ALGEBRĂ LINIARĂ

Suport activități remediale

INTRODUCERE

Prezenta lucrare a fost elaborată în cadrul proiectului “Competitivitate și Succes prin Invățare și Educație – CSIE” (ROSE – CSIE), cod proiect 227 /SGU/NC/II din 18.09.2019, director de proiect prof. univ. dr. Marius Giuclea.

1. METODA ELIMINĂRII COMPLETE

BREVIAR TEORETIC

Metoda eliminării complete se poate folosi, printre altele, pentru:

- rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare;
- calculul inversei unei matrice nesingulare.

Etapele aplicării acestei metode sunt:

1) Se alcătuieşte un tabel care conţine matricea sistemului ce trebuie rezolvat (notată A) sau matricea care trebuie inversată (A).

2) Se alege un element nenul al matricei A, numit pivot.

3) Elementele din noua iteraţie se determină astfel:
   a) elementele de pe linia pivotului se împart la pivot;
   b) coloana pivotului se completează cu zero;
   c) restul elementelor se calculează după regula dreptunghiului:
      - se formează un dreptunghi, având elementul ce trebuie înlocuit şi pivotul ca vârfuri;
      - din produsul elementelor de pe diagonala pivotului se scade produsul elementelor celeilalte diagonale, iar rezultatul se împarte la pivot.

Schematic, regula dreptunghiului se prezintă astfel:

$$\begin{array}{ccc} a & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{b} & \ldots\ldots\ldots\ldots & c \end{array} \qquad x' = \frac{bx - ac}{b}, \text{ unde:}$$

b = pivotul;
x = elementul ce trebuie înlocuit;
x' = valoarea elementului x în noua iteraţie.

d) (facultativ) Dacă pe linia pivotului există un element egal cu zero, atunci coloana acelui element se copiază în iteraţia următoare; analog, dacă pe coloana pivotului există un element egal cu zero, atunci linia acelui element se copiază în iteraţia următoare.

4) Se reiau paşii 2 şi 3 până când s-a ales câte un pivot pe fiecare linie ce conţine cel puţin un element nenul.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Rezolvare:

Dacă pivotul se alege întotdeauna pe diagonala principală a matricei A, atunci schema de calcul este următoarea:

A	b
……..	………
I_3	X

$\boxed{-1}$	2	-3	-2
2	-6	9	3
-3	2	2	-3
1	-2	3	2
0	$\boxed{-2}$	3	-1
0	-4	11	3
1	0	0	3
0	1	-3/2	1/2
0	0	$\boxed{5}$	5
1	0	0	3
0	1	0	2
0	0	1	1

Aplicarea metodei Gauss-Jordan a condus la transformarea sistemului initial într-un sistem echivalent, care se citeşte astfel în ultima iteraţie:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Deducem că soluţia sistemului este: $x_1 = 3$, $x_1 = 2$, $x_1 = 1$.

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvare:

4	1	1	9
3	$\boxed{1}$	0	6
5	2	1	11
$\boxed{1}$	0	1	3
3	1	0	6
-1	0	1	-1
1	0	1	3
0	1	-3	-3
0	0	$\boxed{2}$	2
1	0	0	2
0	1	0	0
0	0	1	1

Observaţie. Pentru simplificarea calculelor, am ales drept pivot mai întâi elementul al doilea al diagonalei principale (în acest caz, elementul 1).

Soluţia sistemului este: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3. Să se determine, în cazul în care există, inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Rezolvare:

Deoarece det $A \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă. Pentru aflarea inversei vom folosi următoarea schemă:

A	I_3
……..	………
I_3	A^{-1}

$\boxed{2}$	-1	3	1	0	0
0	4	1	0	1	0
3	1	5	0	0	1
1	-1/2	3/2	1/2	0	0
0	$\boxed{4}$	1	0	1	0
0	5/2	1/2	-3/2	0	1
1	0	13/8	1/2	1/8	0
0	1	1/4	0	1/4	0
0	0	$\boxed{-1/8}$	-3/2	-5/8	1
1	0	0	-19	-8	13
0	1	0	-3	-1	2
0	0	1	12	5	-8

Am obţinut

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & -8 & 13 \\ -3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

4. Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1 + 10x_2 = 21 \end{cases}$$

Rezolvare:

-2	3	$\boxed{-1}$	3
5	4	2	15
1	10	0	21
2	-3	1	-3
$\boxed{1}$	10	0	21
1	10	0	21
0	-23	1	-45
1	10	0	21
0	0	0	0

Observaţii

1) Metoda Gauss-Jordan constă în transformări succesive ale sistemului iniţial în forme echivalente.

2) În rezolvarea unui sistem prin această metodă nu este obligatoriu ca pivotul să fie ales pe diagonala principală.

Rescriind sistemul pe baza datelor din ultima iteraţie, rezultă:

$\begin{cases} -23x_2 + x_3 = -45 \\ x_1 + 10x_2 = 21 \end{cases}$, care este un sistem compatibil simplu nedeterminat,

cu soluţia: $\begin{cases} x_2 = \alpha \\ x_1 = 21 - 10\alpha \\ x_3 = -45 + 23\alpha \end{cases}$, $\alpha \in R$

5. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Rezolvare:

5	-3	10	-10
3	2	4	1
$\boxed{-1}$	-7	2	6
0	-38	20	20
0	-19	10	19
1	7	-2	-6
0	0	0	-18
0	-19/10	$\boxed{1}$	19/10
1	16/5	0	-11/5

Aplicând metoda eliminării complete, am obţinut o formă echivalentă a sistemului:
$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -18 \\ 0x_1 - \frac{19}{10}x_2 + x_3 = \frac{19}{10} \\ x_1 + \frac{16}{5}x_2 + 0x_3 = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Din prima relaţie rezultă că sistemul este incompatibil.

6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Rezolvare:

2	$\boxed{-1}$	1	2	1
1	1	2	1	2
3	-2	1	3	1
-2	1	-1	-2	-1
$\boxed{3}$	0	3	3	3
-1	0	-1	-1	-1
0	1	2	0	1
1	0	1	1	1
0	0	0	0	0

Aplicând metoda eliminării complete, am obţinut următoarea formă echivalentă a sistemului:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

care este un sistem compatibil dublu nedeterminat.

Soluţia sistemului este: $\begin{cases} x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_2 = 1 - 2\alpha \\ x_1 = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$, cu $\alpha, \beta \in R$

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii liniare:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ -x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -27 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 14 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

R: 1. $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$ **2.** $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{9}{11},\ x_3 = \frac{39}{11}$ **3.** Sistemul este incompatibil

4. $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$ **5.** $x_1 = -\frac{5}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{4}{3},\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta;\ \alpha, \beta \in R$

6. $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2,\ x_4 = -2$

Să se determine inversele matricelor:

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

R: 7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

2. SPAŢII VECTORIALE

2.1. Noțiunea de spațiu vectorial

Definiţia 1. Se numeşte *spaţiu vectorial (spaţiu liniar)* peste un corp K, o mulţime nevidă V dotată cu două operaţii, notate

$+ : V \times V \to V$ şi $\cdot : K \times V \to V$, cu proprietăţile:

I. $(V, +)$ grup abelian;

II. *a)* $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in V;$

b) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ \forall \alpha \in K,\ \forall x, y \in V;$

c) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x),\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in V;$

d) $1_K \cdot x = x,\ \forall\, x \in V$, unde 1_K este elementul neutru al operaţiei de înmulţire din K.

Observaţie. Se notează cu (V, K) *spaţiul (vectorial) liniar V peste corpul K.*

Elementele mulţimii V se numesc *vectori*, iar elementele mulţimii K se numesc *scalari*.

Dacă $K = R$, atunci (V, R) se numeşte *spaţiu liniar real*.

Dacă $K = C$, atunci (V, C) se numeşte *spaţiu liniar complex*.

Exemple de spaţii liniare:

- (R^n, R) *spaţiul liniar real n-dimensional*, unde $R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R,\ i=1,2,\dots,n\}$
- $(M_{m,n}(R),R)$ *spaţiul liniar real al matricelor cu m linii, n coloane şi elemente numere reale.*
- $(R[X],R)$ *spaţiul liniar real al polinoamelor în nedeterminata X, cu coeficienţi reali.*
- $(R_n[X],R)$ *spaţiul liniar real al polinoamelor de grad cel mult n, în nedeterminata X, cu coeficienţi reali.*
- $(F[a,b],R)$ *spaţiul liniar real al funcţiilor reale definite pe intervalul* $[a, b]$.

Definiţia 2. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi $W \subset V$, $W \neq \varnothing$. Spunem că W este *subspaţiu liniar* al spaţiului liniar (V,K) dacă:

1) $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W;$

2) $\forall \alpha \in K, \forall x \in W \Rightarrow \alpha \cdot x \in W.$

Observaţie. Un subspaţiu liniar are o structură de spaţiu liniar în raport cu operaţiile induse.

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm operaţiile $\oplus : R_+^* \times R_+^* \to R_+^*$ şi $\otimes : R \times R_+^* \to R_+^*$,

$x \oplus y = x \cdot y$, $\alpha \otimes x = x^\alpha$, $\forall x, y \in R_+^*, \forall \alpha \in R$, unde "·" este înmulţirea numerelor reale.

Să se arate că R_+^* împreună cu cele două operaţii este spaţiu liniar real.

Rezolvare:

Verificăm condiţiile din definiţia 1.

I. a) Fie $x, y \in R_+^*$; rezultă $x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$, conform comutativităţii înmulţirii numerelor reale.

b) Fie $x, y, z \in R_+^*$; rezultă că: $(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \oplus (y \oplus z)$,

în baza asociativităţii înmulţirii numerelor reale.

c) Numărul real 1 este elementul neutru faţă de operaţia $\oplus$: $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1 \cdot x = x, \forall x \in R_+^*$.

d) $\forall x \in R_+^*, \exists x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in R_+^*$ astfel încât $x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$.

II. a) Fie $\alpha, \beta \in R, x \in R_+^*$. Avem: $(\alpha + \beta) \otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x$.

b) Fie $\alpha \in R, x, y \in R_+^*$. Avem: $\alpha \otimes (x \oplus y) = (x \oplus y)^\alpha = (x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$.

c) Fie $\alpha, \beta \in R$, $x \in R_+^*$. Avem: $(\alpha\beta) \otimes x = x^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha} = \left(x^\beta\right)^\alpha = \alpha \otimes \left(x^\beta\right) = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$.

d) Fie $x \in R_+^*$; avem: $1_R \otimes x = x^1 = x$.

Conform definiţiei, din *I* şi *II* rezultă că R_+^* împreună cu cele două operaţii este spaţiu liniar real.

2. Să se arate că mulţimea $V = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| x_i \in R, i = \overline{1,n},\ x_1 + x_{n-1} = 0\right\}$, $n \in N$, $n \geq 3$ împreună cu adunarea vectorilor din R^n şi înmulţirea acestora cu scalari formează un spaţiu liniar real.

Rezolvare:

Deoarece $V \subset R^n$ şi (R^n, R) este spaţiu liniar, conform observaţiei din breviarul teoretic este suficient de arătat că V este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (R^n, R).

1) Fie $x, y \in V$. Rezultă că $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, $x_i \in R, i = \overline{1,n}$, cu $x_1 + x_{n-1} = 0$ şi $y = (y_1, y_2,..., y_n)$, $y_i \in R$, $i = \overline{1,n}$, cu $y_1 + y_{n-1} = 0$. Avem:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,..., x_n + y_n), x_i + y_i \in R, i = \overline{1,n}$,

$(x + y)_1 + (x + y)_{n-1} = x_1 + y_1 + x_{n-1} + y_{n-1} = 0$, prin urmare $x + y \in V$.

2) Fie $\alpha \in R, x \in V$. Rezultă $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2,..., \alpha x_n), \alpha x_i \in R, i = \overline{1,n}$ şi $(\alpha x)_1 + (\alpha x)_{n-1} = \alpha x_1 + \alpha x_{n-1} = \alpha(x_1 + x_{n-1}) = 0$, deci $\alpha x \in V$.

Conform definiţiei 2, din 1) şi 2) rezultă că V este subspaţiu liniar al spaţiului (R^n, R), deci V este spaţiu liniar real.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că mulţimea $C_{[a,b]}(R) = \{f \mid f :[a,b] \to R, f$ continuă pe $[a,b]\}$ împreună cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire a funcţiilor cu scalari formează un spaţiu vectorial real.

2. Să se arate că mulţimea $M_{m,n}(R)$ a matricelor cu m linii şi n coloane şi elemente numere reale are o stuctură de spaţiu liniar real în raport cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali.

3. Să se arate că mulţimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in R, c = a + b \right\}$ împreună cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali este spaţiu vectorial peste R.

4. Se consideră operaţiile: $\oplus : (R_+^*)^2 \times (R_+^*)^2 \to (R_+^*)^2$ şi $\otimes : R \times (R_+^*)^2 \to (R_+^*)^2$, definite astfel: $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2)$, $\alpha \otimes (x_1, x_2) = \left(x_1^{\alpha},\ x_2^{\alpha}\right)$, $\forall x, y \in R_+^*, \forall \alpha \in R$.

Să se studieze dacă $(R_+^*)^2$ împreună cu cele două operaţii este spaţiu vectorial real.

5. Să se arate că mulţimea $A=\left\{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ b & a \end{pmatrix}; a,b\in C\right\}$ (unde $\bar{a}$ reprezintă conjugatul numărului complex a) împreună cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali constituie un spaţiu liniar real.

6. Să se arate că următoarele mulţimi sunt subspaţii liniare ale spaţiilor liniare indicate:

a) $R_n[X]\subset R[X]$; *b)* $\left\{(a,o,b)^t \,\middle|\, a,b\in R\right\}\subset R^3$; *c)* $\left\{2aX^5+bX^2 \,\middle|\, a,b\in R\right\}\subset R[X]$;

d) $\left\{(x_1,x_2,x_3)^t \,\middle|\, x_i\in R, i=\overline{1,3}, x_1=3x_2, x_1+x_2=x_3\right\}\subset R^3$.

Indicaţie. Se folosesc definiţiile noţiunilor de spaţiu şi subspaţiu liniar precum şi faptul că un subspaţiu liniar are o structură de spaţiu liniar în raport cu operaţiile induse.

7. Să se arate că mulţimea $V=\left\{(x_1,x_2,...,x_n) \,\middle|\, x_i\in R, i=\overline{1,n},\ 3x_1-2x_2=x_n\right\}$, $n\in N$, $n\geq 3$, împreună cu adunarea vectorilor din R^n şi înmulţirea acestora cu scalari este spaţiu vectorial real.

2.2. Dependenţa şi independenţa liniară a vectorilor

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (V, K) un spaţiu vectorial, vectorii $v_1, v_2,.., v_n \in V$ şi scalarii $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n \in K$. Vectorul $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ se numeşte *combinaţia liniară a vectorilor* $v_1, v_2,.., v_n$ *cu scalarii* $\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_n$.

Definiţia 2. Fie (V, K) un spaţiu vectorial. O mulţime finită de vectori $\{v_1, v_2,.., v_n\}$ din V se numeşte *liniar dependentă* (*l.d.*) dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n \in K$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$.

Definiţia 3. Se numeşte *relaţie de dependenţă liniară* între vectorii $v_1, v_2,\ldots, v_n$ o relaţie de forma $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+ \alpha_n v_n = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n \in K$, nu toţi nuli.

Observaţie. Definiţia 2 se poate exprima şi astfel: O mulţime finită de vectori este liniar dependentă dacă există o relaţie de dependenţă liniară între vectorii mulţimii.

Definiţia 4. Fie (V, K) un spaţiu liniar. O mulţime finită de vectori $\{v_1, v_2,.., v_n\}$ din V se numeşte *liniar independentă* (*l.i.*) dacă $\forall\ \alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n \in K$ cu proprietatea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Propoziţia 1. O mulţime de vectori este liniar dependentă dacă şi numai dacă cel puţin unul din vectorii mulţimii este o combinaţie liniară a celorlalţi.

Propoziţia 2. Orice submulţime a unei mulţimi liniar independente de vectori este liniar independentă.

Propoziţia 3. Orice mulţime de vectori care conţine o mulţime liniar dependentă este liniar dependentă.

Propoziţia 4. Orice mulţime de vectori care conţine vectorul nul este liniar dependentă.

Propoziţia 5. Orice mulţime formată dintr-un singur vector diferit de vectorul nul este liniar independentă.

Propoziţia 6. Fie (V, K) un spaţiu liniar, $v\in V$ şi $G\neq\emptyset$, $G\subset V$. Dacă mulţimea G este liniar independentă, iar mulţimea $G\cup\{v\}$ este liniar dependentă, atunci vectorul v este o combinaţie liniară a vectorilor din G.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ din spaţiul liniar ($M_{3,1}(R)$, R).

a) Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi.
b) Să se determine o relaţie de dependenţă liniară între v_1, v_2, v_3 .
c) Să se precizeze care dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

Rezolvare:

a) Conform definiţiei 2, trebuie să arătăm că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Înlocuind v_1, v_2, v_3 în această relaţie, rezultă:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ şi se obţine sistemul liniar omogen: $$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricei sistemului este $\Delta = 0$, prin urmare sistemul admite şi soluţii nebanale, deci există scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Conform definiţiei 2, rezultă că v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi.

b) O relaţie de dependenţă liniară între vectorii v_1,v_2,v_3 este de forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, cu $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$, nu toţi nuli. Rezolvăm sistemul liniar omogen obţinut la punctul *a)*. Considerând α_1, α_2 necunoscute principale şi $\alpha_3 = a$, $a \in R$, necunoscută secundară, se obţine: $\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = -a \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = -4a \end{cases}$,

prin urmare soluţia sistemului este: $\alpha_1=-3a$, $\alpha_2=-2a$, $\alpha_3=a$, $a \in R^*$, iar o relaţie de dependenţă liniară între vectori este: $-3av_1-2a v_2 +av_3 = 0$, $a \in R^*$, sau, simplificând, $-3v_1-2v_2 + v_3= 0$.

c) Deoarece vectorii sunt liniar dependenţi, conform propoziţiei 1 rezultă că cel puţin un vector se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi. Din relaţia de dependenţă liniară găsită la punctul *b)* rezultă că oricare dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi, astfel:
$v_1 = -\frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3;\ \ v_2 = -\frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3;\ \ v_3 = 3v_1 + 2v_2.$

2. *a)* Să se arate că vectorii $v_1 = (4,-1,1)$, $v_2 = (-1,2,3)$, $v_3 = (1,1,-1)$ din spaţiul liniar (R^3, R) sunt liniar independenţi.

b) Să se precizeze dacă vectorul v_2 se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori.

Rezolvare:

În baza definiţiei 4, trebuie să arătăm că oricare ar fi scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ cu $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0$, rezultă $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3= 0$. Înlocuind v_1, v_2, v_3 în această relaţie, se obţine:

$\alpha_1(4, -1, 1) + \alpha_2(-1, 2, 3) + \alpha_3(1, 1, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, - \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) =$ $(0, 0, 0)$ şi rezultă sistemul liniar omogen: $\begin{cases} 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Determinantul matricei sistemului este $\Delta = -25 \neq 0$, deci sistemul admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

În baza definiţiei 4 rezultă că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi.

b) *Observaţie*. Din propoziţia 1 rezultă: Dacă o mulţime de vectori este liniar independent, atunci nici unul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

Deoarece v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi rezultă că v_2 nu se poate scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_3.

3. Să se studieze natura următoarelor mulţimi de vectori din spaţiile liniare indicate:
a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ din spaţiul liniar (R^2, R), unde $v_1 = (-2,-1)$, $v_2 = (2,3)$, $v_3 = (1,-1)$;
b) $\{v_1, v_2\}$ din spaţiul liniar (R^3, R), unde $v_1 = (3,-1,1)$, $v_2 = (-1,2,4)$;
c) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ din spaţiul liniar (R^4, R), unde $v_1 = (1,-1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,2,3)$, $v_3 = (2,1,0,-1)$, $v_4 = (0,3,1,-1)$.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Rezultă: $\alpha_1(-2,-1) + \alpha_2(2,3) + \alpha_3(1,-1) = (0,0)$ şi se obţine sistemul liniar omogen: $\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

rang $A = 2 <$ numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat, deci admite şi soluţii nebanale. Prin urmare, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Conform definiţiei 2, rezultă că mulţimea $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar dependentă.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Rezultă: $\alpha_1(3,-1,1) + \alpha_2(-1,2,4) = (0,0,0)$ şi se obţine sistemul liniar omogen: $\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$; matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ rang $A = 2 =$ numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil determinat, deci admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Conform definiţiei 4, rezultă că mulţimea $\{v_1, v_2\}$ este liniar independentă.

c) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1(1,-1,1,0) + \alpha_2(-1,0,2,3) + \alpha_3(2,1,0,-1) + \alpha_4(0,3,1,-1) = (0,0,0,0)$; rezultă sistemul liniar omogen: $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$

Determinantul matricei sistemului este $\Delta = 24 \neq 0$, prin urmare sistemul admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Conform definiţiei 4, rezultă că mulţimea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este liniar independentă.

4. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spaţiile liniare indicate:
a) $g_1 = 1 - 2X$, $g_2 = 2X - 3X^2$, $g_3 = 2 - 6X + 3X^2$ din $(R_2[X], R)$;
b) $b_1 = 3 - 2i$, $b_2 = -4 + i$ din (C, R);
c) $f_1 = \sin x$, $f_2 = \cos x$, în (F, R), unde $F = \{f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;
d) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R), R)$.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(1 - 2X) + \alpha_2(2X - 3X^2) + \alpha_3(2 - 6X + 3X^2) = 0$.

După identificarea coeficienţilor se obţine sistemul liniar omogen $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Determinantul matricei sistemului este nul, prin urmare sistemul admite şi soluţii nebanale, adică există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel ca $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0$. Conform definiţiei 2, rezultă că g_1, g_2, g_3 sunt liniar dependenţi.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = 0$; obţinem: $\alpha_1(3 - 2i) + \alpha_2(-4 + i) = 0$ şi rezultă sistemul liniar omogen $\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$, care admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Conform definiţiei, rezultă că b_1, b_2 sunt liniar independenţi.

c) Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel ca $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$; din această egalitate de funcţii rezultă $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Pentru $x = 0$ obţinem $\alpha_2 = 0$, iar pentru $x = \pi/4$ rezultă $\alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Conform definiţiei 4, rezultă că vectorii f_1, f_2 sunt liniar independenţi.

d) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$, adică

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde se obţine sistemul liniar omogen: $\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Rangul matricei sistemului este trei şi egal cu numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil determinat, deci admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Conform definiţiei 4, rezultă că vectorii A_1, A_2, A_3 sunt liniar independenţi.

5. Se consideră vectorii din spaţiul liniar ($M_{3,1}(R)$,R):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_6 = 3v_2 - 2v_3.$$

Să se studieze natura următoarelor mulţimi de vectori şi când este posibil să se determine o relaţie de dependenţă liniară între vectori: *a)* $\{v_1, v_2, v_3\}$; *b)* $\{v_1, v_3, v_4\}$; *c)* $\{v_2, v_3\}$; *d)* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; *e)* $\{v_2, v_3, v_6\}$; *f)* $\{v_3, v_4, v_5\}$.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Rezultă

$\alpha_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi sistemul liniar omogen $\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Deoarece determinantul matricei sistemului $\Delta = -1 \neq 0$, rezultă că sistemul admite numai soluţia banală:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Conform definiţiei 3, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3\}$ este mulţime liniar independentă. În această situaţie nu există o relaţie de dependenţă liniară între cei trei vectori.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde rezultă sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Deoarece determinantul matricei sistemului $\Delta = 0$, rezultă că sistemul admite şi soluţii nebanale, adică există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4 = 0$.

Conform definiţiei 2, rezultă că $\{v_1, v_3, v_4\}$ este mulţime liniar dependentă.

O relaţie de dependenţă liniară între vectorii sistemului este de forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4 = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli. Rezultă sistemul liniar omogen: $\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$; un minor principal al sistemului este $d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, prin urmare alegem α_1, α_2 necunoscute principale şi $\alpha_3 = \lambda \in R$ necunoscută secundară.

Rezolvând sistemul, se obţine: $\alpha_1 = -3\lambda$, $\alpha_2 = 2\lambda$, $\alpha_3 = \lambda$, cu $\lambda \in R^*$. Prin urmare, o relaţie de dependenţă liniară între vectori este: $-3\lambda v_1 + 2\lambda v_2 + \lambda v_4 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $-3v_1 + 2v_2 + v_4 = 0$.

c) Metoda I (folosind definiţia). Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$; de aici rezultă:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului liniar omogen obţinut este 2, egal cu numărul necunoscutelor, prin urmare sistemul admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Conform Definiţiei 4, rezultă că $\{v_2, v_3\}$ este mulţime liniar independentă.

Metoda II. $\{v_2, v_3\}$ este inclusă în mulţimea liniar independentă $\{v_1, v_2, v_3\}$, deci, conform Propoziţiei 3, rezultă că $\{v_2, v_3\}$ este mulţime liniar independentă.

d) Metoda I (folosind definiţia). Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$

$$\Rightarrow \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases};$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

prin urmare rangul matricei sistemului este mai mic decât numărul de necunoscute, deci sistemul are şi soluţii nebanale, adică există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$, nu toţi nuli, asfel ca $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$.

Conform definiţiei 2, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este mulţime liniar dependentă.

Metoda II. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ include mulţimea de vectori liniar dependentă $\{v_1, v_3, v_4\}$, prin urmare, conform propoziţiei 4, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este mulţime liniar dependentă.

Determinăm o relaţie de dependenţă liniară: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$, nu toţi nuli. Rezolvând sistemul, se obţine: $-3v_1 + 2v_2 + v_4 = 0$.

e) Se observă că în sistemul de vectori $\{v_2, v_3, v_6\}$ unul dintre vectori (v_6) este o combinaţie liniară a celorlalţi doi:

$v_6 = 3v_2 - 2v_3$. În baza propoziţiei 2 , rezultă că sistemul de vectori $\{v_2, v_3, v_6\}$ este liniar dependent.

O relaţie de dependenţă liniară între vectori este: $v_6 = 3v_2 - 2v_3$, sau $3v_2 - 2v_3 - v_6 = 0$.

f) Mulţimea $\{v_3,v_4,v_5\}$ conţine vectorul nul, rezultă, conform propoziţiei 5, că $\{v_3,v_4,v_5\}$ este mulţime liniar dependentă.

O relaţie de dependenţă liniară este: $0\cdot v_3 + 0\cdot v_4 + \lambda v_5 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $0\cdot v_3 + 0\cdot v_4 + 1\cdot v_5 = 0$.

6. Fie vectorii din spaţiul liniar $(R_3[X],R)$: $g_1 = 1 - 2X$, $g_2 = 2X - 3X^2$, $g_3 = 3X^2 - 4X^3$, $g_4 = 1 + 2X - 6X^2$.

Stabiliţi pentru care din următoarele mulţimi unul dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi:

a)$\{g_1, g_2, g_3\}$; *b)*$\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$; *c)*$\{g_1, g_2, g_4\}$.

Atunci când este posibil, scrieţi unul dintre vectorii sistemului ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

Rezolvare:

Se ştie (propoziţia 1) că unul dintre vectorii unui sistem se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi dacă şi numai dacă sistemul este liniar dependent.

În consecinţă, problema revine la a studia natura fiecărui sistem de vectori.

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1(1-2X) + \alpha_2(2X - 3X^2) + \alpha_3(3X^2 - 4X^3) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + (-2\alpha_1 + 2\alpha_3)X + (-3\alpha_2 + 3\alpha_3)X^2 - 4\alpha_3 X^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$, adică sistemul de vectori este liniar independent şi prin urmare niciunul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4 = 0$; de aici rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ -3\alpha_2 + 3\alpha_3 - 6\alpha_4 = 0 \\ -4\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

prin urmare mulţimea este liniar independent, deci niciun vector nu se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

c) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \quad + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \end{cases}$

deoarece determinantul matricei sistemului este nul, rezultă că sistemul admite şi soluţii nebanale, deci $\{g_1, g_2, g_4\}$ sistem de vectori liniar dependent şi în acest caz rezultă că unul dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi. Rezolvând sistemul de mai sus, obţinem: $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = -2\lambda$, $\alpha_3 = \lambda$, cu $\lambda \in R$.

O relaţie de dependenţă liniară între aceşti vectori este: $-\lambda v_1 - 2\lambda v_3 + \lambda v_4 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $-v_1 - 2v_3 + v_4 = 0$,

de unde putem scrie unul dintre vectori ca o combinaţie liniară a celorlalţi astfel: $v_1 = -2v_3 + v_4$ sau $v_3 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_4$ sau: $v_4 = v_1 + 2v_3$.

7. Fie vectorii $v_1 = (-6,3,-9)$, $v_2 = (3,1,m)$, $v_3 = (4,-2,6)$ din spaţiul liniar (R^3, R), $m \in R$.

a) Să se determine valoarea parametrului real m astfei încât vectorii v_1,v_2,v_3 să fie liniar dependenţi.

b) Să se determine valoarea parametrului real m astfei încât vectorul v_2 să fie o combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_3.

Rezolvare:

a) Vectorii v_1,v_2,v_3 sunt liniar dependenţi dacă există scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1(-6,3,-9) + \alpha_2(3,1,m) + \alpha_3(4,-2,6) = (0,0,0)$; se obţine sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} -6\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -9\alpha_1 + m\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul Δ al matricei sistemului este nul. Efectuând calculele, se obţine că $\Delta = 0$. Prin urmare, vectorii v_1,v_2,v_3 sunt liniar dependenţi, oricare ar fi $m \in R$.

b) Vectorul v_2 este o combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_3 dacă există $\alpha, \beta \in R$ astfel încât $v_2 = \alpha v_1 + \beta v_3$, ceea ce revine la faptul că sistemul: $\begin{cases} -6\alpha + 4\beta = 3 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \\ -9\alpha + 6\beta = m \end{cases}$ este compatibil.

Fie A matricea sistemului şi $\overline{A}$ matricea extinsă. Avem: rang $A = 1 \neq$ rang $\overline{A} = 2$, deci sistemul este incompatibil, $\forall m \in R$. Prin urmare, nu există $m \in R$ astfel ca v_2 să fie o combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_3.

Observaţie. Deşi vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi oricare ar fi $m \in R$, totuşi nu există $m \in R$ astfel ca v_2 să fie o combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_3. Acest fapt nu este în contradicţie cu Propoziţia 1, care afirmă: O mulţime de vectori este liniar dependentă dacă şi numai dacă cel puţin unul din vectorii mulţimii este o combinaţie liniară a celorlalţi.

8. Fie vectorii $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & a \end{pmatrix}$ din spaţiul liniar $(M_2(R), R)$, unde $a \in R$. Determinaţi parametrul a astfel încât:

a) cei patru vectori să fie liniar independenţi;

b) vectorul A_4 să se poată scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \end{cases}$

vectorii sunt liniar independenţi dacă din relaţia de mai sus rezultă că toţi scalarii sunt nuli, adică dacă sistemul obţinut admite numai soluţia banală. Rezultă de aici că determinantul matricei sistemului trebuie să fie nenul. Avem că $\Delta = -2(a-3)^2$, de unde obţinem că $a \in R \setminus \{3\}$.

b) *Metoda I.* A_4 se poate scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3 dacă există α_1, $\alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $A_4 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -3 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \end{cases}$

Trebuie determinată valoarea parametrului $a \in R$ astfel încât sistemul obţinut să fie compatibil. Determinantul format din elementele ultimilor două linii şi coloane ale matricei sistemului este nenul, deci *rang* $A \geq 2$. Prin bordarea acestuia obţinem doi determinanţi de ordinul trei:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 6a$$

Pentru $a = 3$ obţinem rang $A = 2 =$ rang $\overline{A}$, deci sistemul este compatibil.

Pentru $a \neq 3$, avem că *rang* A = 3 şi rang $\overline{A}$ = 4, deci sistemul este incompatibil. Prin urmare rezultă $a = 3$.

Metoda II. Conform propoziţiei 1, o condiţie necesară pentru ca vectorul A_4 să se poată scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori este ca A_1, A_2, A_3, A_4 să fie liniar dependenţi, adică $a = 3$. Verificăm dacă pentru $a = 3$ există scalarii

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $A_4 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -3 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \end{cases}$

Avem că rang A = rang $\overline{A}$ = 2, deci sistemul este compatibil.

În concluzie, A_4 se poate scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3 dacă şi numai dacă $a = 3$.

9. Se consideră vectorii liniar independenţi f_1, f_2, f_3 din spaţiul vectorial (V, R) şi următoarele combinaţii liniare ale acestora: $g_1 = -3 f_1 + 2 f_2 - f_3$, $g_2 = -2 f_1 + f_2 - 3 f_3$, $g_3 = -f_1 + 3 f_2 - 2 f_3$, $g_4 = f_1 - f_2 - 2 f_3$.

Stabiliţi natura sistemelor de vectori: *a)* $\{g_1, g_2, g_4\}$; *b)* $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$; *c)* $\{g_2, g_3, g_4\}$.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ a.î. $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 (-3f_1 + 2f_2 - f_3) + \alpha_2 (-2 f_1 + f_2 - 3f_3) + \alpha_3 (f_1 - f_2 - 2 f_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) f_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) f_2 + (-\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3) f_3 = 0.$

Deoarece vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi, rezultă că toţi coeficienţii acestora din relaţia de mai sus sunt nuli: $\begin{cases} -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$; determinantul matricei sistemului obţinut este:

$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, prin urmare sistemul admite şi soluţii nebanale, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel ca $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_4 = 0$.

Rezultă că vectorii $\{g_1, g_2, g_4\}$ sunt liniar dependenţi.

b) $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ include mulţimea liniar dependentă $\{g_1, g_2, g_4\}$,prin urmarei, conform propoziţiei 3, rezultă că mulţimea $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este liniar dependentă.

c) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ a.î. $\alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_3 + \alpha_3 g_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1(-2f_1 + f_2 - 3f_3) + \alpha_2(-f_1 + 3f_2 - 2f_3) + \alpha_3(f_1 - f_2 - 2f_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) f_1 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) f_2 + (-3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3) f_3 = 0.$

Cum vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi, rezultă că toţi coeficienţii acestora din relaţia de mai sus sunt nuli: $\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$; determinantul matricei sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, prin urmare sistemul admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Rezultă că vectorii g_2, g_3, g_4 sunt liniar independenţi.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră vectorii $v_1 = (-2,-4,2)$, $v_2 = (1,3,-2)$, $v_3 = (3,6,-3)$ din spaţiul liniar (R^3, R).

a) Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi.

b) Să se determine o relaţie de dependenţă liniară între v_1, v_2, v_3.

c) Să se precizeze care dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

R: *b)* $3v_1 + 2v_3 = 0$; *c)* v_1 şi v_3: $v_1 = 0v_2 - \frac{2}{3}v_3$; $v_3 = -\frac{3}{2}v_1 + 0v_2$

2. *a)* Să se arate că vectorii $v_1 = (-2,-3,1)$, $v_2 = (-2,5,1)$, $v_3 = (2,-1,1)$ din spaţiul liniar (R^3, R) sunt liniar independenţi.

b) Să se precizeze care dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi. **R:** nici unul.

3. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori:

a) $v_1 = (1,5)^t$, $v_2 = (-1,3)^t$, $v_3 = (2,-1)^t$; *b)* $v_1 = (6,-2,4)^t$, $v_2 = (-9,3,-6)^t$; *c)* $v_1 = (-2,2,0,-1)^t$, $v_2 = (-1,0,1,4)^t$, $v_3 = (1,3,0,-1)^t$, $v_4 = (0,5,-1,-3)^t$. **R:** *a)* l.d.; *b)* l.d.; *c)* l.i.

4. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spaţiile liniare indicate:

a) $g_1 = 3 - X + X^2,\ g_2 = 1 + 2X + 3X^2,\ g_3 = 1 - 4X - 5X^2$ din $(R_2[X], R)$;

b) $b_1 = 1 + 3i$, $b_2 = 2 - i$, $b_3 = 7 - 4i$ din (C, R);

c) $f_1 = \sin x$, $f_2 = \cos 2x$ în (F, R), unde $F = \{f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R), R)$;

e) $f_1 = e^{2x}$, $f_2 = e^{3x}$ în (F, R), unde $F = \{f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$;

f) $f_1 = \cos x$, $f_2 = \cos 3x$, $f_3 = \cos^3 x$, în (F, R), $F = \{ f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$;

R: *a)* l.i.; *b)* l.d.; *c)* l.i.; *d)* l.d.; *e)* l.i.; *f)* l.d.

5. Stabiliţi natura următoarelor sisteme de vectori din spaţiile vectoriale indicate şi, atunci când este posibil, scrieţi o relaţie de dependenţă liniară între vectori:

a) în (R^3, R): $x_1 = (2,-1,3)$, $x_2 = (1,-1,2)$, $x_3 = (0,1,-1)$;

b) în (R^4, R): $x_1 = (8,0,3,2)$, $x_2 = (6,0,0,1)$, $x_3 = (5,-7,5,3)$;

c) în (R^3, R): $x_1 = (3,1,-4)$, $x_2 = (2,-2,1)$, $x_3 = (4,-8,-3)$, $x_4 = (-1,1,3)$;

d) în (R^4, R): $x_1 = (0,1,2,-1)$, $x_2 = (1,2,-1,0)$, $x_3 = (0,2,-1,1)$, $x_4 = 4,6,1,3)$.

R: *a)* l.d.; $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$; *b)* l.i.; *c)* l.d.; $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$; *d)* l.i.

6. Să se cerceteze natura următoarelor sisteme de vectori din spaţiile vectoriale indicate, iar în caz de dependenţă liniară să se scrie o relaţie de dependenţă liniară între vectori:

a) $v_1 = 1$, $v_2 = \sin x$, $v_3 = \sin^2 x$, în (F, R), unde $F = \{f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$;
b) $a_1 = \cos^2 x$, $a_2 = 15$, $a_3 = \sin^2 x$, în (F, R), unde $F = \{f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$;
c) $f_1 = 5X^2 - X, f_2 = 3X - 1, f_3 = -X^2 + 1$ în $(R_2[X], R)$;

d) $z_1 = 5 - 7i$, $z_2 = 1 + i$, în (C, R);

e) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R),R)$.

R: *a)* l.i.; *b)* l.d.; $15\, a_1 - a_2 + 15\, a_3 = 0$; *c)* l.i.; *d) l.i.*; *e)* l.d.; $A_1 + A_2 - A_3 = 0$.

7. Fie spaţiul vectorial (V, K). Să se demonstreze că:

a) sistemul de vectori $\{x, y, 0\} \subset V$ este liniar dependent;

b) sistemul de vectori $\{x, y, x, z\} \subset V$ este liniar dependent;

c) sistemul de vectori $\{a + c, b + c, a + b + 2c\} \subset V$ este liniar dependent.

R: *a)* se arată că se poate scrie o relaţie de dependenţă liniară între vectori (de exemplu, $0 \cdot x + 0 \cdot y + \alpha \cdot 0 = 0$, cu $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0_K$); *b)* $\alpha \cdot x + 0 \cdot y - \alpha \cdot x + 0 \cdot z = 0$, cu $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0_K$.

8. Discutaţi natura sistemelor de vectori din spaţiile liniare indicate, în funcţie de valorile parametrului real m:

a) $x_1 = (1,1,3)$, $x_2 = (1, m,1)$, $x_3 = (3,1,1)$, în (R^3, R);

b) $x_1 = (3,2,0)$, $x_2 = (2,0, m)$, $x_3 = (1, m,0)$, în (R^3, R);

c) $a_1 = (3,2, m)$, $a_2 = (2, m,3)$, $a_3 = (m,3,2)$, în (R^3, R);

d) $x_1 = (4, - m, -1,2)$, $x_2 = (2,0, -1, m)$, $x_3 = (m, -2, m,1)$, în (R^4, R).

R: *a)* l.i. pentru $m \in R \setminus \{1/2\}$; l.d. pentru $m \in \{1/2\}$; *b)* l.i. pentru $m \in R \setminus \{0, 2/3\}$; l.d. pentru $m \in \{0, 2/3\}$; *c)* l.i. pentru $m \in R \setminus \{-5\}$; l.d. pentru $m \in \{-5\}$.

9. În spaţiul liniar (V, R) se dau vectorii liniar independenţi a, b, c. Stabiliţi natura sistemelor de vectori:

a) $\{a + b -2c, - a + 2c, a +2b -3c\}$; *b)* $\{3a -2b -2c, - a + 2b, a +2b -2c\}$. **R:** *a)* l.i.; *b)* l.d.

10. În spaţiul vectorial (V, R) se consideră vectorii liniar independenţi a, b, c.

Să se determine natura sistemelor de vectori: *a)* $\{-2a - c, b + c, 3a + 2b - c\}$; *b)* $\{- a - 2b, 4a + 2b + c, a + b - 2c\}$.

11. În spaţiul liniar (R^3, R) se consideră vectorii: $v_1 = (2, -1, 4)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (1, 3, -2)$, $v_4 = (5, 8, -2)$, $v_5 = (0, 0, 0)$, $v_6 = 4v_3 - 2v_4$. Stabiliţi natura următoarelor sisteme de vectori şi atunci când este posibil, determinaţi o relaţie de dependenţă liniară între vectori: *a)*$\{v_1, v_2, v_3\}$; *b)*$\{v_1, v_3, v_4\}$; *c)*$\{v_2, v_3\}$; *d)*$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; *e)*$\{v_3, v_4, v_6\}$; *f)*$\{v_3, v_4, v_5\}$

R: *a)* l.i.; *b)* l.d.; *c)* l.i.; *d)* l.d.; *e)* l.d.; *f)* l.d..

12. Să se studieze natura următorului sistem de vectori din spaţiul liniar (R^3, R) şi atunci când este posibil să se scrie unul dintre vectori ca o combinaţie liniară a celorlalţi: $v_1 = (2m-1, m - 2, m + 1)$; $v_2 = (m-1, m - 1, - m)$;

$v_3 = (2m-1, m - 2, 2m - 1)$. *Indicaţie.* Se foloseşte propoziţia 1 din breviarul teoretic.

13. Fie următorii vectori din spaţiul liniar $(R_3[X], R)$: $g_1 = 2 - X$, $g_2 = 4X - 3X^2$, $g_3 = X^2 - 3X^3$, $g_4 = 2 + 3X - 6X^2$ Stabiliţi în care din următoarele sisteme unul dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi:

a)$\{g_1, g_2, g_3\}$; *b)*$\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$; *c)*$\{g_1, g_2, g_4\}$. Atunci când este posibil, scrieţi unul dintre vectorii sistemului ca o combinaţie liniară a celorlalţi. **R:** *b).*

14. Fie $v_1 = (-1,1,2)$, $v_2 = (2,2,-1)$, $v_3 = (2,3,1)$, $v_4 = (4,-1,3)$, $v_5 = (1,3,1)$ din spaţiul liniar (R^3, R). Determinaţi $k \in \overline{1,5}$ astfel încât: *a)* $\{v_1, v_2, v_k\}$ l.d.; *b)* $\{v_2, v_k, v_4\}$ l.i. **R:** *a)* $k \in \{1,2,5\}$; *b)* $k \in \{1,3,5\}$.

15. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spaţiile liniare indicate:

a) $v_1 = (m,2,2,...,2)$, $v_2 = (2,m,2,...,2)$, …, $v_n = (2,2,…,2, m)$ din (R^n, R); $m \in R$;

b) $f_1 = 1$, $f_2 = 1 - X$, $f_3 = (1 - X)^2$,. . . ., $f_{n+1} = (1 - X)^n$ din $(R_n[X],R)$, $n \in N^*$;

c) $g_1 = 1$, $g_2 = \cos x$, $g_3 = \cos^2 x$,. . . ., $g_{n+1} = \cos^n x$ din (F, R), $F = \{f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$, $n \in N^*$

d) $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{2x}$, $f_3 = e^{3x}$,…., $f_n = e^{nx}$ din (F, R), unde $F = \{f : [0,1] \to R, f$ continuă pe $[0,1]\}$, $n \in N^*$.

R: *a)* l.i. dacă $m \in R \setminus \{2 - 2n, 2\}$; l.d. dacă $m \in \{2 - 2n, 2\}$; *b)* l.i.; *c)* l.i.; *d)* l.i..

2.3. Sistem de generatori ai unui spaţiu liniar. Bază a unui spaţiu liniar. Coordonatele unui vector într-un reper dat

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (V,K) un spaţiu liniar. O familie de vectori $G=\{v_i\}_{i\in I}\subset V$ se numeşte *sistem de generatori ai spaţiului liniar V* dacă orice vector din V se poate scrie ca o combinaţie liniară cu vectori din G, adică: $\forall v\in V$, $\exists(\alpha_i)_{i\in I}\subset K$ astfel încât $v=\sum_{i\in I}\alpha_i v_i$.

Propoziţia 1. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi familiile de vectori G,H, astfel încât $G\subset H\subset V$. Dacă G este sistem de generatori ai spaţiului liniar V, atunci H este sistem de generatori ai spaţiului liniar V.

Propoziţia 2. Fie (V,K) un spaţiu liniar, familia de vectori $G\subset V$ şi $v\in G$. Dacă G este sistem de generatori ai spaţiului liniar V şi vectorul v este o combinaţie liniară a vectorilor din G, atunci $G\setminus\{v\}$ este sistem de generatori ai spaţiului liniar V,

Definiţia 2. Fie (V, K) un spaţiu liniar. Familia $B\subset V$ se numeşte *bază* a spaţiului liniar (V, K) dacă:
1) B este mulţime liniar independentă;
2) B este sistem de generatori ai spaţiului liniar (V, K).

Definiţia 3. Se numeşte *reper* al spaţiului liniar (V, K) o bază în care se ţine cont de ordinea vectorilor.

Definiţia 4. Spaţiul liniar (V, K) este *finit dimensional* sau *de tip finit* dacă are o bază formată dintr-un număr finit de vectori.

Definiţia 5. Fie (V, K) un spaţiu liniar finit dimensional. Se numeşte *dimensiunea spaţiului liniar* (V, K) şi se notează $\dim_K V$ sau $\dim(V, K)$ sau $\dim V$ numărul de vectori dintr-o bază oarecare a acestui spaţiu.

Exemplul 1. În spaţiul liniar (R^n, R), mulţimea $E=\{e_1=(1,0,0,..,0), e_2=(0,1,0,..,0), e_3=(0,0,1,..,0),..., e_n=(0,0,0,..,1)\}$ este reper al acestui spaţiu, numit şi *reperul canonic al spaţiului liniar* (R^n, R). Prin urmare, $\dim(R^n, R)=n$.

Exemplul 2. În spaţiul liniar $(R_n[X], R)$, mulţimea $F=\{f_1=1, f_2=X, f_3=X^2,..., f_{n+1}=X^n\}$ este reper, numit şi *reperul canonic al spaţiului liniar* $(R_n[X], R)$. Prin urmare, $\dim(R_n[X], R)=n+1$.

Exemplul 3. În spaţiul liniar $(M_{m,n}[X], R)$, mulţimea $G=\{G_{11}, G_{12},\ldots, G_{1n}, G_{21}, G_{22},\ldots, G_{2n},..., G_{m1}, G_{m2},\ldots, G_{mn}\}$, unde G_{ij} reprezintă matricea având elementul de pe linia i şi coloana j egal cu 1, iar restul elementelor egale cu 0, este reper.

Prin urmare, $\dim(M_{m,n}[X], R)=m\cdot n$.

Exemplul 4. În spaţiul liniar (C, R), mulţimea $H = \{h_1 = 1,\ h_2 = i\}$ este reper al acestui spaţiu. Prin urmare, $\dim_R C = 2$.

Propoziţia 3. Fie (V, K) un spaţiu liniar de tip finit şi $B \subset V$. Atunci B este bază a spaţiului liniar (V, K) dacă şi numai dacă B este mulţime liniar independentă maximală, adică:

1) B este mulţime liniar independentă;

2) card B = dim (V, K) (unde card B reprezintă *cardinalul mulţimii B* sau numărul de elemente al mulţimii B).

Propoziţia 4. Fie (V, K) un spaţiu liniar de tip finit şi $B \subset V$. Atunci B este bază a spaţiului liniar (V, K) dacă şi numai dacă B este sistem de generatori minimal, adică:

1) B este sistem de generatori;

2) card B = dim (V, K).

Observaţie. Fie (V, K) este spaţiu liniar, dim (V, K) = $n \in N$.

1) Dacă $H \subset V$ şi H mulţime liniar independentă, atunci card $H \leq n$.
2) Dacă $G \subset V$ şi G sistem de generatori ai spaţiului liniar (V, K), atunci card $G \geq n$.
3) Dacă $B \subset V$ şi B bază a spaţiului liniar (V, K), atunci card $B = n$.

Propoziţia 5. Fie (V, K) un spaţiu liniar de dimensiune finită. Atunci scrierea unui vector din V într-un reper dat al acestui spaţiu este unică.

Definiţia 6. Fie (V, K) un spaţiu liniar, $\dim V = n$ şi $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un reper al spaţiului liniar (V, K).

Coordonatele vectorului x în reperul B sunt scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Matricea notată $[x]_B$ sau x_B, unde $[x]_B = [\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n]^T$ se numeşte *matricea coordonatelor vectorului x în reperul B.*

Propoziţia 6. O mulţime de vectori dintr-un spaţiu liniar real de tip finit este liniar independentă dacă şi numai dacă rangul matricei având pe coloane coordonatele vectorilor mulţimii într-un reper oarecare al spaţiului este egal cu numărul de vectori.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră vectorii $g_1 = (1,3,-2)$, $g_2 = (-1,1,1)$, $g_3 = (-2,2,-1)$, $g_4 = (1,0,1)$ din spaţiul liniar (R^3, R) şi mulţimea $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Să se arate că G este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

Rezolvare:

G este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R) dacă $\forall\ v \in R^3$, $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4$.

Fie $v = (a, b, c) \in R^3$. Înlocuind v, g_1, g_2, g_3 şi g_4 în relaţia precedentă se obţine sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = a \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = c \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului este 3 şi este egal cu rangul matricei extinse, prin urmare sistemul este compatibil, deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4$.

Conform definiţiei 1, rezultă că G este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

2. În spaţiul liniar (R^3, R) se consideră vectorii $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

a) Să se arate că mulţimea $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ este reper al spaţiului liniar (R^3, R), numit *reperul canonic* al spaţiului (R^3, R).

b) Să se determine coordonatele vectorului $v = (3, -2, 7)$ în reperul E.

c) Să se studieze natura mulţimii de vectori $v_1= (2,-1,3)$, $v_2= (1,-2,0)$, $v_3= (4,-5,3)$, $v_4= (1,0,1)$ din spaţiul liniar (R^3, R).

Rezolvare:

a) E este reper al spaţiului liniar (R^3, R) dacă verifică următoarele condiţii:

1) E este mulţime liniar independentă;
2) E este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

Vom verifica cele două condiţii.

1) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1= \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, prin urmare E este mulţime liniar independentă.

2) E este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R) dacă $\forall$ $v\in R^3$, $\exists$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$ astfel încât $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

Fie $v= (a,b,c)\in R^3$; relaţia precedentă devine $(a,b,c) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \Rightarrow \exists$ $\alpha_1= a$, $\alpha_2= b$, $\alpha_3= c\in R$ astfel încât $v=\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3$.

Prin urmare, E este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

Din 1) şi 2) rezultă că E este reper al spaţiului liniar (R^3, R).

b) Coordonatele vectorului v în reperul E sunt scalarii α_1, α_2, $\alpha_3\in R$ astfel încât $v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3$.

Avem: $v = (3,-2,7) = 3\cdot(1,0,0) + (-2)\cdot(0,1,0) + 7\cdot(0,0,1) = 3\cdot e_1 + (-2)\cdot e_2 + 7\cdot e_3$, prin urmare coordonatele vectorului v în reperul canonic sunt: 3, -2 şi 7.

Matricea coordonatelor vectorului v în reperul E este $[v]_E = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ sau $[v]_E = [3 \quad -2 \quad 7]^T$.

Observaţie. Coordonatele unui vector din spaţiul liniar (R^n, R) în reperul canonic sunt componentele vectorului.

c) Metoda I (folosind definiţia) Fie α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3+ \alpha_4 v_4= 0 \Leftrightarrow$ $\alpha_1(2,-1,3) + \alpha_2(1,-2,0) + + \alpha_3(4,-5,3) + \alpha_4(1,0,1) = (0,0,0)$; se obţine sistemul:
$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$, având matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Deoarece $A\in M_{3,4}(R) \Rightarrow$ rang $A \leq 3 \Rightarrow$ rang $A \neq$ numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat, deci există α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3+ \alpha_4 v_4= 0$.

Rezultă că vectorii v_1,v_2,v_3,v_4 sunt liniar dependenţi.

Metoda II (folosind Propoziţia 6) Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor mulţimii în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R): $A = [\ [v_1]_E \ \ [v_2]_E \ \ [v_3]_E \ \ [v_4]_E]$.

Deoarece $v_1 = (2,-1,3) = 2\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 + 3\cdot e_3 \Rightarrow [v_1]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Analog se obține $[v_2]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[v_3]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$; $[v_4]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

rezultă $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $A\in M_{3,4}(R) \Rightarrow$ rang $A \le 3 \Rightarrow$ rangul matricei A este diferit de numărul de vectori ai mulţimii, prin urmare $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ este mulţime liniar dependentă.

Observaţie. Metoda *II* este mai simplă decât metoda *I*, bazată pe utilizarea definiţiei.

3. Să se studieze natura următoarelor mulţimi de vectori din spaţiile liniare indicate:

a) $g_1 = 1 - 2X$, $g_2 = 2X - 3X^2$, $g_3 = 2 - 6X + 3X^2$ din $(R_2[X],R)$;

b) $b_1 = 3 - 2i$, $b_2 = -4 + i$ din (C, R);

c) $A_1=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R),R)$.

Rezolvare:

a) Considerăm reperul canonic $F = \{f_1 = 1, f_2 = X, f_3 = X^2\}$ al spaţiului liniar $(R_2[X],R)$. Fie $A = [\,[g_1]_F\ \ [g_2]_F\ \ [g_3]_F]$ matricea având pe coloane coordonatele vectorilor mulţimii $\{g_1, g_2, g_3\}$ în reperul F.

Avem: $g_1 = 1 - 2X = 1\cdot f_1 + (-2)\cdot f_2 + 0\cdot f_3 \Rightarrow [g_1]_F=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Analog rezultă $[g_2]_F=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; $[g_3]_F=\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$, deci $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$;

det $A = 0 \Rightarrow$ rang $A \neq 3$ = numărul de vectori $\Rightarrow \{g_1, g_2, g_3\}$ este mulţime liniar dependentă.

b) Considerăm reperul $G = \{g_1 = 1, g_2 = i\}$ al spaţiului liniar (C, R). Fie $A = [\,[b_1]_G\ \ [b_2]_G]$ matricea având pe coloane coordonatele vectorilor mulţimii $\{b_1, b_2\}$ în reperul G.

Avem: $b_1 = 3 - 2i = 3\cdot g_1 + (-2)\cdot g_2 \Rightarrow [b_1]_G=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$; analog $[b_2]_G=\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$; rezultă $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

det $A = -5 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 2$ = numărul de vectori $\Rightarrow \{b_1, b_2\}$ este mulţime liniar independentă.

c) Considerăm reperul $G = \{G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}\}$ al spaţiului liniar $(M_2(R),R)$, unde

$G_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fie $A = [\,[A_1]_G \ \ [A_2]_G \ \ [A_3]_G]$ matricea având pe coloane coordonatele vectorilor mulţimii $\{A_1, A_2, A_3\}$ în reperul G. Avem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 3G_{11} - G_{12} + 5G_{21} + 2G_{22} \Rightarrow [A_1]_G = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \text{ analog } [A_2]_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}; \ [A_3]_G = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$d_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0; \ d_{123} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -37 \neq 0$$

Rezultă că rang $A = 3$ = numărul de vectori, prin urmare vectorii A_1, A_2, A_3 sunt liniar independenţi.

4. Se consideră vectorii $v_1 = (3,-1,2)$, $v_2 = (-2,1,1)$, $v_3 = (-4,2,-1)$ din spaţiul liniar (R^3, R) şi mulţimea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Să se arate că B este bază a spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine coordonatele vectorului $v = (-1,2,5)$ în reperul B.

c) Să se determine coordonatele vectorului v în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R).

Rezolvare:

a) Metoda I. (folosind Propoziţia 3) B este bază a spaţiului liniar (R^3, R) dacă şi numai dacă B este mulţime liniar independentă maximală, adică:

1) B este mulţime liniar independentă;
2) card B = dim (R^3, R).

Vom verifica cele două condiţii.

1) Fie $A = [[v_1]_E \ [v_2]_E \ [v_3]_E]$ matricea având pe coloane coordonatele vectorilor din B în reperul canonic al spaţiului (R^3,R)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$ det $A = 13 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 3$ = numărul de vectori $\Rightarrow B$ este mulţime liniar independentă.

2) Această condiţie este verificată, deoarece: card $B = 3$ = dim (R^3, R).

Din 1) şi 2) rezultă că B este reper al spaţiului liniar (R^3, R).

Metoda II. (Folosind definiţia 2) B este bază a spaţiului liniar (R^3, R) dacă:

1) B este mulţime liniar independentă;
2) B este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

1) Această condiţie se verifică în acelaşi mod ca la metoda *I*.

2) G este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R) dacă $\forall\ v\in R^3$, $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$ astfel încât $v = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$.

Fie $v = (a, b, c) \in R^3$; relaţia precedentă devine: $\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = a \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = c \end{cases}$

Rangul matricei sistemului este 3 şi este egal cu rangul matricei extinse, prin urmare sistemul este compatibil, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$. Rezultă că $\{g_1, g_2, g_3\}$ este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

Observaţie. În cazul în care se cunoaşte dimensiunea spaţiului liniar, metoda *I* este mult mai simplă decât metoda *II*.

b) Coordonatele vectorului v în reperul B sunt scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in R$ astfel încât $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$. Se obţine sistemul $\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 5 \end{cases}$, cu soluţia $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$.

Prin urmare coordonatele vectorului v în reperul B sunt: 3, 1, 2.

Matricea coordonatelor vectorului v în reperul B este $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sau $[v]_B = [3\ \ 1\ \ 2]^T$.

5. Se consideră mulţimea de vectori $B = \{f_1 =1,\ f_2= X+1,\ f_3 = (X+1)^2,\dots, f_{n+1} = (X+1)^n\}$ din spaţiul liniar $(R_n[X], R)$.

a) Să se arate că B este reper al spaţiului liniar $(R_n[X], R)$.

b) Să se determine coordonatele vectorului $f = a_0 + a_1X+ a_2X^2 +\dots+ a_nX^n$ în reperul B.

Rezolvare:

a) Vom verifica două condiţii:

1) Fie $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_{n+1}\in R$ astfel ca $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0 \Rightarrow \alpha_1\cdot 1 + \alpha_2(X+1) + \dots + \alpha_{n+1}(X+1)^n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_n + C_n^1\alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_{n-1} + C_{n-1}^1\alpha_n + C_n^2\alpha_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_2 + C_2^1\alpha_3 + C_3^2\alpha_4 + \dots + C_n^{n-1}\alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obţine: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$, prin urmare B este mulţime liniar independentă

2) card $B = n + 1 = \dim R_n[X]$. Din 1) şi 2) rezultă că B este reper al spaţiului liniar $(R_n(X),R)$.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\in R$ coordonatele lui v în reperul $B \Rightarrow f = \alpha_1\cdot 1 + \alpha_2\cdot(X+1) + \alpha_3\cdot(X+1)^2 + \ldots + \alpha_{n+1}\cdot(X+1)^n$ (1)

Pentru $x = -1$ în relaţia (1) se obţine $\alpha_1 = f(-1)$.

Derivăm relaţia (1) şi obţinem: $f' = \alpha_2 + 2\alpha_3\cdot(X+1) + 3\alpha_4\cdot(X+1)^2 + \ldots + n\alpha_{n+1}\cdot(X+1)^{n-1}$ (2)

Pentru $x = -1$ în relaţia (2) se obţine $\alpha_2 = f'(-1)$.

Derivăm (2) şi obţinem: $f'' = 2\alpha_3 + 2\cdot 3\alpha_4\cdot(X+1) + 3\cdot 4\alpha_4\cdot(X+1)^2 + \ldots + n(n-1)\alpha_{n+1}\cdot(X+1)^{n-2}$ (3)

Pentru $x = -1$ în relaţia (3) se obţine $\alpha_3 = \dfrac{f''(-1)}{2}$

Repetând procedeul, se obţine $\alpha_{n+1} = \dfrac{f^{(n)}(-1)}{n!}$

Prin urmare, $[f]_B = \left[f(-1) \quad f'(-1) \quad \dfrac{f''(-1)}{2!} \quad \dfrac{f^{(3)}(-1)}{3!} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{f^{(n-1)}(-1)}{(n-1)!} \quad \dfrac{f^{(n)}(-1)}{n!} \right]^T$

6. Se consideră mulţimea de vectori $G = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

din spaţiul liniar $(M_2(R), R)$.

a) Să se arate că G este reper al spaţiului liniar $(M_2(R), R)$.

b) Să se determine coordonatele vectorului $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în reperul G.

Rezolvare:

a) Vom verifica două condiţii:

1) Fie $A = [[A_1]_G\ [A_2]_G\ [A_3]_G\ [A_4]_G]$ matricea având pe coloane coordonatele vectorilor mulţimii B în reperul G. Avem:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = 5 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 4$ = numărul de vectori, prin urmare B este mulţime liniar independentă.

2) card $B = 4 = \dim M_2(R)$.

Din 1) şi 2) rezultă că B este reper al spaţiului liniar $(M_2(R), R)$.

b) Pentru găsirea coordonatelor, vom determina scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3 + \alpha_4A_4$.

Se obţine: $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{5} \Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^T$

7. În spaţiul liniar (R^3, R) se dau vectorii:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_6 = v_1 - 2v_2 + 3v_3$$

Să se determine care din următoarele mulţimi este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R):

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$; *b)* $\{v_1, v_3, v_4\}$; *c)* $\{v_2, v_3\}$; *d)* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; *e)* $\{v_2, v_3, v_6\}$; *f)* $\{v_3, v_4, v_5\}$.

Din fiecare sistem de generatori să se extragă toate bazele posibile ale spaţiului vectorial (R^3, R). Să se verifice dacă scrierea unui vector din R^3 ca o combinaţie liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică.

Rezolvare:

a) $\{v_1,v_2,v_3\}$ este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3,R) dacă $\forall v \in R^3$, $\exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3$.

Fie $v = (a, b, c) \in R^3$; relaţia precedentă devine: $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 3\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = c \end{cases}$; determinantul sistemului este $\Delta = -20 \neq 0$, prin urmare sistemul este compatibil determinat, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3$.

Rezultă că $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generator ai spaţiului liniar (R^3, R); de asemenea, $\{v_1, v_2, v_3\}$ este mulţime liniar independentă, deci formează o bază a spaţiului liniar (R^3, R). Conform propoziţiei 6, rezultă că scrierea unui vector din R^3 ca o combinaţie liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică.

b) Procedând analog, obţinem că se poate găsi un vector $v \in R^3$ astfel încât sistemul să fie incompatibil, prin urmare $\{v_1, v_3, v_4\}$ nu este sistem de generatori.

c) În mod analog, rezultă că $\{v_2, v_3\}$ nu este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

d) Am arătat la punctul *a)* că $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R), deci $\forall v \in R^3$, $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3$, prin urmare $\forall v \in R^3$, $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ şi $\alpha_4 = 0$ astfel încât $v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3 + \alpha_4v_4$.

Deoarece $\{v_1,v_2,v_3\}$ este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R) şi $\{v_1,v_2,v_3\}\subset\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, rezultă că $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

Deoarece $\dim R^3 = 3$, rezultă că mulţimea $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ nu este bază a spaţiului R^3. Rămâne să verificăm prin calcule dacă scrierea unui vector din R^3 ca o combinaţie liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică. Vom obţine că această scriere nu este unică.

Deoarece $\dim R^3 = 3$, rezultă că numărul maxim de baze ce se pot forma cu vectorii din acest sistem este C_4^3

Notăm cu Δ_{jkl} determinantul având pe coloane coordonatele vectorilor a_j, a_k, a_l în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R). Avem $\Delta_{123} \neq 0$, $\Delta_{124} = 0$, $\Delta_{134} = 0$, $\Delta_{234} \neq 0$, deci bazele care se pot forma sunt: $\{v_1, v_2, v_3\}$ şi $\{v_2, v_3, v_4\}$.

Pentru punctele *e)* şi *f)* se procedează în mod similar şi se obţine că nici unul dintre cele două mulţimi de vectori nu este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

8. Fie (V, R) un spaţiu liniar, $F =\{f_1, f_2, f_3\}$ un reper al spaţiului liniar (V, R) şi mulţimea de vectori $G =\{g_1, g_2, g_3\}\subset V$.

Ştiind că $g_1 = -2f_1 - f_2 + f_3$, $g_2 = - f_1 + f_2 + 2f_3$, $g_3 = f_1 + f_3$, se cere:

a) să se arate că $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ este reper al spaţiului liniar (V, R);

b) să se determine coordonatele vectorului $x = 3f_1 - 2f_2 + 4f_3$ în reperul F.

c) să se determine coordonatele vectorului $y = 5g_1 – 3g_2 + 2g_3$ în reperul F;

d) să se determine coordonatele vectorului $z = f_1 - 3f_2 + 2f_3$ în reperul G.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in R$ astfel încât $\alpha_1g_1 + \alpha_2g_2 + \alpha_3g_3= 0 \Rightarrow \alpha_1(-2f_1 - f_2 + f_3) + \alpha_2(- f_1 + f_2 + 2f_3) + \alpha_1(f_1 + f_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) f_1 + (-\alpha_1 - \alpha_2) f_2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) f_3 = 0.$

Cum vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi, rezultă că toţi coeficienţii acestora din relaţia de mai sus sunt nuli:

$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$; determinantul matricei sistemului obţinut este $\Delta = - 6 \neq 0$, prin urmare sistemul admite numai soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci $\{g_1, g_2, g_3\}$ este sistem de vectori liniar independenţi. De asemenea, numărul de vectori este egal cu dimensiunea spaţiului liniar (V, R), deci $G =\{g_1, g_2, g_3\}$ este reper al spaţiului liniar (V, R).

b) Avem: $x = 3f_1 - 2f_2 + 4f_3$, prin urmare coordonatele vectorului x în reperul F sunt: 3,-2,4 sau $[x]_F = [3 \ \ -2 \ \ 4]^T$.

c) Avem că $y = 5g_1 - 3g_2 + 2g_3$. Trebuie să exprimăm vectorul y în funcţie de vectorii reperului F. Folosind relaţiile din enunţ care exprimă vectorii bazei G în funcţie de vectorii reperului F, obţinem: $y = 5(-2f_1 - f_2 + f_3) - 3(-f_1 + f_2 + 2f_3) + 2(f_1 + f_3) = -5f_1 - 8f_2 + f_3$, deci, conform definiţiei, coordonatele vectorului y în reperul F sunt: -5, -8, 1 sau $[y]_F = [-5 \;\; -8 \;\; 1]^T$.

d) Pentru a determina coordonatele vectorului $z = f_1 - 3f_2 + 2f_3$ în reperul G se poate folosi definiţia sau metoda Gauss-Jordan. Vom prezenta a doua metodă. Pornim de la reprezentarea vectorului z în reperul G. Vom elimina din reperului iniţial, pe rând, câte un vector, pe care îl vom înlocui cu un vector al noului reper, G. Rezultă următorul tabel:

Reperul	g_1	$g_2\downarrow$	g_3	z
f_1	-2	-1	1	1
$\leftarrow f_2$	-1	$\boxed{1}$	0	-3
f_3	1	2	1	2
f_1	-3	0	$1\downarrow$	-2
g_2	-1	1	0	-3
$\leftarrow f_3$	3	0	$\boxed{1}$	8
$\leftarrow f_1$	$\boxed{-6}\downarrow$	0	0	-10
g_2	-1	1	0	-3
g_3	3	0	1	8
g_1	1	0	0	5/3
g_2	0	1	0	- 4/3
g_3	0	0	1	3

În ultima iteraţie, în coloana vectorului z s-au obţinut coordonatele vectorului z în reperul G, adică:

$[z]_G = [5/3 \;\; -4/3 \;\; 3]^T$.

9. Fie vectorii $v_1 = (-1, m)$, $v_2 = (2m + 1, -3)$, $v = (m + 4, 2)$ din spaţiul liniar (R^2, R), $m \in R$. Se ştie că $\{v_1, v_2\}$ este reper al spaţiului liniar (R^2, R), iar coordonatele vectorului v în acest reper sunt 4 şi 2. Să se determine parametrul m.

Rezolvare:

Deoarece $\{v_1, v_2\}$ este reper al spaţiului liniar (R^2, R), rezultă că $\{v_1, v_2\}$ este mulţime liniar independentă, deci rangul matricei formate din componentele vectorilor este egal cu numărul de vectori, adică: $\begin{vmatrix} -1 & 2m+1 \\ m & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m \in R \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$

Deoarece coordonatele vectorului v în reperul $\{v_1, v_2\}$ sunt egale cu 4 şi 2, rezultă:

$$v = 4v_1 + 2v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+4 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2m+1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 = -4+4m+2 \\ 2 = 4m-6 \end{cases} \Rightarrow m = 2$$

Se observă că pentru valoarea determinată vectorii constituie un reper al spaţiului liniar (R^2, R), prin urmare $m = 2$.

10. Să se studieze natura următoarelor mulţimi de vectori din spaţiile liniare indicate:
a) $v_1 = (-2,-1)$, $v_2 = (2,3)$, $v_3 = (1,-1)$, din spaţiul liniar (R^2, R);
b) $v_1 = (3,-1,1)$, $v_2 = (-1,2,4)$, din spaţiul liniar (R^3, R);
c) $v_1 = (1,-1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,2,3)$, $v_3 = (2,1,0,-1)$, $v_4 = (0,3,1,-1)$ din spaţiul liniar (R^4, R).

Rezolvare:

a) Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor v_1, v_2, v_3 în reperul canonic al spaţiului liniar (R^2, R):

$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; rang $A = 2$ şi este diferit de numărul de vectori, prin urmare $\{v_1,v_2,v_3\}$ mulţime liniar dependentă.

b) Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor v_1, v_2 în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R): $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; rang $A = 2 =$ numărul de vectori ai sistemului, prin urmare $\{v_1, v_2\}$ este mulţime liniar independentă.

c) Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor v_1, v_2, v_3, v_4 în reperul canonic al spaţiului liniar (R^4, R):

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; rang $A = 4 =$ numărul de vectorilor sistemului, deci $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ mulţime liniar independentă.

11. Să se studieze natura următoarelor mulţimi de vectori din spaţiile liniare indicate:
a) $v_1 = (1,2,4)$, $v_2 = (1,-3,9)$, $v_3 = (1, a, a^2)$, $a \in R$, din (R^3, R);
b) $g_1 = (a, -1,4,0)$, $g_2 = (3, a,3,1)$, $g_3 = (5,1, a-1,-2)$, $a \in R$, din (R^4, R).

Rezolvare:

a) Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor v_1, v_2, v_3 în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R): $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & a \\ 4 & 9 & a^2 \end{bmatrix}$;

det $A = -5(a - 2)(a + 3)$.

Dacă $a \in R \setminus \{-3, 2\}$, atunci det $A \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 3 =$ numărul de vectori, deci $\{v_1,v_2,v_3\}$ mulţime liniar independentă.

Dacă $a \in \{-3, 2\}$, atunci det $A = 0 \Rightarrow$ rang $A < 3 \Rightarrow$ rang $A \neq$ numărul de vectori, deci $\{v_1,v_2,v_3\}$ mulţime liniar dependentă.

b) Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor g, g_2, g_3 în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R): $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 5 \\ -1 & a & 1 \\ 4 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Determinăm rang A. Avem: $d_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ şi fie d_3, d_3' minorii obţinuţi prin bordarea lui d_2; $d_3 = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 4 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9a + 9$

Dacă $a \in R \setminus \{-1\}$, atunci $d_3 \neq 0$, prin urmare rang A = 3 = numărul de vectori, deci $\{g_1, g_2, g_3\}$ mulţime liniar independentă.

Dacă a = -1, atunci d_3 = 0; $d_3' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$

Rezultă rang A=3= număr vectori, deci $\{g_1, g_2, g_3\}$ este mulţime liniar independentă.

În concluzie, vectorii g_1, g_2, g_3 sunt liniar independenţi, oricare ar fi valoarea parametrului real a.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că mulţimea de vectori $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, unde a_1 = (-2,0,3), a_2 = (5,1,-1), a_3 = (-3,1,-2), a_4 = (1,6,3) este sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

2. Stabiliţi care din sistemele următoare mulţimi de vectori constituie o bază a spaţiului liniar indicat:

a) v_1 = (3,1,2), v_2 = (3,2,1), v_3 = (4,3,1), în (R^3, R);

b) v_1 = (1,2,3,4), v_2 = (2,3,4,1), v_3 = (1,0,-1, 2), v_4 = (1,2,0,-1), în (R^4, R);

c) v_1 = -1 + 4i, v_2 = 3 + 2i în (C, R);

d) $v_1 = X^2 + 3X - 3$, $v_2 = 4X^2 + X + 2$, $v_3 = 2X^2 - 5X + 8$, în $(R_2[X], R)$;

e) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R), R)$.

R: *a), b), c), e).*

3. Să se arate că mulţimea B este reper al spaţiului vectorial indicat şi să se afle coordonatele vectorului v în reperul B:

a) $B = \{v_1 = (2,-1,5), v_2 = (-3,1,1), v_3 = (-1,1,6)\}$, $(V,K) = (R^3, R)$, $v = (5,-4,4)$.

b) $B=\{f_1=1, f_2=(X-2), f_3=(X-2)^2,..., f_{n+1}=(X-2)^n\}$;

$(V,K)=(R_n[X],R)$; $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$;

c) $B = \left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$,

$(V,K) = (M_2(R), R)$; $v = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

4. Fie $F=\{f_1, f_2, f_3\}$ un reper al spaţiului liniar (R^3, R) şi fie mulţimea de vectori $G=\{g_1, g_2, g_3\}$, unde $g_1 = f_1 + 3f_2 - 2f_3$,

$g_2 = 2f_1 + 6f_2 - 5f_3$, $g_3 = 2f_1 + f_2 + f_3$.

a) Să se arate că G este reper al spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine coordonatele vectorului $x = 5f_1 + 10 f_2 - 6 f_3$ în reperul G.

5. Să se afle parametrul real m astfel încât mulţimea de vectori B să formeze o bază a spaţiului liniar indicat:

a) $B = \{v_1 = (2, m, 1), v_2 = (-1,1, m), v_3 = (1,2,2)\}$, (R^3, R);

b) $B = \{f_1 = 1 - X, f_2 = m + X^2\}$, $(R_2[X], R)$;

c) $B = \{z_1 = m - 2i, z_2 = -1 + mi\}$, (C, R).

6. Fie sistemul de vectori din spaţiul liniar (R^3, R): $B = \{v_1 = (3,1,-2), v_2 = (-4,2,1), v_3 = (-1,1,2)\}$.

a) Să se arate că B constituie un reper al spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine vectorul $v \in R^3$, ştiind că $v_B = (-2,5,5)$.

7. În spaţiul vectorial (R^3, R) se consideră vectorii: $v_1 = (3,1,-1)$, $v_2 = (2,0,1)$, $v_3 = (1,-1,3)$, $v_4 = (0,3,0)$, $v_5 = (2,3,1)$. Să se determine $k \in \{1,2,3,4,5\}$ astfel încât sistemul de vectori:

a) $\{v_1, v_2, v_k\}$ să formeze o bază a spaţiului vectorial (R^3, R);

b) $\{v_2, v_4, v_k\}$ să fie sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R).

R: *a)* $k \in \{4,5\}$; *b)* $k \in \{1,3\}$.

8. Fie $B_1=\{a_1, a_2, a_3\}$ un reper al spaţiului liniar (V, R) şi mulţimea $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\} \subset V$. Ştiind că $b_1 = a_1 - a_2 + 3a_3$, $b_2 = -3a_1 - 4a_2 + a_3$, $b_3 = 2a_1 + 3a_2 + 3a_3$, se cere:

a) să se arate că B_2 este reper al spaţiului liniar (V, R);

b) să se determine coordonatele vectorului $x = 2a_1 - a_2 + 4a_3$ în reperul B_1.

c) să se determine coordonatele vectorului $y = -2a_1 + 5a_2 - 2a_3$ în reperul B_2;

d) să se determine coordonatele vectorului $z = 4b_1 - b_2 - 2b_3$ în reperul B_1.

R: *a)* Se foloseşte propoziţia 3 din breviarul teoretic; *b)* $x_{B_1} = (2,-1,4)^t$; *c)* $y_{B_2} = (-3,1,2)^t$; *d)* $z_{B_2} = (3,-6,5)^t$.

9. Să se arate că mulţimea de vectori $G = \{g_1 = (1,1,0), g_2 = (0,1,0), g_3 = (-1,1,0), g_4 = (0,1,1)\}$ din spaţiul liniar (R^3, R) este un sistem de generatori ai spaţiului liniar (R^3, R) şi că scrierea vectorului $v = (1,0,0)^t$ ca o combinaţie liniară a vectorilor din G nu este unică.

10. Să se arate că mulţimea de vectori $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ este reper al acestui spaţiului liniar (R^3, R) şi să se determine coordonatele vectorului x în acest reper:

a) $a_1 = (-1,3,5)$, $a_2 = (1,-4,1)$, $a_3 = (-1,2,10)$, $x = (-2,4,21)$;

b) $a_1 = (-3,1,1)$, $a_2 = (1,-3,1)$, $a_3 = (1,1,-3)$, $x = (2,-1,-1)$.

R: Se foloseşte propoziţia 3 din breviarul teoretic.

11. Să se arate că sistemul de vectori B este reper al spaţiului liniar (V, K) şi să se determine coordonatele vectorului x în acest reper în fiecare din cazurile următoare:

a) $(V, K) = (R^2, R)$; $B = \{v_1 = (1,2)^t, v_2 = (-1,0)^t\}$; $x = (5,3)^t$;

b) $(V, K) = (R_3[X], R)$; $B = \{f_1 = 1,\ f_2 = X + 1,\ f_3 = X^3 - X,\ f_4 = 2X^2 - 1\}$, $x = 1 - X^2$

c) $(V,K) = (M_3(R), R)$, $B = \left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $(V, K) = (R^3, R)$, $B = \{v_1 = (1,2,-1), v_2 = (-1,0,1), v_3 = (2,0,1)\}$, $x = (2,2,1)$.

e) $(V,K) = (C,R)$, $B = \{z_1 = 1 + i, z_2 = 4 - 3i\}$, $x = 2 - 5i$

12. Se dau vectorii din spatiul liniar (R^3, R):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_6 = 3v_1 - 2v_2 + v_3.$$

Care din următoarele mulţimi constituie un sistem de generatori ai spaţiului liniar $(M_{3,1}(R), R)$:

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$; *b)* $\{v_1, v_3, v_4\}$; *c)* $\{v_2, v_3\}$; *d)* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; *e)* $\{v_2, v_3, v_6\}$; *f)* $\{v_3, v_4, v_5\}$.

Din fiecare sistem de generatori să se extragă toate bazele posibile ale spaţiului liniar ($M_{3,1}(R)$, R). Să se verifice dacă scrierea unui vector din $M_{3,1}(R)$ ca o combinaţie liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică.

13. Fie vectorii $v_1 = (3, 1, 2, 1)$, $v_2 = (-4, 3, -1, -2)$, $v_3 = (3, 2, -1, 0)$, din spaţiul liniar (R^4, R). Să se completeze această mulţime de vectori până la o bază a spaţiul liniar (R^4, R).

14. Fie $B = \{v_1, v_2\}$ un reper al spaţiul liniar (R^2, R), unde $v_1 = (1,2)$ şi $v_2 = (-1,1)$. Să se determine vectorul $v \in R^2$, ştiind că $v_B = (4,3)$.

15. Fie vectorii $v_1 = (a, 2)$, $v_2 = (3, 4a + 1)$, $v = (2, a)$ din spaţiul liniar (R^2, R), $a \in R$. Se ştie că $\{v_1, v_2\}$ este reper al spaţiul liniar (R^2, R), iar coordonatele vectorului v în acest reper sunt egale cu -7 şi 3. Să se afle valoarea parametrului a.

16. Fie $B = \{v_1, v_2 = (2, 4)\}$ un reper al spaţiul liniar (R^2, R) şi fie vectorul $v = (-1, 1)$. Să se gasească vectorul v_1, ştiind că $v_B = (1, 2)$.

17. Fie vectorii $v_1 = (m, m\text{-}1)$, $v_2 = (3, 2)$, $u_1 = (5, 7)$, $u_2 = (3, 4)$, $m \in R$, din spaţiul liniar (R^2, R),. Se ştie că un vector x din spaţiul liniar (R^2, R) are coordonatele 1 şi $-m$ în reperul $B_1 = \{v_1, v_2\}$, respectiv $m^2 + 2m - 1$ şi $m^2 - 14m + 11$ în reperul $B_2 = \{u_1, u_2\}$. Să se determine valoarea parametrului m.

18. Fie vectorii din spaţiul liniar ($M_{3,1}(R)$, R):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate şi să se justifice răspunsul:

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ este bază a spaţiului liniar ($M_{3,1}(R)$, R);

b) nu există nicio bază a spaţiului liniar ($M_{3,1}(R)$, R) care să conţină vectorul v_5;

c) $\{v_1, v_3, v_4\}$ nu este bază a spaţiului liniar ($M_{3,1}(R)$, R);

d) $\{v_1, v_2, v_4, v_6\}$ este bază a spaţiului liniar ($M_{3,1}(R)$, R).

19. Să se arate că mulţimea $A=\left\{\begin{pmatrix} \bar{x} & y \\ -\bar{y} & x \end{pmatrix}; x, y \in C\right\}$ (unde $\bar{x}$ reprezintă conjugatul numărului complex x), împreună cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali formează un spaţiu vectorial peste R şi să se determine dimensiunea acestuia.

20. Să se arate că următoarele mulţimi sunt subspaţii liniare ale spaţiilor liniare indicate şi să se afle dimensiunile acestora:

a) $R_n[X] \subset R[X]$; *b)* $\{(0, a-b, b-2a) | a, b \in R\} \subset R^3$;

c) $\{2aX^3 + b \mid a, b \in R\} \subset R[X]$;

d) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \mid x_i \in R, i = \overline{1,3}, x_1 = 3x_2, x_1 + x_2 = x_3\} \subset R^3$;

e) $\{(x_1, x_2, ..., x_n)^t \mid x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 = x_2 + x_n\} \subset R^n$

2.4. Subspații liniare

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Spunem că W este *subspaţiu liniar* al spaţiului liniar (V,K) dacă:

1) $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$;

2) $\forall \alpha \in K, \forall x \in W \Rightarrow \alpha \cdot x \in W$.

Propoziţia 1. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi W subspaţiu liniar al spaţiului liniar (V,K). Dacă dim W = dim V, atunci $W = V$.

Definiţia 2. Fie (V, K) un spaţiu vectorial de tip finit şi $M \neq \emptyset$, $M \subset V$. Se numeşte *subspaţiul liniar generat de M* sau *acoperirea liniară a lui M* şi se notează span (M) sau $L(M)$ sau $\langle M \rangle$ mulţimea:

$$\text{span}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; n \in N^*, \alpha_i \in K, x_i \in M, i = \overline{1,n} \right\}$$

Propoziţia 2. span(M) este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (V,K).

Observaţia 1. Dacă V = span(M), atunci M este sistem de generatori ai spaţiului liniar V.

Observaţia 2. Dacă B este o bază a spaţiului liniar (V,K), atunci span$(B) = V$.

Definiţia 3. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K). Se numeşte *suma subspaţiilor liniare X şi Y* mulţimea: $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Observaţia 3. În contextul Definiţiei 3, mulţimea $X + Y$ este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (V,K).

Definiţia 4. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K). Se numeşte *intersecţia subspaţiilor liniare X şi Y* mulţimea: $X \cap Y = \{v \in V \mid v \in X, v \in Y\}$.

Observaţia 4. În contextul Definiţiei 4, mulţimea $X \cap Y$ este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (V,K).

Teorema Grassmann (Teorema dimensiunii pentru subspaţii liniare). Fie (V,K) un spaţiu liniar şi X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K). Atunci: $\dim (X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim (X \cap Y)$.

Definiţia 5. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K). Spunem că *suma subspaţiilor liniare X şi Y este directă* dacă orice vector al subspaţiului sumă $X + Y$ admite o unică descompunere într-o sumă dintre un vector din X şi un vector din Y, adică: $\forall$ v $\in X + Y$, există şi sunt unici vectorii $x \in X$, $y \in Y$ astfel încât $v = x + y$.

Notaţie. Suma directă a subspaţiilor liniare X şi Y se notează $X \oplus Y$.

Teorema de caracterizare a sumei directe. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Suma subspaţiilor liniare X şi Y este directă.
2) $X \cap Y = \{0_V\}$.
3) $\dim (X + Y) = \dim X + \dim Y$.

Definiţia 6. Fie (V,K) un spaţiu liniar şi X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K). Subspaţiile liniare X şi Y se numesc *suplimentare în V* dacă $X \oplus Y = V$.

Propoziţia 3. Dacă (V,K) este spaţiu liniar şi X este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (V,K), atunci există Y subspaţiu liniar al spaţiului liniar (V,K) astfel încât $X \oplus Y = V$.

Definiţia 7. Dacă (V,K) este spaţiu liniar şi X, Y sunt subspaţii liniare ale spaţiului liniar (V,K), astfel încât $X \oplus Y = V$, atunci Y se numeşte *suplimentul direct* al spaţiului liniar X.

PROBLEME REZOLVATE

1. În spaţiul liniar (R^n, R) se consideră mulţimile de vectori X şi Y:

a) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R,\ i = \overline{1,n},\ x_1 = x_n \right\}$;

b) $Y = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R \setminus Q,\ i = \overline{1,n} \right\}$.

Stabiliţi dacă X, Y sunt subspaţii liniare ale spaţiului liniar (R^n, R) şi în caz afirmativ determinaţi dimensiunile acestora.

Rezolvare:

a) Avem de verificat două condiţii:

1) Fie $x, y \in X \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in R,\ i = \overline{1,n},\ x_1 = x_n$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n),\ y_i \in R,\ i = \overline{1,n},\ y_1 = y_n$

Avem: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, cu $x_i + y_i \in R,\ i = \overline{1,n}$ şi $x_1 + y_1 = x_n + y_n$, prin urmare $x + y \in X$.

2) Fie $\alpha \in R$ şi $x \in X \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, cu $x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 = x_n$; avem că

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$, cu $\alpha x_i \in R, i = \overline{1,n}$ şi $\alpha x_1 = \alpha x_n$, prin urmare $\alpha x \in X$.

Conform definiţiei, rezultă că X este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (R^n, R).

Dacă $x \in X \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 = x_n$, deci $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_1)$, prin urmare $x = x_1 \cdot (1,0,0,.....,0,1) + x_2 \cdot (0,1,0,.....,0,0) + ... + x_{n-1} \cdot (0,0,0,.....,1,0)$; rezultă de aici că $X = \text{span}(\{g_1, g_2, ..., g_{n-1}\})$, unde $g_1 = (1,0,0,.....,0,1), g_2 = (0,1,0,.....,0,0), ..., g_{n-1} = (0,0,0,.....,1,0)$.

Pentru a determina dimensiunea spaţiului liniar X, trebuie să construim o bază a spaţiului liniar $X = \text{span}(G) = \text{span}(\{g_1, g_2, ..., g_{n-1}\})$, ceea ce revine la a determina o familie maximală de vectori liniar independenţi în G

Fie A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor vectorilor $g_1, g_2, ..., g_{n-1}$ în reperul canonic al spaţiului liniar (R^n,R): $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0............ & 0 \\ 0 & 1 & 0............ & 0 \\ .... & & & \\ 0 & 0 & 0........... & 1 \\ 1 & 0 & 0........... & 0 \end{bmatrix}$;

Deoarece determinantul format cu primele n-1 linii este nenul, rezultă că rangul matricei A este n-1 şi egal cu numărul vectorilor din G, prin urmare vectorii $g_1, g_2, ..., g_{n-1}$ sunt liniar independenţi. Am obţinut că $\dim X = n - 1$.

b) $Y=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_i\in R\setminus Q,\ i=\overline{1,n}\}.$

Fie $x=(\sqrt{2},\sqrt{2},....,\sqrt{2})\in Y$ şi $\alpha=\sqrt{2}\in R$; rezultă $\alpha x=(2,2,.....,2)\notin Y$, deci Y nu este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (R^n, R).

2. În spaţiul liniar (R^3,R) se consideră vectorii $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,3,1)$, $v_3=(3,5,2)$, $v_4=(5,8,3)$, $v_5=(4,7,3)$, $x=(5,9,4)$, $y=(1,1,1)$. Fie $M=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Se cere:

a) să se determine dim span(M) ;

b) să se precizeze dacă vectorii x, y aparţin sau nu spaţiului vectorial span(M);

c) 1) să se dea exemplu de o bază B_1 pentru span(M) astfel încât $B_1\subset M$;

2) să se dea exemplu de o bază B_2 pentru span(M) astfel încât $B_2\subset R^3\setminus M$;

3) să se găsească o bază B_3 pentru span(M) astfel încât $B_3\not\subset M$ şi $B_3\cap M\neq\emptyset$.

Rezolvare:

a) Conform observaţiei 2 din breviarul teoretic, pentru a determina o bază în span(M) trebuie să găsim în M un sistem maximal de vectori liniar independenţi.

Scriem matricea A ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor din M: în reperul canonic al spaţiului liniar $(M_{3,1}(R), R)$.

$A=\begin{pmatrix}1&2&3&5&4\\2&3&5&8&7\\1&1&2&3&3\end{pmatrix}$. Determinăm un minor nenul de ordin maxim şi găsim $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0$;

rezultă că un sistem maximal de vectori liniar independenţi este $\{v_1, v_2\}$, deci $\dim L(M)=2$

b) Avem că $\text{span}(M)=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_5v_5\mid \alpha_i\in R, i=\overline{1,5}\}$, În baza observaţiei 2, rezultă că $\text{span}(M)=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2\mid \alpha_1,\alpha_2\in R\}$.

- $x\in L(M)$ dacă există scalarii $\alpha_1,\alpha_2\in R$ astfel încât $x=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=5\\2\alpha_1+3\alpha_2=9\\\alpha_1+\alpha_2=4\end{cases}$; obţinem $\alpha_1=3,\alpha_2=1$, prin urmare $x\in L(M)$.

- $y\in L(M)$ dacă există scalarii $\alpha_1,\alpha_2\in R$ astfel încât $y=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=1\\2\alpha_1+3\alpha_2=1\\\alpha_1+\alpha_2=1\end{cases}$; acest sistem nu are soluţie, deci $y\notin L(M)$.

c) 1) $B_1=\{v_1,v_2\}\subset M$ şi B_1 bază (am arătat la punctul *a)*).

2) Fie $w_1=2v_1, w_2=3v_2$ şi $B_2=\{w_1,w_2\}\subset R^3\setminus M$ şi $\{w_1,w_2\}$ mulţime liniar independentă, deci bază pentru $L(M)$ (deoarece $\dim L(M)=2$ = numărul de vectori din B_2)

3) Fie $B_3=\{v_1,w_2\}$, unde $w_2=3v_2$; avem că $B_3\not\subset M$ şi $B_3\cap M\neq\varnothing$; în plus, $\{v_1,w_2\}$ este mulţime liniar independentă, deci bază pentru $L(M)$ (deoarece $\dim L(M)=2=card\ B_3$).

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine dim span(A) în spaţiul liniar (V, K) şi să se stabilească dacă $v\in$span(A):

a) (V, K) = (R^4, R), $A=\{a_1=(0,-3,1,-1),a_2=(1,0,2,1),a_3=(1,3,1,2)\}$, $v=(2,3,-1,1)$;

b) $V=(R_4[X],R)$, $A=\{a_1=X+1,a_2=X^2+X^4,a_3=X^3,\ a_4=X^2-X^4,a_5=X^2+2X^3+X^4\}$, $v=X^2+X+1$. **R:** *a)* dim span(A) = 2, $v\notin L(A)$; *b)* dim span(A) = 4, $v\in L(A)$.

2. Fie $G=\{(a,b,c)/a-3b+2c=0;a,b,c\in R\}$.

a) Să se arate că G este subspaţiu liniar al spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se indice o bază a spaţiului liniar G şi să se afle dimensiunea acestuia. **R:** *b)* dim G = 2; $B=\{(3,1,0),(-2,0,1)\}$.

3. În spaţiul liniar (R^3,R) se consideră vectorii v_1=(5,3,2), v_2=(3,2,1), v_3=(11,7,4), v_4=(13,8,5), v_5=(2,1,1), x=(1,0,1), y=(19,12,6). Fie M = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}. Se cere:

a) să se calculeze dim span(M);

b) să se precizeze dacă vectorii x, y aparţin spaţiului liniar span(M);

c) să se dea exemplu de:

1) o bază B_1 pentru span(M) astfel încât $B_1\subset M$;

2) o bază B_2 pentru span(M) astfel încât $B_2\subset R^3\setminus M$;

3) o bază B_3 pentru span(M) astfel încât $B_3\not\subset M$ şi $B_3\cap M\neq\varnothing$.

d) să se determine coordonatele vectorilor a=(-1,-1,0), b=(2,1,1) în reperele B_1, B_2, B_3.

4. Să se arate că mulţimea $V=\left\{\begin{pmatrix}2a & a+b\\ a-b & b\end{pmatrix}; a,b\in R\right\}$ împreună cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali formează un subspaţiu liniar al spaţiului liniar ($M_2(R)$, R) şi să se determine dimensiunea acestui subspaţiu. **R:** dim$V$ = 2.

5. În spaţiul liniar (R^n, R), $n\geq 3$, se consideră mulţimile:

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in Z, i = \overline{1,n} \right\};$$

$$Y = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R, i = \overline{1,n},\ x_{n-1} = 2x_n \right\};$$

$$Z = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \right\};$$

$$V = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 - x_n = 2x_2 + x_{n-1} = 3x_3 \right\};$$

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R, i = \overline{1,n},\ 3x_1 - 5x_2 = x_n \right\}.$$

Să se cerceteze dacă *X*, *Y*, *Z*, *V*, *W* sunt subspaţii liniare ale spaţiului liniar (R^n, R) şi în caz afirmativ să se determine dimensiunile acestora.

R: *X* nu este subspaţiu liniar; *Y*, *Z* şi *W* sunt subspaţii liniare de dimensiune *n*-1; *V* este subspaţiu liniar de dimensiune *n*-2.

2.5. Schimbarea coordonatelor unui vector la trecerea de la un reper la un alt reper

BREVIAR TEORETIC

Considerăm spaţiul liniar (V,K), $\dim V = n$. Fie $F = \{f_1, f_2,..., f_n\}$ şi $G = \{g_1, g_2,..., g_n\}$ repere ale spaţiului liniar (V,K).

Definiţie. Se numeşte *matricea de trecere de la reperul F la reperul G* matricea ce conţine pe coloane coordonatele vectorilor din G în reperul F. Această matrice, notată $C_{F,G}$ sau $[C]_G^F$ sau $\mu(F,G)$, se poate scrie:

$$C_{F,G} = [\,[g_1]_F\ \ [g_2]_F\ \ldots\ldots[g_n]_F\,]$$

Formula de transformare a coordonatelor unui vector $x\in V$ *la trecerea de la reperul F la reperul G este*:

$$x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F$$

Observaţia 1. $C_{G,F} = (C_{F,G})^{-1}$

Observaţia 2. În baza definiţiei, rezultă că matricea de trecere de la reperul canonic al spaţiului liniar (R^n, R) la un alt reper F al acestui spaţiu are pe coloane componentele vectorilor reperului F.

Observaţia 3. Fie spaţiul liniar (R^n, R) şi $x\in R^n$, E reperul canonic al acestui spaţiu şi F, G alte două repere ale acestui spaţiu. Notăm cu A matricea de trecere de la reperul E la reperul F ($x_F = A^{-1}\cdot x_E$) şi cu B matricea de trecere de la reperul E la reperul G ($x_G = B^{-1}\cdot x_E$).

Formula de transformare a coordonatelor unui vector $x\in R^n$ *la trecerea de la reperul F la reperul G este*: $x_G = B^{-1}\cdot A \cdot x_F$

PROBLEME REZOLVATE

1. În spaţiul liniar al polinoamelor de grad cel mult 3 şi coeficienţi reali, $(R_3[X],R)$, considerăm reperele

$F = \{f_1= 1, f_2= X, f_3= X^2, f_4 = X^3\}$ şi $G = \{g_1= -2 + 3X + X^2-5X^3, g_2= 4 -X^2, g_3= - X - 6X^3, g_4= 1 + 2X + 3X^2\}$

Să se determine matricea de trecere de la reperul F la reperul G .

Rezolvare:

Conform definiţiei din breviarul teoretic, matricea de trecere de la reperul F la reperul G conţine pe coloane coordonatele vectorilor din G în reperul F. Avem:

$$g_1 = (-2)\cdot f_1 + 3\cdot f_2 + 1\cdot f_3 + (-5)\cdot f_4 \Rightarrow [g_1]_F = [-2 \quad 3 \quad 1 \ -5]^T$$

$$g_2 = 4\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + (-1)\cdot f_3 + 0\cdot f_4 \Rightarrow [g_2]_F = [4 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T;$$

$$g_3 = 0\cdot f_1 + (-1)\cdot f_2 + 0\cdot f_3 + (-6)\cdot f_4 \Rightarrow [g_3]_F = [0 \quad -1 \quad 0 \quad -6]^T;$$

$$g_4 = 1\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + 3\cdot f_3 + 0\cdot f_4 \Rightarrow [g_4]_F = [1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 0]^T.$$

Rezultă:

$$C_{F,G} = \left[\, [g_1]_F \ \ [g_2]_F \ \ [g_3]_F \ \ [g_4]_F \,\right] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Fie $E =\{e_1, e_2, e_3\}$ şi $F =\{f_1, f_2, f_3\}$ două repere ale unui spaţiu liniar. Ştiind că $f_1 = 3e_1 +2e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 - e_2 + 2e_3$
şi $f_3 = -2e_1 + e_3$, să se determine matricea de trecere de la reperul F la reperul E.

Rezolvare:

- Observăm că pe baza informaţiilor din enunţ se poate determina foarte uşor matricea de trecere de la reperul E

la reperul F, notată $C_{E,F}$

Din $f_1 = 3e_1 +2e_2 + e_3$, conform definiţiei matricei de trecere, rezultă că $[f_1]_E = [3 \quad 2 \quad 1]$;

Analog se obţine: $[f_2]_E = [1 \ \ -1 \quad 2]$; $[f_3]_E = [-2 \ \ 0 \ \ 1]$, deci

$$C_{E,F} = \left[[f_1]_E \ \ \ [f_2]_E \ \ \ [f_3]_E \right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pentru a obţine matricea de trecere de la reperul F la reperul E vom folosi observaţia 1, conform căreia avem:

$C_{F,E}$ = $(C_{E,F})^{-1}$. Vom aplica metoda Gauss-Jordan.

$C_{E,F}$			I_3		
3	1	-2	1	0	0
2	-1	0	0	1	0
1	2	$\boxed{1}$	0	0	1
5	5	0	1	0	2
2	$\boxed{-1}$	0	0	1	0
1	2	1	0	0	1
$\boxed{-5}$	0	0	1	5	2
-2	1	0	0	-1	0
5	0	1	0	2	1
1	0	0	-1/5	-1	-2/5
0	1	0	-2/5	-3	-4/5
0	0	1	1	7	3
I_3			$C_{F,E}$		

În concluzie, $C_{F,E} = \begin{bmatrix} -1/5 & -1 & -2/5 \\ -2/5 & -3 & -4/5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

3. Fie F şi G două repere ale spaţiului vectorial (R^3, R) şi $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matricea de trecere de la reperul F la reperul G. Ştiind că $F = \{f_1 = (1,0,-1),\ f_2 = (-2,0,1), f_3 = (1,1,-1)\}$, să se determine vectorii reperului G.

Rezolvare:

Conform definiţiei, prima coloană a matricei A reprezintă coordonatele vectorului g_1 în reperul F: $(g_1)_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Analog avem:

$(g_2)_F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 = (-2) \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$(g_3)_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rezultă că reperul este: $G = \{g_1 = (4,2,-3)^t,\ g_2 = (-4,0,3)^t, g_3 = (-4,1,1)^t\}$.

4. Se consideră următoarele mulţimi de vectori din spaţiul liniar (R^3, R):
$F = \{f_1 = (-2,1,1),\ f_2 = (3,-1,1), f_3 = (1,1,-1)\}$ şi $G = \{g_1 = (2,1,0),\ g_2 = (0,-1,1), g_3 = (1,1,0)\}$.

a) Să se arate că F şi G sunt baze ale spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine matricea de trecere de la reperul G la reperul F şi matricea de trecere de la reperul F la reperul G.

c) Fie x un vector din spaţiul liniar (R^3, R). Ştiind că $x_F = (4,-2,1)$, să se determine x_G.

d) Să se exprime vectorul $y = -3g_1 + 2g_2 - g_3$ din spaţiul liniar (R^3, R) în reperul F şi în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R).

e) Să se determine legătura între coordonatele unui vector din spaţiul liniar (R^3, R) în reperele F şi G.

Rezolvare:

a) Notăm cu A matricea având pe coloane coordonatele vectorilor lui F în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R).

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$, prin urmare

rang $A = 3$ = numărul de vectori ai mulţimii F, deci F este sistem liniar independent. (1)

Numărul vectorilor din F este 3 şi este egal cu dimensiunea spaţiului (R^3, R). (2)

Din (1) şi (2) rezultă că F este bază a spaţiului liniar (R^3, R).

Analog se arată că G este bază a spaţiului liniar (R^3, R).

b) Vom folosi observaţia 2. Fie A, B matricele asociate celor două repere (acestea au pe coloane componentele vectorilor din F, respectiv G), $C_{G,F}$ matricea de trecere de la reperul G la reperul F şi $x \in R^3$.

Avem că $x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F$ şi $x_G = B^{-1} A \cdot x_F$, prin urmare matricea de trecere de la reperul G la reperul F este: $C_{G,F} = B^{-1} \cdot A$, pe care o vom determina cu metoda Gauss-Jordan.

	B			A	
2	0	1	-2	3	1
1	$\boxed{-1}$	1	1	-1	1
0	1	0	1	1	-1
2	0	1	-2	3	1
-1	1	-1	-1	1	-1
1	0	$\boxed{1}$	2	0	0
$\boxed{1}$	0	0	-4	3	1
0	1	0	1	1	-1
1	0	1	2	0	0
1	0	0	-4	3	1
0	1	0	1	1	-1
0	0	1	6	-3	-1
	I_3			$B^{-1}A$	

Am obţinut $C_{G,F} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ şi $C_{F,G} = (C_{G,F})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{9}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

c) Folosind formula de transformare a coordonatelor unui vector la trecerea de la reperul F la reperul G, obţinem: $x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F = C_{G,F} \cdot x_F = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 29 \end{pmatrix}$.

d) $y = -3g_1 + 2g_2 - g_3 \Rightarrow y_G = (-3,2,-1)^t$.

Pentru a exprima vectorul y în reperul G vom folosi formula $y_G = C_{F,G}^{-1} \cdot y_F$

Pentru a exprima vectorul y în reperul canonic E, vom folosi faptul că
$y = -3f_1 + 2f_2 - f_3 = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, deci $y_E = (11, -6, 0)$

e) Considerăm un vector $x \in R^3$. Fie $x_G = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ şi $x_F = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^t$ vectorii coordonatelor lui x în cele două repere. Aplicând formula $x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F = C_{G,F} \cdot x_F$ obţinem:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_3 = 6\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases},$$

relaţii care exprimă legătura între coordonatele unui vector $x \in R^3$ în reperele G şi F.

5. Să se determine formulele de transformare a coordonatelor unui vector din spaţiul liniar (R^2, R) la trecerea de la reperul F la reperul G, dacă $F = \{f_1 = (1,-1),\ f_2 = (-3,1)\}$ şi $G = \{g_1 = (2,1),\ g_2 = (1,-1)\}$.

Rezolvare:

Considerăm un vector $x \in R^2$. Fie $x_F = (x_1, x_2)$ şi $x_G = (y_1, y_2)$ coordonatele vectorului x în cele două repere.

Notăm cu A matricea de trecere de la reperul canonic la reperul F (matricea având pe coloane vectorii din reperul F) şi cu B matricea de trecere de la reperul canonic la reperul G.

Formula de transformare a coordonatelor unui vector $x \in R^n$ la trecerea de la reperul F la reperul G este: $x_G = B^{-1}A \cdot x_F$ Calculăm matricea $B^{-1}A$ folosind metoda Gauss-Jordan.

B		A	
2	1	1	-3
1	$\boxed{-1}$	-1	1
$\boxed{2}$	0	0	-2
-1	1	1	-1
1	0	0	-2/3
0	1	1	-5/3
I_2		$B^{-1}A$	

Rezultă că $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, deci formulele de transformare a coordonatelor unui vector din spaţiul liniar (R^2, R) la trecerea de la reperul F la reperul G sunt: $\begin{cases} y_1 = -\frac{2}{3}x_2 \\ y_2 = x_1 - \frac{5}{3}x_2 \end{cases}$

2. Să se arate că B este reper al spaţiului liniar (V, K) şi să se determine coordonatele vectorului v în reperul B:

a) $B = \{v_1 = (3,-1,2),\ v_2 = (-2,1,1),\ v_3 = (-4,2,-1)\}$; $(V, K) = (R^3, R)$; $v = (-1,2,5)$;

b) $B = \{f_1 = 1,\ f_2 = X + 1,\ f_3 = (X + 1)^2, \ldots, f_{n+1} = (X + 1)^n\}$, $(V, K) = (R_n[X], R)$; $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$

c) $B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$,
$(V, K) = (M_2(R), R)$; $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

a) Conform propoziţiei 1, avem de verificat două condiţii:

1) B este sistem de vectori liniar independent;
2) numărul vectorilor din mulţimea B = dimensiunea spaţiului din care fac parte vectorii.

1) Avem că $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, prin urmare rangul matricei formate cu componentele vectorilor este 3 şi este egal cu numărul de vectori, deci B este sistem de vectori liniar independent;

2) card $B = 3 = \dim R^3$.

Din 1) şi 2) rezultă că B este reper al spaţiului liniar (R^3, R).

Observaţie. Se poate arăta că B este reper folosind şi definiţia 2.

Determinăm coordonatele vectorului v în reperul B.

Metoda I. Coordonatele vectorului v în reperul B sunt scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

Rezultă sistemul $\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 5 \end{cases}$, cu soluţia $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$.

Prin urmare coordonatele vectorului v în reperul B sunt: 3, 1, 2.

Matricea coordonatelor vectorului v în reperul B este $[v]_B = [3\ 1\ 2]^T$ sau $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Metoda II. Din formula de reprezentare a unui vector într-un reper dat, avem că $[v]_B = A^{-1} \cdot v$, unde v_B este matricea

coordonatelor lui v în baza B, iar A este matricea având pe coloane vectorii bazei.

Folosind metoda Gauss-Jordan, se obţine:

A			*v*
3	-2	-4	-1
-1	$\boxed{1}$	2	2
2	1	-1	5
$\boxed{1}$	0	0	3
-1	1	2	2
3	0	-3	3
1	0	0	3
0	1	2	5
0	0	$\boxed{-3}$	-6
1	0	0	3
0	1	0	1
0	0	1	2

Prin urmare, $[v]_B = [3 \quad 1 \quad 2]^T$

PROBLEME PROPUSE

1. În spaţiul liniar al polinoamelor de grad cel mult 3 şi coeficienţi reali $(R_3[X],R)$ se consider reperele

$F = \{f_1 = 1, f_2 = X, f_3 = X^2, f_4 = X^3\}$ şi $G = \{g_1 = 1\text{-}2X + X^2\text{-} 4X^3, g_2 = 3X - X^2, g_3 = 2 - X + 8X^3, g_4 = 3 \text{-}2X + X^2\}$

Să se determine matricea de trecere de la reperul F la reperul G.

R: $C_{F,G}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ -2 & 3 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 8 & 0\end{pmatrix}$

2. Fie $E=\{e_1, e_2, e_3\}$ şi $F=\{f_1, f_2, f_3\}$ două repere ale unui spaţiu liniar. Ştiind că $f_1 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3$, $f_2 = 3e_1 + 2e_2 - e_3$ şi $f_3 = e_2 + 4e_3$, să se determine:

a) matricea de trecere de la reperul E la reperul F;

b) matricea de trecere de la reperul F la reperul E.

R: *a)* $C_{E,F}=\left((f_1)_E\ \ (f_2)_E\ \ (f_3)_E\right)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$; *b)* $C_{F,E}=(C_{E,F})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$

3. Fie F şi G două repereale spaţiului liniar (R^3, R) şi $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ matricea de

trecere de la reperul F

la reperul G. Ştiind că $F=\{f_1=(3,2,-1), f_2=(1,0,-1), f_3=(2,-1,1)\}$, să se determine elementele reperului G.

R: $G=\{g_1=(12,7,-1), g_2=(4,-5,3), g_3=(8,3,-1)\}$.

4. Se consideră următoarele mulţimi de vectori din spaţiul liniar (R^3, R):

$F=\{f_1=(-3,2,1), f_2=(1,-3,1), f_3=(1,1,-1)\}$, $G=\{g_1=(-1,2,0), g_2=(0,-1,2), g_3=(2,9,-1)\}$.

a) Să se arate că F şi G sunt baze ale spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine matricele de trecere de la reperul F la reperul G şi respectiv de la G la F.

c) Fie x un vector din spaţiul liniar (R^3, R). Ştiind că $x_G = (2,3,-4)$, să se determine x_F.

d) Să se exprime vectorul $y = 2f_1 - 3f_2 + f_3$ în reperul G şi în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R).

e) Să se determine formulele de transformare a coordonatelor unui vector din spaţiul liniar (R^3, R) la trecerea de la reperul G la reperul F.

R: *b)* $C_{F,G}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $C_{G,F}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{7} & \frac{9}{14} & -\frac{3}{14}\\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14}\\ -\frac{8}{7} & \frac{1}{14} & \frac{9}{14}\end{pmatrix}$; *c)* $x_F=(11, 12, 12)$; *d)* $y_G=(-\frac{19}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{13}{7})$;

e) Fie $x_G = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ şi $x_F = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^t$; atunci $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \beta_2 = \frac{5}{2}\alpha_1 + 3\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 \\ \beta_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 + 5\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 \end{cases}$

5. Stabiliţi cum se schimbă coordonatele unui vector la trecerea de la reperul F la reperul G:

a) $F = \{f_1 = (-1,2), f_2 = (3,-1)\}$, $G = \{g_1 = (2,1), g_2 = (1,2)\}$;

b) $F = \{f_1 = 2 - X + X^2, f_2 = 1 + 3X, f_3 = -1 + 2X^2\}$,
$G = \{g_1 = 1 + X, g_2 = -2 + 3X - X^2, g_3 = -1 + X^2\}$;

c) $F = \{f_1 = (1,-1,1), f_2 = (2,1,-3), f_3 = (-3,1,1)\}$, $G = \{g_1 = (3,2,1), g_2 = (2,1,0), g_3 = (1,0,0)\}$.

R: *a)* Fie $x_F = (\alpha_1, \alpha_2)^t$ şi $x_G = (\beta_1, \beta_2)^t$; atunci $\beta_1 = \frac{11}{15}\alpha_1 - \frac{8}{15}\alpha_2$, $\beta_2 = -\frac{1}{5}\alpha_1 + \frac{3}{5}\alpha_2$

6. Fie $B = \{b_1, b_2 = (1, 2, 1), b_3 = (-2, 1, 1)\}$ un reper al spaţiului liniar (R^3, R) şi vectorul $v = (-1, 1, 0) \in R^3$. Ştiind că $v_B = (-1, 1, 2)$, să se determine vectorul b_1. **R:** $b_1 = (-2, 3, 3)$.

7. Fie F şi G două repere ale spaţiului liniar $(R_2[X], R)$ şi $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la reperul F la reperul G. Ştiind că
$G = \{g_1 = 1 + X, g_2 = -2 + 3X - X^2, g_3 = -1 + X^2\}$, să se determine reperul F.

R: $C_{G,F} = (C_{F,G})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $f_1 = -\frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_2 - \frac{1}{3}g_3 = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3}X - X^2$;

$f_2 = \frac{2}{3}g_1 - \frac{1}{3}g_2 + \frac{2}{3}g_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}X + X^2$; $f_3 = \frac{7}{3}g_1 - \frac{5}{3}g_2 + \frac{4}{3}g_3 = \frac{13}{3} - \frac{8}{3}X + 3X^2$

3. OPERATORI LINIARI

3.1. Noţiunea de operator liniar. Matricea asociată unui operator liniar

BREVIAR TEORETIC

Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii vectoriale de dimensiune finită.

Definiţia 1. O aplicaţie $U : X \to Y$ se numeşte *operator liniar (morfism)* dacă:

(1) U este *aditivă*, adică $U(x + y) = U(x) + U(y)$, $\forall\ x, y \in X$;
(2) U este *omogenă*, adică $U(\alpha x) = \alpha U(x)$, $\forall\ \alpha \in K$, $\forall\ x \in X$.

Observaţia 1. Cele două condiţii pot fi înlocuite prin: (3) $U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y)$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\forall\ x, y \in X$.

Observaţia 2. Dacă $X = Y$ în Definiţia 1, atunci U se numeşte *endomorfism*.

Propoziţie. Dacă $U : X \to Y$ este operator liniar, atunci $U(0_X) = 0_Y$.

Definiţia 2. Se consideră spaţiile liniare (X, K) şi (Y, K), $\dim X = m$, $\dim Y = n$, $m, m \in N^*$ şi $U : X \to Y$ operator liniar. Fie $G = \{g_1, g_2,.., g_m\}$ un reper al spaţiului liniar (X, K) şi $H = \{h_1, h_2,.., h_n\}$ un reper al spaţiului liniar (Y, K).

Se numeşte *matricea operatorului liniar U corespunzătoare reperelor G şi H*, matricea $A \in M_{m,n}(K)$ având pe coloane coordonatele vectorilor $U(g_1),\ldots, U(g_m)$ în reperul H, adică
$[U]_H^G = [[U(g_1)]_H\ [U(g_2)]_H\ ......\ [U(g_m)_H]]$.

Formula de reprezentare a operatorului liniar U în reperele G şi H este: $[U(x)]_H = [U]_H^G \cdot [x]_G$

Dacă E şi F sunt reperele canonice ale spaţiilor liniare (X, K) şi (Y, K) şi se notează cu A matricea lui U corespunzătoare reperelor canonice, atunci formula de reprezentare a operatorului liniar U este: $U(x) = A \cdot x$

Modificarea matricei unui operator liniar la schimbarea reperelor în care se reprezintă

Fie $U : X \rightarrow Y$ un operator liniar, E, G repere ale spaţiului liniar (X, K) şi F, H repere ale spaţiului liniar (Y, K).

Fie $A = A_{E,G}$ şi $B = A_{F,H}$ matricele operatorului corespunzătoare reperelor E şi G, respectiv reperelor F' şi G'.

Fie C matricea de trecere de la baza F la baza F' şi D este matricea de trecere de la baza G la baza G'.

Atunci $B = D^{-1} \cdot A \cdot C$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine care din următoarele aplicaţii defineşte un operator liniar:

$$a)\ U : R^3 \rightarrow R^2, U(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix};\ b)\ U : R^2 \rightarrow R^3, U(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 \\ -2x_1 + 3 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Rezolvare:

a) Fie $\alpha, \beta \in R$ şi $x, y \in R^3$; avem: $U(\alpha x + \beta y) =$

$$= U\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} 4(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + 3(\alpha x_3 + \beta y_3) \\ -(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha x_1 - \alpha x_2 + 3\alpha x_3 \\ -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta y_1 - \beta y_2 + 3\beta y_3 \\ -\beta y_1 + 2\beta y_2 + \beta y_3 \end{pmatrix} =$$

$= \alpha U(x) + \beta U(y)$, prin urmare $U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y)$, $\forall\ \alpha, \beta \in R$, $\forall\ x, y \in R^3$, deci U este operator liniar.

b) *Metoda I.* Fie $\alpha, \beta \in R$, $\forall\ x, y \in R^2$. Avem: $U(\alpha x + \beta y) =$

$$= U\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta y_1) - 4(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ -2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3 \\ 5(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 - 4\alpha x_2 - 4\beta y_2 \\ -2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + 3 \\ 5\alpha x_1 + 5\beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2 \end{pmatrix} \ (1);$$

$$\alpha U(x) + \beta U(y) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 \\ -2x_1 + 3 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 - 4y_2 \\ -2y_1 + 3 \\ 5y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 - 4\alpha x_2 - 4\beta y_2 \\ -2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + 3\alpha + 3\beta \\ 5\alpha x_1 + 5\beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2 \end{pmatrix} \ (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă că relaţia (3) din definiţia operatorului liniar nu este îndeplinită, deci U nu este operator liniar.

Metoda II. Dacă U ar fi operator liniar, conform propoziţiei din breviarul teoretic ar trebui ca

$U\left(0_{R^2}\right) = 0_{R^3}$. Dar $U\left(0_{R^2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{R^3}$, prin urmare U nu este operator liniar.

2. Se consideră operatorul liniar $U : R^3 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Să se determine:

a) matricea operatorului corespunzătoare reperelor canonice ale spaţiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R);

b) matricea operatorului corespunzătoare reperelor $F = \{f_1 = (1,-1,2)^t, f_2 = (3,0,1)^t, f_3 = (1,2,-1)^t\}$ şi $G = \{g_1 = (1,-2)^t, g_2 = (0,1)^t\}$.

Rezolvare:

a) Fie A matricea operatorului corespunzătoare reperelor canonice ale spaţiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R).

Vom folosi formula de reprezentare a operatorului în reperele canonice ale spaţiilor R^3 şi R^2:

$U(x) = A^t \cdot x$

Cum $U(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, rezultă $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Fie $A_{F,G}$ matricea operatorului corespunzătoare bazelor F şi G. Aflarea ei se poate face în două moduri.

Metoda I. Folosim definiţia 2 din breviarul teoretic.

$$U(f_1) = U\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}, \text{ deci } U(f_1)_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U(f_2) = U\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 = 7 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -7 \\ \alpha_2 = 12 \end{cases}, \text{ deci } U(f_2)_G = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$U(f_3) = U\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 = 3 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 6 \end{cases}, \text{ deci } U(f_3)_G = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Rezultă că $A_{F,G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Metoda II. Folosind formula de transformare a matricei unui operator liniar la schimbarea bazelor în care se reprezintă, avem că: $A_{F,G}^t = D^{-1} \cdot A^t \cdot C$, unde C este matricea de trecere de la baza canonică a spaţiului liniar (R^3, R) la baza F, iar D este matricea de trecere de la reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R) la reperul G. Avem: $C=\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&0&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$ şi $D=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}$,

deci $A_{F,G}^t=D^{-1}\cdot A^t\cdot C=\begin{pmatrix}0&-7&-3\\0&12&6\end{pmatrix}$ şi rezultă $A_{F,G}=\begin{pmatrix}0&0\\-7&12\\-3&6\end{pmatrix}$

3. Se consideră operatorul liniar $U:R^2\to R^3$, $U(x)=\begin{pmatrix}-x_1+2x_2\\2x_1-3x_2\\-3x_1+4x_2\end{pmatrix}$. Să se determine matricea operatorului corespunzătoare bazelor G = {g_1, g_2} şi E = {e_1, e_2, e_3}, unde $g_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, g_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ şi $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Avem: $U(g_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=e_1+0e_2-e_3$ şi $U(g_2)=\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}=4e_1-5e_2+6e_3$, deci matricea operatorului corespunzătoare bazelor G şi E este: $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\4&-5&6\end{pmatrix}$

4. Se consideră spaţiile liniare (R^3, R) şi (R^2, R) şi fie E = {e_1, e_2, e_3}, G = {g_1, g_2} bazele lor canonice. Fie U operatorul liniar U : $R^3\to R^2$, definit prin: $U(e_1) = 3g_1 - g_2$, $U(e_2) = -2g_1 - g_2$, $U(e_3) = -5g_2$. Să se determine:

a) matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice ale spaţiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R);

b) reprezentarea operatorului în bazele canonice ale spaţiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R);

c) matricea asociată operatorului în bazele F = {$-e_1 + 2e_2$, $e_2 - 3e_3$, $4e_1 + e_3$} şi G = {g_1, g_2}

d) matricea asociată operatorului în bazele F = {$-e_1 + 2e_2$, $e_2 - 3e_3$, $4e_1 + e_3$} şi H = {$3g_1 - g_2$, $-g_1 + 2g_2$}.

Rezolvare:

a) Vom folosi definiţia. Din ipoteză rezultă că $U(e_1)_G=(3,-1)^t$, $U(e_2)_G=(-2,-1)^t$, $U(e_3)_G=(0,-5)^t$,

deci matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice este $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&-1\\0&-5\end{pmatrix}$

b) Folosind rezultatul obţinut la punctul precedent, obţinem

$$U(x) = A^t x = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}$$

c) Notăm cu B matricea asociată operatorului liniar în bazele F şi G. Avem:
$U(f_1) = U(-e_1 + 2e_2) = -U(e_1) + 2U(e_2) = -(3g_1 - g_2) + 2(-2g_1 - g_2) = -7g_1 - 3g_2$ şi analog
$U(f_2) = -2g_1 + 14g_2$, $U(f_3) = 12g_1 - 9g_2$. De aici rezultă că:
$U(f_1)_G = (-7,-3)^t$, $U(f_2)_G = (-2,14)^t$, $U(f_3)_G = (12,-9)^t$. Prin urmare, matricea asociată operatorului liniar în bazele F şi G este: $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & 14 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}$

d) Fie C matricea asociată operatorului liniar în bazele F şi H. Avem: $U(f_1) = -7g_1 - 3g_2$, $U(f_2) = -2g_1 + 14g_2$, $U(f_3) = 12g_1 - 9g_2$. Trebuie să determinăm coordonatele vectorilor $U(f_1)$, $U(f_2)$, $U(f_3)$ în baza H.

Pentru aceasta, vom aplica metoda eliminării complete.

Baza	h_1	h_2	$U(f_1)$	$U(f_2)$	$U(f_3)$
g_1	3	$\boxed{-1}$	-7	-2	12
g_2	-1	2	-3	14	-9
h_2	-3	1	7	2	-12
g_2	$\boxed{5}$	0	-17	10	15
h_2	0	1	-16/5	8	-3
h_1	1	0	-17/5	2	3

Prin urmare, $U(f_1)_H = (-\frac{17}{5}, -\frac{16}{5})^t, U(f_2)_H = (2,8)^t, U(f_3)_H = (3,-3)^t$, de unde rezultă matricea

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{17}{5} & -\frac{16}{5} \\ 2 & 8 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Considerăm spaţiul vectorial (R^3, R) şi fie $E = \{e_1, e_2\}$ baza canonică a acestui spaţiu. Notăm cu U operatorul liniar

$U : R^2 \to R^3$, definit prin: $U(e_1) = (-1,2,-3)^t, U(e_2) = (2,-3,4)^t$. Să se determine:

a) matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice;

b) reprezentarea operatorului în bazele canonice ale spaţiilor liniare (R^2, R) şi (R^3, R).

Rezolvare:

a) Dacă notăm cu $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ baza canonică a spaţiului (R^3, R), rezultă că $U(e_1)_G = (-1,2,-3)^t, U(e_2)_G = (2,-3,4)^t$, de unde obţinem matricea operatorului în bazele canonice: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent, obţinem:

$$U(x) = A^t x = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ -3x \ + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

6. Considerăm spaţiul vectorial (R^3, R) şi fie $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a acestui spaţiu. Notăm cu U operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$, definit prin:
$U(e_1) = 2e_2 - 3e_3, U(e_2) = -e_1 - 3e_2,\ U(e_3) = 2e_1$.

Să se determine:

a) matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice;

b) reprezentarea operatorului în baza canonică a spaţiului liniar (R^3, R).

Rezolvare:

a) Vom folosi definiţia. Din ipoteză rezultă că

$U(e_1)_E = (0,2,-3)^t, U(e_2)_E = (-1,-3,0)^t, U(e_3)_E = (2,0,0)^t$. Prin urmare, matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice este: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Utilizând rezultatul obţinut la punctul precedent, obţinem:

$$U(x) = A^t x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

7. Se consideră operatorii liniari $U, V : R^2 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}, V(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$. Să se determine:

a) operatorii $U + V$ şi $U \circ V$;

b) matricele operatorilor calculaţi la punctul *a)*, corespunzătoare bazei canonice a spaţiului (R^2, R).

Rezolvare:

a) $(U+V)(x) = U(x) + V(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$.

$$(U \circ V)(x) = U(V(x)) = U\begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-x_1 + 4x_2) - (3x_1 - 5x_2) \\ -(-x_1 + 4x_2) + 3(3x_1 - 5x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 3x_2 \\ 10x_1 - 19x_2 \end{pmatrix}.$$

b) Metoda I. Folosind rezultatul obţinut la punctul *a)*, rezultă:

$A_{U+V} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ şi $A_{U \circ V} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 3 & -19 \end{pmatrix}$.

Metoda II. Fără a calcula $U + V$ şi $U \circ V$, utilizând formulele

$A_{U+V} = A_U + A_V$ şi $A_{U \circ V} = A_U \cdot A_V$, obţinem:

$$A_{U+V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \; A_{U \circ V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 3 & -19 \end{pmatrix}.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine care din următoarele aplicaţii defineşte un operator liniar:

a) $U: R^3 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$; *b)* $U: R^2 \to R^3$, $U(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 - 4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$;

c) $U: R^2 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$

R: Aplicaţia de la punctul *c)* defineşte un operator liniar.

2. Se consideră operatorul liniar $U: R^2 \to R^3$, $U(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Să se determine:

a) matricea operatorului corespunzătoare bazelor canonice ale spaţiilor R^2 şi R^3**;**

b) matricea operatorului corespunzătoare bazelor $F = \{f_1 = (-1,2)^t,\ f_2 = (-2,1)^t\}$ şi $G = \{g_1 = (-1,0,2)^t,\ g_2 = (2,0,1)^t,\ g_3 = (1,1,0)^t\}$.

R: *a)* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; *b)* $A_{F,G} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} & -\frac{13}{5} & 5 \\ \frac{11}{5} & -\frac{17}{5} & 4 \end{pmatrix}$

3. Se consideră operatorul liniar $U: R^3 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

Să se determine matricea operatorului corespunzătoare bazelor $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ şi $E = \{e_1, e_2\}$,

unde $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **R:** $A_{G,E} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Se consideră spaţiile liniare (R^3, R) şi (R^2, R) şi fie $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $G = \{g_1, g_2\}$ bazele lor canonice. Notăm cu U operatorul liniar $U : R^3 \to R^2$, definit prin: $U(e_1) = -g_1 + 2g_2$, $U(e_2) = 2g_1 - 3g_2$, $U(e_3) = 2g_1$. Să se afle:

a) matricea asociată operatorului liniar în reperele canonice;

b) reprezentarea operatorului în reperele canonice ale spaţiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R);

c) matricea asociată operatorului liniar în reperele $F = \{2e_1 + 3e_2, 3e_1 - 2e_3, e_1 + e_2\}$ şi $G = \{g_1, g_2\}$;

c) matricea asociată operatorului liniar în reperele $F = \{e_1 - 3e_2, 2e_2 + 3e_3, e_1 - 2e_3\}$ şi $H = \{g_1 - 2g_2, -2g_1 + g_3\}$.

5. Fie spaţiul vectorial (R^3, R) şi fie $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a acestui spaţiu. Notăm cu U operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$, definit prin: $U(e_1) = -3e_1 + e_2$, $U(e_2) = -e_1 + 2e_2$, $U(e_3) = e_1$. Să se determine:

a) matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice;

b) reprezentarea operatorului în baza canonică a spaţiului liniar (R^3, R).

6. Se consideră operatorii liniari U, $V : R^3 \to R^3$,

$U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, $V(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$. Să se determine:

a) operatorii $U + V$ şi $U \circ V$;

b) matricele operatorilor calculaţi la punctul *a)*, corespunzătoare bazei canonice din (R^3, R).

R: *a)* $(U+V)(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 - 5x_3 \\ -6x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$; $(U \circ V)(x) = \begin{pmatrix} -12x_1 + 11x_2 - 7x_3 \\ 16x_1 - 16x_2 + 11x_3 \\ -5x_1 + 16x_2 - 10x_3 \end{pmatrix}$;

b) $A_{U+V} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{U \circ V} = \begin{pmatrix} -12 & 16 & -5 \\ 11 & -16 & 16 \\ -7 & 11 & -10 \end{pmatrix}$

3.2. Nucleul şi imaginea unui operator liniar. Injectivitatea, surjectivitatea şi inversabilitatea unui operator liniar

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii vectoriale de dimensiune finită şi $U : X \to Y$ un operator liniar.

Se numeşte *nucleul operatorului* U şi se notează $KerU$ mulţimea: $KerU = \{x\in X \,/\, U(x) = 0_Y\}$.

Definiţia 2. Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii vectoriale de dimensiune finită şi $U : X \to Y$ un operator liniar.

Se numeşte *imaginea operatorului* U şi se notează ImU mulţimea: $ImU = \{y\in Y \,/\, \exists\, x\in X$ a.î. $U(x) = y\}$.

Definiţia 3. Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii vectoriale de dimensiune finită şi $U : X \to Y$ un operator liniar. Operatorul U se numeşte *injectiv*, respectiv *surjectiv*, dacă acesta este o funcţie injectivă, respectiv surjectivă.

Propoziţia 1. Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii vectoriale de dimensiune finită şi $U : X \to Y$ un operator liniar.

Operatorul U este injectiv dacă şi numai dacă $KerU = \{0_X\}$.

Propoziţia 2. Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii vectoriale de dimensiune finită şi $U : X \to Y$ un operator liniar.

Operatorul U este surjectiv dacă şi numai dacă $Im\,U = Y$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie operatorul liniar $U : R^3 \to R^4$, $U(x) = (2x_1, 0, x_2 - x_3, - x_1)^t$. Să se determine:

a) nucleul operatorului şi dimensiunea nucleului;

b) imaginea operatorului şi dimensiunea imaginii.

Rezolvare:

a) Nucleul operatorului este: $KerU = \{x \in R^3 / U(x) = 0\}$. Rezolvăm ecuaţia $U(x) = 0$ şi obţinem sistemul: $\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = a, a \in R \end{cases} \Rightarrow KerU = \{(0, a, a)^t / a \in R\}$

Pentru a determina dim$KerU$, trebuie să găsim un sistem de generatori ai spaţiului dim$KerU$, care să fie liniar independent. Avem: $x \in Ker\ U \Rightarrow x = (0,a,a)^t = a(0,1,1)^t$.

Fie $g_1 = (0,1,1)^t$; $\{g_1\}$ este sistem de generatori pentru spaţiul $KerU$ şi sistem de vectori liniar independent, deci formează o bază a acestui spaţiu, prin urmare dim $KerU = 1$.

b) Imaginea operatorului este mulţimea $ImU = \{y \in R^4 / \exists\, x \in R^3$ a.î. $U(x) = y\}$.

$ImU=\{(2x_1,0,x_2\text{-}x_3,\text{-}\ x_1)^t/x_1,\ x_2\text{-}x_3\in R\}=\{x_1(2,0,0,\text{-}1)^t+(x_2\text{-}\ x_3)(0,0,1,0)^t/x_1,\ x_2\text{-}\ x_3\in R\}=\{a(2,0,0,\text{-}1)^t+b(0,0,1,0)^t a,b\in R\}$

Determinăm dimImU. Fie $g_1 = (2,0,0,-1)^t$ şi $g_2 = (0,0,1,0)^t$; $\{g_1, g_2\}$ este sistem de vectori liniar independent şi sistem de generatori pentru spaţiul ImU, deci formează o bază a acestui spaţiu; rezultă dim$ImU = 2$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ matricea asociată unui operator liniar $U : R^3 \to R^3$.

Să se determine: *a)* $KerU$; *b)* ImU; *c)* dim$KerU$; *d)* dimImU.

Rezolvare:

a) $KerU = \{x \in R^3 / U(x) = 0\}; U(x) = 0 \Rightarrow A^t x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

deteminantul matricei sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$; alegem minorul principal

$d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$ şi rezultă soluţia sistemului: $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{11} a \\ x_2 = \frac{9}{11} a \\ x_3 = a \end{cases}$, $a \in R$, deci

$KerU = \left\{\left(\frac{5}{11} a,\ \frac{9}{11} a,\ a\right)^t / a \in R\right\}$.

b) Dacă $x \in Ker\ U$, atunci $x = (5a/11, 9a/11, 1)^t = a\,(5/11, 9/11, 1)^t$, $a \in R$

Fie $g_1 = (5/11, 9/11, 1)^t$; $\{g_1\}$ este sistem de generatori pentru spaţiul $KerU$ şi sistem de vectori liniar independent, deci formează o bază a acestui spaţiu; prin urmare, $\dim KerU = 1$.

c) $ImU = \{ y \in R^3 \,/\, \exists\, x \in R^3$ a. î. $U(x) = y\}$; $U(x) = y \iff \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = y_1 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_3 \end{cases}$;

trebuie determinat $y \in R^3$ astfel încât sistemul să fie compatibil.

Considerând minorul principal al matricei sistemului: $d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă $rangA = 2$.

Condiţia de compatibilitate a sistemului este:

$$d_{car} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & y_1 \\ 5 & -4 & y_2 \\ 3 & 2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \iff 22y_1 + 11y_2 - 11y_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta \\ y_3 = 2\alpha + \beta \end{cases} ;\alpha, \beta \in R$$

Rezultă $ImU = \{(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta)^t \,/\, \alpha, \beta \in R\} = \{\alpha\,(1,0,2)^t + \beta\,(0,1,1)^t \,/\, \alpha, \beta \in R\}$.

d) Fie $g_1 = (1,0,2)^t$ şi $g_2 = (0,1,1)^t$; $\{g_1, g_2\}$ este sistem de vectori liniar independent şi sistem de generatori pentru spaţiul ImU, deci formează o bază a acestui spaţiu. Prin urmare, $\dim ImU = 2$.

3. Fie operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$, $U(x) = (-x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_3, x_2 - x_3)^t$.

a) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea operatorului liniar U;

b) Să se studieze inversabilitatea operatorului şi dacă este inversabil să se calculeze U^{-1}

Rezolvare:

a) U este injectiv dacă şi numai dacă $KerU = \{0\}$. Avem:

$U(x) = 0 \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 6x_2 + x_2 = 0 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow KerU = \{0\}$, deci U este injectiv.

U este surjectiv dacă şi numai dacă $ImU = R^3$; $ImU = \{ y \in R^3 \,/\, \exists\, x \in R^3$ a. î. $U(x) = y\}$.

$U(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+2x_2=y_1 \\ 3x_1+x_3=y_2 \\ x_2-x_3=y_3 \end{cases}$; $\exists\ x \in R^3$ astfel încât $U(x) = y$ dacă şi numai dacă sistemul este compatibil; deteminantul sistemului $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists x \in R^3 : U(x)=y, \forall y \in R^3 \Rightarrow \operatorname{Im} U = R^3$,

deci U surjectiv.

b) Deoarece U este injectiv şi surjectiv, rezultă că U este bijectiv, deci inversabil. Determinăm U^{-1}:

$$U(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+2x_2=y_1 \\ 3x_1+x_3=y_2 \\ x_2-x_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-y_1+2y_2+2y_3}{7} \\ x_2=\frac{3y_1+y_2+y_3}{7} \\ x_3=\frac{3y_1+y_2-6y_3}{7} \end{cases} \Rightarrow U^{-1}(x)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7}x_1+\frac{2}{7}x_2+\frac{2}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1+\frac{1}{7}x_2+\frac{1}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1+\frac{1}{7}x_2-\frac{6}{7}x_3 \end{pmatrix}$$

PROBLEME PROPUSE

1. Fie operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$. Să se afle $KerU$, ImU, dim$KerU$, dimImU dacă:

a) $U(x) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)^t$; *b)* $U(x) = (x_2, x_1, x_3)^t$; *c)* $U(x) = (2x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 -2x_3)^t$.

R: *a)* $Ker\ U = \{(0,-\alpha,\alpha)^t \,/\, \alpha \in R\}$; dim$KerU$ = 1; $ImU = \{(\alpha,\beta,\alpha+\beta)^t \,/\, \alpha, \beta \in R\}$; dim$ImU$ = 2;

b) $KerU = \{0\}$; dim$Ker\ U = 0$; $ImU = R^3$; dim$ImU = 3$;

c) $Ker\ U = \{(\alpha/3, 5\alpha/3, \alpha)^t / \alpha \in R\}$; dim$KerU$ = 1; $ImU = \{(\alpha,0,\beta)^t/\alpha, \beta \in R\}$; dim$ImU$ = 2.

2. Se consideră operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$. În fiecare din cazurile *a)* , *b)*, *c)* se cere:

1) să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea operatorului U.

2) să se studieze dacă operatorul este inversabil şi în caz afirmativ să se calculeze inversa.

a) $U(x) = (3x_1+ 4x_2+ x_3, x_1 - 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_3)^t$; *b)* $U(x) = (x_1+ 2x_2+ x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3, - x_1 - 2x_2)^t$;

c) $U(x) = (2x_1- x_2+ 2x_3, - x_1 + 3x_2 + 2x_3, - x_1 + x_2)^t$. **R:** *a)* nu este injectiv, nu este surjectiv;

b) este bijectiv; $U^{-1}(x)=\begin{pmatrix} 4x_1-2x_2+x_3 \\ -2x_1+x_2-x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$; *c)* este bijectiv; $U^{-1}(x)=\begin{pmatrix} -x_1+x_2-4x_3 \\ -x_1+x_2-3x_3 \\ x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3 \end{pmatrix}$

3.3. Vectori proprii şi valori proprii

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (X, K) un spaţiu vectorial şi $U : X \to Y$ un operator liniar cu reprezentarea $U(x) = A \cdot x$.

Vectorul $x \in X,\ x \neq 0$ se numeşte *vector propriu* al operatorului U dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $U(x) = \lambda x$;

în acest caz, λ se numeşte *valoare proprie* a operatorului U şi se spune că x este *vector propriu corespunzător valorii proprii* λ.

Definiţia 2. Fie (X, K) un spaţiu vectorial, $U : X \to Y$ un operator liniar şi λ o valoare proprie a operatorului U. Mulţimea $X_\lambda = \{x \in X / U(x) = \lambda x\}$ se numeşte *subspaţiul propriu* asociat valorii proprii λ.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie operatorul liniar $U : R^3 \to R^3,\ U(x) = (x_1 + 3x_2 - 4x_3,\ -2x_2 + 5x_3,\ 3x_3)^t$.

Să se determine valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare acestui operator.

Rezolvare:

Din relaţia $U(x) = A^t x$ vom determina matricea operatorului în baza canonică a spaţiului (R^3, R):

$$U(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^t x \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- Determinăm valorile proprii ale operatorului, rezolvând ecuaţia caracteristică:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -4 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1;\ \ \lambda_2 = -2;\ \ \lambda_3 = 3$$

- Determinăm vectorii proprii corespunzători fiecărei valori proprii, rezolvând ecuaţia matriceală $A^t \cdot x = \lambda \cdot x$, cu $x \neq 0$.

Pentru $\lambda_1 = 1$ obţinem $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = x_1 \\ -2x_2 + 5x_3 = x_2 \\ 3x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = a,\ a \in R \setminus \{0\}.$

Prin urmare, mulţimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este:
$V_1 = \{(a,0,0)^t \,/\, a \in R \setminus \{0\}\}.$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este: $X_1 = \{(a,0,0)^t \,/\, a \in R\}.$

Pentru $\lambda_2 = -2$ obţinem $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2x_1 \\ -2x_2 + 5x_3 = -2x_2 \\ 3x_3 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = a,\ x_1 = -a,\ a \in R \setminus \{0\}.$

Prin urmare mulţimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este:
$V_{-2} = \{(-a,a,0)^t \,/\, a \in R \setminus \{0\}\}.$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este: $X_{-2} = \{(-a,a,0)^t \,/\, a \in R\}.$

Pentru $\lambda_3 = 3$ obţinem $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3x_1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 3x_2 \\ 3x_3 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = a,\ x_2 = a,\ x_1 = -\frac{a}{2},\ a \in R \setminus \{0\}.$

Prin urmare, mulţimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 3$ este:
$V_3 = \{(-\frac{a}{2}, a, a)^t \,/\, a \in R \setminus \{0\}\}.$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii este: $X_3 = \left\{\left(-\frac{a}{2}, a, a\right)^t \,/\, a \in R\right\}.$

2. Fie $U : R^3 \to R^3$ un operator liniar care are matricea corespunzătoare bazelor canonice

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 6 \\ -24 & -19 & -12 \\ 12 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Să se determine valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare acestui operator.

Rezolvare:

- Determinăm valorile proprii ale operatorului, rezolvând ecuaţia caracteristică:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 13-\lambda & 10 & 6 \\ -24 & -19-\lambda & -12 \\ 12 & 10 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Adunând toate liniile la prima, obţinem:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -24 & -19-\lambda & -12 \\ 12 & 10 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -24 & -19-\lambda & -12 \\ 12 & 10 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1;\ \ \lambda_3=-1.$$

- Determinăm vectorii proprii corespunzători fiecărei valori proprii, rezolvând ecuaţia matriceală $A^t \cdot x = \lambda \cdot x$, cu $x \neq 0$.

Pentru $\lambda_1 = 1$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 13 & -24 & 12 \\ 10 & -19 & 10 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 13x_1-24x_2+12x_3=x_1 \\ 10x_1-19x_2+10x_3=x_2 \\ 6x_1-12x_2+\ 7x_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x_1-24x_2+12x_3=0 \\ 10x_1-20x_2+10x_3=0 \\ 6x_1-12x_2+\ 6x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=2b-a;\ \ a,b\in R,\ a^2+b^2\neq 0.$$

Rezultă că mulţimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este:

$$V_1=\left\{(a,b,2b-a)^t \,/\, a,b\in R, a^2+b^2\neq 0\right\}.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este $X_1=\left\{(a,b,2b-a)^t \,/\, a,b\in R\right\}$

Pentru $\lambda_2 = -1$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 13 & -24 & 12 \\ 10 & -19 & 10 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 13x_1-24x_2+12x_3=-x_1 \\ 10x_1-19x_2+10x_3=-x_2 \\ 6x_1-12x_2+\ 7x_3=-x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x_1-24x_2+12x_3=0 \\ 10x_1-18x_2+10x_3=0 \\ 6x_1-12x_2+\ 8x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1-12x_2+6x_3=0 \\ 5x_1\ -9x_2+5x_3=0 \\ 3x_1\ -6x_2+4x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=2a,\ x_2=\tfrac{5}{3}a,\ x_3=a;\ \ a\in R\setminus\{0\}.$$

Prin urmare, mulţimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este:

$$V_{-1}=\left\{\left(2a,\tfrac{5}{3}a,a\right)^t \,/\, a\in R\setminus\{0\}\right\}.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este $X_{-1}=\left\{\left(2a,\tfrac{5}{3}a,a\right)^t \,/\, a\in R\right\}$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$:

a) $U(x) = (x_2, x_2 + 2x_3, -x_3)^t$

b) $U(x) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2)^t$

c) $U(x) = (-x_3, -x_2, -x_1)^t$

R: *a)* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$; $V_{-1} = \{(a, -a, a)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$; $V_0 = \{(a, 0, 0)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$; $V_1 = \{(a, a, 0)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$;

b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$; $V_0 = \{(-a, -a, a)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$;

$V_1 = \{(a, a, 0)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$; $V_3 = \{(-a, 2a, a)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$;

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$; $V_{-1} = \{(a, b, a)^t / a, b \in R,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$; $V_1 = \{(-a, 0, a)^t / a \in R \setminus \{0\}\}$.

2. Să se calculeze valorile proprii şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar $U : R^3 \to R^3$ care are ca matrice corespunzătoare bazelor canonice matricea:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; *b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; *c)* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

R: *a)* $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$; $X_{-2} = \{(-\frac{10}{9}a, \frac{40}{9}a, a)^t / a \in R\}$;

$X_{-1} = \{(0, \frac{9}{2}a, a)^t / a \in R\}$; $X_8 = \{(0, 0, a)^t / a \in R\}$;

b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$; $X_1 = \{(0, a, a)^t / a \in R\}$; $X_2 = \{(a, a, 2a)^t / a \in R\}$;

c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$; $X_0 = \{(-a, 0, a)^t / a \in R\}$; $X_1 = \{(a, a, a)^t / a \in R\}$; $X_2 = \{(a, 2a, a)^t / a \in R\}$.

4. FUNCȚIONALE LINIARE, BILINIARE ȘI PĂTRATICE

4.1. Funcționale liniare

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (X, K) un spaţiu vectorial de dimensiune finită.

O aplicaţie $f : X\to K$ se numeşte *funcţională liniară* dacă:

(1) f este *aditivă*, adică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y\in X$;

(2) f este *omogenă*, adică $f(\alpha x)=\alpha f(x)$, $\forall\, \alpha \in K$, $\forall x\in X$.

Observaţie. Cele două condiţii pot fi înlocuite prin:

(3) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\forall\ x, y \in X$.

Definiţia 2. Fie (X, K) un spaţiu liniar de dimensiune n, $f : X\to K$ o funcţională liniară şi $G =\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un reper al spaţiului liniar (X, K). Notăm $a_i = f(g_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Matricea $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$ se numeşte *matricea funcţionalei liniare f corespunzătoare reperului G*.

Formula de reprezentare a funcţionalei liniare f în reperul G este:

$$f(x)= A^T \cdot x_G,\ \forall x\in X$$

Dacă G este reperul canonic al spaţiului liniar (X, K), atunci *formula de reprezentare a funcţionalei liniare f* este:

$$f(x)= A^T \cdot x,\ \forall x\in X$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Stabiliţi dacă următoarele aplicaţii sunt funcţionale liniare şi în caz afirmativ scrieţi vectorul ataşat funcţionalei în reperul canonic al spaţiului liniar (R^3, R) şi în reperul $G = \{g_1 = (3, 3, 1)^t, g_2 = (3, 1, 3)^t, g_3 = (1, 3, 3)^t\}$.

a) $f : R^3 \to R,\ f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$;

b) $f : R^3 \to R,\ f(x) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 1$.

Rezolvare:

a) f este funcţională liniară dacă $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ \forall \alpha, \beta \in R,\ \forall x, y \in R^3$.

Fie $x, y \in R^3$ şi $\alpha, \beta \in R \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^t,\ y = (y_1, y_2, y_3)^t$. Avem:

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha(x_1, x_2, x_3)^t + \beta(y_1, y_2, y_3)^t) = f((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)^t) = 3(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) +$

$+ 2(\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(3x_1 - x_2 + 2x_3) + \beta(3y_1 - y_2 + 2y_3) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, prin urmare f este funcţională liniară.

Vectorul ataşat funcţionalei în baza canonică a spaţiului (R^3,R) este format din coeficienţii funcţionalei: $A=(3,-1,2)^t$

Vectorul ataşat funcţionalei f în baza $G =\{g_1, g_2, g_3\}$ este $B = (f(g_1), f(g_2), f(g_3))^t$.

Avem: $f(g_1) = f(3,3,1) = 8$; $f(g_2) = f(3,1,3) = 14$; $f(g_3) = f(1,3,3) = 6$, prin urmare $B=(8,14,6)^t$.

b) Fie $x, y \in R^3$ şi $\alpha, \beta \in R$.

Avem: $f(\alpha x + \beta y) = f((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)^t) = (\alpha x_1 + \beta y_1) - 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + 4(\alpha x_3 + \beta y_3) + 1$ şi

$\alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha x_1 - 2\alpha x_2 + 4\alpha x_3 + \beta y_1 - 2\beta y_2 + 4\beta y_3 + \alpha + \beta$, prin urmare $f(\alpha x + \beta y) \neq \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Rezultă că f nu este funcţională liniară.

2. Arătaţi că aplicaţia $f : R_2[X] \to R,\ \ f(P) = \int_0^1 P(x)dx$ este funcţională liniară şi scrieţi matricea acesteia în reperul canonic al spaţiului liniar $(R_2[X], R)$ şi în baza $G = \{g_1 = 1-X, g_2 = 3X + X^2, g_3 = 2+3X^2\}$.

Rezolvare:

f este funcţională liniară dacă $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$, $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall P, Q \in R_2[X]$.

Avem: $f(\alpha P + \beta Q) = \int_0^1 (\alpha P + \beta Q)(x)dx = \alpha \int_0^1 P(x)dx + \beta \int_0^1 Q(x)dx = \alpha f(P) + \beta f(Q)$,

prin urmare f este funcţională liniară.

Reperul canonic al spaţiului liniar $(R_2[X], R)$ este $E = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$.

Matricea funcţionalei în reperul E este: $A = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))^t$.

Avem: $f(e_1) = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$; $f(e_2) = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$; $f(e_3) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$;

prin urmare, vectorul ataşat funcţionalei în reperul canonic este $A = \left(1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}\right)^t$.

Vectorul ataşat funcţionalei f în reperul G este $B = (f(g_1), f(g_2), f(g_3))^t$ şi se obţine $B = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{11}{6}, \ 3\right)^t$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se stabilească dacă următoarele aplicaţii sunt funcţionale liniare şi în caz afirmativ să se scrie matricea fiecărei funcţionale liniare în reperul canonic al spaţiului liniar (V,K) şi în reperul G:

a) $f : R^3 \to R$, $f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$; $G = \{g_1 = (1,1,1)^t, g_2 = (0,1,3)^t, g_3 = (1,3,0)^t\}$, $(V, K) = (R^3, R)$;

b) $f : R^3 \to R$, $f(x) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2$; $G = \{g_1 = (2,1,1)^t, g_2 = (0,1,2)^t, g_3 = (1,2,0)^t\}$, $(V, K) = (R^3, R)$;

c) $f : R^4 \to R$, $f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4$; $G = \{g_1 = (1,1,1,1)^t, g_2 = (1,2,3,4)^t, g_3 = (1,4,9,16)^t, g_4 = (1,8,27,64)^t\}$, $(V, K) = (R^3, R)$;

d) $f : R^2 \to R$, $f(x) = x_1 - 2x_2 + 1$; $G = \{g_1 = (2,1)^t, g_2 = (1,2)^t\}$, $(V, K) = (R^2, R)$.

R: *a)* f este funcţională liniară; matricea ei în reperul canonic este $A = (3, -1, 2)^t$, iar în reperul G este $B = (4, 5, 0)^t$

2. Să se arate că aplicaţia $f : R_n\ [X] \to R,\ \ f(P) = P(2)$ este o funcţională liniară şi să se determine matricea funcţionalei în reperul

$$G = \left\{ g_1 = 1,\ g_2 = X - 1,\ g_3 = \frac{(X-1)^2}{2!}, \ldots\ldots, g_n = \frac{(X-1)^n}{n!} \right\}.$$

R: Matricea funcţionalei în reperul G este $A = \left(1,\ 1,\ \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots\ldots, \frac{1}{n!}\right)^t$

3. Să se determine funcţionala liniară $f : R^3 \to R$, ştiind că $f(1, 0, 2) = 3$, $f(2, 1, 0) = 6$, $f(0, 2, 1) = 9$.

R: Se caută f de forma $f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3$, unde $a, b, c \in R$ şi se găseşte $f(x) = x_1 + 4x_2 + x_3$.

4. Să se arate că aplicaţia $f : R_3[X] \to R,\ f(P) = \int_0^1 P'(x)dx$ este funcţională liniară şi să se scrie matricea funcţionalei în reperul canonic al spaţiului liniar $(R_3[X], R)$ şi în reperul $G = \{g_1 = 1 - X,\ g_2 = 3X + X^3,\ g_3 = 2X + 3X^2,\ g_4 = 1\}$.

4.2. Funcționale biliniare

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (X, K) şi (Y, K) două spaţii liniare având dimensiuni finite. O aplicaţie $f : X \times Y \to K$ se numeşte *funcţională biliniară* dacă este liniară în raport cu fiecare argument, adică:

(1) $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X, \forall z \in Y$;

(2) $f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X, \forall y, z \in Y$.

Definiţia 2. Fie (X, K) un spaţiu liniar de dimensiune m, (Y, K) un spaţiu liniar de dimensiune n, $f : X \times Y \to K$ o funcţională biliniară, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ un reper al spaţiului liniar (X, K) şi $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un reper al spaţiului liniar (Y, K). Notăm $a_{ij} = f(e_i, g_j),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ se numeşte *matricea funcţionalei biliniare corespunzătoare reperelor E şi G*

$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ este *formula de reprezentare a funcţionalei biliniare f în raport cu reperele E şi G*

$f(x, y) = [x]_E^T \cdot A \cdot [y]_G$ este *formula de reprezentare matriceală a funcţionalei biliniare în raport cu reperele* E şi G

Dacă F şi G sunt reperele canonice ale spaţiilor (X, K) şi (Y, K), atunci reprezentarea funcţionalei biliniare f este:

$$f(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$$

Modificarea matricei unei funcţionale biliniare la schimbarea bazelor în care se reprezintă

În condiţiile definiţiei 2, fie A matricea ataşată funcţionalei biliniare în bazele E şi G şi B matricea ataşată funcţionalei biliniare în bazele F şi H.

Fie C matricea de trecere de la baza E la baza F şi D matricea de trecere de la baza G la baza H.

Atunci formula de transformare a matricei funcţionalei biliniare la schimbarea bazelor în care se reprezintă este:

$$B = C^T \cdot A \cdot D$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră aplicaţia $f : R^2 \times R^3 \to R$, $f(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_3$.

a) Să se arate că f este funcţională biliniară.

b) Să se scrie matricea funcţionalei corespunzătoare reperelor canonice ale spaţiilor liniare (R^2, R) şi (R^3, R).

c) Să se scrie matricea funcţionalei corespunzătoare

$E = \{e_1 = (1,2), e_2 = (3,4)\}$ şi $G = \{g_1 = (3,1,1), g_2 = (1,3,1), g_3 = (1,1,3)\}$.

Rezolvare:

a) f este funcţională biliniară dacă este liniară în fiecare argument, adică:

1) $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$, $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall x, y \in R^2$, $\forall z \in R^3$;

2) $f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$, $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall x \in R^2$, $\forall y, z \in R^3$.

Fie $\alpha, \beta \in R$. Avem:

1) $f(\alpha x + \beta y, z) = f(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2), (z_1, z_2, z_3)) = f((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2, z_3)) =$
$= 2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 - (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + 3(\alpha x_2 + \beta y_2)z_3 = \alpha(2x_1z_1 - x_1z_2 + 3x_2z_3) +$
$+ \beta(2y_1z_1 - y_1z_2 + 3y_2z_3) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z).$

2) $f(x, \alpha y + \beta z) = f((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2, y_3) + \beta(z_1, z_2, z_3)) =$
$= f((x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2, \alpha y_3 + \beta z_3)) =$
$= 2x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) - x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) + 3x_2(\alpha y_3 + \beta z_3) =$
$= \alpha(2x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_3) + \beta(2x_1z_1 - x_1z_2 + x_2z_3) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$.

Din 1) şi 2) rezultă că f este funcţională biliniară.

b) Din formula de reprezentare a funcţionalei rezultă că matricea funcţionalei în bazele canonice ale spaţiilor liniare (R^2, R) şi (R^3, R) este: $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,2} \\ j=\overline{1,3}}}$, unde a_{ij} este coeficientul lui $x_i y_j$, deci $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) Metoda I. Matricea funcţionalei f corespunzătoare bazelor E şi G este $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,2} \\ j=\overline{1,3}}}$,

unde $b_{ij} = f(e_i, g_j)$. Obţinem: $b_{11} = f(e_1, g_1) = f((1,2)^t, (3,1,1)^t) = 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11$;

$b_{12} = f(e_1, g_2) = f((1,2)^t, (1,3,1)^t) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5$; $b_{13} = 19$, $b_{21} = 27$, $b_{22} = 9$, $b_{23} = 39$, prin urmare $B=\begin{pmatrix} 11 & 5 & 19 \\ 27 & 9 & 39 \end{pmatrix}$.

Metoda II. Folosim formula de transformare a matricei funcţionalei la schimbarea bazelor: $B = C^t \cdot A \cdot D$

Matricea de trecere de la baza canonică a spaţiului (R^2, R) la baza E este $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, iar matricea de trecere de la baza canonică a spaţiului (R^3, R) la baza G este $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Rezultă

$$B=C^t\cdot A\cdot D=\begin{pmatrix} 11 & 5 & 19 \\ 27 & 9 & 39 \end{pmatrix}$$

2. Fie aplicaţia $f: R_2[X]\times R_2[X]\to R,\ f(P,Q)=\int_0^1 P'(x)Q'(x)dx$

a) Să se arate că f este o funcţională biliniară simetrică.

b) Să se scrie matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului $R_2[X]$.

c) Să se scrie matricea funcţionalei în baza $G=\{g_1=1-3X, g_2=2+X^2, g_3=4X-X^2\}$ a spaţiului $R_2[X]$.

Rezolvare:

a) Trebuie să arătăm că :

1) $f(\alpha P+\beta Q,T)=\alpha f(P,T)+\beta f(Q,T), \forall\alpha,\beta\in R, \forall P,Q,T\in R_2[X]$;

2) $f(P,\alpha Q+\beta T)=\alpha f(P,T)+\beta f(Q,T), \forall\alpha,\beta\in R, \forall P,Q,T\in R_2[X]$;

3) $f(P,Q)=f(Q,P), \forall P,Q\in R_2[X]$.

1) Fie $\alpha,\beta\in R$. Avem: $f(\alpha P+\beta Q,T)=\int_0^1(\alpha P+\beta Q)'(x)T'(x)dx=$

$$=\alpha\int_0^1 P'(x)T'(x)dx+\beta\int_0^1 Q'(x)T'(x)dx=\alpha f(P,T)+\beta f(Q,T).$$

Analog se arată 2) şi în concluzie rezultă că f este funcţională biliniară.

3) Fie $P,Q\in R_2[X]$. Avem că $f(P,Q)=\int_0^1 P'(x)Q'(x)dx=\int_0^1 Q'(x)P'(x)dx=f(Q,P)$,

prin urmare f este funcţională biliniară simetrică.

b) Baza canonică a spaţiului $R_2[X]$ este $E = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$.

Matricea funcţionalei f în baza E este $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde. $a_{ij} = f(e_i, e_j), i, j = \overline{1,3}$

Avem: $a_{11} = f(e_1, e_1) = f(1,1) = \int_0^1 1' \cdot 1' dx = 0$; analog, $a_{22} = 1;\ a_{33} = \frac{4}{3}$.

Deoarece f este o funcţională biliniară simetrică, rezultă că matricea A este simetrică în raport cu diagonala principală, prin urmare $a_{12} = a_{21} = f(e_1, e_2) = \int_0^1 1' \cdot x' dx = 0$;

$a_{13} = a_{31} = 0;\ a_{23} = a_{32} = \int_0^1 1 \cdot 2x dx = 1$, deci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) *Metoda I.* Fie B matricea ataşată funcţionalei biliniare în baza G. Atunci $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $b_{ij} = f(g_i, g_j),\ i, j = \overline{1,3}$. Avem:

$$b_{11} = f(g_1, g_1) = f(1-3X, 1-3X) = \int_0^1 (1-3x)' \cdot (1-3x)' dx = 9$$

Analog obţinem: $b_{22} = \frac{4}{3};\ b_{33} = \frac{28}{3};\ b_{12} = b_{21} = -3;\ b_{13} = b_{31} = -9;\ b_{23} = b_{32} = 4$,

prin urmare $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -9 \\ -3 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ -9 & \frac{8}{3} & \frac{28}{3} \end{pmatrix}$.

Metoda II. Fie C matricea de trecere de la baza canonică a spaţiului $R_2[X]$ la baza G. Folosim formula de transformare a matricei funcţionalei la schimbarea bazei în care se reprezintă: $B = C^t \cdot A \cdot C$. Avem:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -9 \\ -3 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ -9 & \frac{8}{3} & \frac{28}{3} \end{pmatrix}$$

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră aplicaţia $f: R^3 \times R^2 \to R,\ f(x,y) = 2x_1y_2 - 5x_2y_2 + 3x_3y_1$.

a) Să se arate că f este funcţională biliniară.

b) Să se scrie matricea funcţionalei în bazele canonice ale spaţiilor (R^2, R) şi (R^3, R).

c) Să se scrie matricea funcţionalei în bazele

$E = \{e_1 = (0,1,1)^t,\ e_2 = (1,0,1)^t, e_3 = (1,1,2)^t\}$ şi $G = \{g_1 = (1,0)^t,\ g_2 = (3,1)^t\}$

R: *b)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; *c)* $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 11 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$.

2. Fie aplicaţia $f: R^3 \times R^3 \to R,\ f(x,y) = 3x_1y_2 + x_3y_2 - 4x_2y_3$.

a) Să se arate că f este funcţională biliniară.

b) Să se scrie matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului (R^3, R).

c) Să se scrie matricea funcţionalei în baza $G = \{g_1 = (0,1,2)^t, g_2 = (1,3,1)^t, g_3 = (3,1,2)^t\}$

R: *b)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; *c)* $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -6 \\ -20 & 0 & -20 \\ 3 & 29 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Fie aplicaţia $f: R_3[X] \times R_3[X] \to R,\ f(P,Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx$

a) Să se arate că f este o funcţională biliniară simetrică.

b) Să se scrie matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului liniar $(R_3[X], R)$.

c) Să se scrie matricea funcţionalei în baza

$G = \{g_1 = 1 - 3X, g_2 = 2 - X + X^3, g_3 = 4X - X^2, g_4 = 1\}$

4. Fie aplicaţia $f: R_2[X] \times R_2[X] \to R,\ f(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)dx$

a) Să se arate că f este funcţională biliniară.

b) Să se scrie matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului liniar $(R_2[X], R)$.

c) Să se scrie matricea funcţionalei în baza $G = \{3 - 5X,\ 2 + X - 2X^2,\ 4X - X^2\}$

5. Fie aplicaţia $f: R_2[X] \times R_3[X] \to R,\ f(P,Q) = 3P(1)Q(0)$.

a) Să se arate că f este o funcţională biliniară.

b) Să se scrie matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului liniar $(R_2[X], R)$.

c) Să se scrie matricea funcţionalei în bazele

$G = \{2 - X^2, 1 + 4X - X^2, 3X - X^2\}$ şi $H = \{2 + X,\ 1 - X + X^3,\ 4X - X^2,\ 1\}$.

4.3. Funcționale pătratice

BREVIAR TEORETIC

Definiţia 1. Fie (X, K) spaţiu liniar, unde $K = R$ sau $K = C$. Fie $f : X \times X \to K$ o funcţională biliniară simetrică.

Se numeşte *diagonala produsului cartezian* $X \times X$ mulţimea diag $(X \times X) = \{(x,x) | \, x \in X\}$.

Restricţia funcţionalei f la diag $(X \times X)$ se numeşte *funcţională pătratică*.

Expresia funcţionalei pătratice în punctul (x, x) se notează $f(x, x)$ sau $V(x)$, cu $V : X \to K$.

Funcţionala biliniară simetrică din care provine V se numeşte *funcţionala polară* a lui V şi se obţine din V astfel: $f(x,y) = \frac{1}{2}\left[V(x+y) - V(x) - V(y)\right]$

Reprezentarea unei funcţionale pătratice într-o bază

Fie $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ o bază a spaţiului liniar (X, K) şi fie funcţionala pătratică V a cărei funcţională polară este

$f : X \times X \to K$. Considerând $m = n$ şi $x = y$ în formula de reprezentare a funcţionalei biliniare f obţinem că

forma generală a funcţionalei pătratice este

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}x_i x_j =$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + ... + 2a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2$$

Matricea simetrică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ se numeşte *matricea asociată funcţionalei pătratice în baza G*

Definiţia 2. Fie $V : X \to R$ o funcţională pătratică.

1) V se numeşte *pozitiv definită* dacă $V(x) > 0, \forall x \in X, x \neq 0$.
2) V se numeşte *semipozitiv definită* dacă $V(x) \geq 0, \forall x \in X, x \neq 0$.
3) V se numeşte *negativ definită* dacă $V(x) < 0, \forall x \in X, x \neq 0$.
4) V se numeşte *seminegativ definită* dacă $V(x) \leq 0, \forall x \in X, x \neq 0$.
5) V se numeşte *nedefinită* dacă $\exists\, x, y \in X$ a.î. $V(x) > 0$ şi $V(y) < 0$.

A stabili *natura unei funcţionale pătratice* revine la a încadra funcţionala în una din categoriile 1) – 5). De regulă se procedează în unul din următoarele două moduri:

I. Se calculează minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ai matricei A (unde Δ_i este format din primele i linii şi i coloane ale matriciei A).

- Dacă $\Delta_i > 0, \forall\, i \in \{1,2,..., n\}$ atunci funcţionala pătratică este pozitiv definită.
- Dacă semnul minorilor Δ_i alternează, începând cu semnul " - ", atunci funcţionala este negativ definită.
- Orice altă combinaţie de semne cu $\Delta_i \neq 0$ implică faptul că funcţionala este nedefinită.

Dacă există $\Delta_i = 0$, atunci se poate folosi o altă metodă:

II. Se aduce funcţionala pătratică la forma canonică.

Se spune că funcţionala pătratică $V : X \to R$ a fost adusă la *forma canonic*ă dacă s-a determinat o bază G a spaţiului X, pentru care $V(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, $x_G = (y_1, y_2,..., y_n)^t$

În continuare se examinează semnul coeficienţilor λ_i

- Dacă $\lambda_i > 0, \forall\, i \in \{1,2,..., n\}$ atunci funcţionala pătratică este pozitiv definită.
- Dacă $\lambda_i < 0, \forall\, i \in \{1,2,..., n\}$ atunci funcţionala pătratică este negativ definită.
- Dacă $\lambda_i \geq 0, \forall\, i \in \{1,2,..., n\}$ şi $\exists\, \lambda_k = 0$ atunci funcţionala pătratică este semipozitiv definită.
- Dacă $\lambda_i \leq 0, \forall\, i \in \{1,2,..., n\}$ şi $\exists\, \lambda_k = 0$ atunci funcţionala pătratică este seminegativ definită.
- Dacă $\exists\, \lambda_i > 0$ şi $\exists\, \lambda_j < 0$ atunci funcţionala pătratică este nedefinită.

Aducerea unei funcţionale pătratice la forma canonică se poate face prin:

- *Metoda Jacobi*:

Se calculează $\Delta_1, \Delta_2,..., \Delta_n$ (unde Δ_i este determinantul format din primele *i* linii şi coloane ale matricei asociată funcţionalei , *A*). Fie $\Delta_0 = 1$.

Dacă $\Delta_i \neq 0, \forall i = \overline{1,n}$, atunci există o bază a spaţiului R^n în care funcţionala se scrie:

$$V(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

- *Metoda Gauss*:

Se caută $i \in \overline{1,n}$ astfel încât coeficientul lui x_i^2 să fie nenul şi se grupează toţi termenii ce conţin variabila x_i.

Se formează un pătrat care să cuprindă toţi termenii ce conţin variabila x_i.

Se repetă procedeul anterior până la obţinerea formei canonice.

Observaţie. În cazul în care funcţionala pătratică este degenerată, adică $V(x)=\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j$,

se alege (k,l) astfel încât $a_{kl} \neq 0$ şi se folosesc transformările

$x_k = z_k + z_l,\ x_l = z_k - z_l,\ x_i = z_i,\ i=\overline{1,n},\ i\neq k,\ i\neq l$

Astfel funcţionala devine nedegenerată, adică $\exists i \in \overline{1,n}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$ şi poate fi adusă la forma canonică prin una din metodele prezentate.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră funcţionala pătratică $V: R^3 \to R,\ V(x)=3x_1^2-x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+5x_2x_3$

a) Să se scrie matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului (R^3, R).

b) Să se determine natura funcţionalei.

Rezolvare:

a) Comparând expresia funcţionalei din enunţ cu formula ce reprezintă forma generală a unei funcţionale pătratice obţinem: $a_{11} = 3$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 2$, $2a_{12} = -2 \Rightarrow a_{12} = -1$, $2a_{13} = 0 \Rightarrow a_{13} = 0$, $2a_{23} = 5 \Rightarrow a_{23} = 5/2$.

Rezultă că matricea funcţionalei corespunzătoare reperului canonic al spaţiului (R^3, R) este

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Calculăm minorii: $\Delta_1 = |3| = 3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\dfrac{107}{4}$

Deoarece $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$, rezultă că funcţionala este nedefinită.

2. Să se determine parametrul $a \in R$ astfel încât funcţionala pătratică:

a) $V: R^3 \to R,\ V(x) = 2x_1^2+3x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$ să fie pozitiv definită;

b) $V: R^3 \to R,\ V(x) = -2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ să fie negativ definită.

Rezolvare:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 5 \\ \Delta_3 = 5a-2 \end{cases}$; V este pozitiv definită dacă $\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \Rightarrow a \in \left(\frac{2}{5}, \infty\right) \\ \Delta_3 > 0 \end{cases}$

b) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -2 \\ \Delta_2 = 1 \\ \Delta_3 = a+2 \end{cases}$; V este negativ definită dacă $\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \Rightarrow a \in (-\infty, -2) \\ \Delta_3 < 0 \end{cases}$

3. Să se aducă la forma canonică folosind metoda Jacobi şi să se stabilească natura funcţionalelor pătratice:

a) $V: R^3 \to R, V(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

b) $V: R^3 \to R, V(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

Rezolvare:

a) Se calculează Δ_1, Δ_2, Δ_3; $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 3 \\ \Delta_2 = 5 \\ \Delta_3 = 18 \end{cases}$

Deoarece $\Delta_i \neq 0, \forall i = \overline{1,3} \Rightarrow \exists$ o bază a spaţiului R^3 în care funcţionala se scrie:

$$V(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 \Rightarrow V(y) = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{5}y_2^2 + \frac{5}{18}y_3^2$$

Deoarece toţi coeficienţii funcţionalei în noua bază sunt strict pozitivi, rezultă că V este pozitiv definită.

b) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -1 \\ \Delta_2 = 1 \quad \Rightarrow V(y) = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \\ \Delta_3 = -1 \end{cases}$, deci V este negativ definită.

4. Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss următoarele funcţionale pătratice:

a) $V: R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

b) $V: R^3 \to R, V(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

c) $V: R^3 \to R, V(x) = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2x_3$;

d) $V: R^3 \to R, V(x) = 2x_1x_2 - 7x_1x_3 + 10x_2x_3$;

e) $V: R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 25x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

f) $V: R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$;

g) $V: R^3 \to R, V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Rezolvare:

a) Deoarece coeficientul variabilei x_1^2 este nenul, se grupează termenii ce conţin variabila x_1:

$$V(x) = \underline{x_1^2} + 3x_2^2 - 2x_3^2 + \underline{2x_1x_2} - \underline{6x_1x_3} + 4x_2x_3$$

Se formează un pătrat care să cuprindă toţi termenii în care apare variabila x_1 şi se obţine:

$$V(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1(x_2 - 3x_3) + (x_2 - 3x_3)^2} - (x_2 - 3x_3)^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= \left(\underbrace{x_1 + x_2 - 3x_3}_{y_1}\right)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3$$

Se repetă procedeul pentru variabila x_2 şi se obţine:

$$V(x) = y_1^2 + \underline{2x_2^2} - 11x_3^2 + \underline{10x_2x_3} = y_1^2 + 2(x_2^2 + 5x_2x_3) - 11x_3^2 = y_1^2 + 2\left(x_2^2 + 2x_2\frac{5}{2}x_3 + \frac{25}{4}x_3^2 - \frac{25}{4}x_3^2\right) - 11x_3^2 =$$

$$= y_1^2 + \underbrace{2(x_2 + \frac{5}{2}x_3)^2}_{y_2} - \frac{25}{2}x_3^2 - 11x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{47}{2}y_3^2,$$

Rezultă că forma canonică a funcţionalei pătratice V este $V(x) = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{47}{2}y_3^2$, unde

$y_1 = x_1 + x_2 - 3x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{5}{2}x_3$, $y_3 = x_3$, prin urmare V este nedefinită.

b) $V(x) = \underline{3x_1^2} - x_2^2 + 5x_3^2 \underline{- 4x_1x_2} \underline{+ 2x_1x_3} + 8x_2x_3 = \frac{1}{3}\left(9x_1^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3\right) - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 =$

$$= \frac{1}{3}\left(9x_1^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3\right) - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 = \frac{1}{3}\left[\left(\underbrace{3x_1 - 2x_2 + 2x_3}_{y_1}\right)^2 - 4\left(x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2\right)\right] - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 - \frac{1}{3}x_3^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 = \frac{1}{3}y_1^2 \underline{- \frac{7}{3}x_2^2} + \frac{14}{3}x_3^2 + \underline{\frac{28}{3}x_2x_3} =$$

$$= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}\left(x_2^2 - 4x_2x_3\right) + \frac{14}{3}x_3^2 = \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}\left(\underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2} - 4x_3^2\right) + \frac{14}{3}x_3^2 = \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}\left(\underbrace{x_2 - 2x_3}_{y_2}\right)^2 + \frac{28}{3}x_3^2 + \frac{14}{3}x_3^2$$

prin urmare $V(x)=\frac{1}{3}y_1^2-\frac{7}{3}y_2^2+14y_3^2$, unde $y_1=3x_1-2x_2+2x_3,\ y_2=x_2-2x_3,\ y_3=x_3$

Rezultă că funcţionala pătratică V este nedefinită.

c) $V:R^3\to R, V(x)=x_1x_2-4x_1x_3+5x_2x_3$ Observăm că nu există $i\in\overline{1,3}$ astfel încât $x_i\neq 0$.

Folosind transformarea: $\left.\begin{matrix} x_1=z_1-z_2 \\ x_2=z_1+z_2 \\ x_3=z_3 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases} z_1=\frac{x_1+x_2}{2} \\ z_2=\frac{x_2-x_1}{2} \\ z_3=x_3 \end{cases}$ obţinem:

$$V(x)=x_1x_2-4x_1x_3+5x_2x_3=z_1^2-z_2^2-4z_1z_3+4z_2z_3+5z_1z_3+5z_2z_3=z_1^2-z_2^2+z_1z_3+9z_2z_3=$$

$$=\Big(\underbrace{z_1+\frac{1}{2}z_3}_{y_1}\Big)^2-\underline{z_2^2}-\frac{1}{4}z_3^2+\underline{9z_2z_3}=y_1^2-\left(z_2^2-2z_2\frac{9}{2}z_3+\frac{81}{4}z_3^2-\frac{81}{4}z_3^2\right)-\frac{1}{4}z_3^2=z_1^2+2z_1\left(\frac{1}{2}z_3\right)+\left(\frac{1}{2}z_3\right)^2-$$

$$-\left(\frac{1}{2}z_3\right)^2-z_2^2+9z_2z_3=y_1^2-\left(z_2-\frac{9}{2}z_3\right)^2+20z_3^2,$$ deci $V(x)=y_1^2-y_2^2+20y_3^2$, unde

$$\begin{cases} y_1=z_1+\frac{1}{2}z_3=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{2}x_3 \\ y_2=z_2-\frac{9}{2}z_3=\frac{x_2-x_1}{2}-\frac{9}{2}x_3 \\ y_3=z_3=x_3 \end{cases}$$

Rezultă că funcţionala pătratică este nedefinită.

d) $V(x)=2x_1x_2-7x_1x_3+10x_2x_3$; folosind transformarea $\begin{cases} x_1=z_1-z_2 \\ x_2=z_1+z_2 \\ x_3=z_3 \end{cases}$ obţinem:

$$V(x)=2z_1^2-2z_2^2-7z_1z_3+7z_2z_3+10z_1z_3+10z_2z_3=\underline{2z_1^2}-2z_2^2+\underline{3z_1^2}+17z_2z_3=\frac{1}{2}\left(4z_1^2+6z_1z_3\right)-2z_2^2+17z_2z_3=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2z_1)^2+2(2z_1)\left(\frac{3}{2}z_3\right)+\frac{9}{4}z_3^2-\frac{9}{4}z_3^2\right]-2z_2^2+17z_2z_3=\frac{1}{2}\left(2z_1+\frac{3}{2}z_3\right)^2-\frac{9}{8}z_3^2-\underline{2z_2^2}+\underline{17z_2z_3}=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}(4z_2^2-34z_2z_3)-\frac{9}{8}z_3^2=$$

$$=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}\left[(2z_2)^2-2(2z_2)\left(\frac{17}{2}z_3\right)+\left(\frac{17}{2}z_3\right)^2-\left(\frac{17}{2}z_3\right)^2\right]-\frac{9}{8}z_3^2=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}\left(2z_2-\frac{17}{2}z_3\right)^2+35z_3^2=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+35y_3^2$$

Funcţionala pătratică este nedefinită.

e) $V(x)=\underline{x_1^2}+4x_2^2+25x_3^2\underline{+4x_1x_2}\underline{-10x_1x_3}+6x_2x_3=x_1^2+2x_1(2x_2-5x_3)+(2x_2-5x_3)^2-$
$-(2x_2-5x_3)^2+4x_2^2+25x_3^2+6x_2x_3=(x_1+2x_2-5x_3)^2+26x_2x_3=y_1^2+26x_2x_3$

$\begin{cases}x_1=z_1\\x_2=z_2-z_3\\x_3=z_2+z_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_2=\dfrac{x_2+x_3}{2}\\z_3=\dfrac{x_3-x_2}{2}\end{cases}$ prin urmare $V(x)=y_1^2+26(z_2^2-z_3^2)=y_1^2+26y_2^2-26y_3^2$,

unde am notat $y_1=x_1+2x_2-5x_3,\ y_2=z_2=\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3,\ y_3=z_3=-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3$

Rezultă că funcţionala pătratică este nedefinită.

5. Să se aducă la forma canonică următoarea funcţională pătratică folosind metoda lui Gauss şi să se afle baza în care este scrisă forma canonică:
$V:R^3\to R,\quad V(x)=2x_1^2-3x_2^2+7x_3^2+3x_1x_2-4x_1x_3-9x_2x_3$

Rezolvare:

$V(x)=\underline{2x_1^2}-3x_2^2+7x_3^2\underline{+3x_1x_2}\underline{-4x_1x_3}-9x_2x_3=\dfrac{1}{2}\left(4x_1^2+6x_1x_2-8x_1x_3\right)-3x_2^2+7x_3^2-9x_2x_3=$

$=\dfrac{1}{2}\left[(2x_1)^2+2x_1(3x_2-4x_3)+(3x_2-4x_3)^2-(3x_2-4x_3)^2\right]-3x_2^2+7x_3^2-9x_2x_3=$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\underbrace{2x_1+3x_2-4x_3}_{y_1}\right)^2-\left(9x_2^2-24x_2x_3+16x_3^2\right)\right]-3x_2^2+7x_3^2-9x_2x_3=\dfrac{1}{2}y_1^2-\dfrac{9}{2}x_2^2+12x_2x_3-8x_3^2-3x_2^2+7x_3^2-9x_2x_3=$

$=\dfrac{1}{2}y_1^2-\dfrac{15}{2}x_2^2-\underline{x_3^2}+\underline{3x_2x_3}=\dfrac{1}{2}y_1^2-(x_3^2-3x_2x_3)-\dfrac{15}{2}x_2^2=$

$=\dfrac{1}{2}y_1^2-\left(x_3^2-3x_2x_3+\dfrac{9}{2}x_2^2-\dfrac{9}{2}x_2^2\right)-\dfrac{15}{2}x_2^2=\dfrac{1}{2}y_1^2-\left(\underbrace{x_3-\tfrac{3}{2}x_2}_{y_2}\right)^2+\dfrac{9}{2}x_2^2-\dfrac{15}{2}x_2^2=\dfrac{1}{3}y_1^2-y_2^2-3y_3^2$

Am obţinut $V(x)=\dfrac{1}{3}y_1^2-y_2^2-3y_3^2$, unde $y_1=2x_1+3x_2-4x_3, y_2=-\dfrac{3}{2}x_2+x_3, y_3=x_2$

Ultimele trei relaţii se mai pot scrie sub forma: $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&-4\\0&-\frac{3}{2}&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ (1)

Notăm cu E baza canonică şi cu $G=\{g_1, g_2, g_3\}$ baza în care este scrisă forma canonică a funcţionalei.

Coordonatele vectorului x în baza E sunt x_1, x_2, x_3, adică $x_E = (x_1, x_2, x_3)^t$, iar coordonatele lui y în baza G sunt y_1, y_2, y_3, sau $x_G = (y_1, y_2, y_3)^t$.

Fie C matricea de trecere de la baza E la baza G.

Formula de transformare a coordonatelor vectorului x la trecerea de la baza E la baza G este:

$$x_G = C^{-1} \cdot x_E \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Folosim metoda Gauss-Jordan pentru a obţine matricea C, ale cărei coloane sunt vectorii bazei G.

C^{-1}			I_3		
$\boxed{2}$	3	-4	1	0	0
0	-3/2	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
1	3/2	-2	1/2	0	0
0	$\boxed{-3/2}$	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	-1	1/2	1	0
0	1	-2/3	0	-2/3	0
0	0	$\boxed{2/3}$	0	2/3	1
1	0	0	1/2	2	3/2
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	3/2
I_3			C		

Obţinem $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, prin urmare baza în care este scrisă forma canonică este:

$$G = \left\{ g_1 = \left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)^t,\ g_2 = (2,\ 0,\ 1,\ )^t,\ g_3 = \left(\tfrac{3}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{2}\right)^t \right\}$$

PROBLEME PROPUSE

1. Fie funcţionala pătratică $V : R^3 \to R,\ V(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$

Scrieţi matricea funcţionalei în baza canonică a spaţiului (R^3**,** R) şi stabiliţi natura funcţionalei

R: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; funcţionala pătratică este nedefinită.

2. Să se determine $a \in R$ astfel încât funcţionala pătratică $V : R^3 \to R$,

$V(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ să fie pozitiv definită.

R: $a \in \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

3. Să se determine parametrul real a astfel încât funcţionala pătratică

$V : R^3 \to R, V(x) = ax_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$ să fie nedefinită.

R: $a \in R$.

4. Să se determine parametrul $a \in R$ astfel încât funcţionala pătratică

$V : R^3 \to R$, $V(x) = 2ax_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ să fie negativ definită.

R: $a \in \left(\frac{-8-3\sqrt{6}}{5}, \frac{-8+3\sqrt{6}}{5}\right)$

5. Să se găsească forma canonică şi natura funcţionalelor pătratice folosind metoda Jacobi:

a) $V : R^3 \to R$, $V(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; **R:** $V(x) = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{11}y_2^2 + \frac{11}{6}y_3^2$;
pozitiv definită

b) $V : R^4 \to R$, $V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_3x_4$; **R:** $V(x) = \frac{1}{2}y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2$;
nedefinită

c) $V : R^3 \to R$, $V(x) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$; **R:** $V(x) = -\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{5}{9}y_2^2 - y_3^2$;
negativ definită;

d) $V : R^3 \to R$, $V(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ **R:** *d)* $V(x) = y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 + y_3^2$;
pozitiv definită

6. Să se aducă la forma canonică următoarele funcţionale pătratice prin metoda Gauss; să se precizeze natura funcţionalelor şi să se găsească baza în care este scrisă forma canonică

a) $V : R^3 \to R$, $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

R: $V(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, unde $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_3$;

baza este $G = \{g_1 = (1,0,0)^t, g_2 = (-1,1,0)^t, g_3 = (2,-2,1)^t\}$;

b) $V : R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

R: $V(x) = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$, unde $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3,\ y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,\ y_3 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$;

baza este $G = \{g_1 = (1,0,0)^t, g_2 = (1,1,0)^t, g_3 = (3,1,-1)^t\}$

c) $V : R^3 \to R, V(x) = x_1x_2 + 5x_1x_3 - 3x_2x_3$;

R: $V(x) = y_1^2 - y_2^2 + 15y_3^2$, unde $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3,\ y_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 4x_3,\ y_3 = x_3$;

baza este $G = \{g_1 = (1,1,0)^t, g_2 = (-1,1,0)^t, g_3 = (3,-5,1)^t\}$

d) $V : R^3 \to R, V(x) = 2x_1x_2 + 7x_2x_3 + 6x_1x_3$;

e) $V : R^4 \to R, V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_3x_4$.