Définitions et propriétés utiles

Ci-dessous, vous trouverez des définitions et propriétés diverses. Ce qui distingue une propriété d'une définition, est qu'on peut démontrer qu'une propriété est satisfaite à partir des définitions.

Dans toute démonstration d'une propriété, vous pouvez supposer que les propriétés qui apparaissent plus tôt dans cette liste sont vraies. Par exemple, pour prouver la propriété 6 d'une liste quelconque, on peut prendre pour acquis que la propriété 3 est vraie ; on ne peut pas faire l'inverse.

Définitions des scalaires

1.1 Nombre complexe: $z \in \mathbb{C} : z = a + bi; \qquad a, b \in \mathbb{R}; \qquad i = \sqrt{-1}$

1.2 Conjugué: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

1.3 Forme polaire d'un nombre complexe: $z = e^{i\theta}$

1.4 Conjugué, forme polaire: $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Propriétés des scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

2.1 $a + b = b + a$ commutativité de l'addition

2.2 $(a + b) + c = a + (b + c)$ associativité de l'addition

2.3 $ab = ba$ commutativité de la multiplication

2.4 $(ab)c = a(bc)$ associativité de la multiplication

2.5 $a + 0 = a$ élément neutre de l'addition

2.6 $a + (-a) = 0$ inverse additif

2.7 $1a = a$ élément neutre de la multiplication

2.8 $aa^{-1} = 1$ inverse multiplicatif

2.9 $a(b + c) = ab + ac$ distributivité de la multiplication sur l'addition

2.10 $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

2.11 $a^b a^c = a^{b+c}$

2.12 $\bar{\bar{z}} = z$

2.13 Relation d'Euler (ou de *de Moivre*): $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

2.14 Relation d'Euler (cas particulier): $e^{i\pi} = -1$

Définitions des matrices

3.1 Matrice quelconque: $\boldsymbol{A}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$

3.2 Coefficient d'une matrice: $a_{ij} = [A]_{ij}$

3.3 Matrice nulle (taille $m \times n$ sous-entendue): $\mathbf{0} = [0]$

3.4 Matrice diagonale: $[\boldsymbol{A}]_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$

3.5 Symbole de Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

3.6 Matrice identité $n \times n$: $\boldsymbol{I}_n = [\delta_{ij}]$

3.7 Addition de matrices: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \iff [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$

3.8 Multiplication de matrice par un scalaire: $c\boldsymbol{A} = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$

3.9 Négation d'une matrice: $-\boldsymbol{A} = (-1)\boldsymbol{A}$

3.10 Soustraction de matrices: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$

3.11 Multiplication de matrices: $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p} = \boldsymbol{C}_{m\times p} \iff (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$

3.12 Trace d'une matrice: $\text{Tr}(\boldsymbol{A}_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

3.13 Transposée: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} = [a_{ji}]$

3.14 Conjuguée: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \overline{\boldsymbol{A}} = [\overline{a_{ij}}]$

3.15 Conjuguée de la transposée: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}} = [\overline{a_{ji}}]$

3.16 Matrice symétrique: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} \iff a_{ij} = a_{ji}$

3.17 Matrice antisymétrique: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} \iff a_{ij} = -a_{ji}$

3.18 Matrice hermitienne: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* \iff a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

3.19 Matrice transconjuguée: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^* \iff a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$

3.20 $\boldsymbol{A}^0_{n\times n} = \boldsymbol{I}_n$

3.21 $k \in \mathbb{N}, k \geq 2: \quad \boldsymbol{A}^k_{n\times n} = (\boldsymbol{A}^{k-1}_{n\times n})\boldsymbol{A}_{n\times n}$

3.22 Commutateur: $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$

3.23 Matrice idempotente: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$

3.24 Soit $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, la matrice augmentée est $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$

3.25 Rang: $\text{rg}(\boldsymbol{A})$ = nombre de rangées non-nulles de $\boldsymbol{A}$ lorsque $\boldsymbol{A}$ est sous une forme échelonnée.

3.26 Matrice inverse (si elle existe): $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$

Propriétés des matrices

Dans ce qui suit, lorsqu'on écrit $\boldsymbol{A}^{-1}$, c'est parce qu'on suppose que l'inverse existe.

4.1 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff [a_{ij}] = [b_{ij}] \quad \forall i, j$ égalité des matrices

4.2 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ commutativité de l'addition

4.3 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ associativité de l'addition

4.4 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ associativité de la multiplication

4.5 $\boldsymbol{A} + \mathbf{0} = \boldsymbol{A}$ élément neutre de l'addition

4.6 $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$ inverse additif

4.7 $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$ élément neutre de la multiplication

4.8 $c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}$

4.9 $(c+d)\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A}$

4.10 $(cd)\boldsymbol{A} = c(d\boldsymbol{A})$

4.11 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{BD}$

4.12 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}$

4.13 $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$

4.14 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$

4.15 $\overline{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$

4.16 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}$

4.17 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$

4.18 $\boldsymbol{A}_{n\times n}^{s+t} = \boldsymbol{A}_{n\times n}^{s}\boldsymbol{A}_{n\times n}^{t}$

4.19 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{BA})$

4.20 $(\boldsymbol{AB})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$

4.21 $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

4.22 $\left(\boldsymbol{A}^{k}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k}$; par convention, ceci est égal à $\boldsymbol{A}^{-k}$.

4.23 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathbf{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}$

4.24 Si $c \neq 0$, $(c\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$