2. Étude et résolution numérique

1. Dans le cas d'un seul véhicule, il faut minimiser la fonction $f\,:\, w \rightarrow p^T w$. Où p est le vecteur des prix et w la puissance au niveau de la borne de la voiture. Les contraintes associées sont :
   - $c_1(w) = -w$
   - $c_2(w) = w - w_{max}$
   - $c_3(w) = b_0 1^T_{[n_0;n_f]} w - \Delta q$

f et c_1 sont linéaires donc convexes, et c_2 et c_3 sont affines donc convexes également. Montrons qu'il existe une solution à ce problème.
Supposons que $\Delta q \leq b_0 * N * w_{max}$. Alors, l'ensemble des w vérifiant $c_1(w) \leq 0, c_2(w) \leq 0$ et $c_3(w) = 0$ est non vide car $w = \frac{\Delta q}{b_0 N}$ est une solution.
De plus : $K = \{w,\ c_1(w) \leq 0\ et\ c_2(w) \leq 0\}$ est un ensemble fermé, borné en dimension finie, c'est donc un compact de $\mathbb{R}^N$. On sait également que $H = \{w,\ c_3(w) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$, donc un fermé. L'intersection d'un compact par un fermé étant un compact, l'intersection de K et H est un compact non vide. Le théorème de Weierstrass sur ce compact (f linéaire donc continue) nous garantit donc **l'existence d'une solution à ce problème**.
D'autre part, les coefficients de p sont strictement positifs, la fonction f est alors strictement convexe. Dès lors, s'il existe une solution, elle sera **unique**.

Nous avons ici un problème de programmation linéaire sous contraintes ; ainsi, nous réutilisons **l'algorithme d'Uzawa** vu en TP afin d'en trouver la solution.

2. On propose les **ordres de grandeur** suivant pour les différentes variables du problème :
   - $w_{max} = 10\ kW$ (valeur courante pour éliminer les risques de surchauffe).
   - $u_0 = 230\ V$
   - $b_0 = \frac{1}{u_0} = \ 10^{-3}\ V^{-1}$
   - $p = 0.1€$ pour une heure creuse, $p = 0.2€$ pour une heure pleine (prix pour $1\ kWh$)
   - $q_{max} = 0.050\ A.h$ pour une voiture électrique, en moyenne

On implémente l'algorithme d'Uzawa (code en annexe).
On définit le **vecteur p du prix** grâce à ses 24 coordonnées : en effet, le prix étant fixe sur une heure, le prix ne peut prendre que 24 valeurs différentes. D'après les données de EDF, les heures pleines correspondent aux plages horaires 8h-12h et 16h-22h. Les plages horaires d'heures creuses sont donc 12h-16h et 22h-8h. On construit donc le vecteur prix en conséquence.
Comme **valeur de départ de l'algorithme**, on prend $w_0 = w_{max}$ puisqu'il n'y a qu'une seule voiture dans le parc de recharge.
<u>Analyse des résultats</u> :

- On remarque que les résultats sont plutôt satisfaisants quant à la répartition de la puissance en fonction des plages horaires heures creuses/heures pleines. En effet, quand on est sur une plage horaire creuse, on observe que la puissance délivrée est bien plus élevée qu'en plage horaire pleine (sur de telles plages horaires, la puissance délivrée est quasi nulle).
- Cependant, la contrainte 1 nous imposait d'avoir une puissance positive, et nous pouvons remarquer que ce n'est pas toujours le cas (quoique les valeurs négatives soient finalement proches de zéro). Ceci est peut-être le fruit d'un problème d'ordre de grandeur des données, car les résultats sont très sensibles aux variations des paramètres d'entrée.
- Toutefois, la contrainte 2 est respectée, car les valeurs de la puissance ne dépassent jamais w_{max} ; de même, on est proches de la contrainte égalité 3.

3. Étude avancée

3. Afin d'utiliser la méthode de décomposition/coordination, il faut s'assurer que le coût et les contraintes peuvent bien comme une somme de différents termes ne dépendant que d'une seule variable de décision. On a d'une part :

$$f(w) = \sum_{i=1}^{N} p^T w_i = \sum_{i=1}^{N} f_i(w_i) \text{ en posant } f_i(w) = p^T w_i$$

Le coût f se décompose bien comme une somme de différents termes ne dépendant que d'une seule variable de décision. D'autre part, on écrit le vecteur des contraintes :

$$c(w) = (-w_1, \dots, -w_N, w_1 - \frac{w_{max}}{N}, \dots, w_N - \frac{w_{max}}{N}, \dots, b_O 1^T w_1 - \Delta q_1, \dots, b_0 1^T w_N - \Delta q_n)$$

Pour la contrainte 2, les coordonnées de c ne me semblent pas être très adaptées, mais je ne voyais pas comment traduire autrement la contrainte 2d. On a N le nombre de voitures, en prenant $c_i(w_i)$ le vecteur de coordonnées :

- $i\ :\ -w_i$
- $N + i\ :\ w_i - \frac{w_{max}}{N}$
- $2N + i\ :\ \ b_O 1^T w_i - \Delta q_i$
- $0\ sinon$

On a bien $c(w) = \sum_{i=1}^{N} c_i(w_i)$. Alors les contraintes se décomposent effectivement comme la somme de différents termes ne dépendant que d'une seule variable de décision.
On peut donc appliquer l'algorithme proposé de décomposition/coordination.