{\nu} Q_k \int_a^b \delta_{r_k}(x)\varphi_j(x)\, dx = \langle f, \varphi_j\rangle + \sum_{k=1}^{\nu} Q_k\varphi_j(r_k).$$

Ef við sjáum til þess að allir punktarnir séu hluti af skiptingunni, $r_k = x_{j_k}$, þá er summan alltaf núll nema þegar j er einn talnanna j_k og þá er gildi summunnar jafnt Q_k.

Þessi viðbót er mikilvæg og hún gefur okkur kost á meiri sveigjanleika í aðferðinni. Í útfærslu hennar er ekkert annað gert en að hún er fyrst útfærð fyrir samfellda fallið f eins og lýst er hér að framan. Síðan er framlagi punktuppsprettanna Q_k bætt við stökin b_{j_k} sem áður voru reiknuð. Að lokum er jafnan $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ leyst og nálgunarlausnin $v(x)$ er þar með fundin.

22.6 Bútaaðferð í tveimur víddum

Nú ætlum við að lýsa þeirri útfærslu á aðferð Galerkins sem algengast er að nota við nálgun á lausnum á (22.1.2). Fyrst er svæðinu $\overline{D}$ skipt í sammengi lokaðra þríhyrninga, eða öllu heldur er $\overline{D}$ nálgað með sammengi lokaðra þríhyrninga. Hornpunktar þríhyrninganna eru allir í $\overline{D}$ og þeir eru númeraðir þannig að $(x_j, y_j) \in D \cap \partial_2 D$ fyrir $j = 1, \ldots, M$ og $(x_j, y_j) \in \partial_1 D$ fyrir $j = N + 1, \ldots, M$.

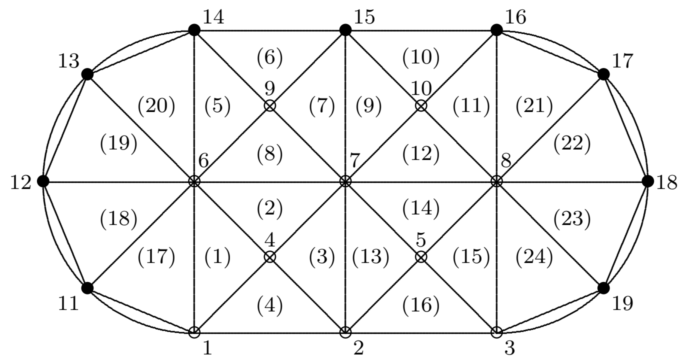
Rithattur fyrir þríhyrningana

Við þurfum að innleiða rithátt fyrir þríhyrningana. Við táknum þá með $T^{(m)}$, með $m = 1, \ldots, L$ og sammengi þeirra með S. Við viljum einnig geta tilgreint ákveðinn þríhyrning í netinu með því að gefa upp hornpunkta hans. Ef þeir hafa númer A, B, og C, þá skrifum við $T^{(m)} = T_{A,B,C}$. Hér skiptir röð punktanna miklu máli og við gefum hana alltaf upp þannig að farið er *rangsælis* eftir jaðri þríhyrningsins þegar punktarnir eru taldir upp. (Því miður er bókstafurinn A ofnotaður í þessari grein, því hann stendur fyrir númer punkts í þríhyrningi, fylkið A og kemur auk þess fyrir í flatarheildunum. Við verðum bara að lifa með þessari ónákvæmni.)

Myndin hér fyrir neðan sýnir svæði sem er sammengi rétthyrnings og tveggja hálfskífa. Við getum lýst því sem mengi punkta með hnit sem uppfylla ójöfnur,

$$D = \{(x, y)\,;\, -1 - \sqrt{1 - y^2} < x < 1 + \sqrt{1 - y^2}, -1 < y < 1\}.$$

Það er nálgað með sammengi af lokuðum þríhyrningum sem eru 24 talsins. Þeir eru númeraðir og eru númer þeirra eru sýnd innan sviga. Í netinu eru 19 hornpunktar. Í punktum sem markaðir eru með opnum hring eru gildi lausnarinnar óþekkt en í punktum sem markaðir eru með fylltri skífu eru gildin þekkt. Hér er $N = 10$ og $M = 19$. Athugið að þríhyrningar nr. 1-16 eru allir einslaga og þríhyrningar nr. 17-24 eru allir einslaga.



Nálgun á svæði með þríhyrningum

Með rithætti okkar er

$$T^{(1)} = T_{1,4,6} = T_{4,6,1} = T_{6,1,4}, \quad T^{(2)} = T_{4,7,6} = T_{7,6,4} = T_{6,4,7}, \quad T^{(3)} = \dots.$$

Þríhyrningunum er lýst sem mengi

$$T_{A,B,C} = \{(x,y) = (1-s-t)(x_A,y_A) + s(x_B,y_B) + t(x_C,y_C)\,;\ s,t \in [0,1], s+t \le 1\}.$$

Þríhyrninginn með hornpunktana $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,1)$ táknum við með E og köllum hann *einingarþríhyrning*,

$$E = \{(s,t)\,;\ s,t \in [0,1], s+t \le 1\}.$$

Athugum að við höfum gagntæka vörpun

$$\begin{aligned} t_{A,B,C} : E \to T_{A,B,C}, \quad (s,t) &\mapsto (1-s-t)(x_A,y_A) + s(x_B,y_B) + t(x_C,y_C) \\ &= (x_A,y_A) + s(x_B-x_A, y_B-y_A) + t(x_C-x_A, y_C-y_A). \end{aligned}$$

Það er betra að lýsa þessu með fylkjamargföldun

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \tag{22.6.1}$$

Andhverfa $t_{A,B,C}$ er $(x,y) \mapsto (s,t)$, þar sem hnitin s og t eru leyst út úr jöfnuhneppinu

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{bmatrix}$$

Flatarmál þríhyrningsins $T^{(m)} = T_{A,B,C}$ er

$$|T^{(m)}| = |T_{A,B,C}| = \tfrac{1}{2}|\det \begin{bmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{bmatrix}|$$

og massamiðja hans er

$$M_m = \tfrac{1}{3}\big((x_A,y_A) + (x_B,y_B) + (x_C,y_C)\big).$$

Við skilgreinum hliðarvigrana $\mathbf{l}_A$, $\mathbf{l}_B$ og $\mathbf{l}_C$ þannig að þeir liggi mótlægum hliðum $T_{A,B,C}$ við hornpunkta númer A, B og C miðað við rangsælis umferðarstefnu eftir jaðrinum

$$\mathbf{l}_A = (x_C - x_B, y_C - y_B), \quad \mathbf{l}_B = (x_A - x_C, y_A - y_C) \quad \text{og} \quad \mathbf{l}_C = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Munið að snúningur um 90° réttsælis er gefinn með vörpuninni $(x, y) \mapsto (y, -x)$ og því eru vigrarnir

$$\mathbf{l}_A^R = (y_C - y_B, -x_C + x_B,), \quad \mathbf{l}_B^R = (y_A - y_C, -x_A + x_C,) \quad \text{og} \quad \mathbf{l}_C^R = (y_B - y_A, -x_B + x_A,),$$

hornréttir á hliðarnar á móti hornunum númer A, B og C og snúa í stefnu ytri þvervigurs.

Þúfugrunnföll

Á sammengi þríhyrninganna S skilgreinum við nú samfellt föll φ_j, $j = 1, \dots, M$, sem taka gildi á bilinu $[0, 1]$, þannig að $\varphi_j(x, y) = 0$ ef punkturinn (x, y) er ekki í neinum þríhyrninganna með hornpunkt númer j,

$$\varphi_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

og graf fallsins φ_j yfir sérhverjum þríhyrningi $T_{j,k,\ell}$ er planið í $\mathbb{R}^3$ gegnum punktana

$$(x_j, y_j, 1), \quad (x_k, y_k, 0) \quad \text{og} \quad (x_\ell, y_\ell, 0).$$

Lítum nú á allra einfaldasta tilfellið sem hægt er að hugsa sér og það er þegar $\overline{D}$ er einingarþríhyrningurinn E og við veljum einn þríhyrning E fyrir S. Táknum með φ_E grunnfallið á E sem tekur gildið 1 í $(0, 0)$. Formúlan fyrir φ_E er

$$\varphi_E(s, t) = 1 - s - t, \qquad (s, t) \in E,$$

því það er augljóst að graf φ_E yfir E er plan, $\varphi_E(0, 0) = 1$ og $\varphi_E(1, 0) = \varphi_E(0, 1) = 0$.

Ef við viljum reikna út gildi fallsins φ_j í punktinum (x, y) þá þurfum við fyrst að finna út hvort (x, y) liggur í einhverjum þríhyrningi $T_{j,k,\ell}$ sem hefur (x_j, y_j) fyrir hornpunkt. Ef svo er, þá gildir formúlan

$$\varphi_j(x, y) = \varphi_E(t_{j,k,\ell}^{-1}(x, y)).$$

Jaðargildisverkefni á S

Nálgunarlausnin $v(x, y)$ fyrir jaðargildisverkefnið (22.1.1) á að vera af gerðinni

$$v(x, y) = \psi_0(x, y) + \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x, y), \qquad (x, y) \in S.$$

þar sem fallið $\psi_0(x, y)$ hefur það hlutverk að nálga gefnu jaðargildin á $\partial_1 D$,

$$\psi_0(x, y) = \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\gamma(x_k, y_k)}{\alpha(x_k, y_k)} \varphi_k(x, y), \qquad (x, y) \in S.$$

Það tekur gildið $\gamma(x_k, y_k)/\alpha(x_k, y_k)$ í punktunum $(x_k, y_k) \in \partial_1 D$, fyrir $k = N+1, \dots, M$ og brúar línulega gildin á þeim strikum á jaðri S sem tengja saman punkta á $\partial_1 D$. Við táknum sammengi þessara línustrika með $\partial_1 S$ og látum $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ og $\tilde{\gamma}$ tákna föllin á ∂S sem fást með því að brúa gildi α, β og γ milli viðeigandi endapunkta. Sammengi línustrikanna sem nálga $\partial_2 D$ táknum við með $\partial_2 S$.

Nálgunarfallið v fyrir úrlausn á jaðargildisverkefninu (22.1.1) er nálgunarfallið fyrir jaðargildisverkefni á S, sem lýst er með

$$\begin{cases} Lu = -\nabla \cdot \big(p\nabla u\big) + qu = f, & \text{á innmengi } S, \\ u(x,y) = \dfrac{\tilde{\gamma}(x,y)}{\tilde{\alpha}(x,y)}, & (x,y) \in \partial_1 S, \\ \tilde{\alpha}(x,y)u(x,y) + \tilde{\beta}(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \tilde{\gamma}(x,y), & (x,y) \in \partial_2 S. \end{cases} \tag{22.6.2}$$

Athugið að við gætum þurft að stækka skilgreiningarmengi fallanna p, q og f þannig að þau nái yfir allt S. Nú snýst nálgun okkar á lausn verkefnisins (22.1.2) um að nota þúfugrunnföllin á S til þess að nálga lausnina á (22.6.2).

Nálgun á lausn jaðargildisverkefnisins á S

Samkvæmt umfjöllun okkar hér að framan eigum við að leysa $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$, þar sem jafna (**??**) segir að

$$a_{jk} = \iint_S \big(p\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k + q\varphi_j\varphi_k\big)\, dA + \int_{\partial_2 S} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\varphi_k\, ds \tag{22.6.3}$$

og

$$\begin{aligned} b_j = {} & \iint_S f\varphi_j\, dA + \int_{\partial_2 S} \frac{p\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\, ds \\ & - \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\gamma(x_k, y_k)}{\beta(x_k, y_k)} \bigg(\iint_S \big(p\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k + q\varphi_j\varphi_k\big)\, dA + \int_{\partial_2 S} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\varphi_k\, ds \bigg) \end{aligned} \tag{22.6.4}$$

Þessar formúlur fyrir a_{jk} og b_j eru heldur ófrýnilegar við fyrstu sýn, en þær eru miklu auðveldari að fást við en maður gæti haldið. Til dæmis er $a_{jk} = 0$ ef punktur j og punktur k eru ekki grannar í þríhyrninganetinu og því eru fá stök í hverri línu fylkisins A frábrugðin 0.

Bútun – Flatarheildin

Það er hyggilegt að líta á framlög bútanna $T^{(m)}$ hvers fyrir sig í heildunum sem koma fyrir í formúlunum fyrir hverjum stuðli a_{jk} og b_j og gera eðlilegar nálganir. Byrjum á því að athuga að fyrra flatarheildið sem kemur fyrir formúlunni fyrir b_j er

$$\iint_S f\varphi_j\, dA = \sum_{(x_j, y_j) \in T^{(m)}} \iint_{T^{(m)}} f\varphi_j\, dA.$$

Hér er átt við að summan er aðeins tekin yfir þá þríhyrninga sem hafa punkt j fyrir hornpunkt. Rifjum upp að M_m táknar massamiðju þríhyrnings $T^{(m)}$. Við setjum $f_m = f(M_m)$, $p_m = p(M_m)$ og $q_m = q(M_m)$. Ef j er einn horpunkta $T^{(m)}$, þá afmarkar graf φ_j yfir $T^{(m)}$ píramíta með hæð 1 og því er heildi φ_j yfir $T^{(m)}$ jafnt $\frac{1}{3}$ af margfeldi flatarmáls grunnflatar og hæð píramítans,

$$\iint_{T^{(m)}} \varphi_j \, dA = \tfrac{1}{3}|T^{(m)}|.$$

Við leyfum okkur að gera nálgunina

$$\iint_{T^{(m)}} f\varphi_j \, dA \approx f_m \iint_{T^{(m)}} \varphi_j \, dA = \tfrac{1}{3} f_m |T^{(m)}| \tag{22.6.5}$$

og fáum því nálgunina

$$\iint_S f\varphi_j \, dA \approx \sum_{(x_j,y_j)\in T^{(m)}} \tfrac{1}{3} f_m |T^{(m)}|. \tag{22.6.6}$$

Lítum næst á flatarheildin

$$\iint_S \big(p\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k + q\varphi_j\varphi_k\big)\, dA = \sum_{(x_j,y_j),(x_k,y_k)\in T^{(m)}} \iint_{T^{(m)}} \big(p\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k + q\varphi_j\varphi_k\big)\, dA$$

sem koma bæði fyrir í stuðlum fylkisins a_{jk} og hægri hliðarinnar b_j. Hér er átt við að summan sé tekin yfir alla þríhyrninga sem innihalda (x_j, y_j) og (x_k, y_k). Þegar $j \neq k$, þá eru í mesta lagi tveir þríhyrningar sem um ræðir. Ef $j = k$, þá er átt við að summan sé tekin yfir alla þríhyrninga með hornpunkt j, eins og hér að framan.

Nú skulum við snúa okkur að því að nálga þessi heildi. Fyrst graf φ_j yfir $T^{(m)}$ er plan, þá tekur stigullinn $\nabla\varphi_j(x,y)$ sama gildi í sérhverjum innri punkti í $T^{(m)}$. Fallið φ_j tekur gildið 0 á hliðinni á móti punktinm j og því er stigullinn í stefnu vigursins $\mathbf{l}_j^R$. Hæðin h_j yfir á mótlæga hlið er fjarlægð punkts j yfir á hliðina og því er stefnuafleiða fallsins φ_j í stefnuna frá fótpunkti hæðarinnar í áttina að punkti j jöfn $1/h_j$. Þetta gefur okkur formúlu fyrir $\nabla\varphi_j$ á innmengi $T^{(m)}$,

$$\nabla\varphi_j(x,y) = \frac{-1}{h_j}\frac{\mathbf{l}_j^R}{\|\mathbf{l}_j^R\|}.$$

Nú er $|T^{(m)}| = \frac{1}{2}\|\mathbf{l}_j^R\| h_j$ og við höfum

$$\nabla\varphi_j(x,y) = -\frac{1}{2|T^{(m)}|}\mathbf{l}_j^R. \tag{22.6.7}$$

Ef j og k eru tveir hornpunktar $T^{(m)}$, þá gefur þessi formúla að

$$\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k = \frac{1}{4|T^{(m)}|^2}\mathbf{l}_j^R \cdot \mathbf{l}_k^R = \frac{1}{4|T^{(m)}|^2}\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{l}_k \tag{22.6.8}$$

gildir í innmengi $T^{(m)}$ og af henni leiðum við síðan

$$\iint_{T^{(m)}} p\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k \, dA \approx p_m \iint_{T^{(m)}} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k \, dA = \frac{p_m}{4|T^{(m)}|}\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{l}_k.$$

Næst notfærum við okkur þekkta nálgunarformúlu fyrir tvöföld heildi yfir þríhyrning sem segir að fyrir $T^{(m)} = T_{A,B,C}$ og samfellt fall $\psi(x,y)$ á honum gildi

$$\iint_{T^{(m)}} \psi(x,y)\, dA \approx \tfrac{1}{3}\big(\psi_{A,B} + \psi_{B,C} + \psi_{C,A}\big)|T^{(m)}|,$$

þar sem $\psi_{A,B}$, $\psi_{B,C}$ og $\psi_{C,A}$ tákna gildi fallsins ψ í miðpunktum hliðanna AB, BC og CA og að formúlan er nákvæm ef heildisstofninn ψ er margliða í (x,y) af stigi ≤ 2. Af þessu leiðir að

$$\iint_{T^{(m)}} \varphi_j\varphi_k \, dA = \begin{cases} \frac{1}{3}\big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 0\big)|T^{(m)}| = \frac{1}{6}|T^{(m)}|, & j = k, \\ \frac{1}{3}\big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2}\big)|T^{(m)}| = \frac{1}{12}|T^{(m)}|, & j \neq k. \end{cases}$$

Við notum nálgunarformúluna

$$\iint_{T^{(m)}} q\,\varphi_j\varphi_k \, dA \approx \begin{cases} \frac{1}{6}q_m\,|T^{(m)}|, & j = k, \\ \frac{1}{12}q_m\,|T^{(m)}|, & j \neq k. \end{cases}$$

Niðurstaðan er því að nálgun okkar á seinna flatarheildinu er

$$\iint_{T^{(m)}} \big(p\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k + q\varphi_j\varphi_k\big)\, dA \approx \frac{p_m}{4|T^{(m)}|}\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{l}_k + \begin{cases} \frac{1}{6}q_m\,|T^{(m)}|, & j = k, \\ \frac{1}{12}q_m\,|T^{(m)}|, & j \neq k. \end{cases} \tag{22.6.9}$$

Bútun – jaðarheildin

Við eigum eftir að finna nálganir á vegheildunum yfir $\partial_2 S$,

$$\int_{\partial_2 S} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\varphi_k\, ds \qquad \text{og} \qquad \int_{\partial_2 S} \frac{p\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\, ds.$$

Þá kemur regla Simpsons að góðu gagni. Munið að hún segir að

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx \tfrac{1}{6}\big(f(a) + 4f(\tfrac{1}{2}(a+b)) + f(b)\big)(b-a)$$

og að hún er nákvæm ef fallið f er margliða af stigi ≤ 3. Hugsum okkur nú að opna línustrikið milli punkta A og B liggi í $\partial_2 S$, táknum miðpunkt þess með $m_{A,B}$ og lengd þess með $|S_{A,B}|$. Föllin φ_A og φ_B uppfylla $\varphi_A(x_A,y_A) = \varphi_B(x_B,y_B) = 1$, $\varphi_A(m_{A,B}) = \varphi_B(m_{A,B}) = \frac{1}{2}$ og $\varphi_A(x_B,y_B) = \varphi_B(x_A,y_A) = 0$, og því gefur regla Simpsons okkur þrjár nálganir

$$\int_{S_{A,B}} \psi\,\varphi_j^2\, ds \approx \tfrac{1}{6}\big(\psi(x_j,y_j) + \psi(m_{A,B})\big)|S_{A,B}|, \qquad j = A, B,$$

$$\int_{S_{A,B}} \psi\,\varphi_A\varphi_B\, ds \approx \tfrac{1}{6}\psi(m_{A,B})|S_{A,B}|,$$

$$\int_{S_{A,B}} \psi\,\varphi_j\, ds \approx \tfrac{1}{6}\big(\psi(x_j,y_j) + 2\psi(m_{A,B})\big)|S_{A,B}| \qquad j = A, B.$$

Munið nú að á línustrikinu $S_{A,B}$ eru föllin $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ og $\tilde{\gamma}$ fengin með línulegri brún á gildum fallanna α, β og γ í punktum A og B. Nálganir okkar verða því

(22.6.10)
$$\int_{S_{A,B}} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_j^2\,ds \approx \frac{1}{6}\bigg(p(x_j,y_j)\frac{\alpha(x_j,y_j)}{\beta(x_j,y_j)} + p(m_{A,B})\frac{\alpha(x_A,y_A)+\alpha(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)}\bigg)|S_{A,B}|, \qquad j=A,B.$$

(22.6.11)
$$\int_{S_{A,B}} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_A\varphi_B\,ds \approx \frac{1}{6}p(m_{A,B})\frac{\alpha(x_A,y_A)+\alpha(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)}|S_{A,B}|$$

(22.6.12)
$$\int_{S_{A,B}} \frac{p\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\,ds \approx \frac{1}{6}\bigg(p(x_j,y_j)\frac{\gamma(x_j,y_j)}{\beta(x_j,y_j)} + 2p(m_{A,B})\frac{\gamma(x_A,y_A)+\gamma(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)}\bigg)|S_{A,B}|, \qquad j=A,B.$$

Nálgun á stuðlum hneppisins $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$

Nú höfum við lýst því hvernig allir liðir í formúlunum (22.6.3) og (22.6.4) eru nálgaðir og komið er að því að lýsa því hvernig staðið er að reikningunum. Við byrjum á því að núllstilla, $a_{j,k} = 0$ og $b_j = 0$ fyrir öll $j, k = 1, \dots N$. Síðan tökum við bútana $T^{(m)}$ hvern á fætur öðrum og reiknum út

$$b^{(m)} = \tfrac{1}{3}f_m|T^{(m)}|$$

og tölurnar í 3×3 fylkinu

(22.6.13)
$$A^{(m)} = \left[\frac{p_m}{4|T^{(m)}|}\begin{bmatrix} \mathbf{l}_A\cdot\mathbf{l}_A & \mathbf{l}_A\cdot\mathbf{l}_B & \mathbf{l}_A\cdot\mathbf{l}_C \\ \mathbf{l}_B\cdot\mathbf{l}_A & \mathbf{l}_B\cdot\mathbf{l}_B & \mathbf{l}_B\cdot\mathbf{l}_C \\ \mathbf{l}_C\cdot\mathbf{l}_A & \mathbf{l}_C\cdot\mathbf{l}_B & \mathbf{l}_C\cdot\mathbf{l}_C \end{bmatrix} + \frac{q_m|T^{(m)}|}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

Þessar stærðir köllum við *framlag bútsins $T^{(m)} = T_{A,B,C}$ til stuðla jöfnuhneppisins.* Samkvæmt (22.6.5) er $b^{(m)}$ nálgunargildi okkar fyrir heildin þrjú,

$$\iint_{T^{(m)}} f\varphi_j\,dA, \qquad j = A, B, C,$$

og samkvæmt (22.6.9) eru stökin í fylkinu $A^{(m)}$ nálgunargildi okkar á heildunum

$$\iint_{T^{(m)}} \big(p\nabla\varphi_j\cdot\nabla\varphi_k + q\varphi_j\varphi_k\big)\,dA, \qquad j,k = A,B,C.$$

Nú þarf að skoða gildin A, B og C og bæta $b^{(m)}$ og stökum fylkisins $A^{(m)}$ við viðeigandi stuðla $a_{j,k}$ og b_j þar sem j og k einskorðast við mengið $\{A, B, C\}$.

Við skoðum númerin A, B og C á hornpunktunum og uppfærum b-gildin, $b_j \leftarrow b_j + b^{(m)}$, fyrir þau $j = A, B, C$ sem eru $\leq N$.

Nú lítum við á fylkið $A^{(m)}$.

Ef $A > N$, þá gefur fyrsta línan $A^{(m)}$ ekkert framlag til stuðlanna.

Ef $A \leq N$, þá setjum við $j = A$ og uppfærum: $a_{j,j} \leftarrow a_{j,j} + A^{(m)}_{1,1}$.

Til þess að klára stökin í fyrstu línu $A^{(m)}$, þá þurfum við að skoða gildin á B og síðan C:

Ef $B \leq N$, þá setjum við $k = B$ og uppfærum: $a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + A^{(m)}_{1,2}$.

Ef $B > N$, þá setjum við $k = B$ og uppfærum: $b_j \leftarrow b_j - \gamma(x_k, y_k)A^{(m)}_{1,2}$.

Ef $C \leq N$, þá setjum við $k = C$ og uppfærum: $a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + A^{(m)}_{1,3}$.

Ef $C > N$, þá setjum við $k = C$ og uppfærum: $b_j \leftarrow b_j - \gamma(x_k, y_k)A^{(m)}_{1,3}$.

Nú hefur fyrsta línan í bútaframlaginu $A^{(m)}$ afgreidd og komið að næstu línu. Ef $B > N$, þá gefur hún ekkert framlag til jöfnuhneppisins.

Ef $B \leq N$, þá setjum við $j = B$ og uppfærum: $a_{j,j} \leftarrow a_{j,j} + A^{(m)}_{2,2}$.

Skoðum síðan gildin á A og C:

Ef $A \leq N$, þá setjum við $k = A$ og uppfærum: $a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + A^{(m)}_{2,1}$.

Ef $A > N$, þá setjum við $k = A$ og uppfærum: $b_j \leftarrow b_j - \gamma(x_k, y_k)A^{(m)}_{2,1}$.

Ef $C \leq N$, þá setjum við $k = C$ og uppfærum: $a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + A^{(m)}_{2,3}$.

Ef $C > N$, þá setjum við $k = C$ og uppfærum: $b_j \leftarrow b_j - \gamma(x_k, y_k)A^{(m)}_{2,3}$.

Nú sér lesandinn í hendi sér hvernig þriðja línan er afgreidd.

Þegar þríhyrningalistinn er á enda, þá höfum við nálgað öll flatarheildin yfir S sem koma fyrir í formúlunum (22.6.3) og (22.6.4) og sett þau gildi inn í $a_{j,k}$ og b_j. Nú þurfum við að uppfæra $a_{j,k}$ ogh b_j með framlögum jaðarsins. Til þess þurfum við lista yfir öll línustrikin í jaðrinum $\partial_2 S$. Hugsum okkur að $S_{A,B}$ sé eitt slíkt strik.

Lítum fyrst á nálgunina

$$\int_{S_{A,B}} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_j^2\, ds \approx \frac{1}{6}\bigg(p(x_j,y_j)\frac{\alpha(x_j,y_j)}{\beta(x_j,y_j)} + p(m_{A,B})\frac{\alpha(x_A,y_A)+\alpha(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)})\bigg)|S_{A,B}|,$$

Þessi liður kemur fyrir í (22.6.3). Ef $A \leq N$, þá setjum við $j = A$ og uppfærum

$$a_{j,j} \leftarrow a_{j,j} + \frac{1}{6}\bigg(p(x_j,y_j)\frac{\alpha(x_j,y_j)}{\beta(x_j,y_j)} + p(m_{A,B})\frac{\alpha(x_A,y_A)+\alpha(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)})\bigg)|S_{A,B}|.$$

Ef $B \leq N$, þá setjum við $j = B$ og uppfærum $a_{j,j}$ með sömu formúlu.

Horfum næst á liðinn

$$\int_{S_{A,B}} \frac{p\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\varphi_j\, ds \approx \frac{1}{6}\bigg(p(x_j,y_j)\frac{\gamma(x_j,y_j)}{\beta(x_j,y_j)} + 2p(m_{A,B})\frac{\gamma(x_A,y_A)+\gamma(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)})\bigg)|S_{A,B}|$$

í formúlunni (22.6.4). Ef $A \leq N$, þá setjum við $j = A$ og uppfærum:

$$b_j \leftarrow b_j + \frac{1}{6}\bigg(p(x_j,y_j)\frac{\gamma(x_j,y_j)}{\beta(x_j,y_j)} + 2p(m_{A,B})\frac{\gamma(x_A,y_A)+\gamma(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)})\bigg)|S_{A,B}|.$$

Ef $B \leq N$, þá setjum við $j = B$ og uppfærum með sömu formúlu.

Horfum að lokum á liðinn

$$\int_{S_{A,B}} \frac{p\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varphi_A\varphi_B\, ds \approx \frac{1}{6}p(m_{A,B})\frac{\alpha(x_A,y_A)+\alpha(x_B,y_B)}{\beta(x_A,y_A)+\beta(x_B,y_B)}|S_{A,B}|$$

sem kemur bæði fyrir í (22.6.3) og (22.6.4). Ef $A \leq N$ og $B \leq N$, þá setjum við $j = A$ og $k = B$ og uppfærum:

$$a_{j,k} \leftarrow a_{j,k} + \frac{1}{6} p(m_{A,B}) \frac{\alpha(x_A, y_A) + \alpha(x_B, y_B)}{\beta(x_A, y_A) + \beta(x_B, y_B)} |S_{A,B}| \qquad \text{og} \qquad a_{k,j} \leftarrow a_{j,k}.$$

Ef $A \leq N$ og $B > N$, þá setjum við $j = A$ og $k = B$ og uppfærum:

$$b_j \leftarrow b_j - \gamma(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{6} p(m_{A,B}) \frac{\alpha(x_A, y_A) + \alpha(x_B, y_B)}{\beta(x_A, y_A) + \beta(x_B, y_B)} |S_{A,B}|$$

Ef hins vegar $A > N$ og $B \leq N$, þá setjum við $j = B$ og $k = A$ og uppfærum b_j með þessari sömu formúlu. Ef bæði $A > N$ og $B > N$, þá eru báðir punktarnir á jaðrinum $\partial_1 D$ og strikið á milli þeirra því í $\partial_1 S$ en ekki í $\partial_2 S$.

Þegar listinn yfir strikin $S_{A,B}$ í jaðrinum $\partial_2 S$ er á enda, þá hefur nálgunarjöfnuhneppið verið ákvarðað. Stuðlafylkið er rýrt (e. *sparse*), sem þýðir að fá stök í hverri línu eru frábrugðin núlli. Fyrir þríhyrninganetið sem sýnt er á myndinni hér að framan eru í mesta lagi 4 stök frábrugðin 0 í fyrstu línunni, 5 í annari línu, 4 í þriðju o.s.frv. Línuleg jöfnuhneppi með rýrum fylkjum eru leyst með sérsniðnum reikniritum fyrir LU-þáttun, for- og endurinnsetningu og þau eru miklu hraðvirkari en venjulega aðferðin fyrir Gauss-eyðingu. Upp á þetta er boðið í `Matlab` og það er sjálfsagt að nýta sér það.

Þegar hneppið $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ hefur verið leyst, þá höfum við nálgunargildin c_j í punktunum (x_j, y_j) fyrir $j = 1, \ldots, N$.

22.7 Æfingardæmi

1. abcd) Lítið á jaðargildisverkefnin dæmi 21.7.1.

(i) Umritið verkefið yfir á veikt form.

(ii) Setjið upp línulegt jöfnuhneppi fyrir Galerkin-aðferð til nálgunar á lausninni $u(x)$ með annars stigs margliðu $v(x) = A + Bx + Cx^2$.

(iii)Setjið upp línulegt jöfnuhneppi fyrir Galerkin-aðferð til nálgunar á lausninni $u(x)$ með nálgunarfalli $v(x)$ sem er línuleg samatekt þúfugrunnfalla með þriggja bila skiptingu.

2. abcdabcd) Lítið á jaðargildisverkefnin dæmi 21.7.10 og 14.

(i) Umritið verkefið yfir á veikt form.

(ii) Setjið upp línulegt jöfnuhneppi fyrir Galerkin-aðferð til nálgunar á lausninni $u(x, y)$ með annars stigs margliðu $v(x) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$.

3. Umritið jaðargildisverkefnið

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0, & 0 < x < 1.0,\ 0 < y < 0.6, \\ u(x,0) = x,\ u(x,0.6) + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0.6) = 0, & 0 < x < 1.0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y,\ u(1,y) = 1, & 0 < y < 0.6, \end{cases}$$

á veikt form og setjið upp jöfnuhneppi fyrir aðferð Galerkins með nálgunarfall á forminu

$$v(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2.$$

4. Finnið veikt form jaðargildisverkefnisins

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 2y, & 0 < y < 1, \end{cases}$$

og ákvarðið síðan nálgunarlausnarfall á forminu $A + Bxy$ aðferð Galerkins.

5. Finnið veikt form jaðargildisverkefnisins

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 - x, \\ u(0,y) = y,\ 0 < y < 2, & \dfrac{\partial u}{\partial n}(1,y) + u(1,y) = 0,\ 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,0) = -1,\ 0 < x < 1, & \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,2-x) = 0,\ 0 < x < 1, \end{cases}$$

og ákvarðið síðan nálgunarlausn á forminu $A + Bx + Cy + Dxy$ með aðferð Galerkins.

6. Lítum á jaðargildisverkefni á þríhyrningnum $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < y < 1\}$:

$$-\Delta u = xy \quad \text{á } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,1) = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0,y) = y, \quad 0 < y < 1.$$

Umritið þetta verkefni yfir á veikt form og setjið síðan fram heildin fyrir stuðlana í línulegu jöfnuhneppi til ákvörðunar á nálgunarlausn af gerðinni $v(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy$ sem byggir á aðferð Galerkins.

7. Lítum á jaðargildisverkefni á þríhyrningnum $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < y < x < 1\}$:

$$-\Delta u = 1, \quad \text{á } D, \quad u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(1,y) = 0, \quad 0 < y < 1.$$

Umritið þetta verkefni yfir á veikt form og reiknið út stuðlana í línulegu jöfnuhneppi til ákvörðunar á nálgunarlausn af gerðinni $v(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy$ sem byggir á aðferð Galerkins.

8. Lítum á jaðargildisverkefni á svæðinu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < y < 1 + x, 0 < x < 1\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = x, \quad \text{á } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, 1+x) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 1+x) = 0, \quad u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ u(0,y) = y, \ 0 < y < 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = y^2, \ 0 < y < 2. \end{cases}$$

Umritið jaðargildisverkefnið yfir á veikt form og setjið fram heildin fyrir stuðlana í línulegu jöfnuhneppi til ákvörðunar á nálgunarlausn af gerðinni $v(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy$ sem byggir á aðferð Galerkins.

Viðauki A

RITHÁTTUR

Samantekt. Í þessum viðauka höfum við tekið saman skilgreiningar á ritættinum, sem notaður er í fyrirlestrunum. Við förum ekki út í skilgreiningar á hugtökunum sem koma við sögu og því þarf lesandinn að hafa bækur um línulega algebru og stærðfræðigreiningu við hendina, til þess að rifja þau upp.

A.1 Rúmin $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$

Táknin sem við notum fyrir talnamengin eru

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ fyrir náttúrulegar tölur,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ fyrir heilar tölur,
$\mathbb{Q} = \{r = p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ fyrir ræðar tölur,
$\mathbb{R}$ fyrir rauntölur,
$\mathbb{C}$ fyrir tvinntölur,
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ fyrir lokunina á jákvæða raunásnum og
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ fyrir lokunina á neikvæða raunásnum.

Við látum $\mathbb{R}^n$ tákna vigurrúmið sem samanstendur af öllum $x = (x_1, \dots, x_n)$ með $x_j \in \mathbb{R}$ og $\mathbb{C}^n$ tákna vigurrúmið sem samanstendur af öllum $z = (z_1, \dots, z_n)$ með $z_j \in \mathbb{C}$. Sérhvert hnit z_j má skrifa sem $z_j = x_j + iy_j$, þar sem $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Vigurinn $x = (x_1, \dots, x_m)$ nefnist *raunhluti* vigursins z og vigurinn $y = (y_1, \dots, y_n)$ nefnist *þverhluti* vigursins z. Við táknum þá með $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$. Þetta leyfir okkur að gera ekki greinarmun á mengjunum $\mathbb{C}^n$ og $\mathbb{R}^{2n}$ með því að líta á vigrana

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n \qquad \text{og} \qquad (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

sem sama stakið. Við lítum hins vegar á $\mathbb{C}^n$ sem línulegt rúm yfir tvinntölurnar, sem þýðir að þar er skilgreind margföldun á $c \in \mathbb{C}$ og $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ með $cz = (cz_1, \dots, cz_n)$, meðan $\mathbb{R}^{2n}$ er línulegt rúm yfir rauntölurnar, þar sem skilgreind er margföldun á $c \in \mathbb{R}$ og $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ með $cx = (cx_1, \dots, cx_{2n})$.

A.2 Samfellt deildanleg föll

Við fjöllum mikið um samfelld og deildanleg föll bæði af einni og mörgum breytistærðum. Þess vegna er mjög hagkvæmt að innleiða rithátt fyrir mengi allra falla sem eru samfelld á einhverju mengi. Ef U er hlutmengi af $\mathbb{R}^n$ þá látum við $C(U)$ tákna mengi allra samfelldra falla $u : U \to \mathbb{C}$. Það er til mikilla þæginda að gera frá byrjun ráð fyrir að föllin séu tvinntölugild. Við látum $C^m(U)$ tákna mengi allra m sinnum samfellt deildanlegra falla. Hér er átt við að allar hlutafleiður fallsins u af stigi $\leq m$ eru til og þar að auki samfelldar. Við skrifum $C^0(U) = C(U)$ og táknum mengi óendanlega oft deildanlegra falla með $C^\infty(U)$.

Þegar við fáumst við afleiðujöfnuhneppi, þá þurfum við að reikna með föllum sem taka gildi í vigurrúmunum $\mathbb{R}^N$ og $\mathbb{C}^N$, $u : U \to \mathbb{R}^N$ og $u : U \to \mathbb{C}^N$. Þessi föll getum við ritað sem $u = (u_1, \dots, u_N)$, þar sem öll föllin u_j taka gildi í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$. Þá er u samfellt þá og því aðeins að öll hnitaföllin u_j séu samfelld. Við segjum að u sé *m sinnum samfellt deildanlegt*, $0 \leq m \leq +\infty$, ef öll hnitaföllin u_j eru í $C^m(U)$. Við látum $C^m(U, \mathbb{R}^N)$ tákna mengi allra m sinnum samfellt deildanlegra varpana með gildi í $\mathbb{R}^N$ og $C^m(U, \mathbb{C}^N)$ tákna mengi allra m sinnum samfellt deildanlegra varpana með gildi í $\mathbb{C}^N$. Við þurfum einnig að nota $p \times n$ fylkjagild föll $A(t) = (a_{jk}(t))$, þar sem $t \in I$ og hnitaföllin a_{jk} eru skilgreind á I með gildi í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$, fyrir $j = 1, \dots, p$ og $k = 1, \dots, n$,

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(t) & a_{p2}(t) & \dots & a_{pn}(t) \end{bmatrix}.$$

Við látum $C^m(I, \mathbb{C}^{p\times n})$, $0 \leq m \leq \infty$, tákna mengi allra falla með gildi í $p \times n$ tvinntölufylkjum með öll stuðlaföllin a_{jk} í $C^m(I)$.

Aðgerðirnar deildun og heildun vigurfalla eru teknar á hnitin hvert um sig,

$$u'(t) = (u_1{}'(t), \dots, u_m{}'(t)),$$
$$\int_a^b u(t)\,dt = (\int_a^b u_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b u_m(t)\,dt).$$

Ef $f : U \to \mathbb{C}$ er fall á hlutmengi U í $\mathbb{R}^n$, þá getum við skrifað $f = u + iv$ þar sem u og v eru raun- og þverhluti fallsins f, $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$. Hlutafleiður f með tilliti til breytistærðarinnar x_j eru

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Oft þurfum við að einfalda ritháttinn fyrir hlutafleiður og losna við að skrifa þær sem brot. Þá skrifum við

$$\partial_j f = \partial_{x_j} f = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Í mörgum bókum eru hlutafleiður skrifaðar sem f_{x_j}. Þessi ritháttur hentar okkur illa, því við notum lágvísinn til þess að tákna ýmislegt annað en hlutafleiður. Mun skýrari ritháttur er að tákna hlutafleiður með ${f_{x_j}}'$. Ef f er skrifað sem fall af breytistærðunum $x, y, z, \dots$, þá skrifum við

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z}, \ \dots$$

og hærri afleiður táknum við með

$$\partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \partial_{xy}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \partial_{xxy}^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \ \dots .$$

Athugið að hávísirinn í teljaranum táknar alltaf stig afleiðunnar. Hlutafleiður af vigurgildum föllum af mörgum breytistærðum eru einnig teknar á hnitin hvert um sig,

$$\partial_{x_j} f(x) = (\partial_{x_j} f_1(x), \dots, \partial_{x_j} f_m(x)).$$

A.3 Samfelldni á köflum

Nú skulum við láta I vera lokað takmarkað bil á rauntöluásnum $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Við segjum að fallið u sé *samfellt á köflum* á bilinu I, ef til er skipting á bilinu I, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, og föll $u_j \in C([a_{j-1}, a_j])$ þannig að

$$u(t) = u_j(t), \qquad t \in (a_{j-1}, a_j).$$

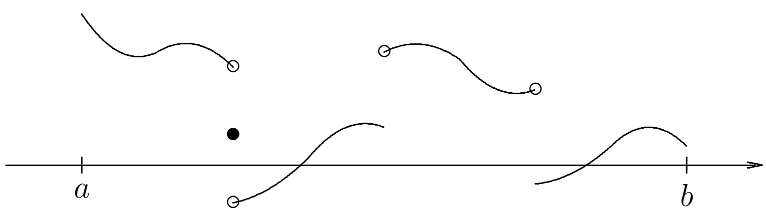
Við getum líka orðað skilgreininguna á þá leið að fallið u sé samfellt í sérhverjum punkti í I nema hugsanlega í punktunum $a_0, \dots, a_n$, en að í þessum punktum séu markgildin af u frá hægri og vinstri bæði til. Við látum $PC(I)$ tákna mengi allra falla á I sem eru samfelld á köflum. Við minnumst þess að fall $u : [a, b] \to \mathbb{C}$ er sagt vera deildanlegt í endapunktum bilsins a og b ef markgildin

$$u'(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \qquad \text{og} \qquad u'(b) = \lim_{h \to 0-} \frac{u(b+h) - u(b)}{h}$$

eru til. Við látum $C^1([a, b])$ tákna mengi allra falla sem eru deildanleg á $[a, b]$ með samfellda afleiðu. Með þrepun skilgreinum við síðan $C^m([a, b])$ sem mengi allra falla $u \in C^{m-1}([a, b])$ þannig að $u^{(m-1)} \in C^1([a, b])$. Við segjum að fall sé *óendanlega oft samfellt deildanlegt* ef það er í $C^m([a, b])$ fyrir öll m og við táknum rúm allra óendanlega oft deildanlegra falla á $[a, b]$ með $C^\infty([a, b])$.

Við segjum að fall u sé m sinnum samfellt deildanlegt á köflum á $[a, b]$ ef til er skipting á $[a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, og föll $u_j \in C^m([a_{j-1}, a_j])$ þannig að

$$u(t) = u_j(t), \qquad t \in (a_{j-1}, a_j).$$



Mynd A.1

Þetta þýðir að u er m sinnum samfellt deildanlegt á opnu bilunum (a_j, a_{j+1}) og allar afleiður $u^{(j)}$ af stigi $j \leq m$ hafa markgildi bæði frá hægri og vinstri í punktunum a_j. Við látum $PC^m([a,b])$ tákna mengi allra falla sem eru m–sinnum samfellt deildanleg á köflum, $PC^0([a,b]) = PC([a,b])$ og $PC^\infty([a,b]) = \cap_{m=0}^{\infty} PC^m([a,b])$. Athugið að þessi ritháttur $PC^m([a,b])$ er ekki viðtekinn í stærðfræði, svo þið getið ekki búist við að sjá hann í bókum.

Ef I er ótakmarkað bil á rauntalnaásnum, þá segjum við að fallið u sé m sinnnum samfellt deildanlegt á köflum á I ef takmörkun þess við sérhvert lokað takmarkað hlutbil $[a,b] \subset I$ er m sinnum samfellt deildanleg á köflum. Við látum $PC^m(I)$ tákna mengi allra falla sem eru m sinnum samfellt deildanleg á köflum.

Öll þessi fallamengi sem við höfum verið að skilgreina hér eru *línuleg rúm*, þar sem margföldun með tvinntölum er skilgreind. Slík rúm eru kölluð línuleg rúm *yfir tvinntölurnar*, til aðgreiningar frá línulegum rúmum *yfir rauntölurnar*, þar sem margföldun með rauntölum er skilgreind. Við munum óspart nota hugtök úr línulegri algebru, en rifjum ekki upp skilgreiningarnar á þeim hér. Þær eiga allir að kunna. Eitt atriði er þó rétt að minnast á. Föllin $u_1, \dots, u_m : U \to \mathbb{C}$ eru sögð vera *línulega óháð* á U, ef

$$c_1 u_1(t) + \cdots + c_m u_m(t) = 0 \qquad \text{fyrir öll} \qquad t \in U,$$

hefur í för með sér að $c_1 = \cdots c_m = 0$. Ef föllin $u_1, \dots, u_m$ eru ekki línulega óháð á U þá eru þau sögð vera *línulega háð* á U. Að föllin séu línulega háð má líka orða þannig, að unnt sé að taka eitt fallanna og skrifa það sem línulega samantekt af hinum föllunum.

Við notum táknin $\square$ og $\blacksquare$ á sérstakan hátt til þess að tákna greinaskil. Í lok setninga, skilgreininga og sýnidæma skrifum við $\square$ og í lok sannana skrifum við $\blacksquare$. Ef útleiðsla á setningu kemur áður en hún er sett fram, þá skrifum við $\blacksquare$. Sama er gert ef staðhæfing setningar er augljós afleiðing af því sem á undan er komið.

Viðauki B

SAMLEITNI Í JÖFNUM MÆLI

Samantekt. Í útreikningum okkar þurfum við oft að vita hvort formúlur eins og

$$\lim_{t\to\alpha}\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to\alpha} f_n(t),$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt,$$
$$\frac{d}{dt}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}f_n(t),$$

gildi, þar sem $\{f_n\}$ er runa af föllum sem skilgreind eru á bilinu $[a, b]$. Eins getum við þurft að vita hvort markfall samleitinnar fallarunu sé samfellt eða deildanlegt. Við ætlum nú að fjalla almennt um skilyrði á rununa $\{f_n\}$ sem tryggja að þessar formúlur gildi.

B.1 Skilgreiningar og einfaldar afleiðingar þeirra

Við byrjum á því að rifja upp skilgreininguna á samleitni fallaruna. Látum A vera mengi og $\{f_n\}$ vera runu af föllum $f_n : A \to \mathbb{C}$. Við segjum að runan $\{f_n\}$ stefni á fallið f, og táknum það með

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{og} \qquad f_n \to f,$$

ef talnarunan $\{f_n(a)\}$ stefnir á $f(a)$ fyrir öll $a \in A$. Þetta þýðir að fyrir sérhvert $a \in A$ og sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $N > 0$ þannig að

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll} \quad n \geq N.$$

Talan N getur verið háð bæði a og ε, $N = N(a, \varepsilon)$. Ef hægt er að velja töluna N *óháð* a, þá segjum við að fallarunan $\{f_n\}$ stefni á fallið f *í jöfnum mæli á* A:

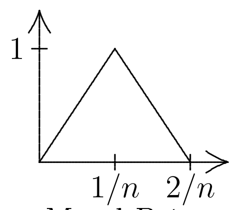
Skilgreining B.1.1 Látum A vera mengi og $\{f_n\}$ vera runu af föllum á A með gildi í $\mathbb{C}$. Við segjum að $\{f_n\}$ stefni á fallið f *í jöfnum mæli* á A, ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til N þannig að

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og öll } a \in A.$$

Við segjum að $\{f_n\}$ sé *samleitin í jöfnum mæli á* A, ef til er fall f þannig að $\{f_n\}$ stefni á f í jöfnum mæli á A. Við segjum að fallaröðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé *samleitin í jöfnum mæli* ef runan af hlutsummum $\{\sum_{k=0}^{n} f_k\}$ er samleitin í jöfnum mæli. Ef fallaröðin $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$ er samleitin í jöfnum mæli á A, þá segjum við að $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé *alsamleitin í jöfnum mæli* á menginu A.

Í því tilfelli að f er raungilt fall má einnig orða skilgreininguna svo, að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ sé til $N = N(\varepsilon)$, þannig að graf fallsins f_n sé innihaldið í menginu $\{(a, y); a \in A, f(a) - \varepsilon < y < f(a) + \varepsilon\}$ ef $n \geq N$. □

Sýnidæmi B.1.2 Myndin sýnir runu $\{f_n\}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sem stefnir á núllfallið f, en gerir það ekki í jöfnum mæli, því $|f_n(1/n) - f(1/n)| = 1$ fyrir öll n.



Mynd B.1

□

Við höfum samanburðarpróf fyrir samleitni í jöfnum mæli:

Setning B.1.3 (*Weierstrass–próf*). *Gerum ráð fyrir að $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sé röð af föllum á menginu A, $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ sé samleitin röð af jákvæðum rauntölum og*

$$0 \leq |f_k(a)| \leq M_k \qquad \textit{fyrir öll } k \geq 1 \textit{ og öll } a \in A.$$

Þá er röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ samleitin í jöfnum mæli á A. □

Sönnun: Samanburðarprófið gefur að röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ er alsamleitin í sérhverjum punkti og þar með samleitin. Við setjum $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$, $a \in A$. Þá er

$$|f(a) - \sum_{k=0}^{n} f_k(a)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(a)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Fyrst talnarunan $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ er samleitin, þá gildir um sérhvert $\varepsilon > 0$ að til er N þannig að

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Þetta sýnir að

$$|f(a) - \sum_{k=0}^{n} f_k(a)| < \varepsilon, \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og öll } a \in A.$$

Þar með stefnir röðin $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ á f í jöfnum mæli á A. ■

Við skulum nú sjá hvernig setningu Weierstrass er beitt:

Setning B.1.4 (*Abel*). *Ef $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er veldaröð með samleitnigeisla ϱ, þá er hún samleitin í jöfnum mæli á sérhverri hringskífu með miðju í 0 og geisla $r < \varrho$.* □

Sönnun: Við skilgreinum $f_n(z) = a_n z^n$ og tökum $s \in \mathbb{R}$, þannig að $r < s < \varrho$. Þá er röðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ samleitin og því eru liðir hennar takmarkaðir. Það þýðir að til er fasti $C > 0$, þannig að $|a_n s^n| \leq C$. Ef nú $|z| \leq r$, þá gildir

$$|f_n(z)| = |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq C\Big(\frac{r}{s}\Big)^n, \qquad n \geq 0.$$

Ef við skilgreinum $M_n = C(r/s)^n$, þá er $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ samleitin, því þetta er einfaldlega kvótaröð með kvótann $r/s < 1$. Weierstrass–setningin gefur okkur nú að veldaröðin er samleitin í jöfnum mæli á hringskífunni $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$. ■

B.2 Samleitni í jöfnum mæli og samfelldni

Við byrjum á því að kanna formúluna

$$\lim_{t\to\alpha} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to\alpha} f_n(t). \tag{B.2.1}$$

Setning B.2.1 *Látum A vera hlutmengi af $\mathbb{R}^m$ og $\{f_n\}$ vera runu af samfelldum föllum sem stefnir á fallið f í jöfnum mæli á A. Þá er f samfellt.*

□

Sönnun: Látum $a \in A$ og $\varepsilon > 0$. Við þurfum að sýna að til sé $\delta > 0$ þannig að

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad |x - a| < \delta.$$

Fyrst $f_n \to f$ í jöfnum mæli, þá er til N þannig að

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3, \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og } x \in A.$$

Nú er fallið f_N samfellt, svo til er $\delta > 0$ þannig að $|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$ fyrir öll x sem uppfylla $|x - a| < \delta$. Við fáum því

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,\end{aligned}$$

fyrir öll x sem uppfylla $|x - a| < \delta$. Þar með er fallið f samfellt í a. ■

Af setningunni leiðir að (B.2.1) gildir og jafnframt:

Fylgisetning B.2.2 *Látum A vera hlutmengi af $\mathbb{R}^m$ og $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ vera röð af samfelldum föllum sem er samleitin í jöfnum mæli á A. Þá er*

$$\lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_k(x), \qquad \textit{fyrir öll } a \in A.$$

□

Þegar verið er að sýna fram á að markfall f samleitinnar fallarunu $\{f_n\}$ í $C(A)$ sé samfellt, þá dugir að sýna fram á að fyrir sérhvert $a \in A$ megi velja opna kúlu $B(a, \varepsilon_a) = \{x \in A; |x - a| < \varepsilon_a\}$ þannig að $f_n \to f$ í jöfnum mæli á $B(a, \varepsilon_a)$. Þetta gildir vegna þess að setning B.2.1 segir okkur að f sé samfellt í $B(a, \varepsilon_a)$ fyrir öll $a \in A$ og þar með er f samfellt á öllu menginu A.

B.3 Samleitni í jöfnum mæli og heildun

Næsta viðfangsefni er formúlan

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt. \tag{B.3.1}$$

Setning B.3.1 *Gerum ráð fyrir að $\{f_n\}$ sé runa af heildanlegum föllum á $[a,b]$, að $f_n \to f$ í jöfnum mæli á bilinu $[a,b]$. Setjum*

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt, \qquad \text{og} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Þá stefnir g_n á g í jöfnum mæli á $[a,b]$. □

Sönnun: Látum $\varepsilon > 0$. Þá er til N þannig að

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/(b-a), \qquad \text{fyrir öll } n \geq N \text{ og öll } t \in [a,b].$$

Þar með gildir fyrir sérhvert $x \in [a,b]$

$$|g_n(x) - g(x)| = |\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt < \varepsilon,$$

og þar með stefnir $\{g_n\}$ á g í jöfnum mæli á $[a,b]$. ■

Hliðstæða þessarar setningar fyrir raðir er:

Fylgisetning B.3.2 *Gerum ráð fyrir að $\{f_k\}$ sé runa af heildanlegum föllum á bilinu $[a,b]$ og að röðin $\sum_{k=0}^\infty f_k$ sé samleitin í jöfnum mæli á bilinu $[a,b]$. Þá er*

$$\int_a^x \sum_{k=0}^\infty f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_a^x f_k(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

□

Með því að skipta á stærðinni $(b-a)$ og rúmmáli mengisins $A \subset \mathbb{R}^m$ í sönnuninni á setningu B.3.1, þá fáum við með sömu röksemdarfærslu:

Setning B.3.3 *Látum A vera takmarkað hlutmengi í $\mathbb{R}^m$ og $\{f_n\}$ vera runu af heildanlegum föllum á A. Ef $f_n \to f$ í jöfnum mæli á A, þá er*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

□

Hliðstæðar setningar gilda einnig um vegheildi yfir vegi með endanlega boglengd og heildi yfir fleti með endanlegt flatarmál.

B.4 Samleitni í jöfnum mæli og deildun

Nú snúum við okkur að formúlunni

$$\frac{d}{dt}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}f_n(t). \tag{B.4.1}$$

Setning B.4.1 *Látum $\{f_n\}$ vera runu af föllum í $C^1([a,b])$, gerum ráð fyrir að runan $\{f_n{}'\}$ sé samleitin í jöfnum mæli á $[a,b]$ og að til sé $c \in [a,b]$ þannig runan $\{f_n(c)\}$ sé samleitin. Þá er stefnir $\{f_n\}$ á fall $f \in C^1([a,b])$ í jöfnum mæli á $[a,b]$ og*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x), \qquad x \in [a,b].$$

□

Sönnun: Ef við setjum $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ og $\alpha = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$, þá gefur setning B.2.1 okkur að $g \in C([a,b])$ og setning B.3.1 gefur okkur að

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n{}'(t)\,dt \to \alpha + \int_c^x g(t)\,dt = f(x),$$

þar sem síðasta jafnan er skilgreining á fallinu f. Auk þess vitum við að samleitnin er í jöfnum mæli á $[a,b]$. Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar gefur að $f \in C^1[a,b]$ og $f' = g$. ■

Með þrepun fáum við hliðstæða setningu fyrir hærri afleiður:

Fylgisetning B.4.2 *Látum $\{f_n\}$ vera runu af föllum í $C^m([a,b])$ og gerum ráð fyrir því að runurnar $\{f^{(k)}\}$, $0 \le k \le m$, séu samleitnar í jöfnum mæli á $[a,b]$ og táknum markgildi $\{f_n\}$ með f. Þá er $f \in C^m([a,b])$ og*

$$f^{(k)}(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(t), \qquad t \in [a,b].$$

□

Þessa fylgisetningu er létt að alhæfa fyrir hærri víddir:

Setning B.4.3 *Látum A vera opið hlutmengi í $\mathbb{R}^m$, $\{f_n\}$ vera runu af föllum í $C^k(A)$, f vera fall á A og g_α vera fall á A, þar sem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ er fjölnúmer sem svarar til hlutafleiðunnar $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m}$ af stigi $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \le k$. Gerum ráð fyrir, að fyrir sérhvert $a \in A$ sé til opin kúla $B(a, \varepsilon_a)$ þannig að*

$$f_n \to f, \qquad \partial^\alpha f_n \to g_\alpha, \qquad \text{í jöfnum mæli á } B(a,\varepsilon_a),$$

fyrir allar hlutafleiður ∂^α af stigi $\le k$. Þá er $f \in C^k(A)$ og $\partial^\alpha f = g_\alpha$; þ.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \partial^\alpha f_n = \partial^\alpha f.$$

□

Við getum alhæft allar setningarnar í þessum viðauka þannig að þær gildi fyrir vigurgild föll. Í skilgreiningunni á samleitni í jöfnum mæli þurfum við einungis að skipta á tölugildi og lengd vigra í $\mathbb{R}^m$. Þá er augljóst að runa $\{f_n\}$ af vigurgildum föllum $f_n = (f_{1n}, \dots, f_{mn}) : A \to \mathbb{R}^m$ er samleitin í jöfnum mæli á A, þá og því aðeins að allar runurnar af hnitaföllunum $\{f_{jn}\}$, $j = 1, \dots, m$, séu samleitnar í jöfnum mæli á A. Við getum síðan framkvæmt allar aðgerðirnar á hverju hnitafalli fyrir sig.

Viðauki C

HEILDUN

Samantekt. Í útreikningum okkar þurfum við oft að vita hvort formúlur eins og

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx,$$
$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$$

gilda. Auk þess þurfum við að vita, hvenær skipta má á heildunarröð í tvöföldu heildi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Þessu er svarað í setningum sem kenndar eru við stærðfræðingana Lebesgue og Fubini.

C.1 Heildanleg föll

Hin hefðbundna aðferð við að skilgreina heildi er kennd við Riemann. Hún gengur þannig fyrir sig að fyrst eru heildi af þrepaföllum φ á takmörkuðu bili $[a,b]$ skilgreind með

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^N \varphi_j\cdot(a_j - a_{j-1}),$$

þar sem $\varphi(x) = \varphi_j$, ef $a_{j-1} < x < a_j$ og $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ er skipting á bilinu $[a,b]$. Til þess að skilgreina heildi takmarkaðs falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er síðan litið á tölurnar

$$M = \inf_{\varphi\geq f}\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad m = \sup_{\psi\leq f}\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

þar sem neðra markið er tekið yfir öll þrepaföll $\varphi \geq f$ og efra markið er tekið yfir öll þrepaföll $\psi \leq f$. Ef þessar tölur eru jafnar, $M = m$, þá er fallið f sagt vera heildanlegt og heildi þess er skilgreint sem

$$\int_a^b f(x)\,dx = M.$$

Þessi aðferð er ófullkomin og í nútíma stærðfræði er heildi skilgreint með aðferð, sem kennd er við Lebesgue. Hún er miklu víðtækari og gefur mun stærri flokk af heildanlegum föllum þannig að sérhvert Riemann–heildanlegt fall er Lebesgue–heildanlegt. Ekki er hægt að fara út í aðferð Lebesgues hér, en við höfum sett fram nokkrar setningar hans í takmarkaðri útgáfu fyrir Riemann–heildanleg föll í næstu grein. Þar er einnig að finna setningu sem kennd er við Fubini.

Tvinntölugilt fall $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ á lokuðu takmörkuðu bili er sagt vera heildanlegt ef raunhlutinn $u = \operatorname{Re} f$ og þverhlutinn $v = \operatorname{Im} f$ eru heildanleg föll og við skilgreinum

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Við vitum að föllin $|u|$ og $|v|$ eru heildanleg, ef u og v eru heildanleg og í framhaldi af því fæst að fallið $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ er heildanlegt á $[a, b]$. Við látum $L^1(\mathbb{R})$ tákna mengi allra falla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, þannig að f er heildanlegt yfir sérhvert lokað og takmarkað bil $[a, b]$ og óeiginlegu heildin

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^b |f(x)|\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b |f(x)|\,dx$$

eru til. Þríhyrningsójafnan gefur okkur

$$\int_a^b |\alpha f(x) + \beta g(x)|\,dx \le |\alpha| \int_a^b |f(x)|\,dx + |\beta| \int_a^b |g(x)|\,dx,$$

og með því að láta $a \to -\infty$ og $b \to +\infty$, þá sjáum við að $L^1(\mathbb{R})$ er línulegt rúm. Ef I er bil á $\mathbb{R}$, þá látum við $L^1(I)$ tákna mengi allra falla $f : I \to \mathbb{C}$ þannig að fallið $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sem skilgreint er með $\tilde{f}(x) = f(x)$ fyrir $x \in I$ og $\tilde{f}(x) = 0$ fyrir $x \in \mathbb{R} \setminus I$, er í $L^1(\mathbb{R})$.

Þessi skilgreining okkar á rúminu $L^1(\mathbb{R})$ er ekki sú sem tíðkast í nútíma stærðfræði. Heildunarhugtakið sem við notum er ófullkomið, en venja er að skilgreina $L^1(\mathbb{R})$ út frá fullkomnara heildunarhugtaki, sem kennt er við Lebesgue. Þá fæst stærra rúm en hér hefur verið lýst.

C.2 Setningar Lebesgues og Fubinis

Niðurstöðurnar sem við þurfum á að halda eru:

Setning C.2.1 (*Lebesgue*). *(i) Látum $\{f_n\}$ vera runu af föllum í $L^1(\mathbb{R})$ sem stefnir á fallið $f \in L^1(\mathbb{R})$. Gerum ráð fyrir að til sé fall g í $L^1(\mathbb{R})$, þannig að $|f_n(x)| \le g(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Þá er*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(ii) Látum $f(x, y)$ vera fall á $I \times \mathbb{R}$, þar sem I er bil á $\mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að f sé í $L^1(\mathbb{R})$ sem fall af y fyrir sérhvert $x \in I$, og að f sé samfellt fall af x fyrir sérhvert $y \in \mathbb{R}$.

Ef til er fall g í $L^1(\mathbb{R})$ þannig að $|f(x,y)| \leq g(y)$ fyrir öll $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$, þá er fallið $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ samfellt og

$$\lim_{x\to\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to\alpha} f(x,y)\,dy \qquad \alpha \in I.$$

(iii) Látum $f(x,y)$ vera fall á $I \times \mathbb{R}$, þar sem I er bil á $\mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að $f(x,y)$ sé í $L^1(\mathbb{R})$ sem fall af y fyrir öll $x \in I$, og að f sé deildanlegt fall af x fyrir öll $y \in \mathbb{R}$. Ef til er fall g í $L^1(\mathbb{R})$ þannig að $|\partial_x f(x,y)| \leq g(y)$ fyrir öll $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$, þá er fallið $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ deildanlegt og

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy, \qquad x \in I.$$

□

Setning C.2.2 (*Fubini*). *Gerum ráð fyrir að $f(x,y)$ sé fall á $\mathbb{R}^2$ og að föllin*

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,y), \quad y \text{ fasti}, && \mathbb{R} \ni y \mapsto f(x,y), \quad x \text{ fasti},\\ &\mathbb{R} \ni x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, && \mathbb{R} \ni y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx, \end{aligned}$$

séu öll í $L^1(\mathbb{R})$. Þá er f heildanlegt sem fall af tveimur breytistærðum og

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy. \end{aligned}$$

□

Við tökum sannanirnar ekki fyrir hér, en áhugasömum lesendum er bent á bækur um mál- og heildunarfræði.

Viðauki D

HNITASKIPTI

D.1 Hornrétt hnitaskipti

Oft er mikilvægt að sjá hvernig hlutafleiðuvirkjar breytast þegar skipt er um hnit. Við ætlum nú að athuga hvernig virkjarnir grad, div, rot og Δ breytast við hnitaskipti. Þessir virkjar eru skrifaðir með ýmsum rithætti,

$$\mathrm{grad} = \nabla = \partial, \qquad \mathrm{div} = \nabla\cdot, \qquad \mathrm{rot} = \mathrm{curl} = \nabla\times, \qquad \Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2.$$

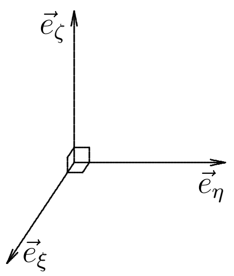
Í þessum kafla skulum við nota táknin ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ og ∇^2 eins og viðtekið er í eðlisfræði. Hugsum okkur að U sé opið mengi í (x, y, z)-rúmi, að vörpunin

$$\vec{r} : V \to U, \qquad (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, z) = (x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$$

sé tvisvar samfellt deildanleg og lítum á (ξ, η, ζ) sem ný hnit á U. Við gerum ráð fyrir að þau séu hornrétt, en það þýðir að vigrarnir

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}, \frac{\partial y}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\xi}\right), \quad \vec{b} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}$$

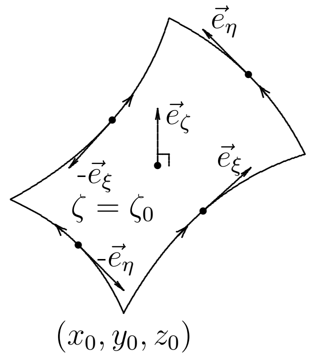
eru hornréttir í sérhverjum punkti (ξ, η, ζ). Við táknum lengdir þeirra með a, b og c og einingarvigra í stefnu þeirra með $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ og $\vec{e}_\zeta$. Við skulum einnig gefa okkur að áttun $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ og $\vec{e}_\zeta$ í þessari röð sé þannig, að þeir myndi hægri handar kerfi.



Mynd D.1. Hægri handar kerfi.

Ferill sem stikaður er með $\xi \mapsto \vec{r}(\xi, \eta_0, \zeta_0)$ nefnist ξ-hnitaferill og það er ljóst að $\partial_\xi\vec{r}(\xi, \eta_0, \zeta_0)$ er snetill við hann. Við skilgreinum η- og ζ-hnitaferla með hliðstæðum hætti og sjáum að $\partial_\eta \vec{r}(\xi_0, \eta, \zeta_0)$ og $\partial_\zeta \vec{r}(\xi_0, \eta_0, \zeta)$ eru snertlar við þá. Bogalengdarfrymin á ξ-, η- og ζ-hnitaferlunum eru því

$$ds_\xi = a\, d\xi, \qquad ds_\eta = b\, d\eta \qquad \text{og} \qquad ds_\zeta = c\, d\zeta.$$



Mynd D.2. Snertlar við hnitaferla.

Hnitaflötur gegnum punktinn (x_0, y_0, z_0) er myndmengi af plani í gegnum $\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ þar sem einu hniti er haldið föstu. Til dæmis er ζ-hnitaaflötur stikaður með $(\xi, \eta) \mapsto \vec{r}(\xi, \eta, \zeta_0)$. Flatarmálsfrymið á þessum hnitafleti er

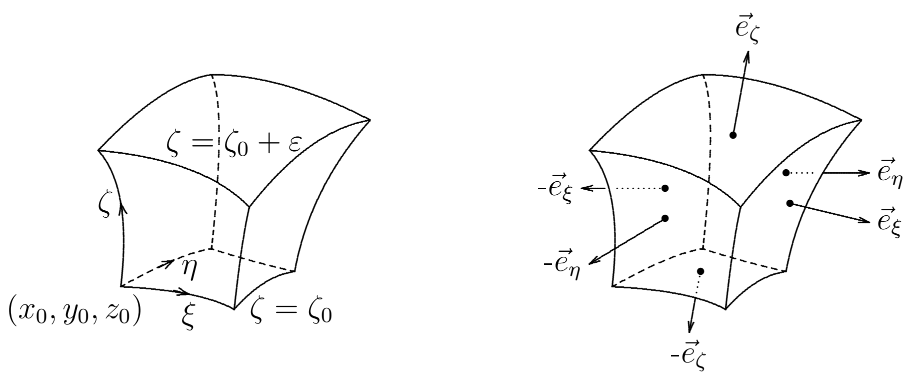
$$dS_\zeta = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\| d\xi d\eta.$$

Fyrst vigrarnir $\partial_\xi \vec{r}$, $\partial_\eta \vec{r}$ og $\partial_\zeta \vec{r}$ eru hornréttir, þá er lengdin af krossfeldi þeirra jöfn margfeldi lengdanna ab. Á hliðstæðan hátt fást formúlur fyrir flatarmálsfrymin á ξ- og η-hnitaflötunum og niðurstaðan verður

$$dS_\xi = bc\, d\eta d\zeta, \qquad dS_\eta = ac\, d\xi d\zeta \qquad \text{og} \qquad dS_\zeta = ab\, d\xi d\eta.$$

Vigrarnir $\partial_\xi \vec{r}$, $\partial_\eta \vec{r}$ og $\partial_\zeta \vec{r}$ mynda dálkana í Jacobi-fylki vörpunarinnar $\vec{r}$. Fyrst þeir eru hornréttir, þá er tölugildið af Jacobi-ákveðu hnitaskiptanna jafnt abc og rúmmálsfrymið verður,

$$dV = dxdydz = abc\, d\xi d\eta d\zeta.$$



Mynd D.3. Rúmskiki í (x, y, z)-rúmi.

D.2 Stigull í pólhnitum og kúluhnitum

Nú skulum við líta á fall $f : U \to \mathbb{R}$. Í rétthyrndu hnitakerfi er stigullinn af f settur fram sem

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z,$$

þar sem $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$ og $\vec{e}_z = (0,0,1)$. Nú setjum við $\varphi(\xi,\eta,\zeta) = f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))$. Keðjureglan gefur okkur formúluna

$$\nabla f = \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\vec{e}_\xi + \frac{1}{b}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\vec{e}_\eta + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\vec{e}_\zeta, \tag{D.2.1}$$

þar sem litið er á vinstri hliðina sem fall af (x,y,z) og hægri hliðina sem fall af (ξ,η,ζ). Í sértilfellinu þegar f er fall af tveimur breytistærðum og hnitaskiptin eru þannig að z hnitið er óbreytt við hnitaskiptin,

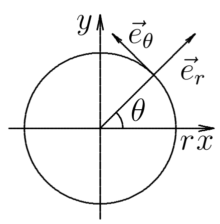
$$(\xi,\eta,\zeta) \mapsto (x,y,z) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), \zeta),$$

þá verður þessi formúla

$$\nabla f = \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\vec{e}_\xi + \frac{1}{b}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\vec{e}_\eta. \tag{D.2.2}$$

Sýnidæmi D.2.1 (*Stigull í pólhnitum*). Við skulum nú innleiða pólhnit, $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Þá er

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}\right) = \big(\cos\theta, \sin\theta\big), & a &= 1, & \vec{e}_r &= \big(\cos\theta, \sin\theta\big),\\
\vec{b} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \big(-r\sin\theta, r\cos\theta\big), & b &= r, & \vec{e}_\theta &= \big(-\sin\theta, \cos\theta\big).
\end{aligned}$$



Mynd D.4. Pólhnit.

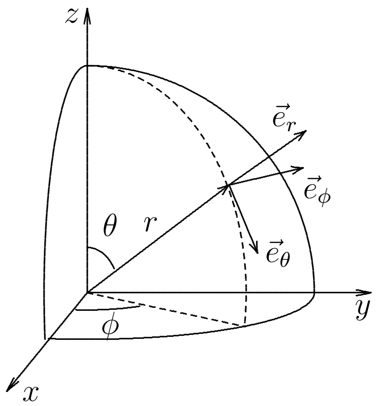
Stigullinn í pólhnitum er því

$$\nabla f = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta. \tag{D.2.3}$$

□

Sýnidæmi D.2.2 Stigull í kúluhnitum Við skulum nú innleiða kúluhnit,

$$(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$



Mynd D.5. Kúluhnit.

Þá er

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = \big(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\big), && a = 1,\\
\vec{b} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \big(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta\big), && b = r,\\
\vec{c} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi}\right) = \big(-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0\big), && c = r\sin\theta.
\end{aligned}$$

Grunnurinn í kúluhnitum er því

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \big(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\big),\\
\vec{e}_\theta &= \big(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\big),\\
\vec{e}_\phi &= \big(-\sin\phi, \cos\phi, 0\big).
\end{aligned}$$

Stigullinn í kúluhnitum er þar með fundinn

$$\nabla f = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi. \tag{D.2.4}$$

□

D.3 Sundurleitni í pólhnitum og kúluhnitum

Nú skulum við líta á sundurleitni vigursviðsins $\vec{v} : U \to \mathbb{R}^3$. Hún er sett fram í rétthyrndum hnitum sem

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{ef} \qquad \vec{v} = \vec{v}_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z.$$

Ef $D\vec{v}(\vec{r})$ táknar afleiðu vigursviðsins í punktinum $\vec{r} = (x, y, z)$, þá er fylki $D\vec{v}(\vec{r})$ miðað við grunninn $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gefið með formúlunni

$$\begin{bmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x & \partial_z v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y & \partial_z v_y \\ \partial_x v_z & \partial_y v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}.$$

og $\nabla \cdot \vec{v}$ er summa hornalínustakanna í fylkinu. Fyrir $n \times n$ fylki A er summa hornalínustakanna nefnd spor A og er táknuð með trace$A$. Það er auðvelt að sannfæra sig um að $\text{trace}(B^{-1}AB) = \text{trace}A$ fyrir sérhvert andhverfanlegt fylki. Af því leiðir að sundurleitnin $\nabla \cdot \vec{v}$ er óháð því hvaða fylkjaframsetning er tekin á $D\vec{v}(\vec{r})$.

Nú setjum við $\vec{w}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{v}(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta))$ og skrifum $\vec{w} = v_\xi \vec{e}_\xi + v_\eta \vec{e}_\eta + v_\zeta \vec{e}_\zeta$. Keðjureglan gefur okkur að

$$D\vec{v}(\vec{r})\vec{e}_\xi = \frac{1}{a}\partial_\xi \vec{w}, \qquad D\vec{v}(\vec{r})\vec{e}_\eta = \frac{1}{b}\partial_\eta \vec{w}, \qquad D\vec{v}(\vec{r})\vec{e}_\zeta = \frac{1}{c}\partial_\zeta \vec{w},$$

og þar með er

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{a}\big(\partial_\xi \vec{w}\big) \cdot \vec{e}_\xi + \frac{1}{b}\big(\partial_\eta \vec{w}\big) \cdot \vec{e}_\eta + \frac{1}{c}\big(\partial_\zeta \vec{w}\big) \cdot \vec{e}_\zeta.$$

Tökum nú fyrir sértilfellið $\vec{w} = \vec{e}_\xi$. Fyrst $\vec{e}_\xi$ er einingarvigur, þá er $0 = \partial_\xi\big(\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\xi\big) = 2\big(\partial_\xi \vec{e}_\xi\big) \cdot \vec{e}_\xi$ og því

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{abc}\big[ac\big(\partial_\eta \vec{e}_\xi\big) \cdot \vec{e}_\eta + ab\big(\partial_\zeta \vec{e}_\xi\big) \cdot \vec{e}_\zeta\big]$$

Nú athugum við að

$$\begin{aligned} a\big(\partial_\eta \vec{e}_\xi\big) \cdot \vec{e}_\eta &= \big(\partial_\eta(a\vec{e}_\xi)\big) \cdot \vec{e}_\eta = \big(\partial_\eta \partial_\xi \vec{r}\big) \cdot \vec{e}_\eta = \big(\partial_\xi \partial_\eta \vec{r}\big) \cdot \vec{e}_\eta \\ &= \big(\partial_\xi(b\vec{e}_\eta)\big) \cdot \vec{e}_\eta = \partial_\xi b \end{aligned}$$

Í síðasta skrefinu notfærðum við okkur að $\vec{e}_\eta$ er einingarvigur og þar með er $0 = \partial_\xi\big(\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\eta\big) = 2\big(\partial_\xi \vec{e}_\eta\big) \cdot \vec{e}_\eta$. Á nákvæmlega sama hátt fáum við síðan að

$$a\big(\partial_\zeta \vec{e}_\xi\big) \cdot \vec{e}_\zeta = \partial_\xi c.$$

Við höfum því formúluna

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{abc}\big[\big(\partial_\xi b\big)c + b\big(\partial_\xi c\big)\big] = \frac{1}{abc}\partial_\xi\big(bc\big).$$

Þetta var sértilfellið $\vec{w} = \vec{e}_\xi$. Lítum nú á $\vec{w} = v_\xi \vec{e}_\xi$ og notfærum okkur formúluna $\nabla \cdot (f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\nabla \cdot \vec{F}$. Hún gefur ásamt D.2.1 að

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{a}\partial_\xi v_\xi + \frac{1}{abc}v_\xi \partial_\xi\big(bc\big) = \frac{1}{abc}\partial_\xi\big(v_\xi bc\big).$$

Með því að skipta á hlutverkum breytistærðanna í þessari formúlu fáum við sams konar formúlur fyrir $\nabla \cdot v$ í tilfellunum $\vec{v} = v_\eta \vec{e}_\eta$ og $\vec{v} = v_\zeta \vec{e}_\zeta$, en þær eru $\nabla \cdot \big(v_\eta \vec{e}_\eta\big) = \partial_\eta\big(v_\eta ac\big)/abc$ og $\nabla \cdot \big(v_\zeta \vec{e}_\zeta\big) = \partial_\zeta\big(v_\zeta ab\big)/abc$ Almenna formúlan er þar með fundin

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{abc}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(bcv_\xi\big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(acv_\eta\big) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(abv_\zeta\big)\right]. \tag{D.3.1}$$

Ef vigursviðið $\vec{v}$ er aðeins háð tveimur breytistærðum (x, y) og við veljum $z = \zeta$, þá er $c = 1$ og við fáum sértilfellið

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{ab}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(bv_\xi\big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(av_\eta\big)\right]. \tag{D.3.2}$$

Sýnidæmi D.3.1 (*Sundurleitni í pólhnitum*). Nú skulum við skrifa $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$ með sama rithætti og í sýnidæmi D.2.1. Þá er $\xi = r$, $\eta = \theta$, $a = 1$ og $b = r$. Þar með er

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(rv_r\big) + \frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta\right]. \tag{D.3.3}$$

□

Sýnidæmi D.3.2 Sundurleitni í kúluhnitum Við skrifum $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\phi\vec{e}_\phi$ og stingum $\xi = r$, $\eta = \theta$, $\zeta = \phi$, $a = 1$, $b = r$ og $c = r\sin\theta$ inn í (D.3.2). Þá fáum við

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\sin\theta v_r\big) + \frac{\partial}{\partial \theta}\big(r\sin\theta v_\theta\big) + \frac{\partial}{\partial \phi}\big(rv_\phi\big)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2v_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\big(\sin\theta v_\theta\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.\end{aligned} \tag{D.3.4}$$

□

D.4 Laplace-virki í pólhnitum og kúluhnitum

Nú lítum við aftur á almenn hornrétt hnit og gerum ráð fyrir að $\vec{v}$ sé stigulsvið $\vec{v} = \nabla f$. Við skrifum $f(x, y, z) = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ og höfum því

$$\vec{v} = \frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\vec{e}_\xi + \frac{1}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\vec{e}_\eta + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\vec{e}_\zeta.$$

og þar með verður formúlan fyrir Laplace-virkjann

$$\nabla^2 f = \frac{1}{abc}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{bc}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{ac}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{ab}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)\right]. \tag{D.4.1}$$

Í sértifellinu þegar f er aðeins háð tveimur breytistærðum (x, y) og við veljum $z = \zeta$, þá er $c = 1$ og við fáum sértilfellið

$$\nabla^2 f = \frac{1}{ab}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{b}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{a}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right]. \tag{D.4.2}$$

Sýnidæmi D.4.1 Laplace-virki í pólhnitum Lítum á fall $f \in C^2(U)$ og innleiðum pólhnit eins og í sýnidæmum D.2.1 og D.3.1. Þá fáum við með því að stinga $a = 1$ og $b = r$ inn í (D.4.2) að

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \tag{D.4.3}$$

□

Sýnidæmi D.4.2 Laplace-virki í kúluhnitum Með sama rithætti og í sýnidæmum D.2.2 og D.3.2 fáum við nú

$$
\begin{aligned}
\text{(D.4.4)} \qquad \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.
\end{aligned}
$$

□

D.5 Rót í sívalnings- og kúluhnitum

Nú tökum við fyrir *rót* vigursviðsins $\vec{v}$, en það er táknað með

$$
\text{(D.5.1)} \qquad \operatorname{rot}\vec{v}, \qquad \operatorname{curl}\vec{v} \qquad \text{eða} \qquad \nabla \times \vec{v}.
$$

Í rétthyrndum hnitum er rótið gefið með formúlunni

$$
\text{(D.5.2)} \qquad \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z.
$$

Þessi formúla er oft skrifuð upp á fylkjaformi

$$
\text{(D.5.3)} \qquad \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.
$$

Nú ætlum við að snúa þessari formúlu yfir í hnitin (ξ, η, ζ). Við skrifum því

$$
\vec{v} = v_\xi \vec{e}_\xi + v_\eta \vec{e}_\eta + v_\zeta \vec{e}_\zeta.
$$

Við lítum á $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ og $\vec{e}_\zeta$ sem vigra í (x, y, z)-rúmi. Þeir eru snertlar við ξ-, η- og ζ-hnitaferlana í stefnu vaxandi gildis á hnitinu. Við getum líka lítið á þá sem einingarvigra í stefnu stigla af hnitaföllunum $(x, y, x) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$. Þar með er

$$
\vec{v} = a v_\xi \nabla \xi + b v_\eta \nabla \eta + c v_\zeta \nabla \zeta,
$$

þar sem við lítum á $\nabla\xi$, $\nabla\eta$ og $\nabla\zeta$ sem föll af (x, y, z) og stuðlana av_ξ, bv_η og cv_ζ, sem föll af $(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z))$. Nú gildir formúlan $\nabla \times (F\nabla G) = \nabla F \times \nabla G$ um öll föll F og G af þremur breytistærðum. Hún gefur

$$
\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{a}\nabla\big(av_\xi\big) \times \vec{e}_\xi + \frac{1}{b}\nabla\big(bv_\eta\big) \times \vec{e}_\eta + \frac{1}{c}\nabla\big(cv_\zeta\big) \times \vec{e}_\zeta.
$$

Nú er $\vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta = \vec{e}_\zeta$, $\vec{e}_\eta \times \vec{e}_\zeta = \vec{e}_\xi$ og $\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\xi = \vec{e}_\eta$, og með því að nota formúluna fyrir stigulinn í (ξ, η, ζ)-hnitunum, þá fáum við

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{v} = &\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{b}\partial_\eta(av_\xi)\vec{e}_\zeta + \frac{1}{c}\partial_\zeta(av_\xi)\vec{e}_\eta\right] \\
&+ \frac{1}{b}\left[\frac{1}{a}\partial_\xi(bv_\eta)\vec{e}_\zeta - \frac{1}{c}\partial_\zeta(bv_\eta)\vec{e}_\xi\right] \\
&+ \frac{1}{c}\left[-\frac{1}{a}\partial_\xi(cv_\zeta)\vec{e}_\eta + \frac{1}{b}\partial_\eta(cv_\zeta)\vec{e}_\xi\right].
\end{aligned}
$$

Með því að raða liðunum upp á nýtt fáum við

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{v} &= \frac{1}{bc}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\big(cv_\zeta\big)-\frac{\partial}{\partial\zeta}\big(bv_\eta\big)\right]\vec{e}_\xi \\ &+\frac{1}{ac}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\big(av_\xi\big)-\frac{\partial}{\partial\xi}\big(cv_\zeta\big)\right]\vec{e}_\eta \\ &+\frac{1}{ab}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\big(bv_\eta\big)-\frac{\partial}{\partial\eta}\big(av_\xi\big)\right]\vec{e}_\zeta.\end{aligned}\tag{D.5.4}$$

Þeir sem hafa gaman af ákveðum skrifa þessa formúlu sem

$$\nabla\times\vec{v}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a\vec{e}_\xi & b\vec{e}_\eta & c\vec{e}_\zeta\\ \partial_\xi & \partial_\eta & \partial_\zeta\\ av_\xi & bv_\eta & cv_\zeta\end{vmatrix}.\tag{D.5.5}$$

Sýnidæmi D.5.1 Rót í sívalningshnitum Sértilfellið af (D.5.5) fyrir sívalningshnit,

$$(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z),$$

er gefið með

$$\nabla\times\vec{v}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z\\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z\\ v_r & rv_\theta & v_z\end{vmatrix}.\tag{D.5.6}$$

□

Sýnidæmi D.5.2 Rót í kúluhnitum

$$\nabla\times\vec{v}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi\\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi\\ v_r & rv_\theta & r\sin\theta v_\phi\end{vmatrix}.\tag{D.5.7}$$

□

Lítum nú aftur á vigurssvið $\vec{v}=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y$ í tveimur víddum. Þá er $\vec{w}(x,y,z)=(v_x(x,y),v_y(x,y),0)$ vigursvið sem er óháð hnitinu z. Þar með er

$$\nabla\times\vec{w}=(0,0,\partial_x v_y-\partial_y v_x).\tag{D.5.8}$$

Ef við látum $\vec{v}=v_r\vec{e}_r+v_\theta\vec{e}_\theta$ vera framsetningu á vigursviðinu u í pólhnitum, þá fáum við með því að líta á formúluna fyrir rótið í sívalningshnitum að

$$\partial_x v_y-\partial_y v_x=\frac{1}{r}\big(\partial_r\big(rv_\theta\big)-\partial_\theta v_r\big).\tag{D.5.9}$$

Atriðisorðaskrá