Ceci n'est pas un manuel d'algèbre linéaire]Ceci n'est pas un manuel d' algèbre linéaire

[

André Roberge

6 novembre 2018

Par René Magritte

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le cours d'introduction à l'algèbre linéaire est souvent le premier cours au niveau universitaire où les étudiants ont à apprendre des concepts de mathématiques avec une approche typique de celle utilisée par les mathématiciens professionnels, basée sur l'abstraction et les démonstrations. Ceci peut être un peu intimidant.

Selon Wikipédia [1], les mathématiques sont définies ainsi :

Mathématiques

Les mathématiques (ou la mathématique) sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations. Elles sont aussi le domaine de recherche développant ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.

Elles possèdent plusieurs branches telles que : l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse, la géométrie, la logique mathématique, etc. Il existe également une certaine séparation entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées.

Dans ce livre, nous présentons les définitions formelles dans des encadrés en bleu tel que celui ci-dessus. Un des buts de ce manuel est de vous aider à développer une compréhension intuitive de certaines définitions que l'on retrouve en algèbre linéaire. Pour vous aider, nous allons souvent utiliser en premier des définitions un peu plus informelles. Par exemple, votre expérience dans vos cours de mathématiques vous fait peut-être penser que la définition des mathématiques ressemble plutôt à la suivante :

Ceci n'est pas une définition.

Les mathématiques qu'on voit au niveau universitaire ont été inventés par des sadiques qui inventent des termes compliqués [2] uniquement dans le but de décourager

1. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques
2. Comme le "non-sens abstrait" https ://fr.wikipedia.org/wiki/Abstract$_n$*onsense*

les étudiants.

1.1 Au sujet des démonstrations

Les mathématiciens **adorent** les démonstrations [3]. Le but de ce manuel est de vous donner une idée intuitive des concepts de base de l'algèbre linéaire en évitant les démonstrations. Cependant, nous utilisons généralement des exemples simples pour guider votre intuition [4].

Ceci n'est pas une démonstration.

Un exemple n'est pas une démonstration. Un argument de plausibilité n'est pas une démonstration. Une démonstration est une suite précise de propositions logiques. Le manuel recommandé par votre professeur contient toutes les démonstrations requises. Votre professeur inclut des démonstrations à faire dans les examens uniquement [5] *dans le but de faire baisser votre note dans le cours.*

Les notes en marge [6] ajoutent des détails que vous trouverez parfois utile [7].

1.2 Au sujet des exemples

En général, je cherche à choisir des exemples tellement simples qu'ils sont probablement jugés par votre professeur comme l'étant beaucoup trop pour être utilisé en classe, ou dans votre manuel de cours. Il est vrai que, très souvent, les exemples que j'ai choisis peuvent cacher la complexité d'un sujet donné : vous devriez les considérer comme un simple premier pas dans votre voyage d'apprentissage du sujet.

3. Certains utilisent parfois le mot *preuve* au lieu de démonstration, ce qui est un anglicisme.
4. Nous incluons parfois des énoncés qui peuvent être faux dans un contexte différent.
5. Ceci n'est pas toujours vrai ; ça dépend du professeur qui enseigne le cours
6. Comme celle-ci.
7. Du moins, je l'espère.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

Considérez l'équation suivante :

$$x = 2$$

Ceci est une équation linéaire avec une seule inconnue.

Ceci n'est pas une définition.

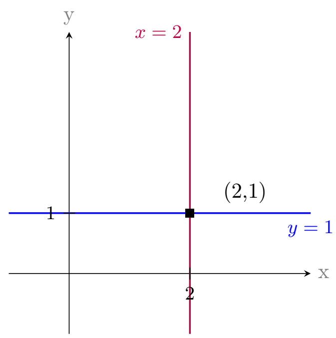
Une **inconnue** est un *scalaire* déguisé sous la forme d'une lettre [1].

Un **scalaire** est le mot utilisé en mathématiques supérieures pour désigner un nombre [2].

Rajoutons une deuxième équation linéaire, avec une autre inconnue.

$$\begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

1. Pour augmenter la confusion, on utilise parfois des lettres grecques au lieu de lettre de l'alphabet latin utilisé en français.
2. Dans ce livre, on suppose toujours que c'est un nombre réel.



Deux droites qui s'intersectent dans un plan.

Ceci est un exemple d'un **système** d'équations linéaires.

Ceci n'est pas une définition.

Un **système d'équations linéaires** est une collection d'équations linéaires ayant des inconnues communes.[3]

Puisqu'on a un système avec deux inconnues, x et y, on peut le représenter par deux droites dans un plan. La **solution** de ce système correspond au point d'intersection de ces deux droites.

Algébriquement, on peut représenter cette solution de deux façons :

- En utilisant la notation traditionnelle pour un point : $(x, y) = (2, 1)$.
- En écrivant la solution comme un système d'équations linéaires où chaque inconnue n'apparait qu'une seule fois, avec une ligne différente pour chaque inconnue. Ceci est identique à ce que nous avions écrit précédemment :

$$\begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

2.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Le système d'équations linéaires que nous avons écrit ci-dessus comporte deux équations, chacune écrite sur une ligne différente. Nous pouvons numéroter ces équations dans l'ordre où elles apparaissent.

$$\begin{cases} x & = & 2 & \qquad \boxed{1} \\ y & = & 1 & \qquad \boxed{2} \end{cases}$$

3. Pour que l'utilisation du mot *communes* soit correct, il faudrait plutôt écrire :

$$\begin{cases} x + 0y & = & 2 \\ y + 0x & = & 1 \end{cases}$$

Nous pouvons interchanger les deux lignes sans que la solution ne change

$$\begin{cases} y = 1 & \boxed{1} \\ x = 2 & \boxed{2} \end{cases}$$

On dit que ces deux systèmes d'équations linéaires [4] sont **équivalents**.

Équivalence

Deux systèmes d'équations linéaires sont dits **équivalents** s'ils ont la même solution.

L'interchange de deux lignes est un exemple d'une **opération élémentaire sur les lignes**. Dans ce qui suit, on dénotera un tel interchange de la façon suivante :

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

Ceci n'est pas une définition.

Une **opération élémentaire sur les lignes** [5] est une opération mathématique qui transforme un système d'équations linéaires en un système équivalent.

Une autre opération sur les lignes qu'on peut effectuer est de remplacer une ligne donnée par l'addition de celle-ci avec le multiple d'une autre ligne.

$$\begin{cases} y = 1 & \boxed{1} \\ x = 2 & \boxed{2} \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \phantom{x -{}} y = 1 \\ x - y = 1 & \Leftarrow \quad L_2 - L_1 \end{cases}$$

Finalement, une troisième opération élémentaire qu'on peut effectuer est de multiplier une ligne par une constante différente de zéro.

4. L'original et celui avec les équations dans un autre ordre différent.

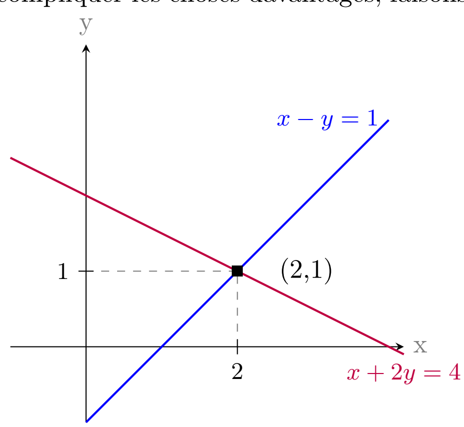
5. Une opération élémentaire sur les lignes n'est pas un concept mathématique mais un truc de calcul ; il n'y a donc pas de définition formelle pour ceci.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}\boxed{1}\\ \boxed{2}\end{array}$$

est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & 3y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Leftarrow \quad 3L_1 \\ \\ \end{array}$$

Pour vraiment compliquer les choses davantages, faisons une dernière opération sur les lignes



Interprétation graphique de ce nouveau système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & 3y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}\boxed{1}\\ \boxed{2}\end{array}$$

est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 4 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Leftarrow \quad L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

Bien que les deux équations soient très différentes de celles du départ, et que le graphique correspondant soit également différent, la solution reste inchangée.

Nous avons donc maintenant un système d'équations linéaires avec deux inconnues, où les deux inconnues apparaissent dans chacune des deux équations. Ce système est équivalent à celui du départ, plus simple et où on peut immédiatement identifier la valeur de chacune des inconnues.

$$\left.\begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right\} \qquad \text{équivalent à} \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 4 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$$

2.2 Matrice augmentée

Ceci n'est pas une définition.

Une **inconnue** est un scalaire qui s'est déguisée sous la forme d'une lettre, *parfois augmentée d'un **indice**, et dont on demande aux étudiants d'en deviner l'identité.*

Un **indice** est un chiffre qu'on met au bas d'une lettre, comme ceci : x_1, pour la distinguer d'une autre lettre, x_2, identique mais indiquant une quantité différente ; on utilise parfois un indice lorsqu'on pense qu'on n'a pas suffisamment de lettres dans l'alphabet pour désigner toutes les inconnues. [6]

Supposons que l'on vous demande de trouver la solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{cases}$$

ayant les inconnues x_1 et x_2. Sauf pour le choix des inconnues, on reconnait ce système d'équations linéaires comme étant identique au précédent. On connait donc déjà la solution :

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Si on ne connaissait pas cette solution, on aurait pu la retrouver en faisant l'inverse des opérations élémentaires sur les lignes qu'on avait vu [7]. Parce que ces opérations élémentaires ne dépendent pas des choix des symboles utilisés pour dénoter les inconnues, on trouve utile d'introduire une notation qui n'inclut pas ces symboles. Ainsi, au lieu d'écrire :

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{cases}$$

on écrit la version totalement équivalente suivante :

$$\begin{cases} 1x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 1x_1 & + & (-1)x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Les chiffres, en rouge, devant les inconnues sont appelés les **coefficients** ; ceux en bleu sont les termes constants. Ayant identifié les coefficients et les termes constants, on se débarrasse de tout le reste, considéré comme une notation superflue, et on écrit plutôt :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

6. Il ne faut pas confondre un indice, et un **exposant**, ce dernier apparaissant en haut de la lettre, x^1.

7. On fera ceci dans un exemple ci-dessous.

On appelle ceci la **matrice**[8] **augmentée** du système d'équations linéaires. La partie à gauche de la barre verticale[9], avec les chiffres en rouge, s'appelle **matrice des coefficients**.

Ceci n'est pas une définition.

La notation des matrices augmentées a été inventée par des mathématiciens qui cherchaient à trouver des solutions pour des systèmes d'équations linéaires mais qui n'aimaient pas utiliser des lettres (pour les inconnues), ni des signes d'addition $(+)$ ou d'égalité $(=)$.

On peut également écrire la solution sous la forme d'une matrice augmentée en procédant comme ceci :

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1x_1 & + & 0x_2 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice augmentée de la solution est dans ce qu'on appelle une *forme échelonnée réduite* que l'on définira un peu plus tard.

Dans un cours d'introduction à l'algèbre linéaire, **la très grande majorité des calculs**[10] **que vous aurez à faire** consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir, si cela est possible, une matrice **équivalente** dans la **forme échelonnée réduite.**

Ceci est un exemple.

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_2 - L_1 \to L_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{3}L_2 \to L_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_1 - 2L_2 \to L_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Nous terminons ce chapitre avec deux véritables définitions mathématiques.

8. On verra la définition d'une matrice dans le prochain chapitre

9. Certains mathématiciens, préférant le minimalisme absolu, n'incluent pas une telle barre verticale dans une matrice augmentée.

10. Ce qui semble être difficile pour les étudiants est d'interpréter correctement ces calculs qui sont, en général, très simples.

Équation linéaire

Une **équation linéaire** est une équation qu'on peut mettre sous la forme

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

où b ainsi que les coefficients $a_1, \ldots a_n$ sont des scalaires connus, et $x_1, \ldots, x_n$ sont des inconnues.

Système d'équations linéaires

Un système de d'équations linéaires est une collection de m équations linéaires qui portent sur les mêmes n inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Chapitre 3

Matrices

Sans avoir défini ce qu'était une **matrice**, nous avons néanmoins introduit un objet appelé **matrice augmentée**. Sans plus attendre, voici une définition formelle d'une **matrice**.

Matrice

Soit m et n deux entier positifs ; une matrice de **taille** $m \times n$ est une collection de mn nombres, appelés coefficients, arrangés dans un tableau rectangulaire :

$$\begin{array}{cc} & n \text{ colonnes} \\ m \text{ lignes} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Vous avez peut-être remarqué [1] que la notation utilisée pour les coefficients dans la définition d'une matrice ressemble étrangement à celle utilisée dans la définition d'un système d'équations linéaires.

Système d'équations linéaires

Un système de d'équations linéaires est une collection de m équations

1. Croyez-le ou non, ceci n'est pas une coïncidence.

linéaires qui portent sur les mêmes n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Ceci est un exemple.

Voici une matrice de taille 2×3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Au lieu d'utiliser des crochets, $[\dots]$, on utilise parfois des parenthèses pour encadrer les coefficients d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Nous allons étudier plusieurs propriétés des matrices dans ce livre. Pour l'instant, nous allons nous limiter à définir deux *formes* que peuvent prendre les matrices.

3.1 Matrice de forme échelonnée

La matrice suivante est dans la **forme échelonnée** :

$$\begin{bmatrix} p_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & p_2 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, les coefficients $p_1, p_2, \dots$ sont tous différents de zéro. De plus, les coefficients identifiés par un astérisque, $*$, peuvent prendre n'importe quelle valeur. Une matrice est en forme échelonnée si le premier coefficient non-nul d'une ligne donnée est toujours à la droite du coefficient non-nul de la ligne précédente. On appelle ce coefficient non-nul un **pivot**. Pour aider à identifier ce qu'on entent par une forme échelonnée, nous écrivons la matrice à nouveau mais, cette fois, nous identifions une forme en escalier[2] sous laquelle tous les coefficients doivent être nuls.

$$\begin{bmatrix} p_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & p_2 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \end{bmatrix}$$

Une matrice est dans la forme échelonnée **réduite** si, en plus d'être dans une forme échelonnée, tous les pivots sont égaux à 1, et tous les autres coefficients dans un colonne où il y a un pivot, sont égaux à 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la matrice ci-dessus, on a encerclé les pivots et écrits tous les zéros qui sont dans une **colonne pivot**[3] en bleu.

Ceci est un exemple.

La matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

est dans une forme échelonnée réduite, où on a identifié les pivots en les encerclant.

2. C'est à cette forme en escalier que le mot *échelonné* fait référence.
3. Une **colonne pivot** est une colonne où on retrouve un pivot.

Chapitre 4

Nombre de solutions

Si je vous demandais de trouver la solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x &= 3 \\ 2x &= 6 \end{cases}$$

je suis convaincu que vous y parviendriez même si vous n'avez pas maîtrisé les techniques de calcul avancées qu'on utilise en algèbre linéaire. Néanmoins, je vais procéder comme si vous n'étiez pas capable de trouver la solution vous-même.

Tout d'abord, on écrit la matrice augmentée correspondant à ce système.

$$\begin{cases} 1x &= 3 \\ 2x &= 6 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array}\right]$$

Ensuite, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir une matrice équivalente mais qui a une forme échelonnée réduite. On peut faire ceci en remplaçant la deuxième ligne par celle-là même à laquelle on soustrait deux fois la première ligne

$$L_2 - 2L_1 \to L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

J'ai encerclé le pivot présent dans cette matrice parce que ceci est souvent utile [1]. On remarque que tous les coefficients sur la dernière ligne sont des zéros. **Qu'est-ce que ceci peut bien vouloir dire ?** [2]

Pour savoir ce que cette ligne représente, il faut revenir à la forme équivalente où on a des équations avec des inconnues.

$$\begin{cases} x &= 3 \\ 0\,x &= 0 \end{cases} \qquad \Leftarrow \quad \text{Notez cette équation.}$$

1. Mais ce n'est pas le cas ici.
2. Dans plusieurs manuels d'algèbre linéaire, parce qu'on considère des exemples beaucoup plus compliqués qu'ici, on voit une ligne nulle apparaître uniquement dans les cas où il existe un nombre infini de solutions. Ce faisant, les étudiants pensent automatiquement que la présence d'une ligne entièrement nulle signifie que le système a un nombre infini de solutions, ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

Puisque multiplier un nombre par zéro donne zéro comme résultat, on sait que l'équation $0\,x = 0$ sera vraie peu importe la valeur de x. Comme cette équation ne nous apprend rien sur la solution recherchée, on peut l'oublier. La seule équation qui reste est

$$x = 3$$

Ceci est la solution de ce système d'équations linéaires, comme vous l'aviez sûrement déjà obtenu. On n'a qu'une valeur possible pour la variable x : on dit qu'on a une solution unique.

Ceci n'est pas une définition.

Dans une matrice augmentée, une ligne où tous les coefficients sont nuls correspond à une équation qui ne nous donne absolument aucune information sur la valeur des inconnues.

4.1 Aucune solution

Considérez le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x & = & 3 \\ x & = & 4 \end{cases}$$

Si $x = 3$, la deuxième équation est fausse ; si $x = 4$, c'est la première équation qui est fausse. Comme il est impossible de trouver une valeur de x qui fasse en sorte que les deux équations sont vraies, on dit que le système est **incompatible** ou **inconsistant** : il n'existe aucune solution. Voyons à quoi ceci ressemble si on utilise la notation des matrices augmentées.

La matrice augmentée équivalente à ce système d'équations linéaires est

$$\begin{cases} 1x & = & 3 \\ 1x & = & 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right]$$

On peut obtenir une matrice équivalente ayant une forme échelonnée [3] à l'aide d'une seule opération élémentaire sur les lignes

$$L_2 - L_1 \to L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

On voit qu'on a un pivot du côté droit de la barre verticale [4]. **Qu'est-ce que cela veut dire ?**

3. Mais pas réduite.
4. Si on faisant comme certains auteurs et qu'on n'incluait pas une telle barre verticale, il serait encore plus difficile d'observer qu'on a une situation inhabituelle.

Pour le savoir, on écrit l'équation correspondant à cette deuxième ligne de la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad 0\,x = 1$$

On voit tout de suite qu'il n'y a aucune valeur possible de x qui fasse en sorte que cette équation soit vraie : le système n'a aucune solution.

Ceci n'est pas une définition.

Dans certains manuels, on vous suggère de mémoriser le fait que d'avoir un pivot dans la dernière colonne d'une matrice augmentée correspond à n'avoir aucune solution. **Ne faites pas ceci !** Plutôt, habituez-vous à passer de la forme d'une matrice augmentée à celle d'un système d'équations dans sa forme habituelle avec les inconnues indiquées lorsque vous pensez qu'il pourrait ne pas y avoir de solutions.

4.2 Infinité de solutions

Considérez le système d'équations suivant qui n'a qu'une seule équation :

$$x + y = 1$$

Ceci est l'équation d'une droite [5]. Il existe un nombre infini de valeurs possibles pour x et y qui font en sorte que cette équation soit vérifiée. Par exemple, on a $(0, 1), (1, 0), (-1, 2), (2, -1), \ldots$. On a donc un nombre infini de solutions. Dans le prochain chapitre, on verra une façon utile de dénoter toutes ces solutions.

4.3 Résumé du chapitre

Ceci n'est pas une démonstration.

Un système d'équations linéaires a soit :

- *aucune solution ;*
- *une seule solution ;*
- *un nombre infini de solutions.*

5. Dans le plan x—y.

Ceci est un exemple.

Dans un problème où on vous demande de déterminer la ou les valeurs de 2 inconnues, x et y, en fonction d'une constante k non spécifiée, vous obtenez la matrice augmentée suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right]$$

La dernière ligne de cette matrice augmentée correspond à l'équation suivante [6] :

$$(k^2-4)y = k-2$$

Il y a trois cas possibles :

1. Si $k=2$, cette équation correspond à

   $$0\,y = 0$$

   qui est vrai peu importe la valeur de y. Cette équation ne nous donne aucune information sur les solutions possibles. On doit donc examiner l'équation qui reste, c'est-à-dire l'équation correspondant à la première ligne de la matrice augmentée ; celle-ci est

   $$x + 2y = 3$$

   Ceci est l'équation d'une droite : il y a donc une infinité de solutions dans ce cas.

2. Si $k=-2$, cette équation correspond à

   $$0\,y = -4$$

   Ceci est impossible peu importe la valeur de y : il n'y a donc aucune solution possible dans ce cas.

6. Dans le passé, à chaque fois que je donnais un problème semblable mais légèrement plus compliqué, des étudiants écrivent que ceci correspond plutôt à l'équation

$$k^2-4 = k-2$$

C'est en partie ce qui m'a motivé à écrire ce livre avec des exemples les plus simples possibles.

3. Pour les valeurs de k différente de 2 et de -2, on peut diviser de chaque côté par $k^2 - 4$ pour trouver

$$y = \frac{1}{k+2}$$

Il y a donc une valeur unique pour y et, après un peu de calculs supplémentaires, on peut vérifier qu'on obtient

$$x = \frac{3k+4}{k+2}$$

On a donc une solution unique dans ce dernier cas. Par exemple, si $k = 0$, la solution est $(x, y) = (2, \frac{1}{2})$.

Chapitre 5

Variables et forme paramétrique

Vous avez à résoudre un système d'équations linéaires. Dans votre manuel d'algèbre linéaire vous voyez qu'on mentionne différents termes faisant apparemment référence aux inconnues dans les équations : inconnues ou variables principales ou secondaires, variables dépendantes ou indépendantes, variables liées ou libres, etc. **Est-ce qu'il y a vraiment différents types de variables dans un seul système d'équations linéaires ?**

This is another **tcolorbox**. Try [a] this.

a. Does this work ?

Here, you see the lower part of the box.