Algèbre linéaire

André Roberge

Version du 4 septembre 2016

Table des matières

Préface

On ne termine jamais un livre ... on l'abandonne à un éditeur.

auteur inconnu

I prided myself in reading quickly. I was really amazed by my first encounters with serious mathematics textbooks. I was very interested and impressed by the quality of the reasoning, but it was quite hard to stay alert and focused. After a few experiences of reading a few pages only to discover that I really had no idea what I'd just read, I learned to drink lots of coffee, slow way down, and accept that I needed to read these books at 1/10th or 1/50th standard reading speed, pay attention to every single word and backtrack to look up all the obscure numbers of equations and theorems in order to follow the arguments.

William Thurston, mathématicien célèbre

L'algèbre linéaire est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux espaces linéaires, plus généralement nommés espaces vectoriels, incluant l'étude des vecteurs et des équations linéaires ainsi que les transformations linéaires. Les techniques développées dans l'étude de l'algèbre linéaire sont utilisées dans tous les domaines scientifiques.

Dans ce manuel, je présente une introduction à l'algèbre linéaire. Plutôt que d'avoir un texte purement axé sur une approche formelle, c'est-à-dire basé uniquement sur une suite de théorème et démonstration, j'ai incorporé une multitude d'exemples. Le lecteur [1] doit cependant se rappeler qu'un exemple n'est pas une preuve, et qu'on ne peut pas toujours généraliser à partir d'un exemple. Cependant, je suis d'avis que les exemples sont utiles comme guide pour mieux comprendre l'application des théorèmes.

Autres ressources

On retrouve sur Internet plusieurs sites, tel que Wikipédia, qui offrent des explications et des dérivations mathématiques. On retrouve également des vidéos explicatives, tel que sur le site `www.KhanAcademy.com` ou encore à partir d'universités, tel que l'université Massachusetts Institute of Technology et son MITOpenCourseware, pour n'en nommer qu'une parmi tant d'autres. Plusieurs professeurs mettent également des copies de leurs notes de cours avec un accès complètement libre sur Internet. J'encourage le lecteur à explorer ces différentes ressources pour approfondir sa connaissance du sujet. Puisqu'il existe beaucoup plus de ressources en anglais qu'en français, je fais mention à l'occasion des termes utilisés en anglais, surtout lorsque la traduction est loin d'être évidente, comme par exemple *cross product* (produit

[1] Pour simplifier l'écriture, je vais généralement utiliser le masculin pluriel comme terme inclusif pour désigner aussi bien les hommes que les femmes.

vectoriel), ou *eigenvalue* (valeur propre) de façon à permettre aux intéressés de comprendre plus facilement le matériel disponible en anglais.

Remerciements

J'aimerais remercier mes enfants, Julien et Evelyne, ainsi que Alain Gamache et Dany Sheehy pour m'avoir communiqué leurs impressions, commentaires et suggestions après avoir lu une ébauche des premiers chapitres de ce manuel.

J'aimerais également remercier Monsieur Marcel B. Finan de l'Arkansas Tech University qui m'a donné la permission d'adapter ses notes de cours sur le même sujet ; ces notes ont surtout été utilisées dans la préparation des premiers chapitre. Je remercie également Monsieur Joseph Khoury de l'Université d'Ottawa pour m'avoir donné la permission d'utiliser et d'adapter les exemples d'applications de l'algèbre linéaire qui se trouve sur son site Internet `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/linearnewf.htm`.

Finalement, des étudiants ont noté des coquilles et ont offerts des suggestions qui m'ont permis d'améliorer ce manuel. En ordre alphabétique, j'aimerais donc remercier Colin Bonnar, Valérie Carroll, Natalia Ensor, Marie-Josée Guyon, Mathieu Manuel, Andrée-Anne Rousselle et Lianne Saulnier pour leurs diverses contributions.

Note sur l'utilisation des couleurs

Dans ces notes, j'utilise parfois des couleurs comme le bleu et le rouge pour accentuer certains termes. Si vous êtes daltonien et que vous ne distinguez pas certaines des couleurs que j'utilise, contactez-moi pour que je puisse préparer une autre version avec des couleurs plus appropriées pour vous.

Chapitre

1 Revue et introduction

Dans ce chapitre, nous allons d'abord faire une revue de concepts qui devraient être familiers à tous les étudiants [1] qui ont suivi un cours de mathématiques avancé au secondaire. Comme la notation que nous utilisons peut être légèrement différente de celle utilisée par vos enseignants du secondaire, il est important de lire tout le matériel et de s'assurer que les concepts sont bien compris. Ce chapitre termine par un aperçu de quelques sujets à venir.

1.1 Les ensembles

Les ensembles sont des collections d'objets ; ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble. Par exemple, nous pouvons définir un ensemble $\mathbb{E}$ contenant les cinq plus petits entiers positifs impairs

$$\mathbb{E} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

et on dira que, par exemple, le chiffre 3 appartient à cet ensemble

$$3 \in \mathbb{E} \qquad \text{mais} \qquad 2 \notin \mathbb{E}$$

[1] Pour simplifier l'écriture, je vais généralement utiliser le masculin pluriel comme terme inclusif pour désigner les étudiantes et les étudiants.

L'ordre des éléments d'un ensemble n'a pas d'importance. Par exemple, on aurait pu écrire

$$\mathbb{E} = \{5, 3, 1, 9, 7\}$$

Nous pouvons définir un sous-ensemble, $\mathbb{S}$ de $\mathbb{E}$ contenant les trois plus petits entiers positifs impairs :

$$\mathbb{S} = \{1, 3, 5\}$$

et on dira que $\mathbb{S}$ est **inclus** dans $\mathbb{E}$

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{E} \qquad \text{mais} \qquad \mathbb{E} \not\subset \mathbb{S}$$

En fait, dans ce cas-ci, on peut dire que $\mathbb{S}$ est **strictement inclus** dans $\mathbb{E}$

$$\mathbb{S} \subsetneq \mathbb{E}$$

alors que $\mathbb{E}$ est inclus dans lui-même : $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}$.[2] L'ensemble vide, $\{\}$, est un ensemble qui ne contient aucun élément ; c'est un sous-ensemble de tous les ensembles. On le dénote parfois par le symbole $\emptyset$.

Parmi les ensembles les plus utilisés en algèbre linéaire, on retrouve l'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, ainsi que celui des nombres complexes, $\mathbb{C}$.

Exercice 1.1 Soit les ensembles $\mathbb{A} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ et $\mathbb{B} = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$. Vrai ou faux :

(a) $\heartsuit \in \mathbb{A}$

(b) $\spadesuit \in \mathbb{B}$

(c) $\mathbb{B} \in \mathbb{A}$

(d) $\clubsuit \notin \mathbb{B}$

(e) $\mathbb{A} \subsetneq \mathbb{B}$

(f) $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$

(g) $\mathbb{B} \subsetneq \mathbb{A}$

1.1.1 Les nombre réels

Vous devez être familiers avec les nombres réels. Ils obéissent les propriétés suivantes que l'on retrouve également dans l'annexe A.

1. $a + b = b + a$ commutativité de l'addition
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ associativité de l'addition
3. $ab = ba$ commutativité de la multiplication
4. $(ab)c = a(bc)$ associativité de la multiplication
5. $a + 0 = a$ élément neutre de l'addition

[2] Certaines personnes utilisent $\subset$ comme synonyme de $\subseteq$ alors que d'autres l'utilisent comme synonyme de $\subsetneq$ qui a un sens très différent. Dans ce livre, nous utiliserons $\subset$ lorsque ça ne fait aucune différence si les deux ensembles sont égaux ou non ; autrement nous utiliserons un symbole qui n'est pas ambigu.

6. $a + (-a) = 0$ inverse additif
7. $1a = a$ élément neutre de la multiplication
8. $aa^{-1} = 1$ inverse multiplicatif
9. $a(b + c) = ab + ac$ distributivité de la multiplication sur l'addition
10. $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ puissance d'une puissance
11. $a^b a^c = a^{b+c}$ produit des puissances

1.1.2 Les nombres complexes

Un nombre complexe, $z \in \mathbb{C}$ est un nombre de la forme $z = a + bi$ où a et b sont des réels et $i = \sqrt{-1}$. On dit de a que c'est la partie réelle de z et que b est sa partie imaginaire. On dénote le **conjugué** d'un nombre complexe par une barre horizontale au-dessus de la variable et sa valeur est obtenue en faisant le remplacement $i \to -i$, ce qui nous donne $\bar{z} = a - bi$. Il est évident que le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est identique au nombre original, $\bar{\bar{z}} = z$.

conjugué

Exercice 1.2 Si $z = 3 + i\sqrt{2}$, quelle est la valeur de $\bar{z}$?

Il est possible de représenter les nombres complexes dans une notation dite polaire, $z = re^{i\theta}$, ce qui nous donne aussi $\bar{z} = re^{-i\theta}$. La notation polaire est utilisée dans la fameuse relation d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1$$

On a également une autre relation utile prouvée par Euler et nommée d'après de Moivre : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exercice 1.3 Un petit défi : quelle est la racine carrée de i ? [a]

Suggestion : Utilisez la première relation d'Euler pour exprimer i en notation polaire, calculez sa racine carrée en utilisant les règles d'exponentiation, puis utilisez la relation de de Moivre pour exprimer la réponse finale sous la forme $a + bi$. Vérifiez votre réponse en calculant son carré !

[a] Si z est la racine carrée de i, alors $-z$ est également une racine carrée de i ; pour cet exercice, vous ne devez trouver qu'une seule des deux racines carrées possibles.

Le module d'un nombre complexe, $|z|$ est un nombre réel positif défini par

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Une autre façon d'exprimer ceci est $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Les nombres complexes obéissent les mêmes propriétés que les nombres réels (commutativité, associativité, etc.) et qui ont été mentionnées dans la section précédente. En plus, nous pouvons résumer les propriétés et définitions que nous venons de décrire.

1. Nombre complexe : $z \in \mathbb{C} : z = a + bi; \qquad a, b \in \mathbb{R}; \qquad i = \sqrt{-1}$
2. Conjugué : $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$
3. Forme polaire d'un nombre complexe : $z = r\, e^{i\theta} \qquad r, \theta \in \mathbb{R}$
4. Conjugué, forme polaire : $\overline{r\, e^{i\theta}} = r\, e^{-i\theta}$
5. Module d'un nombre complexe : $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$
6. Module d'un nombre complexe : $|r\, e^{i\theta}| = r \qquad r, \theta \in \mathbb{R}$
7. $\bar{\bar{z}} = z$
8. Relation d'Euler (ou de *de Moivre*) : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
9. Relation d'Euler (cas particulier) : $e^{i\pi} = -1$

Ces définitions et propriétés sont également répétées dans l'annexe A.

1.2 Les matrices

1.2.1 Définition et notation

Définition 1.2.1

Soit m et n deux entier positifs ; une matrice de taille [a] $m \times n$ est une collection de mn nombres arrangés dans un tableau rectangulaire :

$$\begin{array}{cc} & n \text{ colonnes} \\ m \text{ lignes} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

[a] Au lieu de **taille**, certains utilisent parfois le mot **dimension**. Cependant, le mot dimension peut également désigner une autre caractéristique importante en algèbre linéaire et, pour cette raison, nous n'utilisons pas le mot dimension comme synonyme de taille. À noter que *taille $m \times n$* se lit *taille m par n.*

Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3. Au lieu d'utiliser des parenthèses, $(\dots)$, on utilise parfois des crochets, $[\dots]$ pour encadrer une matrice : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

On utilise habituellement une lettre majuscule, comme $\boldsymbol{A}$, pour dénoter une matrice. [3] Les nombres individuels apparaissant dans une matrice sont appelés *coefficients* de la matrice ; ces coefficients sont dénotés par des lettre minuscules [4], a_{ij}, où i, j sont des indices (entiers) avec $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$. L'indice i est appelé *l'indice de la ligne*, et j est *l'indice de la colonne*.

Coefficients d'une matrice

indice

[3] Dans ce manuel, nous utilisons des lettres en caractères gras pour dénoter des matrices ou des vecteurs.

[4] On sépare parfois les indices lignes et colonnes par une virgule $a_{i,j}$ pour éviter des ambiguïtés ; considérez par exemple le cas $i = 12, j = 3$ qui donne a_{123}, si on n'utilise pas la virgule. Ceci est la raison pour laquelle on ne peut pas répondre à la partie (b) de l'exercice 1.4

Ainsi, a_{ij} est le coefficient qui apparait dans la ligne i et dans la colonne j :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} & & & j & & & & & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & & & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, dans la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, nous avons $a_{11} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 5$, *etc.*

Exercice 1.4

(a) À quelle colonne et à quelle ligne retrouve-t-on l'élément c_{23} d'une matrice $\boldsymbol{C}$ quelconque ?

(b) À quelle colonne et à quelle ligne retrouve-t-on l'élément d_{123} d'une matrice $\boldsymbol{D}$ quelconque ?

Suggestion : Avez-vous lu tout le texte, y compris les notes en bas de page ?

Au lieu d'utiliser une lettre majuscule pour dénoter une matrice, on utilise parfois la notation $[a_{ij}]$. Une matrice $1 \times n$ est souvent appelée un **vecteur ligne** de dimension n ; une matrice $n \times 1$ est également souvent appelée un **vecteur colonne** de dimension n Pour de telles matrices ou vecteurs lignes ou colonnes [5] au lieu d'une simple lettre majuscule, nous utiliserons parfois une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{\boldsymbol{x}}$. Un des désavantages de ces deux notations [lettre majuscule ou lettre surmontée d'une flèche] est qu'il n'y a aucune distinction entre un vecteur colonne et un vecteur ligne. [6]

vecteur ligne

vecteur colonne

Si on dénote par $\boldsymbol{L}_i$ un vecteur ligne, et par $\boldsymbol{C}_j$ un vecteur colonne, on peut écrire une matrice $m \times n$ comme étant soit une collection de vecteurs lignes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{L}_m \end{pmatrix}$$

avec $\boldsymbol{L}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ ou soit une collection de vecteurs colonnes :

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{C}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{C}_n).$$

Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont zéros. On utilise habituellement le symbole $\mathbf{0}$ pour désigner une telle matrice et, par convention, on omet les indices identifiant la taille de la matrice. [7] Une **matrice carrée** est une matrice $n \times n$, c'est-à-dire une matrice ayant un

matrice nulle

matrice carrée

[5] Bien que les vecteurs soient également des matrices, on utilise habituellement le mot *composante* plutôt que *coefficient* ; ces deux mots sont synonymes dans ce cas.

[6] Il existe une notation inventée par Dirac qui permet d'identifier rapidement les vecteurs colonnes et les vecteurs lignes. On utilise cette notation principalement en mécanique quantique.

[7] Lorsqu'on écrit $\mathbf{0}$ dans une équation, il est toujours sous-entendu que la taille de la matrice nulle est telle que l'équation est définie.

nombre de lignes égal au nombre de colonnes. Une **matrice diagonale** est une matrice carré dont tous les éléments qui ne sont pas sur la diagonale, c'est-à-dire les éléments de la forme $a_{ij}, i \neq j$, sont nuls ; seuls les éléments sur la diagonale, c'est-à-dire les éléments a_{ii}, peuvent être différents de zéro.

matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{jj} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Finalement, la **matrice identité $\boldsymbol{I}_n$**, également appelée **matrice unité**, est une matrice diagonale $n \times n$ dont tous les éléments sur la diagonale sont égaux à 1. À noter que l'on omet parfois l'indice n et qu'on dénote simplement par $\boldsymbol{I}$ la matrice identité lorsque sa taille est évidente d'après le contexte.

matrice identité
matrice unité

1.2.2 Égalité de matrices

Définition 1.2.2

On dit de deux matrices qu'elles sont égales si elles ont la même taille et que leur coefficients sont égaux deux à deux, c'est-à-dire [a]

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff [a_{ij}] = [b_{ij}] \quad \forall i, j$$

[a] Le symbole $\forall$ veut dire "quoi que ce soit" ou "pour tout".

Exercice 1.5 Soients les matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}$$

Avec un choix approprié pour la variable x, est-il possible que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$? Est-il possible que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$?

1.2.3 Addition de matrices

Si deux matrices, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, sont de la même taille, alors il est possible de les additionner.

Définition 1.2.3

Soit, deux matrices, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ayant la même taille. L'addition de ces matrices est une matrice $\boldsymbol{C}$ de la même taille dont les coefficients sont la somme des coefficients correspondants des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \iff [a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]=[c_{ij}]$$

Exemple 1.2.1

Soient les matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix}$.

Calculez, si possible, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

Solution: Nous avons $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2&1+1\\3+3&4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\6&9\end{pmatrix}$.

Les sommes $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ sont indéfinies parce que les matrices ne sont pas de la même taille.

Exercice 1.6 Soients les matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&4&-1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix}$$

Calculez, si possible, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

1.2.4 Multiplication par un scalaire

Par **scalaire**, on entend un nombre arbitraire, qui sera habituellement un réel ou qui pourrait être un nombre complexe (selon le contexte). **scalaire**

Définition 1.2.4

Lorsqu'une matrice $\boldsymbol{A}$ est multipliée par un scalaire c, la matrice résultante est telle que chaque coefficient est multiplié par c

$$c(a_{ij})=(ca_{ij})$$

À noter que l'on écrit habituellement $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

Une matrice de la forme $c\boldsymbol{I}_n$, où $\boldsymbol{I}_n$ est la matrice identité, est appelée une **matrice scalaire** Pourquoi pensez-vous qu'on donne le nom matrice scalaire à une matrice de la forme $c\boldsymbol{I}$? **matrice scalaire**

Exemple 1.2.2

Soit $\boldsymbol{M}$ une matrice $m \times n$ et c un scalaire. Démontrez que si $c\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$, alors soit $c = 0$ ou $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$.

Solution: Écrivons $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$; par conséquent, $c\boldsymbol{M} = [cm_{ij}]$. Supposons que $c\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$. Ceci implique que, $cm_{ij} = 0 \, \forall i, j$. Ceci est vrai si $c = 0$ ou que tous les m_{ij} sont égaux à zéro ; dans ce dernier cas, nous aurions $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$.

1.2.5 Soustraction de matrices

Définition 1.2.5

On définit la soustraction de deux matrices à partir de l'addition et en utilisant la multiplication par un scalaire comme suit :

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$

Corolaire : En vertu des définitions de l'addition de matrices et de multiplication par un scalaire, la soustraction de matrices peut être faite directement de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \quad \Longleftrightarrow \quad [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Exemple 1.2.3

Soit les matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez $\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}$.

Solution: On vérifiera facilement que la réponse est

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -17 \\ -2 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.7 Soit les matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculez $3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}$.

1.2.6 Propriétés diverses de l'addition

Les propriétés diverses de l'addition de matrices peuvent être résumées par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1

Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ des matrices $m \times n$ et soient c et d des scalaires. Alors :

(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(b) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$

(c) $\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

(d) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$

(e) $c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}$

(f) $(c+d)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A}$

(g) $(cd)\boldsymbol{A}=c(d\boldsymbol{A})$

Démonstration: Nous allons faire la démonstrations de seulement quelques unes de ces propriétés. L'étudiant qui lit ceci doit être en mesure de démontrer chacune de ces propriétés.

(a)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= [a_{ij}]+[b_{ij}] \\
&= [a_{ij}+b_{ij}] && \text{par la définition de l'addition} \\
&= [b_{ij}+a_{ij}] && \text{commutativité de l'addition pour les scalaires} \\
&= [b_{ij}]+[a_{ij}] && \text{par la définition de l'addition} \\
&= \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

CQFD

(b) Voici une démonstration partielle :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
&= ([a_{ij}+b_{ij}])+[c_{ij}] && \text{par la définition de l'addition} \\
&= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] && \text{parenthèses superflues} \\
&= [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}] && \text{par la définition de l'addition} \\
&= \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

CQFD

Exercice 1.8 Dans chacun des case suivants, lorsque vous voyez le mot justification, indiquez quelle propriété ou définition a été utilisée pour obtenir cette équation à partir de la précédente.

(a)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+\mathbf{0} &= [a_{ij}]+[0] && \text{par la définition de la matrice nulle} \\
&= [a_{ij}+0] && \text{justification} \\
&= [a_{ij}] && \text{justification} \\
&= \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) &= [a_{ij}]+[-a_{ij}] \\
&= [a_{ij}+(-a_{ij})] && \text{justification} \\
&= [0] && \text{justification} \\
&= \mathbf{0} && \text{justification}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= c([a_{ij}]+[b_{ij}]) \\
&= c([a_{ij}+b_{ij}]) && \text{justification} \\
&= c[a_{ij}+b_{ij}] && \text{élimination de parenthèses superflues} \\
&= c[(a_{ij}+b_{ij})] && \text{ajout de parenthèses} \\
&= [c(a_{ij}+b_{ij})] && \text{justification} \\
&= [ca_{ij}+cb_{ij}] && \text{justification} \\
&= [ca_{ij}]+[cb_{ij}] && \text{justification} \\
&= c[a_{ij}]+c[b_{ij}] && \text{justification} \\
&= c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

1.2.7 Multiplication

La multiplication de deux matrices est un peu plus complexe. Pour que l'on puisse multiplier une matrice de taille $m \times b$ par une matrice de taille $c \times p$ il faut que $b = c$ autrement la multiplication n'est pas possible. Si la multiplication est possible, on dit que les matrices sont **compatibles**, et la matrice résultante sera de taille $m \times p$:

compatibles

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p} = \boldsymbol{C}_{m\times p}$$

Exercice 1.9 Soit les matrices $\boldsymbol{A}_{5\times 3}, \boldsymbol{B}_{5\times 4}, \boldsymbol{C}_{3\times 5}, \boldsymbol{D}_{5\times 4}, \boldsymbol{E}_{4\times 5}$. Identifiez les paires de matrices compatibles et indiquez quel serait la taille de la matrice résultante. Veuillez notez que l'ordre dans lequel on fait une multiplication peut changer le résultat.

Commençons par le cas le plus simple, soit celui de la multiplication d'une matrice ligne avec trois coefficients

$$\boldsymbol{L} = (\ell_1\ \ell_2\ \ell_3)$$

par une matrice colonne comptant le même nombre de coefficients :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

On a $\boldsymbol{L}_{1\times 3}\boldsymbol{C}_{3\times 1} = \boldsymbol{M}_{1\times 1}$. Par définition, ce produit est égal à :

$$\boldsymbol{LC} = (\ell_1\ \ell_2\ \ell_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \ell_3 c_3 = \sum_{i=1}^{3} \ell_i c_i$$

Le résultat est une matrice de taille 1×1 que l'on traite habituellement comme un simple nombre (scalaire) et non pas comme une matrice, et on appelle ce cas particulier le produit scalaire de deux vecteurs, ce que nous verrons en plus de détails plus tard dans ce manuel.

Exemple 1.2.4

Calculez $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Solution:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1) + (5 \cdot 2) + (-3 \cdot 4) = 0$$

Exercice 1.10 Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le produit de deux matrices quelconque est une généralisation du cas particulier. Soit le produit de matrices $\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{Z}$; pour obtenir le coefficient z_{ij} de la matrice $\boldsymbol{Z}$ on multiplie la ligne i de la matrice $\boldsymbol{X}$ (représentée comme une collection de vecteurs lignes) par la colonne j de la matrice $\boldsymbol{Y}$ (représentée comme une collection de vecteurs colonnes).

$$\boldsymbol{X}_{m\times n}\boldsymbol{Y}_{n\times p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{L}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \dots & \boldsymbol{C}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{C}_1 & \dots & \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{C}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{L}_m\boldsymbol{C}_1 & \dots & \boldsymbol{L}_m\boldsymbol{C}_p \end{pmatrix} \quad [1.2.1]$$

Définition 1.2.6

Soit une matrice $\boldsymbol{A}_{m\times p}$ et une matrice $\boldsymbol{B}_{p\times n}$. Le **produit** de ces deux matrices, $\boldsymbol{AB}$ est une matrice $\boldsymbol{C}_{m\times n}$ telle que

$$(c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)$$

Une façon graphique de représenter le produit matriciel est donnée sur la couverture de ce manuel.

Alors que le produit de deux nombres, m et n, est commutatif, $mn = nm$, ceci n'est pas le cas en général pour le produit de deux matrices. Soit $\boldsymbol{A}_{3\times 2}$ et $\boldsymbol{B}_{2\times 3}$ Nous aurons $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}_{3\times 3}$ et $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{D}_{2\times 2}$. Comme les tailles de $\boldsymbol{C}$ et de $\boldsymbol{D}$ seront différentes, il est évident que ces matrices sont différentes.

Exemple 1.2.5

Soit les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; calculez, si possible, $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$.

Solution: Nous avons

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4+0+8 & 1-2+28 & 4+6+20 & 3+2+8 \\ 8+0+0 & 2-6+0 & 8+18+0 & 6+6+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par contre, puisque $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B}_{3\times 4}\boldsymbol{A}_{2\times 3}$, on ne peut pas les multiplier ensemble : le nombre de colonnes de $\boldsymbol{B}$ (4) n'est pas égal au nombre de lignes de $\boldsymbol{A}$ (2).

Exemple 1.2.6

Autre exemple d'un produit de matrices.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 17 & 21 \\ 23 & 30 & 37 & 44 \\ 35 & 46 & 57 & 68 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}$$

Comme on le voit, le produit scalaire de la première rangée de $\boldsymbol{A}$ (indiqué en rouge) par la deuxième colonne de $\boldsymbol{B}$ également en rouge donne le coefficient c_{12} de la matrice $\boldsymbol{C}$: $1 \times 2 + 2 \times 6 = 14$. Vous pouvez vérifier les autres valeurs vous-mêmes.

Exercice 1.11 Calculez le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.7

Soit les matrices suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Comparez $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ et $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.
(b) Comparez $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ et $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.
(c) Comparez $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$
(d) Comparez $\boldsymbol{AI}_2$ et $\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A}$ où $\boldsymbol{I}_2$ est la matrice identité 2×2.

Solution:
(a) Nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 52 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 70 & 14 \\ 235 & 56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 70 & 14 \\ 235 & 56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.
(b) Nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 14 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 60 & 33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 59 & 33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous concluons donc que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ dans ce cas ci. Cependant, même si cette propriété est toujours vraie, on ne peut pas conclure ceci à partir d'un seul exemple comme nous l'avons fait.

(c) Nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BA} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 21 & 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous concluons que $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

(d) On peut vérifier facilement que

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A}$$

Nous avons donc $\boldsymbol{AI}_2 = \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. De façon générale, la matrice identité $\boldsymbol{I}_n$ commute (pour la multiplication) avec n'importe quelle matrice carrée $n \times n$.

Exercice 1.12 Soit $\boldsymbol{A}_{2\times 3}$, une matrice quelconque. Vérifiez que $\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AI}_3 = \boldsymbol{A}$, c'est-à-dire que multiplier une matrice quelconque par la matrice identité appropriée est la même chose que multiplier un nombre quelconque par 1 ; on dit que la matrice identité est l'élément neutre de la multiplication. À noter que c'est pour cette raison qu'on appelle $\boldsymbol{I}_n$ la matrice *identité*.

Un autre exemple intéressant est le suivant.

Exemple 1.2.8

Considérons les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut facilement vérifier que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{0}$, même si aucune de ces matrices n'est la matrice nulle. Ceci ne serait pas le cas pour des nombres réels ou complexes.

Bien qu'elle soit différente de la simple multiplication de deux nombres, la multiplication de matrices a cependant plusieurs propriétés en commun avec la multiplication de nombres dont celles indiquées dans le théorème suivant. [8]

[8] À noter que nous avons déjà vu quelques exemples illustrant ces propriétés. Cependant, il ne faut pas oublier qu'un exemple ne signifie pas qu'une propriété est toujours vérifiée. Par contre, le théorème fournit la preuve que c'est bien le cas.

Théorème 1.2.2

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice $m \times n$, et m, n, p, q des entiers arbitraires plus grand ou égal à 1 ; alors

(a) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ où $\boldsymbol{B}$ est une matrice $n \times p$ et $\boldsymbol{C}$ est une matrice $p \times q$;

(b) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, où $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont des matrices $n \times q$;

(c) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$, où $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont des matrices $p \times m$;

(d) $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$ où k est un scalaire quelconque.

Démonstration:

(a) Écrivons $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{E}$ $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{DC} = \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{AE} = \boldsymbol{G}$ avec la notation habituelle où nous dénotons un coefficient quelconque d'une matrice $\boldsymbol{M}$ par la lettre minuscule indicée m_{ij}. Nous voulons donc démontrer que $f_{ij} = g_{ij}, \forall i, j$.

De $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{DC}$, nous avons

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kj}$$

et

$$d_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k}$$

ce qui nous donne

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj}$$

De $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{AE}$, nous avons

$$g_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} e_{\ell j}$$

et

$$e_{\ell j} = \sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj}$$

ce qui nous donne

$$g_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj}$$

Comme cette dernière expression ne comporte que des sommes de nombres ordinaires, on peut changer l'ordre des opérations sans changer le résultat :

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj}$$

et on peut vérifier que $f_{ij} = g_{ij}$ peu importe les choix de i et j. CQFD

(b)

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}_{[\boldsymbol{AB}]_{ij}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}}_{[\boldsymbol{AC}]_{ij}}\end{aligned}$$

CQFD

(c)

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (b_{ik}+c_{ik})a_{kj} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}}_{[\boldsymbol{BA}]_{ij}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} c_{ik}a_{kj}}_{[\boldsymbol{CA}]_{ij}}\end{aligned}$$

CQFD

(d) La preuve, qui est facile à faire, est laissée au lecteur.

Important Nous avons déjà mentionné que l'ordre de la multiplication est important. Ainsi $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{BD}$ qu'on peut démontrer en utilisant le théorème ci-dessus.

La définition suivante n'est probablement quelque chose que vous avez vu avant, et ne fait donc pas partie de la revue ... mais c'est une définition tellement simple et utile qu'elle devrait faire partie de toute introduction à l'algèbre linéaire.

Définition 1.2.7

Le **symbole de Kronecker** est une fonction de deux variables entières qui est égale à 1 si les deux variables sont égales et à zéro autrement. Par convention, les deux variables apparaissent comme des indices et la fonction est identifiée par la lettre grecque minuscule δ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le symbole de Kronecker peut être utilisé pour identifier les coefficients de la matrice identité : $\boldsymbol{I} = (\delta_{ij})$.

Exemple 1.2.9

En utilisant le symbole de Kronecker, on peut facilement démontrer que le produit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ par la matrice identité est égal à la matrice $\boldsymbol{A}$. De la définition de multiplication de matrices, nous avons :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{C} \\ \Rightarrow \quad \sum_j a_{ij}b_{jk} &= c_{ik}\end{aligned}$$

Si on choisit $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, on a :

$$\sum_j a_{ij}\delta_{jk} = c_{ik}$$

Mais, puisque $\delta_{jk} = 1$ seulement si $j = k$, le seul terme de la somme qui reste est $a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$ et donc $a_{ik} = c_{ik}$, c'est-à-dire que les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{C}$ sont identiques.

1.3 Les vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

Les **vecteurs** sont des *segments de droites orientés* : ils sont caractérisés par une grandeur (la longueur du segment), une direction (l'axe de la droite) et un sens. Par contraste, les scalaires (nombres ordinaires) n'ont qu'une grandeur. **vecteurs**

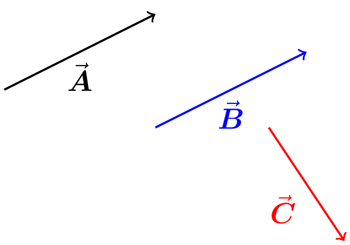


FIGURE 1.1 Trois vecteurs dans un plan. Les vecteurs $\vec{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ ont la même grandeur, la même direction et le même sens : ils sont donc égaux, $\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$.

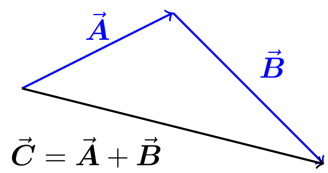


FIGURE 1.2 Addition de vecteurs (connue, dans la francophonie, sous le nom de *relation de Chasles*).

L'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, peut être représenté par une droite infinie, qu'on appelle la droite des réels. Un nombre quelconque x est représenté par un point sur cette droite. L'ensemble des couples de nombres réels, (x, y), peut être représenté par un point dans un plan. Ce plan, connu sous le nom de plan cartésien, ou $\mathbb{R}^2$, comporte deux axes : l'axe des abscisses (horizontal par convention) et l'axe des ordonnées (vertical par convention).

Les coordonnées d'un point (x, y) dans ce plan, représentent la distance x du point par rapport à l'axe des ordonnées et sa distance y par rapport à l'axe des abscisses. L'intersection des deux axes est l'origine du plan ; ses coordonnées sont $(0, 0)$.

Au lieu de considérer un couple de nombre réels comme un point dans le plan, on peut considérer qu'il représente un vecteur. Dans ce cas, chaque coordonnée représente une **composante** de ce vecteur, $\vec{\boldsymbol{A}} = (A_x, A_y)$.[9] En utilisant les composantes, l'addition des vecteurs se résume à de simples addition de nombres : **composante**

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} &= \vec{\boldsymbol{C}} \\ (A_x, A_y) + (B_x, B_y) = (A_x + B_x, A_y + B_y) &= (C_x, C_y) \end{aligned}$$

Dans le plan cartésien, on utilise parfois les **vecteurs unitaires**[10] $\vec{\boldsymbol{\imath}} = (1, 0)$ **vecteurs unitaires**

[9] Une autre façon d'écrire un vecteur, qui est celle normalement utilisée en algèbre linéaire, est en une colonne de composantes : $\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$, c'est-à-dire une matrice 2×1.

[10] Le mot *unitaire* fait référence au fait que la grandeur de ces vecteurs est l'unité $= 1$.

et $\vec{\jmath} = (0, 1)$ ce qui nous permet d'écrire $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$.

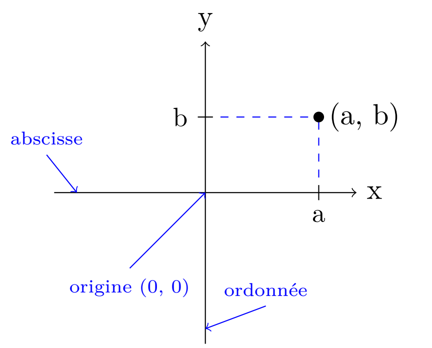


FIGURE 1.3 Un point dans le plan cartésien.

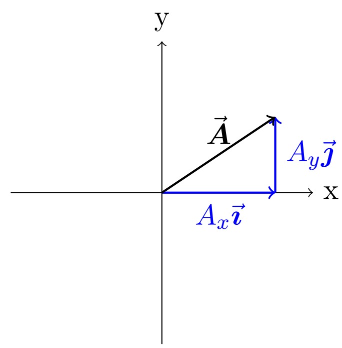


FIGURE 1.4 Un vecteur dans le plan cartésien et sa représentation comme la somme de deux vecteurs parallèle à chaque axe : les composantes.

1.3.1 Généralisation à $\mathbb{R}^n$

Bien qu'il soit légèrement plus difficile de visualiser des vecteurs dans l'espace que dans le plan, et que ceci deviennent impossible à faire pour des dimensions égales ou supérieures à 4, il est facile de faire des opérations sur les vecteurs lorsqu'on utilise les composantes : chaque **dimension** correspond à une valeur de composante, et l'addition de vecteurs se fait par l'addition de composantes équivalentes, par une simple généralisation de ce qu'on a vu pour deux dimensions [11]. Ceci est en fait un simple cas particulier de l'addition de matrices que nous avons déjà vu. **Veuillez prendre note :** à partir d'ici, nous allons presque toujours représenter des vecteurs comme des matrices colonnes.

dimension

1.4 Les équations linéaires

Une **équation linéaire** à n variables est une équation de la forme suivante :

équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad [1.4.1]$$

où les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les **inconnues** et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les **coefficients**. La variable b est connue sous le nom de **terme constant** de l'équation linéaire. On note que l'équation ne compte aucun produit, puissance ou fonction des *inconnues*.

inconnues
coefficients
terme constant

[11] Ici on défini la dimension comme étant équivalente au nombre de coordonnées requises pour identifier un point. Ainsi, dans le plan, nous avons besoin de deux coordonnées, habituellement dénotées par x et y, pour identifier un point ; on dira qu'un plan a deux dimensions. De la même façon, une droite a une dimension, et l'espace habituel a trois dimensions. Un point est un objet ayant zéro dimension. Plus tard, on verra une autre définition de dimension, lorsqu'on étudiera les espaces vectoriels.

Exemple 1.4.1

Déterminez si les équations suivantes sont linéaires ou non.

(a) $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$
(b) $4x_1 - 5x_2 = x_1x_2$
(c) $x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$
(d) $x - y = z + \sin 3$
(e) $x_1 + \sin x_2 + x_3 = 1$

Solution:
(a) Oui, car l'équation est de la forme [**1.4.1**].
(b) Non, car on a un terme non-linéaire, x_1x_2, qui apparait dans l'équation.
(c) Non, car on a un terme non-linéaire $\sqrt{x_1}$
(d) Oui, car on a trois variables (inconnues) différentes et un terme constant ; on peut réécrire cette équation comme $x - y - z = \sin 3$ qui est exactement de la forme [**1.4.1**].
(e) Non, car on a un terme non-linéaire $\sin x_2$.

Exercice 1.13 Déterminez si les équations suivantes sont linéaires ou non.

(a) $x_1^2 + 3x_2 - 2x_3 = 5$
(b) $x_1 + x_1x_2 + 2x_3 = 1$
(c) $x_1 + \dfrac{1}{x_2} + x_3 = 1$
(d) $5\alpha + 3\beta + 6\gamma = 9$
(e) $x\alpha + y\beta + z\gamma^2 = a^3$

Une **solution** de l'équation linéaire [**1.4.1**] est une collection **ordonnée** de nombres $s_2, s_2, \ldots, s_n$ qui vérifient [**1.4.1**] lorsque $x_i = s_i$ est substitué dans [**1.4.1**]. L'ensemble de toutes les solutions d'une équation linéaire s'appelle la **solution générale**.

solution

solution générale

Exemple 1.4.2

Démontrez que $(5 + 4s - 7t, s, t)$, où $s, t \in \mathbb{R}$, est une solution de l'équation

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$$

Solution: En substituant $x_1 = 5 + 4s - 7t, x_2 = s$ et $x_3 = t$ on obtient

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = \underbrace{5 + 4s - 7t}_{x_1} - 4s + 7t = 5$$

ce qui est le résultat désiré.

Les variables s et t de l'exemple précédent sont connues sous le nom de **paramètres**, et on dit que la solution est exprimée dans une **forme paramétrique**.

paramètres
forme paramétrique

Une équation linéaire peut avoir soit une solution, une infinité de solution, ou aucune solution.

Exemple 1.4.3

Déterminez le nombre de solutions pour chacune de ces équations.

(a) $0x = 5$
(b) $2x = 4$
(c) $x - 4y = 8$

Solution:
(a) Puisque le côté gauche de cette équation est 0, et que le côté droit est 5, cette équation n'a aucune solution.
(b) On peut vérifier facilement que $x = 2$ est l'unique solution de cette équation.
(c) Si on attribue la valeur arbitraire s à y, on peut vérifier que $x = 8 - 4s$ sera une solution de cette équation. Comme s peut prendre une infinité de valeurs différentes, cette équation a une infinité de solutions.

Exemple 1.4.4

Montrez que si $x_1 + kx_2 = c$ et $x_1 + \ell x_2 = d$ sont des équations équivalentes, alors on doit avoir $k = \ell$ et $c = d$.

Solution: Comme on a une équation avec deux inconnues, on écrit la solution de la première équation sous une forme paramétrique avec la paire ordonnée, $(c - kt, t)$ — la valeur de t étant totalement arbitraire. En substituant ces valeurs dans la deuxième équation, on trouve $(c - kt) + \ell t = d$. En choisissant $t = 0$, on trouve que $c = d$. En substituant cette valeur, on trouve le résultat désiré.

1.5 Systèmes d'équations linéaires

Un **système d'équations linéaires** est un ensemble de plusieurs équations linéaires qui sont satisfaites simultanément.

système d'équations linéaires

1.5.1 Exemple trivial

Soit le système de deux équations linéaires [12] :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \end{cases}$$

On obtient un système d'équations équivalentes, c'est-à-dire qu'il admet la même solution $(x = 1, y = 2)$ si on écrit les lignes dans un ordre différent :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \begin{cases} y &= 2 \\ x &= 1 \end{cases}$$

On obtient un système d'équations équivalentes si on multiplie une des lignes par une constante différente de zéro

$$3L_1 \to L_1 \Rightarrow \begin{cases} 3y &= 6 \\ x &= 1 \end{cases}$$

On obtient un autre système d'équations équivalentes si on multiplie une des lignes par une constante différente de zéro et qu'on y ajoute une autre ligne :

$$L_1 + 4L_2 \to L_1 \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4x &= 10 \\ x &= 1 \end{cases} \qquad [\mathbf{1.5.1}]$$

Exercice 1.14 Vérifiez que $(x = 1, y = 2)$ est toujours une solution de l'équation [**1.5.1**].

Ces manipulations sur les lignes d'un système d'équations linéaires sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes** ; nous les reverrons en détails dans les prochains chapitre. En utilisant ce type de manipulation, on peut facilement résoudre les systèmes d'équations linéaires.

opérations élémentaires sur les lignes

Exemple 1.5.1

Trouvez la solution générale du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 18 \end{cases}$$

Solution: En multipliant la première équation par -2 et en additionnant le résultat à la deuxième équation comme suit :

$$-2L_1 + L_2 \to L2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= 7 \\ 2x_2 &= 4 \end{cases}$$

[12] Dans un système d'équations linéaires, chaque ligne contient une seule équation. Pour des raisons qui deviendront plus claires dans les prochains chapitre, nous allons utiliser le mot ligne plutôt que le mot équation pour identifier une équation individuelle.

on trouve que $2x_2 = 4$, et donc $x_2 = 2$. En substituant ceci dans la première équation, on trouve que $x_1 = 5$

Exercice 1.15 Trouvez la solution générale du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Exemple 1.5.2

En faisant le choix $x_3 = t$ avec t un paramètre arbitraire, trouvez la solution générale du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

Solution: Avec le choix $x_3 = t$, on peut récrire le système d'équations linéaires sous la forme

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - t \\ 2x_1 + 4x_2 = 18 - t \end{cases}$$

En multipliant la première équation par -2 et en additionnant le résultat à la deuxième équation comme suit

$$-2L_1 + L_2 \to L_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - t \\ 2x_2 = 4 + t \end{cases}$$

on trouve que $2x_2 = 4 + t$, et donc $x_2 = 2 + \frac{1}{2}t$. En substituant ceci dans la première équation, on trouve que $x_1 = 5 - \frac{3}{2}t$

Exercice 1.16 En faisant le choix $x_3 = t$ avec t un paramètre arbitraire, trouvez la solution générale du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

1.6 Systèmes d'équations linéaires : quatre interprétations

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad [1.6.1]$$

On peut vérifier facilement que la solution unique est donnée par $x = 2, y = 1$. Ce système, tout simple, peut être interprété de quatre façons comme nous allons le voir ci-dessous. Ces interprétations donnent un tout petit aperçu des domaines d'utilisation de l'algèbre linéaire et de certains sujets que nous allons couvrir.

Figure 1.5 René Descartes, 1596–1650. Mathématicien, physicien et philosophe français, d'après qui l'on nomme le plan cartésien.

1.6.1 Interprétation géométrique

Dans un premier temps, le système **[1.6.1]** peut être vu comme deux équations de droites dans le plan cartésien. La solution correspond au point d'intersection des deux droites. Si les deux droites sont parallèles (mais non confondues), il n'y a pas de point d'intersection et le système n'a pas de solutions. Si les deux droites sont confondues, alors il existe une infinité de solutions.

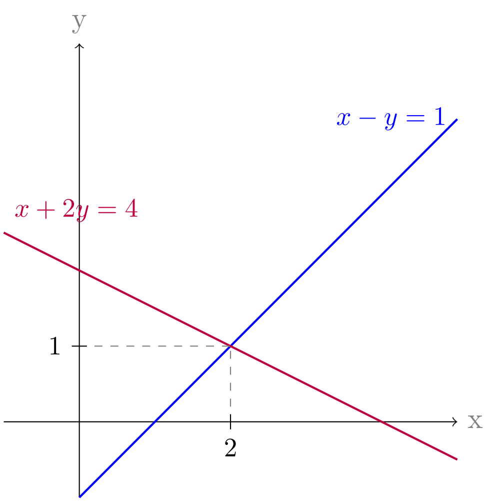


Figure 1.6 L'intersection des deux droites représente la solution unique du système d'équations.

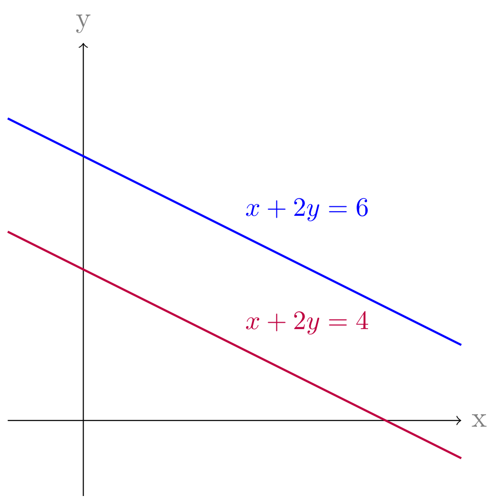


Figure 1.7 Un système à deux inconnues sans solution : les deux droites sont parallèles. À noter qu'on pourrait avoir une infinité de solutions si les deux droites étaient confondues.

Si on ajoute une inconnue, pour passer de deux à trois, alors chaque équation linéaire représente un plan dans l'espace. Si on a trois équations, on aura alors trois plans. Si ces trois plans s'intersectent en un seul point, alors il y aura une solution unique. Si deux plans sont parallèles, il n'y aura aucune solution. Il peut également n'y avoir aucune solutions si les plans s'intersectent deux à deux, le long de droites, mais si ces droites sont parallèles entre elles. On peut également avoir une infinité de solutions, si les trois plans s'intersectent le long d'une droite commune.

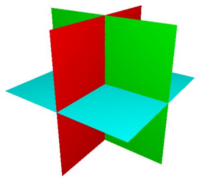


FIGURE 1.8 Intersection de trois plan avec un point commun aux trois.

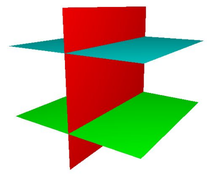


FIGURE 1.9 Intersection de trois plan sans point commun : deux plans sont parallèles.

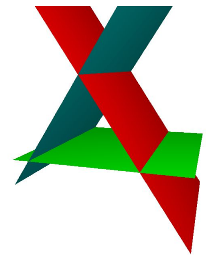


FIGURE 1.10 Intersection de trois plan sans point commun : les plans s'intersectent deux à deux, mais les trois droites ainsi formées sont colinéaires.

FIGURE 1.11 Jeu de mots anglais sur l'intersection des plans (origine de l'image inconnue).

1.6.2 Équation matricielle

Il est facile de vérifier que le système d'équations linéaires [1.6.1] peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec les choix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on obtient une équation toute simple : $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Si on pouvait diviser une matrice par une autre, on serait tenté d'écrire que la solution serait :

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$$

Cependant, on ne peut pas faire ceci car la division par une matrice n'est pas une opération définie. Par contre, on peut **parfois** définir un *inverse multiplicatif* défini par la relation $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. Lorsque c'est le cas [13], on peut alors écrire la solution comme

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

tout comme si les matrices étaient de simples nombres.

1.6.3 Combinaison linéaire

combinaison linéaire

Une autre façon d'écrire le système d'équations linéaires [1.6.1] est la suivante :

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[13] Nous verrons les conditions pour l'existence d'un tel inverse plus tard.

Si on définit les vecteurs $\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}$ et $\vec{\boldsymbol{C}}$ de la façon suivante :

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on peut alors récrire l'équation sous la forme

$$x\vec{\boldsymbol{A}} + y\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{C}}$$

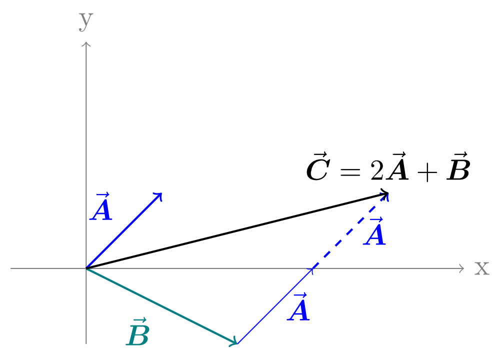


Figure 1.12 Combinaison linéaire de vecteurs

On a donc une somme vectorielle avec deux inconnues. Ce type de somme de vecteurs s'appelle une combinaison linéaire. Un exemple plus abstrait est donné en chimie par la méthode de combinaison linéaire d'orbitales atomiques. Les combinaisons linéaires sont la base de l'étude des **espaces vectoriels** que nous verrons plus tard.

espaces vectoriels

1.6.4 Transformation linéaire

Une quatrième interprétation est possible en considérant l'équation sous forme matricielle

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

Selon cette interprétation, la matrice $\boldsymbol{A}$ effectue des transformations sur des vecteurs d'un domaine initial pour les transformer dans un domaine connu sous le nom d'image de la transformation. Un exemple de telles transformations est celui des rotations dans le plan, où le domaine initial et celui de l'image sont identiques. Un exemple différent est celui d'une projection : pour chaque point aux coordonnées (x, y, z), on fait sa projection dans le plan xy. Dans ce cas-ci, le domaine initial est $\mathbb{R}^3$; celui de l'image est $\mathbb{R}^2$. Sous forme d'équation matricielle, on écrirait une telle projection de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Plusieurs autres exemples existent tel que nous le verrons plus tard. Mais auparavant, nous devons étudier un peu plus à fond les équations linéaires et les matrices.

Chapitre

2 Matrices

Les matrices sont des objets mathématiques qui sont essentiels dans l'étude de l'algèbre linéaire, en plus d'être utiles dans un grand nombre de domaines. Nous avons déjà revu quelques propriétés des matrices dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques définitions et quelques autres propriétés, en terminant avec la multiplication par blocs qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

2.1 Matrice triangulaire

Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients **sous la diagonale**, $a_{ij}, i > j$, sont zéros. Par exemple :

matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 4 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice dont tous les coefficients **au-dessus** de la diagonale, $a_{ij}, i < j$, sont zéros. Par exemple

matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & \mathbf{6} & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & \mathbf{3} & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 4 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

On note que d'autres coefficients peuvent être zéros tout en satisfaisant la définition d'une matrice triangulaire. Une matrice diagonale est donc à la fois une matrice triangulaire *supérieure* et une matrice triangulaire *inférieure*.

2.2 Trace d'une matrice

Définition 2.2.1

Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée, alors la somme des coefficients sur sa diagonale principale est appelée la **trace** de $\boldsymbol{A}$ et est dénotée par $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$:

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exercice 2.1 Vérifiez que les traces des deux matrices triangulaires mentionnées précédemment sont égales.

Théorème 2.2.1

Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices $n \times n$ et c un scalaire. Alors :

(a) $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})$

(b) $\mathrm{Tr}(c\boldsymbol{A}) = c\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$

Démonstration:

(a) $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})$

(b) $\mathrm{Tr}(c\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n}(ca_{ii}) = c\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$ CQFD

2.3 Transposée d'une matrice

Définition 2.3.1

Soit une matrice $\boldsymbol{A}_{m\times n}$; sa **transposée**, dénotée par $\boldsymbol{A}^\top$, est la matrice $n \times m$ obtenue en interchangeant les colonnes avec les lignes de $\boldsymbol{A}$. Donc, si $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ alors $\boldsymbol{A}^\top = [a_{ji}]$.

Exemple 2.3.1

Quelle est la transposée de la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Solution:

$$\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Le théorème suivant résume quelques propriétés de la transposée d'une matrice.

Théorème 2.3.1

Soit $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ et $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ deux matrices $m \times n$, $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ une matrice carrée $(n \times n)$ et k un scalaire. Alors :

(a) $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$

(b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$

(c) $(c\boldsymbol{A})^\top = c\boldsymbol{A}^\top$

(d) $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}^\top) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{C})$

Démonstration:

(a) $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = ([a_{ij}]^\top)^\top = (a_{ji})^\top = (a_{ij}) = \boldsymbol{A}$

(b) Écrivons $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; alors

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\top = [a_{ij} + b_{ij}]^\top = [c_{ij}]^\top = [c_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$$

(c) $(c\boldsymbol{A})^\top = [ca_{ij}]^\top = [d_{ij}]^\top = [d_{ji}] = [ca_{ji}] = c[a_{ji}] = c\boldsymbol{A}^\top$

(d) $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}^\top) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{C})$ CQFD

2.4 Symétrie et anti-symétrie

Une **matrice symétrique** $\boldsymbol{S}$ est une matrice carrée telle que $\boldsymbol{S}^\top = \boldsymbol{S}$. Une **matrice anti-symétrique**[1] $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée telle que $\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A}$. Par exemple, la matrice suivante est une matrice symétrique

matrice symétrique
matrice anti-symétrique

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

alors que la matrice suivante est une matrice anti-symétrique.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] En anglais, on utilise le terme *skew-symmetric*.

Exemple 2.4.1

(a) Démontrez que, pour n'importe quelle matrice carrée $\boldsymbol{M}$, la matrice $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^\top)$ est symétrique et que la matrice $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}^\top)$ est anti-symétrique.
(b) Démontrez que si $\boldsymbol{M}$ est une matrice carrée, alors on peut écrire $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}$ où $\boldsymbol{S}$ est une matrice symétrique et $\boldsymbol{A}$ est une matrice anti-symétrique.
(c) Démontrez qu'il n'y a qu'une seule façon d'écrire une matrice $\boldsymbol{M}$ comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Solution:
(a) Tout d'abord, on se rappelle que la transposée d'une somme de matrices est égale à la somme des transposées. De plus, si on prend la transposée de la transposée d'une matrice, on retrouve la matrice originale. Utilisant ceci, nous avons :

$$\boldsymbol{S}^\top = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^\top)^\top = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}^\top + \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{S}$ est donc une matrice symétrique. De plus

$$\boldsymbol{A}^\top = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}^\top)^\top = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}^\top - \boldsymbol{M}) = -\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{A}$ est donc une matrice anti-symétrique. Voici un exemple concret :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On vérifie facilement que, si on additionne $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{S}$ tel que définis de façon générale ci-dessus, on retrouve $\boldsymbol{M}$.
(c) Supposons qu'il existe deux autres matrices, $\boldsymbol{A}'$ et $\boldsymbol{S}'$ telles que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}' + \boldsymbol{A}'$. On aurait donc $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{S}'$ que l'on peut réécrire comme $\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}' = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}$. On peut facilement vérifier que la somme (ou la différence) de deux matrices [anti-] symétriques est une matrice [anti-] symétrique. Le côté gauche de l'égalité est donc une matrice symétrique et le côté droit est une matrice anti-symétrique. La seule matrice qui est à la fois symétrique et anti-symétrique est la matrice nulle, $\mathbf{0}$. Donc, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}'$ et $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$: il n'y a qu'une seule façon de décomposer une matrice quelconque comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

2.5 Transposée d'un produit

En plus des propriétés semblables à celles des nombres, les matrices ont d'autres propriétés intéressantes. Par exemple, nous avons vu le concept de transposée d'une matrice. Le théorème suivant démontre comment obtenir la transposée d'un produit matriciel.

Théorème 2.5.1

Soit les matrices $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ et $\boldsymbol{B}_{n\times p}$; alors $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$.

Démonstration: La manipulation d'indices peut être mélangeante lorsqu'on n'est pas habitué. Pour cette raison, nous allons utiliser une façon détournée où nous allons définir trois matrices $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E})$ qui vont nous permettre de mieux suivre ce qui se passe. Nous écrivons donc :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} &\Rightarrow [\boldsymbol{AB}]_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki} = c_{ji} \\
\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{D} &\Rightarrow d_{jk} = a_{kj} \qquad \forall j,k \\
\boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{E} &\Rightarrow e_{ki} = b_{ik} \qquad \forall i,k
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top]_{ij} &= [\boldsymbol{ED}]_{ij} \\
&= \sum_k e_{ik}d_{kj} \\
&= \sum_k b_{ki}a_{jk} \\
&= \sum_k a_{jk}b_{ki} \qquad \text{commutativité de la multiplication des scalaires} \\
&= [\boldsymbol{AB}]_{ji} \\
&= [\boldsymbol{C}]_{ji} \\
&= [\boldsymbol{C}^\top]_{ij} \\
&= [(\boldsymbol{AB})^\top]_{ij}
\end{aligned}$$

CQFD

Exemple 2.5.1

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice quelconque. Démontrez que $\boldsymbol{AA}^\top$ et $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ sont des matrices symétriques.

Solution: En premier on note que, peu importe la taille de $\boldsymbol{A}$, les produits $\boldsymbol{AA}^\top$ et $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ sont bien définis et sont en fait des matrices carrées : $\boldsymbol{A}_{n\times p}\boldsymbol{A}^\top_{p\times n} = \boldsymbol{C}_{n\times n}$ et $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}_{p\times p}$. On a :
$(\boldsymbol{AA}^\top)^\top = (\boldsymbol{A}^\top)^\top\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{AA}^\top$, et donc $\boldsymbol{AA}^\top$ est une matrice symétrique. Similairement,
$(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})^\top = \boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$, et donc $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique.

2.6 Matrices complexes

Dans la plupart des cas que vous allez rencontrer dans vos études, les coefficients des matrices seront tous réels. Cependant, dans certains domaines, comme la mécanique quantique, on utilise des matrices ayant des coefficients complexes.

2.6.1 Matrices hermitiennes et transconjuguées

Si $\boldsymbol{A}$ dénote une matrice, on dénote sa conjuguée par $\overline{\boldsymbol{A}}$. Par exemple, les deux matrices ci-dessous sont des matrices conjuguées :

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 4 & 5-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 5+2i \end{pmatrix}$$

Il est évident que si $\boldsymbol{A}$ est réelle [2], on doit avoir $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$.

La transposée de la conjuguée d'une matrice est dénoté par $\boldsymbol{A}^* = (\overline{\boldsymbol{A}})^\top$. Si on a $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$, on dit que la matrice est **hermitienne**. Si on a $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$, on dit que la matrice est **transconjuguée** [3].

hermitienne
transconjuguée

Les coefficients d'une matrice hermitienne doivent satisfaire $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, et donc les coefficients sur la diagonale doivent être des réels.

Exercice 2.2 Si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2+3i \\ i & 2-i \end{pmatrix}$ trouvez

(a) $\overline{\boldsymbol{A}}$

(b) $\boldsymbol{A}^*$

Exercice 2.3 Parmi les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ -2-i & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3+4i \\ 3-4i & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ -2+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 3+2i & 2i \\ 3+2i & 0 & 1+i \\ 2i & 1+i & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-i \\ -2 & 0 & -3i \\ -2-i & -3i & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Lesquelles sont des matrices hermitiennes.

(b) Lesquelles sont des matrices transconjuguées.

Exercice 2.4 Démontrez que $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$.

Exercice 2.5 Démontrez que $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$.

Exercice 2.6 Démontrez que les coefficients sur la diagonale d'une matrice transconjuguée sont soit zéro ou soit des nombres purement imaginaires (c'est-à-dire sans partie réelle).

[2] Une matrice réelle est une matrice qui n'a que des coefficients réels.

[3] En anglais, on utilise le terme *skew-hermitian*

Exercice 2.7 Démontrez que, si $z \in \mathbb{C}$, alors $(z\boldsymbol{A})^* = \overline{z}\boldsymbol{A}^*$

Exercice 2.8 Démontrez que, pour une matrice carrée $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^*$.
N.B. Pour toutes les démonstrations, vous pouvez supposer que les résultats mentionnés dans les exercices précédents sont vrais, ce qui permet souvent de faire des démonstrations beaucoup plus courtes.

Exercice 2.9 Démontrez que, pour une matrice carrée $\boldsymbol{A}$,
$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*)^*$

Exercice 2.10 Démontrez que, pour une matrice carrée $\boldsymbol{A}$,
$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^* = -(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*)^*$

Exercice 2.11 Démontrez que n'importe quelle matrice carrée peut être exprimée comme la somme d'une matrice hermitienne et d'une matrice transconjuguée.

Suggestion : vous pouvez vous inspirer de la démonstration d'un exemple précédent sur les matrices symétriques et anti-symétriques.

Exercice 2.12 Démontrez que toute matrice hermitienne peut être exprimée comme une somme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}i$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique réelle et $\boldsymbol{B}$ est une matrice réelle anti-symétrique.

Exercice 2.13 Démontrez que toute matrice transconjuguée peut être exprimée comme une somme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}i$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice anti-symétrique réelle et $\boldsymbol{B}$ est une matrice réelle symétrique.

2.7 Puissance d'une matrice carrée

Pour les matrices carrées, on peut définir la puissance d'une matrice de la façon suivante. Soit une matrice $\boldsymbol{A}_{n\times n}$:

- $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}_n$
- $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$
- Pour $k \geq 2$, $\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{A}^{k-1})\boldsymbol{A}$, où on se limite aux valeurs entières pour k.

Avec cette définition, on peut vérifier facilement que $\boldsymbol{A}^{s+t} = \boldsymbol{A}^s\boldsymbol{A}^t$ et que $(\boldsymbol{A}^s)^t = \boldsymbol{A}^{st}$.

2.8 Trace d'un produit et commutateur

Nous avons déjà vu la **trace** d'une matrice plus tôt ; nous allons bientôt vérifier une propriété de la trace d'un produit de matrices. Auparavant, nous définissons le **commutateur** de deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ comme étant la différence des produits $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$. On dénote le commutateur de la façon suivante : $[\cdot, \cdot]$, c'est-à-dire :

commutateur

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$$

L'exemple [4] suivant utilise la trace et le commutateur.

Exemple 2.8.1

Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices $n \times n$.

(a) Démontrez que $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{BA})$.

(b) Démontrez que $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{I}_n$ est impossible.

Solution:

(a) Rappelons que la trace est donnée par $\operatorname{Tr} \boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$. Nous avons donc

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{BA})$$

où on a interchangé l'ordre des sommation dans l'avant-dernier terme de l'égalité.

(b) Supposons que $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{I}_n$ soit vrai. Puisque $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{BA})$, nous avons

$$0 = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{AB}) - \operatorname{Tr}(\boldsymbol{BA}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}) = \operatorname{Tr} \boldsymbol{I}_n$$

Mais, comme on peut facilement le vérifier, $\operatorname{Tr} \boldsymbol{I}_n = n$, et on obtient la contradiction $0 = n$.

Exercice 2.14 Démontrez que $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{CAB}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{BCA})$.
On pourrait également démontrer que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{A}_3 \ldots \boldsymbol{A}_p) &= \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}_p \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{A}_3 \ldots \boldsymbol{A}_{p-1}) \\ &= \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}_q \ldots \boldsymbol{A}_{p-1} \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_{q-1}) \end{aligned}$$

[4] Le commutateur de deux matrices est une opération mathématique qui n'est essentiellement pas utilisée en algèbre linéaire. Par contre, c'est une opération qui est utilisée souvent en mécanique quantique et mène aux relations d'incertitudes de Heisenberg. Un exemple qui peut sembler contredire l'exemple donné dans les texte est le suivant. Si on dénote par $\mathbf{q}$ l'opérateur matriciel correspondant à la coordonnée d'une position, et par $\mathbf{p}$, sa quantité de mouvement, on observe alors que $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar \boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité. La raison pour laquelle ceci est possible est que les matrices en question sont des matrices infinies ; la démonstration que nous avons dérivée dans le texte est uniquement pour des matrices finies.

mais vous n'avez pas à le faire.

2.9 Multiplication de matrices par blocs

Il est parfois utile de partitionner des matrices en blocs, où chaque bloc peut être vu comme étant une sous-matrice. Par exemple, si nous avons deux matrices, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui peuvent être partitionnées en blocs de façon compatible, le produit $\boldsymbol{AB}$ peut être calculé en considérant chaque bloc comme un coefficient. Nous avons déjà vu ceci dans un cas particulier, à l'équation 1.2.1, où on a représenté des matrices soit comme une collection de lignes ou une collection de colonnes. Nous allons démontrer ceci avec des blocs de formes différentes à l'aide de l'exemple numérique suivant, sans en faire la démonstration générale qui est laissée au lecteur.

Soit les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons facilement vérifier que le produit est donné par

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -7 & 63 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons calculer ce produit différemment. Supposons que nous partitionnons les deux matrices en blocs de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{ll} \boldsymbol{A}_1 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}} \right. & \left. \boxed{\begin{matrix} 8 & 0 \\ 6 & 7 \end{matrix}} \right\} \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix}} \} \boldsymbol{A}_4 \end{array} \right)$$

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{l} \boldsymbol{B}_1 \left\{ \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \right. \\ \boldsymbol{B}_2 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{matrix}} \right. \end{array} \right)$$

Le produit peut alors être écrit comme :

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 42 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 7 & 63 \end{pmatrix}$$

Nous avons également

$$\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -18 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 12 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 7 & 63 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$$

qui est le même résultat que nous avions obtenu auparavant.

2.10 Exercices divers

Exercice 2.15 Pour chacune des matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez la transposée.

(b) Calculez la trace.

(c) Calculez le carré.

(d) Déterminez si la matrice est symétrique ou anti-symétrique (justifiez votre réponse). Si la matrice n'est ni symétrique, ni anti-symétrique, écrivez-la comme une somme de deux matrices, l'une symétrique et l'autre anti-symétrique.

Exercice 2.16 Soit les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculez le commutateur $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$.

Exercice 2.17 Soit les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Partitionnez-les en quatre blocs compatibles avec, pour chaque matrice, un des blocs correspondant à une matrice 2×2, et évaluez le produit en multipliant par blocs.

Exercice 2.18 Déterminez les deux nombres, s et t qui font en sorte que la matrice suivante soit symétrique.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

Exercice 2.19 Déterminez $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.20 On dit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ qu'elle est **idempotente** si $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

(a) Montrez que la matrice $\boldsymbol{A}$ suivante est idempotente.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Montrez que si $\boldsymbol{B}$ est idempotente, alors la matrice $(I - \boldsymbol{B})$ est également idempotente.

Exercice 2.21 Le but de cet exercice est de démontrer que certaines identités pour la multiplication de deux nombres ne sont pas valides lorsqu'on multiplie des matrices. Soit les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Comparez $(\boldsymbol{AB})^2$ et $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

Exercice 2.22 Démontrez que $\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right)$ est la somme des carrés de tous les coefficients de $\boldsymbol{A}$.

Exercice 2.23 Démontrez que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ si et seulement si $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{B}^{\top} = \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}$.

Exercice 2.24 Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices symétriques. Démontrez que $\boldsymbol{AB}$ sera symétrique si et seulement si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

Chapitre

3 Systèmes d'équations linéaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons voir une méthode systématique de résolution des équations linéaires, appelée méthode d'**élimination de Gauss-Jordan** [1]. Cette méthode peut être adaptée aux matrices et, comme on le verra dans le chapitre suivant, être utilisée pour trouver l'inverse d'une matrice. De plus, cette méthode peut être adaptée sous forme d'algorithme informatique permettant d'écrire des logiciels qui peuvent résoudre des systèmes d'équations linéaires.

FIGURE 3.1 Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855. Surnommé le prince des mathématiques, Gauss a laissé sa marque dans plusieurs branches des mathématiques dont, entre autres, l'algèbre linéaire.

3.2 Élimination de Gauss-Jordan

Comme on l'a vu au chapitre précédent, un système de m équations linéaires et n inconnues

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad [3.2.1]$$

peut être écrit comme une équation matricielle $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On appelle la matrice $\boldsymbol{A}$ la **matrice des coefficients** du système d'équa-

matrice des coefficients

[1] Bien que l'on nomme cette méthode d'après Gauss, né en 1777, et Jordan, né en 1842, les mathématiciens Chinois connaissaient cette méthode au premier siècle de notre ère . . . et même possiblement au deuxième siècle **avant** notre ère, soit plus de 2000 ans avant la naissance de Gauss.

tions linéaires.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, on obtiendra un système équivalent si on effectue des **opérations élémentaires sur les lignes**, soit :

- on échange deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- on remplace une ligne donnée par son multiple $\alpha L_i \quad \text{avec} \quad \alpha \neq 0$
- on remplace une ligne donnée par l'addition de celle-ci avec le multiple d'une autre ligne $L_i + \beta L_j \to L_i$

opérations élémentaires sur les lignes

Dans l'exemple suivant, nous allons utiliser ces opérations élémentaires sur les lignes d'abord pour mettre le système dans une **forme échelonnée** puis dans une **forme échelonnée réduite**. La première étape est connue sous le nom de **méthode du pivot de Gauss** ; l'ensemble des opérations est connu sous le nom l'**élimination de Gauss-Jordan**. À noter qu'à chaque étape, on peut transformer plus qu'une ligne sujet aux conditions suivantes :

forme échelonnée
forme échelonnée réduite
méthode du pivot de Gauss
élimination de Gauss-Jordan

- on ne fait pas plus qu'une transformation pour une ligne donnée ;
- on n'utilise pas une ligne sur laquelle on fait une transformation.

Par exemple, pour une étape donnée, on pourrait multiplier la première ligne par 2, et remplacer échanger la deuxième et la quatrième ligne ; cependant, dans cette étape, on ne pourrait pas remplacer la troisième ligne par la somme de la troisième et de la première ligne (puisqu'on a transformé la première ligne), ni échanger la deuxième et la cinquième ligne (puisqu'on aurait déjà transformée la deuxième ligne).

Pour notre exemple, nous considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + 4y + z = 5 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

que nous pouvons écrire sous forme matricielle $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Nous introduisons la **matrice augmentée**, $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$ qui est une forme abrégée d'écriture d'un tel système d'équations linéaires

matrice augmentée

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Nous allons donc résoudre le système d'équations linéaires en faisant une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. En parallèle, nous allons suivre l'évolution de la matrice augmentée.

Tout d'abord, nous remplaçons la deuxième ligne par une combinaison linéaire d'elle-même et de -2 fois la première ligne pour que le coefficient de la variable x soit zéro :

$$L_2 - 2L_1 \to L_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ \quad\; - 3y + 3z = 12 \\ 3x + 4y + z = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Nous faisons un remplacement semblable pour la troisième ligne, soit :

$$L_3 - 3L_1 \to L_3 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ \quad\; - 3y + 3z = 12 \\ \quad\; - 2y + 4z = 14 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & 4 & 14 \end{array}\right]$$

Nous pouvons simplifier les coefficients de la deuxième et de la troisième ligne en divisant par un facteur commun. [2]

$$\begin{array}{l} \frac{-1}{3}L_2 \to L_2 \\ \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

Ensuite, pour que le coefficient de la variable y dans la troisième ligne soit zéro, nous faisons le remplacement de la troisième ligne par elle-même additionnée de la deuxième ligne :

$$L_3 + L_2 \to L_3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

On voit que le système d'équations linéaires est dans une forme triangulaire qui est un cas particulier de ce qu'on appelle une **forme échelonnée**. Nous continuons de résoudre le système.

forme échelonnée

$$\begin{array}{l} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 + L_3 \to L_2 \end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & -1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$L_1 - 2L_2 \to L_1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 2 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad [3.2.3]$$

Nous avons donc trouvé la solution du système d'équations linéaires [3.2.2].

Exercice 3.1 Vérifiez que [3.2.3] est bien la solution de [3.2.2].

FIGURE 3.2 Wilhelm Jordan 1842–1899. Géodésiste allemand qui, en 1887 a donné une description d'une version améliorée de la procédure d'éliminination de Gauss. Il est à noter qu'un mathématicien, B.I. Clasen, aurait publié de façon indépendante une description semblable la même année.

La matrice augmentée apparaissant dans l'équation [3.2.3] a la forme $[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}]$ où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité. Ceci n'est pas un hasard, comme nous le verrons plus tard. Pour ceux qui sont curieux, nous donnons un aperçu. Nous avons débuté avec une matrice augmentée $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$ correspondant à l'équation matricielle $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Si on pouvait avoir une matrice $\boldsymbol{C}$ telle que $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$, alors, en multipliant de chaque côté de l'équation matricielle, on trouverait $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{CB}$, ou encore $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CB}$. Comme nous l'avons vu, il est possible de multiplier les matrices *en blocs* ; ainsi, on peut multiplier la matrice *augmentée* par la gauche par $\boldsymbol{C}$, on trouve

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{CA}|\boldsymbol{CB}] = [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}]$$

qui est le résultat recherché.

[2] C'est toujours une bonne idée d'avoir des coefficients entiers aussi petits que possible.

3.2.1 Notation matricielle et matrices augmentées

Nous avons déjà vu quelques exemples utilisant la notation matricielle et les matrices augmentées, dans un contexte plus général. Pour s'assurer que le tout est bien compris, nous fournissons un exemple détaillé et suggérons quelques exercices.

Exemple 3.2.1

Soit le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right.$$

(a) Écrivez la matrice des coefficients et la matrice augmentée de ce système.
(b) Écrivez ce système en utilisant la notation matricielle.

Solution:
(a) La matrice des coefficients est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

et la matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

(b) Ce système peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

À noter que, lorsqu'on demande d'écrire un système sous forme matricielle, on entend habituellement la forme explicite ci-dessus plutôt que la forme abstraite $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ utilisée dans les démonstrations.

Exercice 3.2 Soit le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ -5x_1 & - & 6x_2 & - & 7x_3 & = & -2 \\ 8x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

(a) Écrivez la matrice des coefficients et la matrice augmentée de ce système.
(b) Écrivez ce système en utilisant la notation matricielle.

Exemple 3.2.2

Quel est le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Solution:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & & & = & -1 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

À noter qu'on aurait pu tout aussi bien choisir x, y, z comme variables plutôt que x_1, x_2, x_3 ou tout autre choix arbitraire.

Exercice 3.3 Quel est le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -5 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

3.2.2 Formes échelonnées

Important : *les définitions suivantes ne sont que pour les matrices des coefficients. Pour les matrices augmentées, on ne tient compte que des termes à la gauche de la barre verticale séparant la matrice des coefficients de la matrice des termes constants.*

Une matrice est en **forme échelonnée** si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros. Une autre façon d'exprimer ceci est de dire qu'une matrice est en forme échelonnée si le premier coefficient non-nul d'une ligne donné est toujours à la droite du coefficient non-nul de la ligne précédente. Ces premiers coefficients non-nuls d'une ligne donné s'appellent les **pivots**. La matrice suivante est dans une forme échelonnée ; les pivots sont identifiés par p_i alors que les coefficients arbitraires sont représentés par un astérisque $(*)$.

forme échelonnée

pivots

$$\begin{pmatrix} p_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & p_2 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une matrice est en **forme échelonnée réduite** si elle est en forme échelonnée, que tous ses pivots valent 1 et que les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls, comme dans la matrice suivante :

forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.3

Déterminez si chacune des matrice suivante est soit en forme échelonnée réduite ou en forme échelonnée (mais non réduite).

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Solution:

(a) En regardant dans chaque rangée, de gauche à droite, le premier coefficient non-nul (pivot) est toujours à la droite du coefficient non-nul de la ligne précédente : la matrice est donc dans la forme échelonnée. En examinant les colonnes où on trouve des pivots, on note que certains sont non-nuls, tel que 5 dans la deuxième rangée : la matrice n'est donc pas sous une forme réduite.

(b) En regardant dans chaque rangée, de gauche à droite et à l'exception de la colonne des constantes, le premier coefficient non-nul (pivot) est toujours à la droite du coefficient non-nul de la ligne précédente : la matrice est donc dans la forme échelonnée. En examinant les colonnes où on trouve les pivots, qui sont tous égaux à 1, on note que tous les autres coefficients de ces colonnes sont nuls : la matrice est donc sous forme réduite.

Dans un système d'équation linéaires en forme échelonnée réduite, les **variables dépendantes** correspondent aux pivots ; les **variables indépendantes** également appelées **variables libres** sont les autres variables.

variables dépendantes
variables indépendantes
variables libres

Exemple 3.2.4

Déterminez quelles sont les variables dépendantes et les variables indépendantes du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

Solution: La matrice augmentée de ce système est

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{array}\right]$$

Nous pouvons utiliser la procédure d'élimination de Gauss de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ \frac{1}{5}L_3 \to L_3 \\ L_4 - 2L_1 \to L_4 \end{array} \implies \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_3 + L_2 \to L_3 \\ L_4 + 4L_2 \to L_4 \end{array} \implies \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \implies \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice est dans une forme échelonnée. Les variables correspondant aux pivots sont x_1, x_3 et x_6 : ce sont les variables dépendantes. Les variables x_2, x_4 et x_5 sont les variables indépendantes, ou libres.

Exemple 3.2.5

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_3 + 6x_4 = 7 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Solution: Le système est déjà sous une forme échelonnée réduite. Les variables libres sont x_2 et x_4. Choisissons de les paramétriser ainsi : $x_2 = s$ et $x_4 = t$. Nous pouvons réécrire le système de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 6-2s-t \\ & x_3 & & = & 7-6t \\ & & x_5 & = & 1 \end{cases}$$

d'où l'on peut obtenir les valeurs des variables dépendantes directement.

Exercice 3.4 Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Suggestion : commencez par transformer le système sous une forme échelonnée réduite.

3.2.3 Systèmes consistant et inconsistant

Dans un système d'équations linéaires exprimée sous forme matricielle, si une ligne de la matrice des coefficients est nulle (ou si tous les termes à la gauche de la barre verticale dans une matrice *augmentée* sont nuls), et que le terme constant (à la droite de la barre verticale dans une matrice augmentée) ne l'est pas, alors le système n'admet pas de solution : il est inconsistant. Autrement, on dira qu'il est consistant.

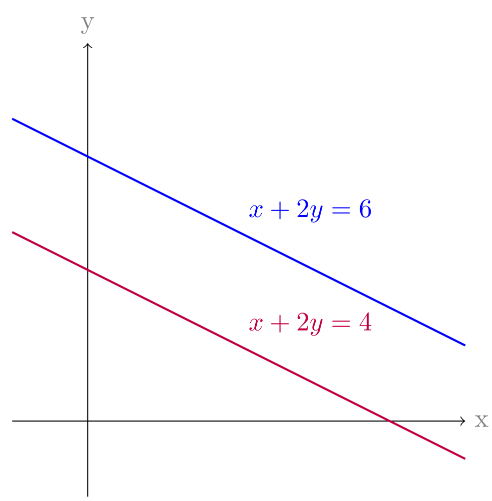
Reprenons l'exemple de la figure 1.7 qui est reproduit à côté et qui correspond au système

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 6 \end{cases}$$

La matrice augmentée de ce système peut être écrite sous une forme échelonnée réduite en soustrayant la première ligne de la deuxième

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad L_2 - L_1 \to L_2 \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Comme la dernière ligne de la matrice des coefficients est nulle, mais que le terme constant est non-nul, correspondant à l'équation $0 = 2$, le système n'admet pas de solutions.



Exemple 3.2.6

Trouvez la solution générale du système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est égale à

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Solution: En utilisant la procédure d'élimination de Gauss, on trouve que :

$$\begin{array}{r} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 19 \end{array}\right]$$

$$L_3 + 3L_2 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Comme la matrice augmentée a une rangée de la forme $[0, 0|b]$ avec $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution : il est inconsistant.

Exemple 3.2.7

Déterminez la valeur de a de telle sorte que le système soit consistant.

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 - {}} x_2 - 4x_3 = a \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

Solution: La matrice augmentée de ce système est

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -4 & a \\ 2 & -3 & 2 & b \\ 1 & -2 & 3 & c \end{array}\right]$$

En utilisant la procédure de Gauss-Jordan, on trouve

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & c \\ 2 & -3 & 2 & b \\ 0 & 1 & -4 & a \end{array}\right]$$

$$L_2 - 2L_1 \to L_2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & c \\ 0 & 1 & -4 & b - 2c \\ 0 & 1 & -4 & a \end{array}\right]$$

$$L_3 - L_2 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & c \\ 0 & 1 & -4 & b - 2c \\ 0 & 0 & 0 & a - b + 2c \end{array}\right]$$

La seule façon que la troisième ligne peut mener à un système consistant est que l'on ait $a - b + 2c = 0$.

Exercice 3.5 Déterminez la valeur de c de telle sorte que le système soit consistant.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = a \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = b \\ -6x_1 - 3x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

Exercice 3.6 Essayez soit de résoudre le système d'équations suivant ou de démontrer qu'il est inconsistant.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Exercice 3.7 Essayez soit de résoudre le système d'équations suivant ou de démontrer qu'il est inconsistant.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 9x_2 = 8 \end{cases}$$

Exercice 3.8 Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice augmentée suivante correspondra à un système d'équations linéaires consistant.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ -3 & a & -1 \end{array}\right]$$

Exercice 3.9 Déterminez la ou les conditions que doivent satisfaire les nombres a, b et c de telle sorte que le système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = a \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = b \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

soit consistant. Trouvez la solution générale et donnez un exemple, en choisissant des valeurs particulières pour les nombres a, b et c ainsi que tout paramètre arbitraire que vous trouverez.

3.2.4 Exemples et exercices divers

Exemple 3.2.8

Trouvez la solution générale du système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est égale à

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

Solution: En additionnant deux fois la deuxième ligne à la première, le système prend la forme échelonnée réduite :

$$L_1 + 2L_2 \to L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

On a donc deux variables libres : x_3 et x_5. En choisissant de les paramétriser par $x_3 = s$ et $x_5 = t$, on trouve $x_1 = -1 - t$, $x_2 = 1 + 3t$ et $x_4 = -4 - 5t$.

On peut voir ceci plus facilement si on écrit le système d'équations linéaires correspondant à cette matrice augmentée ayant une forme échelonnée réduite :

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & x_5 & & \\ \end{array}$$
$$\begin{cases} x_1 & & & & + & t & = & -1 \\ & x_2 & & & - & 3t & = & 1 \\ & & & x_4 & + & 5t & = & -4 \end{cases}$$

Exemple 3.2.9

Déterminez les valeurs de x_1, x_2 et x_3 pour que les deux matrices suivantes soient égales :

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ 4 & 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution: Pour que les coefficients soient égaux, on doit avoir

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire la matrice augmentée de ce système et utiliser la procédure de Gauss-Jordan pour simplifier le tout.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array} \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

$$L_3 - L_2 \to L_3 \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$L_3 - 2L_2 \to L_3 \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + 4L_3 \to L_2 \end{array} \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$L_1 - L_2 \to L_1 \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Nous avons donc $x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

Exercice 3.10 Déterminez les valeurs de a, b, c et d qui font que les deux matrices suivantes sont égales.

$$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.10

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right.$$

Solution: La matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

En appliquant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan, on trouve :

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \\ L_3 + 4L_1 \to L3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

$$L_3 + 3L_2 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_2 + 4L_3 \to L_2 \\ L_1 - L_3 \to L_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$L_1 + 2L_2 \to L_1 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

et on a donc $x_1 = 29, x_2 = 16$ et $x_3 = 3$.

Exemple 3.2.11

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

Solution: La matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

En appliquant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan, on trouve :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_3 - 2L_1 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$L_3 + L_2 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Ceci correspond au système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 + 5x_3 = -4 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

La dernière équation n'admet pas de solutions ; le système est donc inconsistant.

Exercice 3.11 Résoudre le système suivant en utilisant la notation matricielle et la procédure de Gauss-Jordan :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.12 Résoudre le système suivant en utilisant la notation matricielle et la procédure de Gauss-Jordan :

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Exemple 3.2.12

Utilisez la procédure de Gauss-Jordan pour transformer la matrice suivante d'abord dans une forme échelonnée, puis dans une forme échelonnée réduite.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

Solution: Nous commençons tout d'abord par l'élimination de Gauss pour transformer la matrice sous une forme échelonnée.

$$L_1 \leftrightarrow L_4 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 + 2L_1 \to L_3 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{5}L_3 \to L_3 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 - L_2 \to L_3 \\ L_4 + 3L_2 \to L_4 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc transformé la matrice sous forme échelonnée. Nous continuons nos transformations pour l'amener sous une forme réduite.

$$-\frac{1}{5}L_3 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 + 3L_3 \to L_2 \\ L_1 + 9L_3 \to L_1 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 - 4L_2 \to L_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.13 Utilisez la procédure de Gauss-Jordan pour transformer la matrice suivante d'abord dans une forme échelonnée, puis dans une forme échelonnée réduite.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

3.3 Rang

Définition 3.3.1

Le **rang** d'une matrice $\boldsymbol{A}$, dénoté par $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A})$, est égal au nombre de rangées non-nulles lorsque la matrice $\boldsymbol{A}$ est écrite sous une forme échelonnée.

Exemple 3.3.1

Déterminez le rang de la matrice suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: On utilise la procédure d'élimination de Gauss pour transformer la matrice $\boldsymbol{A}$ sous sa forme échelonnée.

$$L_2 - \tfrac{3}{2}L_1 \to L_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 - \tfrac{2}{5}L_2 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme le nombre de rangées non-nulles dans la forme échelonnée [a] est 3, nous avons $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = 3$.

[a] Notez que, si on continuait les transformations pour obtenir une forme échelonnée **réduite**, le nombre de pivots, et donc de rangées non-nulles, ne changerait pas et on obtiendrait la même réponse pour le rang ... mais en faisant beaucoup plus de travail.

Exercice 3.14 Déterminez le rang des matrices suivantes :

(a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 2 & -3 & 22 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 12 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & 22 & -14 & -17 \end{pmatrix}$$

Suggestion : Lorsque vous aurez trouvé le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$, vous pourrez immédiatement déduire le rang de la matrice $\boldsymbol{B}$ sans avoir à faire d'autres calculs ; ceci ne sera pas toujours le cas.

Exercice 3.15 Considérez le système suivant :

$$\begin{cases} ax & + & by & = & k \\ cx & + & dy & = & \ell \end{cases}$$

Prouvez que, si et seulement si $ad - bc \neq 0$ alors la forme échelonnée réduite de la matrice des coefficients de ce système est la matrice $\boldsymbol{I}_2$:

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Nombre de solutions d'un système d'équations linéaires

Un autre titre pour cette section aurait pu être : $0, 1, \infty$

Théorème 3.4.1

Un système d'équations linéaires peut avoir soit exactement une solution, une infinité de solutions, ou aucune solution.

1. Si la matrice augmentée dans une forme échelonnée a une ligne de la forme $[0, 0, \ldots, 0|b]$, où b est une constante différente de zéro, alors le système n'a aucune solution.
2. Si la matrice augmentée dans une forme échelonnée a des variables indépendantes et aucune ligne sous la forme $[0, 0, \ldots, 0|b]$ avec $b \neq 0$, alors le système a une infinité de solutions.
3. Si la matrice augmentée dans une forme échelonnée n'a aucune variable indépendantes et qu'aucune ligne ne soit sous la forme $[0, 0, \ldots, 0|b]$ avec $b \neq 0$, alors le système a une seule solution.

Démonstration:

1. Si la matrice augmentée dans une forme échelonnée a une ligne de la forme $[0, 0, \ldots, 0|b]$ avec $b \neq 0$, ceci veut dire que le système d'équations a une équation de la forme $0 + 0 + \ldots + 0 = b$ avec $b \neq 0$ ce qui est une contradiction ; le système n'a donc aucune solution.
2. Si la matrice augmentée dans une forme échelonnée a des variables indépendantes et aucune ligne sous la forme $[0, 0, \ldots, 0|b]$ avec $b \neq 0$, alors on peut traiter les variables indépendantes comme des paramètres arbitraires, et donc le système a une infinité de solutions.
3. Si la matrice augmentée dans une forme échelonnée n'a aucune variable indépendantes et qu'aucune ligne ne soit sous la forme $[0, 0, \ldots, 0|b]$ avec $b \neq 0$, ceci veut dire que le système correspondant, dans sa forme échelonnée **réduite**, est égal à

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & c_1 \\ & x_2 & & & = & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & x_m & = & c_m \end{array}$$

qui est donc une solution unique.

En utilisant la notation matricielle, on peut démontrer d'une autre façon que, si un système d'équations linéaires a plus d'une solution, alors il doit en exister un nombre infini. Supposons que $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ soient deux solutions de l'équation $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AX}_1 &= \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{AX}_2 &= \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que $\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)$ serait également une solution :

$$\boldsymbol{A}\frac{(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)}{2} = \frac{\boldsymbol{AX}_1 + \boldsymbol{AX}_2}{2} = \frac{\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}}{2} = \boldsymbol{B}$$

On pourrait également vérifier que $2\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$ serait également une solution. En fait, on peut écrire une solution générale sous la forme

$$\boldsymbol{X}_t = t\boldsymbol{X}_1 + (1-t)\boldsymbol{X}_2 \qquad t \in \mathbb{R}$$

ce qu'on peut vérifier en substituant en multipliant par la gauche par $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t = t\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 + (1-t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = t\boldsymbol{B} + (1-t)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$$

Donc, si on a deux solutions différentes, on peut en trouver une infinité, puisque le paramètre t peut prendre n'importe quelles valeurs.

3.5 Systèmes homogènes

Un **système d'équation homogène** est un système de la forme

système d'équation homogène

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

On constate immédiatement que ce système a la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. On appelle cette solution la **solution triviale**. Toute autre solution est appelée **non-triviale**. Par le théorème 3.4.1, un système homogène a donc soit une solution unique (la solution triviale) ou soit une infinité de solutions.

solution triviale

non-triviale

Théorème 3.5.1

Soit le système d'équations linéaires homogène $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0$ ayant m équations avec n variables.

1. Si $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} < n$ alors le système a une infinité de solutions différentes.
2. Si le nombre d'inconnues excède le nombre d'équations, $n > m$, alors le système a une infinité de solutions.

Démonstration:

1. Imaginons que nous utilisions la procédure d'élimination de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée, $[\boldsymbol{A}|0]$ pour obtenir une matrice augmentée échelonnée réduite $[\boldsymbol{B}|0]$. Dans ce cas, le nombre de rangées non-nulles de $\boldsymbol{B}$ est égal au rang de $\boldsymbol{A}$. Supposons, tel qu'il nous l'est donné, que $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = r < m$. Dans ce cas, le système $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = 0$ aura r inconnues et m équations. Donc ce système aura $m-r$ variables libres, et a donc une infinité de solutions. Comme les systèmes d'équations $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = 0$ et $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0$ sont équivalents, ils ont les mêmes solutions - une infinité dans ce cas-ci.
2. Comme nous avons m équations, nous savons que $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} \leq m$. Selon l'énoncé du théorème, $m < n$ et donc $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} \leq m < n \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} \boldsymbol{A} < n$ ce qui implique qu'il y aura une infinité de solutions.

Exemple 3.5.1

Démontrez que le système suivant est inconsistant :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Solution: On peut vérifier facilement que si on multiplie la première équation par -2 et qu'on additionne le résultat à la deuxième équation, on obtient $0 = 4$ ce qui est impossible. Le système est donc inconsistant. Ceci peut sembler contredire le théorème précédent puisque qu'on a plus d'inconnues que d'équations . . . mais il faut se rappeler que le théorème était pour les systèmes homogènes et que celui-ci ne l'est pas.

Exemple 3.5.2

Résoudre le système homogène suivant en utilisant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Solution: La matrice augmentée de ce système est

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Nous pouvons réduire cette matrice de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 2L_2 + L_1 \to L_2 \\ 2L_3 - L_1 \to L_3 \end{array} \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{3}L_3 \to L_3 \end{array} \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -L_3 - L_2 \to L_3 \\ L_4 - L_2 \to L_4 \end{array} \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1 + \frac{1}{2}L_2 \to L_1 \\ L_4 - 2L_3 \to L_4 \end{array} \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 + 2L_3 \to L_2 \end{array} \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ceci correspond au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Les variable libres sont donc $x_2 = s$ et $x_5 = t$, et la solution générale est donnée par :
$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t.$

Exemple 3.5.3

Résoudre le système homogène suivant en utilisant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Solution: La matrice augmentée de ce système est :

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Nous pouvons la transformer sous une forme réduite de la façon suivante :

$$L_2 - L_3 \to L_2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & -10 & -9 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{12}L_2 \to L_2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_3 + 7L_2 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{65}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{4}{3}L_3 \to L_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{130}{9} & 0 \end{array}\right]$$

La matrice augmentée est sous forme échelonnée. Nous continuons pour l'amener sous forme réduite.

$$\begin{array}{c} L_1 - 5L_3 \to L_1 \\ L_2 - \frac{5}{4}L_3 \to L_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{641}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{155}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{130}{9} & 0 \end{array}\right]$$

$$L_1 - 3L_2 \to L_2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{176}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{155}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{130}{9} & 0 \end{array}\right]$$

Nous avons donc une variable libre, x_4 que nous pouvons paramétriser par $x_4 = t$ ce qui nous donne $x_1 = \frac{176}{9}t$, $x_2 = \frac{155}{9}t$ et $x_3 = -\frac{130}{9}t$. Alternativement, on peut écrire $t = 9s$, ce qui nous donnerait : $x_1 = 176s, \quad x_2 = 155s, \quad x_3 = -130s, \quad x_4 = 9s.$

3.6 Exercices divers

Exercice 3.16 Trouvez la solution générale du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.17 Trouvez les valeurs de a, b et c telles que le système

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + cx_3 = 0 \\ bx_1 + cx_2 - 3x_3 = 1 \\ ax_1 + 2x_2 + bx_3 = 5 \end{cases}$$

a comme solution $x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2.$

Exercice 3.18 Trouvez une relation entre a, b et c pour que le système suivant soit consistant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

Exercice 3.19 Pour quelles valeurs de k est-ce que le système aura

(a) une seule solution ?

(b) aucune solution ?

(c) une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + (k^2 - 14)x_3 = k + 2 \end{cases}$$

Exercice 3.20 Trouvez les valeurs de A, B et C qui satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2 - x + 3}{(x^2 + 2)(2x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{C}{2x - 1}$$

Exercice 3.21 Trouvez une équation quadratique de la forme $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $(x, y) = (-2, 20), \quad (1, 5), \quad (3, 25)$.

Exercice 3.22 Pour quelles valeurs de k est-ce que le système aura

(a) une seule solution ?

(b) aucune solution ?

(c) une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = k \end{cases}$$

Exercice 3.23 Trouvez une équation linéaire avec comme inconnues x_1 et x_2 ayant la solution générale $x_1 = 5 + 2t, \quad x_2 = t$.

Exercice 3.24 Soit le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

(a) Quelle est la matrice des coefficients de ce système ?

(b) Quelle est la matrice augmentée de ce système ?

(c) Écrivez ce système en utilisant une notation matricielle.

Exercice 3.25 Trouvez la solution de ce système en utilisant la procédure de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 40 \\ 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 19 \\ 3x_1 - 6x_2 - 17x_3 = 41 \end{cases}$$

Exercice 3.26 Trouvez la solution de ce système en utilisant la procédure de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Exercice 3.27 Laquelle ou lesquelles des matrices suivantes n'est pas ou ne sont pas dans une forme échelonnée réduite ? Justifiez votre réponse.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Exercice 3.28 Utilisez la procédure d'élimination de Gauss pour transformer cette matrice sous une forme échelonnée.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.29 Utilisez la procédure d'élimination de Gauss-Jordan pour transformer cette matrice sous une forme échelonnée réduite.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 15 \\ 6 & -1 & -2 & -36 \\ 1 & -1 & -2 & -11 \\ -5 & -5 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.30 Utilisez la procédure d'élimination de Gauss-Jordan pour résoudre ce système.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 13 \\ 2x_1 - 4x_2 + 14x_3 - x_4 = -10 \\ 5x_1 + 11x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 59 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 39 \end{cases}$$

Exercice 3.31 Déterminez le rang de chacune des matrices suivantes.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.32 Choisissez les valeurs de a et b pour que le système qui suit

(a) n'ait aucune solution ;

(b) ait une seule solution ;

(c) ait une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - ax_2 = b \end{cases}$$

Exercice 3.33 Quelle est la solution du système dont la matrice augmentée échelonnée réduite est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Exercice 3.34 Quelle est la solution du système dont la matrice augmentée échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exercice 3.35 Quelle est la solution du système dont la matrice augmentée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

Exercice 3.36 Pour quelle(s) valeur(s) de a est-ce que le système suivant a une solution non-triviale ? Trouvez la solution générale dans ce cas.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

Chapitre

4 Inverse d'une matrice carrée

4.1 Introduction

Dans les différentes applications de l'algèbre linéaire, plusieurs problèmes se réduisent à résoudre une équation de la forme $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, où on désire déterminer $\boldsymbol{X}$. Si on traitait avec de simples nombres, la solution serait immédiate : $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$. Malheureusement, la division de matrices n'est pas une opération définie. Par contre, on peut parfois définir une matrice dite *inverse* qui peut jouer un rôle semblable. Ainsi, au lieu d'avoir une matrice inverse $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$ on peut avoir une matrice inverse obéissant l'opération suivante : $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité.[1]

Définition 4.1.1

Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ d'ordre n est dite **inversible** ou **régulière** ou encore **non singulière**, s'il existe une matrice $\boldsymbol{B}$ d'ordre n telle que : $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$ où $\boldsymbol{I}_n$ désigne la matrice unité d'ordre n ; $\boldsymbol{B}$ est appelé l'**inverse** de $\boldsymbol{A}$ et est normalement désignée par $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Une matrice carrée qui n'est pas inversible est dite **non inversible** ou **singulière**.

matrice inversible
matrice singulière

Exemple 4.1.1

Vérifiez que la matrice $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: En multipliant, on peut facilement vérifier que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_2$.

On prouvera au théorème 4.4.2 que, pour deux matrices carrées, il suffira d'avoir $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$ pour conclure que l'une est l'inverse de l'autre. En d'autres mots, une fois la démonstration fait, il ne sera plus nécessaire de vérifier également que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$.

[1] Dans ce texte, nous allons nous limiter aux matrices carrées ; pour les matrices non-carrées, il existe parfois un *inverse à gauche* (ou une infinité d'inverses) ou un *inverse à droite* (ou une infinité d'inverses), selon que le nombre de lignes soit plus grand ou plus petit que le nombre de colonnes.

Exemple 4.1.2

Démontrez que la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est singulière.

Solution: Soit $\boldsymbol{B}$ une matrice 2×2 telle que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BA}$. Pour que $\boldsymbol{B}$ soit l'inverse de $\boldsymbol{A}$, il faudrait que c_{22} soit égal à 1. Mais $c_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 0 + 0 = 0$. Il est donc impossible que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_2$ et donc $\boldsymbol{A}$ est singulière.

Nous avons déjà mentionné, dans une note au bas de page, que pour les matrices non-carrées, le concept d'une matrice inverse ne mène pas à une définition unique. Par exemple, considérez le cas suivant :

Exemple 4.1.3

Soit les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut facilement vérifier que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_2$, et donc que $\boldsymbol{A}$ est l'inverse à gauche de $\boldsymbol{B}$ (et que $\boldsymbol{B}$ est l'inverse à droite de $\boldsymbol{A}$. Par contre :

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{I}_3$$

Théorème 4.1.1

L'inverse d'une matrice carrée est unique.

Démonstration: Supposons que $\boldsymbol{A}$ a deux inverses, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$, et donc que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I}$. Nous allons démontrer que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, c'est-à-dire que l'inverse est unique. Nous avons

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{C}$$

CQFD

Ayant prouvé l'unicité de l'inverse, nous allons à partir de maintenant le dénoter par $\boldsymbol{A}^{-1}$. Également, pour tout entier $n \geq 1$, nous définissons $\boldsymbol{A}^{-n} = (\boldsymbol{A}^{-1})^n$. Le théorème suivant donne quelques propriétés utiles des inverses.

Théorème 4.1.2

Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices carrées de la même taille ($n \times n$).

(a) $\boldsymbol{I}$ est inversible et $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors $\boldsymbol{A}^{-1}$ est inversible et $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$. Notez que ceci satisfait la loi des exposants.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont inversibles, alors $\boldsymbol{AB}$ est inversible et $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

(d) Si $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ sont inversibles, alors $\boldsymbol{A}_1 A_2 \ldots \boldsymbol{A}_k$ est inversible et $(\boldsymbol{A}_1 A_2 \ldots \boldsymbol{A}_k)^{-1} = \boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} \ldots \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$ est son inverse.

(e) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors $\boldsymbol{A}^k$ est également inversible et $(\boldsymbol{A}^k)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^k$.

(f) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors $\boldsymbol{A}^\top$ est inversible et $(\boldsymbol{A}^\top)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^\top$.

(g) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible et que c est un nombre différent de zéro, alors $c\boldsymbol{A}$ est inversible et son inverse est $(c\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$.

Démonstration:

(a) Évident puisque $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$.

(b) Puisque $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, alors $\boldsymbol{A}$ est l'inverse de $\boldsymbol{A}^{-1}$ et donc $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont inversibles, alors $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{BB}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. Nous avons

$$
\begin{array}{rcll}
(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) & = & \boldsymbol{ABB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \text{associativité de la multiplication} \\
& = & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1} & \\
& = & \boldsymbol{AI}_n\boldsymbol{A}^{-1} & \\
& = & \boldsymbol{AA}^{-1} & \\
& = & \boldsymbol{I}_n &
\end{array}
$$

De la même façon, on peut démontrer que $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{I}_n$ et donc que $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ est l'inverse de $\boldsymbol{AB}$.

(d) La démonstration est semblable à celle de **(c)**.

(e) La démonstration est semblable à celle de **(c)**.

(f) La transposée de chaque terme de l'équation $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ est

$$
\begin{array}{rcccc}
& (\boldsymbol{AA}^{-1})^\top & = & (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^\top & = & \boldsymbol{I}^\top \\
\Rightarrow & (\boldsymbol{A}^{-1})^\top\boldsymbol{A}^\top & = & \boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A}^{-1})^\top & = & \boldsymbol{I}
\end{array}
$$

et donc $\boldsymbol{A}^\top$ est inversible et $(\boldsymbol{A}^\top)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^\top$.

(g) Il est facile de vérifier que $(c\boldsymbol{A})\left(\dfrac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \left(\dfrac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}\right)(c\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I}$. CQFD

Exemple 4.1.4

Sous quelle(s) condition(s) une matrice diagonale est-elle inversible ?

Solution: Soit $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$ une matrice diagonale $n \times n$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice quelconque $n \times n$ telle que

$\boldsymbol{DA} = \boldsymbol{I}$. En toute généralité, écrivons $\boldsymbol{DA} = \boldsymbol{B} = (b_{ij})$. Ainsi, nous avons

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj} = d_{ii}a_{ij}$$

puisque $d_{ik} = 0$ si $i \neq k$. Mais, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ et donc $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par conséquent, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et donc $\boldsymbol{A}$ est une matrice diagonale.

Puisque $b_{ii} = 1$, on trouve $a_{ii} = \dfrac{1}{d_{ii}}$ ce qui est possible si et seulement si $d_{ii} \neq 0 \forall i$.

Sachant que l'inverse d'une matrice diagonale est une autre matrice diagonale, et parce que les manipulations de matrices diagonales (multiplication ou addition) sont relativement plus faciles que celles de matrices arbitraire, il est parfois utile de les considérer en premier lorsqu'on veut démontrer certaines propriétés comme dans l'exemple suivant.

Exemple 4.1.5

Est-ce que la somme de deux matrices inversibles est nécessairement inversibles ?

Solution: Non. Par exemple, considérer les deux matrices diagonales (et inversibles) [a]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que leur somme est la matrice nulle qui n'est pas inversible.

[a] Un pur hasard : chacune de ces deux matrices est son propre inverse, i.e. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Ayant défini l'inverse d'une matrice, nous pouvons l'utiliser pour résoudre, en principe, des systèmes d'équations linéaires définies par le biais de matrices, tel qu'indiqué par le théorème suivant.

Théorème 4.1.3

Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice inversible $n \times n$ et $\boldsymbol{B}$ est un vecteur colonne, alors l'équation $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ a comme solution unique $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

Démonstration: Puisque $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{AA}^{-1})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ alors $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ est une solution de l'équation $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Supposons que $\boldsymbol{Y}$ soit une solution de cette équation ; alors

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AY}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

c'est-à-dire que c'est la même (et donc la seule) solution.

4.2 L'inverse d'une matrice 2×2

Nous allons maintenant procéder au calcul de l'inverse d'une matrice générale 2×2 en se servant de ce que nous avons appris jusqu'à maintenant. Dans une prochaine section, nous allons voir un algorithme qui nous permettra de calculer plus facilement les inverses.

La matrice 2×2 la plus générale peut être écrite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Écrivons son inverse comme suit :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} w & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & y \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw + bx & ay + bz \\ cw + dx & cy + dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} aw + bx = 1 \\ cw + dx = 0 \\ ay + bz = 0 \\ cy + dz = 1 \end{cases}$$

que l'on peut récrire sous la forme de deux systèmes indépendants :

$$\begin{cases} aw + bx = 1 \\ cw + dx = 0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

et

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ cy + dz = 1 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Considérons le premier de ces deux systèmes. En multipliant la première équation par $-c$ et la deuxième par a et additionnant les deux équations résultantes, on trouve

$$(ad - bc)x = -c \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-c}{ad - bc}$$

ce qui suppose que $ad - bc \neq 0$. En procédant de façon semblable pour trouver les autres inconnues, on obtient

$$y = \frac{-b}{ad - bc} \qquad w = \frac{d}{ad - bc} \qquad z = \frac{a}{ad - bc}$$

qui sont toutes des solutions possibles pourvu que $ad - bc \neq 0$. On en conclut que l'inverse de $\boldsymbol{A}$ existe si[2] $ad - bc \neq 0$ et est alors donné par

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[2]Notez que c'est la même condition que nous avions trouvé pour l'exercice 3.15 ; ceci n'est pas un hasard.

Nous avons donc trouvé l'inverse d'une matrice 2×2, s'il existe. Mais, pour ce faire, nous avons dû résoudre un système de 4 équations linéaires. En suivant cette procédure, pour trouver l'inverse d'une matrice $n \times n$, nous aurions besoin de résoudre un système de n^2 équations, ce qui devient rapidement peu pratique à faire. Il existe une meilleure façon de faire les choses en utilisant les propriétés des matrices élémentaires que nous allons voir dans la section suivante.

4.3 Matrices élémentaires

Lorsque nous avons discuté de la procédure d'élimination de Gauss, nous avons introduit les opérations élémentaires sur les lignes. Il est possible de définir des matrices, connues sous le nom de **matrices élémentaires** qui, par le biais de la multiplication matricielle, jouent le même rôle. Une matrice élémentaire est obtenue à partir de la matrice identité en performant *une seule* opération élémentaire sur les lignes.

matrices élémentaires

De façon **générale**, nous désignerons ces matrices élémentaires soit par la lettre $\boldsymbol{E}$ ou par cette lettre avec un indice, $\boldsymbol{E}_k$, lorsqu'il y aura plus d'une matrice élémentaire à considérer.

De façon **spécifique**, lorsque nous le pourrons, nous désignerons ces matrices élémentaires par une notation spéciale[3] qui donnera l'information complète sur la matrice, à l'exception de sa taille qui sera normalement connue de par le contexte. C'est ainsi que :

- la matrice qui correspond à l'échange de deux lignes, $L_i \leftrightarrow L_j$, sera désignée par $\boldsymbol{E}_{i\leftrightarrow j}$;
- la matrice qui correspond au remplacement d'une ligne donnée par son multiple, $nL_i \to L_i, n \neq 0$, sera désignée par $\boldsymbol{E}_i(n)$;
- la matrice qui correspond au remplacement d'on ligne donnée par l'addition de celle-ci avec le multiple d'une autre ligne, $L_i + nL_j \to L_i \quad$ avec $n \neq 0$, sera désignée par $\boldsymbol{E}_{ij}(n)$.

Une matrice élémentaire est obtenue à partir de la matrice identité en performant *une seule* opération élémentaire sur les lignes.

Exemple 4.3.1

Identifiez les matrices suivantes et écrivez l'opération sur les lignes qui lui correspond.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[3] À noter qu'il n'y a pas de notation standard pour identifier les matrices élémentaires. Nous avons inventé notre propre notation pour les besoins de ce manuel.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: [a]

(a) $\boldsymbol{E}_1(2): \quad 2L_1 \to L_1.$

On peut vérifier ceci de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) $\boldsymbol{E}_{2\leftrightarrow 3}: \quad L_2 \leftrightarrow L_3.$

On peut vérifier ceci de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

(c) $\boldsymbol{E}_{13}(4): \quad L_1 + 4L_3 \to L_1.$

On peut vérifier ceci de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 4c_1 & a_2 + 4c_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

[a] Avec un peu de pratique, on peut identifier le type de matrice élémentaire sans avoir à faire de multiplication avec une autre matrice. En cas de doute, il suffit de prendre un simple vecteur colonne $\boldsymbol{X}$ et de multiplier $\boldsymbol{EX}$. Dans cet exemple, nous utilisons des matrices arbitraires plus générale pour trouver la solution.

On peut également facilement vérifier que cette équivalence entre la multiplication par une matrice élémentaire et les opérations élémentaires sur les rangées d'une matrice $\boldsymbol{A}$ est toujours vérifiée peu importe la taille de la matrice $\boldsymbol{A}$, et aussi bien pour les matrices carrées que rectangulaires. Cependant, en général, nous allons nous limiter aux matrices carrées.

Dans la pratique, nous n'allons pas multiplier par des matrices élémentaires pour résoudre des systèmes d'équations ou trouver l'inverse de matrices. Cependant, nous allons utiliser les matrices élémentaires pour démontrer certains théorèmes parce que la manipulation symbolique de matrices est beaucoup plus simple que l'utilisation d'opérations élémentaires successives.

Pour chaque opération élémentaire sur les lignes, nous pouvons faire une opération inverse ; l en découle que chaque matrice élémentaire a un inverse et cet inverse est une matrice élémentaire :

— Pour l'échange de deux lignes, $L_i \leftrightarrow L_j$, l'opération inverse consiste à faire l'échange à nouveau ; donc $\boldsymbol{E}_{i\leftrightarrow j}^{-1} = \boldsymbol{E}_{i\leftrightarrow j}$.

— Pour le remplacement d'une ligne donnée par son multiple αL_i avec $\alpha \neq 0$, l'opération inverse consiste à remplacer cette nouvelle ligne, L_i' par son multiple $\alpha^{-1}L_i' = L_i$; donc $\boldsymbol{E}_i^{-1}(n) = \boldsymbol{E}_i(n^{-1})$.
— Pour le remplacement d'une ligne donnée par l'addition de celle-ci avec le multiple d'une autre ligne $L_i + \beta L_j \to L_i$ avec $\beta \neq 0$, il suffit de remplacer le résultat, L_i' par l'addition de celle-ci avec le multiple $-\beta$ de l'autre, $L_i' - \beta L_j \to L_i' = L_i$; donc $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(\beta) = \boldsymbol{E}_{ij}(-\beta)$.

Théorème 4.3.1

Chaque matrice élémentaire a un inverse, et cet inverse est également une matrice élémentaire.

Démonstration: Voir l'explication dans le texte.

Exemple 4.3.2

Sans faire de calculs compliqués, et en vous basant uniquement sur la correspondance des opérations élémentaires sur les rangées, déterminez l'inverse des matrices élémentaires suivantes.

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

$$\boldsymbol{E}_1^{-1} = \boldsymbol{E}_1 \qquad \boldsymbol{E}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Sur l'existence d'un inverse

Le théorème qui suit établit des équivalences utiles au sujet des conditions pour établir l'existence de l'inverse d'une matrice.

Théorème 4.4.1

Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée $n \times n$, alors les quatre énoncés suivants sont équivalents :

(a) $\boldsymbol{A}$ est inversible.
(b) L'équation $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ a seulement la solution triviale.
(c) $\boldsymbol{A}$ peut être obtenue de $\boldsymbol{I}$ en utilisant seulement des opérations élémentaires sur les lignes.
(d) $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = n$.

Démonstration:
Nous allons démontrer que, si l'une de ces propositions est vraie, alors ceci implique que les autres le

sont. Pour faire cette démonstration, il suffit de prouver que

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que $\boldsymbol{A}$ soit inversible et que $\boldsymbol{X}_0$ est une solution de l'équation $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$. En d'autres termes, $\boldsymbol{AX}_0 = \mathbf{0}$. En multipliant de chaque côté de cette dernière équation par $\boldsymbol{A}^{-1}$, nous avons :

$$\begin{array}{rrcl} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}_0 & = & \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{0} \\ \Rightarrow & \boldsymbol{X}_0 & = & \mathbf{0} \end{array}$$

c'est-à-dire que seule la solution triviale existe.

$(b) \Rightarrow (c)$: Soit $\boldsymbol{M}$ la matrice résultant de la procédure transformant $\boldsymbol{A}$ sous une forme échelonnée réduite (donc, en utilisant seulement des opérations élémentaires sur les lignes). Nous avons deux possibilités : soit que $\boldsymbol{M}$ a une, ou plusieurs lignes nulles, ou soit que $\boldsymbol{M}$ n'a pas de lignes nulles, et donc que $\boldsymbol{M}$ est la matrice identité, $\boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{M}$ a une, ou plusieurs lignes nulles, alors il existe une infinité de solutions pour l'équation $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$, ce qui contredit l'hypothèse (b). Par conséquent, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$.

$(c) \Rightarrow (d)$: $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = \operatorname{rg} \boldsymbol{I} = n$.

$(d) \Rightarrow (a)$: Supposons que $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = n$. Ceci veut dire que $\boldsymbol{A}$ peut être obtenue à partir de $\boldsymbol{I}$ en faisant des opérations élémentaires sur les rangées. Puisque les opérations élémentaires sur les rangées sont équivalentes à multiplier par des matrices élémentaires, nous avons

$$\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\ldots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

pour un nombre k fini d'opérations élémentaires. Appelons ce produit de matrice élémentaires $\boldsymbol{B}$. Nous avons donc

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

Puisque chaque matrice élémentaire est inversible, le produit de ces matrices élémentaires est également inversible. Donc, $\boldsymbol{A}$ est l'inverse de $\boldsymbol{B}$ et il découle que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, et donc que $\boldsymbol{A}$ est inversible.

Il existe un autre énoncé équivalent à ceux du théorème précédent, tel que décrit dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.2

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices carrées et que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ alors $\boldsymbol{B}$ est l'inverse de la matrice carrée $\boldsymbol{A}$ (et vice-versa).

Démonstration: Étant donné la matrice $\boldsymbol{B}$, cherchons un vecteur colonne $\boldsymbol{X}$ tel que $\boldsymbol{BX} = \mathbf{0}$. En multipliant de chaque côté par $\boldsymbol{A}$, on trouve $\boldsymbol{ABX} = \mathbf{0}$. Mais, puisque $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, ceci se réduit à $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$, et donc $\boldsymbol{BX} = \mathbf{0}$ a seulement la solution triviale. Par le théorème 4.4.1, ceci veut dire que $\boldsymbol{B}$ est inversible. Écrivons l'inverse de $\boldsymbol{B}$ comme étant $\boldsymbol{C}$. Nous avons donc

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{C} & = & \boldsymbol{IC} & \text{propriété de l'identité} \\ & = & (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} & \text{par définition de } \boldsymbol{AB} \\ & = & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) & \text{propriété de la multiplication} \\ & = & \boldsymbol{A} & \text{puisque } \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{I} \end{array}$$

et donc, $\boldsymbol{A}$ est l'inverse de $\boldsymbol{B}$. CQFD

4.5 Algorithme pour trouver un inverse

Une application immédiate des théorèmes de la section précédente, nous permet d'obtenir un algorithme pour trouver l'inverse d'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ de taille $n \times n$. Pour ce faire, nous introduisons la matrice augmentée de taille $n \times 2n$

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}]$$

En multipliant par la gauche par $\boldsymbol{A}^{-1}$, et en utilisant la notation de multiplications par blocs, on trouve :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] &= \left[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}\right] \\ &= \left[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{A}^{-1}\right] \end{aligned}$$

De façon complètement équivalente, si on écrit $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\dots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1$, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\dots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] &= [\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\dots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\dots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{I}] \\ &= \left[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{A}^{-1}\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'en faisant des opérations élémentaires sur les lignes de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}]$ jusqu'à ce que $\boldsymbol{A}$ soit transformée en matrice identité, alors $\boldsymbol{I}$ sera, par ces mêmes opérations sur les lignes, transformées en l'inverse de $\boldsymbol{A}$.

Illustrons ceci par un exemple.

Exemple 4.5.1

Trouvez l'inverse de la matrice suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Solution: En premier, nous écrivons la matrice augmentée $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puis, nous utilisons des opérations élémentaires successives sur les lignes pour transformer le bloc de gauche en la matrice identité

$$\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 + 2L_2 \to L_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$-L_3 \to L_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} L_1 - 3L_3 \to L_1 \\ L_2 + 3L_3 \to L_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_1 - 2L_2 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Le bloc de gauche est la matrice identité ; le bloc de droite est donc la matrice inverse de $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On aurait pu arriver à trouver cet algorithme à partir de ce qu'on avait trouvé pour le cas de l'inverse d'une matrice 2 par 2. Nous avions alors deux équations :

$$\begin{cases} aw + bx = 1 \\ cw + dx = 0 \end{cases} \quad 4.2.1 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} ay + bz = 0 \\ cy + dz = 1 \end{cases} \quad 4.2.2$$

Ces deux équations correspondent aux matrices augmentées

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{array}\right] \qquad \text{et} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 1 \end{array}\right]$$

qui sont identiques, sauf pour la colonne des termes constants. L'algorithme que nous utilisons regroupe ces deux colonnes de termes constants pour faire une seule matrice augmentée.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4.6 Exercices divers

Exercice 4.1 Vérifiez en multipliant $\boldsymbol{A}$ et son inverse que la réponse trouvée à l'exemple 4.5.1 est correcte.

Exercice 4.2 Si $\boldsymbol{E}$ est une matrice élémentaire, démontrez que $E^\top$ est également une matrice élémentaire du même type.

Exercice 4.3 Trouvez deux matrices 2×2 qui sont singulières et dont la somme n'est pas singulière.

Exercice 4.4 Trouvez deux matrices 2×2 qui sont inversibles et dont la somme n'est pas inversible.

Exercice 4.5 Calculez $\boldsymbol{A}^{-3}$ si

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.6 Trouvez $\boldsymbol{A}$ si

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.7 Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices carrées telles que $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$. Démontrez que si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

Exercice 4.8 Pour chacune des matrices suivantes, identifiez s'il s'agit d'une matrice élémentaire et, si c'est le cas, identifiez la par la notation spécifique (par exemple $\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 5}$). S'il ne s'agit pas d'une matrice élémentaire, expliquez pourquoi.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.9 Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice 4×3. Déterminez la matrice élémentaire $\boldsymbol{E}$ qui, agissant comme un multiplicateur à gauche sur $\boldsymbol{A}$, c'est-à-dire, $\boldsymbol{EA}$, performe l'opération suivante sur $\boldsymbol{A}$:

(a) Multiplie la deuxième rangée de $\boldsymbol{A}$ par -2.

(b) Ajoute 3 fois la deuxième rangée de $\boldsymbol{A}$ à la quatrième rangée de $\boldsymbol{A}$.

(c) Interchange la première et la troisième rangée de $\boldsymbol{A}$.

Exercice 4.10 Soit les matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Trouvez les matrices élémentaires $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4$ qui font en sorte que :

(a) $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(b) $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$.

(c) $\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$.

(d) $\boldsymbol{E}_4\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$.

(e) Calculez $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_4$.

(f) Calculez $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_4$.

Exercice 4.11 Trouvez l'inverse de :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 4.12 Trouvez l'inverse de :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.13 Trouvez l'inverse de :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.14 En utilisant l'algorithme $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] \Rightarrow [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{A}^{-1}]$ et en faisant le minimum d'opérations sur les rangées, démontrez que la matrice suivante n'a pas d'inverse :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Chapitre

5 Espaces vectoriels

Dans ce chapitre nous allons introduire les espaces vectoriels. L'approche que nous allons suivre va être plus mathématiquement rigoureuse que d'habitude, dans le but d'illustrer le niveau de détails qu'un mathématicien doit utiliser pour bâtir des preuves formelles. De plus, nous allons introduire essentiellement toute la matière dans une seule section fournissant un **résumé** du chapitre, sans fournir un seul exemple autre que l'exemple initial. Ceci nous permettra de nous concentrer sur le cheminement logique des diverses définitions. Par la suite, nous reverrons chaque concept que nous illustrerons de divers exemples. Ce type de présentation, basée uniquement sur des définitions et des théorèmes, sans fournir d'exemples, est une façon de faire qui est habituellement utilisée en mathématiques avancées. C'est une façon concise de faire les choses ... mais qui demande un niveau d'abstraction très élevé.

Avant de présenter ce résumé en détails . . . nous allons, en premier, faire un résumé du résumé !

5.1 Introduction : le résumé du résumé

Dans la section suivante, nous allons commencer par définir un ensemble V d'éléments qui obéissent à 10 axiomes basés sur une définition d'addition de ces éléments entre eux ou de multiplication par des nombres. Après avoir défini quelques termes supplémentaires, nous verrons qu'il y a une relation des différents éléments de V qui fait en sorte que l'on peut en choisir un nombre n fixe qui peuvent être combinés pour obtenir *tous* les autres éléments de V, chaque élément étant obtenu par une combinaison unique. Chaque combinaison unique est caractérisée par n nombres ; on peut écrire ces n nombres dans une matrice $n \times 1$, c'est-à-dire un vecteur. Ainsi, chaque élément de V est associé de façon unique à un vecteur. Pour cette raison, nous appellerons les éléments de V des *vecteurs*. Quant à V, on dira que c'est un espace *vectoriel*

5.2 Introduction : le résumé

Nous commençons par la définition d'un **espace vectoriel**.

espace vectoriel

Définition 5.2.1

Un **espace vectoriel** est un ensemble V d'objets appelés *vecteurs*, sur lesquels on définit deux opérations, soit *l'addition* ainsi que *la multiplication par un scalaire*, et pour lequel les axiomes suivant sont satisfaits pour tous les vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ dans V et pour tous les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1. La somme de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, dénotée par $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, est dans V.
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
3. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
4. Il existe dans V un **vecteur nul**, dénoté par $\mathbf{0}$, tel que $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$.
5. Pour chaque $\boldsymbol{u}$ dans V, il existe un vecteur $-\boldsymbol{u}$ dans V tel que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$.
6. La multiplication de $\boldsymbol{u}$ par un scalaire α est dénotée par $\alpha\boldsymbol{u}$ et est dans V.
7. $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$
8. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$
9. $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

Par exemple, soit $P_2(t)$ l'ensemble des polynômes réels du deuxième degré, et soit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ trois polynômes de cet ensemble, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in P_2(t)$. De façon plus explicite, nous avons

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= a_0+a_1t+a_2t^2 \\
\boldsymbol{v} &= b_0+b_1t+b_2t^2 \\
\boldsymbol{w} &= c_0+c_1t+c_2t^2 \\
&\quad \text{avec} \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \quad \forall i
\end{aligned}$$

Soit également α, β, qui apparaissent dans la définition d'un espace vectoriel, également des réels. On peut alors facilement vérifier que les 10 axiomes qui définissent un espace vectoriel sont satisfaits par les polynômes réels du deuxième degré. Par conséquent, $P_2(t)$ constitue un espace vectoriel et chaque polynôme qui appartient à cet ensemble est un **vecteur**. Ces vecteurs ne ressemblent pas aux vecteurs auxquels vous êtes habitués et qu'on représente par une flèche dans le plan ou dans l'espace.

vecteur

Exercice 5.1 Démontrez que chacun des 10 axiomes dans la définition d'un espace vectoriel est satisfait par l'ensemble $P_2(t)$.

Ayant défini un espace vectoriel, on étend la définition à une partie de cet espace qu'on désignera sous le nom de **sous-espace vectoriel**.

Définition 5.2.2

Soit W un *sous-ensemble* d'un espace vectoriel V. On appelera W un **sous-espace vectoriel**[a] de V si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Le vecteur zéro de V est dans W.
2. W est fermé pour l'addition ; $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in W$.
3. W est fermé pour la multiplication par un scalaire : $\boldsymbol{w} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{w} \in W$ pour $k \in \mathbb{K}$, l'ensemble de scalaires utilisés pour la définition de V.

[a] On omet parfois le mot *vectoriel* pour simplement écrire **sous-espace** pour signifier la même chose.

On peut facilement vérifier qu'un sous-ensemble W de V qui satisfait les trois propriétés mentionnées dans la définition ci-dessus est un espace vectoriel.

On introduit maintenant une autre définition, celle d'une **combinaison linéaire**.

Définition 5.2.3

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et soient les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. Un vecteur quelconque de la forme

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{K}$$

est appelé une **combinaison linéaire** des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$

À partir de ces définitions, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.2.1

Soit S un sous-ensemble non-vide d'un espace vectoriel V. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de S, dénotée par $\mathrm{Vect}(S)$, est un sous-espace vectoriel de V contenant S. De plus, si W est un autre sous-espace vectoriel de V contenant S, alors $\mathrm{Vect}(S) \subseteq W$.

Nous fournirons une démonstration plus tard. Ce qui est à retenir pour l'instant est la définition de $\mathrm{Vect}(S)$. Nous introduisons deux autres définitions.

Définition 5.2.4

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ sont dits **linéairement dépendants** s'il existe des scalaires $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ dont au moins un est différent de zéro tels que

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

Autrement, on dit que ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Définition 5.2.5

La dimension d'un espace vectoriel V est n ($\dim V = n$) s'il existe n vecteurs linéairement **indépendants**, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ qui engendrent V, c'est-à-dire $\text{Vect}(\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}) = V$. L'ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ est appelé une **base** de V.

À partir de ces diverses définitions, il est possible de démontrer la validité du **théorème de l'unicité de la représentation**.

théorème de l'unicité de la représentation

Théorème 5.2.2

Soit $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ une base pour l'espace vectoriel V. Alors, pour chaque vecteur $\boldsymbol{v}$ dans V, il existe un ensemble unique de scalaires, $a_1, \ldots, a_n$ tel que

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

Ayant démontré que, pour chaque vecteur dans V avec une base donnée B, il existe un ensemble unique de scalaire, nous utilisons ceci pour définir les **coordonnées**.

coordonnées

Définition 5.2.6

Soit $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ une base pour l'espace vectoriel V, et $\boldsymbol{v}$ un vecteur quelconque de V. Les **coordonnées de $\boldsymbol{v}$ par rapport à la base** B sont les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

Avec cette définition, on utilise la notation $[\boldsymbol{v}]_B$ pour représenter la **matrice des coordonnées**[1] de $\boldsymbol{v}$ (par rapport à la base B) :

matrice des coordonnées

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Ceci est un résultat très important : on vient d'établir une correspondance une-à-une entre tout vecteur de V (de dimension n) et un vecteur correspondant de $\mathbb{K}^n$, où on aura habituellement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On dit qu'un espace vectoriel V de dimension n défini sur le corps $\mathbb{K}$ est isomorphe[2] à $\mathbb{K}^n$. Puisqu'on a habituellement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et puisqu'on vient d'établir une correspondance entre les *éléments* d'un espace *vectoriel* V et les *vecteurs* de $\mathbb{R}^n$, on peut donc comprendre pourquoi on a choisit d'utiliser le terme *vecteur* comme synonyme d'élément de V et qu'on utilise l'adjectif *vectoriel* pour caractériser ce même espace.

[1] Puisqu'il s'agit d'une matrice de taille $n \times 1$, on dit parfois qu'il s'agit du **vecteur des coordonnées**.

[2] Le mot *isomorphe* signifie *ayant la même forme*.

5.3 Définition d'un espace vectoriel

Dans la section précédente, nous avons fait un survol rapide des concepts importants de ce chapitre, y compris la définition d'un espace vectoriel. Nous allons maintenant revoir le tout de façon plus détaillée, en commençant avec une définition d'un espace vectoriel où l'on donne un nom aux différents axiomes.

Définition 5.3.1

Un **espace vectoriel** est un ensemble V d'objets appelés *vecteurs*, sur lesquels on définit deux opérations, soit *l'addition* ainsi que *la multiplication par un scalaire*, et pour lequel les axiomes suivant sont satisfaits pour tous les vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ dans V et pour tous les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1. Fermeture sous l'addition : $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$.
2. Commutativité de l'addition : $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. Associativité de l'addition : $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
4. Existence d'un élément neutre de l'addition : $\exists \mathbf{0} \in V : \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$.
5. Existence d'un inverse additif : $\forall \boldsymbol{u} \in V \quad \exists -\boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.
6. Fermeture sous la multiplication : $\alpha \boldsymbol{u} \in V$.
7. Distributivité sur l'addition de vecteurs : $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{v}$
8. Distributivité de l'addition de scalaires : $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{u}$
9. Associativité de la multiplication de scalaires : $\alpha(\beta \boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$
10. Élément neutre de la multiplication par un scalaire : $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Il est important de noter que nous n'avons pas défini de multiplication d'un vecteur par un autre : ceci n'est pas une propriété requise pour avoir un espace vectoriel. **Important :** notez la distinction de la notation entre le chiffre (scalaire) zéro, 0, et le vecteur nul $\mathbf{0}$.

Dans ce qui suit, nous allons habituellement supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est l'ensemble des scalaires qui est sous-entendu lorsqu'on considère la multiplication d'un vecteur par un scalaire ; techniquement, ceci veut dire qu'on se limite seulement aux *espaces vectoriels **réels***.

À partir de ces axiomes, on peut prouver rigoureusement des propriétés qui sont évidentes.

Théorème 5.3.1

Soit V un espace vectoriel et α un réel. Les propriétés suivantes peuvent être démontrées.

(a) $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

(b) $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Démonstration:

(a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \mathbf{0} &= \boldsymbol{u} && \text{élément neutre de l'addition ; axiome 4} \\ \mathbf{0} + \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u} && \text{commutativité de l'addition ; axiome 2} \end{aligned}$$

CQFD

(b)

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}) & = & \mathbf{0} & \text{inverse additif ; axiome 5} \\ -\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u} & = & \mathbf{0} & \text{commutativité de l'addition ; axiome 2} \end{array}$$

CQFD

Théorème 5.3.2

Soit V un espace vectoriel et α un réel. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

(a) $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

(b) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(c) $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

(d) Si $\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ alors soit $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Démonstration:

(a)

$$\begin{array}{rcll} 0\boldsymbol{u} & = & [0+0]\boldsymbol{u} & 0 = 0{+}0 \text{ dans } \mathbb{R} \\ 0\boldsymbol{u} & = & 0\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{u} & \text{distributivité de l'addition de scalaire ; axiome 8} \\ 0\boldsymbol{u}+(-0\boldsymbol{u}) & = & [0\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{u}]+(-0\boldsymbol{u}) & \text{addition de } -0\boldsymbol{u} \text{ de chaque côté.} \\ 0\boldsymbol{u}+(-0\boldsymbol{u}) & = & 0\boldsymbol{u}+[0\boldsymbol{u}+(-0\boldsymbol{u})] & \text{associativité de l'addition ; axiome 3} \\ \mathbf{0} & = & 0\boldsymbol{u}+\mathbf{0} & \text{inverse additif ; axiome 5} \\ \mathbf{0} & = & 0\boldsymbol{u} & \text{élément neutre de l'addition ; axiome 4} \end{array}$$

CQFD

Les autres démonstrations sont laissées sous forme d'exercice.

Exercice 5.2 Soit V un espace vectoriel et α un réel. Dans ce qui suit, on démontre que $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0} \in V$.

$$\begin{array}{rcll} \alpha\mathbf{0} & = & \alpha(\mathbf{0}+\mathbf{0}) & \text{par l'axiome \_\_\_} \\ \alpha\mathbf{0} & = & \alpha\mathbf{0}+\alpha\mathbf{0} & \text{par l'axiome \_\_\_} \\ \alpha\mathbf{0}+(-\alpha\mathbf{0}) & = & [\alpha\mathbf{0}+\alpha\mathbf{0}]+(-\alpha\mathbf{0}) & \text{addition de } (-\alpha\mathbf{0}) \text{ de chaque côté.} \\ \alpha\mathbf{0}+(-\alpha\mathbf{0}) & = & \alpha\mathbf{0}+[(\alpha\mathbf{0})+(-\alpha\mathbf{0})] & \text{par l'axiome \_\_\_} \\ \mathbf{0} & = & \alpha\mathbf{0}+\mathbf{0} & \text{par l'axiome \_\_\_} \\ \mathbf{0} & = & \alpha\mathbf{0} & \text{par l'axiome \_\_\_} \end{array}$$

CQFD

Déterminez quel axiome a été utilisé dans chaque cas.

Exercice 5.3 Soit V un espace vectoriel et α un réel. Démontrez que $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

Suggestion : Démontrez en premier que $\boldsymbol{u} + (-1\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.

Exercice 5.4 Soit V un espace vectoriel et α un réel. Démontrez que si $\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ alors soit $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Exercice 5.5 Soit V un espace vectoriel. Démontrez que $-\boldsymbol{u}$ est *l'unique vecteur* dans V tel que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.

Exercice 5.6 Démontrez que l'ensemble des matrices $m \times n$ ayant des coefficients réels, et qui sont multipliés par des scalaires (également réels) est un espace vectoriel. Pour faire cette démonstration, vous devez prouvez que chaque axiome est satisfait, basé sur les différentes définitions et les théorèmes pertinents.

On note que le résultat de l'exercice 5.6 implique que les *vecteurs* habituels de $\mathbb{R}^n$ (soit les matrices $n \times 1$ ou $1 \times n$) forment un espace vectoriel comme on s'y attendait.

Exercice 5.7 Démontrez que l'ensemble des fonctions sur les nombres réels est un espace vectoriel. Pour faire cette démonstration, vous devez prouvez que chaque axiome est satisfait, basé sur les différentes définitions et les théorèmes pertinents. Soit les fonctions $f, g \in V$ et le scalaire $k \in \mathbb{R}$; l'addition de fonction est définie de la façon suivante :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et la multiplication par un scalaire est :

$$(kf)(x) = kf(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice 5.8 Soit l'ensemble V de tous les couples de nombres réels :

$$V = \{(x, y) \quad ; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Démontrez, dans chacun des cas suivants, que V n'est pas un espace vectoriel si l'on définit l'addition dans V et la multiplication par un scalaire k de la façon suivante :

(a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ et $k(a, b) = (ka, b)$.

(b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ et $k(a, b) = (ka, kb)$.

(c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ et $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$.

Suggestion : : dans chacun des cas, il suffit de démontrer que l'un des axiomes n'est pas satisfait.

5.4 Sous-espace vectoriel

Définition 5.4.1

Soit W un *sous-ensemble* d'un espace vectoriel V. On appelera W un **sous-espace vectoriel** [a] de V si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Le vecteur zéro de V est dans W.
2. W est fermé pour l'addition : $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in W$.
3. W est fermé pour la multiplication par un scalaire : $\boldsymbol{w} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{w} \in W$ pour $k \in \mathbb{K}$, l'ensemble de scalaires utilisés pour la définition de V.

[a] On omet parfois le mot *vectoriel* pour simplement écrire **sous-espace** pour signifier la même chose.

On peut facilement vérifier qu'un sous-ensemble W de V qui satisfait les trois propriétés mentionnées dans la définition ci-dessus est un espace vectoriel.

Pour tout espace vectoriel V, il existe deux sous-espaces vectoriels triviaux : le sous-ensemble contenant seulement le vecteur nul, $\{\mathbf{0}\}$, appelé *sous-espace nul*, ainsi que *sous-espace total*, constitué de l'espace V lui-même

Exemple 5.4.1

(a) Est-ce que $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$?

(b) Est-ce que l'ensemble des vecteurs W dont la dernière composante est nulle

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$?

(c) Est-ce que $P_1(t)$, l'ensemble des polynômes du premier degré est un sous-espace de $P_2(t)$?

Solution:

(a) Non, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des matrices ayant deux coefficients alors que ceux de $\mathbb{R}^3$ en ont trois ; les éléments de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(b) Oui, on peut vérifier que les éléments de W sont des éléments de $\mathbb{R}^3$, que W contient l'élément nul, qu'il est fermé sous l'addition et la multiplication par un scalaire. En fait, au lieu de faire la démonstration séparée de la fermeture sous l'addition et la multiplication par un scalaire, on peut combiner les deux et vérifier que toute combinaison de vecteurs de la forme $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{u} \in W$

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

(c) Oui, on peut vérifier que les éléments de $P_1(t)$ sont des éléments de $P_2(t)$, que $P_(t)$ contient l'élément nul, qu'il est fermé sous l'addition et la multiplication par un scalaire.

Exercice 5.9 Est-ce que l'ensemble des monômes $at, a \in \mathbb{R}$ est un sous-espace de $P_2(t)$?

Exercice 5.10 Soit U et W deux sous-espaces d'un espace vectoriel V. Est-ce que leur intersection, $U \cap W$, est un sous-espace ?

Exercice 5.11 L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels forme un espace vectoriel. Est-ce que l'ensemble des matrices 2×2 symétriques à coefficients réels forme un sous-espace ?

Exercice 5.12 L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels forme un espace vectoriel. Est-ce que l'ensemble des matrices 2×2 anti-symétriques à coefficients réels forme un sous-espace ?

Exercice 5.13 L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels forme un espace vectoriel. Est-ce que l'ensemble des matrices 2×2 telles que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ forme un sous-espace ?

Suggestion : Considérez les matrices I et $2I$.

Exercice 5.14 Si m et b sont deux constantes réelles, est-ce qu'il est possible que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ mx + b \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

soit un sous-espace de $\mathbb{R}^2$? Justifiez votre réponse.

5.5 Combinaisons linéaires

Définition 5.5.1

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et soient les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. Un vecteur quelconque de la forme

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{K}$$

est appelé une **combinaison linéaire** des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$

Exemple 5.5.1

Soient les matrices

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui sont trois vecteurs de l'espace vectoriel des matrices 2×2. La matrice $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de ces trois vecteurs

$$M = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$$

Exemple 5.5.2

Écrire le vecteur $\boldsymbol{v} = (1, -2)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1)^\top$ et $\boldsymbol{e}_2 = (1, 2)^\top$.

Solution: Nous voulons écrire $\boldsymbol{v}$ sous la forme $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, avec x et y deux scalaires à déterminer. Ceci nous donne donc deux équations :

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & -2 \end{array}$$

Nous écrivons la matrice augmentée de ce système et la transformons sous une forme échelonnée réduite pour trouver la solution.

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$L_2 - L_1 \to L_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$L_1 - L_2 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Nous avons donc $x, y = 4, -3$, et $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$

Exercice 5.15 Écrire le vecteur $\boldsymbol{v} = (1, -2, 5)^\top$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 2, 3)^\top$ et $\boldsymbol{e}_3 = (2, -1, 1)^\top$.

Exercice 5.16 Pour quelle valeur de c le vecteur $\boldsymbol{v} = (1, c, -8)^\top$ de $\mathbb{R}^3$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{u} = (3, 0, 2)^\top$ et $\boldsymbol{w} = (2, -1, -5)^\top$?

Exercice 5.17 Écrire le polynôme réel $-3+4t+t^2$ comme une combinaison linéaire des polynômes $\boldsymbol{p}_1 = 5-2t+t^2, \boldsymbol{p}_2 = 3t-2t^2$ et $\boldsymbol{p}_3 = 3+t$.

5.6 Générateurs

Comme nous l'avons vu, il est possible d'exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs. En fait, si on prend un ensemble quelconque de vecteurs et qu'on considère toute les combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs, on obtient un espace vectoriel comme le théorème suivant le démontre.

Théorème 5.6.1

Soit S un sous-ensemble non-vide d'un espace vectoriel V.

1. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de S, dénotée par $\text{Vect}(S)$, est un sous-espace vectoriel de V contenant S.
2. Si W est un autre sous-espace vectoriel de V contenant S, alors $\text{Vect}(S) \subseteq W$.

Démonstration: Puisque S est non-vide, il doit contenir au moins un vecteur que nous dénotons par $\boldsymbol{v}$. Parmi les combinaisons linéaires qui incluent ce vecteur, on a $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Ainsi, $\mathbf{0} \in \text{Vect}(S)$ ce qui est une des trois conditions qu'on doit avoir pour que $\text{Vect}(S)$ soit un sous-espace vectoriel.

De façon plus générale, nous aurons $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in S$ où il est possible que $n = 1$. Parmi les combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs on retrouve $1\boldsymbol{v}_j \quad \forall j$ et donc tous les vecteurs de S sont inclus dans $\text{Vect}(S)$.

Considérons les deux vecteurs suivants qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de S et donc des éléments de $\text{Vect}(S)$:

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{w} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

Nous avons :

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = (a_1+b_1)\boldsymbol{v}_1 + (a_2+b_2)\boldsymbol{v}_2 + \ldots + (a_n+b_n)\boldsymbol{v}_n$$

et donc $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) \in \text{Vect}(S)$, c'est-à-dire que $\text{Vect}(S)$ est fermé sous l'addition ce qui est la deuxième condition requise pour que $\text{Vect}(S)$ soit un sous-espace vectoriel. De plus

$$k\boldsymbol{u} = ka_1\boldsymbol{v}_1 + ka_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + ka_n\boldsymbol{v}_n$$

est une autre combinaison linéaire des vecteurs de S et donc $k\boldsymbol{u} \in \text{Vect}(S)$, c'est-à-dire que $\text{Vect}(S)$ est fermé sous la multiplication par un scalaire ce qui est la troisième et dernière condition requise pour que $\text{Vect}(S)$ soit un sous-espace vectoriel. $\text{Vect}(S)$ est donc un sous-espace vectoriel de V.

Pour ce qui est de la deuxième partie de ce théorème, supposons que W soit un sous-espace de V qui contient S. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, on peut démontrer que $\text{Vect}(S)$ est un sous-espace de W, et donc que $\text{Vect}(S) \subseteq W$.

Une autre façon d'exprimer la deuxième partie du théorème précédent est de dire que $\mathrm{Vect}(S)$ est le plus petit sous-espace de V contenant S.

On dit de $\mathrm{Vect}(S)$ qu'il est le **sous-espace engendré** par S. Par convention, on considère que $\mathrm{Vect}(\{\}) = \{\mathbf{0}\}$.

sous-espace engendré

Étant donné un sous-espace W de V, un **ensemble générateur** de W est un ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de vecteurs de W tels que $W = \mathrm{Vect}(\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\})$.

ensemble générateur

Exemple 5.6.1

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un ensemble générateur pour le sous-espace $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. À noter qu'il ne s'agit pas du plus petit ensemble générateur pour ce sous-espace.

Exemple 5.6.2

Quelle condition doivent a, b, c satisfaire pour que le vecteur $(a, b, c)^\top \in \mathbb{R}^3$ appartienne à l'espace engendré par $\boldsymbol{u} = (2, 1, 0)^\top, \boldsymbol{v} = (3, 0, 2)^\top, \boldsymbol{w} = (3, 3, -2)^\top$?

Solution: Écrivons le vecteur $(a, b, c)^\top$ comme une combinaison linéaire des trois autres vecteurs :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 3z \\ x + 3z \\ 2y - 2z \end{pmatrix}$$

Nous écrivons la matrice augmentée équivalente et nous utilisons l'élimination de Gauss-Jordan pour trouver la condition recherchée.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 3 & a \\ 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 2 & -2 & c \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & b \\ 2 & 3 & 3 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}c \end{array}\right]$$

$$L_2 - 2L_1 \to L_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 3 & -3 & a - 2b \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}c \end{array}\right]$$

$$L_3 - \frac{1}{3}L_2 \to L_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 3 & -3 & a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}(a - 2b) \end{array}\right]$$

Nous voyons donc que la troisième variable (z) est une variable libre et que nous devons avoir $0 = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}(a - 2b)$ que l'on peut récrire $0 = 3c - 2a + 4b$. Notez que ce ne sont donc pas tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui peuvent être engendrés par $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, mais seulement un sous-espace.

Exercice 5.18 Montrez que les vecteurs $\boldsymbol{u} = (1,2,3)^\top, \boldsymbol{v} = (0,1,2)^\top, \boldsymbol{w} = (0,0,1)^\top$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.19 Soit l'ensemble $S = \{(1,2,0)^\top, (0,1,0)^\top\}$. Montrez que $\mathrm{Vect}(S)$ est le sous-ensemble $\{(a,b,0)^\top; a,b \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

5.7 Dépendance et indépendance linéaire

Définition 5.7.1

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ sont dits **linéairement dépendants** s'il existe des scalaires $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ dont au moins un est différent de zéro tels que

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Autrement, on dit que ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Si des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement dépendants, on dit que l'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est un **ensemble dépendant** ; de la même façon, si de tels vecteurs sont linéairement indépendants, on dira de leur ensemble qu'il s'agit d'un **ensemble indépendant**.

ensemble dépendant

ensemble indépendant

5.7.1 Que veut-on dire par dépendance linéaire ?

Supposons que l'on ait des vecteurs qui soient linéairement dépendants ; c'est-à-dire qu'il existe une solution à l'équation

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

avec au moins un des k_i qui est différent de zéro. Puisqu'on peut diviser par zéro sans problèmes, faisons ceci :

$$\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_i + \ldots + \frac{k_n}{k_i}\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Ceci veut dire qu'on peut donc écrire le vecteur $\boldsymbol{v}_i$ comme une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\boldsymbol{v}_i = -\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{v}_1 + \ldots$$

Si on a des vecteurs linéairement indépendants, alors tous les k_i sont zéro et on ne peut pas diviser l'équation par un d'entre eux pour exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple 5.7.1

Dans l'exemple 5.6.1, les trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Par exemple, il est facile de vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.7.2

Soit P_3 l'espace des polynômes réels de degré ≤ 3. Déterminez si $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3 \in P_3$ sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants si

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 &= 1 + 5t - 3t^2 + t^3 \\ \boldsymbol{p}_2 &= 2 + 8t - t^2 + t^3 \\ \boldsymbol{p}_3 &= 5 + 9t - 4t^2 + 2t^3 \end{aligned}$$

Solution: Écrivons une combinaison linéaire de ces trois polynômes que nous égalons au polynôme nul :

$$x\boldsymbol{p}_1 + y\boldsymbol{p}_2 + z\boldsymbol{p}_3 = \mathbf{0}$$

Ce faisant, on obtient les quatre équations suivantes :

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 5z & = & 0 & \text{pour les termes constants} \\ 5x & + & 8y & + & 9z & = & 0 & \text{pour les termes en } t \\ -3x & - & y & - & 4z & = & 0 & \text{pour les termes en } t^2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 & \text{pour les termes en } t^3 \end{array}$$

On peut écrire la matrice augmentée correspondante et résoudre ce système.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_2 - 5L_1 \to L_2 \\ L_2 + 3L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -16 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{8}L_2 \to L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} L_3 - 5L_2 \to L_3 \\ L_4 + L_2 \to L_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

De cette dernière matrice, on obtient $z = 0$, ce qui nous permet ensuite d'obtenir $y = 0$ et $x = 0$. Seule la solution triviale étant permise, les vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 5.20 Soit P_3 l'espace des polynômes réels de degré ≤ 3. Déterminez si $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3 \in P_3$ sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants si

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 &= 3 - 2t + 4t^2 + t^3 \\ \boldsymbol{p}_2 &= 4 - t + 6t^2 + t^3 \\ \boldsymbol{p}_3 &= 7 - 8t + 8t^2 + 3t^3 \end{aligned}$$

Exercice 5.21 Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. Déterminez si les matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ sont dépendantes si :

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5.22 Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ des vecteurs indépendants. Montrez que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ sont aussi trois vecteurs indépendants.

Exercice 5.23 Prouvez que tout ensemble de vecteurs comprenant le vecteur nul, $\mathbf{0}$, est linéairement dépendant.

Exercice 5.24 Prouvez que les vecteurs non nuls $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si au moins l'un d'entre eux, $\boldsymbol{v}_i$ est une combinaison linéaire des autres :

$$v_i = \sum_{j \neq i} k_j \boldsymbol{v}_j$$

Exercice 5.25 Prouvez qu'un ensemble contenant un sous-ensemble dépendant est lui-même dépendant.

Exercice 5.26 Prouvez qu'un sous-ensemble quelconque d'un ensemble indépendant est un sous-ensemble indépendant.

5.8 Base et dimension

Définition 5.8.1

La dimension d'un espace vectoriel V est n ($\dim V = n$) s'il existe n vecteurs linéairement **indépendants**, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ qui engendrent V, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}) = V$. L'ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ est appelé une **base** de V.

Exemple 5.8.1

Une base pour $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Exemple 5.8.2

Déterminez si les vecteurs suivants forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(a) $(1, 1, 1)^\top$ et $(1, 2, 3)^\top$

(b) $(1, 1, 2)^\top, (1, 2, 5)^\top$ et $(5, 3, 4)^\top$

Solution:

(a) Non, car une base de $\mathbb{R}^3$ doit être un ensemble de 3 éléments puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(b) Nous avons 3 vecteurs pour un espace à trois dimensions : ces vecteurs forment une base si et seulement si ils sont indépendants. Dénotons les vecteurs par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (1, 1, 2)^\top \\ \boldsymbol{v} &= (1, 2, 5)^\top \\ \boldsymbol{w} &= (5, 3, 4)^\top \end{aligned}$$

Si les vecteurs sont linéairement indépendants, alors la seule solution du système d'équations linéaires défini par

$$x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} = 0$$

est $x = y = z = 0$. Pour trouver la ou les solutions de ce système, nous écrivons la matrice augmentée correspondante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

On peut résoudre ceci de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_3 - 3L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

et on peut voir qu'on a une matrice échelonnée avec une ligne nulle : le système a donc une infinité de solutions et les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Par conséquent, ces vecteur ne forment pas une base pour $\mathbb{R}^3$.

Ce résultat aurait pu être obtenu d'une autre façon.

Premièrement, on note que lorsqu'on fait des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, on se trouve à faire des combinaisons linéaires de ces lignes. Deuxièmement, si des vecteurs sont linéairement dépendants, ceci veut dire qu'on peut exprimer au moins un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres. En soustrayant cette combinaison linéaire du vecteur lui-même, on obtient le vecteur nul. Ceci suggère donc de mettre plutôt les vecteurs dans les lignes d'une matrice et de faire des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice : si on obtient une ligne nulle, alors les vecteurs sont linéairement dépendants. Si on peut mettre cette matrice sous une forme échelonnée sans lignes nulles, alors les vecteurs sont linéairement indépendants. Utilisons cette approche par comparaison avec ce que nous avons fait ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$L_3 + 2L_2 \to L_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme l'une de lignes de la matrice échelonnée est nulle, cela veut dire qu'un des vecteurs pouvait être exprimé comme une combinaison linéaire des deux autres ; ces trois vecteurs sont donc dépendants (comme on l'avait déjà démontré) et ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.27 Déterminez si les vecteurs suivants forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(a) $(1,1,1)^\top, (1,2,3)^\top$ et $(2,-1,1)^\top$

(b) $(1,1,1)^\top, (1,2,3)^\top, (2,-1,1)^\top$ et $(0,0,1)^\top$

Exercice 5.28 Soit V l'espace vectoriel des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels. Quelle est la dimension de cet espace ? Écrivez une base pour cet espace.

Exemple 5.8.3

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

Quelle est la dimension de l'espace des solutions ? S'agit-il d'un espace vectoriel ?

Solution: La solution unique de ce système est un point dans $\mathbb{R}^2$; la dimension de cet espace est donc 0. Ce point peut être représenté par un vecteur unique qui n'est pas le vecteur nul ; par conséquent, ce n'est pas un espace vectoriel.

Exemple 5.8.4

Soit l'équation linéaire

$$x + y = b$$

Quelle est la dimension de l'espace des solutions ? S'agit-il d'un espace vectoriel ?

Solution: Ceci est l'équation d'une droite ; l'espace des solutions est donc de dimension 1.

Si on paramétrise la variable y par un nombre réel t, on peut écrire une solution générale sous forme vectorielle comme étant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

Pour que ceci soit un espace vectoriel, il faut que le vecteur nul appartienne à l'espace des solutions, ce qui est possible seulement si $b = 0$. Dans ce cas, l'espace des solutions sera engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans les exemples précédents, on note que, pour que l'espace des solutions soit un espace vectoriel, il faut que l'on ait un système d'équations linéaires **homogène**.

Exemple 5.8.5

Trouvez une base et la dimension de l'espace W des solutions du système homogène :

$$\begin{cases} v + 2w - x + 2y + 3z = 0 \\ 2v + 4w + 5y + 4z = 0 \\ 3v + 6w + x + 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

Solution: Écrivons la matrice augmentée du système et amenons-là sous une forme échelonnée réduite.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_3 - 2L_2 \to L_3 \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}L_2 \to L_2 \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_1 + L_2 \to L_1 \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nous avons 3 variables libres (w, y, z) que nous pouvons paramétriser par 3 nombres réels (r, s, t) : la dimension de l'espace des solutions est donc 3. Si on écrit les équations linéaires correspondant à la matrice réduite en utilisant les variables libres, nous aurons

$$\begin{cases} v &= -2r &- &2\frac{1}{2}s &- &2t \\ x &= & - &\frac{1}{2}s &+ &t \end{cases}$$

L'espace des solutions sera constitué de vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r - 2\frac{1}{2}s - 2t \\ r \\ -\frac{1}{2}s + t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une base, la façon la plus simple est de donner la valeur 1 à tour de rôle à chacune des variables libres et zéro aux autres, de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 5.29 Trouvez une base et la dimension de l'espace W des solutions de chacun des systèmes homogènes suivants.

(a) $$\begin{cases} x &+ &3y &+ &2z &= &0 \\ x &+ &5y &+ &z &= &0 \\ 3x &+ &5y &+ &8z &= &0 \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} x - 2y + 7z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 5.30 Soit P l'espace engendré par les polynômes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= 1 - 2t + 2t^2 + t^3 \\ \boldsymbol{v} &= 4 - t + 3t^2 + t^3 \\ \boldsymbol{w} &= 7 + 7t - t^2 - 2t^3 \end{aligned}$$

Trouvez une base et la dimension de P.

Il est important de biens comprendre la différence entre les questions où l'on demande de déterminer la dimension d'un espace engendré par des vecteurs (ou de déterminer si un groupe de vecteurs engendrent un espace particulier comme $\mathbb{R}^3$) et les questions où l'on demande de trouver la dimension de l'espace des solutions d'un système d'équations linéaires. Nous allons considérer un exemple très simple, soit celui où on a les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sans faire aucun calculs, on peut tout de suite conclure que ces trois vecteurs ne peuvent pas engendrer $\mathbb{R}^3$ parce qu'on ne peut pas trouver de combinaisons linéaires telles que la troisième composante des vecteurs sera différente de zéro.

Alternativement, on observe que $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ et donc qu'on n'a que 2 vecteurs linéairement indépendants alors qu'on a besoin de trois vecteurs linéairement indépendants pour engendrer $\mathbb{R}^3$.

Supposons que l'on veuille démontrer que l'on n'a pas 3 vecteurs linéairement indépendants de la façon habituelle (lorsque les valeurs numériques sont telles que la solution n'est pas évidente) ; on écrira

$$x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$$

ce qui nous donne le système d'équations :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x \quad\quad + z = 0 \\ \quad\quad y + z = 0 \\ \quad\quad\quad\;\; 0 = 0 \end{cases}$$

On voit tout de suite que la matrice augmentée sous sa forme réduite aura une ligne nulle :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

d'où l'on conclut que les 3 vecteurs n'étaient pas linéairement indépendants. Également, puisque la matrice augmentée sous sa forme réduite a deux lignes non-nulles, on en conclut qu'on avait deux vecteurs linéairement indépendants, ce qu'on savait déjà ; ces deux vecteurs engendreront donc un espace vectoriel à deux dimensions (le plan xy dans ce cas-ci).

Revenons au système d'équations ci-dessus et supposons que l'on demande quelle sera la dimension de l'espace des **solutions**. On note que la troisième variable est une variable libre qu'on peut paramétriser par t, que l'on aura

$$\begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & -t \end{array}$$

et que l'espace des solutions peut être écrit comme :

$$t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme on n'a qu'un paramètre de libre, la dimension de l'espace des solutions sera égale à 1. Une base pour cet espace vectoriel peut être choisie en fixant la valeur du paramètre t ; par exemple, on peut choisir $t = -1$ et obtenir la base :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

5.9 Coordonnées

Avant de définir ce qu'on entend par **coordonnées**, nous considérons le **théorème de l'unicité de la représentation**.

coordonnées
théorème de l'unicité de la représentation

Théorème 5.9.1

Soit $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ une base pour l'espace vectoriel V. Alors, pour chaque vecteur $\boldsymbol{v}$ dans V, il existe un ensemble unique de scalaires, $a_1, \ldots, a_n$ tel que

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

Démonstration: Puisque B est une base, par définition tout vecteur $\boldsymbol{v}$ peut être exprimé par une telle combinaison linéaire. Supposons que $\boldsymbol{v}$ puisse être exprimé par une autre combinaison linéaire :

$$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{e}_n$$

Si l'on soustrait l'une de l'autre ces deux expressions, on obtient

$$0 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (a_n - b_n)\boldsymbol{e}_n$$

Puisque les $\boldsymbol{e}_i$ forment une base, ils sont linéairement indépendants ; donc, par définition les coefficients de cette dernière équation sont tous zéros :

$$a_i - b_i = 0 \qquad \forall i$$

et donc la décomposition de $\boldsymbol{v}$ en une composition linéaire des $\boldsymbol{e}_i$ existe et elle est unique.

Ayant démontré que, pour chaque vecteur dans V avec une base donnée B, il existe un ensemble unique de scalaire, nous utilisons ceci pour définir les **coordonnées**.

coordonnées

Définition 5.9.1

Soit $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ une base pour l'espace vectoriel V, et $\boldsymbol{v}$ un vecteur quelconque de V. Les **coordonnées de $\boldsymbol{v}$ par rapport à la base** B sont les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

Avec cette définition, on utilise la notation $[\boldsymbol{v}]_B$ pour représenter la **matrice des coordonnées**[3] de $\boldsymbol{v}$ (par rapport à la base B) : $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

matrice des coordonnées

Exemple 5.9.1

Trouvez les coordonnées de $\boldsymbol{v} = (2, 3, 4)^\top$ par rapport à la base $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ si :

(a) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution:

(a) Cet exemple est trivial puisque B est la base **canonique**. Procédons quand même comme si ce n'était pas le cas. On veut trouver x, y, z tels que $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Ceci nous donne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'où l'on obtient $x = 2, y = 3, z = 4$ et donc $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

[3] Puisqu'il s'agit d'une matrice de taille $n \times 1$, on dit parfois qu'il s'agit du **vecteur des coordonnées**.

(b) On veut trouver x, y, z tels que $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Ceci nous donne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$$

d'où l'on obtient $z = 4$, puis, en substituant dans $3 = y+z$, on trouve $y = -1$, et ensuite $2 = x+y+z = x + (-1+4)$ ce qui nous donne $x = -1$, et donc $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Exercice 5.31 Soit V l'espace des matrices symétriques réelles 2×2. Trouvez le vecteur des coordonnées de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 5.32 Soit V l'espace des matrices réelles 2×2. Trouvez le vecteur des coordonnées de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Finalement, pour tout espace vectoriel, il existe une base *naturelle* ; on appelle cette base la **base canonique**

Définition 5.9.2

La **base canonique** est la base telle que, pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$, les coordonnées de $\boldsymbol{v}$ sont données par les composantes mêmes (coefficients) qui constituent $\boldsymbol{v}$.

Exemple 5.9.2

(a) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des deux vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) La base canonique des matrice 2×2 est l'ensemble des matrices suivantes :

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) La base canonique des polynômes du deuxième degré, $P_2(t)$ est l'ensemble des monômes suivants : $\boldsymbol{e}_1 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_2 = t, \qquad \boldsymbol{e}_3 = t^2$

5.10 Exercices divers

Exercice 5.33 L'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels forme un espace vectoriel. Est-ce que l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels dont la trace est égale à zéro forme un sous-espace ?

Exercice 5.34 L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels forme un espace vectoriel. Est-ce que l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels dont le déterminant est égal à zéro forme un sous-espace ? Le déterminant d'une matrice $\boldsymbol{A}_{2\times 2}$ est $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Après avoir préparé la première version de ce manuel, j'ai lu la deuxième édition d'un manuel[4] utilisé pour un cours d'introduction à l'algèbre linéaire dans plusieurs autres universités, pour des étudiants de toutes les disciplines y compris ceux qui se dirigent en mathématiques Dans la préface de ce manuel, quelques phrases m'ont frappé et je crois qu'elles pourraient servir à vous encourager. Je vais les citer telles qu'elles sont écrites (en anglais) :

Every teacher of linear algebra knows that the students "hit the wall" when the notion of an abstract vector space is introduced. One reason for this is that they are coping simultaneously with two new ideas : the concept of an abstract structure, and mastering difficult notions like spanning, independence, and linear transformations. This double jeopardy is difficult to deal with for students, even the most talented ones.

On pourrait traduire comme suit :

Chaque enseignant d'algèbre linéaire sait que les étudiants "frappent un mur" lorsque la notion d'espace vectoriel abstrait est introduite. Une raison pour ceci est qu'ils ont à composer simultanément avec deux nouvelles idées : le concept d'une structure abstraite, et d'apprendre à maitriser des notions difficiles tels que la génération d'un espace à partir d'une base, l'indépendance linéaire et les transformations linéaires. Composer avec ce double défi est difficile pour les étudiants, même pour les plus talentueux.

L'auteur du livre en question a choisi, comme plusieurs autres auteurs de livres semblables, de mettre ce matériel à la toute fin du livre. Lorsque j'ai pensé à l'organisation du cours, j'ai choisi délibérément d'organiser la présentation pour introduire ces concepts le plus tôt possible, justement parce que ces concepts étaient les plus difficiles. Ainsi, vous aurez plus de temps pour absorber la matière et l'intégrer avec le reste du cours. Vous aurez également l'occasion de répondre à des questions sur ce sujet lors d'un test, qui vous servira de préparation pour l'examen final. Vous verrez que d'avoir 4 ou 5 semaines pour absorber des concepts tels que les transformations linéaires, les espaces vectoriels, etc., les rend beaucoup moins intimidants que si vous les rencontriez seulement une semaine avant l'examen final.

Plus tard, j'ai pu constater que les éditions plus récentes du livre de Nicholson introduisaient les espaces vectoriels plus tôt, ce que j'ai pris comme une indication que l'approche que j'avais choisie était la bonne.

[4] W. Keith Nicholson, *Elementary Linear Algebra*

Chapitre

6 Transformations linéaires

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les espaces vectoriels et démontrés comment ils étaient isomorphes à $\mathbb{R}^n$. Dans ce chapitre nous allons considérer certaines propriétés des fonctions sur les espaces vectoriels. Pour illustrer ceci, et sans perte de généralité, nous allons considérer $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel.

Définition 6.1.1

Une **transformation** (ou **fonction** ou **application**) T de $\mathbb{R}^n$ (le domaine de définition) vers $\mathbb{R}^m$ (le **codomaine**, ou ensemble d'arrivée) est une règle qui associe à chaque vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ un vecteur $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ de $\mathbb{R}^m$. De façon résumée, on écrit parfois ceci comme $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Pour chaque $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{R}^n$, on dit de $T(\boldsymbol{v})$ que c'est l'**image** de $\boldsymbol{v}$. L'ensemble de toutes les images $T(\boldsymbol{v})$ est appelé l'image de la transformation T, ou tout simplement l'image de T.

image

Définition 6.1.2

Une transformation T est une **transformation linéaire** si, pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dans le domaine de T :

1. $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$
2. $T(c\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v})$, où c est un scalaire.

On peut résumer ces deux propriétés en une seule, tel que démontré dans le théorème suivant.

Théorème 6.1.1

Soit T une transformation de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. La transformation T est linéaire si et seulement si

$$T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$$

quels que soient les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans le domaine de définition de T et quels que soient les scalaires c et d.

Démonstration: Si T est une transformation linéaire, alors, en appliquant successivement les propriétés 1 et 2, nous avons

$$T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = T(c\boldsymbol{u}) + T(d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$$

Inversement, si

$$T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$$

en choisissant $c = d = 1$, nous obtenons la première propriété, et en choisissant $d = 0$, nous obtenons la deuxième.

On remarque que nous avons également $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, en choisissant $c = 0$ dans la deuxième propriété de la définition d'une transformation linéaire.

Définition 6.1.3

Une **transformation matricielle** est une transformation T qui est calculée par le produit matriciel $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ où $\boldsymbol{M}$ est une matrice $m \times n$.

En raison des propriétés des matrices, toutes les transformations matricielles sont des transformations linéaires.

Exercice 6.1 Prouvez que toutes les transformations matricielles sont des transformations linéaires.

Si la matrice $\boldsymbol{M}$ d'une transformation linéaire a n colonnes, le domaine de définition est $\mathbb{R}^n$. Si la matrice $\boldsymbol{M}$ d'une transformation linéaire a m lignes, le codomaine est un sous-ensemble $\mathbb{R}^m$.

Exemple 6.1.1

Exemple de transformation matricielle $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Théorème 6.1.2

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Il existe une matrice unique, $\boldsymbol{M}$, appelée la **matrice canonique** de la transformation, telle que $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration: Si on choisit la base canonique comme étant l'ensemble des colonnes de I_n, et donc $I_n = (\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n)$, on a

$$\boldsymbol{x} = I_n\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

Utilisant la linéarité de T, on a

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}) &= T(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e}_n) \\ &= \underbrace{[T(\boldsymbol{e}_1)\cdots T(\boldsymbol{e}_n)]}_{\boldsymbol{M}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$$

6.2 Transformation du plan

Nous allons tout d'abord considérer les transformations du plan, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Notre but, en faisant ceci, est de donner des exemples simples où les calculs sont faciles à suivre et où il est facile d'illustrer l'effet des transformations. Graphiquement, nous allons généralement considérer une seule configuration initiale de quatre points formant un carré et démontrer l'effet de la transformation sur ces quatre points, ainsi que sur l'aire de la figure qu'ils composent.

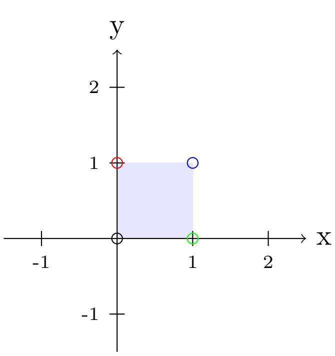


Figure 6.1 Figure initiale.

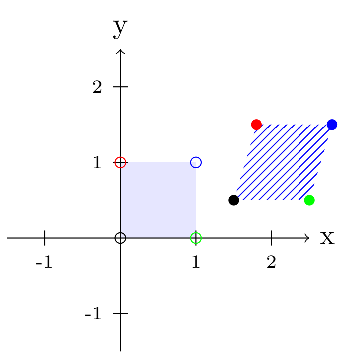


Figure 6.2 La figure initiale, en bleu pale, est transformée et représentée en bleu foncé hachuré.

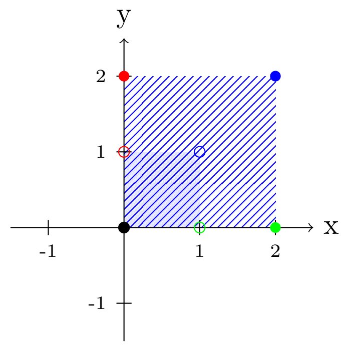


FIGURE 6.3 Dilatation.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

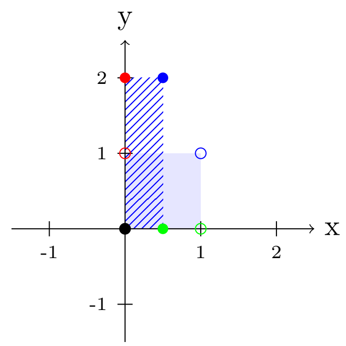


FIGURE 6.4 Dilatation verticale et contraction horizontale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Pour les transformations linéaires du plan, la matrice la plus générale [1] a la forme

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Parmi toutes les combinaisons possibles, nous allons maintenant considérer quelques cas particuliers. Veuillez noter que l'on peut combiner des transformations linéaires : il suffit de multiplier les matrices correspondant aux transformations individuelles.

6.2.1 Changements d'échelle : dilatation et contraction

Une transformation linéaire du plan peut résulter en un changement d'échelle, soit une contraction ou une dilatation, si la matrice de transformation est une matrice diagonale, avec des éléments positifs sur la diagonale :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \qquad d_i > 0$$

6.2.2 Cisaillement

Une matrice correspondant à une transformation de **cisaillement horizontal** a la forme

cisaillement horizontal

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, une matrice correspondant à une transformation de **cisaillement vertical** a la forme

cisaillement vertical

[1] Il est facile de vérifier qu'une telle transformation linéaire fait en sorte que le vecteur nul, $(0,0)^\top$, ne changera pas. Par conséquent, la figure 6.2 ne représente pas une transformation linéaire du plan ; c'est une transformation affine.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

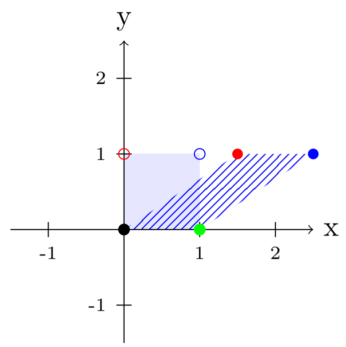


Figure 6.5 Cisaillement horizontal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1\frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix}$$

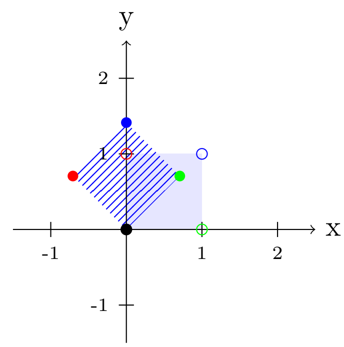


Figure 6.6 Rotation de $\pi/4$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}$$

6.2.3 Rotation

Une matrice correspondant à une rotation d'un angle θ des axes autour de l'origine a la forme

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Notez que, par convention, on utilise habituellement la lettre $\boldsymbol{R}$ pour dénoter des rotations.

6.2.4 Réflexion

La matrice correspondant à une réflexion par rapport à l'axe vertical est la matrice :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice correspondant à une réflexion par rapport à l'axe horizontal est la matrice :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.2.5 Combinaison de transformations

En faisant des combinaisons de transformations simples, on peut arriver à en créer des complexes. L'exemple le plus simple est possiblement celui de la matrice $-\boldsymbol{I}$, qui correspond à une réflexion par rapport aux deux axes ce qui peut être vu comme une première réflexion faite par rapport à

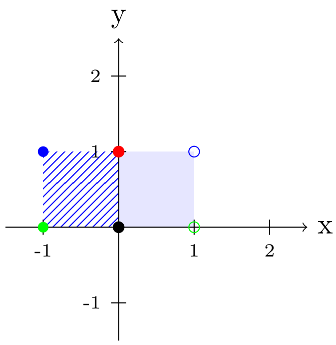


FIGURE 6.7 Réflexion par rapport à l'axe des y.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

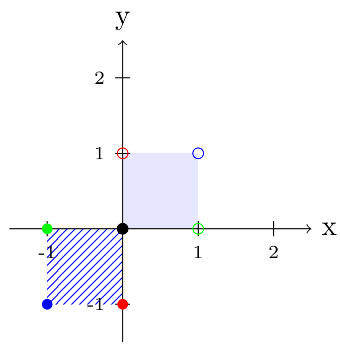


FIGURE 6.8 Réflexion par rapport aux deux axes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

l'axe horizontal, suivie par une deuxième réflexion, faite par rapport à l'axe vertical. Veuillez noter que le résultat n'est pas le même que si nous avions fait une seule réflexion par rapport à la droite $y = -x$.

Exercice 6.2 Trouvez la matrice qui correspond à une réflexion par rapport à la droite $y = -x$. Faites un diagramme qui illustre ceci.

Un exemple un peu plus intéressant est celui d'une réflexion par rapport à un axe quelconque passant par l'origine [2]. Pour produire une réflexion par rapport à un axe quelconque passant par l'origine, vous devriez pouvoir vous convaincre qu'il suffit de suivre la procédure suivante.

1. Déterminer l'angle θ que fait l'axe par rapport à l'axe horizontal.
2. Faire une rotation de $-\theta$.
3. Faire une réflexion par rapport à l'axe horizontal
4. Faire une rotation de θ pour revenir à l'orientation initiale.

Comme ceci correspond à trois transformations, la transformation peut être exprimée sous la forme d'un produit de trois matrices comme suit :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

À noter que l'ordre des opérations est de droite à gauche !

[2] La raison pour laquelle on mentionne que l'axe passe par l'origine est pour que l'on ait $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ce qui est requis pour que la transformation soit linéaire.

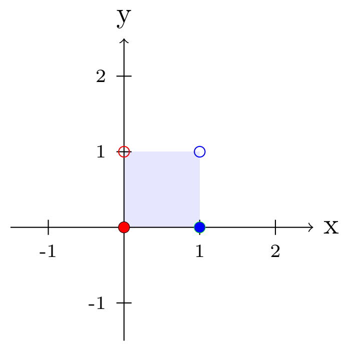


Figure 6.9 Projection sur l'axe des x. Les points noir et rouge sont confondus, ainsi que les points bleu et vert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

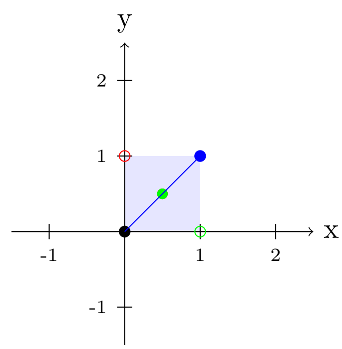


Figure 6.10 Projection sur la droite $y = x$. Les points rouge et vert sont confondus et le carré est devenu un segment de droite.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

6.2.6 Projections

Les projections dans le plan consistent à calculer la composante d'un vecteur selon un axe et de lui donner cette valeur. Le cas le plus simple est celui de la projection sur l'axe des x (ou, de façon semblable, sur l'axe des y) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce type de transformation linéaire n'est pas inversible : une fois la projection sur l'axe des x effectuée, nous perdons toute connaissance de la valeur initiale de la coordonnée y, et donc, nous ne pouvons pas la retrouver.

Une autre façon d'exprimer ceci est de noter que la matrice qui effectue la projection n'a pas d'inverse.

6.3 Translations

Une translation est une transformation qui correspond à l'addition d'un vecteur constant à tous les vecteurs d'un domaine : $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$. Une telle transformation n'est pas une transformation linéaire : $T\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$ sauf dans le cas trivial où $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$. On désigne sous le nom de *transformation affine* une telle transformation et on peut la représenter sous forme matricielle comme suit :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

ce qui ne correspond pas à notre définition d'une transformation matricielle. On peut cependant utiliser un truc pour représenter une telle transformation par une transformation matricielle. Puisqu'on a déjà prouvé que les transformations matricielles sont des transformations linéaires, le truc en question fait en sorte que la transformation devient une transformation linéaire.

Considérons une translation dans le plan. [3] Le truc consiste à considérer ce plan comme un sous-espace d'un espace vectoriel de dimension plus élevée. Par exemple, on peut supposer que notre plan est le plan $z = 1$ dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, au lieu de considérer des vecteurs arbitraires en 2-dimensions, on considère des vecteurs dans ce plan en trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice de translation prend donc la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et correspond donc à un cisaillement parallèle au plan xy. Ce genre de *truc* peut être généralisé et fait partie de l'étude de la géométrie projective, domaine qui est très utilisé en informatique lorsqu'on veut produire des images perçues comme des projections d'objets en trois dimensions mais qui va au-delà du contenu de ce cours.

6.4 Exercices divers

Exercice 6.3 Déterminez la position du point $(-1, 3)$ suite à une rotation de $\pi/2$ du plan par rapport à l'origine.

Exercice 6.4 Déterminez la position du point $(\sqrt{3}, 1)$ suite à une rotation de $\pi/6$ du plan par rapport à l'origine.

Exercice 6.5 Déterminez la position du point $(2, \sqrt{3})$ suite à une rotation de $\pi/3$ du plan par rapport à l'origine.

Exercice 6.6 Déterminez la position du point $(1, -2)$ suite à une rotation de $\pi/4$ du plan par rapport à l'origine.

Exercice 6.7 Faites un graphique de la courbe $x^2 - xy + y^2 = 9$ ainsi que de la même courbe suite à une rotation de $\pi/4$. (Obtenez l'équation de la nouvelle courbe.)

Exercice 6.8 Vérifiez que $\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(\gamma) = \boldsymbol{R}(\gamma)\boldsymbol{R}(\theta)$

Exercice 6.9 On appelle **invariant** une quantité qui ne change pas sous une transformation. Prouvez que la distance entre deux points est un invariant sous une rotation du plan par rapport à l'origine.

Exercice 6.10 Déterminez quelle sera l'équation de la droite $y = mx + b$ sous la transformation

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.11 Déterminez quelle sera l'équation de la droite $y = mx + b$ sous la transformation

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.12 Déterminez quelle sera l'équation de la droite $y = mx + b$ sous la transformation

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.13 La transformation du plan correspondant à la matrice élémentaire

$$\boldsymbol{E}_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a < -1$$

correspond à une dilatation horizontale accompagnée d'une réflexion par rapport à l'axe verticale. Identifiez les 12 autres types de transformations du plan correspondant aux diverses matrices élémentaires 2×2. Il y

[3] On peut facilement généraliser la procédure décrite pour un espace de dimension arbitraire.

en a 13 au total : 10 pour les matrices $\boldsymbol{E}_i(c)$, 1 chacune pour les matrices de type $\boldsymbol{E}_{ij}(a)$ et une pour la matrice $\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 2}$.

Exercice 6.14 Soit la transformation $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$. Trouvez un vecteur $\boldsymbol{x}$ dont l'image est le vecteur $\boldsymbol{y}$ si

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminez si le vecteur $\boldsymbol{x}$ est unique.

Exercice 6.15 Soit la transformation $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$. Trouvez un vecteur $\boldsymbol{x}$ dont l'image est le vecteur $\boldsymbol{y}$ si

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminez si le vecteur $\boldsymbol{x}$ est unique.

Exercice 6.16 Soit la transformation $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$. Trouvez un vecteur $\boldsymbol{x}$ dont l'image est le vecteur $\boldsymbol{y}$ si

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminez si le vecteur $\boldsymbol{x}$ est unique.

Exercice 6.17 Soit la transformation $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$. Trouvez un vecteur $\boldsymbol{x}$ dont l'image est le vecteur $\boldsymbol{y}$ si

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminez si le vecteur $\boldsymbol{x}$ est unique.

Exercice 6.18 Soit $\boldsymbol{R}_z(\alpha)$ une matrice de rotation autour de l'axe des z (donc dans le plan $x - y$) dans $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note que cette matrice appliquée à un vecteur ne change pas sa composante z. On peut définir de façon semblable les matrices $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$ et $\boldsymbol{R}_y(\alpha)$.

(a) Trouvez une expression pour $\boldsymbol{R}_x(\pi/2)$.

(b) Trouvez une expression pour $\boldsymbol{R}_y(\pi/2)$.

(c) Calculez le commutateur $[\boldsymbol{R}_x(\pi/2), \boldsymbol{R}_y(\pi/2)]$.

(d) (Optionel) Faites un dessin qui illustre la situation de la partie (c).

Suggestion : Au besoin, vous pouvez consulter Wikipedia pour trouver la forme exacte des matrices de rotation.

Chapitre

7 Déterminants

À chaque matrice carrée $\boldsymbol{A}$, on peut associer un scalaire, appelé le **déterminant** de la matrice et dénoté soit par $\det(\boldsymbol{A})$ ou par $|\boldsymbol{A}|$. Nous avons la même notation lorsque nous avons une matrice sous forme explicite : **déterminant**

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice 1×1 est simplement le coefficient :

$$\det(a) = |a| = a$$

À noter qu'en dépit de la notation des barres verticales, il ne s'agit pas d'une valeur absolue ! Dans ce qui suit, nous allons définir le déterminant d'un manière récursive, à partir de la définition ci-dessus pour une matrice 1×1. Mais, auparavant, il est utile de définir deux termes.

7.1 Mineur et cofacteur

Soit une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ de taille $n \times n$. Soit $\boldsymbol{M}_{ij}$ la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\boldsymbol{A}$.

Exemple 7.1.1

Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

. À partir de cette matrice, en éliminant une ligne et une colonne, on peut définir 9 matrices dont les trois suivantes :

$$\boldsymbol{M}_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Définition 7.1.1

Soit une matrice carrée $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ de taille $n \times n$. On appelle le **mineur** de l'élément a_{ij} le déterminant de la matrice carrée $\boldsymbol{M}_{ij}$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\boldsymbol{A}$.

Exemple 7.1.2

Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. À partir de cette matrice, en éliminant une ligne et une colonne, on peut définir 9 mineurs associés au neufs éléments a_{ij} tel qu'illustré par les trois exemples suivants :

$$a_{11} \to |\boldsymbol{M}_{11}| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$a_{12} \to |\boldsymbol{M}_{12}| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$a_{33} \to |\boldsymbol{M}_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercice 7.1 Obtenez les 6 autres mineurs pour l'exemple 7.1.2.

Définition 7.1.2

Soit une matrice carrée $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ de taille $n \times n$. On appelle le **cofacteur** de l'élément a_{ij}, dénoté par $\mathrm{Cof}_{ij}(\boldsymbol{A})$, le déterminant de la matrice carrée $\boldsymbol{M}_{ij}$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\boldsymbol{A}$ multiplié par le facteur $(-1)^{i+j}$.

$$\mathrm{Cof}_{ij}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{M}_{ij}|$$

Remarques :

1. Le cofacteur, $\mathrm{Cof}_{ij}(\boldsymbol{A})$, est un scalaire, et que $\boldsymbol{M}_{ij}$ est une matrice.
2. Les facteurs de $(-1)^{i+j}$ sont dans une forme d'échiquier dans une matrice, avec les $+$ sur la diagonale principale

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 7.1.3

Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. À partir de cette matrice, en éliminant une ligne et une colonne, on peut définir 9 cofacteurs associés au neufs coefficients de la matrice tel qu'illustré par les trois exemples suivants [a]

$$\mathrm{Cof}_{11}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{1+1}|\boldsymbol{M}_{11}| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Cof}_{12}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{1+2} = -|\boldsymbol{M}_{12}| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Cof}_{33}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{3+3} = |\boldsymbol{M}_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

[a] Comme nous n'avons pas encore défini le déterminant d'une matrice 2×2, nous ne pouvons pas compléter entièrement les calculs.

Exercice 7.2 Obtenez les 6 autres cofacteurs pour l'exemple 7.1.3.

7.2 Le déterminant

Définition 7.2.1

Le **déterminant** d'une matrice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ carrée de taille $n \times n$ est égal[a] à la somme des produits de tous les coefficients d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque par leur cofacteurs respectifs :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{p1}\operatorname{Cof}_{p1}(\boldsymbol{A}) + a_{p2}\operatorname{Cof}_{p2}(\boldsymbol{A}) + \ldots + a_{pn}\operatorname{Cof}_{pn}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{pi}\operatorname{Cof}_{pi}(\boldsymbol{A})$$

ou

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1\ell}\operatorname{Cof}_{1\ell}(\boldsymbol{A}) + a_{2\ell}\operatorname{Cof}_{2\ell}(\boldsymbol{A}) + \ldots + a_{n\ell}\operatorname{Cof}_{n\ell}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell}\operatorname{Cof}_{j\ell}(\boldsymbol{A})$$

[a]**Remarque :** Dans la majorité des livres, on choisit une autre définition du déterminant d'une matrice, basé sur des permutations, et on présente la définition ci-dessus comme un théorème qui en découle. Dans la pratique, puisqu'on utilise la définition ci-dessus pour calculer les déterminants, il nous semble plus logique de l'introduire directement et de passer outre à la définition *standard*.

7.2.1 Les matrices 2×2

Dans plusieurs livres, on donne la valeur du déterminant d'une matrice 2×2 essentiellement comme une définition et on utilise cette valeur pour calculer les déterminants des matrices $n \times n$. Nous avons choisi plutôt d'utiliser directement la définition du déterminant pour obtenir, à partir de la valeur du déterminant pour une matrice 1×1 celle d'une matrice 2×2. De plus, comme la définition du déterminant indique qu'on peut choisir n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne, nous allons considérer séparément les 4 cas pour illustrer que le résultat est le même peu importe le choix qu'on fait. Nous commençons par calculer les quatres cofacteurs de la matrice générale en terme du déterminant d'une matrice[1] 1×1.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Cof}_{11}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \ |d| = \ d$$

$$\operatorname{Cof}_{12}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -|c| = -c$$

$$\operatorname{Cof}_{21}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -|b| = -b$$

$$\operatorname{Cof}_{22}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \ |a| = \ a$$

Calculons maintenant le déterminant. En premier, nous le faisons en utilisant la première ligne :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}\operatorname{Cof}_{11}(\boldsymbol{A}) + a_{12}\operatorname{Cof}_{12}(\boldsymbol{A}) = ad + b(-c) = ad - bc$$

[1]Nous rappelons qu'il ne faut pas confondre les deux barres verticales du déterminant avec une valeur absolue.

En utilisant la deuxième ligne :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{21}\,\mathrm{Cof}_{21}(\boldsymbol{A}) + a_{22}\,\mathrm{Cof}_{22}(\boldsymbol{A}) = c(-b) + da = ad - bc$$

En utilisant la première colonne :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}\,\mathrm{Cof}_{11}(\boldsymbol{A}) + a_{21}\,\mathrm{Cof}_{21}(\boldsymbol{A}) = ad + c(-b) = ad - bc$$

En utilisant la deuxième colonne :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{12}\,\mathrm{Cof}_{12}(\boldsymbol{A}) + a_{22}\,\mathrm{Cof}_{22}(\boldsymbol{A}) = b(-c) + ad = ad - bc$$

Nous voyons que le résultat est identique dans tous les cas. À partir de maintenant, nous allons utiliser ce résultat directement et toujours calculer les déterminants de manière récursive jusqu'à ce qu'on arrive à des combinaisons de déterminants de matrices 2×2.

Exercice 7.3 Calculez le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} c & c \\ 6 & 2c \end{pmatrix}$$

où c est un scalaire. Pour quelle(s) valeur(s) de c est-ce que le déterminant sera égal à zéro ?

7.2.2 Deux exemples de matrice de taille supérieure

Nous allons considérer deux exemples pour illustrer le calcul de déterminants avant de considérer certaines propriétés des déterminants dans la section suivante.

Exemple 7.2.1

Calculons le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ En choisissant de faire l'expansion à partir de la première ligne, nous avons :

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\ &= -3 + 12 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 7.2.2

Calculez le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

Solution: Puisqu'il s'agit d'une matrice 4×4, nous pouvons écrire le déterminant comme une somme de 4 termes, chacun contenant un déterminant d'une matrice 3×3. Pour réduire la quantité de calcul qu'on doit faire, on note que, si on choisit de faire l'expansion suivant la deuxième ligne, trois des quatres termes seront zéros parce que chaque terme sera multiplié par le coefficient 0. Donc, le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

On note ici que la troisième colonne ne contient qu'un coefficient différent de zéro. Nous choisissons donc cette colonne pour faire l'expansion suivante :

$$|\boldsymbol{A}| = (-2)(3) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(3)(2 \cdot 4 - 6 \cdot 8) = 240$$

Exercice 7.4 Calculez le déterminant de la matrice de l'exemple précédent en faisant d'abord l'expansion suivant la première ligne.

7.3 Propriétés des déterminants

7.3.1 Matrices diagonales et triangulaires

Théorème 7.3.1

(a) Le déterminant de la matrice identité I_n est égal à 1.

(b) Le déterminant d'une matrice diagonale $\boldsymbol{D}$ est le produit des éléments de la diagonale :

$$\det \boldsymbol{D} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

(c) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

Démonstration: Nous allons prouver ces propriétés par induction. On démontre tout d'abord que c'est vrai dans le cas $n = 1$, ou $n = 2$, puis, on suppose que c'est vrai dans le cas $n - 1$ pour démontrer que ceci implique que c'est vrai pour n.

(a) Le déterminant de $I_1 = (1) = 1$. Il Considérons le déterminant de la matrice I_n :

$$|I_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & I_{n-1} & \end{vmatrix}$$

En faisant le développement par la première ligne (ou par la première colonne !), on trouve :

$$|I_n| = |I_{n-1}|$$

Mais puisque, par hypothèse, $|I_{n-1}| = 1$, cela implique que $|I_n| = 1$. CQFD

(b) Le déterminant de $D_1 = (d_{11}) = d_{11}$. Le déterminant de D_2 est :

$$\begin{vmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22} - 0 = \prod_{i=1}^{2} d_{ii}$$

Considérons le déterminant de la matrice D_n :

$$|D_n| = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & D_{n-1} & \end{vmatrix}$$

En faisant le développement par la première ligne (ou par la première colonne !), on trouve :

$$|D_n| = d_{11}|D_{n-1}|$$

Mais puisque, par hypothèse, $|D_{n-1}| = \prod_{i=1}^{n-1}$, cela implique que $|D_n| = \prod_{i=1}^{2} d_{ii}$. CQFD

(c) La preuve, qui est semblable à la précédente, est laissée à faire en exercice.

Exercice 7.5 Prouvez que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

7.3.2 Matrice ayant une colonne ou une ligne nulle

Théorème 7.3.2

Si une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ a une ligne ou une colonne remplie de zéros, alors $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Démonstration: : Il suffit de faire l'expansion du déterminant selon la ligne (ou la colonne) qui est remplie de zéros.

7.3.3 Transposée

Théorème 7.3.3

Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée : $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^\top|$.

Démonstration: Écrivons $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^\top$. Si l'on compare le déterminant de $\boldsymbol{A}$ selon la ligne j :

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} \operatorname{Cof}_{j\ell}(\boldsymbol{A})$$

avec le déterminant de sa transposée selon la colonne j :

$$|\boldsymbol{A}^\top| = |\boldsymbol{B}| = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell j} \operatorname{Cof}_{\ell j}(\boldsymbol{B})$$

on constate qu'ils sont égaux puisque $b_{\ell j} = a_{j\ell}$ et similairement $\operatorname{Cof}_{\ell j}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{Cof}_{j\ell}(\boldsymbol{A})$ par la définition de la transposée.

7.3.4 Matrice élémentaires

Avant de continuer à prouver diverses propriétés, nous allons calculer le déterminant de trois matrices élémentaires 2×2. Tout d'abord, nous calculons le déterminant de la matrice qui, lorsqu'on la multiplie à une autre matrice de la même taille, correspond à multiplier la première rangée par une constante :

$$|\boldsymbol{E}_1(k)| = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k$$

Ensuite, nous calculons le déterminant de la matrice qui correspond à l'échange de deux lignes :

$$|\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 2}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Finalement, nous calculons le déterminant de la matrice qui correspond à remplacer la première ligne par l'addition d'elle-même à k fois la deuxième ligne :

$$|\boldsymbol{E}_{12}(k)| = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k \cdot 0 = 1$$

On note qu'il y a une quatrième possibilité, soit $\boldsymbol{E}_{21}(k)$ mais

$$|\boldsymbol{E}_{21}(k)| = |\boldsymbol{E}_{12}^\top(k)| = |\boldsymbol{E}_{12}(k)| = 1$$

où nous avons utilisé le fait que le déterminant de la transposée d'une matrice est égal au déterminant de la matrice elle-même.

Maintenant, nous sommes prêt à calculer le déterminant du produit de telles matrices. Soit une matrice $\boldsymbol{A}$ de taille 2×2 avec des coefficients arbitraires :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $ad-bc$. Maintenant, évaluons le produit d'une des trois matrices élémentaires précédentes par cette matrice. Nous allons vérifier que, dans chacun des trois cas, $|\boldsymbol{EA}| = |\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}|$.

$$|\boldsymbol{E}_1(k)\boldsymbol{A}| = \left|\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad-bc) = |\boldsymbol{E}_1(k)||\boldsymbol{A}|$$

$$|\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 2}\boldsymbol{A}| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad-bc) = |\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 2}||\boldsymbol{A}|$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{E}_{12}(k)\boldsymbol{A}| = \left|\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+kc)d - (b+kd)c \\ &= ad - bc = |\boldsymbol{E}_{12}(k)||\boldsymbol{A}| \end{aligned}$$

Pour les matrices élémentaires $n \times n$, nous avons :

1. Les matrices $\boldsymbol{E}_i(k)$ sont des matrices diagonales ; leur déterminant est le produit des coefficients diagonaux qui sont tous égaux à 1 sauf pour celui de la ligne i qui est égal à k. Donc, leur déterminant est k.
2. Les matrices $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ sont des matrices triangulaires ; leur déterminant est le produit des coefficients diagonaux qui sont tous égaux à 1. Donc, leur déterminant est 1.
3. À l'exception des lignes i et j, les matrices $\boldsymbol{E}_{i\leftrightarrow j}$ n'ont que des coefficients égaux à 1 sur la diagonale. En faisant l'expansion du déterminant en premier selon ces autres lignes, on trouve le déterminant d'une matrice plus petite mais du même type, jusqu'à ce qu'on en arrive à une matrice 2×2 du même type, et dont le déterminant est égal à -1. Donc, le déterminant des matrices $n \times n$ de ce type est également -1.

Théorème 7.3.4

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice $n \times n$ quelconque et $\boldsymbol{E}$ une matrice élémentaire $n \times n$. Alors

$$\det \boldsymbol{EA} = (\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A})$$

Démonstration: Pour démontrer ce résultat, nous allons procéder par induction. Nous avons déjà vu que ceci était vrai dans le cas 2×2. Supposons que nous avons vérifié le résultat dans le cas $(n-1)\times(n-1)$ et considérons le cas $n \times n$. Le résultat de multiplier $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{A}$ ensemble est de changer soit une ou deux des lignes de $\boldsymbol{A}$. Considérons une ligne de A, dénotée par i qui n'a pas changée et écrivons $\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{B}$. Nous pouvons faire le calcul du déterminant de $\boldsymbol{A}$ selon cette ligne :

$$\det(\boldsymbol{EA}) = \det(\boldsymbol{B}) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \det \boldsymbol{B}_{ij}$$

Puisque nous considérons une rangée inchangée, dans chaque terme nous avons $b_{ij} = a_{ij}$, ce qui donne

$$\det(\boldsymbol{EA}) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det \boldsymbol{B}_{ij}$$

Également, dans chaque terme, le mineur $\boldsymbol{B}_{ij}$, de taille $(n-1) \times (n-1)$ a été obtenu du mineur correspondant $\boldsymbol{A}_{ij}$ par une opération élémentaire sur les lignes via une multiplication par une matrice élémentaire que nous dénotons par $\boldsymbol{E}_{(j)}$ et qui est dans chaque cas du même type que celle opérant sur la matrice $\boldsymbol{A}$ originale. Par hypothèse, nous savons que pour cette matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$

$$\det \boldsymbol{B}_{ij} = \det(\boldsymbol{E}_{(j)}) \det(\boldsymbol{A}_{ij})$$

et donc

$$\det(\boldsymbol{EA}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\det \boldsymbol{E}_{(j)})(\det \boldsymbol{A}_{ij})$$

Comme toutes les matrices $\boldsymbol{E}_{(j)}$ dans cette somme sont du même type, le déterminant est une constante qui a la même valeur que le déterminant de la matrice $\boldsymbol{E}$ originale ; cette constante peut être sortie de la somme et nous avons :

$$\det(\boldsymbol{EA}) = (\det \boldsymbol{E}) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\det \boldsymbol{A}_{ij}) = (\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A})$$

CQFD

Corollaire : Si on a une matrice qui a deux lignes identiques (ou deux colonnes identiques), son déterminant sera nul. En effet, on sait que si on interchange les deux lignes identiques, la matrice ne changera pas mais son déterminant changera de signe. Le seul scalaire qui est égal à son inverse additif est zéro.

Corollaire : Si on a une matrice dont une ligne est un multiple d'une autre (ou dont deux colonnes sont des multiples), son déterminant sera nul. En effet,il suffit de multiplier une ligne par le multiple pour avoir deux lignes identiques ; le déterminant sera égal à zéro (divisé par le multiple par lequel on aurait multiplié la ligne ou la colonne).

Exercice 7.6 Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Calculez $\det \boldsymbol{A}$

(b) Si $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calculez $\det(\boldsymbol{EA})$ et comparez le résultat avec $(\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A})$.

(c) Si $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculez $\det(\boldsymbol{EA})$ et comparez le résultat avec $(\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A})$.

(d) Si $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calculez $\det(\boldsymbol{EA})$ et comparez le résultat avec $(\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A})$.

(e) Calculez $\det(4\boldsymbol{A})$.

7.3.5 Déterminant, produit de matrices et inverse

Théorème 7.3.5

Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices $n \times n$.

(a) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, son déterminant est différent de zéro.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ n'est pas inversible, son déterminant est zéro.

Démonstration:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, on peut obtenir $\boldsymbol{A}$ en effectuant des opérations élémentaires successives à partir de la matrice identité, ou encore

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2 \ldots \boldsymbol{E}_m I_n$$

En utilisant successivement la propriété $\det(\boldsymbol{EB}) = (\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{B})$, on peut obtenir :

$$\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{E}_1)\det(\boldsymbol{E}_2)\ldots\det(\boldsymbol{E}_m)\det(I_n)$$

Comme chacun des déterminants individuels du côté droit de l'équation est différent de zéro, le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est différent de zéro.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ n'est pas inversible, en appliquant successivement des opérations élémentaires, on peut obtenir une matrice échelonnée $\boldsymbol{M}$ dont au moins une rangée est égale à zéro. Par conséquent, le déterminant de cette matrice est zéro. Nous avons donc

$$\det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\ldots\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{E}_1)\det(\boldsymbol{E}_2)\ldots\det(\boldsymbol{E}_m)\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{M}) = 0$$

Comme le déterminant des matrices élémentaires est différent de zéro, on doit avoir $\det \boldsymbol{A} = 0$. CQFD

Théorème 7.3.6

(a) Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices $n \times n$. Le déterminant de leur produit est égal au produit de leur déterminant :

$$\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$$

(b) Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, son déterminant est l'inverse multiplicatif du déterminant de la matrice inverse :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}^{-1}}$$

Démonstration:

(a) Nous devons considérez deux cas. Premièrement, si $\boldsymbol{A}$ n'est pas inversible, alors leur produit $\boldsymbol{AB}$ n'est également pas inversible et nous avons trivialement

$$0 = \det(\boldsymbol{AB}) = 0(\det \boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$$

Deuxièmement, si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors on peut écrire $\boldsymbol{A}$ comme un produit de matrice élémentaires multipliées par la matrice identité :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\ldots\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{I}_n$$

et donc

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\ldots\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\ldots\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{B}$$

En prenant le déterminant de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{AB}) &= \det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\ldots\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{B})\\ &= (\det\boldsymbol{E}_1)(\det\boldsymbol{E}_2)\ldots(\det\boldsymbol{E}_m)(\det\boldsymbol{B})\\ &= (\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

Dans les deux cas, nous avons donc $\det(\boldsymbol{AB})(\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{B})$. CQFD

(b) Il suffit de considérer

$$1 = \det\boldsymbol{I} = \det(\boldsymbol{AA}^{-1}) = (\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{A}^{-1})$$

d'où

$$\det(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}^{-1}}$$

Exercice 7.7 Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Calculez le déterminant de $\boldsymbol{A}^7$.

7.3.6 Opérations élémentaires sur les lignes

Puisque la multiplication par une matrice élémentaire est équivalente à faire des opérations sur les lignes, et vice-versa, on peut se servir de ceci pour calculer les déterminants. De plus, et ceci est important, comme le déterminant de la transposée d'une matrice est le même que celui de la matrice (non-transposée), on peut, lors du calcul des déterminants :

1. transposer une matrice
2. faire une opération élémentaire sur ses lignes
3. transposer la matrice résultante

et ce résultat est équivalent à faire une opération élémentaire sur les **colonnes** directement, sans avoir à faire d'abord une transposition puis de terminer par une transposition.

Pour démontrer ceci, reprenons la matrice de l'exemple 7.2.2 et calculons le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 7 & 0\\ 8 & 4 & 9 & 0\end{pmatrix}$ Nous allons faire ceci en utilisant au maximum les opérations élémentaires sur les lignes (et sur les colonnes). Nous n'allons pas faire les calculs de la façon la plus efficace :

nous allons plutôt faire des transformations visant à soit faire une expansion (à partir d'une ligne ou d'une colonne) qui n'aura qu'un seul terme avec le coefficient 1 dans la première ligne et la première colonne, ou soit à extraire au maximum des facteurs communs pour que l'on ait de petits chiffres à manipuler. Le but est d'illustrer les diverses opérations possibles.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

où le signe $-$ vient du déterminant de la matrice élémentaire faisant l'interchange de deux lignes (1 et 2). À partir de maintenant, nous n'allons pas écrire la matrice élémentaire requise[2] et indiquer seulement le résultat de chaque opération.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

où le signe $-$ vient de l'interchange de deux colonnes (1 et 3).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

où le facteur de 2 vient de la division de la première ligne par 2 (l'opération élémentaire consisterait à multiplier la première ligne du côté droit par le facteur de 2 pour obtenir le côté gauche de l'équation). **Important :** veuillez noter que lorsqu'on multiplie un déterminant par un scalaire, ce n'est pas comme la multiplication d'une matrice par un scalaire : ce n'est pas équivalent à multiplier tous les coefficients de la matrice par le scalaire ; c'est équivalent à multiplier les coefficients sur une seule ligne (ou une seule colonne) par ce scalaire.

En faisant l'expansion le long de la première ligne, on n'a qu'un terme :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

On peut interchanger la première et la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

[2] Ou, dans le cas d'opérations sur les colonnes, les trois opérations requises : transposition, opération élémentaire sur les lignes, transposition

Si on divise la première **colonne** par 3, on obtient

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

En faisant l'expansion par la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Finalement, faisons deux opérations, soit de diviser la première ligne par 2 et la deuxième par 4 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En résumé, nous avons

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(2)(-1)(3)(2)(4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -48[1 \cdot 1 - 3 \cdot 2] = (-48)(-5) = 240$$

ce qui est le même résultat que nous avions eu auparavant. Pour cet exemple-ci, les différentes étapes que nous avons suivi ont fait en sorte que le calcul a été beaucoup plus long que la façon que nous avions utilisée précédemment. Cependant, dans certains cas, les opérations élémentaires sur les lignes permettent de simplifier beaucoup les calculs ... et sont très utiles si on a de bonnes raisons de croire que le déterminant d'une matrice est égal à zéro !

Exercice 7.8 Soit $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$. Obtenez les déterminants des matrices suivantes. Justifiez vos réponses, soit comme nous l'avons fait pour la partie **(a)** dont la réponse est donnée, ou en écrivant une simple phrase indiquant les types d'opérations qui ont été effectuées. Veuillez noter que certains déterminants ont été obtenus en faisant plus qu'une opération.

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Réponse : On peut voir que le déterminant a été obtenu à partir de $|\boldsymbol{A}|$ en multipliant la deuxième ligne par 2, ou encore :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10.$$

(b) $\begin{vmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} a & 2d & g \\ b & 2e & h \\ c & 2f & i \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} a & g & 3d \\ b & h & 3e \\ c & i & 3f \end{vmatrix}$

7.4 Règle de Cramer

Selon la description de Wikipédia :

> *La **règle de Cramer** (ou méthode de Cramer) est un théorème en algèbre linéaire qui donne la solution d'un système de Cramer, c'est-à-dire un système d'équations linéaires avec autant d'équations que d'inconnues et dont le déterminant de la matrice de coefficients est non nul, en termes de quotients de déterminants.*
>
> *En calcul, la méthode est moins efficace que la méthode de résolution de Gauss pour des grands systèmes (à partir de 4 équations) dont les coefficients dans le premier membre sont explicitement donnés. Cependant, elle est d'importance théorique pour la raison qu'elle donne une expression explicite pour la solution du système, et elle s'applique dans des systèmes où par exemple les coefficients du premier membre dépendent de paramètres, ce qui peut rendre la méthode de Gauss inapplicable.*

règle de Cramer

Définition 7.4.1

Soit une matrice $\boldsymbol{A}$ de taille $n \times n$. Nous pouvons représenter cette matrice comme une collection de vecteurs colonnes :

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_n]$$

Soit un vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Nous définissions la matrice $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b})$ comme étant la matrice obtenue de la matrice $\boldsymbol{A}$ en remplaçant la colonne i par $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{i-1} \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a}_{i+1} \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

Théorème 7.4.1

Règle de Cramer
Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice inversible $n \times n$. Pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, la solution unique $\boldsymbol{x}$ de l'équation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ est donnée en terme de ses coefficients [a] par

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Démonstration: Dénotons par $\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n$ les colonnes de la matrice $\boldsymbol{A}$ et par $\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ les colonnes de la matrice I_n. On sait que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AI}$; en écrivant ces matrices sous la forme de vecteurs colonnes, et en utilisant la multiplication par blocs du côté droit de l'équation ci-dessous,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{AI} \\ [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n] &= \boldsymbol{A}[\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n] \\ &= [\boldsymbol{Ae}_1 \cdots \boldsymbol{Ae}_n] \end{aligned}$$

on peut vérifier que $\boldsymbol{Ae}_j = \boldsymbol{a}_j$.

Maintenant, considérons le produit $\boldsymbol{AI}_j(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AI}_j(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}[\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{x} \cdots \boldsymbol{e}_n] \\ &= [\boldsymbol{Ae}_1 \cdots \boldsymbol{Ax} \cdots \boldsymbol{Ae}_n] \\ &= [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{b} \cdots \boldsymbol{a}_n] \\ &= \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

Par les propriétés des déterminants, nous avons :

$$(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{I}_j(\boldsymbol{x})) = \det \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b})$$

Si on fait l'expansion du déterminant $\det \boldsymbol{I}_j(\boldsymbol{x})$ suivant la rangée j, on trouve $x_j \det \boldsymbol{I}_{n-1} = x_j$, et donc

$$x_j \det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b})$$

Puisque la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible, $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, et on obtient le résultat désiré. CQFD

[a] Ou, puisqu'il s'agit d'un vecteur, on peut utiliser *composante* au lieu de *coefficient*.

Exemple 7.4.1

Résoudre le système d'équation

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

en utilisant la méthode de Cramer.

Solution: Tout d'abord, calculons le déterminant de la matrice des coefficients en faisant l'expansion par la première ligne

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-15+4) - (-9-2) - (-6-5) = 11$$

On peut trouver la solution en utilisant l'équation

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}, \qquad j = 1, 2, 3$$

Ainsi, toujours en faisant l'expansion par la première ligne,

$$x_1 = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}((-15+4) - (-24+2) - (-16+5)) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}((-24+2) - (-9-2) - (-3-8)) = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}((-5+16) - (-3-8) + (-6-5)) = 1$$

et donc $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée.

Exercice 7.9 Résoudre le système d'équation

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

en utilisant la méthode de Cramer. Ce serait peut-être une bonne idée de vérifier votre réponse en trouvant la solution en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

7.4.1 Inverse d'une matrice

En utilisant la règle de Cramer, nous pouvons calculer l'inverse d'une matrice directement. Soit une matrice $\boldsymbol{A}$ de taille $n \times n$; la colonne j de l'inverse de cette matrice est un vecteur $\boldsymbol{X}$ tel que

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{e}_j$$

où $\boldsymbol{e}_j$ est la colonne j de la matrice identité. Si on dénote le coefficient i, j de la matrice inverse par $(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}$, en utilisant la règle de Cramer, on trouve :

$$(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} = x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{e}_j)}{\det \boldsymbol{A}}$$

En faisant l'expansion par la colonne[3] j on trouve

$$\det \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{e}_j) = \mathrm{Cof}_{ji}(\boldsymbol{A})$$

où $\mathrm{Cof}_{ji}(\boldsymbol{A})$ est le cofacteur de la matrice $\boldsymbol{A}$ correspondant au coefficient a_{ji}. En utilisant ce résultat, nous trouvons :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \mathrm{Cof}_{11}(\boldsymbol{A}) & \mathrm{Cof}_{21}(\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{Cof}_{n1}(\boldsymbol{A}) \\ \mathrm{Cof}_{12}(\boldsymbol{A}) & \mathrm{Cof}_{22}(\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{Cof}_{n2}(\boldsymbol{A}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cof}_{1n}(\boldsymbol{A}) & \mathrm{Cof}_{2n}(\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{Cof}_{nn}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}$$

On appelle la matrice de droite la **matrice des cofacteurs**, ou la **comatrice**, ou encore l'**adjointe classique** de la matrice $\boldsymbol{A}$, et on la dénote par $\mathrm{adj}\, \boldsymbol{A}$ ce qui nous permet d'écrire

matrice des cofacteurs
comatrice
adjointe classique

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \mathrm{adj}\, \boldsymbol{A}$$

Exemple 7.4.2

Calculez l'inverse de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

en utilisant la méthode de Cramer.

Solution:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

On a déjà trouvé dans un exemple précédent que $|\boldsymbol{A}| = 11$. Nous avons donc

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 & 5 & 7 \\ 11 & -2 & -5 \\ -11 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] Si l'ordre des indices vous mélange, faites le calcul en faisant l'expansion par la ligne j de la transposée.

Exercice 7.10 En utilisant la méthode de Cramer, trouver l'inverse de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

que l'on a vu à l'exemple 4.5.1.

7.5 Interprétation géométrique des déterminants

Soit la matrice suivante, que l'on peut considérer comme une collection de deux vecteurs colonnes :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \right)$$

Ces deux vecteurs colonnes forment les côtés d'un rectangle d'aire ab qui est égal à la valeur du déterminant de cette matrice. Si on transforme la matrice $\boldsymbol{M}$ via un cisaillement parallèle à l'axe horizontal, on obtient un parallélogramme ayant la même aire que le rectangle précédent, et le même déterminant.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Ce résultat est général : *en deux dimensions, le déterminant d'une matrice est égal à l'aire de la surface engendré par les deux vecteurs colonnes composant la matrice.*[4] Qu'arrive-t-il si l'une des deux colonnes correspond au

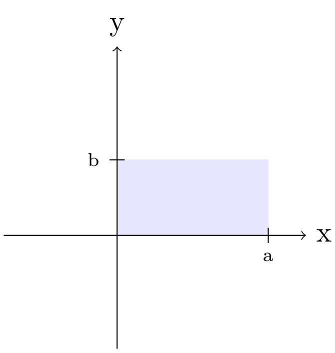


Figure 7.1 Rectangle d'aire ab engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

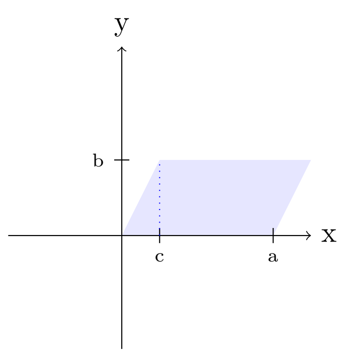


Figure 7.2 Parallélogramme d'aire ab engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$. À noter que l'on obtient un tel parallélogramme via une transformation linéaire de cisaillement (avec un déterminant égal à 1) faite sur un rectangle d'aire ab.

vecteur nul ou que l'une des deux colonnes soit un multiple de l'autre ? Dans ce cas, nous avons effectivement un seul vecteur qui définit un parallélépipède d'aire nulle. Finalement, si on interchange deux colonnes, on trouve

[4] On obtient le même résultat si on considère les deux vecteurs lignes.

que le déterminant change de signe. Puisqu'une aire est définie comme étant une valeur positive, lorsqu'on donne une interprétation géométrique au déterminant, on ignore simplement le signe. [5]

7.5.1 Transformations linéaires

Imaginons que nous avons une surface S correspondant à un parallélogramme d'aire A ; nous pouvons concevoir ce parallélogramme comme étant engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $\boldsymbol{B}$ comme on l'a déjà vu ci-dessus. Supposons que nous faisions une transformation linéaire $T(S)$, via la matrice $\boldsymbol{M}$, pour obtenir un nouveau parallélogramme d'aire A'. Nous avons

$$A' = \det(\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{M})(\det \boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{M})A$$

Ce résultat se généralise à d'autres formes que les parallélogrammes si on considère une surface S comme étant une somme (infinie) de petits rectangles (et que l'on passe à la limite).

Exemple 7.5.1

Une application intéressante du calcul d'aires est celle d'une ellipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Soit un point $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tel que $u^2 + v^2 \leq 1$. Ce point est situé à l'intérieur d'un cercle unitaire, d'aire égale à π. Appliquons la transformation linéaire :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

à ce point. On obtient un point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ situé à l'intérieur de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ Nous avons donc :

[aire de l'ellipse] $= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$ [aire du cercle] $= ab\pi$

[5] En fait, on peut considérer le signe si on définit des surfaces ou des systèmes d'axes *orientés*, l'orientation changeant de signe lorsqu'on fait une réflexion par rapport à un axe, par exemple.

7.5.2 Dimensions supérieures à deux

Si au lieu d'un plan, on considère un espace à trois dimensions, le déterminant nous donnera le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs. Si le déterminant est nul, cela signifie que les trois vecteurs (colonnes) sont co-planaires. Dans les dimensions plus élevées, on généralise ces notions et on parle de l'hypervolume engendré par les vecteurs.

Pour les transformations linéaires, si le déterminant est nul, cela veut dire que l'on a fait une projection sur une, ou plusieurs dimensions. Par exemple, on a pris des points dans un espace à trois dimensions et on les a projeté sur un plan. En faisant une telle transformation, on perd l'information sur la hauteur relative des points par rapport au plan sur lequel ils ont été projetés ; ceci explique pourquoi une telle transformation est irréversible.

7.6 Exercices divers

Exercice 7.11 Calculez

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$$

Exercice 7.12 Calculez le déterminant des matrices suivantes.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 77 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 24 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 7.13 Soit les matrices :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

Calculez $\det \boldsymbol{E}$ et $\det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB})$. Est-ce que vous obtenez le même résultat dans les deux cas ?

Exercice 7.14 Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{D}$ deux matrices carrées. En suivant ce que vous avez fait pour trouver les réponses de l'exercice 7.12, démontrez que

(a) $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A}$

Réponse : Un début de réponse est comme suit : Comme la matrice $\boldsymbol{A}$ est une matrice une matrice carrée, supposons qu'elle est de taille $m \times m$. En faisant l'expansion du déterminant par la dernière ligne, tous les termes sont zéros sauf un, dont le coefficient est à la ligne $m+n$ et à la colonne $m+n$ et on trouve

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = (-1)^{2m+2n} \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

(b) $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{D}$

(c) Utilisez les résultats précédents pour démontrer que

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{D})$$

(d) $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{D})$

Exercice 7.15 Soit $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ et $\boldsymbol{D}_{m\times m}$ deux matrices carrées. Vous pouvez supposer que $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe.

(a) Trouvez les matrices $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ telles que

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}$$

et utilisez ce résultat pour démontrer que

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = (\det \boldsymbol{A})(\det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}))$$

(b) Quelle doit être la valeur de m pour qu'il soit possible d'avoir $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$?

(c) Démontrer que, si $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$, alors

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB})$$

Exercice 7.16 Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ qui est un exemple d'une matrice de Vandermonde. En utilisant des opérations sur les lignes, démontrez que le déterminant de cette matrice peut être écrit sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & a+c \end{vmatrix}$$

Puis, en continuant de faire des opérations sur les lignes, démontrez que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Vérifiez votre résultat en comparant avec ce que vous aviez obtenu pour l'exercice 7.11.

Chapitre

8 Vecteurs propres et valeurs propres

8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier certaines propriétés des transformations linéaires T d'un espace vectoriel V à lui-même.

Définition 8.1.1

Soit une transformation T faite sur des vecteurs d'un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé **valeur propre** [a] de T s'il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{v} \in V$ tel que

$$T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

Tout vecteur $\boldsymbol{v}$ satisfaisant cette relation est appelé un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ.

[a] Le mot propre est utilisé dans le sens d'appartenance ; en anglais on utilise les termes *eigenvalue* et *eigenvector* qui sont dérivés de l'allemand.

On remarque qu'en raison des propriétés des transformations linéaires, tout multiple d'un vecteur propre est également un vecteur propre :

$$T(k\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{v}) = k\lambda\boldsymbol{v} = k(\lambda\boldsymbol{v})$$

Théorème 8.1.1

Soit λ une valeur propre d'un opérateur $T : V \to V$. L'ensemble V_λ de tous les vecteurs propres de T correspondant à la valeur propre λ est un sous-espace de V.

Démonstration: Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_\lambda$, c'est-à-dire $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ et $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ Alors

$$T(\boldsymbol{w}) = T(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = aT(\boldsymbol{u}) + bT(\boldsymbol{v}) = a(\lambda\boldsymbol{u}) + b(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{w}$$

et donc $\boldsymbol{w} \in V_\lambda$.

Théorème 8.1.2

Soient $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ les vecteurs propres non-nuls d'un opérateur $T : V \to V$ correspondant aux valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants.

Démonstration: La démonstration de ce théorème se fait par récurrence. Si $n = 1$, alors $\boldsymbol{v}_1$ est linéairement indépendant puisqu'il est non-nul et donc la seule façon que l'équation $\beta_1 \boldsymbol{v}_1$ peut être satisfaite est si $\beta_1 = 0$.

Supposons que les $n-1$ premiers vecteurs propres soient linéairement indépendants, c'est-à-dire que la seule solution possible pour

$$\beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1} = 0$$

est telle que tous les β_j soient égaux à zéro. Considérons l'équation

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = 0 \quad (1)$$

En appliquant T à cette équation, et en raison de la linéarité de l'opérateur T, nous avons

$$\alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\boldsymbol{v}_n) = 0$$

Mais, puisque $T(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$, ceci devient

$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \boldsymbol{v}_n = 0 \quad (2)$$

Multiplions l'équation (1) par λ_n et soustrayons-la de l'équation (2)

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\boldsymbol{v}_{n-1} + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_n)\boldsymbol{v}_n = 0$$

Le dernier terme (en rouge) de cette équation est égal à zéro. Puisque les valeurs propres sont toutes distinctes, la seule façon possible de satisfaire cette équation est si tous les α_j, $1 \leq j \leq n-1$ sont égaux à zéro puisque, par hypothèse, les $n-1$ premiers vecteurs sont linéairement indépendants. En remplaçant les $n-1$ premiers α_j par zéro dans l'équation (1), on trouve que α_n doit également être égal à zéro, et donc que tous les vecteurs sont linéairement indépendants.

Puisque les vecteurs propres sont linéairement indépendants, le nombre maximal qu'on puisse avoir est égal à la dimension de l'espace vectoriel, et ces vecteurs formeront alors une base de cet espace vectoriel.

Exemple 8.1.1

Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut facilement vérifier que cette matrice a 5 comme valeur propre, avec le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que la valeur propre 2 et le vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le concept de valeurs propres et de vecteurs propres n'est pas limités aux transformations linéaires exprimées sous la forme de matrices. L'exemple suivant illustre ceci dans le cas de fonctions réelles et du calcul différentiel

Exemple 8.1.2

Soit l'opérateur $\frac{d}{dt}$ sur des fonctions réelles f. On note que cet opérateur est un opérateur linéaire :

$$\frac{d(af(t)+bg(t))}{dt} = a\frac{d\,f(t)}{dt} + b\frac{d\,g(t)}{dt}$$

Nous avons

$$\frac{d\,e^{3t}}{dt} = 3e^{3t}$$

et donc 3 est une valeur propre de $\frac{d}{dt}$, et e^{3t} est un vecteur propre correspondant à cette valeur propre.

8.2 Polynôme caractéristique

Supposons que nous cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$, c'est-à-dire qu'on cherche des solutions (vecteurs propres) non-nulles à l'équation $\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}$. Une façon de procéder serait de choisir un vecteur arbitraire $\boldsymbol{X}$ et d'obtenir un système de n équations linéaires ayant $n+1$ inconnues : les n coefficients de $\boldsymbol{X}$ ainsi que λ. Comme on aura plus d'inconnues que d'équations, on aura une infinité de solutions ...ce qui n'est pas surprenant puisque tout multiple d'un vecteur propre est également un vecteur propre. À première vue, le problème peut paraître difficile à résoudre. En pratique, il existe une méthode qui facilite la recherche d'une solution.

Reprenons l'équation à résoudre, $\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}$; en utilisant la matrice identité, $\boldsymbol{I}$, on peut réécrire ceci comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AX} &= \lambda\boldsymbol{IX} \\ \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Au théorème 4.4.1, nous avons démontré que, pour une matrice carrée $\boldsymbol{M}$, l'équation $\boldsymbol{MX} = \mathbf{0}$ admet seulement la solution triviale si $\boldsymbol{M}$ est inversible. Inversement, nous aurions pu démontrer que si $\boldsymbol{M}$ n'est pas inversible, il existe une infinité de solutions.[1] Au théorème 7.3.5 nous avons démontré que si $\boldsymbol{M}$ n'est pas inversible, alors son déterminant est zéro. En combinant ces deux résultats, nous concluons que nous pourrons trouver des vecteurs propres non-nuls si

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \mathbf{0}$$

Pour une matrice $n \times n$, l'équation ci-dessus résultera en un polynôme de degré n en λ, appelé **polynôme caractéristique** de $\boldsymbol{A}$. Notons que la matrice $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ est appelée la **matrice caractéristique** de $\boldsymbol{A}$.

polynôme caractéristique
matrice caractéristique

[1]Nous rappelons que pour les équations homogènes, nous avons toujours au moins une solution (la solution triviale) ce qui nous laisse deux possibilités : une seule solution ou une infinité de solutions.

Exemple 8.2.1

Reprenons l'exemple simple du début du chapitre :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice caractéristique de $\boldsymbol{A}$ est :

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $(5-\lambda)(2-\lambda)$. Le polynôme caractéristique est donc

$$(5-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

qui a deux solutions pour λ (2 et 5), qui sont donc les deux valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ comme nous l'avions vu auparavant.

Exemple 8.2.2

Trouvez les vecteur propres et les valeurs propres de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: Le polynôme caractéristique est obtenu en calculant $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0$$

On a donc deux solutions : $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$, qui sont les deux valeurs propres. Trouvons les vecteurs propres correspondant, en utilisant l'équation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ qu'on peut récrire comme $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0$. En premier, considère $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne le système homogène

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

On peut voir immédiatement que la deuxième équation nous donne la même information que la première. On n'a donc qu'une seule équation et deux variables. Suivant la convention habituelle, on choisit la variable

y comme variable libre et la solution générale est de la forme

$$t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Comme le multiple d'un vecteur propre est également un vecteur propre, on peut choisir t de façon tout à fait arbitraire (en autant que le résultat ne soit pas le vecteur nul). Un choix naturel est de prendre $t = 1$ et on obtient donc que le vecteur propre qui correspond à la valeur propre 2 est

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Exercice 8.1 Vérifiez qu'un vecteur propre qui correspond à la valeur propre 0 dans l'exemple 8.2.2 ci-dessus est le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Vérifiez également que le déterminant est égal au produit des valeurs propres ($2 \cdot 0 = 0$), et que la trace est égale à la somme des valeurs propres..

Exercice 8.2 Trouvez les valeurs propres et les vecteur propres de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 3\end{pmatrix}$$

Vérifiez également que le déterminant est égal au produit des valeurs propres, et que la trace est égale à la somme des valeurs propres.

Puisque la multiplication d'une matrice par un de ses vecteurs propres redonne le même vecteur propre multiplié par un scalaire on sait que, sans faire de calculs, la matrice de rotation des vecteurs **réels**

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

n'a pas de valeurs propres réelles, sauf dans le cas trivial où $\theta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ et cette matrice devient la matrice identité. L'exemple suivant vérifie ceci dans un cas particulier.

Exemple 8.2.3

Démontrer que la matrice de rotation par un angle de $\pi/2$ n'a pas de valeurs propres réelles.

Solution: La matrice de rotation par un angle de $\pi/2$ est

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Pour trouver les valeurs propres, nous trouvons les solutions de $|\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Comme le carré d'un nombre réel est un nombre positif, cette équation n'a pas de solutions réelles.

Exercice 8.3 En considérant les nombres complexes, trouvez les deux valeurs propres et les vecteurs propres correspondant de la matrice de rotation [a] :

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[a] Une observation potentiellement intéressante : si on représente les nombres complexes dans un plan, avec deux axes perpendiculaires, l'un correspondant à la partie réelle et l'autre à la partie complexe, la multiplication par i d'un nombre complexe correspond à une rotation de $\pi/2$ dans le plan complexe.

Définition 8.2.1

La **multiplicité algébrique** d'une valeur propre λ est l'ordre de la racine correspondante dans le polynôme caractéristique. Par exemple, si le polynôme caractéristique est

$$(\lambda - 2)^3 (\lambda + 4)^5 (\lambda - 6) = 0$$

alors la multiplicité algébrique de la valeur propre 2 sera 3, la multiplicité algébrique de la valeur propre -4 sera 5, et la multiplicité algébrique de la valeur propre 6 sera 1.

On remarque que, si on remplace λ par zéro dans le polynôme caractéristique, l'expression qui reste est égale au produits des valeurs propres élevées à leur ordre de multiplicité algébrique ; cette expression est également égale au déterminant de la matrice.

Définition 8.2.2

La **multiplicité géométrique** d'une valeur propre λ est le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à cette valeur propre.

Comme des vecteurs linéairement indépendants permettent de définir une base d'un espace, la multiplicité géométrique sera égale à la dimension de l'espace propre associé à une valeur propre.

8.3 Diagonalisation

Soit l'équation $\boldsymbol{AX} = \lambda \boldsymbol{X}$ où la matrice $\boldsymbol{A}$ est une matrice $n \times n$. Supposons que nous ayons trouvé un ensemble linéairement indépendant de n vecteurs propres $\{\boldsymbol{X}_i\}$. Construisons la matrice $\boldsymbol{P}$ en utilisant les vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$, avec un vecteur propre différent pour chaque colonne :

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{X}_1 \cdots \boldsymbol{X}_n)$$

Nous avons donc

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1 \cdots \boldsymbol{X}_n) = (\boldsymbol{AX}_1 \cdots \boldsymbol{AX}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 \cdots \lambda_n \boldsymbol{X}_n)$$

Puisque les colonnes de $\boldsymbol{P}$ sont linéairement indépendantes, ceci veut dire qu'elle est inversible. Écrivons son inverse comme une collection de vecteurs lignes :

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_n \end{pmatrix}$$

tels que $\boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{X}_j = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Nous avons alors :

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1 \cdots \boldsymbol{X}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_n \end{pmatrix} (\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 \cdots \lambda_n \boldsymbol{X}_n) = (\lambda_j \delta_{ij}) = \boldsymbol{D}$$

c'est-à-dire que le produit $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ est une matrice diagonale, avec les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ comme éléments non-nuls. Les vecteurs propres de $\boldsymbol{D}$ peuvent être choisis comme étant :

$$\{\boldsymbol{Z}_i\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En fait, on a[2] :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AX} &= \lambda \boldsymbol{X} \\
\boldsymbol{IAIX} &= \lambda \boldsymbol{IX} \\
\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{X} &= \lambda \boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{X} \\
\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{X} &= \lambda \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}) \\
\boldsymbol{PDZ} &= \lambda \boldsymbol{PZ} \\
\boldsymbol{DZ} &= \lambda \boldsymbol{Z}
\end{aligned}$$

La matrice $\boldsymbol{P}^{-1}$, qui permet de changer de la base $\{\boldsymbol{X}_i\}$ à la base $\{\boldsymbol{Z}_i\}$ est connue sous le nom de **matrice de passage** : ceci est le nom qu'on donne à toute matrice qui permet de changer la base d'un espace vectoriel. Ainsi, $\boldsymbol{P}$ est également une matrice de passage (de la base $\{\boldsymbol{Z}_i\}$ à la base $\{\boldsymbol{X}_i\}$).

matrice de passage

[2]En fait, ce n'est pas nécessairement tout à fait exact : il est probable que les vecteurs obtenus dans la nouvelle base utilisant la matrice de passage seront des multiples différents de la base ci-dessus, où tous les coefficients non-nuls étaient égaux à 1.

Définition 8.3.1

Les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des **matrices semblables** s'il existe une matrice de passage $\boldsymbol{P}$ telle que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$

Théorème 8.3.1

Des matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration: Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{B}$ est donné par l'équation

$$|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$

Puisque $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{A}$ sont des matrices semblables, et que $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}$, nous pouvons remplacer récrire le membre de gauche de l'équation ci-dessus comme

$$|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$$

Exemple 8.3.1

Soit la matrice $\boldsymbol{A}$ de l'exemple 8.2.2 :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a comme valeurs propres 0 et 2, et les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_\lambda$ correspondant

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant ces vecteurs, on peut obtenir la matrice de passage [a]

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_0) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que l'inverse de cette matrice est

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et que l'on peut diagonaliser $\boldsymbol{A}$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}$$

[a] Le choix de l'ordre des colonnes est arbitraire.

Exercice 8.4 Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

de l'exercice 8.2. Trouvez une matrice de passage pour cette matrice et ensuite transformez la matrice $\boldsymbol{A}$ dans une forme diagonale.

Exemple 8.3.2

Soit la matrice $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculez $\boldsymbol{A}^{31}$.

Solution: On pourrait trouver la réponse en faisant toute une série de multiplications . . . mais il y a une façon plus simple d'obtenir la réponse. On sait que l'on peut diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A}$ en faisant la transformation

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

Si on multiplie cette équation de la gauche par $\boldsymbol{P}$ et de la droite par $\boldsymbol{P}^{-1}$, on obtient :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$$

On observe que l'on a

$$\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1})^2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{P}^{-1}$$

et, de façon plus générale

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}$$

On peut facilement vérifier que, si élève une matrice diagonale à la puissance n la matrice résultante sera également une matrice diagonale dont les coefficients seront les coefficients de la matrice initiale élevés à cette même puissance n :

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots \\ 0 & d_{22} & 0\cdots \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_{11}^n & 0 & \cdots \\ 0 & d_{22}^n & 0\cdots \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

En utilisant les matrices qu'on avait trouvées dans les exemples précédents, on a donc

$$\boldsymbol{A}^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{31} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{31} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{30} & 2^{30} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{31} = \begin{pmatrix} 2^{30} & 2^{30} \\ 2^{30} & 2^{30} \end{pmatrix}$$

Exercice 8.5 Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

de l'exercice 8.2. Calculez $\boldsymbol{A}^{31}$. Note : vous pouvez laisser les valeurs numériques sous la forme $a^b + c^d$, comme par exemple $5^3 + 6^3$, de telle sorte que vous ne devriez pas avoir besoin d'utiliser une calculatrice.

Exemple 8.3.3

Est-il possible de diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Solution: La réponse à cette question est non ... ce que nous allons démontrer de deux façons. Dans un premier temps, nous allons démontrer ceci d'une façon applicable à tout problème de ce genre. Puis, nous allons utiliser des propriétés particulières de cette matrice pour faire la démonstration d'une autre façon.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donné par l'équation $0 = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Nous avons donc une seule valeur propre, $\lambda = 1$, ayant une multiplicité algébrique égale à 2. Calculons le ou les vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à cette valeur propre en utilisant l'équation $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ avec $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow y = 0$$

x est donc une variable libre et, si nous choisissons la valeur 1 pour cette variable, on obtient le vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme on n'a qu'un seul vecteur propre, la multiplicité géométrique de la valeur propre est 1, ce qui est plus petit que sa multiplicité algébrique. Avec un seul vecteur propre, on ne peut pas obtenir une matrice de passage $\boldsymbol{P}$ qui soit inversible et donc on ne peut pas diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A}$.

Une autre façon de voir ceci est la suivante. La seule matrice diagonale 2×2 qui a la valeur 1 pour ses deux coefficients sur la diagonale est la matrice identité. Supposons qu'on ait une matrice de passage $\boldsymbol{P}$ qu'on utilise pour obtenir une matrice semblable à la matrice diagonale (mais différente d'elle). La transformation habituelle serait :

$$\boldsymbol{PDP}^{-1} = \boldsymbol{A}$$

Dans ce cas-ci, puisque $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$, on obtient :

$$\boldsymbol{PIP}^{-1} = \boldsymbol{I} \neq \boldsymbol{A}$$

Théorème 8.3.2

On peut diagonaliser une matrice $\boldsymbol{A}$ si la multiplicité algébrique de chacune de ses valeurs propres est égale à la multiplicité géométrique de ces mêmes valeurs propres.

Démonstration: On sait que les vecteurs propres qui appartiennent a des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants entre eux. Si la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique pour chacune des valeurs propres, alors ceci veut dire (par la définition de la multiplicité géométrique) que les vecteurs propres qui appartiennent à la même valeur propre sont linéairement indépendants. Donc, tous les vecteurs propres sont linéairement indépendants et, pour une matrice de taille $n \times n$, nous aurons n vecteurs propres linéairement indépendants. Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, on peut s'en servir comme colonnes d'une matrice $\boldsymbol{P}$ de taille $n \times n$ qui sera alors inversible et pourra donc être utilisée comme matrice de passage.

Bien qu'il ne soit pas toujours possible de diagonaliser une matrice, on peut démontrer [3] qu'il est possible de toujours possible de trouver une matrice qui permet de transformer cette matrice dans une forme triangulaire de la façon suivante :

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}$$

Comme $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{T}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$ et que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes sur la diagonale, alors la trace d'une matrice carrée est égale à la somme de ses valeurs propres. De la même façon, le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres. Évidemment, si on peut diagonaliser une matrice, ces deux propriétés sont alors évidentes.

La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres ; le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres.

8.4 Diagonalisation : un exemple détaillé

Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2+c & 3 & c+3 \\ c & -1 & c-3 \\ -c & -3 & -c-1 \end{pmatrix}$$

Calculons le polynôme caractéristique à partir de l'équation $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$. Nous allons faire l'expansion suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2+c-\lambda & 3 & c+3 \\ c & -1-\lambda & c-3 \\ -c & -3 & -c-1-\lambda \end{vmatrix} &= (2+c-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & c-3 \\ -3 & -c-1-\lambda \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 3 & c+3 \\ -3 & -c-1-\lambda \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 3 & c+3 \\ -1-\lambda & c-3 \end{vmatrix} \\
&= (2+c-\lambda)((1+\lambda)[c+1+\lambda] + 3[c-3]) \\
&\quad -c(-3[c+1+\lambda] + 3[c+3]) - c(3[c-3] + [c+3](1+\lambda)) \\
&= (2+c-\lambda)(4c-8+(c+2)\lambda+\lambda^2) \\
&\quad -c(-3\lambda+6) - c(4c-6+(c+3)\lambda) \\
&= 4c^2 - 16 + (c^2+12)\lambda - \lambda^3 \\
&\quad -c^2\lambda - 4c^2
\end{aligned}$$

[3]Cette démonstration requiert des concepts qui ne sont pas inclus dans ce manuel.

$$= \quad -(\lambda^3 - 12\lambda + 16) = 0$$

On constate [4], que le résultat est indépendant de la valeur de c. La valeur du déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ est -16, ce que l'on obtient en remplaçant λ par zéro.

Normalement, la factorisation d'un tel polynôme n'est pas chose facile. **Cependant, pour les exemples et les exercices de ce cours, on peut supposer que les valeurs propres seront des entiers.** Comme on sait que le produit des valeurs propres élevées à l'ordre de leur multiplicité algébrique est égal au déterminant, on n'a que quelques choix possibles pour les valeurs propres si on suppose qu'on a des valeurs entières : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$, car ces valeurs doivent être des diviseurs de -16. En substituant dans l'équation, on peut vérifier facilement que les seules solutions possibles sont 2 et -4, et on peut vérifier que

$$(\lambda^3 - 12\lambda + 16) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

Nous avons donc une valeur propre (-4) avec une multiplicité algébrique de 1, et l'autre (2) avec une multiplicité algébrique de 2.

Nous procédons maintenant au calcul des vecteurs propres. Ces vecteurs vont satisfaire l'équation $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$. Commençons avec la valeur propre -4.

$$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 6+c & 3 & c+3 \\ c & 3 & c-3 \\ -c & -3 & -c+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6+c)x + 3y + (3+c)z \\ cx + 3y + (c-3)z \\ -cx - 3y + (3-c)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc un système de 3 équations homogènes à résoudre. On remarque que la troisième équation est la négation de la deuxième ; nous avons donc seulement deux équations différentes et trois variables, ce qui veut dire qu'une de ces variables sera une variable libre. [5]

Choisissons la variable z comme variable libre et écrivons-la comme le paramètre t. Le système d'équations à résoudre devient :

$$\begin{cases} 3y & + & (6+c)x & = & -(3+c)t \\ 3y & + & cx & = & (3-c)t \end{cases}$$

où nous avons choisi d'écrire en premier la variable y pour éviter d'avoir la constante inconnue c comme coefficient de la première variable dans la première ligne. [6]

[4] Ceci n'est pas un hasard, comme vous vous en doutez peut-être : j'ai choisi des valeurs bien particulières pour faire en sorte que ceci soit le cas.

[5] À noter que l'on doit toujours avoir une variable libre puisque le multiple d'un vecteur propre est également un vecteur propre ; donc, on ne peut pas avoir une solution unique. Cependant, bien que l'on ait pu identifier ce fait rapidement dans ce cas-ci, ce ne sera pas toujours le cas.

[6] Si on n'avait pas fait ce choix, on aurait eu $6 + c$ comme premier coefficient dans la première ligne. Pour faire en sorte que l'on ait la valeur 1 comme pivot, on aurait eu à diviser par $6 + c$, ce qui n'aurait pas été permis si on avait $c = -6$. Nous aurions donc du considérer ce cas séparément, et doubler le travail à faire.

Écrivons la matrice augmentée correspondant à ce système.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6+c & -(3+c)t \\ 3 & c & (3-c)t \end{array}\right]$$

De façon temporaire, écrivons $c = 3d$ et divisons les deux lignes par 3 :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2+d & -(1+d)t \\ 1 & d & (1-d)t \end{array}\right] \Rightarrow L_2 - L_1 \to L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2+d & -(1+d)t \\ 0 & -2 & 2t \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}L_2 \to L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2+d & -(1+d)t \\ 0 & 1 & -t \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_1 - (2+d)L_2 \to L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -t \end{array}\right]$$

En se rappelant que la variable y correspond à la première colonne de la matrice augmentée, nous avons donc :

$$\begin{array}{rcr} x & = & -t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}$$

Comme tout multiple non nul d'un vecteur propre est également un vecteur propre, nous pouvons faire le choix $t = 1$ et nous avons qu'un vecteur propre correspondant à la valeur propre -4 est

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On observe que ce résultat est indépendant de la valeur de la variable c.

Passons maintenant au cas de la valeur propre 2.

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} c & 3 & c+3 \\ c & -3 & c-3 \\ -c & -3 & -c-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + 3y + (c+3)z \\ cx - 3y + (c-3)z \\ -cx - 3y - (c+3)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci correspond à un système de 3 équations homogènes à résoudre. Cependant, on remarque que la troisième équation est la négation de la première : nous n'avons donc que deux équations indépendantes et nous pouvons choisir une variable comme étant une variable libre. Faisons le choix de x comme variable libre que nous paramétrisons par t. Le système d'équations à résoudre devient :

$$\begin{cases} 3y + (c+3)z & = & -ct \\ -3y + (c-3)z & = & -ct \end{cases}$$

Écrivons temporairement $c = 3d$ et trouvons la solution en utilisant la matrice augmentée de la façon habituelle

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3d+3 & -3dt \\ -3 & 3d-3 & -3dt \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{3}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{3}L_2 \to L_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & d+1 & -dt \\ -1 & d-1 & -dt \end{array}\right]$$

$$L_2 + L_1 \to L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & d+1 & -dt \\ 0 & 2d & -2dt \end{array}\right]$$

Supposons que d (qui est égal à $\frac{c}{3}$) soit différent de zéro. Dans ce cas, nous pouvons diviser la deuxième ligne par $2d$ et obtenir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & d+1 & -dt \\ 0 & 1 & -t \end{array}\right]$$

En soustrayant $d+1$ fois la deuxième ligne de la première, on obtient

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -t \end{array}\right]$$

et nous avons donc comme solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bien que la multiplicité algébrique de la valeur propre 2 soit 2, nous n'avons qu'un seul vecteur [7] propre correspondant et sa multiplicité **géométrique** est 1. On ne peut donc pas trouver de matrice de passage dans ce cas, et diagonaliser la matrice.

Cependant, on se rappelle que, pour obtenir ce résultat, on avait supposé que d était différent de zéro. Qu'arrive-t-il si $d = 0$? Dans ce cas, la matrice augmentée devient

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

et on a une deuxième variable libre. Si on paramétrise z par le scalaire s, la solution devient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -s \\ s \end{pmatrix}$$

Comme on a deux paramètres, on peut avoir deux vecteurs propres linéairement indépendants. En choisissant les combinaisons $(s,t) = (0,1)$ et $(-1,0)$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si on ajoute le troisième vecteur correspondant à la valeur propre -4,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on peut former une matrice de passage :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[7] À l'exception d'un facteur multiplicatif, comme toujours.

On peut trouver l'inverse de cette matrice suivant la procédure habituelle

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow L_3 + L_2 \to L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}L_3 \to L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 - L_3 \to L_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Nous avons donc

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+c & 3 & c+3 \\ c & -1 & c-3 \\ -c & -3 & -c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+c & -c & 4 \\ c & 2-c & -4 \\ -c & c-2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+c & -c & 0 \\ c & 2-c & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice est diagonale si et seulement si $c = 0$.

8.5 Exercices divers

Pour chacune des matrices de l'exercice 8.6 à l'exercice 8.10 :

1. Trouvez les valeurs propres et leur multiplicité algébrique.
2. Pour chaque valeur propre, trouvez ses vecteurs propres et déterminez sa multiplicité géométrique.
3. Si cela est possible, trouvez la matrice de passage permettant de diagonaliser la matrice.
4. Si cela est possible, obtenez la matrice semblable diagonale.

Veuillez noter que, si dans un système d'équations linéaires, une variable n'apparait nulle part, c'est qu'il s'agit d'une variable libre.

Exercice 8.6 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8.7 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8.8 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8.9 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 8.10 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix}$

Chapitre

9 Produit scalaire et orthogonalité

La notion de produit scalaire permet de définir la longueur, ou norme d'un vecteur, ainsi que l'orthogonalité de deux vecteurs. Ces deux propriétés, norme et orthogonalité, permettent à leur tour de définir des bases dites orthonormées pour les espaces vectoriels. L'utilisation de base orthonormées permet de simplifier énormément les calculs. En fait, lorsqu'on introduit les vecteur dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on utilise tout naturellement des bases orthonormées parce qu'elles constituent un choix naturel.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le produit scalaire dans sa forme la plus générale et donner un simple aperçu de la procédure pour obtenir une base orthonormée. Bien que ceci puisse, en principe, permettre d'étudier plusieurs applications intéressantes, nous devrons passer outre à leur étude faute de temps.

9.1 Introduction

Définition 9.1.1

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Pour chaque paire de vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ on peut associer un scalaire dénoté par $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, qu'on désigne sous le nom de **produit scalaire** de ces deux vecteurs et satisfaisant les axiomes suivants :

1. $\langle a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + b\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ pour $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$
3. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$
4. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Exercice 9.1 Lorsqu'on a des nombres complexes, on ne peut pas définir un ordre, du plus grand au plus petit. [a] Sachant ceci, lorsqu'on définit un produit scalaire sur le corps des complexes, expliquez comment la modification du deuxième axiome à

2. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}$

fait en sorte que le troisième axiome devienne possible. [b]

[a] Pour donner un exemple concret, pour les réels on sait que $-1 < 0 < 1$; si on a le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$, pouvez-vous décider si ce nombre est plus petit ou plus grand que zéro ?

[b] Rappelons que lorsqu'on met une barre au-dessus d'un nombre complexe, ceci indique que l'on prend son conjugué, remplaçant i par $-i$.

En utilisant le premier et le deuxième axiome, on peut vérifier que :

$$\langle \boldsymbol{w}, a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \rangle = a\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle + b\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$$

Exercice 9.2 Si on définit le produit scalaire sur le corps des complexes avec la modification mentionnée à l'exercice 9.1, démontrez que

$$\langle \boldsymbol{w}, a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \rangle = \bar{a}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle + \bar{b}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$$

On définit également la **norme** ou longueur d'un vecteur comme le nombre réel non négatif suivant :

norme

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$$

À noter qu'en raison des propriétés de l'addition des vecteur, y compris le vecteur nul $\mathbf{0}$, nous avons $\langle \boldsymbol{u} + \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$; également, en utilisant le premier axiome de la définition ci-dessus, nous devons avoir $\langle \boldsymbol{u} + \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle$, d'où l'on tire $\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \mathbf{0}$. De la même façon, on peut démontrer que $\langle \boldsymbol{v}, \mathbf{0} \rangle = \mathbf{0}$ Nous pouvons maintenant prouver une importante propriété connue sous le nom d'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 9.1.1

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ nous avons $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$. Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration: On note que l'inégalité est satisfaite si $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Nous allons maintenant considérer le cas $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ Définissons d'abord $z = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. Considérons ensuite l'inégalité

$$0 \leq \|\boldsymbol{w}\|^2 = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle$$

avec le vecteur $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \alpha z \boldsymbol{v}$ où α est un nombre réel que nous définirons plus tard. Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \boldsymbol{u} - \alpha z\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \alpha z\boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - \alpha z\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle - \alpha z\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \alpha^2 z^2 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\alpha z^2 + \alpha^2 z^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{aligned}$$

Choisissons maintenant $\alpha = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$; ceci nous donne

$$0 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\frac{z^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} + \frac{z^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} = \|\boldsymbol{u}\|^2 - \frac{z^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$$

d'où l'on obtient $\|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 \geq z^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2$. En prenant la racine carrée de chaque côté, on obtient le résultat recherché.

Exercice 9.3 Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Vous voudrez utiliser $z = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, et donc $\bar{z} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$; rappelons que, pour les nombres complexes, $z\bar{z} = |z|^2$

Puisqu'une valeur absolue doit être positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz peut être écrite comme

$$0 \leq \frac{|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} \leq 1$$

Pour les vecteurs réels, en enlevant la valeur absolue du numérateur, nous pouvons écrire

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} \leq 1$$

Nous pouvons utiliser ceci pour définir un angle $\theta_{u,v}$ entre les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ par la relation :

$$\cos \theta_{u,v} = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} \qquad \textbf{[9.1.1]}$$

Nous verrons au prochain chapitre que cette définition correspond bien à notre définition d'angle dans $\mathbb{R}^n$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de démontrer une autre inégalité connue sous le nom d'**inégalité triangulaire** :

inégalité triangulaire

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

La démonstration de cette inégalité pour les vecteurs réels est la suivante :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2 && \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 && \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&= (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2
\end{aligned}$$

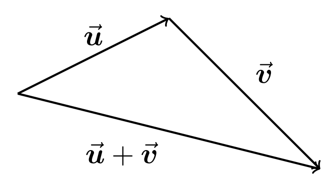


Figure 9.1 Illustration de l'inégalité du triangle dans le plan cartésien : la somme des longueurs de deux des côtés d'un triangle est plus grande que la longueur du troisième côté.

et donc $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2$. En prenant la racine carrée de chaque côté, on obtient le résultat recherché.

Exercice 9.4 Démontrez l'inégalité triangulaire pour les vecteurs complexes. Vous voudrez possiblement utiliser le fait que, pour un nombre complexe de la forme $a + bi$, nous avons

$$a + bi + \overline{a + bi} = 2a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$$

9.1.1 Exemples

Pour chaque espace vectoriel, on peut définir un produit scalaire. En voici quelques exemples.

1. Soit V l'espace des matrices $m \times n$ sur $\mathbb{R}$. On peut définir un produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A})$$

On note qu'en raison des propriétés de la multiplication des matrices,

$$(a\boldsymbol{A}^\top + b\boldsymbol{B}^\top)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{C} + b\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{C}$$

l'axiome 1 de la définition d'un produit scalaire est automatiquement satisfait.

2. Soit V l'espace des matrices $m \times n$ sur $\mathbb{C}$. On peut définir un produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{A})$$

3. Soit V l'espace des fonctions continues réelles sur l'intervalle $a \leq x \leq b$. On peut définir un produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Exercice 9.5 Considérez des matrices générales réelles de taille 3×2 :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Démontrez qu'en général $\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}$ mais que, néanmoins, les axiomes 2, 3 et 4 de la définition d'un produit scalaire sont satisfait si on a

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A})$$

Exercice 9.6 Calculez la norme des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ en utilisant la définition mentionnée ci-dessus pour le produit scalaire de matrices.

Un cas particulier du premier exemple est celui des matrices $m \times 1$ c'est-à-dire les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, pour $\mathbb{R}^3$, on peut avoir :

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{X}) = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Tr}(y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3) = y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3$$

Habituellement, **par convention** pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, au lieu d'utiliser la notation $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle$ on écrira plutôt [1] $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} \rangle$ et on traitera une matrice 1×1 comme un scalaire ce qui nous permettra d'omettre le symbole pour la trace. Ceci veut dire qu'on écrira pour le produit dans $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

On peut facilement vérifier que $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{X}$, que $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} \geq 0$ et que $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.

9.2 Orthogonalité

Définition 9.2.1

Deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont dits orthogonaux si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Une base formée de vecteurs orthogonaux est appelée une **base orthogonale**.

base orthogonale

Exercice 9.7 Vérifiez que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 9.2.1

Théorème de Pythagore : Deux vecteurs réels, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

Démonstration: Si on a deux vecteurs réels, alors $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$ et

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{aligned}$$

d'où l'on obtient $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 = 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. Si les deux vecteurs sont orthogonaux, le côté droit de l'égalité est zéro et le théorème de Pythagore est satisfait. Si le théorème de Pythagore est satisfait,

[1] En raison du point qui est utilisé entre les vecteurs pour indiquer la multiplication scalaire, on appelle ceci ***dot** product* en anglais. Le produit scalaire général est habituellement appelé *inner product* en anglais.

alors le côté gauche de l'égalité est zéro, ce qui signifie que le produit scalaire des deux vecteurs est égal à zéro et donc qu'ils sont orthogonaux.

Le concept d'**orthogonalité** est relié à celui d'**indépendance linéaire** ; en fait, on pourrait dire qu'il s'agit d'un cas extrême d'indépendance linéaire. Supposons que l'on ait deux vecteurs orthogonaux non nuls, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, et que l'on essaie de trouver deux constantes, α et β telles que

orthogonalité

indépendance linéaire

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

En prenant le produit scalaire de cette équation avec $\boldsymbol{u}$ on trouve $\alpha \|\boldsymbol{u}\|^2 = 0$ ce qui implique que $\alpha = 0$. En prenant le produit scalaire de cette équation avec $\boldsymbol{v}$, on trouve que $\beta = 0$. Donc, la seule façon que l'on puisse avoir

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

est si les deux constantes, α et β sont zéros. Par la définition de la dépendance linéaire, ceci veut dire que les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont linéairement indépendants. Par contre l'inverse n'est pas vrai : deux vecteurs linéairement indépendants ne sont pas nécessairement orthogonaux. Par contre, étant donné un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, on peut obtenir un ensemble de vecteurs orthogonaux. Supposons que l'on a deux vecteurs linéairement indépendants, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Écrivons le vecteur $\boldsymbol{w}$ comme la combinaison linéaire suivante :

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \alpha \boldsymbol{u}$$

et choisissons α tel que $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{u}$ soit orthogonaux :

$$0 = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle (\boldsymbol{v} + \alpha \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2}$$

On peut vérifier que $\mathrm{Vect}(\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\}) = \mathrm{Vect}(\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\})$.

On peut généraliser ceci à la situation où on a n vecteurs linéairement indépendants. Soit un tel ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n\}$. Choisissons $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$. Puis

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} \boldsymbol{u}_1$$

On peut vérifier que

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0$$

On peut continuer avec le troisième vecteur :

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \left(\frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} \boldsymbol{u}_1 + \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2} \boldsymbol{u}_2 \right)$$

ou, de façon générale, le $n^{ième}$ vecteur

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n - \left(\frac{\langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \frac{\langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_{n-1}\rangle}{\|\boldsymbol{u}_{n-1}\|^2}\boldsymbol{u}_{n-1}\right)$$

de telle sorte que $\{\boldsymbol{u}_j\}$ sera un ensemble orthogonal et que $\mathrm{Vect}(\{\boldsymbol{u}_j\}) = \mathrm{Vect}(\{\boldsymbol{v}_j\})$. La méthode que nous venons d'utiliser pour obtenir un ensemble de vecteurs orthogonaux à partir d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants est connue sous le nom de **procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**. Voyons-en un exemple concret.

procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Exemple 9.2.1

Soient une base de $\mathbb{R}^3$ formée par l'ensemble des vecteurs

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

À partir de cette base, obtenez un autre base contenant le vecteur $\boldsymbol{u}_1$ et uniquement des vecteurs orthogonaux.

Solution: Nous utilisons la procédure de Gram-Schmidt. Nous avons :

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1$$

avec

$$\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 2$$

et

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 1$$

de telle sorte que

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Le troisième vecteur est obtenu de façon semblable

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2$$

avec

$$\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

et

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}$$

ce qui nous donne

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La base recherchée est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 9.8 Soit la base suivante pour les matrices symétrique 2×2

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

À partir de cette base, obtenez un autre base contenant le vecteur [a] $\boldsymbol{u}_1$ et uniquement des vecteurs orthogonaux en utilisant la procédure de Gram-Schmidt.

[a] J'utilise ici le mot vecteur dans le sens général d'élément d'un espace vectoriel ; il s'agit bel et bien d'une matrice. La raison pour laquelle je mentionne ceci est qu'il existe un type de matrice qu'on appelle une matrice orthogonale et qui n'a rien à voir avec le produit scalaire. On dit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ qu'elle est orthogonale si elle obéit l'équation $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Exercice 9.9 Utilisez la méthode habituelle (matrice augmentée, élimination de Gauss-Jordan, etc.) pour exprimer la matrice symétrique

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

comme une combinaison linéaire des trois vecteur orthogonaux (matrices de la base) trouvés à l'exercice 9.8. Vérifiez que la combinaison linéaire que vous avez trouvée est effectivement égale à la matrice ci-dessus.

Définition 9.2.2

Un ensemble de vecteurs $\boldsymbol{v}_j$ est dit **orthonormé** si tous les vecteurs sont orthogonaux et que la norme de chaque vecteur est égale à 1

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Une base formée de tels vecteurs est appelée soit **base orthonormée** ou **base orthonormale**.

Exemple 9.2.2

À partir de la base orthogonale trouvée dans l'exemple 9.2.1, obtenez une base orthonormée.

Solution: Il suffit de diviser chacun des vecteurs par sa norme. $\boldsymbol{w}_j = \dfrac{\boldsymbol{v}_j}{\|\boldsymbol{v}_j\|}$

On peut vérifier que $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\|\boldsymbol{v}_3\| = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ce qui nous permet d'écrire la base orthonormée de la façon suivante :

$$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 9.10 Vérifiez que la norme de chacune des matrices de l'exercice 9.7 est 1, et donc que ces matrices forment un ensemble orthonormé.

Exercice 9.11 À partir de la base orthogonale trouvée dans l'exercice 9.8, obtenez une base orthonormée.

Le grand avantage des bases orthonormées est qu'elles nous permettent de trouver rapidement décomposition d'un vecteur quelconque dans cette base. Par exemple, supposons que la base $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ et que l'on veuille écrire un vecteur quelconque $\boldsymbol{v}$ comme une combinaison linéaire des trois vecteurs de cette base :

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{w}_3$$

Pour trouvez les trois inconnues, α_j, il suffit de prendre le produit scalaire avec le vecteur $\boldsymbol{w}_j$; par exemple :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle &= \alpha_1 \underbrace{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle}_{1} + \alpha_2 \underbrace{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle}_{0} + \alpha_3 \underbrace{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_3 \rangle}_{0} \\ &= \alpha_1\end{aligned}$$

puisque $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_j \rangle = \delta_{1j}$. Nous n'avons donc pas de système d'équations linéaires à résoudre !

Exemple 9.2.3

Exprimez le vecteur $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^\top$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base orthonormée de l'exemple 9.2.2.

Solution: Nous avons

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \frac{\sqrt{6}}{6}(-x+y+2z)$$

et

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-y+z)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x+y+2z}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.12 Utilisez les produits scalaires pour exprimer la matrice symétrique

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

comme une combinaison linéaire des trois vecteurs orthonormées (matrices de la base) trouvés à l'exercice 9.11. Vérifiez que la combinaison linéaire que vous avez trouvée est effectivement égale à la matrice ci-dessus.

Chapitre

10 Géometrie vectorielle

Dans ce chapitre, nous allons utiliser certaines notions de l'algèbre linéaire pour étudier la géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^3$, également connu sous le nom d'**espace euclidien à trois dimensions**. Nous allons nous intéresser à quatre type d'objets : 1) les points, objet à zéro dimension, que nous allons représenter par 2) des vecteurs ; 3) les droites, qui sont des objets ayant une dimension, et 4) les plans, qui sont des objets à deux dimensions.

espace euclidien à trois dimensions

Avant de débuter la matière du chapitre, répondez à la question suivante.

Exercice 10.1 Vrai ou faux : l'équation $y = mx + b$ représente une droite.

10.1 Notation utilisée dans ce chapitre

Dans ce chapitre, nous allons utiliser une notation légèrement différente de celle utilisée dans le reste de ce livre pour adopter une notation traditionnellement utilisée dans les cours d'introduction aux vecteurs dans l'espace euclidien ($\mathbb{R}^3$) ainsi que dans les sciences naturelles telle que la physique. Ainsi, un vecteur sera représenté soit par un symbole surmonté d'une flèche, $\vec{r}$, ou par un triplet de nombres, (x, y, z) qui est simplement un vecteur ligne [1] où on utilise des virgules pour séparer les coefficients dans le but d'éviter toute ambiguïté. Nous allons utiliser la base de vecteurs suivante :

$$\begin{aligned}
\vec{\imath} &= (1,0,0) && \text{vecteur unitaire le long de l'axe des } x \\
\vec{\jmath} &= (0,1,0) && \text{vecteur unitaire le long de l'axe des } y \\
\vec{k} &= (0,0,1) && \text{vecteur unitaire le long de l'axe des } z
\end{aligned}$$

ce qui nous donne une autre façon de représenter un vecteur :

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

[1] C'est-à-dire une matrice 1×3

Avec la notation que nous avons utilisée dans les autres chapitres, avec $\{\boldsymbol{e}_j\}$ comme base de l'espace vectoriel, nous aurions plutôt écrit :

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

10.2 Produit scalaire

Nous avons déjà vu le produit scalaire de deux vecteurs, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{v}^\top, \boldsymbol{u})$. Dans la notation utilisée dans ce chapitre, nous écrivons le produit scalaire de la façon suivante :

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Supposons que nous choisissons l'orientation de notre système d'axes de telle sorte que le vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ est dans le plan xy et que le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}$ est le long de l'axe des x tel qu'illustré à la figure 10.1.

$$\begin{array}{rcl} \vec{\boldsymbol{u}} & = & (a, b, 0) \\ \vec{\boldsymbol{v}} & = & (v, 0, 0) \end{array}$$

Si on fait le calcul, on trouve que le produit scalaire est $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = av$. En examinant la figure 10.1, on constate que $a = u\cos\theta$ de telle sorte que [2] $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = uv\cos\theta$ où $u = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|$ et $v = \|\vec{\boldsymbol{v}}\|$.

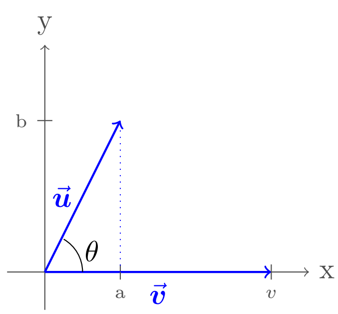


Figure 10.1 Deux vecteurs séparés par un angle θ. Lorsqu'on fait le produit scalaire de ces deux vecteurs, ceci revient à multiplier la longueur d'un de ces deux vecteurs ($v = \|\vec{\boldsymbol{v}}\|$) par la projection de l'autre ($u\cos\theta = a$).

10.3 Produit vectoriel

Soient les vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$. Nous pouvons construire une matrice 3×3 telle que chaque ligne est un de ces vecteurs :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{u}} \\ \vec{\boldsymbol{v}} \\ \vec{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

[2] Ce résultat est ce que nous avions défini à l'équation [9.1.1] pour le cosinus de l'angle entre deux vecteurs.

Si on calcule le déterminant de cette matrice [3] en faisant l'expansion par la première rangée, on trouve :

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

On peut écrire ceci comme un produit scalaire de deux vecteurs :

$$|\boldsymbol{M}| = (u_1\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + u_3\vec{\boldsymbol{k}}) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\jmath}} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{k}} \right)$$

Nous définissons le **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}$ comme étant le deuxième vecteur apparaissant dans le produit scalaire ci-dessus :

produit vectoriel

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\jmath}} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{k}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

de telle sorte que, avec cette définition, le déterminant de la matrice $\boldsymbol{M}$ peut être écrit :

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{u}} \\ \vec{\boldsymbol{v}} \\ \vec{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}})$$

l'expression $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}})$ étant connue sous le nom de **produit mixte**. Quelques remarques sur le produit vectoriel :

produit mixte

1. Puisque le déterminant d'une matrice qui a deux lignes identiques est égal à zéro, cela veut dire que si on choisit $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}$, le déterminant sera nul, et donc $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = 0$ ce qui veut dire que le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$ est orthogonal au vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}$.
2. De la même façon, si on choisit $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{w}}$, on conclut que le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$ est orthogonal au vecteur $\vec{\boldsymbol{w}}$.
3. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$ est donc perpendiculaire au plan engendré par les vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{w}}$.
4. Puisque le déterminant change de signe si on interchange deux lignes, on en conclut que
$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = -\vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$$
5. On observe que le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul : $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{0}}$
6. La direction d'un vecteur résultant d'un produit vectoriel est donné par la *règle de la main droite* illustrée par la figure dans la marge.
7. Le résultat d'un produit vectoriel est un *pseudo-vecteur* : si fait une réflexion par rapport aux trois axes, un vecteur change de signe alors qu'un pseudo-vecteur reste inchangé.

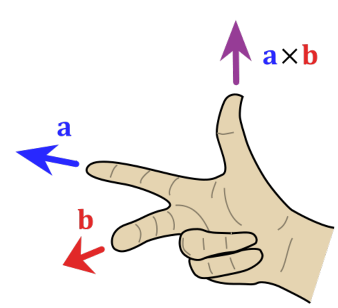


FIGURE 10.2 Règle de la main droite donnant la direction d'un produit vectoriel.

[3]Puisque le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égaux, on aurait pu définir une telle matrice en utilisant chaque vecteur comme une colonne de la matrice plutôt que comme une ligne.

8. Le produit vectoriel n'est pas une opération définie dans tous les espaces vectoriels : on peut seulement le définir [4] dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^7$; dans ce dernier cas, le produit ne peut pas être exprimé comme un simple déterminant de la même façon que nous avons défini le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

Finalement, calculons la longueur de ce vecteur :

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\times\vec{w}\|^2 &= (v_2w_3-v_3w_2)^2+(v_1w_3-v_3w_1)^2+(v_1w_2-v_2w_1)^2\\
&= (v_2w_3)^2+(v_3w_2)^2-2(v_2v_3w_2w_3)+(v_1w_3)^2+(v_3w_1)^2-2(v_1v_3w_1w_3)\\
&\quad +(v_1w_2)^2+(v_2w_1)^2-2(v_1v_2w_1w_2)\\
&\qquad {\color{blue}+(v_1w_1)^2+(v_2w_2)^2+(v_3w_3)^2}\\
&\qquad {\color{red}-(v_1w_1)^2-(v_2w_2)^2-(v_3w_3)^2}\\
&= v_1^2(w_1^2+w_2^2+w_3^2)+v_2^2(w_1^2+w_2^2+w_3^2)+v_3^2(w_1^2+w_2^2+w_3^2)\\
&\quad -(v_1w_1)^2-(v_2w_2)^2-(v_3w_3)^2-2(v_1v_2w_1w_2)-2(v_1v_3w_1w_3)-2(v_2v_3w_2w_3)\\
&= (v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2\\
&= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2-(\vec{v}\cdot\vec{w})^2\\
&= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2-\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2\cos^2\theta\\
&= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2(1-\cos^2\theta)\\
&= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

On obtient donc $\|\vec{v}\times\vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin\theta = vw\sin\theta$ où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Exemple 10.3.1

Soient les vecteurs $\vec{v}=(1,2,3)$ et $\vec{u}=(0,4,-5)$.

(a) Calculez le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{u}$.

(b) Calculez le produit vectoriel $\vec{v}\times\vec{u}$.

Solution:

(a) Le produit scalaire

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{u} &= (1,2,3)\cdot(0,4,-5)\\
&= 1\cdot 0+2\cdot 4+3\cdot(-5) = -7
\end{aligned}$$

On note que ces vecteurs ne sont pas orthogonaux parce que leur produit scalaire n'est pas nul.

(b) Le produit vectoriel $\vec{v}\times\vec{u}$ est obtenu en calculant le déterminant suivant :

$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{vmatrix}$$

Pour calculer un tel déterminant, il est toujours plus simple de faire l'expansion par la première ligne car ceci nous donne directement les composantes du nouveau vecteur. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{vmatrix} &= \vec{\imath}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -5\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\
&= -22\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+4\vec{k}
\end{aligned}$$

[4] La preuve pour ceci requiert des notions allant au-delà de ce cours.

et donc $\vec{v} \times \vec{u} = (-22, 5, 4)$. On note que ces vecteurs ne sont pas parallèles parce que leur produit vectoriel n'est pas nul.

Exercice 10.2 Vérifiez que les propriétés suivantes des vecteurs unitaires sont satisfaites.

$$\begin{cases} \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} = -\vec{k} \times \vec{\jmath} \\ \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \times \vec{k} \\ \vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Suggestion : $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$

Les vecteurs de l'exemple précédent ne sont ni orthogonaux, ni parallèles. On peut calculer de deux façons l'angle entre ces deux vecteurs, tel qu'illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 10.3.2

Calculez l'angle entre les vecteurs $\vec{v} = (1, 2, 3)$ et $\vec{u} = (0, 4, -5)$.

Solution: Comme nous avons déjà calculé le produit scalaire ainsi que le produit vectoriel de ces deux vecteurs dans l'exemple précédent, à première vue on pourrait penser qu'on pourrait soit utiliser $\vec{v} \cdot \vec{u} = uv \cos\theta$ ou $\|\vec{v} \times \vec{u}\| = uv \sin\theta$ pour déterminer l'angle θ entre ces deux vecteurs. Dans les deux cas, nous devons calculer la norme de chacun de ces vecteurs. Nous avons

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

et

$$u = \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

Comme nous avons trouvé que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -7$, nous obtenons

$$\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{41}} \Rightarrow \theta = 1,867\ldots \text{rad ou approx. } 107 \text{ degrés}$$

Nous aurions pu également utiliser le résultat du produit vectoriel.

$$\|\vec{v} \times \vec{u}\| = \sqrt{(-22, 5, 4) \cdot (-22, 5, 4)} = \sqrt{525}$$

et

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{525}}{\sqrt{14}\sqrt{41}} = 73,01\ldots \text{degrés}\ldots \quad \text{ou } 107 \quad [= 180 - 73]$$

Comme on le voit, si on utilise le produit vectoriel, on ne peut pas décider si l'angle est entre 0 et $\pi/2$ ou entre $\pi/2$ et π, tel qu'illustré à la figure 10.3 ; pour cette raison, il est préférable d'utiliser le produit scalaire pour déterminer l'angle entre les vecteurs.

Habituellement, lorsque le produit vectoriel est présenté pour la première fois, la méthode de calcul choisie utilise les propriétés du produit vectoriel des vecteurs unitaires telle que listée à l'exercice 10.2 et présente la multiplication suivant le même modèle qu'on utiliserais pour multiplier des polynômes, plutôt que d'utiliser l'expansion d'un déterminant. L'exemple suivant démontre ceci.

Exemple 10.3.3

Calculez le produit vectoriel des vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, 2, 3)$ et $\vec{\boldsymbol{u}} = (0, 4, -5)$.

Solution: Comme nous pouvons écrire $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\imath}} + 2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}$ et $\vec{\boldsymbol{u}} = 4\vec{\boldsymbol{\jmath}} - 5\vec{\boldsymbol{k}}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{u}} &= (\vec{\boldsymbol{\imath}} + 2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}) \times (4\vec{\boldsymbol{\jmath}} - 5\vec{\boldsymbol{k}}) \\
&= 4\vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} - 5\vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{k}} + 2 \cdot 4\vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} - 2 \cdot 5\vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{k}} + 3 \cdot 4\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} - 3 \cdot 5\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} \\
&= 4\vec{\boldsymbol{k}} + 5\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 0 - 10\vec{\boldsymbol{\imath}} - 12\vec{\boldsymbol{\imath}} + 0 \\
&= -22\vec{\boldsymbol{\imath}} + 5\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 4\vec{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

et donc, $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{u}} = (-22, 5, 4)$ comme on l'avait vu à l'exemple 10.3.1.

Exercice 10.3 Calculez le produit scalaire, le produit vectoriel et l'angle entre les vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}} = (3, -5, 4)$ et $\vec{\boldsymbol{v}} = (3, 5, 4)$. Utilisez la méthode du déterminant pour calculer le produit vectoriel.

Exercice 10.4 Calculez le produit scalaire, le produit vectoriel et l'angle entre les vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}} = (3, -5, 4)$ et $\vec{\boldsymbol{v}} = (2, -1, 0)$. Utilisez la méthode du produit de polynômes pour calculer le produit vectoriel.

10.3.1 Interprétation géométrique de la norme du produit vectoriel

Supposons que nous avons deux vecteurs, $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ et que nous choisissions[5] nos axes de telle sorte que $\vec{\boldsymbol{u}}$ soit orienté le long de l'axe des x, $\vec{\boldsymbol{u}} = (u, 0, 0)$, et que $\vec{\boldsymbol{u}}$ soit dans le plan xy, $\vec{\boldsymbol{v}} = (a, b, 0)$, tel qu'illustré sur la figure 10.3. Le produit vectoriel $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ est obtenu en calculant le déterminant :

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ u & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$$

[5] Peu importe les deux vecteurs qu'on nous donne, il est toujours possible de choisir un système d'axes ayant l'orientation que nous décrivons.

Puisque la troisième colonne ne contient qu'un terme non-nul, le calcul du déterminant est simplifié si on fait l'expansion suivant cette colonne :

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{k}} \begin{vmatrix} u & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = ub\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

Ceci nous donne une interprétation géométrique [6] : la norme de ce produit est ub ce qui est égal à l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$. En examinant la figure 10.3, on observe que $b = v \sin\theta$ et donc on peut écrire la norme comme étant $uv \sin\theta$ comme on l'avait obtenu auparavant dans le cas général.

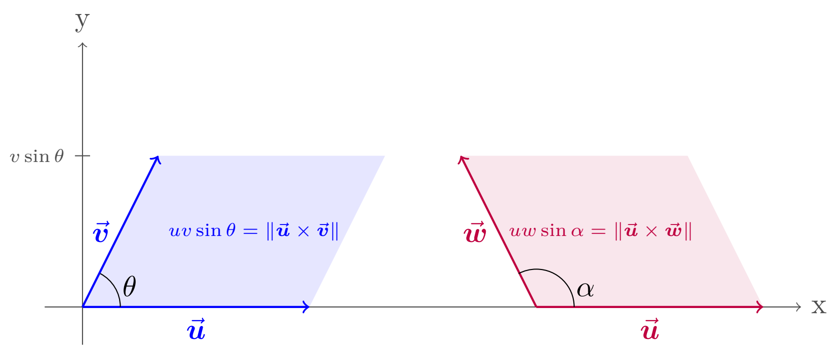


FIGURE 10.3 L'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ est égale à la norme de leur produit vectoriel. La même chose est vraie pour les vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{w}}$. On note que l'aire des deux parallélogrammes est la même, même si les vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{w}}$ sont différents et que les angles θ et α sont différents, parce que $\sin\theta = \sin\alpha$ et $v = w$.

10.4 Équation paramétrique d'une droite

Une droite est un objet ayant une dimension. On peut définir des droites dans des espaces euclidiens à n dimensions ; nous allons nous limiter à leur étude dans un espace euclidien à trois dimensions et, parfois pour simplifier les diagrammes, nous allons simplement les représenter dans un espace euclidien à deux dimensions (le plan de la feuille de papier ou de l'écran d'ordinateur où vous lisez ce manuel).

10.4.1 Sous-espace vectoriel à une dimension

Nous avons déjà vu que, pour un espace vectoriel arbitraire V à n dimensions, nous pouvions avoir un sous-espace vectoriel W à une dimension. Nous pouvons choisir tout vecteur non-nul $\boldsymbol{v} \in W$ pour définir une base $\{\boldsymbol{v}\}$ de ce sous-espace de telle sorte que tout vecteur arbitraire $\boldsymbol{w} \in W$ peut être représenté par $\mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v}\}$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons

[6] Puisqu'on a choisi de définir le produit vectoriel en partant d'un déterminant d'une matrice de trois vecteurs, nous avions essentiellement déjà vu ceci dans la section 7.5. Dans la plupart des autres livres, on présente une autre définition du produit vectoriel et le calcul en utilisant un déterminant est présenté comme un "truc" utile.

linéaires possibles des vecteurs de la base. Puisqu'on a un seul vecteur, les seules combinaisons linéaires possibles peuvent être paramétrisées par un scalaire t de telle sorte que

$$\boldsymbol{w} = t\boldsymbol{v}$$

Parmi tous ces vecteurs, on retrouve le vecteur nul qui correspond au choix $t = 0$.

10.4.2 Droite dans l'espace euclidien à trois dimensions

Un sous-espace vectoriel à une dimension dans l'espace euclidien est une droite passant par l'origine. Étant donné un vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}$, l'ensemble des points de la forme

$$\vec{\boldsymbol{r}} = t\vec{\boldsymbol{v}}$$

où $\vec{\boldsymbol{r}} = (x, y, z)$, forme une droite passant par l'origine. Si on veut représenter une droite arbitraire ne passant pas nécessairement par l'origine [7], mais passant par un point identifié par le vecteur constant $\vec{\boldsymbol{v}}_0$, on peut simplement écrire :

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}$$

Le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}$, qui donne la direction de droite, s'appelle le **vecteur directeur** de la droite, et cette équation est l'**équation paramétrique** de la droite. Au lieu de la notation $\vec{\boldsymbol{v}}_0$, on utilisera plutôt parfois P_0 où la variable P indique un *point* dans le plan ; le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ sera donc le vecteur joignant l'origine O au point P_0 et sera parfois représenté par $\overrightarrow{OP_0}$. On utilise parfois la lettre Δ pour représenter une droite.

vecteur directeur
équation paramétrique

Par exemple, soit la droite $\Delta : y = 3$ parallèle à l'axe des x dans le plan cartésien et illustrée à la figure 10.4. Un point quelconque sur cette droite peut être dénoté par $\vec{\boldsymbol{r}} = (x, y) = (x, 3) = (0, 3) + x(1, 0)$, comme par exemple le point $(4, 3)$. De façon alternative, en utilisant les vecteurs unitaires de base, on peut représenter un point appartenant à cette droite $\vec{\boldsymbol{r}} = t\vec{\boldsymbol{\imath}} + 3\vec{\boldsymbol{\jmath}} \in \Delta$ où on a utilisé la variable t comme paramètre plutôt que la variable x qui est généralement réservée pour identifier une coordonnée d'un point.

À noter que l'équation $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}$ dénote une droite générale, tel qu'illustré à la figure 10.5.

Est-ce que l'équation sous forme paramétrique est toujours valable dans l'espace à trois dimensions ?
Réponse : oui, contrairement à l'équation $y = mx + b$ qui, dans ce cas et comme nous le verrons, représente un plan ! On peut obtenir l'équation d'une droite en termes de coordonnées de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}} &= \vec{\boldsymbol{v}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}} \\
\Rightarrow \quad (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} x - x_0 = tv_1 \\ y - y_0 = tv_2 \\ z - z_0 = tv_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

[7] Et donc, ne formant pas un sous-espace vectoriel puisqu'elle n'inclut pas le vecteur nul

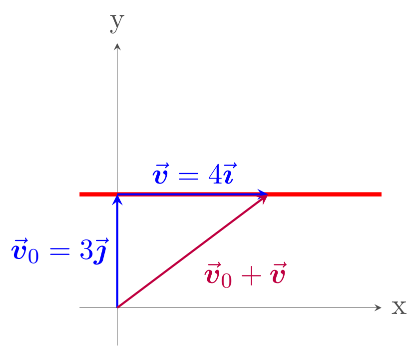


Figure 10.4 La droite $y = 3$, indiquée en rouge.

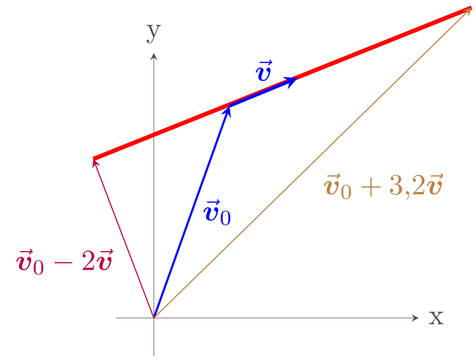


Figure 10.5 Une droite arbitraire dans le plan.

Puisque le paramètre t est le même dans les trois équations, on écrit habituellement ceci comme

$$t = \quad \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

sans inclure le paramètre t et où on suppose qu'aucuns des dénominateurs n'est égal à zéro. En fait, habituellement, on ne connait pas le vecteur directeur $\vec{v}$ mais on connait deux points ; à partir de ces points, on peut obtenir $\vec{v}$ de la façon suivante :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

de telle sorte que l'équation sous forme symétrique devient

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

et en se rappelant que si l'un des dénominateurs s'annule (par exemple $z_1 = z_0$), alors le numérateur doit s'annuler également (par exemple $z = z_0$). Cette façon d'écrire l'équation d'une droite est parfois appelée la **forme symétrique**. Lorsqu'une droite est exprimée ainsi, on voit que ça correspond bien au fait qu'on ne peut avoir qu'une seule droite qui passe par deux points distincts ; les points ici seraient $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

forme symétrique

Exemple 10.4.1

Soit l'équation d'une droite **dans le plan** exprimée sous la forme traditionnelle :

$$y = 2x + 3$$

Obtenez une forme paramétrique de cette droite ainsi qu'une forme symétrique.

Solution: La façon la plus simple est de trouver deux points appartenant à cette droite. Par exemple, si on choisis $x = 1$ alors on aura $y = 5$. Appelons ce point $P_0 = (1, 5)$. On peut choisir un autre point, par exemple $P_1 = (2, 7)$. En utilisant ces valeurs, on peut obtenir directement la forme symétrique comme suit :

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 5}{7 - 5} \qquad \Rightarrow \qquad x - 1 = \frac{y - 5}{2}$$

On peut vérifier facilement que cette équation est équivalente à l'équation dans sa forme traditionnelle.
Pour obtenir la forme paramétrique, on écrit

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (2,7) - (1,5) = (1,2)$$

et donc

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (x,y) = (1,5) + t(1,2)$$

On peut vérifier que si $t = 0$ alors $\vec{\boldsymbol{r}} = P_0$, et si $t = 1$, alors $\vec{\boldsymbol{r}} = P_1$.

10.5 Distance d'un point à une droite

Soit une droite obéissant l'équation $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}$; on veut trouver la distance entre cette droite et un point P. Pour trouver cette distance, on commence par choisir un point arbitraire de la droite. Puisqu'on connait déjà le point P_0 défini par $\overrightarrow{OP_0} = \vec{\boldsymbol{v}}_0$, c'est le point qu'on va utiliser, bien que tout autre point pourrait être choisi. Si $P = P_0$, il est évident que la distance recherchée est zéro ; dans ce qui suit, nous allons considérer le cas $P \neq P_0$. En raison de la loi d'addition des vecteurs, nous avons

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP}$$

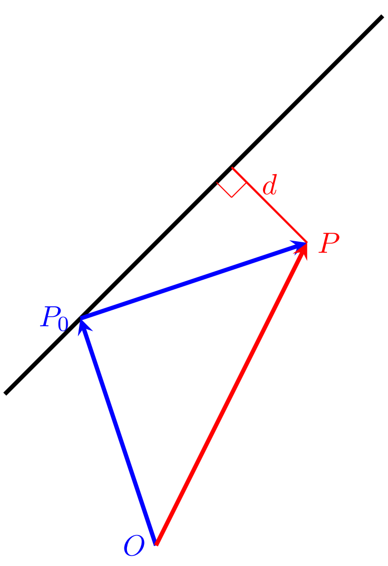


Figure 10.6 Distance entre le point P et la droite passant par le point P_0.

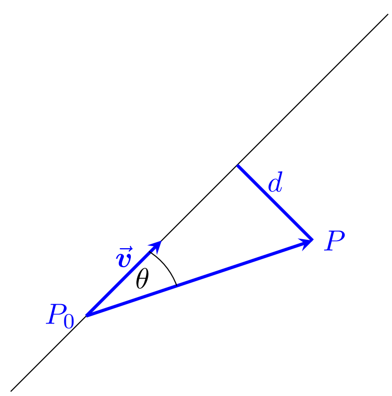


Figure 10.7 Visualisation de l'angle θ entre le vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{v}}$ et le vecteur joignant les points P_0 et P.

Si on observe la figure 10.7 on observe que la distance recherchée est d qui est le côté opposé à l'angle θ du triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale à $\overrightarrow{P_0P}$. Donc, nous avons

$$d = \|\overrightarrow{P_0P}\| \sin\theta$$

Nous savons également que la norme du produit vectoriel $\vec{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{P_0P}$ est

$$\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{P_0P}\| = v\|\overrightarrow{P_0P}\| \sin\theta$$

En comparant ces deux expressions, on obtient

$$d = \frac{\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$$

qui est le résultat recherché.

Exemple 10.5.1

Trouver l'équation paramétrique ainsi que l'équation sous forme symétrique de la droite passant par les points $P_0 = (3,4,0)$ et $P_1 = (2,4,5)$. De plus, trouver la distance entre le point $P = (1,2,3)$ et cette droite.

Solution: Un vecteur directeur est donné par un multiple du vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (2,4,5) - (3,4,0) = (-1,0,5)$$

Similairement, on peut choisir $\vec{\boldsymbol{v}}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (3,4,0)$ et donc l'équation paramétrique peut être écrite comme

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (3,4,0) + t(-1,0,5)$$

La forme symétrique de la droite est obtenue directement à partir des points originaux **mais** en notant que y est constant :

$$y = 4 \quad \text{et} \quad \frac{x-3}{2-3} = \frac{z-0}{5-0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x-3}{-1} = \frac{z}{5}$$

À noter que, si on avait interchangé P_0 et P_1 et tenter d'utiliser l'équation telle que nous l'avions dérivée, nous aurions obtenu une division par zéro, ce qui n'est évidemment pas permis. Donc, pour obtenir une forme symétrique, on doit parfois obtenir en premier la forme paramétrique, en déduire la valeur de deux points distincts qui n'ont pas de composantes de coordonnées qui sont nulles, et ensuite utiliser ces deux points pour obtenir une forme symétrique.

La distance du point P à cette droite est obtenue simplement en calculant

$$d = \frac{\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$$

où $\overrightarrow{P_0P} = (1,2,3) - (3,4,0) = (-2,-3,3)$et donc

$$d = \frac{\|(-1,0,5) \times (-2,-2,3)\|}{\|(-2,-3,3)\|}$$

Mais

$$(-1,0,5) \times (-2,-2,3) = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{\imath}} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{\boldsymbol{\jmath}} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{\boldsymbol{\imath}} - 7\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 2\vec{\boldsymbol{k}}$$

et donc

$$d = \frac{\|(10,-7,2)\|}{\|(-2,-2,3)\|} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}$$

Exercice 10.5 Trouver l'équation paramétrique ainsi que l'équation sous forme symétrique de la droite passant par les points $P_0 = (9,0,3)$ et $P_1 = (5,3,0)$. De plus, trouver la distance entre l'origine et cette droite.

Exercice 10.6 Trouver l'équation paramétrique ainsi que l'équation sous forme symétrique de la droite passant par les points $P_0 = (1,2,3)$ et $P_1 = (4,-1,7)$. De plus, trouver la distance entre le point $P = (2,-5,1)$ et cette droite.

10.6 Équation d'un plan

Soit deux vecteurs linéairement indépendants[8], $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. L'ensemble des points formés par l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs forme un plan passant par l'origine. Si on ajoute à chacune de ces combinaisons linéaires un vecteur constant $\vec{\boldsymbol{v}}_0$, on peut obtenir n'importe quel plan Π dans l'espace euclidien

$$\Pi : \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + s\vec{\boldsymbol{v}}_1 + t\vec{\boldsymbol{v}}_2$$

Cette équation vectorielle est équivalente aux trois équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x &= x_0 + s\,x_1 + t\,x_2 \\ y &= y_0 + s\,y_1 + t\,y_2 \\ z &= z_0 + z\,x_1 + t\,z_2 \end{cases}$$

On peut démontrer qu'on peut trouver une expression équivalente appelée l'**équation cartésienne du plan**

équation cartésienne du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Soit le point $P = (x,y,z)$ appartenant au plan Π ; le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ sera donc dans le plan engendré par les vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Par la définition du produit mixte, on sait que

$$-\overrightarrow{P_0P} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2) = 0$$

où on a choisit de mettre un signe - devant l'expression simplement pour changer l'ordre des termes dans une expression à venir pour faciliter la comparaison avec l'équation cartésienne du plan écrite ci-dessus. Si on écrit

[8] On dit de deux vecteurs linéairement **dépendants** qu'ils sont **colinéaires**.

$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP}$, le produit mixte ci-dessus peut être écrit comme la différence de deux déterminants

$$0 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{OP} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overrightarrow{OP_0} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_2 \end{vmatrix}$$

On peut récrire ceci comme

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Faisons l'expansion de ces deux déterminants selon la première ligne.

$$\begin{aligned} 0 = \quad & x\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ & - x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} - z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Définissons les trois variables suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ B &= -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'obtenir l'expression recherchée

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = Ax + By + Cz + D = 0$$

où $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

De plus, on observe que $\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 = (A, B, C)$ est un vecteur orthogonal au plan. Au lieu du mot orthogonal, on utilise habituellement le mot **normal** [9]. **normal**

Finalement, on note que si on a $C = 0$, on peut définir $m = -A/B$ et $b = -D/A$ ce qui nous permet d'avoir l'équation du plan $y = mx + b$!

[9] Perpendiculaire, orthogonal et normal sont presque des synonymes. Ceci peut parfois porter à confusion, d'autant plus si l'on inclut un faux ami comme la norme (ou longueur) d'un vecteur ainsi que l'adjectif normé, signifiant de longueur unitaire. [normé ≠ normal] On a vu une combinaison de deux termes avec les bases orthonormées qui décrivent des vecteur orthogonaux (le préfixe ortho) de longueur unitaire (le suffixe normées). Cela dit, on utilise habituellement l'adjectif orthogonal lorsqu'on veut décrire la propriété de deux objets semblables (par exemple : des vecteurs orthogonaux) et l'adjectif normal lorsque les deux objets sont différents (par exemple : le vecteur normal à un plan ou à une droite). L'adjectif perpendiculaire est réservé aux objets qui se trouvent dans un même plan.

10.7 Distance d'un point à un plan

Soit un point [10] $P = (x, y, z)$. On veut trouver la distance de ce point au plan donné par l'équation cartésienne

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

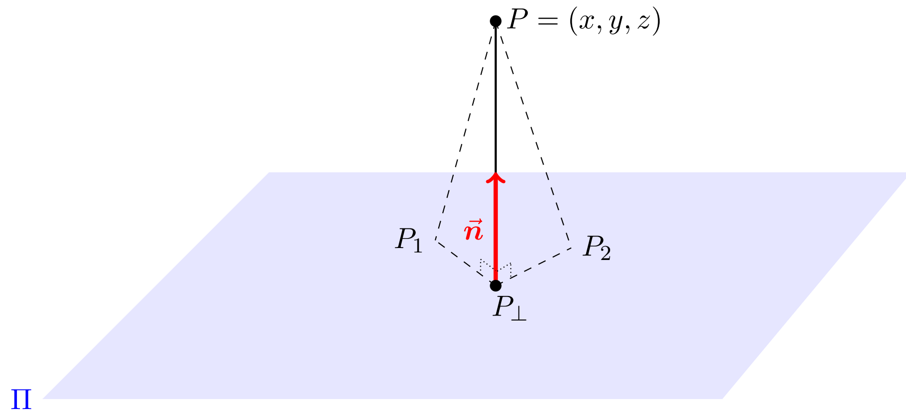


Figure 10.8 La distance du point P au plan Π égale à la longueur du segment de droite joignant les points P et $P_\perp$; cette distance est inférieure à la distance entre P et tout autre point du plan, tel que P_1 ou P_2. Notez que le point aurait pu être choisi sous le plan, et donc dans une direction opposée à celle du vecteur normal indiqué sur la figure.

Cette distance sera égale à la longueur du segment de droite joignant le point P à sa projection sur le plan indiquée par le point $P_\perp$. Pour fins de clarification, il est important de noter que le point $P_\perp$ appartient au plan Π et que nous avons donc

$$\Pi : Ax_\perp + By_\perp + Cz_\perp + D = 0$$

Par contre, le point P n'appartient pas nécessairement au plan Π.

Le segment de droite joignant les points $P_\perp$ et P est colinéaire à la normale de ce plan que nous désignons par $\vec{\boldsymbol{n}}$. Nous avons donc $\overrightarrow{P_\perp P} = k\vec{\boldsymbol{n}}$, et la distance recherchée est donc

$$d = \|\overrightarrow{P_\perp P}\| = |k| \, \|\vec{\boldsymbol{n}}\|$$

Nous avons vu précédemment que le vecteur (A, B, C) était un vecteur normal au plan. Ceci nous permet d'écrire

$$\left(x_\perp - x, y_\perp - y, z_\perp - z\right) = k\left(A, B, C\right)$$

Nous avons donc le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_\perp &= x + kA \\ y_\perp &= y + kB \\ z_\perp &= z + kC \\ Ax_\perp + By_\perp + Cz_\perp + D &= 0 \end{cases}$$

[10] Nous avons choisi d'utiliser les variables x, y, z pour dénoter les coordonnées du point. Par contre, tel qu'il est indiqué dans le texte, ceci ne veut **pas** nécessairement dire que ces coordonnées obéiront l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$.

En substituant les valeurs des variables des trois premières équations dans la quatrième, on trouve

$$Ax + By + Cz + D + k(A^2 + B^2 + C^2) = 0$$

Pour un plan quelconque, il peut arriver que l'une, voire deux des variables A, B, C soit égale à zéro, mais jamais les trois en même temps. Donc, nous avons

$$k = -\frac{Ax + By + Cz + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$d = |k|\,\|\vec{\boldsymbol{n}}\| = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

et donc

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

On observe que si le point P appartient au plan, alors le numérateur s'annule et la distance au plan est évidemment égale à zéro.

Exemple 10.7.1

Obtenez l'équation cartésienne du plan passant par les points $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ et $P_3 = (0, 0, 1)$ et déterminez la distance entre l'origine et ce plan.

Solution: Avant de présenter la solution, nous notons qu'aucun des points n'est indiqué comme étant le point P_0. Ceci n'est pas un hasard : bien que dans la dérivation, le point P_0 semble jouer un rôle particulier, dans la pratique on peut choisir n'importe quel point comme étant le point P_0 de la dérivation. Nous commençons par choisir deux vecteurs qui sont parallèles au plan :

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{P_2P_3} = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

et

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

Choisissons ensuite le point P_3 pour jouer le rôle du point P_0 de notre dérivation. Nous devons avoir

$$0 = -\overrightarrow{P_3P} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{OP} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overrightarrow{OP_3} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - y - z + 1$$

et donc l'équation cartésienne du plan peut s'écrire : $x+y+z = 1$. On peut vérifier facilement que les trois points qui nous étaient donnés satisfont cette équation. Si on compare avec la forme $Ax+By+Cz+D = 0$, on a $A = B = C = 1$ et $D = -1$.

La distance d'un point à un plan est donnée par l'équation

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ici, le point qui nous intéresse est l'origine $(0,0,0)$ et donc la distance recherchée est

$$d = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 10.7 Obtenez l'équation cartésienne du plan passant par les points $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (1,-3,2)$ et $P_3 = (0,0,1)$ et déterminez la distance entre le point $P = (2,2,2)$ et ce plan.

Exercice 10.8 Obtenez l'équation cartésienne du plan passant par les points $P_1 = (4,-3,6)$, $P_2 = (5,2,-8)$ et $P_3 = (3,1,2)$ et déterminez la distance entre le point $P = (1,2,3)$ et ce plan.

Chapitre

11 Applications diverses

L'algèbre linéaire est utilisée dans un grand nombre de domaines. Certaines applications ne font appel qu'aux notions couvertes dans ce manuel alors que d'autres requièrent des notions plus avancées. Dans ce chapitre, vous trouverez plusieurs exemples d'applications de l'algèbre linéaire.

Tel que je l'ai mentionné dans la préface, j'aimerais remercir Monsieur Joseph Khoury de l'Université d'Ottawa pour m'avoir donné la permission d'utiliser et d'adapter les exemples d'applications de l'algèbre linéaire qui se trouve sur son site Internet.

11.1 Équilibrage des réactions chimiques

Les techniques de l'algèbre linéaire peuvent être utilisées pour faire de qu'on appelle l'équilibrage des réactions chimiques[1]. Par exemple, considérons la combustion du propane (C_3H_8), gaz qui est utilisé dans la cuisson ainsi que pour le chauffage de certaine maisons. Lorsqu'on le combine avec l'oxygène (O_2), les produits de combustion sont le gaz carbonique (CO_2) et l'eau (H_2O) ce qu'on écrit de la façon suivante :

$$w\,\mathrm{C_3H_8} + x\,\mathrm{O_2} \longrightarrow y\,\mathrm{CO_2} + z\,\mathrm{H_2O}$$

L'équilibrage des réactions chimique consiste à déterminer la valeur des constantes w, x, y, z qui font en sorte que le nombre d'atomes d'un même type (hydrogène, oxygène et carbone) de chaque côté de la flèche $\longrightarrow$ qui indique la transformation soit identique. Par convention, on choisit des valeurs entières pour ces constantes.

[1] Un exemple semblable se trouve sur la page `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/chemistryf.htm`

Nous avons donc trois équations linéaires :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{C}: & 3w & = & y \\ \mathrm{H}: & 8w & = & 2z \\ \mathrm{O}: & 2x & = & 2y+z \end{array}$$

Bien qu'il ne soit pas nécessaire d'utiliser la procédure de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires aussi simple, nous allons néanmoins l'utiliser pour mieux faire le lien avec ce que nous avons vu dans le cours. Nous commençons par écrire le système d'équations linéaires dans une forme plus familière

$$\begin{cases} - y + 3w = 0 \\ - 2z + 8w = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc un système d'équations linéaires **homogène** avec 3 équations et 4 inconnues ; nous savons, par le théorème 3.5.1 que nous aurons une infinité de solutions ; une façon équivalente de dire ceci est que nous aurons donc au moins une variable libre.

Ceci nous donne [2]

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow (-L_3) \\ L_2 \to -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_1 - L_2 + 2L_3 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}L_1 \to L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Tel que nous l'avions prédit, nous avons une variable libre (w), que l'on peut paramétriser par t et la solution est :

$$\begin{array}{rcr} x & = & 5t \\ y & = & 3t \\ z & = & 4t \\ w & = & t \end{array}$$

Si on revient au problème du départ, le fait qu'on ait une variable libre n'est pas surprenant : si on double (ou triple, ou prend un multiple quelconque) le nombre de chaque type de molécules, l'équation de la réaction chimique devrait être toujours valable.

Le choix du paramètre t qui donne les plus petites valeurs entières à toutes les variables est $t = 1$. Avec ce choix, l'équation décrivant la réaction chimique est

$$\mathrm{C_3H_8} + 5\mathrm{O_2} \longrightarrow 3\mathrm{CO_2} + 4\mathrm{H_2O}$$

qui est la solution recherchée.

[2] N.B. nous faisons plus que de simples opérations élémentaires sur les lignes à chaque étape

11.1.1 Combustion incomplète

La réaction de combustion précédente est une réaction complète en ce sens que le produit de réaction contenait uniquement du dioxyde de carbone. On peut parfois avoir une réaction incomplète où on a également du monoxyde de carbone qui est produit :

$$w\,\mathrm{C_3H_8} + x\,\mathrm{O_2} \longrightarrow y\,\mathrm{CO_2} + z\,\mathrm{H_2O} + v\,\mathrm{CO}$$

Le nombre d'équations étant déterminé par les éléments présents, nous aurons toujours 3 équations et 5 inconnues : nous aurons donc une variable libre supplémentaire. Les équations sont :

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\mathrm{C}: & 3w & = & y & & & + & v \\
\mathrm{H}: & 8w & = & 2z & & & & \\
\mathrm{O}: & 2x & = & 2y & + & z & + & v
\end{array}$$

Au lieu d'écrire le système d'équations linéaires dans la forme familière, où toutes les inconnues sont du côté gauche du signe de l'égalité, écrivons-les en gardant l'inconnue v du côté droit du signe de l'égalité

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & - & y & & & + & 3w & = & v \\
 & & & - & 2z & + & 8w & = & 0 \\
2x & - & 2y & - & z & & & = & v
\end{array}\right.$$

On a donc un système tout à fait semblable au précédent sauf que ce ne sera pas un système homogène en général en raison de la variable libre v. Il y a deux raisons pour lesquelles nous avons choisi de l'écrire ainsi. Premièrement, ceci nous permet de suivre exactement les mêmes étapes que précédemment pour résoudre le système (la matrice des coefficients). Deuxièmement, on sait que, lorsqu'on a des variables libres, on les paramétrise par des scalaires *et on les met de l'autre côté du signe d'égalité* ; c'est ce que nous avons fait immédiatement. La solution est obtenue comme précédemment

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & 0 & 3 & v \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & v \end{array}\right] \quad \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow (-L_3) \\ L_2 \to -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & -1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -v \end{array}\right]$$

$$L_1 - L_2 + 2L_3 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & -10 & -v \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -v \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}L_1 \to L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2}v \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -v \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Nous avons donc deux variables libres ; choisissons de paramétriser w par t comme précédemment ; nous aurons

$$\begin{array}{rcrcr}
x & = & 5t & - & \frac{1}{2}v \\
y & = & 3t & - & v \\
z & = & 4t & & \\
w & = & t & &
\end{array}$$

Ceci nous donne

$$t\,C_3H_8 + (5t - \frac{1}{2}v)\,O_2 \longrightarrow (3t - v)\,CO_2 + 4t\,H_2O + v\,CO$$

Écrivons $v = 2st$ où s est un paramètre arbitraire. Ceci nous permet d'avoir uniquement des valeurs entières pour les coefficients

$$t\,C_3H_8 + t(5 - s)\,O_2 \longrightarrow t(3 - 2s)\,CO_2 + 4t\,H_2O + 2st\,CO$$

De plus, on voit que chaque terme est multiplié par la variable libre t comme précédemment, ce que nous avions expliqué en indiquant que nous pouvons doubler ou tripler (etc.) la quantité des substances en jeu sans changer la réaction. Faisons le choix $t = 1$ comme précédemment, ce qui nous donne

$$C_3H_8 + (5 - s)\,O_2 \longrightarrow (3 - 2s)\,CO_2 + 4\,H_2O + 2s\,CO$$

Mathématiquement, on ne peut pas en dire plus sur la valeur de la variable libre s. Dans la pratique, cette valeur va dépendre des conditions physiques : alimentation en air frais, évacuation des produits de combustion, etc. Comme le monoxyde de carbone est un poison pour les humains, il est essentiel d'assurer une bonne alimentation en air frais et une bonne ventilation des gaz de combustion pour les fournaises, de façon à assurer une combustion complète !

11.2 Courbes dans le plan

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié brièvement la géométrie vectorielle. Nous avons vu, entre autres, comment obtenir l'équation d'une droite dans l'espace. Dans cette section, nous allons nous restreindre notre études aux courbes dans le plan, et allons voir brièvement comment nous pouvons obtenir les équations de courbes passant par des points définis. La méthode que nous allons utiliser est différente de celle du chapitre précédent : nous allons uniquement utiliser des propriétés des déterminants, sans utiliser les vecteurs [3].

11.2.1 Équation d'une droite dans le plan

Commençons par l'exemple le plus simple, soit celui d'une droite. Soit deux points

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & = & (x_1, y_1) & = & (1, -2) \\ P_2 & = & (x_2, y_2) & = & (-5, 2) \end{array}$$

Nous voulons trouver les valeurs a, b, c telles que l'équation $ax+by+c = 0$ est l'équation de la droite passant par ces deux points. Nous savons que ceci est toujours possible, et que la solution n'est certainement pas $a = b = c = 0$; gardez ceci en tête.

[3] Ces exemples ont été adaptés du site `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/geometryf.htm`.

Pour trouver cette solution, nous considérons un troisième point appartenant à cette droite que nous allons dénoter ainsi :

$$P = (x, y)$$

À noter que nous ne connaissons pas, pour l'instant du moins, les valeurs exactes des coordonnées x, y de ce point ; tout ce que nous savons est qu'il existe et satisfait l'équation de la droite. Nous avons donc le système d'équations linéaires homogènes suivant

$$\begin{cases} ax & + & by & + & c & = & 0 \\ ax_1 & + & by_1 & + & c & = & 0 \\ ax_2 & + & by_2 & + & c & = & 0 \end{cases}$$

où les inconnues recherchées sont a, b et c. Une solution de ce système est la solution $a = b = c = 0$, ce qui n'est certainement pas la solution recherchée. Comme nous savons qu'il existe au moins une autre solution, celle de l'équation de la droite, nous en concluons qu'il en existe une infinité de solutions et que les trois équations linéaires ci-dessus sont linéairement dépendantes. Ceci veut dire que le déterminant de la matrice des coefficients [4] est égal à zéro :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En faisant l'expansion par la première ligne, on trouve

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

En substituant les valeurs originales des points P_1 et P_2, nous trouvons

$$-4x - 6y - 8 = 0$$

Une solution possible est donc $a = -4, b = -6, c = -8$. Une autre solution, totalement équivalent mais avec des coefficients plus simple, est obtenue en divisant chacune de ces valeurs par -2 pour nous donner l'équation de la droite :

$$2x + 3y + 4 = 0$$

On peut vérifier que la droite passe effectivement par les points P_1 et P_2.

11.2.2 Équation d'un cercle dans le plan

Soient les points $P_1 = (6, 4)$, $P_2 = (-1, 5)$ et $P_3 = (-3, 1)$. On désire trouver l'équation du cercle qui passe par ces trois points.

L'équation d'un cercle de rayon r dont le centre est situé au point (x_c, y_c) est donnée par :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

[4] Rappelons que les inconnues du système d'équations linaires sont a, b, c.

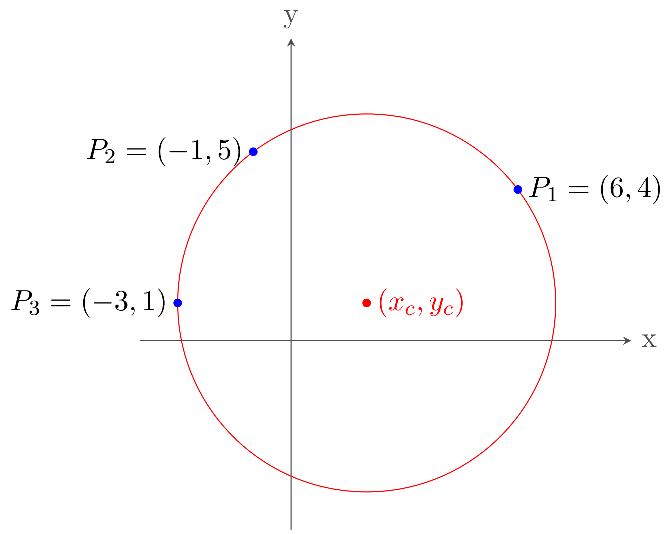


Figure 11.1 Unique cercle passant par trois points qui ne sont pas situés sur une droite.

Donc, on cherche les valeurs des constantes x_c, y_c, r qui font en sorte que le cercle passera par les trois points donnés. En faisant l'expansion des différents termes, on peut écrire ceci comme

$$x^2 - 2xx_c + x_c^2 + y^2 - 2yy_c + y_c^2 - r^2 = 0$$

Ceci n'est pas une équation linéaire pour les inconnues x_c, y_c, r. Ce qu'on peut faire est introduire de nouvelles constantes a, b, c, d telles que l'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

qui est une équation linéaire. On remarque que l'on a apparemment une constante superflue (a) qui devrait être égale à 1 selon l'équation originale. En fait, ceci correspond, comme on le verra sous peu, à la présence d'une variable libre dans le système à résoudre, ce qui nous permet d'utiliser la méthode d'écrire un déterminant qui s'annule pour obtenir l'équation recherchée.

Si on suppose que l'on a un quatrième point arbitraire, (x, y) qui appartient à ce cercle, on obtient un système d'équations linéaires homogène avec 4 équations et 4 inconnues (a, b, c, d) :

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) & + & bx & + & cy & + & d & = & 0 \\ a(x_1^2 + y_1^2) & + & bx_1 & + & cy_1 & + & d & = & 0 \\ a(x_2^2 + y_2^2) & + & bx_2 & + & cy_2 & + & d & = & 0 \\ a(x_3^2 + y_3^2) & + & bx_3 & + & cy_3 & + & d & = & 0 \end{cases}$$

On sait que la solution triviale $a = b = c = d = 0$ existe ...et qu'il y aura une infinité de solutions si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule

$$\begin{vmatrix} (x^2+y^2) & x & y & 1 \\ (x_1^2+y_1^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2^2+y_2^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ (x_3^2+y_3^2) & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Plutôt que d'obtenir l'équation générale, substituant les valeurs données initialement et calculons ce déterminant

$$\begin{vmatrix} (x^2+y^2) & x & y & 1 \\ 52 & 6 & 4 & 1 \\ 26 & -1 & 5 & 1 \\ 10 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x^2+y^2)\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 52 & 4 & 1 \\ 26 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 52 & 6 & 1 \\ 26 & -1 & 1 \\ 10 & -3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 52 & 6 & 4 \\ 26 & -1 & 5 \\ 10 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En faisant les calculs on trouve

$$30(x^2+y^2) - 120x - 60y - 600 = 0$$

Si on divise par 30, cette équation devient

$$(x^2+y^2) - 4x - 2y - 20 = 0$$

qui est l'équation recherchée. En comparant avec l'équation du départ, on trouve que

$$\begin{aligned} -4 = -2x_c \quad &\Rightarrow \quad x_c = 2 \\ -2 = -2y_c \quad &\Rightarrow \quad y_c = 1 \\ -20 = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \quad &\Rightarrow \quad r^2 = 25 \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

On vérifiera que les trois points donnés satisfont cette équation.

11.2.3 Mouvement des corps célestes

Supposons que l'on observe un nouvel objet, tel que possiblement une comète, qui se dirige vers l'intérieur du système solaire. Si on néglige l'effet des planètes, le mouvement du nouvel objet sera affecté par l'attraction gravitationnelle du Soleil[5] et résultera en une trajectoire qui sera dans un plan et correspondra à une section conique[6] (ellipse, parabole ou hyperbole). Si la vitesse de l'objet est inférieure à ce qu'on appelle la vitesse d'échappement, la trajectoire suivie sera une ellipse ; si la vitesse est supérieure à la vitesse d'échappement, la trajectoire suivie sera une hyperbole.

[5] On peut toujours utiliser la loi d'attraction gravitationnelle pour déterminer la trajectoire de l'objet si on tient compte de la présence des planètes mais, dans ce cas, la trajectoire sera beaucoup plus compliqué qu'une simple section conique. De plus, sauf dans le cas où l'objet passerait tout près d'une planète, l'effet de l'attraction gravitationnelle des planètes sur l'objet sera négligeable comparativement à celui de l'attraction du Soleil.

[6] La démonstration de ce fait requiert la résolution d'un système d'équation différentielles non-linéaire du deuxième degré, ce qui est fait normalement dans un cours de calcul différentiel et intégral de deuxième année universitaire.

L'équation générale d'une section conique dans le plan peut être écrite sous la forme suivante :

$$ax^2 + +bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Il s'agit donc d'une équation avec 6 inconnues. Il suffit de déterminer la position de 5 points pour obtenir un système d'équations linéaires homogène avec 6 équations et 6 inconnues et de procéder comme nous l'avons fait précédemment dans le cas de l'équation d'un cercle pour déterminer la valeur des inconnues.

Ce genre de calcul peut être très utile pour déterminer si la Terre sera frappée par un nouvel objet céleste dont on détecterait la présence dans le système solaire !

11.3 Série de Fourier

Au chapitre 9, nous avons mentionné que l'espace des fonctions continues réelles sur l'intervalle $a \leq x \leq b$ était un espace vectoriel sur lequel on pouvait définir un produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Considérons l'intervalle $-L \leq x \leq L$. Pour cet intervalle, le mathématicien Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) a démontré que l'ensemble des fonctions [7]

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

où n désigne un entier, formait une base pour cet espace, et donc, qu'on pouvait représenter toute fonction continue définie sur cet intervalle par une combinaison linéaire de ces fonctions. De façon plus explicite, nous avons pour une fonction $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \langle f, \cos\tfrac{n\pi x}{L}\rangle \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \langle f, \sin\tfrac{n\pi x}{L}\rangle \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, écrivons $C_n = \cos\dfrac{n\pi x}{L}, S_n = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ et $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui nous permet d'écrire [8]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\langle f, C_n\rangle \boldsymbol{C}_n + \langle f, S_n\rangle \boldsymbol{S}_n\right]$$

[7] Pour comprendre tous les aspects des séries de Fourier, il est essentiel d'être familier avec le calcul différentiel et intégral ; cependant, le lien avec les sujets traités dans le cours d'algèbre linéaire, en particulier l'expansion en une combinaison linéaire des vecteurs d'une base, devraient être suffisamment clairs même pour ceux qui sont peu familiers avec le calcul différentiel et intégral.

[8] À noter que $S_0 = 0$.

où l'on voit mieux l'expansion en terme des vecteurs de la base, avec les coefficients obtenus par le produit scalaire.

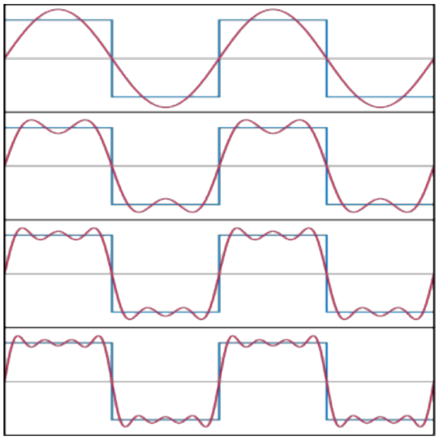


Figure 11.2 Expansion partielle d'une fonction "onde carrée" en une série de Fourier. L'image du haut inclut seulement le premier terme de la série et les autres incluent respectivement les 2, 3 et 4 premiers termes de la série. Image adaptée de Wikipedia. `http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series`

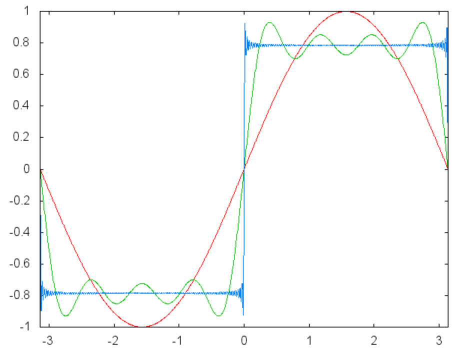


Figure 11.3 Série partielle de Fourier pour une fonction "onde carrée" où l'on inclut le premier terme (en rouge), les quatre premiers termes (en vert), et les cent premiers (en bleu).

11.3.1 Équations différentielles

Les fonctions trigonométriques, qui forment la base de l'espace vectoriel pour les séries de Fourier, obéissent l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2}{dx^2} f = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} f \qquad \Rightarrow \qquad D^2 f = \lambda f$$

c'est-à-dire qu'elles ont la forme requise [9] pour être des vecteurs propres d'un espace vectoriel. En fait, plusieurs problèmes qui sont formulés comme des équations différentielles prennent une forme semblable, et la connaissance de l'algèbre linéaire peut faciliter la recherche de solutions.

Par exemple, l'équation différentielle décrivant le mouvement de la peau d'un tambour circulaire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

peut également être reformulée comme un problème de recherche de vecteurs propres.

[9] En dépit de l'exposant 2 qui apparait, l'opérateur D^2 est un opérateur linéaire, c'est-à-dire qu'il obéit la relation $D^2(af + bg) = a\,D^2 f + b\,D^2 g$ où a, b sont des scalaires et f, g sont des fonctions (donc, vecteurs d'un espace vectoriel).

11.3.2 Application à la musique

Les séries de Fourier peuvent être utilisées pour décrire le mouvement périodique (dans le temps) de la vibration des cordes de certains instruments de musique. Les valeurs propres que l'on trouve sont essentiellement les mêmes que données ci-dessus, on les exprimes généralement en fonction de la fréquence de vibration, f ; les diverses fréquences de vibration obéissent la relation

$$f_n = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et sont appelées harmoniques, et la fréquence la plus basse, f_1, est appelée la fréquence fondamentale. Parce que les harmoniques sont des multiples entiers, les sont qui résultent de combinaisons linéaires des divers harmoniques sont jugées plaisants à notre oreille.

Par contre, les fréquences de vibration des divers modes de vibration (c'est-à-dire les vecteurs propres) d'une peau de tambour ne sont pas des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Par conséquent, notre oreille trouve que le son d'un tambour est moins harmonieux que celui d'un violon ou d'une guitare. Vous pouvez visionner plusieurs mode de vibration d'une peau de tambour à la page Internet
`http://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane`

11.4 Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci[10]

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

est une suite très connue d'entiers qui apparait dans beaucoup d'endroits, aussi bien dans la nature que dans l'art et dans les sciences. Les entiers de cette suite sont obtenus en additionnant les deux entiers précédents pour obtenir le suivant, en commençant avec 0 et 1. Ainsi, nous avons :

$$\begin{array}{rcl}
f_0 & = & 0 \\
f_1 & = & 1 \\
f_2 & = & f_1 + f_0 = 0 + 1 = 1 \\
f_3 & = & f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \\
f_4 & = & f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 \\
\vdots & & \vdots \\
f_n & = & f_{n-1} + f_{n-2}
\end{array}$$

Cette suite, d'apparence anodine, croit très rapidement ; ainsi $f_{101} = 573147844013817084101$.

Une relation où un nombre, comme f_n est obtenu à partir de nombres précédents est connue sous le nom de *relation de récurrence*. Une telle relation peut être exprimée sous forme matricielle. Ainsi, on peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

[10] Cette section a été adaptée du site `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/fibonaccif.htm`. Voir également `http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci` pour plus de détails.

ce qu'on peut écrire comme

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

On note que la matrice $\boldsymbol{A}$ peut être écrite comme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier facilement que

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$$

et, en fait, que

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 11.1 Démontrez que $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$

Nous avons vu comment élever des matrices carrées à un large puissance en utilisant la diagonalisation. Voyons comment nous pouvons utiliser ceci pour obtenir une autre façon de calculer f_n. Nous commençons par trouver le polynôme caractéristique :

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Nous trouvons deux solutions : $\lambda_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ À partir de ces valeurs propres, nous pouvons trouver deux vecteurs propres différents :

$$\lambda_+ : \boldsymbol{X}_+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_- : \boldsymbol{X}_- = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de passage est :

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{X}_+ \boldsymbol{X}_-) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et son inverse est

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons utiliser la matrice de passage et son inverse pour diagonaliser $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons

$$\boldsymbol{D}^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

ce qui nous permet de calculer

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] & \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\ \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] & \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où l'on obtient $f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ ce qui, avec la présence de divers facteurs de $\sqrt{5}$ peut sembler surprenant puisque f_n est un entier !

11.5 Dynamique des populations

La population du Cap Breton décroit alors que celle de la région de Halifax augmente. La Chouette tachetée du Nord est en déclin rapide, avec environ 7% de perte annuelle de la population. Moins de 30 couples reproducteurs demeurent en Colombie-Britannique, et l'espèce devrait être disparue au Canada dans les prochaines années [11]

[11] In Trouble in Canada - The Northern Spotted Owl `http://cooperbeauchesne.com/upload/images/publications_1312796247.pdf`

Ces deux exemples de dynamique des population peuvent être modélisés en utilisant l'algèbre linéaire. Par exemple, supposons que l'on observe depuis plusieurs années que 5% de la population de la région du Cap Breton migre vers la région métropolitaine de Halifax à chaque année (et donc 95% reste au Cap Breton) alors que 1% de la population va de la région métropolitaine de Halifax vers celle du Cap Breton [12]. Le changement des populations respectives d'une année à l'autre sera donné par

$$\begin{pmatrix} 0.99 & 0.05 \\ 0.01 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{H}_0 \\ \mathrm{CB}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_1 \\ \mathrm{CB}_1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, si on retrouve 400k [13] personnes dans la région métropolitaine de Halifax et 150k personnes dans celle du Cap Breton une certaine année, l'année suivante, on aura :

$$\begin{pmatrix} 0.99 & 0.05 \\ 0.01 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 403.5 \\ 146.5 \end{pmatrix}$$

et donc on verra un changement net de 3500 personnes dans chaque région. Si cette tendance se maintien pendant plusieurs années, 5% de la région du Cap Breton représentera un nombre de plus en plus petit de personne alors que 1% de la région métropolitaine de Halifax représentera un nombre de plus en plus grand ; éventuellement ces deux nombres pourraient, en principe, devenir égaux, et on aurait une situation en équilibre où le nombre de personnes qui migre d'une région à l'autre est le même dans les deux sens :

$$\begin{pmatrix} 0.99 & 0.05 \\ 0.01 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{H}_n \\ \mathrm{CB}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_{n+1} \\ \mathrm{CB}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_n \\ \mathrm{CB}_n \end{pmatrix}$$

On reconnait ceci comme un problème de recherche de vecteur propre, avec une valeur propre égale à 1. La matrice pour laquelle on recherche des vecteurs propres a la forme

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Si on écrit $c = a + b$, on peut vérifier que son polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - (2-c)\lambda + (1-c) = (\lambda - 1)(\lambda - [1-c]) = 0$$

Le vecteur propre appartenant à la valeur propre $\lambda = 1$ obéira l'équation

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{H} \\ \mathrm{CB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on aura $a\,\mathrm{H} = b\,\mathrm{CB}$. Puisque $a = 0,01$ et $b = 0,05$, on trouvera que l'équilibre sera atteint lorsqu'on aura 5 fois plus de personnes dans la région

[12] Ceci est évidemment un modèle grandement simplifié ; pour mieux modéliser, on devrait tenir compte de la migration des sous-populations en fonction de l'âge, ainsi que des patrons de migration avec les autres régions comme, par exemple, la migration vers les province de l'Ouest à la recherche des emplois, ainsi que du nombre de décès et de naissance et du vieillissement de la population, etc.

[13] k est abrégé de kilo, c'est-à-dire 1000.

métropolitaine de Halifax que dans la région du Cap Breton [14]... ce qui est un résultat évident lorsqu'on n'a que deux régions à tenir compte et lorsque l'on suppose que la population demeure constante. Par contre, lorsqu'on a un modèle plus compliqué, la modélisation par multiplication de matrices et la recherche de solution en utilisant les vecteurs propres est une méthode qu'on peut toujours utiliser.

Par exemple, pour les chouettes tachetées, le modèle utilisé est le suivant [15] :

- On modélise l'évolution de la population sur une base annuelle, c'est-à-dire qu'on prédit la population à l'année N à partir de la population à l'année $N-1$.
- On considère trois stages de vie : juvénile J (un an ou moins), sous-adulte S (de un à deux ans) et adulte A (deux ans et plus) ;
- La proportion de juvéniles qui naissent par rapport au nombre d'adulte est donné par le taux de reproduction r ; donc $J_n = rA_{n-1}$.
- Le taux de survie d'une année à l'autre est indiqué par la variable t. Ainsi, le taux de survie des juvéniles (qui deviennent des sous-adultes) obéit $S_n = t_J J_{n-1}$. Le nombre d'adulte pour l'année N est une combinaison du nombre de sous-adultes qui survivent (et deviennent des adultes) ainsi que du nombre d'adultes qui survivent :

$$A_n = t_S S_{n-1} + t_A A_{n-1}$$

On peut écrire ceci sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ t_J & 0 & 0 \\ 0 & t_S & t_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ S_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_n \\ S_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{A}$ est la matrice de transition qui aura des valeurs comme $r = 0.3$, $t_j = 0.2$, $t_s = 0.7$, $t_A = 0.9$. Supposons que l'on exprime le vecteur $(J, S, A)^\top$ comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} J \\ S \\ A \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots$$

Si on fait l'évolution dans le temps sur plusieurs années, c'est-à-dire qu'on multiplie la matrice de transition à plusieurs reprises, chaque vecteur propre de la combinaison linéaire sera multiplié par sa valeur propre à chaque fois

$$\boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} J \\ S \\ A \end{pmatrix} = a_1\lambda_1^n\boldsymbol{v}_1 + a_2\lambda_2^n\boldsymbol{v}_2 + \ldots$$

Éventuellement, le terme qui deviendra dominant sera celui qui correspond à la valeur propre la plus élevée (qu'on appelle la valeur propre dominante).

[14] Soit approximativement 460k *vs* 90k, arrondi au 10k près.

[15] Ce modèle est inspiré de `http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/Fall97/Asher/mike.pdf`

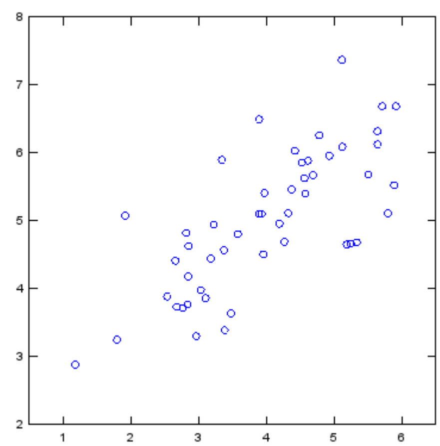
Si la valeur propre dominante est plus grande que 1, alors le terme croitra et donc la population totale croitra également. Par contre, si la valeur propre dominante est plus petite que 1, alors, lorsqu'on la multipliera par elle-même, le résultat sera de plus en plus petit ; par conséquent, ceci indique que la population connaitra un déclin.

En changeant les conditions environnementales, on peut modifier les variables t_J, t_S, t_A et affecter soit la survie ou le déclin d'une population animale.

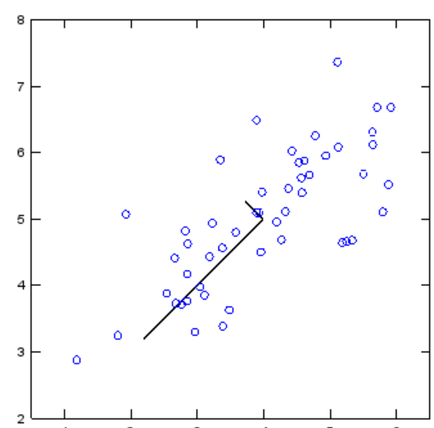
11.6 Visages propres

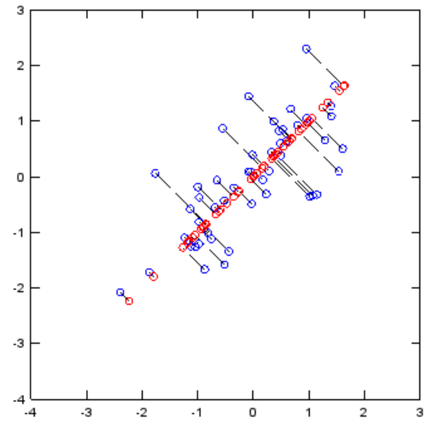
Les **visages propres** sont une application intéressante de l'algèbre linéaire et de la statistique. Avant d'aborder une description des visages propres comme tel, je vais expliquer certains concepts de façon graphique. Je dois noter que cet exemple provient du cours *Machine Learning* que j'ai suivi et qui est offert gratuitement (sans crédits) sur Internet par le professeur Andrew Ng de l'université Stanford aux États-Unis.

Nous allons commencer avec un exemple beaucoup plus simple, soit celui d'une distribution de points dans le plan. On peut voir que ces points ne sont pas distribués de façon uniforme, mais semble être un peu aligné le long d'un axe diagonal.



À l'aide d'une méthode faisant appel à la statistique et connue sous le nom d'*analyse de composantes principales* on peut identifier une direction principale le long de laquelle les données sont alignées dans le plan, ainsi qu'une direction secondaire. Ces deux directions orthogonales vont être utilisées comme deux vecteurs de base, $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$, chaque point pouvant être représenté par des une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.





On utilise ces vecteurs de base pour construire des matrices de projection pour laquelle ces vecteurs sont des vecteurs propres. En utilisant ces matrices de projection (équivalente au produit scalaire habituel), on peut obtenir la décomposition d'un point en une combinaison linéaire des vecteurs propres. En ne retenant qu'une seule des deux composantes, on obtient une distribution approximative (indiquée en rouge) en une dimension de la distribution originale (indiquée en bleu).

Au lieu de simplement faire une approximation à une dimension d'une distribution de points dans un espace à deux dimensions, nous allons approximer des points dans un espace à 1024 dimensions, c'est-à-dire une distributions de points dans $\mathbb{R}^{1024}$.

L'exemple choisi est celui de visages en niveaux de gris. Nous commençons avec une collection de 5000 images de la même taille, dont les cent premières sont montrées ici. Notez que l'orientation des visages est assez arbitraire et qu'aucun effort particulier n'a été fait pour les rendre plus uniformes.

Chaque image est formée de 1024 pixels organisés dans un carré, donc de taille 32×32. L'image à la droite correspond à celle de la troisième ligne et sixième colonne de la collection précédente et ressemble étrangement à Bill Clinton, ancien président des États-Unis. À partir de cette image, on peut former un vecteur de $\mathbb{R}^{1024}$ dont la première coordonnée correspond au niveau de gris (un nombre entre 0 et 255) pour le premier pixel en haut à gauche, et la dernière coordonnée correspond à la valeur du pixel en bas à droite.

À partir des 5000 vecteurs, on fait l'analyse numérique pour trouver les composantes principales qui deviendront les vecteurs de base qu'on désigne sous le nom de *visages propres*, ou *eigenfaces* en anglais.
En ordre d'importance (en commençant en haut à gauche), on voit les 36 premiers visages propres. Faire la décomposition en composantes principales pour ces 500 images requiert environ une minute sur un ordinateur PC acheté en 2012. Si on augmentait la taille des images, disons à 256 pixels par 256 pixels, on aurait besoin d'environ une heure pour obtenir la même information ; il y a 10 ans, le même calcul aurait pris plus d'une journée sur un ordinateur PC.

Comparaison entre la collection d'images originales et celles formées par les combinaisons linéaires des 10 visages propres dominants. On ne peut pas vraiment reconnaitre les images originales à partir des combinaisons linéaires de 10 visages propres.

Comparaison entre la collection d'images originales et celles formées par les combinaisons linéaires des 30 visages propres dominants. Les images formées des combinaisons linéaires commencent à ressembler davantage aux images originales, mais toujours pas suffisamment pour qu'on puisse toutes les reconnaitre.

Comparaison entre la collection d'images originales et celles formées par les combinaisons linéaires des 100 visages propres dominants. On voit une très grande ressemblance pour la plupart des images entre les combinaisons linéaires de 100 visages propres (des vecteurs dans un espace à 100 dimensions) et les images originales qui sont des vecteurs dans un espace à 1024 dimensions. Le temps requis pour calculer les 5000 combinaisons linéaires de 100 visages propres est inférieur à une seconde.

Comparaison entre une image originale particulière et la combinaison linéaire de 100 visages propres. En utilisant seulement 100 vecteurs, au lieu de 1024 qui serait la base de l'espace en entier, on obtient une réduction (compression des images) par un facteur supérieur à 10 tout en ayant une image assez semblable à l'originale.

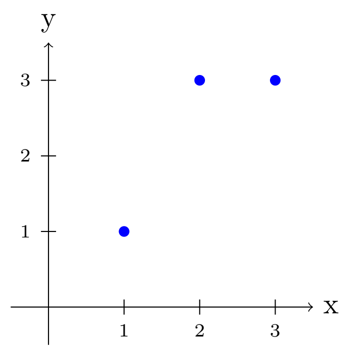
En résumé, nous avons utilisé une collection de 5000 images, chacune pouvant être représentée par un vecteur dans $\mathbb{R}^{1024}$ pour obtenir des vecteurs de base d'un espace $\mathbb{R}^{100}$ à partir desquels on peut faire des combinaisons linéaires qui donnent une assez bonne approximation des images originales. La réduction du nombre de paramètres pour représenter les images est utile pour deux types d'applications. Premièrement, on peut se servir de ceci comme d'une méthode de compression des images, ce qui, par exemple, peut réduire le temps de transmission (si on envoie ces images par Internet) ou réduit l'espace requis pour l'entreposage. Deuxièmement, on peut se servir de ceci pour des logiciels d'identification de personnes automatisés ; de tels logiciels sont beaucoup plus efficaces lorsqu'ils ont moins de paramètres à évaluer pour faire une identification.

11.7 Régression linéaire

La régression linéaire est un sujet normalement rencontré pour la première fois dans un cours d'introduction à la statistique. La présentation habituelle utilise des techniques de calcul différentiel et intégral plutôt que d'algèbre linéaire et il peut être difficile de voir ce qui se passe exactement. Dans cette section, nous allons présenter la régression linéaire en utilisant uniquement des techniques couvertes dans ce manuel, et donc sans faire appel au calcul différentiel et intégral.

Commençons par une mise en situation.

Il est impossible de tracer une droite qui passe par les points (1,1), (2,3) et (3,3). Comment peut-on déterminer quelle serait la meilleure droite correspondant à ces points si on a un modèle qui prédit qu'ils devraient en principe être alignés le long d'une droite ?



L'équation d'une droite non-verticale dans le plan xy peut être écrite comme étant $a_0+a_1x = y$. Ainsi, si nous avons trois points qui appartiennent à cette droite nous aurons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 & = & y_1 \\ a_0 + a_1x_2 & = & y_2 \\ a_0 + a_1x_3 & = & y_3 \end{cases}$$

où les inconnues sont a_0 et a_1. On peut écrire ce système comme représentant une combinaison linéaire :

$$a_0\mathbb{1} + a_1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$$

où $\mathbb{1}$ est un vecteur colonne dont tous les coefficients sont identiques et égaux à 1. En utilisant la notation matricielle pour présenter le problème comme celui d'une combinaison linéaire, la généralisation à plus de trois points est immédiate.

Le cas qui nous intéresse est celui où $\boldsymbol{Y}$ ne peut **pas** être représenté comme une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$. Dans ce cas, on veut trouver la **meilleure** combinaison linéaire possible, ce qui requiert que l'on définisse ce qu'on entend par le mot **meilleure**. On peut faire ceci graphiquement. Les vecteurs $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$ de $\mathbb{R}^n$ engendrent un plan dans $\mathbb{R}^n$. Si le vecteur $\boldsymbol{Y}$ peut être écrit comme une combinaison des vecteurs $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$, c'est qu'il appartient à ce plan ; sinon, c'est qu'il n'appartient pas à ce plan tel qu'illustré à la figure 11.4.

Par contre, comme on a vu dans le chapitre sur la géométrie vectorielle lorsqu'on a calculé la distance d'un point a un plan, le point (vecteur) qui appartient au plan engendré par les vecteurs $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$ et qui est le plus proche au vecteur $\boldsymbol{Y}$ correspond à la projection orthogonale du vecteur $\boldsymbol{Y}$ sur le plan, tel qu'illustré à la figure 11.5.

Donc la solution recherchée (a_0, a_1) est celle qui satisfait $a_0\mathbb{1} + a_1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}$ au lieu de $a_0\mathbb{1}+a_1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$. On note que le vecteur $\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z}$, est perpendiculaire

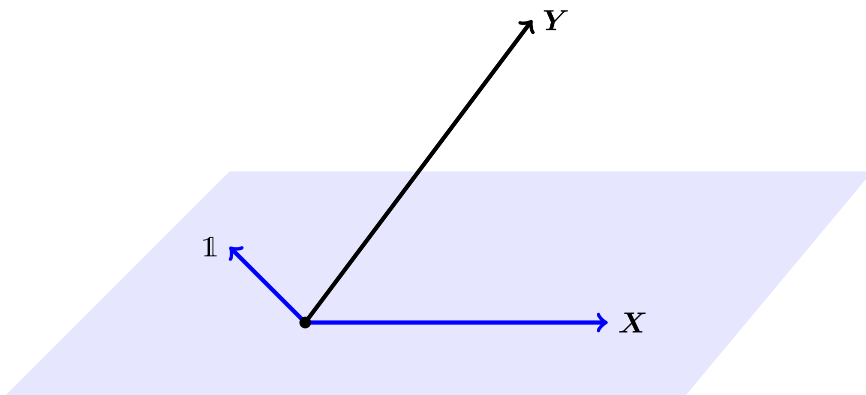


Figure 11.4 Le vecteur $\boldsymbol{Y}$ n'appartient pas au plan engendré par les vecteurs $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$.

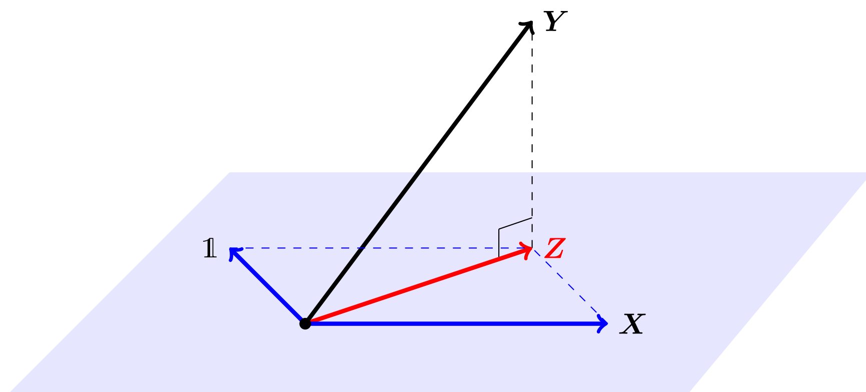


Figure 11.5 Le vecteur $\boldsymbol{Z}$, qui appartient au plan engendré par les vecteurs $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$, est le vecteur de ce plan qui est la meilleure approximation du vecteur $\boldsymbol{Y}$, c'est-à-dire celui dont la distance $\|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}\|$ est la plus petite.

au plan engendré par $\mathbb{1}$ et $\boldsymbol{X}$ et donc que le produit scalaire [16]

$$\boldsymbol{Z}\cdot(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z})=0$$

Introduisons la matrice $\boldsymbol{M}$ qui est formée des vecteurs colonnes qui génère le plan

$$\boldsymbol{M}=(\mathbb{1}\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ 1 & x_3\end{pmatrix}$$

et le vecteur des inconnues

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Z} \qquad \textbf{[11.7.1]}$$

On se rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs est obtenu en prenant la transposée de l'un multipliée par l'autre (et où la trace du résultat est

[16] On représente le produit scalaire par le symbole $\cdot$ comme on l'avait fait au chapitre sur la géométrie vectorielle.

sous-entendue) :

$$\boldsymbol{Z} \cdot (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{Z}^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}) = 0$$

En substituant la valeur pour $\boldsymbol{Z}$ de l'équation 11.7.1, on a

$$(\boldsymbol{MA})^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{MA}) = 0$$

Puisque $\boldsymbol{CD}^\top = \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{C}^\top$, ceci devient

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{M}^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{MA}) = 0$$

que l'on peut récrire sous la forme du produit scalaire suivant :

$$\boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{M}^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{MA})] = 0$$

Cette équation doit être vérifiée pour tous les vecteurs inconnus $\boldsymbol{A}$; ceci veut dire que le vecteur

$$\boldsymbol{M}^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{MA})$$

doit s'annuler. Nous devons donc avoir

$$\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{MA} \qquad \textbf{[11.7.2]}$$

Ceci nous donne un système d'équations qu'on peut résoudre et qui ne dépend que des données du problème initial, et non d'un vecteur inconnu comme $\boldsymbol{Z}$. Par exemple, si nous revenons au problème mentionné au tout début de la section de ce chapitre, nous avons :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{MA} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

En faisant les multiplications des valeurs numériques, on trouve

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

On peut résoudre ce système en utilisant la procédure de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée

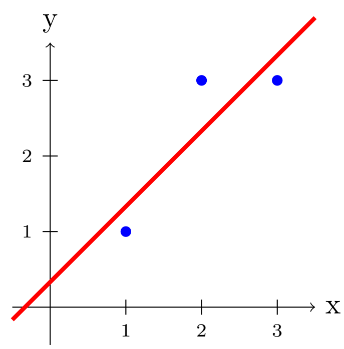
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 7 \\ 6 & 14 & 16 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \tfrac{1}{2}L_2 \to L_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_2 - L_1 \to L_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L_1 - 6L_2 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{3}L_1 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Nous avons donc $a_0 = \frac{1}{3}$ et $a_1 = 1$ et l'équation de la meilleure droite pour les points (1,1), (2,3) et (3,3) est $y = \frac{1}{3} + x$.



11.7.1 Généralisation à d'autres types de courbes

Exprimée sous forme matricielle, l'équation 11.7.2, peut être utilisée non seulement pour trouver la meilleure droite passant par un certain nombre de points, mais pour beaucoup d'autre types de fonctions. Supposons par exemple que l'on veuille trouver la meilleure parabole décrivant les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, c'est-à-dire qu'on cherche les valeurs pour a_0, a_1, a_2 de l'équation

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Dans ce cas-ci, on aura

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

qu'on substituera dans l'équation

$$\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M} \boldsymbol{A}$$

qu'on peut résoudre pour $\boldsymbol{A}$ en utilisant la procédure d'élimination de Gauss-Jordan. On peut généraliser ceci pour toute fonction pour laquelle on a un somme de termes dont les coefficients sont à déterminer, comme par exemple,

$y = a_0 + a_1\sqrt{x} + a_2 \sin x + \ldots$ On procéderait comme ci-dessus, sauf qu'on utiliserait

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{x_1} & \sin x_1^2 & \ldots \\ 1 & \sqrt{x_1} & \sin x_2^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \sqrt{x_1} & \sin x_n^2 & \ldots \end{pmatrix}$$

Par contre, on ne pourrait pas utiliser cette méthode directement pour résoudre des équations dont les inconnues ne seraient pas des termes linéaires, comme par exemple pour une gaussienne.

$$y = a_0 e^{-a_1 x^2}$$

Cela dit, nous ne sommes pas restreint à faire des régressions dans le plan. Supposons que nous ayons des triplets de points de la forme (x, y, z) et que l'on veuille déterminer le meilleur plan qui approxime ces points. On n'aurait qu'à écrire

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

et à procéder comme ci-dessus.

Annexe

A Définitions et propriétés utiles

Ci-dessous, vous trouverez des définitions et propriétés diverses. Ce qui distingue une propriété d'une définition, est qu'on peut démontrer qu'une propriété est satisfaite à partir des définitions.

Dans toute démonstration d'une propriété, vous pouvez supposer que les propriétés qui apparaissent plus tôt dans cette liste sont vraies. Par exemple, pour prouver la propriété 6 d'une liste quelconque, on peut prendre pour acquis que la propriété 3 est vraie ; on ne peut pas faire l'inverse.

A.1 Définitions des scalaires

A.1.1 Nombre complexe : $z \in \mathbb{C} : z = a + bi; \qquad a, b \in \mathbb{R}; \qquad i = \sqrt{-1}$

A.1.2 Conjugué : $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

A.1.3 Forme polaire d'un nombre complexe : $z = r\,e^{i\theta} \qquad r, \theta \in \mathbb{R}$

A.1.4 Conjugué, forme polaire : $\overline{r\,e^{i\theta}} = r\,e^{-i\theta}$

A.1.5 Module d'un nombre complexe : $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$

A.1.6 Module d'un nombre complexe : $|r\,e^{i\theta}| = r \qquad r, \theta \in \mathbb{R}$

A.2 Propriétés des scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

A.2.1 $a + b = b + a$ commutativité de l'addition

A.2.2 $(a + b) + c = a + (b + c)$ associativité de l'addition

A.2.3 $ab = ba$ commutativité de la multiplication

A.2.4 $(ab)c = a(bc)$ associativité de la multiplication

A.2.5 $a + 0 = a$ élément neutre de l'addition

A.2.6 $a + (-a) = 0$ inverse additif

A.2.7 $1a = a$ élément neutre de la multiplication

A.2.8 $aa^{-1} = 1$ inverse multiplicatif

A.2.9 $a(b + c) = ab + ac$ distributivité de la multiplication sur l'addition

A.2.10 $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ puissance d'une puissance

A.2.11 $a^b a^c = a^{b+c}$ produit des puissances

A.2.12 $\overline{\overline{z}} = z$

A.2.13 Relation d'Euler (ou de *de Moivre*) : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

A.2.14 Relation d'Euler (cas particulier) : $e^{i\pi} = -1$

Note : Il existe des généralisations des nombres complexes. Le plus simple est celui des quaternions $\mathbb{H}$ et le suivant est celui des octonions $\mathbb{O}$. La multiplication des quaternions ne respecte pas toujours la commutativité, c'est-à-dire qu'on peut avoir $ab \neq ba$. La multiplication des octonions ne respecte pas toujours ni la commutativité, ni l'associativité, c'est-à-dire qu'on peut avoir $ab \neq ba$ et $(ab)c \neq a(bc)$. Sachant ceci, vous comprendrez peut-être pourquoi on doit démontrer certaines propriétés des matrices qui nous paraissent évidentes. Dans ce qui suit, on suppose toujours que les coefficients des matrices sont soit des nombres réels ou des nombres complexes.

A.3 Définitions des matrices

A.3.1 Matrice quelconque : $\boldsymbol{A}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$

A.3.2 Coefficient d'une matrice : $a_{ij} = [A]_{ij}$

A.3.3 Matrice nulle (taille $m \times n$ sous-entendue) : $\mathbf{0} = [0]$

A.3.4 Matrice diagonale : $[\boldsymbol{A}]_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$.

A.3.5 Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

A.3.6 Matrice identité $n \times n$: $\boldsymbol{I}_n = [\delta_{ij}]$

A.3.7 Addition de matrices : $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \iff [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$

A.3.8 Multiplication de matrice par un scalaire : $c\boldsymbol{A} = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$

A.3.9 Négation d'une matrice : $-\boldsymbol{A} = (-1)\boldsymbol{A}$

A.3.10 Soustraction de matrices : $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$

A.3.11 Multiplication de matrices : $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p} = \boldsymbol{C}_{m\times p} \iff (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$

A.3.12 Trace d'une matrice : $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

A.3.13 Transposée : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \boldsymbol{A}^\top = [a_{ji}]$

A.3.14 Conjuguée : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \overline{\boldsymbol{A}} = [\overline{a_{ij}}]$

A.3.15 Conjuguée de la transposée : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \iff \boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}^\top} = [\overline{a_{ji}}]$

A.3.16 Matrice symétrique : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top \iff a_{ij} = a_{ji}$

A.3.17 Matrice antisymétrique : $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^\top \iff a_{ij} = -a_{ji}$

A.3.18 Matrice hermitienne : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* \iff a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

A.3.19 Matrice transconjuguée : $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^* \iff a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$

A.3.20 $\boldsymbol{A}^0_{n\times n} = \boldsymbol{I}_n$

A.3.21 $k \in \mathbb{N}, k \geq 2 : \quad \boldsymbol{A}^k_{n\times n} = (\boldsymbol{A}^{k-1}_{n\times n})\boldsymbol{A}_{n\times n}$

A.3.22 Commutateur : $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$

A.3.23 Matrice idempotente : $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$

A.3.24 Soit $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, la matrice augmentée est $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$

A.3.25 Rang : $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A})$ = nombre de rangées non-nulles de $\boldsymbol{A}$ lorsque $\boldsymbol{A}$ est sous une forme échelonnée.

A.3.26 Matrice inverse (si elle existe) : $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$

A.4 Propriétés des matrices

Dans ce qui suit, lorsqu'on écrit $\boldsymbol{A}^{-1}$, c'est parce qu'on suppose que l'inverse existe.

A.4.1 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff [a_{ij}] = [b_{ij}] \quad \forall i, j$ égalité des matrices

A.4.2 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ commutativité de l'addition

A.4.3 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ associativité de l'addition

A.4.4 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ associativité de la multiplication

A.4.5 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$ élément neutre de l'addition

A.4.6 $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ inverse additif

A.4.7 $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$ élément neutre de la multiplication

A.4.8 $c(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{B}$

A.4.9 $(c + d)\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A}$

A.4.10 $(cd)\boldsymbol{A} = c(d\boldsymbol{A})$

A.4.11 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{AD} + \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{BD}$

A.4.12 $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$

A.4.13 $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$

A.4.14 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$

A.4.15 $\overline{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$

A.4.16 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$

A.4.17 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$

A.4.18 $\boldsymbol{A}^{s+t}_{n\times n} = \boldsymbol{A}^s_{n\times n}\boldsymbol{A}^t_{n\times n}$

A.4.19 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{BA})$

A.4.20 $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{ABC}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{CAB}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{BCA})$.

A.4.21 $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_p) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\ldots\boldsymbol{A}_{p-1}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}_q\ldots\boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_{q-1})$

A.4.22 $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$

A.4.23 $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

A.4.24 $\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^k$; par convention, ceci est égal à $\boldsymbol{A}^{-k}$.

A.4.25 $(\boldsymbol{A}^{-1})^\top = (\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$

A.4.26 Si $c \neq 0$, $(c\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$

A.5 Définition d'un espace vectoriel

Un **espace vectoriel** est un ensemble V d'objets appelés *vecteurs*, sur lesquels on définit deux opérations, soit *l'addition* ainsi que *la multiplication par un scalaire*, et pour lequel les axiomes suivant sont satisfaits pour tous les vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ dans V et pour tous les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

A.5.1 Fermeture sous l'addition : $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$.

A.5.2 Commutativité de l'addition : $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

A.5.3 Associativité de l'addition : $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

A.5.4 Existence d'un élément neutre de l'addition : $\exists \mathbf{0} \in V : \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$.

A.5.5 Existence d'un inverse additif : $\forall \boldsymbol{u} \in V \quad \exists -\boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.

A.5.6 Fermeture sous la multiplication : $\alpha \boldsymbol{u} \in V$.

A.5.7 Distributivité sur l'addition de vecteurs : $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{v}$

A.5.8 Distributivité de l'addition de scalaires : $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{u}$

A.5.9 Associativité de la multiplication de scalaires : $\alpha(\beta \boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$

A.5.10 Élément neutre de la multiplication par un scalaire : $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V. On appellera W un sous-espace vectoriel de V si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

A.5.1 Le vecteur zéro de V est dans W.

A.5.2 W est fermé pour l'addition : $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in W$.

A.5.3 W est fermé pour la multiplication par un scalaire : $\boldsymbol{w} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{w} \in W$

A.6 Propriétés des espaces vectoriels

Soit V un espace vectoriel α un réel et $\boldsymbol{u}$ un élément de V. Les propriétés suivantes sont satisfaites.

A.6.1 $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

A.6.2 $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

A.6.3 $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

A.6.4 $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

A.6.5 $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

A.6.6 Si $\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ alors soit $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

A.6.7 $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

A.6.8 $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$

A.6.9 $-\boldsymbol{u}$ est l'unique vecteur dans V tel que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.

A.7 Définition des déterminants

Soient des matrices carrées. De plus, $\boldsymbol{M}_{ij}$ est définie dans ce qui sut comme étant la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\boldsymbol{A}$

A.7.1 $\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$

A.7.2 Mineur de l'élément $a_{ij} = |\boldsymbol{M}_{ij}|$

A.7.3 $\mathrm{Cof}_{ij}(\boldsymbol{A}) = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{M}_{ij}|$

A.7.4 $|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{pi}\,\mathrm{Cof}_{pi}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell}\,\mathrm{Cof}_{j\ell}(\boldsymbol{A})$

A.7.5 Règle de Cramer : la solution de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ est donnée par $x_j = \dfrac{\det \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

A.7.6 Règle de Cramer : $(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} = \dfrac{\mathrm{Cof}_{ji}(\boldsymbol{A})}{\det \boldsymbol{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\,\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}$

A.8 Propriétés des déterminants

A.8.1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ si a, b, c, d sont des scalaires.

A.8.2 Matrice diagonale : $\det \boldsymbol{D} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$

A.8.3 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^\top|$

A.8.4 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$

A.8.5 $\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_p) = (\det \boldsymbol{A}_1)(\det \boldsymbol{A}_2) \ldots (\det \boldsymbol{A}_p)$

A.8.6 $\det(\boldsymbol{A}) = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}^{-1}}$

A.9 Vecteurs et valeurs propres

A.9.1 $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$

A.9.2 Polynôme caractéristique : $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \mathbf{0}$

A.9.3 Si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, alors $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des matrices semblables.

A.9.4 Diagonalisation : si $\boldsymbol{AX}_i = \lambda \boldsymbol{X}_i$ et si $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{X}_1 \ldots \boldsymbol{X}_n)$ est inversible, alors $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$

A.10 Produit scalaire

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Pour chaque paire de vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ on peut associer un scalaire dénoté par $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, qu'on désigne sous le nom de **produit scalaire** de ces deux vecteurs et satisfaisant les axiomes suivants :

A.10.1 $\langle a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + b\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ pour $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

A.10.2 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$

A.10.3 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$

A.10.4 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Quelques autres définitions et propriétés suivent.

A.10.5 Norme de vecteurs : $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$

A.10.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$

A.10.7 Inégalité triangulaire : $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

A.10.8 Vecteurs orthogonaux si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$

A.10.9 Théorème de Pythagore : $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \quad \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$

A.10.10 Vecteurs orthonormés : $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \,\text{si}\, i \neq j \\ 1 \,\text{si}\, i = j \end{cases}$

A.11 Géométrie vectorielle

A.11.1 Vecteurs unitaires : $\vec{\boldsymbol{\imath}} = (1,0,0), \quad \vec{\boldsymbol{\jmath}} = (0,1,0), \quad \vec{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$

A.11.2 Produit scalaire : $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = uv\cos\theta$

A.11.3 Produit vectoriel : $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

A.11.4 $\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\| = vw\sin\theta$

A.11.5 Produit mixte : $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

A.11.6 Produits vectoriels des vecteurs unitaires : $\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \vec{\boldsymbol{k}} = -\vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{\imath}} \\ \vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{\imath}} = -\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{\imath}} = \vec{\boldsymbol{\jmath}} = -\vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{k}} \\ \vec{\boldsymbol{\imath}} \times \vec{\boldsymbol{\imath}} = \vec{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = 0 \end{cases}$

A.11.7 Équation paramétrique d'une droite : $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}$

A.11.8 Équation symétrique d'une droite : $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$

A.11.9 Distance d'un point à une droite $d = \dfrac{\|\vec{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$

A.11.10 Équation paramétrique d'un plan : $\Pi : \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + s\vec{\boldsymbol{v}}_1 + t\vec{\boldsymbol{v}}_2$

A.11.11 Équation cartésienne d'un plan : $Ax + By + Cz + D = 0$ avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ B &= -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ D &= -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \end{aligned}$$

A.11.12 Distance d'un point à une droite $d = \dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Annexe

B Références

B.1 Source des images

Figure 1.5 http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

Figure 3.1 http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Figure 3.2 http://en.wikipedia.org/wiki/File:Wilhelm_Jordan.png

Figure 10.2 http://en.wikipedia.org/wiki/File:Right_hand_rule_cross_product.svg

Annexe

C Licence

Ce manuel a été conçu par André Roberge.

Ce manuel est publié sous la licence **Creative Commons** suivante : Attribution ; pas d'utilisation commerciale ; partage à l'identique ; 3.0 non transposé (CC BY-NC-SA 3.0)

Ce qui suit est le résumé[1] explicatif "lisible par les humains" du Code Juridique (la version intégrale de la licence) :

Vous êtes libre de :

partager — reproduire, distribuer et communiquer l'oeuvre
remixer — adapter l'oeuvre

selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez attribuer l'oeuvre de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).

Pas d'utilisation commerciale — Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette oeuvre à des fins commerciales.

Partage à l'identique — Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette oeuvre, vous n'avez le droit de distribuer votre création que sous une licence identique ou similaire à celle-ci.

Comprenant bien que : **Renoncement** — N'importe laquelle des conditions ci-dessus peut être modifiées si vous avez l'autorisation du titulaire de droits.
Domaine public — Là où l'oeuvre ou un quelconque de ses éléments est dans le domaine public selon le droit applicable, ce statut n'est en aucune façon affecté par la licence.
Autres droits — Les droits suivants ne sont en aucune manière affectés par la licence :

- Vos prérogatives issues des exceptions et limitations aux droits exclusifs ou usage juste ("fair use") ;
- Les droits moraux de l'auteur ;
- Droits qu'autrui peut avoir soit sur l'oeuvre elle-même soit sur la façon dont elle est utilisée, comme le droit à l'image ou les droits à la vie privée.

Remarque — A chaque réutilisation ou distribution de cette oeuvre, vous devez faire apparaître **clairement** au public la licence selon laquelle elle est mise à disposition.

[1] adapté de http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr

Index