Systèmes d'équations linéaires

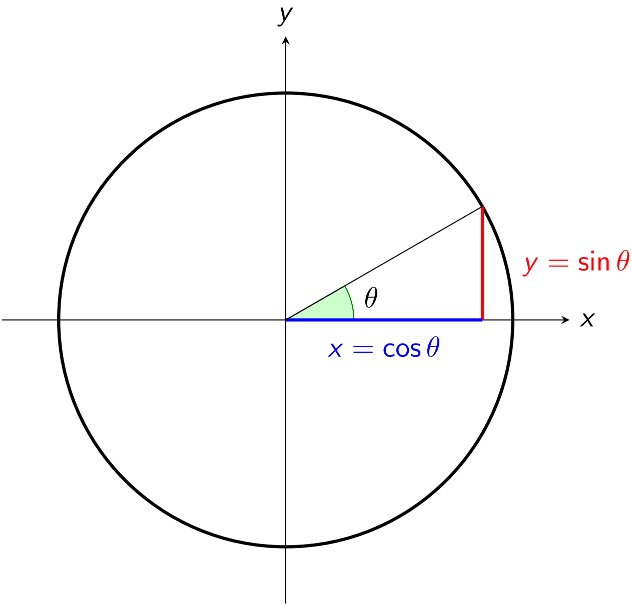
Math 1253

19 septembre 2019

Système d'équations linéaires

- Questions ?
- Équations paramétriques
  - équation d'un cercle
  - équation d'une droite
- Solution générale d'un système d'équations linéaires
- Exemple : équilibrage des réactions chimiques

Cercle unitaire



Équation paramétrique d'un cercle

L'équation d'une courbe circulaire de rayon 1 centré à l'origine est

$$x^2 + y^2 = 1$$

On peut également écrire cette équation sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{cases}$$

On a ici un seul paramètre, θ, qui peut prendre un nombre infini de valeurs. Bien que les points sur le cercle soient décrits habituellement par deux coordonnées, (x, y), cette courbe est objet à une dimension [1] parce qu'on a un seul paramètre (ou variable libre).

1. Dans un espace à 2 dimensions.

Équation paramétrique d'une droite

Voici un exemple de l'équation d'une droite dans le plan :

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Habituellement, on dirait que la variable x est une variable **indépendante**, pouvant prendre une infinité de valeurs, et que la variable y est la variable **dépendante**.
On peut également écrire cette équation sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & \frac{1}{2}t + 3 \end{cases}$$

On a un seul paramètre, t, et la droite est donc un objet à une seule dimension.

Équation paramétrique d'une droite

Une autre façon d'écrire une équation paramétrique de la droite :

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

est :

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= t + 3 \end{cases}$$

De cette façon, on n'a aucune fraction multipliant le paramètre t.

Équation paramétrique d'une droite

Dans le manuel, au lieu d'écrire

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & \frac{1}{2}t + 3 \end{cases}$$

les auteurs préfèrent la notation suivante

$$\begin{cases} x & \text{quelconque} \\ y & = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

J'exige plutôt que vous utilisiez des variables pour indiquer les paramètres et, si possible, de choisir les paramètres pour éviter d'avoir des fractions multipliant les paramètres.

Solution générale d'un système d'équations linéaires

En supposant qu'il existe une solution, la solution générale d'un système d'équations linéaires portant sur les variables $x_1, \ldots, x_n$ sera donnée de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1 & = & \ldots \\ & \vdots & \\ x_n & = & \ldots \end{cases}$$

où on aura soit 0 paramètres,si la solution est unique, ou un ou plusieurs paramètres si on a une infinité de solutions.

Équilibre des réactions chimiques

L'eau est formée à partir de molécules d'hydrogène, H_2, et d'oxygène, O_2, selon la réaction chimique suivante :

$$2\,\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{H_2O}$$

Supposons que l'on ne connaisse pas à priori les proportions relatives de ces molécules et qu'on veuille utiliser les méthodes de l'algèbre linéaire pour les déterminer. On écrirait

$$\color{red}{x}\,\mathrm{H_2} + \color{red}{y}\,\mathrm{O_2} \longrightarrow \color{red}{z}\,\mathrm{H_2O}$$

En termes d'éléments individuels, ceci nous donnerait les équations suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{H}: & 2x & = & 2z \\ \mathrm{O}: & 2y & = & z \end{array}$$

Équilibre des réactions chimiques

Au lieu de la notation

$$\begin{aligned} \mathrm{H}: \quad 2x &= 2z \\ \mathrm{O}: \quad 2y &= z \end{aligned}$$

on écrit plutôt dans la forme habituelle[2] :

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}+2y} - 2z = 0 \\ \phantom{2x+{}} 2y - z = 0 \end{cases}$$

correspondant à la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

qui est déjà dans une forme échelonnée. En divisant chacune des deux lignes par 2 on obtient la forme échelonnée **réduite**.

2. On a déjà essentiellement la forme requise pour une solution ; je fais quand même toutes les étapes requises pour un problème plus compliqué pour démontrer la procédure.

Équilibre des réactions chimiques

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

J'ai encerclé les pivots pour mieux identifier quelles sont les variables dépendantes et laquelle est la variable dépendante ou libre.
Étape importante : la matrice augmentée ci-dessus correspond au système d'équations

$$\begin{cases} x & & - & z & = & 0 \\ & y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{cases}$$

On voit ici que z est une variable libre. La solution générale, dans la notation du livre, est

$$\begin{cases} x & = z \\ y & = \frac{1}{2}z \\ z & \text{quelconque} \end{cases}$$

Équilibre des réactions chimiques

Au lieu d'utiliser la notation du livre, **pour chaque variable libre**, écrivez une équation où vous identifiez cette variable par un paramètre :

$$z = t$$

Ceci nous donne une équation ici une équation additionnelle et nous pouvons écrire le système d'équations de la façon suivante :

$$\begin{cases} x \qquad - \ z = 0 \\ \quad y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \qquad\quad z = t \end{cases}$$

La matrice augmentée correspondante est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

Équilibre des réactions chimiques

En faisant les opérations $L_1 + L_3 \to L_1$ et $L_2 + \frac{1}{2}L_3 \to L_2$, on obtient la forme échelonnée réduite de la nouvelle matrice, où on n'a plus de variable libre :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

La solution générale, en notation paramétrique, est donc

$$\begin{cases} x & = t \\ y & = \frac{1}{2}t \\ z & = t \end{cases}$$

Équilibre des réactions chimiques

En substituant ces valeurs dans l'équation de la réaction chimique du départ,

$$x\,\mathrm{H_2} + y\,\mathrm{O_2} \longrightarrow z\,\mathrm{H_2O}$$

on obtient :

$$t\,\mathrm{H_2} + \frac{t}{2}\,\mathrm{O_2} \longrightarrow t\,\mathrm{H_2O}$$

Important : La convention pour écrire une réaction chimique équilibrée est d'utiliser les plus petits entiers possibles, et sans avoir de fractions qui apparaissent comme coefficient pour chaque molécule. Ici, ceci correspond à choisir $t = 2$:

$$2\,\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{H_2O}$$

Équilibre des réactions chimiques

Question :

- On a une infinité de solutions ; pourquoi ?

Observation :

- La variable libre correspond au coefficient précédent H_2O ; d'autres choix auraient été possibles.
- On verra plus tard que ceci est un exemple d'un système **homogène** ; un tel système a toujours une solution, soit celle où toutes les variables sont égales à zéro.

Équilibre des réactions chimiques

Au lieu d'écrire :

$$\begin{cases} 2x & & - & 2z & = & 0 \\ & 2y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

supposons que l'on ait changé l'ordre des variables et des équations

$$\begin{cases} -z & + & 2y & & & = & 0 \\ -2z & & & + & x & = & 0 \end{cases}$$

correspondant à la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Ceci n'est pas une forme échelonnée, contrairement à ce qu'on avait auparavant. On peut multiplier la première ligne par -1 :

Équilibre des réactions chimiques

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

puis faire $L_2 + 2L_1 \to L_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Si on divise la deuxième ligne par -4, on obtient la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Équilibre des réactions chimiques

Puis, on fait l'opération $L_1 + 2L_2 \to L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Ceci est la forme échelonnée réduite. où j'ai, encore une fois, encerclé les pivots. Ceci correspond au système suivant

$$\begin{cases} z & & - & x & = & 0 \\ & y & - & \frac{1}{2}x & = & 0 \end{cases}$$

Ici, c'est x (le coefficient de H_2) et non pas z (le coefficient de H_2O) qui est la variable libre.

Équilibre des réactions chimiques

Comme précédemment, rajoutons une équation supplémentaire pour la variable libre : $x = t$. Ceci nous donne

$$\begin{cases} z & & - & x & = & 0 \\ & y & - & \frac{1}{2}x & = & 0 \\ & & & x & = & t \end{cases}$$

et la matrice augmentée correspondante est

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

Comme précédemment, en faisant les opérations $L_1 + L_3 \to L_1$ et $L_2 + \frac{1}{2}L_3 \to L_2$, on obtient la forme échelonnée réduite de la nouvelle matrice, où on n'a plus de variable libre :

$$\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

La solution générale, en notation paramétrique, est identique à ce qu'on avait obtenu auparavant.

$$\begin{cases} z &= t \\ y &= \frac{1}{2}t \\ x &= t \end{cases}$$

En utilisant des paramètres[3] pour les variables indépendantes, on traite toutes les variables sur un pied d'égalité et la solution finale est toujours la même, peut importe l'ordre qu'on choisit pour les colonnes représentant les variables. C'est ce que j'exige que vous utilisiez dans ce cours.

3. Habituellement, on utilisera $r, s, t, \ldots$ pour dénoter les paramètres pouvant prendre n'importe quelle valeur.