Annexe

A Définitions et propriétés utiles

Ci-dessous, vous trouverez des définitions et propriétés diverses. Ce qui distingue une propriété d'une définition, est qu'on peut démontrer qu'une propriété est satisfaite à partir des définitions.

Dans toute démonstration d'une propriété, vous pouvez supposer que les propriétés qui apparaissent plus tôt dans cette liste sont vraies. Par exemple, pour prouver la propriété 6 d'une liste quelconque, on peut prendre pour acquis que la propriété 3 est vraie ; on ne peut pas faire l'inverse.

A.1 Définitions des scalaires

A.1.1 Nombre complexe: $z \in \mathbb{C} : z = a + bi; \qquad a, b \in \mathbb{R}; \qquad i = \sqrt{-1}$

A.1.2 Conjugué: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

A.1.3 Forme polaire d'un nombre complexe: $z = e^{i\theta}$

A.1.4 Conjugué, forme polaire: $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

A.2 Propriétés des scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

A.2.1 $a + b = b + a$ commutativité de l'addition

A.2.2 $(a + b) + c = a + (b + c)$ associativité de l'addition

A.2.3 $ab = ba$ commutativité de la multiplication

A.2.4 $(ab)c = a(bc)$ associativité de la multiplication

A.2.5 $a + 0 = a$ élément neutre de l'addition

A.2.6 $a + (-a) = 0$ inverse additif

A.2.7 $1a = a$ élément neutre de la multiplication

A.2.8 $aa^{-1} = 1$ inverse multiplicatif

A.2.9 $a(b + c) = ab + ac$ distributivité de la multiplication sur l'addition

A.2.10 $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

A.2.11 $a^b a^c = a^{b+c}$

A.2.12 $\overline{\overline{z}} = z$

A.2.13 Relation d'Euler (ou de *de Moivre*): $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

A.2.14 Relation d'Euler (cas particulier): $e^{i\pi} = -1$

Note: Il existe des généralisations des nombres complexes. Le plus simple est celui des quaternions $\mathbb{H}$ et le suivant est celui des octonions $\mathbb{O}$. La multiplication des quaternions ne respecte pas toujours la commutativité, c'est-à-dire qu'on peut avoir $ab \neq ba$. La multiplication des octonions ne respecte pas toujours ni la commutativité, ni l'associativité, c'est-à-dire qu'on peut avoir $ab \neq ba$ et $(ab)c \neq a(bc)$. Sachant ceci, vous comprendrez peut-être pourquoi on doit démontrer certaines propriétés des matrices qui nous paraissent évidentes. Dans ce qui suit, on suppose toujours que les coefficients des matrices sont soit des nombres réels ou des nombres complexes.

A.3 Définitions des matrices

A.3.1 Matrice quelconque: $\boldsymbol{A}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$

A.3.2 Coefficient d'une matrice: $a_{ij} = [A]_{ij}$

A.3.3 Matrice nulle (taille $m \times n$ sous-entendue): $\mathbf{0} = [0]$

A.3.4 Matrice diagonale: $[\boldsymbol{A}]_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$

A.3.5 Symbole de Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

A.3.6 Matrice identité $n \times n$: $\boldsymbol{I}_n = [\delta_{ij}]$

A.3.7 Addition de matrices: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \iff [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$

A.3.8 Multiplication de matrice par un scalaire: $c\boldsymbol{A} = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$

A.3.9 Négation d'une matrice: $-\boldsymbol{A} = (-1)\boldsymbol{A}$

A.3.10 Soustraction de matrices: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$

A.3.11 Multiplication de matrices: $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p} = \boldsymbol{C}_{m\times p} \iff (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$

A.3.12 Trace d'une matrice: $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

A.3.13 Transposée: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \boldsymbol{A}^\top = [a_{ji}]$

A.3.14 Conjuguée: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \overline{\boldsymbol{A}} = [\overline{a_{ij}}]$

A.3.15 Conjuguée de la transposée: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}^\top} = [\overline{a_{ji}}]$

A.3.16 Matrice symétrique: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top \iff a_{ij} = a_{ji}$

A.3.17 Matrice antisymétrique: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^\top \iff a_{ij} = -a_{ji}$

A.3.18 Matrice hermitienne: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* \iff a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

A.3.19 Matrice transconjuguée: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^* \iff a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$

A.3.20 $\boldsymbol{A}^0_{n\times n} = \boldsymbol{I}_n$

A.3.21 $k \in \mathbb{N}, k \geq 2: \quad \boldsymbol{A}^k_{n\times n} = (\boldsymbol{A}^{k-1}_{n\times n})\boldsymbol{A}_{n\times n}$

A.3.22 Commutateur: $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$

A.3.23 Matrice idempotente: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$

A.3.24 Soit $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, la matrice augmentée est $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$

A.3.25 Rang: $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A})$ = nombre de rangées non-nulles de $\boldsymbol{A}$ lorsque $\boldsymbol{A}$ est sous une forme échelonnée.

A.3.26 Matrice inverse (si elle existe): $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$

A.4 Propriétés des matrices

Dans ce qui suit, lorsqu'on écrit $\boldsymbol{A}^{-1}$, c'est parce qu'on suppose que l'inverse existe.

A.4.1 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff [a_{ij}] = [b_{ij}] \quad \forall i, j$ égalité des matrices

A.4.2 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ commutativité de l'addition

A.4.3 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ associativité de l'addition

A.4.4 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$ associativité de la multiplication

A.4.5 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$ élément neutre de l'addition

A.4.6 $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ inverse additif

A.4.7 $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ élément neutre de la multiplication

A.4.8 $c(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{B}$

A.4.9 $(c + d)\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A}$

A.4.10 $(cd)\boldsymbol{A} = c(d\boldsymbol{A})$

A.4.11 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$

A.4.12 $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$

A.4.13 $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$

A.4.14 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$

A.4.15 $\overline{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$

A.4.16 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$

A.4.17 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$

A.4.18 $\boldsymbol{A}_{n\times n}^{s+t} = \boldsymbol{A}_{n\times n}^{s}\boldsymbol{A}_{n\times n}^{t}$

A.4.19 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

A.4.20 $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})$.

A.4.21 $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_p) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_{p-1}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}_q\ldots\boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_{q-1})$

A.4.22 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$

A.4.23 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

A.4.24 $\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^k$; par convention, ceci est égal à $\boldsymbol{A}^{-k}$.

A.4.25 $(\boldsymbol{A}^{-1})^\top = (\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$

A.4.26 Si $c \neq 0$, $(c\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$

A.5 Définition d'un espace vectoriel

Un **espace vectoriel** est un ensemble V d'objets appelés *vecteurs*, sur lesquels on définit deux opérations, soit *l'addition* ainsi que *la multiplication par un scalaire*, et pour lequel les axiomes suivant sont satisfaits pour tous les vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ dans V et pour tous les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

A.5.1 Fermeture sous l'addition: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$.

A.5.2 Commutativité de l'addition: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

A.5.3 Associativité de l'addition: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

A.5.4 Existence d'un élément neutre de l'addition: $\exists \boldsymbol{0} \in V : \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$.

A.5.5 Existence d'un inverse additif: $\forall \boldsymbol{u} \in V \quad \exists -\boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.

A.5.6 Fermeture sous la multiplication: $\alpha \boldsymbol{u} \in V$.

A.5.7 Distributivité sur l'addition de vecteurs: $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$

A.5.8 Distributivité de l'addition de scalaires: $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$

A.5.9 Associativité de la multiplication de scalaires: $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$

A.5.10 Élément neutre de la multiplication par un scalaire: $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V. On appellera W un sous-espace vectoriel de V si les trois propriétés suivantes sont satisfaites:

A.5.1 Le vecteur zéro de V est dans W.

A.5.2 W est fermé pour l'addition: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in W$.

A.5.3 W est fermé pour la multiplication par un scalaire: $\boldsymbol{w} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{w} \in W$

A.6 Propriétés des espaces vectoriels

Soit V un espace vectoriel α un réel et $\boldsymbol{u}$ un élément de V. Les propriétés suivantes sont satisfaites.

A.6.1 $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

A.6.2 $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

A.6.3 $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

A.6.4 $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

A.6.5 $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

A.6.6 Si $\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ alors soit $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

A.6.7 $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

A.6.8 $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$

A.6.9 $-\boldsymbol{u}$ est l'unique vecteur dans V tel que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.

A.7 Définition des déterminants

Soient des matrices carrées. De plus, $\boldsymbol{M}_{ij}$ est définie dans ce qui sut comme étant la matrice carrée $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\boldsymbol{A}$

A.7.1 $\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$

A.7.2 Mineur de l'élément $a_{ij} = |\boldsymbol{M}_{ij}|$

A.7.3 $\mathrm{Cof}_{ij}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{M}_{ij}|$

A.7.4 $|\boldsymbol{A}| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{pi}\,\mathrm{Cof}_{pi}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell}\,\mathrm{Cof}_{j\ell}(\boldsymbol{A})$

A.7.5 Règle de Cramer: la solution de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est donnée par $x_j = \dfrac{\det \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

A.7.6 Règle de Cramer: $(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} = \dfrac{\mathrm{Cof}_{ji}(\boldsymbol{A})}{\det \boldsymbol{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\,\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}$

A.8 Propriétés des déterminants

A.8.1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ si a, b, c, d sont des scalaires.

A.8.2 Matrice diagonale: $\det \boldsymbol{D} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$

A.8.3 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^\top|$

A.8.4 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$

A.8.5 $\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \dots \boldsymbol{A}_p) = (\det \boldsymbol{A}_1)(\det \boldsymbol{A}_2) \dots (\det \boldsymbol{A}_p)$

A.8.6 $\det(\boldsymbol{A}) = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}^{-1}}$

A.9 Vecteurs et valeurs propres

A.9.1 $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$

A.9.2 Polynôme caractéristique: $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \boldsymbol{0}$

A.9.3 Si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, alors $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des matrices semblables.

A.9.4 Diagonalisation: si $\boldsymbol{AX}_i = \lambda \boldsymbol{X}_i$ et si $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{X}_1 \dots \boldsymbol{X}_n)$ est inversible, alors $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$

A.10 Produit scalaire

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Pour chaque paire de vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ on peut associer un scalaire dénoté par $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, qu'on désigne sous le nom de **produit scalaire** de ces deux vecteurs et satisfaisant les axiomes suivants:

A.10.1 $\langle a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + b\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ pour $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

A.10.2 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$

A.10.3 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$

A.10.4 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Quelques autres définitions et propriétés suivent.

A.10.5 Norme de vecteurs: $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$

A.10.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|$

A.10.7 Inégalité triangulaire: $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

A.10.8 Vecteurs orthogonaux si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$

A.10.9 Théorème de Pythagore: $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \quad \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$

A.10.10 Vecteurs orthonormés: $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

A.11 Géométrie vectorielle

A.11.1 Vecteurs unitaires: $\vec{\imath} = (1, 0, 0), \quad \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$

A.11.2 Produit scalaire: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = uv \cos\theta$

A.11.3 Produit vectoriel: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

A.11.4 $\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\| = vw\sin\theta$

A.11.5 Produit mixte: $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

A.11.6 Produits vectoriels des vecteurs unitaires: $\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \vec{\boldsymbol{k}} = -\vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{\imath}} \\ \vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{\imath}} = -\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{\imath}} = \vec{\boldsymbol{\jmath}} = -\vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{k}} \\ \vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{\imath}} = \vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = 0 \end{cases}$

A.11.7 Équation paramétrique d'une droite: $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}$

A.11.8 Équation symétrique d'une droite: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

A.11.9 Distance d'un point à une droite $d = \dfrac{\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$

A.11.10 Équation paramétrique d'un plan: $\Pi : \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + s\vec{\boldsymbol{v}}_1 + t\vec{\boldsymbol{v}}_2$

A.11.11 Équation cartésienne d'un plan: $Ax + By + Cz + D = 0$ avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ B &= -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ D &= -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \end{aligned}$$

A.11.12 Distance d'un point à une droite $d = \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$