Elemente de algebră liniară

Colecția MATEMATICI PENTRU ECONOMIȘTI

Dragoş-Pătru COVEI

Elemente de algebră liniară

Colecţia
Matematici pentru economişti

Editura ASE
Bucureşti
2015

ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE DIN BUCUREŞTI

Editura ASE
Piaţa Romană nr. 6, sector 1, Bucureşti, România
cod: 010374
www.ase.ro
www.editura.ase.ro
editura@ase.ro

Referenţi:
Prof. univ. dr. Aida Toma
Conf. univ. dr. Bogdan Iftimie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
COVEI, DRAGOŞ-PĂTRU
Elemente de algebră liniară/Dragoş-Pătru Covei. - Bucureşti: Editura ASE, 2015
Bibliogr.
ISBN 978-606-505-860-6

512.64

Tehnoredactare: Dragoş-Pătru Covei
Redactor: Livia Radu (Editura ASE)
Coperta: Claudia-Marinela Dumitru (Editura ASE)

Autorul îşi asumă întreaga responsabilitate pentru ideile exprimate, pentru originalitatea materialului şi pentru sursele bibliografice menţionate.
Prima Ediţie, Ianuarie 2015

Cuprins

0.1 Prefaţă

Algebra liniară este o ramură activă a cercetărilor matematice deoarece ocupă un loc central în aproape toate celelalte domenii ale matematicii şi, de asemenea, are aplicaţii importante în toate ramurile ştiinţelor aplicate.

Cu toate acestea, conţinutul cursurilor de algebră liniară, necesar unui absolvent de la ciclul licenţă, a fost restrâns de la an la an deşi aceasta este indispensabilă pentru studiile postuniversitare şi de cercetare sau pentru aplicarea în lumea reală.

Aceste note aprofundează programa analitică a cursului şi seminarului de *Algebră Liniară* ţinut de autor studenţilor din anul întâi de la Facultatea de Cibernetică, Statistică şi Informatică Economică din cadrul Academiei de Studii Economice din Bucureşti.

Materialul este dezvoltat complet de la zero, în scopul utilizării lui ca un ghid de studiu individual sau ca o carte de referinţă, dar într-un ritm mult mai rapid decât o algebră liniară studiată la nivel de liceu.

Problemele dezbătute alcătuiesc o parte semnificativă a materialului, preced întotdeauna teoremele, iar majoritatea dintre ele sunt rezolvate complet pentru a ilustra cât mai bine cadrul teoretic.

Rareori cititorii observă că noţiunile introduse, aparent simple, ciudate şi variate, sunt de fapt rezultatul unei lupte lungi şi dure depuse de matematicieni din întreaga lume, cu mult timp în urmă, în scopul modelării fenomenelor din lumea reală.

Astfel, unii dintre cei mai străluciţi matematicieni au dat răspuns unor probleme aparent simple pentru aceste timpuri, cum ar fi determinarea dimensiunii spaţiului vectorial euclidian.

Însă, toate rezultatele lor au permis să se realizeze avansul în timp al ştiinţelor, de fapt ne-a permis, cu un efort de-al lor, să vedem mai departe decât acele minţi strălucite.

Autorul,
Conf. univ. dr. Dragoş – Pătru Covei
Academia de Studii Economice din Bucureşti
Le mulţumesc cititorilor, sperând că le este utilă această carte.
Dedic această carte copiilor mei Daria şi Rareş.
Bucureşti, 2015

1. Spaţii vectoriale

1.1 Definiţia spaţiului vectorial (liniar)

Fie K corp comutativ cu elementul neutru la înmulţire notat prin 1, iar la adunare prin 0.

Definiţie 1.1.1 O mulţime $V \neq \phi$ se numeşte spaţiu vectorial peste K (sau K-spaţiu vectorial V) dacă pe V se defineşte o operaţie algebrică internă

$$(x,y) \in V \times V \overset{+}{\to} x+y \in V \ \text{ (numită adunarea vectorilor)}$$

împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică îndeplineşte axiomele

$$\begin{array}{ll} A1) & x+y=y+x, \quad \forall x,y \in V \\ A2) & (x+y)+z=x+(y+z), \ \forall x,y,z \in V \\ A3) & \exists 0_V \in V \text{ astfel încât } x+0_V=x, \forall x \in V \\ A4) & \forall x \in V, \exists -x \in V \text{ astfel încât } x+(-x)=0_V \end{array}$$

precum şi o operaţie algebrică externă

$$(\alpha,x) \in K \times V \overset{\cdot}{\to} \alpha \cdot x \in V \ \text{(numită înmulţirea cu scalari)}$$

astfel încât să îndeplinească axiomele

$$\begin{array}{lll} A5) & (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x & \forall \alpha,\beta \in K, \forall x \in V \\ A6) & \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y & \forall \alpha \in K, \forall x,y \in V \\ A7) & (\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x) & \forall \alpha,\beta \in K, \forall x \in V \\ A8) & 1\cdot x=x & \forall x \in V. \end{array}$$

R Elementele corpului K se numesc scalari şi se notează cu litere ale alfabetului grec, iar elementele $K-$spaţiului vectorial V se numesc vectori şi se notează cu litere ale alfabetului latin.

R Elementul 0_V se numeşte vectorul nul, iar $-x$ opusul vectorului x.

R Pentru spaţiul vectorial V peste corpul K se foloseşte notaţia (V,K). Dacă $K=\mathbb{R}$ atunci spaţiul vectorial $(V,\mathbb{R})$ se numeşte spaţiu vectorial real, iar dacă $K=\mathbb{C}$ atunci spaţiul vectorial $(V,\mathbb{C})$ se numeşte spaţiu vectorial complex.

Următoarea propoziţie evidenţiază reguli de calcul într-un spaţiu vectorial.

Propoziţie 1.1.1 Dacă (V,K) este spaţiu vectorial atunci

$$\begin{array}{llll}
i) & 0\cdot x = 0_V & \forall x\in V, & \\
ii) & \forall \alpha \in K \quad \text{avem} & \alpha\cdot 0_V = 0_V, & \\
iii) & (-1)\cdot x = -x & \forall x\in V, & \\
iv) & \alpha\cdot x = 0_V & \Longleftrightarrow & \alpha = 0 \text{ sau } x = 0_V \\
v) & \alpha\cdot(x-y) = \alpha\cdot x - \alpha y & \forall x,y\in V, & \forall \alpha\in K \\
vi) & (\alpha-\beta)\cdot x = \alpha\cdot x - \beta\cdot x & \forall \alpha,\beta\in K, & \forall x\in V.
\end{array}$$

Demonstraţie. i) Considerăm în $A5)$: $\alpha=1$ şi $\beta=0$ rezultând

$$(1+0)\cdot x = 1\cdot x + 0\cdot x$$

sau echivalent

$$1\cdot x = 1\cdot x + 0\cdot x \stackrel{A8)}{\Longrightarrow} x = x+0\cdot x.$$

Cum 0_V este unicul vector cu proprietatea $x = x+0_V$ deducem că $0\cdot x = 0_V$.

ii) Considerăm în $A7)$: $\beta = 0$ rezultând

$$(\alpha\cdot 0)\cdot x = \alpha\cdot(0\cdot x) \stackrel{i)}{\Longrightarrow} 0\cdot x = \alpha\cdot 0_V \Longleftrightarrow \alpha\cdot 0_V = 0_V.$$

Analog se probează $iii)-vi)$.

Exerciţiu 1.1.1 Fie K corp comutativ şi

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \left\{ (x_1,\ldots,x_n)^T \,\middle|\, x_i\in\mathbb{K},\ i=1,\ldots,n \right\}$$

unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Pe $\mathbb{K}^n$ definim operaţiile

- adunarea:

$$(x_1,\ldots,x_n)^T + (y_1,\ldots,y_n)^T \stackrel{def}{=} (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)^T$$

unde $(x_1,\ldots,x_n)^T$, $(y_1,\ldots,y_n)^T\in\mathbb{K}^n$;

- înmulţirea cu scalari:

$$\alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n)^T \stackrel{def}{=} (\alpha\cdot x_1,\ldots,\alpha\cdot x_n)^T$$

unde $\alpha\in K$, $(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{K}^n$.

Să se arate că mulţimea $\mathbb{K}^n$ înzestrată cu operaţiile "+" şi "·" are o structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, numit spaţiu aritmetic n-dimensional (sau spaţiul coordonatelor). ■

Soluţie. Elementul

$$0_V = (0,\ldots,0)^T\text{, respectiv } -x = (-x_1,\ldots,-x_n)^T,$$

este vectorul nul din $\mathbb{K}^n$, respectiv, opusul lui x din $\mathbb{K}^n$.

Probăm $A1)$ din Definiţia 1.1.1. Pentru aceasta observăm că pentru orice $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{K}$ şi $y = (y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{K}$ are loc

$$\begin{aligned} x+y &= (x_1, ..., x_n)^T + (y_1, ..., y_n)^T \overset{def}{=} (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)^T \\ &= (y_1+x_1, ..., y_n+x_n)^T = (y_1, ..., y_n)^T + (x_1, ..., x_n)^T = y+x, \end{aligned}$$

adică axioma $A1)$ a fost verificată. Analog se verifică axiomele $A2) - A8)$ ceea ce arată că mulţimea $\mathbb{K}^n$ este spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. ■

R Pentru $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ obţinem spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^n$.

Exerciţiu 1.1.2 Să se arate că mulţimea

$$V = \left\{ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial, faţă de operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu un număr raţional. ■

Soluţie. Se observă uşor că $(V, +)$ este grup abelian. Fie acum $\lambda \in \mathbb{Q}$ şi

$$x_i = a_i + b_i\sqrt{2} + c_i\sqrt{3} \text{ unde } i = 1, 2.$$

Avem

$$\lambda (x_1 + x_2) = \lambda (a_1 + a_2) + \lambda (b_1 + b_2) \sqrt{2} + \lambda (c_1 + c_2) \sqrt{3} = \lambda x_1 + \lambda x_2$$

fapt ce probează axioma A6) a spaţiului vectorial. Analog se probează celelalte axiome ale spaţiului vectorial. ■

Exerciţiu 1.1.3 Fie $(V, \mathbb{R})$ spaţiul vectorial real. Pe $V \times V \overset{not}{=}{}^{\mathbb{C}} V$ se definesc operaţiile

$$\begin{array}{llll} i) & + : {}^{\mathbb{C}}V \times {}^{\mathbb{C}}V \to {}^{\mathbb{C}}V, & (u,v) + (x,y) = (u+x, v+y) & \forall (u,v) \in {}^{\mathbb{C}}V,\ \forall (x,y) \in {}^{\mathbb{C}}V \\ ii) & \cdot : \mathbb{C} \times {}^{\mathbb{C}}V \to {}^{\mathbb{C}}V, & \alpha (u,v) = (au - bv, bu + av) & \forall (u,v) \in {}^{\mathbb{C}}V \text{ şi } \alpha = a + ib \in \mathbb{C}. \end{array}$$

Să se arate că $\left({}^{\mathbb{C}}V, \mathbb{C}\right)$ este spaţiu vectorial (numit complexificatul spaţiului vectorial real $(V, \mathbb{R})$). În particular, ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$. ■

Soluţie. Arătăm că $\left({}^{\mathbb{C}}V, +\right)$ este grup abelian. Pentru început observăm că

$$\begin{aligned} \forall (x_1, y_1) &\in {}^{\mathbb{C}}V \text{ şi } \forall (x_2, y_2) \in {}^{\mathbb{C}}V \Longrightarrow x_1, x_2, y_1, y_2 \in V \\ &\Longrightarrow x_1 + x_2 \in V \text{ şi } y_1 + y_2 \in V \Longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in {}^{\mathbb{C}}V. \end{aligned}$$

Pe de altă parte

A1) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in {}^{\mathbb{C}}V$ avem

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

din comutativitatea adunării în V.

A2) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in {}^{\mathbb{C}}V$ avem

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]$$

din asociativitatea adunării în V.

A3) $\exists (0_V, 0_V) \in^{\mathbb{C}} V$ astfel încât

$$(x,y)+(0_V,0_V)=(0_V,0_V)+(x,y)=(x,y).$$

A4) $\forall (x,y) \in^{\mathbb{C}} V \ \exists (-x,-y) \in^{\mathbb{C}} V$ astfel încât

$$(x,y)+(-x,-y)=(-x,-y)+(x,y)=(0_V,0_V).$$

Evident $(au-bv, bu+av) \in^{\mathbb{C}} V$.

Rămâne să verificăm axiomele A5)-A8). Verificăm A8), celelalte sunt doar artificii de calcul. Avem

$$1=1+0\cdot i \Longrightarrow 1\cdot(x,y)=(1\cdot x-0\cdot y, 0\cdot x+1\cdot y)=(x,y).$$

Cum A1)-A8) sunt verificate deducem că $\left({}^{\mathbb{C}}V, \mathbb{C}\right)$ este spaţiu vectorial. ■

Exerciţiu 1.1.4 Fie spaţiul vectorial $(\mathbb{Z}_2^n, \mathbb{Z}_2)$. Să se arate că $\forall x \in \mathbb{Z}_2^n$, $x+x=0_{\mathbb{Z}_2^n}$. ■

Soluţie. Fie $x=(\widehat{x_1},\ldots,\widehat{x_n})^T \in \mathbb{Z}_2^n$. Observăm că

$$\begin{aligned} x+x &= (\widehat{x_1},\ldots,\widehat{x_n})^T+(\widehat{x_1},\ldots,\widehat{x_n})^T=(\widehat{x_1}+\widehat{x_1},\ldots,\widehat{x_n}+\widehat{x_n})^T \\ &= \left(\widehat{x_1}\left(\widehat{1}+\widehat{1}\right),\ldots,\widehat{x_n}\left(\widehat{1}+\widehat{1}\right)\right)^T=\left(\widehat{0},\ldots,\widehat{0}\right)=0_{\mathbb{Z}_2^n} \end{aligned}$$

deoarece $\widehat{1}+\widehat{1}=\widehat{0}$. ■

1.2 Subspaţii vectoriale

Definiţie 1.2.1 Fie (V,K) spaţiu vectorial şi $X \subset V$, $X \neq \phi$. Mulţimea X se numeşte subspaţiu vectorial al lui (V,K) dacă

i) $\forall x,y \in X \Longrightarrow x+y \in X$;

ii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in X \Longrightarrow \alpha x \in X$.

R Un subspaţiu vectorial are o structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse.

R Orice spaţiu vectorial (V,K) are cel puţin două subspaţii $\{0_V\}$ şi V numite subspaţii vectoriale improprii ale lui (V,K). Orice alt subspaţiu vectorial se numeşte subspaţiu propriu.

■ **Exemplu 1.2.1** Dacă $\mathbb{K}^n$ este spaţiul aritmetic n-dimensional definit în Exerciţiul 1.1.1 atunci

$$E=\left\{x=(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)^T \,\middle|\, x\in\mathbb{K}^n\right\}$$

este subspaţiu vectorial al lui $(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$. Într-adevăr, fie

$$x=(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)^T \text{ şi } y=(y_1,\ldots,y_{i-1},0,y_{i+1},\ldots,y_n)^T$$

elemente arbitrare din E. Observăm că

$$\begin{aligned} x+y &= (x_1+y_1,\ldots,x_{i-1}+y_{i-1},0,x_{i+1}+y_{i+1},\ldots,x_n+y_n)^T \in E \\ \alpha x &= (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_{i-1},0,\alpha x_{i+1},\ldots,\alpha x_n)^T \in E \ \forall \alpha \in K \end{aligned}$$

şi deci E este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{K}^n$. ■

R Relaţiile i), ii) din Definiţia 1.2.1 sunt echivalente cu

$$\forall \lambda, \mu \in K \text{ şi } \forall x, y \in X \text{ rezultă } \lambda x + \mu y \in X.$$

Exerciţiu 1.2.1 Să se arate că mulţimea

$$S = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0)^T \, \middle| x_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, m-1} \right\}$$

este subspaţiu vectorial în spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. ■

Soluţie. Arătăm că

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x, y \in S \Rightarrow \lambda x + \mu y \in S.$$

Dacă $x = (x_1, ..., x_{m-1}, 0)^T$ şi $y = (y_1, ..., y_{m-1}, 0)^T$ sunt elemente din S atunci

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, ..., \lambda x_{m-1} + \mu y_{m-1}, 0)^T \in S.$$

■

Exerciţiu 1.2.2 Dacă $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{\theta\}$ este element fixat, atunci să se arate că mulţimea $S = \{\alpha x | \alpha \in \mathbb{R}\}$ este subspaţiu vectorial în spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. ■

Soluţie. Arătăm că

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ y, z \in S \Rightarrow \lambda y + \mu z \in S.$$

Într-adevăr, dacă

$$\begin{cases} y = \alpha_1 x \\ z = \alpha_2 x \end{cases}, x \in \mathbb{R}^m \text{ şi } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

sunt două elemente din S atunci

$$\lambda y + \mu z = \lambda \alpha_1 x + \mu \alpha_2 x = x(\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) \in S$$

deoarece $\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 \in \mathbb{R}$. ■

1.3 Acoperire liniară a unei submulţimi. Combinaţie liniară de vectori

Fie (V, K) spaţiu vectorial.

Definiţie 1.3.1 Fie $A \subseteq V$ nevidă şi $x_1, ..., x_n \in V$.

i) Spunem că vectorul $x \in V$ este o combinaţie liniară de vectorii $x_1, ..., x_n$ dacă există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

ii) Spunem că vectorul $x \in V$ este o combinaţie liniară de vectori din A, dacă $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, şi vectorii $x_i \in A$, $i = 1, ..., n$, a.î. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

iii) Mulţimea $Span_K(A) \overset{\text{definiţie}}{=}$ a tututror combinaţiilor liniare de vectori din $A \subset V$ se numeşte acoperire liniară a lui A. În particular, dacă $A = \{x_1, ..., x_n\}$ atunci

$$Span_K(A) \overset{\text{definiţie}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \, \middle| \, \alpha_i \in K,\ i = 1, ..., n \right\}. \tag{1.1}$$

R $Span_K(A)$ se numeşte şi subspaţiul vectorial generat de mulţimea A şi este cel mai mic subspaţiu vectorial al lui V ce conţine mulţimea A. În loc de $Span_K(A)$ se mai folosesc

notaţiile: $L_K(A)$, $Span(A)$, $Sp(A)$, $<A>$ sau $L(A)$.

Exerciţiu 1.3.1 Fie (V,K) spaţiu vectorial. Dacă $A=\{x_1,...,x_n\}\subset V$, $A\neq\phi$ atunci să se arate că $Span_K(A)$ este subspaţiu vectorial al lui (V,K). ■

Soluţie. Fie x, y vectori din $Span_K(A)$ şi $\lambda,\mu\in K$. Din

$$\begin{aligned} x &\in Span_K(A) \Longrightarrow \text{ există } \alpha_i\in K \text{ astfel încât } x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y &\in Span_K(A) \Longrightarrow \text{ există } \beta_i\in K \text{ astfel încât } y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i. \end{aligned}$$

Observăm că

$$\lambda x+\mu y=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\mu\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i+\mu\beta_i)x_i\in Span_K(A)$$

deoarece $\lambda\alpha_i+\mu\beta_i\in K$. Am demonstrat că $Span_K(A)$ este subspaţiu vectorial al lui V. ■

Exerciţiu 1.3.2 Fie $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ spaţiul vectorial real şi

$$A=\left\{(2,2,4)^T,(2,4,2)^T,(2,-2,4)^T\right\}\subseteq\mathbb{R}^3.$$

Să se arate că $v=(16,6,14)^T$ este în $Span_{\mathbb{R}}A$. ■

Soluţie. A arăta că $v=(16,6,14)^T$ este în $Span_{\mathbb{R}}A$ revine la arăta că există a_1, a_2, $a_3\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$(16,6,14)^T=\alpha_1(2,2,4)^T+\alpha_2(2,4,2)^T+\alpha_3(2,-2,4)^T$$

sau echivalent

$$\begin{cases} 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=16 \\ 2\alpha_1+4\alpha_2-2\alpha_3=6 \\ 4\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=14. \end{cases}$$

Se observă că acest sistem are soluţia $\alpha_1=-8,\alpha_2=9,\alpha_3=7$. Am demonstrat că v este combinaţie liniară de vectori din A şi deci se află în $Span_{\mathbb{R}}A$. ■

Exerciţiu 1.3.3 Fie $(\mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor simetrice de componente reale şi

$$S=Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq(\mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}),\mathbb{R}).$$

Să se arate că $S=\mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. ■

Soluţie. Amintim că $A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dacă A este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Se observă că

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

şi deci $S = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. ■

Exerciţiu 1.3.4 În spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$ se consideră elementele

$$x_1 = (2,4,2,4)^T, x_2 = (2,-2,8,10)^T, x_3 = (2,-4,10,12)^T$$

şi $x = (4,-4,16,20)^T$. Să se arate că elementul x este o combinaţie liniară a elementelor x_1, x_2, x_3. ■

Soluţie. x este o combinatie liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 dacă există numerele $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$

relaţie echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 4 \\ 4\gamma_1 - 2\gamma_2 - 4\gamma_3 = -4 \\ 2\gamma_1 + 8\gamma_2 + 10\gamma_3 = 16 \\ 4\gamma_1 + 10\gamma_2 + 12\gamma_3 = 20 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Avem un minor de ordinul 2 nenul

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 2\cdot 4 = -12,$$

iar toţi minorii de ordinul 3 sunt nuli, deci *rang* $A = 2$.

Matricea extinsă este

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & -4 \\ 2 & 8 & 10 & 16 \\ 4 & 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

având *rangul* 2. Am demonstrat că *rang* $A =$ *rang* $\overline{A}$. Conform teoremei Kronecker-Capelli sistemul este compatibil. Notăm necunoscuta secundară γ_3 prin a şi considerăm primele două ecuaţii ale sistemului, corespunzătoare minorului principal de ordin doi, avem

$$\begin{cases} 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 4 - 2a \\ 4\gamma_1 - 2\gamma_2 = -4 + 4a \end{cases}$$

cu soluţia

$$\gamma_1 = \frac{a}{3}, \gamma_2 = \frac{6-4a}{3}, \gamma_3 = a.$$

Am demonstrat că

$$x = \frac{a}{3}x_1 + \frac{6-4a}{3}x_2 + ax_3$$

adică x este o combinaţie liniară de x_1, x_2 şi x_3. ■

Exerciţiu 1.3.5 În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ se consideră elementele

$$x_1 = (-2,-1,-1,-4)^T,\ x_2 = (3,-2,12,15)^T,\ x_3 = (-1,3,-11,-9)^T$$

şi $x = (1,0,1,0)^T$. Să se arate că elementul x nu este o combinaţie liniară a elementelor x_1, x_2, x_3. ■

Soluţie. x este o combinaţie liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 dacă există numerele reale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ astfel încât

$$x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$

relaţie echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + 3\gamma_2 - \gamma_3 = 1 \\ -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + 12\gamma_2 - 11\gamma_3 = 1 \\ -4\gamma_1 + 15\gamma_2 - 9\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 12 & -11 \\ -4 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Avem un minor de ordinul 3 nenul:

$$M_3^A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -4 & 15 & -9 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

deci $rang\, A = 3$.

Matricea extinsă este

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 12 & -11 & 1 \\ -4 & 15 & -9 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_4^{\overline{A}} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 12 & -11 & 1 \\ -4 & 15 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 14$$

rezultând $rang\overline{A} = 4$. Am demonstrat că

$$rangA \neq rang\overline{A}.$$

Conform teoremei Kronecker-Capelli, sistemul este incompatibil. În concluzie, x nu se poate scrie ca o combinaţie liniară a elementelor x_1, x_2, x_3. ■

1.4 Familie de generatori

Fie (V,K) spaţiu vectorial.

Definiţie 1.4.1 Spunem că $X \subset V$ este familie de generatori dacă orice vector din V se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din X. Cu alte cuvinte, X este familie de generatori pentru V dacă $V = Span_K(X)$.

R Dacă X este o familie de generatori pentru V şi $X \subset Y \subset V$, atunci Y este o familie de generatori a lui V.

R Dacă X este o familie de generatori pentru V şi $x \in X$ este o combinaţie liniară cu vectori din X, atunci $X \setminus \{x\}$ este o familie de generatori pentru V.

R Dacă $X \subset V$ este familie de generatori pentru V în număr finit, în loc de **familie de generatori** se mai foloseşte sintagma **sistem de generatori**.

Definiţie 1.4.2 Se spune că un K-spaţiu vectorial V este de dimensiune finită, dacă $V = \{0_V\}$ sau V conţine un sistem de generatori $\{x_1,...,x_n\}$ în număr finit.

■ **Exemplu 1.4.1** Spaţiul aritmetic n-dimensional $\mathbb{K}^n$ este de dimensiune finită, deoarece sistemul de vectori

$$\left\{e_1 = (1,...,0)^T,...,e_n = (0,...,1)^T\right\}$$

este sitem de generatori în $\mathbb{K}^n$. ■

■ **Exemplu 1.4.2** Spaţiul vectorial al funcţiilor reale, definite pe segmentul $[a,b]$ nu este de dimensiune finită, deoarece funcţiile $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, ..., $f_n(t) = t^n$, ... realizează o familie de generatori, cu $n \in \mathbb{N}$ arbitrar. ■

Exerciţiu 1.4.1 Să se arate că elementele

$$x_1 = (2,2,2)^T,\ x_2 = (2,2,0)^T \text{ şi } x_3 = (2,0,0)^T$$

constituie un sistem de generatori în spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$. ■

Soluţie. $\{x_1,x_2,x_3\}$ formează un sistem de generatori în spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ dacă şi numai dacă orice $w \in \mathbb{R}^3$ se exprimă ca o combinaţie liniară de x_1,x_2 şi x_3.

Fie $w = (w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{R}^3$ şi presupunem că

există $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $w = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$,

sau echivalent, există $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = w_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = w_2 \\ 2\lambda_1 = w_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Deoarece

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$$

sistemul (1.2) are soluţii şi prin urmare x_1,x_2,x_3 formează un sistem de generatori în $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$. Mai mult, se poate observa că

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}w_3, \lambda_2 = \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_3, \lambda_3 = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

şi deci

$$w = \frac{1}{2}w_3 x_1 + \left(\frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_3\right)x_2 + \left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right)x_3.$$

■

1.5 Familie de vectori liniar independentă/dependentă

Fie (V,K) spaţiu vectorial şi I o mulţime de indici.

Definiţie 1.5.1 O familie de vectori $X = \{x_i\}_{i\in I} \subset V$ se numeşte liniar independentă dacă pentru orice familie finită $I_0 \subseteq I$ are loc

$$\sum_{i\in I_0} \alpha_i x_i = 0_V \text{ implică } \alpha_i = 0\ \forall i \in I_0.$$

R Când I este mulţime finită de indici, în loc de **familie de vectori** se mai foloseşte sintagma **sistem de vectori**.

Exerciţiu 1.5.1 *Să se arate că următoarele elemente din spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ sunt liniar independente:*
i) $x_1 = (-1,-1,-1)^T$, $x_2 = (-1,-2,-3)^T$, $x_3 = (-2,1,-1)^T$;
ii) $x_1 = (-2,2,2)^T$, $x_2 = (2,-2,2)^T$, $x_3 = (2,2,-2)^T$;
iii) $x_1 = (3,6,-3)^T$, $x_2 = (6,-3,9)^T$. ■

Soluţie. i) x_1,x_3,x_3 sunt liniar independente dacă o combinaţie liniară a acestor elemente dă elementul nul rezultă toţi scalarii nuli, adică

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

altfel scris,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = -5$$

$\Longrightarrow$ matricea A are rangul 3 = numărul necunoscutelor (=numărul elementelor ce intră în combinaţie). În consecinţă sistemul admite doar soluţia banală, ceea ce justifică cerinţa problemei.

De asemenea pentru orice familie $I_0 = \{i_k\}_{1\le k\le 3} \subseteq I = \{1,2,3\}$ finită avem că $\{x_{i_k}\}_{1\le k\le 3}$ sunt liniar independente. Mai exact, dacă $\{x_1,x_2,x_3\}$ este liniar independentă atunci şi $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_1,x_2\}$, $\{x_2,x_3\}$, $\{x_1,x_3\}$ sunt liniar independente.

ii) Privind cazul i) putem decide dacă x_1, x_3, x_3 sunt liniar independente în funcţie de rangul matricei formate din coordonatele acestor elemente:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_3^A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

În cazul nostru A are rangul 3 şi deci concluzia.

iii) Matricea formată de coordonatele acestor elemente este

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2^A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ rangA =2 $=$ numărul elementelor intrate în combinaţie şi deci x_1, x_2 sunt liniar independente. ■

Exerciţiu 1.5.2 Dacă $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ sunt vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial (V,K) atunci să se arate că vectorii

$$f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

sunt liniar independenţi. ■

Soluţie. Vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi în (V,K) dacă o combinaţie liniară a lor cu scalari din K dă vectorul nul rezultă toţi scalarii sunt nuli, adică

$$mf_1 + n\, f_2 + c\, f_3 = 0_V \Longrightarrow m = n = c = 0. \tag{1.3}$$

Astfel, vom considera expresia $mf_1 + nf_2 + cf_3 = 0_V$ echivalentă cu

$$me_1 + n(e_1 + e_2) + c(e_1 + e_2 + e_3) = 0_V.$$

Grupăm după e_1, e_2, e_3

$$(m+n+c)e_1 + (n+c)e_2 + ce_3 = 0_V.$$

Cum e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi în (V,K), rezultă sistemul omogen

$$\begin{cases} m+n+c = 0 \\ n+c = 0 \\ c = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Scriem matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi observăm că $\det A = 1 \neq 0$ implică $rangA = 3$ =număr de necunoscute din sistem şi în consecinţă, sistemul (1.4) este compatibil determinat. Am demonstrat că $m = n = c = 0$ şi deci f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi în (V,K). ■

Definiţie 1.5.2 O familie de vectori $X = \{x_i\}_{i\in I} \subset V$ se numeşte liniar dependentă dacă există $\alpha_i \in K$, $i \in I$ nu toţi nuli, astfel încât $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_V$.

Exerciţiu 1.5.3 Să se arate că următoarele elemente din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ sunt liniar dependente:

i) $x_1 = (-1,2,-1)^T$, $x_2 = (-2,-1,1)^T$, $x_3 = (-7,4,-1)^T$;

ii) $x_1 = (-2,3,-7)^T$, $x_2 = (-2,0,6)^T$, $x_3 = (-4,3,-1)^T$;

iii) $x_1 = (1,-2,-1)^T$, $x_2 = (-2,4,2)^T$. ■

Soluţie. i) x_1, x_3, x_3 sunt liniar dependente dacă există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ numere reale nu toate nule astfel încât

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3},$$

altfel scris,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ matricea A are rangul $2 <$ numărul necunoscutelor (=numărul elementelor ce intră în combinaţie). În consecinţă sistemul admite şi soluţii diferite de soluţia banală, ceea ce justifică cerinţa problemei.

ii) Privind cazul i) putem decide dacă x_1, x_3, x_3 sunt liniar dependente în funcţie de rangul matricei formate din coordonatele acestor elemente:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \\ -7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_3^A = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \\ -7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

În cazul noastru A are rangul 2 şi deci obţinem concluzia.

iii) Matricea formată de coordonatele acestor elemente este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

cu rangul $1 <$ numărul elementelor intrate în combinaţie şi deci x_1, x_2 sunt liniar dependente. ■

1.6 Operaţii cu familii de vectori

Propoziţie 1.6.1 Intersecţia unei familii de subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial (echivalent: dacă $\{S_i\}_{i\in I}$ este o familie de subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial (V, K) atunci $\bigcap\limits_{i\in I} S_i$ este un subspaţiu vectorial în (V, K)).

Exerciţiu 1.6.1 În spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ se consideră mulţimile:

$$S_1 = \left\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, -2x_1+3x_2-4x_3=0\right\}$$
$$S_2 = \left\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x_1+x_2-2x_3=0\right\}.$$

i) *Să se arate că S_1 şi S_2 sunt subspaţii în $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$;*
ii) *Să se determine $S_1 \cap S_2$.* ■

Soluţie. i) Arătăm că

$$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ x,y \in S_1 \Rightarrow \lambda x+\mu y \in S_1.$$

Într-adevăr, dacă

$$x=(x_1,x_2,x_3)^T \text{ şi } y=(y_1,y_2,y_3)^T$$

sunt elemente din S_1 atunci

$$\lambda x+\mu y = (\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2, \lambda x_3+\mu y_3)^T \in S_1,$$

deoarece

$$\begin{cases} -2\lambda x_1+3\lambda x_2-4\lambda x_3=0 \\ -2\mu y_1+3\mu y_2-4\mu y_3=0 \end{cases}$$

implică

$$-2(\lambda x_1+\mu y_1)+3(\lambda x_2+\mu y_2)-4(\lambda x_3+\mu y_3)=0.$$

Analog se demonstrează că S_2 este subspaţiu în $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$.

ii) $S_1 \cap S_2$ este mulţimea $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ din $\mathbb{R}^3$ ale căror coordonate verifică sistemul

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2-4x_3=0 \\ -x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

Matricea acestui sistem este

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un minor de ordinul 2 nenul este

$$MO_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

deci rang $A=2<$ numărul necunoscutelor, ceea ce demonstrează că sistemul este compatibil simplu nedeterminat, în care x_1,x_2 sunt necunoscute principale, iar x_3 este necunoscută secundară. Notăm ξ_3 prin α. Sistemul devine

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2=4\alpha \\ -x_1+x_2=2\alpha \end{cases}$$

cu soluţiile $x_1=-2\alpha$ şi $x_2=0$. Am obţinut

$$x=(-2\alpha,0,\alpha)^T=\alpha(-2,0,1)^T,$$

astfel că $S_1 \cap S_2 = \left\{\alpha(-2,0,1)^T \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\right\} = Span_{\mathbb{R}}\left((-2,0,1)^T\right)$. ■

R În general, reuniunea de subspaţii vectoriale nu este neapărat un subspaţiu vectorial.

Exerciţiu 1.6.2 Fie S_1 şi S_2 subspaţii vectoriale în $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ definite prin

$$S_1 = \left\{ (x,0)^T \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \text{ şi } S_2 = \left\{ (0,y)^T \middle| y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se arate că $S_1 \cup S_2$ nu este subspaţiu vectorial în $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$. ■

Soluţie. Reuniunea lui S_1 şi S_2 este mulţimea

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ (x,y)^T \middle| (x,y)^T \in S_1 \text{ sau } (x,y)^T \in S_2 \right\}.$$

Cum

$$\begin{aligned} (x,y)^T &\in S_1 \text{ rezultă că } y = 0, \\ (x,y)^T &\in S_2 \text{ rezultă că } x = 0, \end{aligned}$$

deducem că

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \middle| y = 0 \text{ sau } x = 0 \right\}.$$

Pe de altă parte, se observă că

$$(2015,0)^T + (0,2015)^T = (2015,2015)^T \notin S_1 \cup S_2$$

deşi $(2015,0)^T \in W_1$ iar $(0,2015)^T \in S_2$. ■

Definiţie 1.6.1 Se numeşte suma unei familii $\{S_i\}_{i\in I}$ de subspaţii vectoriale din spaţiul vectorial (V,K), mulţimea

$$\sum_{i\in I} S_i \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i\in I} v_i \middle| v_i \in S_i, \text{ pentru orice } i \in I \right\}.$$

Propoziţie 1.6.2 Suma unei familii de subspaţii vectoriale este un subspaţiu vectorial.

R Dacă $\{S_i\}_{i\in I}$ este o familie de subspaţii vectoriale din spaţiul vectorial (V,K) atunci

$$\sum_{i\in I} S_i = Span\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right),$$

(echivalent: suma subspaţiilor coincide cu subspaţiul generat de reuniunea subspaţiilor).

1.7 Bază a unui spaţiu vectorial. Dimensiune

Definiţie 1.7.1 Fie (V,K) spaţiu vectorial. Se numeşte bază a spaţiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplineşte condiţiile de mai jos:

i) B este familie liniar independentă;

ii) B este familie de generatori pentru spaţiul V.

R Sistemul de vectori

$$B_c = \left\{ e_1 = (1,0,...,0)^T, ..., e_n = (0,...,1)^T \right\}$$

este o bază a spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ numită baza canonică.

R Sistemul de vectori

$$B = \{1, X, ..., X^n\}$$

este o bază a spaţiului vectorial real $(\mathscr{R}_n[X], \mathbb{R})$ al polinoamelor de grad cel mult n de coeficienţi reali.

R Sistemul de vectori

$$B_c = \left\{ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, ..., e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

este o bază a spaţiului vectorial real $(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ al matricelor de tip $m \times n$ cu elemente reale.

Definiţie 1.7.2 Familia de vectori $X \subset V$ este o familie liniar independentă maximală, dacă X este liniar independentă şi, din faptul că $X \subset Y \subset V$ rezultă că Y nu este liniar independentă.

Definiţie 1.7.3 Familia de vectori $X \subset V$ este o familie minimală de generatori pentru V dacă X este familie de generatori pentru V şi, din faptul că $Y \subset X$ rezultă că Y nu este o familie de generatori pentru V.

În următorul rezultat sunt sugerate definiţii echivalente ale bazei:

Propoziţie 1.7.1 Fie B o mulţime de vectori în (V, K). Sunt echivalente afirmaţiile:
i) B este familie liniar independentă maximală;
ii) B este familie de generatori minimală;
iii) B este bază.

R Dacă pentru o bază se ţine cont şi de ordinea vectorilor în bază, atunci în locul cuvântului bază se va folosi cuvântul reper.

Teoremă 1.7.2 — Teorema de existenţă a bazei. Fie (V, K) spaţiu vectorial finit dimensional. Dacă $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru V în care subsistemul $\{x_i\}_{i=\overline{1,r}}$, $r \leq n$, este liniar independent, atunci există o bază B a lui V astfel încât

$$\{x_1, ..., x_r\} \subseteq B \subseteq \{x_1, ..., x_r, ..., x_n\}.$$

Exerciţiu 1.7.1 În spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ se dau vectorii

$$x_1 = (1, 1, -2), x_2 = (0, -1, 1), x_3 = (-2, -1, -1), x_4 = (1, 1, -7).$$

i) Să se arate că sistemul $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ este un sistem de generatori în spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$.
ii) Să se extragă din S un subsistem S' care să constituie o bază în $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$. ■

Soluţie. i) Fie $w \in \mathbb{R}^3$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Vom arăta că există scalarii λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$w = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4. \tag{1.5}$$

Relaţia (1.5) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} w_1 = \lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ w_2 = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \\ w_3 = -2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 7\lambda_4 \end{cases}$$

a cărui matrice este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Deoarece există un minor de ordin 3 al lui A

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \tag{1.6}$$

nenul, deducem că sistemul este compatibil nedeterminat, astfel că orice vector $w \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima cu vectorii din S, ceea ce înseamnă că S este sistem de generatori.

ii) Vectorii x_1, x_2, x_3 sunt exprimaţi în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ din $\mathbb{R}^3$, astfel $x_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$, $x_2 = -e_2 + e_3$, $x_3 = -2e_1 - e_2 - e_3$.

Determinantul coordonatelor este 4 diferit de zero şi ca atare x_1, x_2, x_3 sunt liniar independenţi. Mai mult, $S' = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază în $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$. ■

R Dacă $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ este sistem de generatori în spaţiul vectorial finit dimensional $V \neq \{0_V\}$ peste corpul K atunci există o bază B a lui V conţinută în G.

Teoremă 1.7.3 Într-un spaţiu vectorial finit dimensional orice două baze au acelaşi număr de elemente.

Definiţie 1.7.4 Numărul elementelor unei baze a spaţiului vectorial (V, K), de dimensiune finită, se numeşte dimensiunea spaţiului. În cazul când (V, K) nu este de dimensiune finită, se spune că (V, K) este infinit dimensional.

Definiţie 1.7.5 Fie (V, K) spaţiu vectorial finit dimensional. Dimensiunea lui (V, K) este prin definiţie egală cu numărul de vectori dintr-o bază a acestuia. Pentru a pune în evidenţă dimensiunea spaţiului vectorial finit dimensional (V, K) se foloseşte notaţia $\dim_K V$.

R Evident $\dim_K \{0_V\} = 0$ deoarece mulţimea vidă, $\{\phi\}$, este o bază pentru el.

R Conform Teoremei 1.7.3 $\dim_K V$ nu depinde de alegerea bazei.

R $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{P}_n[X] = n+1$.

R Pe orice spaţiu vectorial **complex** V se obţine o structură naturală de spaţiu vectorial real prin restricţia scalarilor şi $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V$.

Exerciţiu 1.7.2 Fie spaţiile vectoriale $(\mathbb{C},\mathbb{R}),(\mathbb{R},\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Să se calculeze $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ şi $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$. ■

Soluţie. Vom arăta că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ =1. Pentru aceasta este suficient să determinăm o bază în $(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Observăm că $B_1 = \{1\}$ este o bază în $(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Într-adevăr,

$\{1\}$ este sistem de generatori deoarece $x = 1 \cdot x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$,
$\{1\}$ este sistem liniar independent deoarece $\alpha \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha$ =0,

rezultate care probează că $B_1 = \{1\}$ este o bază în $(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Deducem că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ =numărul de elemente ale bazei B_1=1.

Vom arăta că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ =2. Pentru aceasta este suficient să determinăm o bază în $(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Observăm că $B_2 = \{1,i\}$ este o bază în $(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Într-adevăr,

$\{1,i\}$ este sistem de generatori deoarece $x = a \cdot 1 + b \cdot i$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$ şi $a,b \in \mathbb{R}$,
$\{1,i\}$ este sistem liniar independent deoarece $a \cdot 1 + b \cdot i = 0 \Leftrightarrow a$=$b$=0,

rezultate care probează că $B_2 = \{1,i\}$ este o bază în $(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Din teorie deducem că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$ numărul de elemente ale bazei B_2=2.

Determinăm $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.

Metoda 1. Determinăm o bază în $(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Observăm că $B_3 = \{1\}$ este o bază în $(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Într-adevăr,

$\{1\}$ este sistem de generatori deoarece $z = 1 \cdot z$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$,
$\{1\}$ este sistem liniar independent deoarece $(a + b \cdot i) \cdot 1 = 0_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow a$=$b$=0,

rezultate care probează că $B_3 = \{1\}$ este o bază în $(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Deducem că $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$ numărul de elemente ale bazei B_3=1.

Metoda 2. Cunoaştem că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \frac{2}{2} = 1$ ($G = \{1,i,x,ix\}$ baza!). ■

Exerciţiu 1.7.3 Fie $(V = \mathbb{C}_1[X],\mathbb{C})$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 1 de coeficienţi numere complexe şi nedeterminată X iar $(V = \mathbb{C}_1[X],\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 1 de coeficienţi numere reale şi nedeterminată X. Să se calculeze $\dim_{\mathbb{C}} V$ şi $\dim_{\mathbb{R}} V$. ■

Soluţie. Evident $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[X]$=2 deoarece $B = \{1,X\}$ este baza canonică în $(V,\mathbb{C})$. Într-adevăr, $\{1,X\}$ este sistem de generatori: $\forall p \in \mathbb{C}_1[X]$ are loc $p(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X$ cu a_0,a_1 scalari din spaţiul complex $\mathbb{C}$. Pe de altă parte $\{1,X\}$ este sistem liniar independent:

$$a_0 \cdot 1 + a \cdot X = 0_{\mathbb{C}_1[X]} \text{ dacă şi numai dacă } a_0 = a_1 = 0$$

prin identificarea coeficienţilor. O altă bază în $(V,\mathbb{C})$ este $B = \{2015, 2015 \cdot X\}$.

Mai mult, observăm că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_1[X] = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[X] = 2 \cdot 2 = 4$. ■

Exerciţiu 1.7.4 Să se arate că $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{P}[X] = \infty$ unde $(\mathscr{P}[X],\mathbb{R})$ este spaţiul vectorial real al tuturor polinoamelor cu coeficienţi reali. ■

Soluţie. Într-adevăr, polinoamele $p_0(X) = 1$, $p_1(X) = X$, ... , $p_n(X) = X^n$, ... realizează o familie de generatori, cu $n \in \mathbb{N}$ arbitrar deoarece orice polinom se scrie ca o combinaţie liniară finită de elemente din $\{p_0(X), p_1(X), ..., p_n(X), ..\}$, mai exact

$$\mathscr{P}[X] = Span_{\mathbb{R}}(\{p_0(X), p_1(X), ..., p_n(X), ..\}).$$

Pe de altă parte

$$\text{pentru } i_1 < ... < i_p \text{ arbitrari şi } \lambda_{i_1}X^{i_1} + ... + \lambda_{i_p}X^{i_p} = 0 \text{ avem } \lambda_{i_1} = ... = \lambda_{i_p} = 0$$

adică $\{X^{i_1}, ..., X^{i_p}\}$ este liniar independentă.

Cum $i_1, ..., i_p$ sunt arbitrari deducem că $\{p_0(X), p_1(X), ..., p_n(X), ..\}$ este liniar independentă şi deci bază. Am demonstrat că $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{P}[X] = \infty$. ■

Exerciţiu 1.7.5 Să se determine dimensiunea subspaţiului

$$S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | -x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

şi să se pună în evidenţă o bază a lui S. Să se determine coordonatele elementului $x = (1,3,2)^T \in S$ în baza B. ■

Soluţie. Sistemul $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ este compatibil dublu nedeterminat. Presupunem x_1 necunoscuta principală şi notăm necunoscutele secundare astfel: $x_2 = a$, $x_3 = b$, obţinem $x_1 = a - b$. Deci

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (a - b, a, b)^T = a(1,1,0)^T + b(-1,0,1)^T$$

Atunci $B = \{(1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}$ reprezintă o bază în S. Astfel că

$$S = Span_{\mathbb{R}}\left((1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\right).$$

Dacă există numerele reale λ_1, λ_2 unic determinate astfel încât $y = \lambda_1(1,1,0)^T + \lambda_2(-1,0,1)^T$ atunci $x_B = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B.

Relaţia din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

având soluţia $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, deci $x_B = (3,2)^T$. ■

Exerciţiu 1.7.6 Să se determine dimensiunea subspaţiului vectorial S al lui $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ generat de elementele

$$x_1 = (-1,2,1)^T,\ x_2 = (-2,-3,1)^T,\ x_3 = (-3,-1,2)^T,\ x_4 = (1,5,0)^T.$$

■

Soluţie. Matricea coordonatelor acestor elemente este:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un minor de ordinul 2 nenul este:

$$M_2^A = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$

Minorii de ordinul 3 ce se pot forma cu minorul de ordinul doi sunt:

$$MO_3^1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ MO_3^2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

avem că $rang\ A = 2$ şi deci $rang\ S = 2$. ■

Exerciţiu 1.7.7 Să se găsească dimensiunea şi o bază a subspaţiului soluţiilor sistemului:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 + 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 + 5\alpha_5 = 0. \end{cases}$$

■

Soluţie. Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ cu } M_3^A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 36 \neq 0.$$

Obţinem că $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sunt necunoscute principale, iar α_1, α_5 sunt necunoscute secundare. Le notăm prin a, respectiv prin b.

Sistemul devine

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = -a - 3b \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = -a - b \\ 6\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 = -3a - 5b \end{cases}$$

Cu soluţia

$$\left\{ \alpha_2 = -\frac{11}{6}b - \frac{1}{2}a, \alpha_4 = \frac{2}{3}b, \alpha_3 = \frac{2}{3}b \right\}.$$

Am obţinut $dim_{\mathbb{R}} S = 5 - 3 = 2$. Din

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

avem baza $B = \{x_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0)^T, x_2 = (0, -\frac{11}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)^T\}$ care confirmă dimensiunea. ■

Exerciţiu 1.7.8 Să se stabilească dacă următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^n$ constituie sau nu subspaţii ale lui $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $n \geq 2$. În caz afirmativ, să se determine câte o bază şi dimensiunea fiecărui subspaţiu

b1) $X = \left\{ x = (x_1, ..., x_n)^T \middle| x_1 \in \mathbb{Z}, x_i \in \mathbb{R}, i \geq 2 \right\}$,

b2) $Y = \left\{ x = (x_1, ..., x_n)^T \middle| x_1 = x_2, x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n} \right\}$.

■

Soluţie. X subspaţiu al lui $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dacă

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ şi } x, y \in X \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in X.$$

Fie

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2 ..., x_n)^T \text{ cu } x_1 = 2 \in \mathbb{Z} \text{ şi } x_i \in \mathbb{R}, i \geq 2. \\ \beta &= 0, y = (y_1, y_2 ..., y_n)^T \text{ cu } y_1 \in \mathbb{Z} \text{ şi } y_i \in \mathbb{R}, i \geq 2. \end{aligned}$$

Se observă că

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y &= \frac{1}{3}(2,x_2...,x_n)^T+0\cdot(y_1,y_2...,y_n)^T\\ &= \left(\frac{2}{3},\frac{x_2}{3}...,\frac{x_n}{3}\right)^T+0_{\mathbb{R}^n}=\left(\frac{2}{3},\frac{x_2}{3}...,\frac{x_n}{3}\right)^T\notin X,\end{aligned}$$

adică, X nu este subspaţiu vectorial în $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Probăm că Y este subspaţiu vectorial în $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Fie

$$\begin{aligned}\alpha,\beta &\in \mathbb{R} \text{ şi } x=(x_1,...,x_n)^T\in Y \text{ cu } x_1=x_2\\ \alpha,\beta &\in \mathbb{R} \text{ şi } y=(y_1,...,y_n)^T\in Y \text{ cu } y_1=y_2.\end{aligned}$$

Observăm

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y &= \alpha(x_1,x_2,...,x_n)^T+\beta(y_1,y_2,...,y_n)^T\\ &= (\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,...,\alpha x_n+\beta y_n)^T\in Y\end{aligned}$$

deoarece $(x_1=x_2$ şi $y_1=y_2)\Longrightarrow \alpha x_1+\beta y_1=\alpha x_2+\beta y_2$. Ceea ce demonstrează că Y este subspaţiu vectorial în $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Determinăm o bază în Y. În acest sens, fie $x=(x_1,...,x_n)^T\in Y$ cu $x_1=x_2$. Deoarece $x_1=x_2$ putem scrie

$$x=(x_1,x_1,x_3,...,x_n)^T=x_1(1,1,0...,0)^T+x_3(0,0,1...,0)^T+...+x_n(0,0,...,1)^T.$$

Fie

$$E=\left\{(1,1,0...,0)^T,(0,0,1...,0)^T,...,(0,0,...,1)^T\right\}.$$

Cu această notaţie $x\in Span(E)$. Dimensiunea lui Y este dată de numărul elementelor unei baze din $Span(E)$. Construim matricea A de tip $n\times(n-1)$ având drept coloane coordonatele vectorilor lui E:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\1&0&...&0\\0&1&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{pmatrix}.$$

Cum rangul matricei poate fi cel mult egal cu $n-1$, iar pe de altă parte

$$\begin{vmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

deducem că $rangA=n-1=$ numărul vectorilor din sistem. Astfel, că

$$E=\left\{(1,1,0...,0)^T,(0,0,1...,0)^T,...,(0,0,...,1)^T\right\}$$

este familie liniar independentă maximală şi în concluzie, bază în Y. Am demonstrat că $\dim_{\mathbb{R}}Y=n-1$. ■

■ **Lemă 1.1 — Lema de completare.** Într-un spaţiu vectorial de dimensiune finită orice sistem de vectori liniar independenţi poate fi extins la o bază.

Exerciţiu 1.7.9 Să se completeze vectorii $x_1 = (1,0,1)^T$ şi $x_2 = (2,1,4)^T$ până la o bază a lui $\mathbb{R}^3$. ■

Soluţie. Cum $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ trebuie determinat vectorul $x_3 = (a,b,c)^T$ astfel încât x_1, x_2, x_3 să fie liniar independenţi. Or, echivalent, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix}$$

trebuie să aibă rangul 3. Observăm că $rang A = 3$ pentru o infinitate de valori ale lui a, b, c. Cum ne interesează să adăugăm un singur vector, x_3, putem considera $x_3 = (0,0,2015)^T$. ■

Exerciţiu 1.7.10 Să se demonstreze că

$$S_1 = Span\left(\left\{(1,0,1)^T, (0,1,2)^T\right\}\right)$$

şi

$$S_2 = Span\left(\left\{(1,1,3)^T, (1,-1,-1)^T\right\}\right)$$

determină acelaşi subspaţiu vectorial al lui $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ şi să se determine acesta. ■

Soluţie. Metoda 1. Scriem matricea formată cu vectorii lui S_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi observăm că $rang A_1 = 2 =$ numărul de elemente din $\left\{(1,0,1)^T, (0,1,2)^T\right\}$, fapt ce demonstrează că vectorii din S_1 sunt liniar independenţi. Avem

$$S_1 = \left\{ \alpha_1 (1,0,1)^T + \alpha_2 (0,1,2)^T \middle| \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Scriem matricea formată cu vectorii lui S_2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

şi observăm că $rang A_2 = 2 =$ numărul de elemente din $\left\{(1,1,3)^T, (1,-1,-1)^T\right\}$, fapt ce demonstrează că vectorii din S_2 sunt liniar independenţi. Avem

$$S_2 = \left\{ a(1,1,3)^T + b(1,-1,-1)^T \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Am obţinut că

$$B_1 = \left\{(1,0,1)^T, (0,1,2)^T\right\} \overset{bază}{\subset} S_1 \text{ şi } B_2 = \left\{(1,1,3)^T, (1,-1,-1)^T\right\} \overset{bază}{\subset} S_2.$$

Demonstrăm că $S_1 = S_2$ sau echivalent ($S_1 \subseteq S_2$ şi $S_1 \supseteq S_2$).

" $S_1 \subseteq S_2$ "

Cercetăm dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1,0,1)^T = a(1,1,3)^T + b(1,-1,-1)^T \iff (1,0,1)^T = (a+b, a-b, 3a-b)^T$$

adică, dacă sistemul

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases}$$

are soluţie. Clar, $\left[a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}\right]$ este soluţia sistemului. Am demonstrat că

$$(1,0,1)^T \in S_2. \tag{1.7}$$

Cercetăm dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(0,1,2)^T = a(1,1,3)^T + b(1,-1,-1)^T \iff (0,1,2)^T = (a+b, a-b, 3a-b)^T$$

adică, dacă sistemul

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \\ 3a-b=2 \end{cases}$$

are soluţie. Clar, $\left[a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}\right]$ este soluţia sistemului. Am demonstrat că

$$(0,1,2)^T \in S_2. \tag{1.8}$$

Din (1.7) şi (1.8) deducem că $S_1 \subseteq S_2$.

"$S_1 \supseteq S_2$"

Cercetăm dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1,1,3)^T = a(1,0,1)^T + b(0,1,2)^T \iff (1,1,3)^T = (a, b, a+2b)^T$$

adică, dacă sistemul

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ a+2b=1 \end{cases}$$

are soluţie. Clar, $[a=1, b=0]$ este soluţia sistemului. Am demonstrat că

$$(1,1,3)^T \in S_1. \tag{1.9}$$

Cercetăm dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1,-1,-1)^T = a(1,0,1)^T + b(0,1,2)^T \iff (1,-1,-1)^T = (a, b, a+2b)^T$$

adică, dacă sistemul

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ a+2b=-1 \end{cases}$$

are soluţie. Clar, $[a = 1, b = -1]$ este soluţia sistemului. Am demonstrat că

$$(1,-1,-1)^T \in S_1. \tag{1.10}$$

Din (1.9) şi (1.10) deducem că $S_2 \subseteq S_1$. Cum ($S_1 \subseteq S_2$ şi $S_1 \supseteq S_2$) au loc, deducem că $S_1 = S_2$.

Metoda 2. Arătăm că $S_1 = S_2$. Este suficient să demonstrăm că

i) $\dim_{\mathbb{R}} S_1 = \dim_{\mathbb{R}} S_2$
ii) $S_1 \subseteq S_2$

fapt ce implică $S_1 = S_2$ (Într-adevăr, orice bază a lui S_1 poate fi extinsă până la o bază a lui S_2. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}} S_1 = \dim_{\mathbb{R}} S_2$ rezultă că orice bază a lui S_1 este în acelaşi timp bază a lui S_2). În acest sens, observăm că

$$\left.\begin{array}{ll} B_1 = \left\{(1,0,1)^T,(0,1,2)^T\right\} \overset{bază}{\subset} S_1 & \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_1 = 2 \\ B_2 = \left\{(1,1,3)^T,(1,-1,-1)^T\right\} \overset{bază}{\subset} S_2 & \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_2 = 2 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_1 = \dim_{\mathbb{R}} S_2$ adică i) este îndeplinit. Rămâne să probăm ii). Dacă $x \in S_1$ atunci

$$x = \alpha_1 (1,0,1)^T + \alpha_2 (0,1,2)^T \text{ cu } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ (arbitrari)}$$

iar dacă $x \in S_2$ vom avea

$$\alpha_1 (1,0,1)^T + \alpha_2 (0,1,2)^T = \beta_1 (1,1,3)^T + \beta_2 (1,-1,-1)^T \tag{1.11}$$

cu β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$. Dar relaţia (1.11) este echivalentă cu sistemul neomogen

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \\ 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \\ 1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 = 3\cdot\beta_1 - \beta_2 \end{cases} \tag{1.12}$$

în necunoscutele $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ (şi necunoscute α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ dacă dorim să demonstrăm că $S_1 \supseteq S_2$). Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ cu } rang A = 2.$$

Pe de altă parte

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & -1 & \alpha_2 \\ 3 & -1 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} \text{ cu } rang\overline{A} = 2.$$

Cum $rang A = 2 = rang\overline{A}$ deducem că (1.12) este compatibil şi deci $S_1 \subseteq S_2$. Am probat că i), ii) sunt adevărate şi deci $S_1 = S_2$. ■

Teoremă 1.7.4 — Teorema de caracterizare a bazei. Fie (V,K) spaţiu vectorial finit dimensional nenul. Un sistem de vectori $B = \{x_1,...,x_n\}$ este bază a lui V dacă şi numai dacă pentru orice $x \in V$ există şi sunt unici $\alpha_1,...,\alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.

Demonstraţie. "$\subset$" Cum B este bază a lui V deducem că este şi sistem de generatori pentru V. Aşadar, pentru orice $x \in V$ există $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n. \tag{1.13}$$

Pe de altă parte, dacă $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ nu ar fi unici ar exista $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ astfel încât

$$x = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n. \tag{1.14}$$

Ar rezulta, din relaţiile (1.13) şi (1.14), că

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n$$

sau echivalent

$$(\beta_1 - \alpha_1)x_1 + ... + (\beta_n - \alpha_n)x_n = 0_V \Longrightarrow \beta_1 = \alpha_1, ..., \beta_n = \alpha_n$$

unde am folosit faptul că $x_1, ..., x_n$ sunt liniar independente.

"$\supset$" Presupunem că pentru orice $x \in V$ există şi sunt unici $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n.$$

Aceasta implică că B este sistem de generatori.

Rămâne să demonstrăm că este şi liniar independent. Observăm că $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$ putem scrie

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V = 0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n.$$

Ţinând cont că scrierea lui 0_V este unică deducem că $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

R Într-un spaţiu vectorial $n-$dimensional, un sistem format din n vectori liniar independenţi formează o bază.

R Scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ din relaţia (1.13) se numesc coordonatele vectorului x în baza B, iar vectorul $x_B = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$ se numeşte vectorul coordonatelor lui x în baza B.

Exerciţiu 1.7.11 Să se arate că elementele $x_1 = (3,3,3)^T, x_2 = (3,3,0)^T, x_3 = (3,0,0)^T$ constituie o bază B a spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Să se determine coordonatele elementelor $x = (12, -9, 6)^T$ şi $y = (a,b,c)^T$ în baza B. ■

Soluţie. x_1, x_2, x_3 este sistem liniar independent deoarece matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

coordonatelor acestor elemente are rangul 3.

x_1, x_2, x_3 este sistem de generatori deoarece dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este finită. Am demonstrat că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază.

Se ştie că dacă există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unic determinate astfel încât

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

atunci $x_B = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B.

Relaţia din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 12 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = -9 \\ 3\lambda_1 = 6 \end{cases}$$

având soluţia $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 7$, deci $x_B = (2, -5, 7)^T$.

Analog, dacă există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unic determinate astfel încât

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

atunci $y_B = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ reprezintă coordonatele elementului y în baza B.

Relaţia din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = a \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = b \\ 3\lambda_1 = c \end{cases}$$

având soluţia $\lambda_1 = \frac{1}{3}c, \lambda_2 = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c, \lambda_3 = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$, deci $x_B = (\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c, \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b)^T$. ■

Exerciţiu 1.7.12 În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră elementele

$$x_1 = (-2, 1, -1)^T, x_2 = (-1, 1, -2)^T, x_3 = (1, -2, 1)^T.$$

i) Să se arate că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este o bază a lui $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

ii) Să se determine coordonatele elementului $x = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ în baza B. ■

Soluţie. i) x_1, x_2, x_3 este sistem liniar independent deoarece matricea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a coordonatelor acestor elemente are rangul 3.

x_1, x_2, x_3 este sistem de generatori deoarece dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este finită. Am demonstrat că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază.

ii) Se ştie că dacă există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unic determinate astfel încât

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

atunci $x_B = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B.

Relaţia din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = \alpha \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = \beta \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = \gamma \end{cases}$$

având soluţia

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{4}\beta - \frac{3}{4}\alpha, \lambda_2 = \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta - \frac{3}{4}\gamma, \lambda_3 = -\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma,$$

deci

$$x_B = (\frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{4}\beta - \frac{3}{4}\alpha, \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta - \frac{3}{4}\gamma, -\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma)^T.$$

■

Exerciţiu 1.7.13 În spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ se consideră subspaţiul vectorial

$$S = \{(x_1,x_2,x_3)^T \in R^3 \,|x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

i) Să se determine o bază B a subspaţiului S;
ii) Să se arate că $x = (-3,-1,0)^T \in S$;
iii) Să se determine x_B. ■

Soluţie. i) Sistemul $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$ este compatibil dublu nedeterminat. Presupunem x_1 necunoscuta principală şi notăm necunoscutele secundare astfel: $x_2 = a$, $x_3 = b$, obţinem $x_1 = 3a - 2b$. Deci

$$(x_1,x_2,x_3)^T = (3a-2b,a,b)^T = a(3,1,0)^T + b(-2,0,1)^T$$

Atunci $B = \{(3,1,0)^T,(-2,0,1)^T\}$ reprezintă o bază în S;

ii) Deoarece $-3+3+0 = 0$ deducem că $x \in S$;

iii) Dacă există numerele reale λ_1,λ_2 unic determinate astfel încât

$$x = \lambda_1(3,1,0)^T + \lambda_2(-2,0,1)^T$$

atunci $x_B = (\lambda_1,\lambda_2)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B.

Relaţia din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = -3 \\ \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

având soluţia $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$, deci $x_B = (-1,0)^T$. ■

Exerciţiu 1.7.14 Pentru spaţiul liniar al polinoamelor de grad cel mult n şi coeficienţi reali: $(\mathscr{P}_n[X],\mathbb{R})$ să se determine coordonatele polinomului

$$p(x) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

în baza canonică $B_c = \left\{1,X,X^2,...,X^n\right\}$ şi în baza

$$B_1 = \left\{1,X-a,(X-a)^2,...,(X-a)^n\right\}.$$

■

Soluţie. Cum $p(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + ... + a_n \cdot X^n$ deducem că $p_{B_c} = (a_0,a_1,...,a_n)$. Elementele lui B_1 sugerează să ne gândim la dezvoltări în serie Taylor. Astfel că, vom deriva succesiv p:

$$\begin{array}{rcl} p'(X) & = & 0 + a_1 + 2a_2X + ... + na_nX^{n-1} \\ p''(X) & = & 0 + 0 + 2a_2 + ... + n(n-1)a_nX^{n-2} \\ & & ... \\ p^{(n)}(X) & = & n\cdot(n-1)...2\cdot 1\cdot a_n \end{array}$$

şi vom scrie polinomul Taylor de grad n :

$$p(X) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(X-a) + ... + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

Evident $p_{B_c} = \left(p(a), \frac{p'(a)}{1!},..., \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\right)$. ■

Suntem în măsură să dezvoltăm o teorie, mai generală, privind sistemele de vectori.

1.8 Rangul unui sistem de vectori

Definiţie 1.8.1 Dacă $M \subset V$ este un sistem de vectori din spaţiul vectorial V peste corpul K, atunci rangul lui M este dimensiunea subspaţiului vectorial generat de M ($rangM = dim_K Span(M)$).

Teoremă 1.8.1 — Teorema rangului. Pentru o matrice rangul sistemului de vectori linie este egal cu rangul sistemului de vectori coloană.

Definiţie 1.8.2 Rangul comun al sistemelor de vectori linii sau coloane ale unei matrice se numeşte rangul ei.

R Dacă $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ este nenulă cu rangul $p \leq \min(m,n)$ şi determinantul principal Δ_p atunci coloanele corespunzătoare lui Δ_p (respectiv liniile) sunt liniar independente în $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (respectiv $(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$) iar restul coloanelor matricei sunt combinaţii liniare ale lor.

R Prin transformări elementare aplicate sistemului de vectori linie sau coloane, rangul unei matrice nu se modifică.

R Prin transformări elementare asupra liniilor şi coloanelor, orice matrice A poate fi transformată într-o matrice B, având toate elementele nule cu excepţia primelor r elemente de pe diagonala principală, care să fie egale cu 1. Matricea A are atunci rangul r.

R Familia de vectori $\{x_1,...,x_n\}$ a spaţiului vectorial real $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ este liniar independentă dacă şi numai dacă rangul matricei ce are pe coloane componentele vectorilor $x_1,...,x_n$ are rangul n.

R Familia de vectori $\{x_1,...,x_n\}$ a spaţiului vectorial real $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ este liniar dependentă dacă şi numai dacă rangul matricei care are pe coloane (sau linii) componentele vectorilor $\{x_1,...,x_n\}$ are rangul k mai mic decât n. Mai mult, orice subfamilie a acesteia care conţine vectori ce au componente într-un minor de ordinul k, nenul este liniar independentă. Numărul maxim de elemente al unei subfamilii liniar independente este egal cu rangul k al matricei.

Exerciţiu 1.8.1 Să se determine rangul următoarelor sisteme de elemente din spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\{(-2,2,0)^T,(4,-2,2)^T,(2,0,2)^T\right\};\\
S_2 &= \left\{(0,1,1)^T,(1,0,1)^T,(1,1,0)^T\right\};\\
S_3 &= \left\{(1,2,1)^T,(-1,1,-1)^T,(2,-1,3)^T,(2,2,3)^T\right\};\\
S_4 &= \left\{(1,2,-1)^T,(-1,-2,1)^T,(2,4,-2)^T\right\}.
\end{aligned}$$

■

Soluţie. A determina rangul unui sistem de elemente este echivalent cu a determina rangul matricei coordonatelor elementelor ce alcătuiesc sistemul, aşadar

$$A_{S_1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ şi } \det(A_{S_1}) = 0$$

argumente ce implică A_{S_1} are rangul 2 deci şi S_1 are rangul 2. Analog,

$$A_{S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ are rangul 3 deci şi } S_2 \text{ are rangul 3.}$$

$$A_{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ are rangul 3 deci şi } S_3 \text{ are rangul 3.}$$

$$AS_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ are rangul 1 deci şi } S_4 \text{ are rangul 1.}$$

■

Exerciţiu 1.8.2 Să se pună în evidenţă elementele liniar independente din mulţimea $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ din spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ unde $x_1 = (2,-1,-3)^T$, $x_2 = (-1,2,1)^T$, $x_3 = (1,1,-2)^T$. ■

Soluţie. Deoarece rangul matricei sistemului S este 2 deducem că nu putem avea elemente liniar independente decât 2 câte 2 sau câte un element. Se observă că $\{x_1\}$, $\{x_2\}$,$\{x_3\}$, $\{x_1,x_2\}$, $\{x_1,x_3\}$ şi $\{x_2,x_3\}$ verifică cerinţa problemei. ■

Teoremă 1.8.2 — Teorema schimbului a lui Steinitz. Dacă (V,K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$, $I = \{v_1,...,v_r\} \subset V$ este sistem liniar independent, iar $G = \{u_1,...,u_m\} \subset V$ este sistem de generatori pentru V atunci există $i_1,...,i_{m-r} \in \{1,2,...,m\}$ astfel încât $\left\{v_1,...,v_r, u_{i_1},...,u_{i_{m-r}}\right\}$ este sistem de generatori pentru V.

■ **Exemplu 1.8.1** Fie spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Evident $I = \left\{v_1 = (1,2)^T\right\} \subset (\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ este sistem liniar independent iar $G = \left\{u_1 = (2,2)^T, u_2 = (2,4)^T\right\} \subset (\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ este sistem de generatori însă se constată că $\left\{v_1 = (1,2)^T, u_1 = (2,2)^T\right\} \subset (\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ este sistem de generatori, dar

$$\left\{v_1 = (1,2)^T, u_2 = (2,4)^T\right\} \subset (\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

nu este sistem de generatori. ■

1.9 Metoda pivotului Gauss-Jordan. Lema substituţiei

Teoremă 1.9.1 — Lema substituţiei. Fie (V,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$, $B = \{a_1,...,a_n\}$ bază a lui V iar

$$x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + ... + \xi_n a_n \quad \text{şi} \quad y = \eta_1 a_1 + ... + \eta_n a_n.$$

Are loc:

i) Dacă $F = \{a_1,...,a_{i-1}, x, a_{i+1},...,a_n\}$ este bază pentru V, atunci $\xi_i \neq 0$.

ii) Dacă $\xi_i \neq 0$ atunci $F = \{a_1,...,a_{i-1}, x, a_{i+1},...,a_n\}$ este bază pentru V şi avem

$$y = \eta_1^* a_1 + ... + \eta_i^* x + ... + \eta_n^* a_n$$

unde $\eta_i^* = \frac{\eta_i}{\xi_i}$ şi $\eta_j^* = \eta_j - \frac{\eta_i}{\xi_i}\xi_j$, $j \neq i$, $j = \overline{1,n}$.

Demonstraţie. i) "$\subset$" (Necesitatea). Fie F bază pentru V. Dacă prin absurd $\xi_i = 0$ atunci

$$x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + ... + \xi_n a_n \tag{1.15}$$

sau echivalent $\xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + (-1)x + \xi_{i+1} a_{i+1} + ... + \xi_n a_n = 0_V$ relaţie care arată că vectorii din F sunt liniar dependenţi. Or, aceasta este o contradicţie cu F bază pentru V. Deci $\xi_i \neq 0$.

ii) "$\supset$" (Suficienţa). Presupunem $\xi_i \neq 0$ şi fie combinaţia liniară

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i x + ... + \lambda_n a_n = 0_V$$

sau folosind scrierea (1.15) echivalent cu

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_i (\xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + ... + \xi_n a_n) + ... + \lambda_n a_n = 0_V$$

ce implică

$$\begin{cases} \lambda_i \xi_i = 0 \\ \lambda_j + \lambda_i \xi_j = 0, \ j \neq i \end{cases} \Longrightarrow \lambda_i = 0 \text{ şi, respectiv } \lambda_j = 0$$

adică vectorii $a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n$ formează o bază în V (sunt liniar independenţi şi sunt în număr de $n = \dim_K V$). Coordonatele vectorului y în raport cu baza F se obţin astfel:

$$y = \eta_1^* a_1 + ... + \eta_i^* \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j + ... + \eta_n^* a_n = (\eta_1^* + \eta_i^* \xi_1) a_1 + ... + \eta_i^* \xi_i a_i + ... + (\eta_n^* + \eta_i^* \xi_n) a_n$$

adică

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \eta_1 = \eta_1^* + \eta_i^* \xi_1 & ... & \eta_1^* = \eta_1 - \frac{\eta_i}{\xi_i} \xi_1 \\ ... & & ... \\ \eta_i = \eta_i^* \xi_i & \Longrightarrow & \eta_i^* = \frac{\eta_i}{\xi_i} \\ ... & ... & ... \\ \eta_n = \eta_n^* + \eta_i^* \xi_n & & \eta_n^* = \eta_n - \frac{\eta_i}{\xi_i} \xi_n \end{array} \right\}$$

formule care determină noile coordonate ale vectorului $y \in V$ în raport cu baza F din V.

R Aplicaţii ale lemei substituţiei sunt: rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, calculul inversei unei matrice, determinarea rangului unei matrice, extragerea unei baze dintr-un sistem de generatori, determinarea coordonatelor unui vector într-o bază etc. În rezolvarea acestor probleme ea se reprezintă astfel

B	x	y
a_1	ξ_1	η_1
...	...	...
a_i	$\xi_i \neq 0$	η_i
...	...	...
a_n	ξ_n	η_n

$\Longrightarrow$

B	x	y
a_1	0	$\eta_1^* = \frac{\xi_i \eta_1 - \eta_i \xi_1}{\xi_i}$
...	...	...
x	1	$\eta_1^* = \eta_i / \xi_i$
...	...	...
a_n	0	$\eta_n^* = \frac{\eta_n \xi_i - \eta_i \xi_n}{\xi_i}$

(ξ_i se numeşte pivot iar procedura se numeşte **m**etoda pivotului **a lui** Gauss-Jordan)

Exerciţiu 1.9.1 În $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră baza

$$E = \left\{ a_1 = (3, 1, -1)^T, a_2 = (1, 2, -2)^T, a_3 = (2, -1, 3)^T \right\}$$

şi vectorul $x = 2a_1 + 3a_2 - a_3$. Să se calculeze coordonatele lui x faţă de baza $F = \{b_1, b_2, b_3\}$

unde

$$\begin{aligned} b_1 &= 2a_1+2a_2+3a_3, \\ b_2 &= a_1+4a_2+2a_3, \\ b_3 &= 3a_1+a_2+5a_3. \end{aligned}$$

■

Soluţie. Observăm că

$$A \overset{notăm}{=} A_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ are } \det A = 5$$

iar din tabelul:

Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	e_1	e_2	e_3
e_1	$\boxed{2}$	1	3	1	0	0
e_2	2	4	1	0	1	0
e_3	3	2	5	0	0	1
C_1^A	1	1/2	3/2	1/2	0	0
e_2	0	$\boxed{3}$	-2	-1	1	0
e_3	0	1/2	1/2	-3/2	0	1
C_1^A	1	0	11/6	2/3	-1/6	0
C_2^A	0	1	-2/3	-1/3	1/3	0
e_3	0	0	$\boxed{5/6}$	-4/3	-1/6	1
C_1^A	1	0	0	18/5	1/5	-11/5
C_2^A	0	1	0	-7/5	1/5	4/5
C_3^A	0	0	1	-8/5	-1/5	6/5

deducem că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18/5 & 1/5 & -11/5 \\ -7/5 & 1/5 & 4/5 \\ -8/5 & -1/5 & 6/5 \end{pmatrix}.$$

Aşadar

$$x_F = (A)^{-1} x_E = \begin{pmatrix} 18/5 & 1/5 & -11/5 \\ -7/5 & 1/5 & 4/5 \\ -8/5 & -1/5 & 6/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

■

Exerciţiu 1.9.2 Folosind metoda pivotului, să se determine rangul următoarei matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

■

Soluţie. Din tabelul:

	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A
e_1	$\boxed{1}$	3	1	-2	-3
e_2	1	4	3	-1	-4
e_3	2	3	-4	-7	-3
e_4	3	8	1	-7	-8
C_1^A	1	3	1	-2	-3
e_2	0	$\boxed{1}$	2	1	-1
e_3	0	-3	-6	-3	3
e_4	0	-1	-2	-1	1
C_1^A	1	0	-5	-5	0
C_2^A	0	1	2	1	-1
e_3	0	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0

deducem că $rang\ A = 2$ (deoarece în bază au intrat 2 elemente). ■

Exerciţiu 1.9.3 Să se determine, cu ajutorul metodei pivotului, $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 3 \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 11\alpha_3 - 7\alpha_4 = a \end{cases}$$

să fie compatibil. ■

Soluţie. Calculele se organizează astfel

Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	b
e_1	$\boxed{1}$	2	-3	1	1
e_2	3	1	1	-2	3
e_3	3	-4	11	-7	a
C_1^A	1	2	-3	1	1
e_2	0	$\boxed{-5}$	10	-5	0
e_3	0	-10	20	-10	a-3
C_1^A	1	0	1	-1	1
C_2^A	0	1	-2	1	0
e_3	0	0	0	0	a-3

Din tabel observăm că sistemul este compatibil dacă şi numai dacă $a = 3$. (În acest caz rangul matricei sistemului ar fi egal cu rangul matricei extinse). ■

Exerciţiu 1.9.4 i) Să se rezolve sistemul următor cu ajutorul metodei pivotului:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 7 \end{cases}.$$

ii) Să se arate că $B = \left\{x_1 = (1,1,2)^T, x_2 = (1,2,1)^T, x_3 = (1,-1,2)^T\right\}$ formează o bază în $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ şi să se determine coordonatele lui $x = (8,3,7)^T$ în baza B.

iii) Să se calculeze $A^{-1}\cdot C$ unde $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ iar $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$. ■

Soluţie. i) Din tabelul:

i)	α_1	α_2	α_3	Termenul liber
e_1	$\boxed{1}$	1	1	8
e_2	1	2	-1	3
e_3	2	1	2	7
α_1	1	1	1	8
e_2	0	$\boxed{1}$	-2	-5
e_3	0	-1	0	-9
α_1	1	0	3	13
α_2	0	1	-2	-5
e_3	0	0	$\boxed{-2}$	-14
α_1	1	0	0	-8
α_2	0	1	0	9
α_3	0	0	1	7

$\overset{iii)}{\Longrightarrow}$

	C_1^A	C_2^A	C_1^C	C_2^C
e_1	$\boxed{1}$	1	1	1
e_2	1	2	1	3
C_1^A	1	1	1	1
e_2	0	$\boxed{1}$	0	2
C_1^A	1	0	1	-1
C_2^A	0	1	0	2

$\Longrightarrow A^{-1}C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

obţinem $\alpha_1=-8,\alpha_2=9,\alpha_3=7$.

ii) Din i) punctul i) rezultă că rangul matricei formată cu vectorii x_1,x_2,x_3 este 3. Aşadar B este o familie liniar independentă. Cum $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3=3$ deducem că B este şi sistem de generatori. Am demonstrat că $B=\{x_1,x_2,x_3\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$, fapt ce rezulta direct din Lema substituţiei! Vectorul coordonatelor lui x în baza B este $x_B=(-8,9,7)^T$. ■

Exerciţiu 1.9.5 Să se determine dimensiunea subspaţiului $S\subset(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ generat de elementele $x_1=(1,-1,2)^T$, $x_2=(2,-3,1)^T$, $x_3=(3,-4,3)^T$, $x_4=(-1,2,1)^T$, $x_5=(2,-2,4)^T$, să se pună în evidenţă o bază B a lui S şi să determine coordonatele lui x_5 în baza B. ■

Soluţie. Din tabelul

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	$\boxed{1}$	2	3	-1	2
e_2	-1	-3	-4	2	-2
e_3	2	1	3	1	4
x_1	1	2	3	-1	2
e_2	0	$\boxed{-1}$	-1	1	0
e_3	0	-3	-3	3	0
x_1	1	0	1	1	2
x_2	0	1	1	-1	0
e_3	0	0	0	0	0

deducem că dimensiunea lui S este 2, că $B=\{x_1,x_2\}$ este o bază a lui S şi $(x_5)_B=(2,0)^T$. ■

Exerciţiu 1.9.6 Fie $m\in\mathbb{R}$ şi $X=Span_{\mathbb{R}}(\{b_2,b_3,b_4\})\subset(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ unde $b_1=(5,2,3)^T$, $b_2=(0,1,-1)^T$, $b_3=(2,-1,3)^T$, $b_4=(m,0,2)^T$.

i) Arătaţi că X este subspaţiu vectorial în $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ şi determinaţi dimensiunea sa.

ii) Folosind metoda de pivotare Gauss-Jordan să se determine coordonatele vectorului

b_1 într-un reper al lui $(X,\mathbb{R})$ format doar cu vectori din $\{b_2,b_3,b_4\}$ în situaţia în care $m=2$.
■

Soluţie. i) Fie $v_1,v_2\in X$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Din $v_1,v_2\in X$ rezultă că există α_1^1, α_1^2, α_1^3, α_2^1, α_2^2, $\alpha_2^3\in\mathbb{R}$ astfel încât $v_1=\alpha_1^1b_2+\alpha_1^2b_3+\alpha_1^3b_4$ şi $v_2=\alpha_2^1b_2+\alpha_2^2b_3+\alpha_2^3b_4$. Astfel că,

$$\begin{aligned}\alpha v_1+\beta v_2 &= \alpha\left(\alpha_1^1b_2+\alpha_1^2b_3+\alpha_1^3b_4\right)+\beta\left(\alpha_2^1b_2+\alpha_2^2b_3+\alpha_2^3b_4\right)\\ &= \left(\alpha\alpha_1^1+\beta\alpha_2^1\right)b_2+\left(\alpha\alpha_1^2+\beta\alpha_2^2\right)b_3+\left(\alpha\alpha_1^3+\beta\alpha_2^3\right)b_4\in X\end{aligned}$$

adică X este subspaţiu vectorial în $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$. Pentru a determina $\dim_{\mathbb{R}}X$ căutăm o bază în X. Desigur, având în vedere conţinutul de la punctul ii) este recomandat ca, pentru simplificarea calculelor viitoare, să extragem o bază din X folosind metoda de pivotare Gauss-Jordan:

	$\downarrow$ b_2	$\downarrow$ b_3	$\downarrow$ b_4	b_1	
$\longleftarrow e_1$	0	$\boxed{2}$	m	5	linia pivotului
e_2	1	-1	0	2	
e_3	-1	3	2	3	
b_3	0	1	m/2	5/2	linia pivotului se împarte la pivot
$\longleftarrow e_2$	$\boxed{1}$	0	*	9/2	$* = \frac{2\cdot 0-(-1)*m}{2}=\frac{m}{2}$ dreptunghi $\begin{array}{cc}\boxed{2} & m\\ -1 & 0\end{array}$
e_3	-1	0	(4-3m)/2	-9/2	
b_3	0	1	** $\left(=\frac{m}{2}\right)$	5/2	$** = \frac{1\cdot(m/2)-(0)*(m/2)}{1}=\frac{m}{2}$ dreptunghi $\begin{array}{cc}0 & m/2\\ \boxed{1} & m/2\end{array}$
b_2	1	0	m/2	9/2	
$\longleftarrow e_3$	0	0	$\boxed{2-m}$	0	Dacă $m=2$ ne oprim. Presupunem $m\neq 2$ şi continuăm tabelul.
b_3	0	1	0	5/2	
b_2	1	0	0	9/2	
b_4	0	0	1	0	

Discuţie:

Caz 1: Dacă $m=2$. Cum în baza canonică $\{e_1,e_2,e_3\}$ a intrat b_3,b_2 deducem că $\{b_2,b_3\}$ este sistem liniar independent. În plus, $X=Span_{\mathbb{R}}\left(\{b_2,b_3\}\right)$ deducem că $B_1=\{b_2,b_3\}$ este bază în X şi deci $\dim_{\mathbb{R}}X=2$.

Caz 2: Dacă $m\neq 2$. Cum în baza canonică $\{e_1,e_2,e_3\}$ a intrat b_2,b_3,b_4 deducem că $\{b_2,b_3,b_4\}$ este sistem liniar independent. În plus, $X=Span_{\mathbb{R}}\left(\{b_2,b_3,b_4\}\right)$ deducem că $B_2=\{b_2,b_3,b_4\}$ este bază în X şi deci $\dim_{\mathbb{R}}X=3$.

ii) Pentru $m=2$ am văzut că din vectorii b_2,b_3,b_4 doar $B_1=\{b_2,b_3\}$ este bază în X. Astfel că, $(b_1)_{B_1}=(9/2,5/2)^T$. Remarcăm, în plus, că pentru $m\neq 2$ avem baza $B_2=\{b_2,b_3,b_4\}$ şi deci $(b_1)_{B_2}=(9/2,5/2,0)^T$. ■

1.10 Matricea de trecere de la un reper la altul

Definiţie 1.10.1 Fie (V,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V=n\in\mathbb{N}^*$ iar $E=\{a_1,...,a_n\}$ şi $F=\{b_1,...,b_n\}$ repere ale sale. Matricea ale cărei coloane sunt formate de coordonatele vectorilor reperului F în raport cu reperul E se numeşte matricea de trecere de la reperul E la reperul F.

R Dacă $b_i=\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}a_j$, $i=1,2,...,n$ atunci matricea de trecere de la reperul E la reperul F

este

$$A_{E,F}=\left(\begin{array}{ccc}\alpha_{11} & ... & \alpha_{n1}\\ ... & ... & ...\\ \alpha_{1n} & ... & \alpha_{nn}\end{array}\right). \tag{1.16}$$

Exerciţiu 1.10.1 Fie $B_c=\left\{1,X,X^2,X^3,X^4\right\}$ reperul canonic din spaţiul liniar al polinoamelor de grad cel mult 4 : $(\mathscr{P}_4[X],\mathbb{R})$. Să se determine matricea de trecere de la reperul B_c la reperul $B_1=\left\{1,X+1,(X+1)^2,(X+1)^3,(X+1)^4\right\}$. ■

Soluţie. Cu următoarele notaţii

$$\begin{aligned}e_1(X) &= 1,\ e_2(X)=X,\ e_3(X)=X^2,\ e_4(X)=X^3,\ e_5(X)=X^4\\ g_1(X) &= 1, g_2(X)=X+1, g_3(X)=(X+1)^2, g_4(X)=(X+1)^3, g_5(X)=(X+1)^4\end{aligned}$$

observăm că putem scrie

$$\begin{aligned}g_1(X) &= 1\cdot e_1(X)+0\cdot e_2(X)+0\cdot e_3(X)+0\cdot e_4(X)+0\cdot e_5(X)\\ g_2(X) &= 1\cdot e_1(X)+1\cdot e_2(X)+0\cdot e_3(X)+0\cdot e_4(X)+0\cdot e_5(X)\\ g_3(X) &= 1\cdot e_1(X)+2\cdot e_2(X)+1\cdot e_3(X)+0\cdot e_4(X)+0\cdot e_5(X)\\ g_4(X) &= 1\cdot e_1(X)+3\cdot e_2(X)+3\cdot e_3(X)+1\cdot e_4(X)+0\cdot e_5(X)\\ g_5(X) &= 1\cdot e_1(X)+4\cdot e_2(X)+6\cdot e_3(X)+4\cdot e_4(X)+1\cdot e_5(X)\end{aligned}$$

şi deci matricea de trecere de la reperul B_c la reperul B_1 este

$$A_{B_c,B_1}=\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

■

Teoremă 1.10.1 — Schimbarea bazei. Fie (V,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V=n\in\mathbb{N}^*$, $E=\{x_1,...,x_n\}$ şi $F=\{y_1,...,y_n\}$ repere ale sale. Dacă trecerea de la reperul E la reperul F se face prin matricea $A_{E,F}$ definită în (1.16) atunci trecerea de la coordonatele lui x în reperul E la coordonatele lui x în reperul F se face prin matricea $(A_{E,F})^{-1}$. Are loc formula $x_F=(A_{E,F})^{-1}x_E$.

Demonstraţie. Din E reper deducem că $\forall x\in V$, $\exists!\ \alpha_1,...,\alpha_n\in K$ astfel încât $x=\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n$.

Fie $y_i=\alpha_{i1}x_1+...+\alpha_{in}x_n$, $i=1,...,n$ şi $\beta_1,...,\beta_n$ coordonatele lui x faţă de reperul F, adică $x=\beta_1y_1+...+\beta_ny_n$. Stabilim o legătură între coordonatele $\alpha_1,...,\alpha_n$ şi $\beta_1,...,\beta_n$. Avem

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n=\beta_1y_1+...+\beta_ny_n\\ &= \beta_1(\alpha_{11}x_1+...+\alpha_{1n}x_n)+...+\beta_n(\alpha_{n1}x_1+...+\alpha_{nn}x_n)\\ &= (\beta_1\alpha_{11}+...+\beta_n\alpha_{n1})x_1+...+(\beta_1\alpha_{1n}+...+\beta_n\alpha_{nn})x_n=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\beta_j\alpha_{ji}\right)x_i.\end{aligned}$$

Cum reprezentarea vectorului x în reperul B este unică deducem că $\alpha_i=\sum_{j=1}^n\beta_j\alpha_{ji}$ pentru orice $i=1,...,n$, ori în scrierea matriceală, relaţie echivalentă cu $x_E=A_{E,F}\cdot x_F$. Rezolvând ecuaţia matriceală în raport cu x_F, obţinem $x_F=(A_{E,F})^{-1}x_E$.

2. Operatori liniari

2.1 Operatori liniari şi teoreme de izomorfism

Fie (U,K) şi (V,K) spaţii vectoriale.

Definiţie 2.1.1 Aplicaţia $f: U \to V$ se numeşte morfism de spaţii vectoriale (sau: aplicaţie liniară, operator liniar, homomorfism de spaţii vectoriale ...) dacă

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \tag{2.1}$$

pentru orice $x,y \in U$ şi orice $\alpha,\beta \in K$.

R Notăm prin $L_K(U,V)$ sau prin $Hom_K(U,V)$ mulţimea tuturor morfismelor $f: U \to V$. Dacă $U=V$ atunci f se numeşte endomorfism al lui U.

Teoremă 2.1.1 Fie (V_1,K) şi (V_2,K) spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Dacă pe mulţimea $L_K(V_1,V_2)$ considerăm operaţiile

$$\begin{array}{ll} i) & (f+g)(x)=f(x)+g(x) \\ ii) & (\alpha f)x=\alpha f(x) \end{array}$$

unde $f,g \in L_K(V_1,V_2)$ iar $\alpha \in K$, atunci $(L_K(V_1,V_2),K)$ are o structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite.

R Fie (V,K) spaţiu vectorial.

i) Aplicaţia $1_V: V \to V$ definită prin $1_V(x)=x$ pentru orice $x \in V$ este un operator liniar, numit operatorul identic.

ii) Dacă V_1,V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci aplicaţia $O: V_1 \to V_2$ definită prin $O(x)=0_{V_2}$ pentru orice $x \in V_1$ este un operator liniar, numit operatorul nul.

iii) Notăm cu $C^1_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f(\cdot):[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile pe $[a,b]$ cu derivata continuă. Aplicaţia $D: C^1_{[a,b]} \to C^0_{[a,b]}$, $D(f)=f'$ este un operator liniar numit operator de derivare.

iv) Notăm cu $C^0_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$. Aplicaţia $I: C^0_{[a,b]} \to C^1_{[a,b]}$, $I(f)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$ este un operator liniar numit operatorul de integrare.

Definiţie 2.1.2 Fie (U,K), (V,K) spaţii vectoriale cu $\dim_K U = n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $\dim_K V = m \in \mathbb{N}^*$, $f: U \to V$ operator liniar, $E_1 = \{x_1,...,x_n\} \overset{reper}{\subset} U$ iar $E_2 = \{y_1,...,y_m\} \overset{reper}{\subset} V$. Matricea $A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]^f_{E_1,E_2}$ ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $f(x_1),...,f(x_n)$ în raport cu reperul E_2 se numeşte matricea lui f în raport cu reperele E_1 şi E_2.

R Dacă $U=V$ atunci $E_1=E_2$ şi $A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]^f_{E_1}$ matricea lui f în raport cu reperul E_1.

Exerciţiu 2.1.1 Considerăm spaţiile vectoriale $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Să se studieze dacă $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definită prin $f(x,y,z)=(x+y,xz)$ este aplicaţie liniară. ■

Soluţie. Se observă că

$$f(1,0,0)+f(1,0,1)=(1,0)+(1,0)=(2,1)$$

şi

$$f((1,0,0)+f(1,0,1))=f(2,0,1)=(2,2).$$

Aşadar

$$f(1,0,0)+f(1,0,1)\neq f((1,0,0)+f(1,0,1)).$$

■

Exerciţiu 2.1.2 Considerăm spaţiile vectoriale $(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Presupunem că $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ este transformare liniară. Să se cerceteze valabilitatea următoarelor propoziţii:

i) Dacă $\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq\mathbb{R}^k$ este sistem liniar dependent atunci şi $\{f(v_1),f(v_2),f(v_3)\}\subseteq\mathbb{R}^n$ este sistem liniar dependent.

ii) Dacă $\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq\mathbb{R}^k$ este sistem liniar independent atunci $\{f(v_1),f(v_2),f(v_3)\}\subseteq\mathbb{R}^n$ este sistem liniar independent. ■

Soluţie. i) Folosim faptul că $\{v_1,v_2,v_3\}\in\mathbb{R}^k$ este sistem liniar dependent, adică

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0_{\mathbb{R}^k} \Longrightarrow \text{ există } c_1,c_2,c_3 \text{ nu toţi nuli.}$$

Cum f este aplicaţie liniară deducem că

$$f(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)=f(0_{\mathbb{R}^k})=0_{\mathbb{R}^n}$$

sau echivalent

$$c_1f(v_1)+c_2f(v_2)+c_3f(v_3)=0_{\mathbb{R}^n}.$$

Ţinând cont că c_1,c_2,c_3 nu sunt toţi nuli deducem că $\{f(v_1),f(v_2),f(v_3)\}\in\mathbb{R}^n$ este sistem liniar dependent şi deci propoziţia este adevărată.

ii) Propoziţia este falsă. Într-adevăr, fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definită prin $f(v)=(0,0,0)^T$ pentru orice $v=(v_1,v_2,v_3)^T\in\mathbb{R}^3$. Evident,

$$\left\{e_1=(1,0,0)^T,e_2=(0,1,0)^T,e_3=(0,0,1)^T\right\}$$

este sistem liniar independent, însă $\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}$ este sistem liniar dependent. ■

Teoremă 2.1.2 Fie (V_1, K) şi (V_2, K) spaţii vectoriale. Dacă $f : V_1 \to V_2$ este un morfism de spaţii vectoriale atunci $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$.

Demonstraţie. Deoarece $f : V_1 \to V_2$ este morfism de spaţii vectoriale avem

$$f(0_{V_1}) = f(0_{V_1} + 0_{V_1}) = f(0_{V_1}) + f(0_{V_1}) \Longrightarrow f(0_{V_1}) = 0_{V_2}.$$

Teoremă 2.1.3 Fie (V_1, K) şi (V_2, K) spaţii vectoriale iar $f : V_1 \to V_2$ operator liniar. Următoarele au loc

i) $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in V_1$.

ii) $f(\Sigma_{i=1}^m \alpha_i x_i) = \Sigma_{i=1}^m \alpha_i f(x_i)$, $\alpha_i \in K$, $x_i \in V_1$ cu $i = 1, ..., m$.

iii) Dacă X este subspaţiu vectorial în V_1 atunci $f(X)$ este subspaţiu vectorial în V_2.

Definiţie 2.1.3 Fie $f : U \to V$ aplicaţie liniară. Spunem că

i) f este injectivă dacă pentru orice $u_1, u_2 \in U$ următoarea implicaţie $f(u_1) = f(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$ este adevărată.

ii) f este surjectivă dacă pentru orice $v \in V$ există $u \in U$ astfel încât $f(u) = v$.

iii) f este bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă (echivalent: pentru orice $v \in V$ există şi este unic $u \in U$ astfel încât $f(u) = v$).

Exerciţiu 2.1.3 Fie aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$f(v) = A \cdot v \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

este matricea lui f în reperul canonic din $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Să se arate că f este injectivă şi surjectivă. ■

Soluţie. Arătăm că f este injectivă. Dacă $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ şi $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ atunci

$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1 + u_2, -u_1)^T$$

şi

$$f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_1 + v_2, -v_1)^T.$$

Pe de altă parte, dacă $f(u) = f(v)$ atunci

$$(u_1 + u_2, -u_1)^T = (v_1 + v_2, -v_1)^T$$

implică

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases} \Longrightarrow u = v$$

adică, f este aplicaţie injectivă.

Probăm că f este surjectivă. Fie $w = (w_1, w_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Arătăm că există $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (w_1, w_2)^T.$$

Înmulţind cu A^{-1} această relaţie, avem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (v_1,v_2)^T = (w_2,w_1+w_2)^T.$$

Am arătat că

$$\text{pentru orice } w = (w_1,w_2)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ există } v = (w_2,w_1+w_2)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ astfel încât } f(v) = w.$$

Or, aceasta demonstrează că f este surjectivă. ■

R Compunerea a două (sau mai multe) aplicaţii liniare este tot o aplicaţie liniară.

Definiţie 2.1.4 Fie (V_1,K), (V_2,K) şi (V_3,K) spaţii vectoriale. Dacă $f : V_1 \to V_2$ şi $g : V_2 \to V_3$ sunt operatori liniari atunci aplicaţia

$$(g \circ f)(\cdot) : V_1 \to V_3 \text{ definită prin } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru } x \in V_1$$

se numeşte produsul (sau compunerea) operatorilor liniari f, g.

R Fie (V_1,K), (V_2,K) şi (V_3,K) spaţii vectoriale. Dacă $f : V_1 \to V_2$ şi $g : V_2 \to V_1$ sunt operatori liniari atunci $(g \circ f)(\cdot) : V_1 \to V_3$ este operator liniar.

Definiţie 2.1.5 Fie (V_1,K) şi (V_2,K) spaţii vectoriale. Operatorul liniar $f : V_1 \to V_2$ se numeşte inversabil dacă există un operator $g : V_2 \to V_1$ astfel încât

$$(g \circ f)(x) = x \ \forall x \in V_1 \text{ şi } (f \circ g)(y) = y \ \forall y \in V_2.$$

Dacă există g îndeplinind aceste condiţii atunci se notează cu f^{-1} şi se numeşte inversul operatorului liniar f.

Teoremă 2.1.4 Fie (V_1,K) şi (V_2,K) spaţii vectoriale. Operatorul liniar $f : V_1 \to V_2$ este inversabil dacă şi numai dacă este bijectiv.

Definiţie 2.1.6 Spaţiile vectoriale (U,K) şi (V,K) se numesc izomorfe, notăm $(U,K) \cong (V,K)$, dacă există un morfism bijectiv $f : U \to V$. Se mai spune că f este izomorfism sau transformare liniară nesingulară.

Teoremă 2.1.5 — Teorema fundamentală de izomorfism I. Dacă (U,K) şi (V,K) sunt spaţii vectoriale cu $\dim_K U = \dim_K V \in \mathbb{N}^*$ atunci $(U,K) \cong (V,K)$.

Demonstraţie. Presupunem că $\dim_K U = \dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$. Fie

$$\{v_1,...,v_n\} \overset{bază}{\subset} (U,K) \text{ şi } \{w_1,...,w_n\} \overset{bază}{\subset} (V,K).$$

Pentru orice $v \in U$, $\exists! a_1, ..., a_n \in K$ astfel încât

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Demonstrăm că aplicaţia $f : U \to V$ definită prin

$$f(a_1 v_1 + ... + a_n v_n) = a_1 w_1 + ... + a_n w_n$$

este liniară şi bijectivă. Într-adevăr, dacă

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n \in U, w = b_1 v_1 + ... + b_n v_n \in V$$

şi $a, b \in K$ sunt arbitrari atunci

$$\begin{aligned} f(av + bw) &= f((aa_1 + bb_1) v_1 + ... + (aa_n + bb_n) v_n) \\ &= (aa_1 + bb_1) w_1 + ... + (aa_n + bb_n) w_n \\ &= a(a_1 w_1 + ... + a_n w_n) + b(b_1 w_1 + ... + b_n w_n) = af(v) + bf(w) \end{aligned}$$

adică f este aplicaţie liniară. Pentru a proba că f este bijectivă este suficient să observăm că pentru orice $w \in V$,

$$\exists! a_1, ..., a_n \in K \text{ astfel încât } w = a_1 w_1 + ... + a_n w_n$$

şi deci

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

este unicul element din U astfel încât $f(v) = w$, adică f este bijectivă.

R Dacă (V, K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$ atunci $(V, K) \cong (\mathbb{K}^n, K)$ unde $\mathbb{K}^n$ este spaţiul aritmetic n-dimensional.

Exerciţiu 2.1.4 Fie $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ spaţiu vecorial. Să se arate că $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$. ■

Soluţie. Se cunoaşte că $\mathbb{R}$ este spaţiu vectorial peste $\mathbb{Q}$. Dacă am avea $\dim_Q \mathbb{R} = n < \infty$ atunci $\mathbb{R}$ ar fi izomorf cu $\mathbb{Q}^n$. Cum de la analiză matematică cunoaştem că $\mathbb{Q}^n$ este mulţime numărabilă iar $\mathbb{R}$ nu, se obţine concluzia. ■

R Dacă (U, K), (V, K) sunt spaţii vectoriale, $f : U \to V$ izomorfism iar B bază în U atunci $f(B)$ este bază în V.

Teoremă 2.1.6 Fie (U, K) şi (V, K) spaţii vectoriale. Dacă $f : U \to V$ este izomorfism de spaţii vectoriale atunci aplicaţia inversă $f^{-1} : V \to U$ este izomorfism de spaţii vectoriale.

2.2 Spaţiul cât

Fie (V, K) spaţiu vectorial şi X subspaţiu vectorial al său. Definim o relaţie binară ρ astfel $\forall x, y \in V$ avem $x \rho y \iff x - y \in X$. Remarcăm că ρ îndeplineşte proprietăţile

R1)	*reflexivitatea:*	$x \rho x$,	$\forall x \in V$;
R2)	*simetria:*	dacă $x \rho y$ atunci $y \rho x$,	$\forall x, y \in V$;
R3)	*tranzitivitatea:*	($x \rho y$ şi $y \rho z$) atunci $x \rho z$,	$\forall x, y, z \in V$,

adică ρ este o relaţie de echivalenţă (congruenţa modulo X), se notează "$\equiv$".

Definiţie 2.2.1 Fie $x \in V$. Mulţimea

$$\widehat{x} = \{y \in V \,|\, y \equiv x \text{ (modulo } X)\} = \{y \in V \,|\, y - x \in X\}$$

se numeşte clasa de echivalenţă asociată vectorului x în raport cu $\equiv$ sau clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\equiv$.

R Mulţimea

$$V/X = \{\widehat{x} | x \in V\} \text{ notată şi } V/_{\equiv}$$ (numită spaţiul factor sau spaţiul cât al lui V în raport cu relaţia de echivalenţă $\equiv$)

a tuturor claselor de echivalenţă, admite o structură de spaţiu vectorial în raport cu următoarele operaţii

adunarea: $\widehat{x} + \widehat{y} \overset{def}{=} \widehat{x+y}$ pentru orice $x, y \in V$
înmulţirea cu scalari: $\alpha \cdot \widehat{x} \overset{def}{=} \widehat{\alpha \cdot x}$ pentru orice $x \in V$ şi $\alpha \in K$.

R Au loc:
i) $\widehat{0_X} = X$. Într-adevăr,

$$\widehat{0} = \{y \in V \,|\, y \equiv 0_X\} = \{y \in V \,|\, y - 0_X \in X\} = \{y \in V \,|\, y \in X\} = X.$$

ii) Dacă $X = \{0_X\}$ atunci spaţiul cât al lui $V/\{0_X\} = V$. Într-adevăr,

$$x \in V,\ \widehat{x} = \{y \in V \,|\, y - x \in \{0_X\}\} = \{y \in V \,|\, y - x = 0_X\} = \{x\}.$$

Teoremă 2.2.1 — Teorema dimensiunii pentru spaţiul cât. Fie (V, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$ şi X subspaţiu vectorial al său. Dacă

$$dim_K V = n \text{ şi } dim_K X = m$$

atunci

$$dim_K (V/X) = n - m.$$

Exerciţiu 2.2.1 Fie $\left(V = \mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$ spaţiu vectorial şi

$$U = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 = x_2 \text{ şi } x_3 = x_4 \right\}.$$

i) Să se arate că U este subspaţiu vectorial al lui $\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$ şi să se determine $\dim_{\mathbb{R}} U$.
ii) Să se extindă baza determinată la punctul i) la o bază a lui $\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$.
iii) Să se descrie elementele lui V/U şi scrie o bază pentru V/U. ■

Soluţie. i) U este subspaţiu vectorial al lui $\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$ dacă

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ şi } x, y \in U \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in U.$$

Observăm că

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in U \Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ şi } x_3 = x_4$$

iar

$$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T\in U\Longrightarrow y_1=y_2 \text{ şi } y_3=y_4.$$

Avem

$$\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)^T+\beta(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4)^T\in U$$

deoarece $\alpha x_1+\beta y_1=\alpha x_2+\beta y_2$.

Determinăm o bază în U. Observăm că

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=x_2(1,1,0,0)^T+x_4(0,0,1,1)^T$$

şi deci

$$U=\left\{x_2(1,1,0,0)^T+x_4(0,0,1,1)^T\middle|\, x_2,x_4\in\mathbb{R}\right\}=Span\left(\left\{(1,1,0,0)^T,(0,0,1,1)^T\right\}\right).$$

Cum

$$u_1=(1,1,0,0)^T \text{ şi } u_2=(0,0,1,1)^T$$

sunt liniar independente, deducem că o bază în U este $B_1=\left\{(1,1,0,0)^T,(0,0,1,1)^T\right\}$.

ii) Pentru a completa baza B_1 la o bază a lui $\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}\right)$ vom scrie o matrice A cu 4 linii şi 4 coloane formată din vectorii lui B_1 şi vectori din $\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}\right)$ astfel încât

$$rangA=4=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4,$$

de exemplu

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\overbrace{\;}^{\overset{u_1}{\downarrow}} & \overbrace{\;}^{\overset{u_2}{\downarrow}} & \overbrace{\;}^{\overset{e_1}{\downarrow}} & \overbrace{\;}^{\overset{e_3}{\downarrow}}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Astfel că

$$B_2=\{u_1,u_2,e_1,e_3\}\overset{bază}{\subset}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}\right)!$$

iii) Elementele lui $\mathbb{R}^4/U$ sunt

$$\widehat{x}=\left\{y\in\mathbb{R}^4\middle|\, y-x\in U\right\}.$$

O bază pentru $\mathbb{R}^4/U$ este

$$B_2=\{\widehat{e_1},\widehat{e_3}\}.$$

Pentru a demonstra aceasta, remarcăm de la punctul ii) că

$$x=x_2u_1+x_4u_2+(x_1-x_2)e_1+(x_3-x_4)e_3,$$

şi deci

$$\widehat{x}=(x_1-x_2)\widehat{e_1}+(x_3-x_4)\widehat{e_3}$$

astfel că $\widehat{e_1}$ şi $\widehat{e_3}$ sunt din $Span\left(\mathbb{R}^4/U\right)$. Demonstrăm că $\{\widehat{e_1},\widehat{e_3}\}$ sunt liniar independente. Dacă realizăm o combinaţie liniară $c_1\widehat{e_1}+c_2\widehat{e_3}=\widehat{0}$ atunci $c_1e_1+c_2e_3\in U$. Dar deoarece a doua şi a patra componentă a acestui vector sunt 0, observăm, din definiţia lui U, că prima şi a treia componentă trebuie să fie 0, de asemenea. Am demonstrat că $c_1=c_2=0$ şi deci $\widehat{e_1},\widehat{e_3}$ sunt liniar independente. ■

2.3 Suma şi intersecţia a două subspaţii vectoriale

Amintim următorul rezultat:

Teoremă 2.3.1 Dacă (V,K) este spaţiu vectorial iar V_1,V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci

$$\begin{aligned} V_1\cap V_2 &= \{v\in V \,|\, v\in V_1 \text{ şi } v\in V_2\} \\ V_1+V_2 &= \{v_1+v_2 \,|\, v_1\in V_1 \text{ şi } v_2\in V_2\} \\ &= \{v\in V \,|\, \exists v_1\in V_1 \text{ şi } \exists v_2\in V_2 \text{ astfel încât } v=v_1+v_2\} \end{aligned}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui V.

R $V_1\cap V_2$ este numit subspaţiul vectorial intersecţie, iar V_1+V_2 este numit subspaţiul vectorial sumă.

Teoremă 2.3.2 — Teorema lui Hermann Günther Grassmann (1809–1877). Dacă (V,K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V\in\mathbb{N}^*$ iar V_1,V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci

$$\dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2-\dim_K(V_1\cap V_2).$$

Demonstraţie. Fie $B_{V_1\cap V_2}=\{v_1,...,v_m\}$ bază în $V_1\cap V_2$. Lema de completare ne permite să extindem această bază la

$$B_{V_1}=\{v_1,...,v_m,u_{m+1},...,u_r\}\overset{bază}{\subset} V_1$$

şi

$$B_{V_2}=\{v_1,...,v_m,w_{m+1},...,w_s\}\overset{bază}{\subset} V_2.$$

Arătăm că

$$S=\{v_1,...,v_m,u_{m+1},...,u_r,w_{m+1},...,w_s\}$$

este sistem de generatori pentru V_1+V_2. Într-adevăr, $\forall x+y\in V_1+V_2$, $x\in V_1$, $y\in V_2$ se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii bazei:

$$\left.\begin{array}{l} x\in V_1 \Longrightarrow x=\Sigma_{i=1}^m\alpha_i v_i+\Sigma_{j=m+1}^r\beta_j u_j \\ y\in V_2 \Longrightarrow y=\Sigma_{i=1}^m\gamma_i v_i+\Sigma_{k=m+1}^s\lambda_k w_k \end{array}\right\}$$

de unde

$$x+y=\Sigma_{i=1}^m(\alpha_i+\gamma_i)v_i+\Sigma_{j=m+1}^r\beta_j u_j+\Sigma_{k=m+1}^s\lambda_k w_k$$

şi deci S este sistem de generatori.

Arătăm că S este liniar independent. Realizăm o combinaţie liniară, egală cu vectorul nul

$$0_V=\Sigma_{i=1}^m a_i v_i+\Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j+\Sigma_{k=m+1}^s c_k w_k.$$

Rezultă că v definit prin

$$v=\underbrace{\Sigma_{i=1}^m a_i v_i+\Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j}_{\in V_1}=\underbrace{-\Sigma_{k=m+1}^s c_k w_k}_{\in V_2}$$

este un vector din $V_1\cap V_2$ şi deci $\exists!\lambda_i\in K$ astfel încât $\Sigma_{k=m+1}^s c_k w_k-\Sigma_{i=1}^m\lambda_i v_i=0_V \Longrightarrow c_k=\lambda_i=0$ (deoarece B_{V_2} este liniar independent). Mai mult $0_V=\Sigma_{i=1}^m a_i v_i+\Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j$ iar, deoarece B_{V_1} este liniar independent, deducem că $a_i=b_j=0$.

Aşadar $\dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2-\dim_K(V_1\cap V_2)$.

Exerciţiu 2.3.1 Fie $a_1 = (1,1,-1,0)^T$,$a_2 = (0,1,1,0)^T$,$a_3 = (0,2,1,-1)^T$,$a_4 = (2,-1,-4,1)^T$ iar $V_1 = Span(a_1,a_2)$ şi $V_2 = Span(a_3,a_4)$ subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}\right)$. Să se determine $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$, $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$ şi $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2)$. ■

Soluţie. Dacă $B_1 \subseteq \{a_1,a_2\}$ este bază atunci

$$Span(a_1,a_2) = Span(B_1). \tag{2.2}$$

Cum $V_1 = Span(a_1,a_2)$ rezultă că

$$\{a_1,a_2\} \text{ este sistem de generatori.} \tag{2.3}$$

Arătăm că

$$\{a_1,a_2\} \text{ este sistem liniar independent.} \tag{2.4}$$

Pentru aceasta, scriem matricea formată din componentele vectorilor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece, există un minor de ordinul doi nenul, anume

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

deducem că $rangA = 2$. Din $rangA = 2$ =numărul de vectori din sistem deducem că afirmaţia (2.4) este adevărată. Proprietăţile (2.3) şi (2.4) demonstrează că $B_1 = \{a_1,a_2\}$ formează o bază. Aşadar, $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 2$ (din teorie, dimensiunea este egală cu numărul de elemente al bazei, B_1!). Analog, $B_2 = \{a_3,a_4\}$ formează o bază pentru V_2 şi ca atare $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$.

Se cunoaşte că

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle| x \in V_1 \text{ şi } x \in V_2 \right\}. \tag{2.5}$$

Din

$$\begin{aligned} x &\in V_1 \text{ rezultă că } x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \text{ cu } \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ x &\in V_2 \text{ rezultă că } x = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 \text{ cu } \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

se observă că (2.5) se scrie astfel

$$V_1 \cap V_2 = \{x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}. \tag{2.6}$$

Obiectivul este să determinăm o bază în $V_1 \cap V_2$ deoarece trebuie să determinăm $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$.

Astfel că, vom considera relaţia $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4$ echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Observăm că matricea sistemului este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

adică exact matricea alcătuită din componentele lui a_1, a_2, a_3, a_4. Deoarece găsim un minor de ordinul 3 nenul

$$M_3^{A_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \tag{2.8}$$

iar minorul de ordinul 4 este

$$M_4^{A_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow rang\,(A_1) = 3$.

Cum $rang\,(A_1) = 3 <$numărul de necunoscute (în număr de 4: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) deducem că (2.7) este sistem compatibil (4 (nr. necunoscute) $-$ 3 ($rang A_1$)=) 1 nedeterminat (se mai spune simplu nedeterminat). Cum sistemul este compatibil simplu nedeterminat sau unu nedeterminat) deducem că există trei necunoscute principale α_1, α_2 şi α_3 adică cele de la care am găsit minorul de ordinul trei nenul (2.8) şi o necunoscută secundară, anume α_4 pe care o notăm altfel. Fie $\alpha_4 \overset{notăm}{=} \alpha$. Necunoscutele principale se determină din sistemul format din primele trei ecuaţii ale lui (2.7)

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \text{echivalent cu} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = -\alpha \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -4\alpha \end{cases}$$

corespunzător lui (2.8). Sistemul poate fi rezolvat, de exemplu prin regula lui Cramer, obţinându-se $\alpha_1 = 2\alpha$, $\alpha_2 = -\alpha$ şi $\alpha_3 = \alpha$. Am demonstrat că (2.6) se scrie astfel

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ x = \alpha \underbrace{(2,-1,1,1)^T}_{\overset{notăm}{=} s_1} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = Span\left((2,-1,1,1)^T\right).$$

Evident

$$\{s_1\} \text{ este sistem de generatori pentru } V_1 \cap V_2. \tag{2.9}$$

Cum $s_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ rezultă că

$$\{s_1\} \text{ este sistem liniar independent pentru } V_1 \cap V_2. \tag{2.10}$$

Din (2.9) şi (2.10) deducem că $\{s_1\}$ este bază pentru $V_1 \cap V_2$ şi deci $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 1$ (= numărul de elemente din baza $\{s_1\}$).

Determinăm $V_1 + V_2$. Prin definiţie $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1 \text{ şi } v_2 \in V_2\}$.

Cum $v_1 \in V_1$ rezultă că $v_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ cu $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte, din $v_2 \in V_2$ rezultă că $v_2 = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4$ cu $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$.

Aşadar,

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 |\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= Span\,(V_1 \cup V_2) = Span\,(a_1, a_2, a_3, a_4)\,, \end{aligned}$$

unde

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 4\alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Determinăm $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2)$.

Metoda 1. Înlocuind în Teorema Grassmann $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$ şi $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 1$ rezultă că $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Metoda 2. Căutăm o bază în $V_1 + V_2 = Span\,(a_1, a_2, a_3, a_4)$ prin scrierea matricei

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

formată cu vectorii a_1, a_2, a_3, a_4 şi observarea că $rangA_2 = 3$. Într-adevăr,

$$M_4^{A_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } M_3^{A_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Cum, $rangA_2 = 3$ concluzionăm că o bază a lui $V_1 + V_2$ este

$$\left\{(1,1,-1,0)^T, (0,1,-1,0)^T, (2,-1,-4,1)^T\right\} \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = 3.$$

Metoda 3. Căutăm o bază în $V_1 + V_2$, ca în demonstraţia Teoremei Grassmann: baza $\left\{(2,-1,1,1)^T\right\}$ din $V_1 \cap V_2$ o completăm, folosind lema de completare, la

$$\begin{aligned} \text{o bază } B_{V_1} &= \left\{(2,-1,1,1)^T, (1,1,-1,0)^T\right\} \text{ în } V_1 \\ \text{o bază } B_{V_2} &= \left\{(2,-1,1,1)^T, (0,2,1,-1)^T\right\} \text{ în } V_2 \end{aligned}$$

iar conform demonstraţiei Teoremei Grassmann $S = \left\{(2,-1,1,1)^T, (1,1,-1,0)^T,\ (0,2,1,-1)^T\right\}$ este bază în $V_1 + V_2$, ceea ce încheie demonstraţia. ■

2.4 Sumă directă de subspaţii vectoriale

Definiţie 2.4.1 Fie (V, K) spaţiu vectorial. Spunem că suma $V_1 + V_2$ a subspaţiilor vectoriale V_1, V_2 din spaţiul vectorial V este directă, dacă oricare ar fi $v \in V_1 + V_2$ există $v_1 \in V_1$ şi $v_2 \in V_2$ unici, astfel încât $v = v_1 + v_2$. Notăm această situaţie prin $V_1 \oplus V_2$. Aşadar

$$V_1 \oplus V_2 = \{v \in V |\, \exists! v_1 \in V_1 \text{ şi } \exists! v_2 \in V_2 \text{ astfel încât } v = v_1 + v_2\}.$$

Teoremă 2.4.1 Fie (V,K) spaţiu vectorial. Dacă V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci suma $V_1 + V_2$ este directă dacă şi numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Demonstraţie. "$\subset$" Presupunem $v \in V_1 \cap V_2$. Atunci

$$v = \underset{\in V_1}{v} + 0_V = 0_V + \underset{\in V_2}{v}$$

iar ţinând cont că scrierea lui v este unică, deducem că $v = 0_V$.

"$\supset$" Dacă $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$ pentru $v_1, v_2 \in V_1$ iar $v_1', v_2' \in V_2$ atunci

$$\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in V_1} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in V_2}.$$

Aşadar

$$\underset{\text{deoarece } v_1 - v_1' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}}{v_1 = v_1'} \quad \text{şi} \quad \underset{\text{deoarece } v_2 - v_2' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}}{v_2 = v_2'}$$

adică reprezentarea ca sumă este unică.

Exerciţiu 2.4.1 În $\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$ fie $V_1 = Span\,(a_1, a_2)$ şi $V_2 = Span\,(a_3, a_4)$ unde

$$a_1 = (2,2,-2,0)^T, a_2 = (1,2,2,1)^T, a_3 = (0,2,1,-1)^T \text{ şi } a_4 = (2,-1,-4,1)^T.$$

Să se determine $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$, $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2)$ şi să se precizeze dacă $V_1 + V_2$ este sumă directă. ■

Soluţie. Dacă $B_1 \subseteq \{a_1, a_2\}$ este bază atunci

$$Span\,(a_1, a_2) = Span\,(B_1).$$

Cum $V_1 = Span\,(a_1, a_2)$ rezultă că

$$\{a_1, a_2\} \text{ este sistem de generatori.} \tag{2.11}$$

Arătăm că

$$\{a_1, a_2\} \text{ este sistem liniar independent.} \tag{2.12}$$

Pentru aceasta, scriem matricea formată din componentele vectorilor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece, există un minor de ordinul doi nenul, anume

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

deducem că $rangA = 2$. Din $rangA = 2$ =numărul de vectori din sistem deducem că afirmaţia (2.12) este adevărată. Proprietăţile (2.11) şi (2.12) demonstrează că $B_1 = \{a_1, a_2\}$ formează o bază. Aşadar, $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 2$ (din teorie, dimensiunea este egală cu numărul de elemente al bazei, B_1!). Analog, $B_2 = \{a_3, a_4\}$ formează o bază pentru V_2 şi ca atare $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$.

Se cunoaşte că

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle| x \in V_1 \text{ şi } x \in V_2 \right\}. \tag{2.13}$$

Din

$$\begin{aligned} x &\in V_1 \text{ rezultă că } x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \text{ cu } \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ x &\in V_2 \text{ rezultă că } x = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 \text{ cu } \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

se observă că (2.13) se scrie astfel

$$V_1 \cap V_2 = \{ x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 | \, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \}. \tag{2.14}$$

Obiectivul este să determinăm o bază în $V_1 \cap V_2$ deoarece ni se cere să determinăm $\dim_{\mathbb{R}} (V_1 \cap V_2)$. Astfel că, vom considera relaţia

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4$$

echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Observăm că matricea sistemului este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

adică exact matricea alcătuită din componentele lui a_1, a_2, a_3, a_4. Deoarece găsim un minor de ordinul 3 nenul

$$M_3^{A_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10$$

iar minorul de ordinul 4 este

$$M_4^{A_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & 4 \\ & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$\Longrightarrow$ $rang\,(A_1) = 4$. Cum $rang\,(A_1) = 4$ =numărul de necunoscute (în număr de 4: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) deducem că (2.15) este sistem compatibil determinat. Cum sistemul este compatibil simplu determinat deducem că

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 \text{ şi } \alpha_4 = 0.$$

Am demonstrat că (2.14) se scrie astfel

$$V_1 \cap V_2 = \left\{x = (0,0,0,0)^T\right\} = \{0_{\mathbb{R}^4}\}. \tag{2.16}$$

Evident,

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = \dim_{\mathbb{R}}\{0_{\mathbb{R}^4}\} = 0.$$

Rămâne să determinăm $V_1 + V_2$. Prin definiţie

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | \, v_1 \in V_1 \text{ şi } v_2 \in V_2\}.$$

Cum

$$\begin{aligned} v_1 &\in V_1 \text{ rezultă că } v_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \text{ cu } \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ v_2 &\in V_2 \text{ rezultă că } v_2 = \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 \text{ cu } \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

şi deci

$$V_1 + V_2 = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 | \, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} = Span(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

unde

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - 4\alpha_4 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Determinăm $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2)$ folosind Teorema Grassmann care afirmă că

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{R}}(V_1) + \dim_{\mathbb{R}}(V_2) - \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2).$$

Este suficient să înlocuim

$$\dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2 \text{ şi } \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 0$$

pentru a deduce că

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Rămâne să folosim (2.16) pentru a deduce că suma este directă. ■

Teoremă 2.4.2 Dacă (V,K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$ iar V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V astfel încât suma $V_1 + V_2$ este directă, atunci $\dim_K(V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$.

Demonstraţie. Deoarece $\dim_K(V_1 \cap V_2) = 0$ rezultatul este o consecinţă a Teoremei 2.3.2.

Definiţie 2.4.2 Fie V_1, V_2, ... , V_m subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial de tip finit (V,K). Spunem că V este sumă directă de V_1, V_2, ... , V_m şi scriem $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ sau $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ dacă orice vector din V se scrie în mod unic ca o sumă de vectori din V_1, V_2, ... , V_m. În această situaţie se mai spune că subspaţiile vectoriale V_1, V_2, ... , V_m sunt suplimentare.

Exerciţiu 2.4.2 În $\mathbb{R}^2$ se consideră mulţimile

$$V_1 = \left\{ (\alpha, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}, V_2 = \left\{ (0, \beta)^T \in \mathbb{R}^2 \middle| \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se arate că V_1 şi V_2 sunt subspaţii suplimentare. ■

Soluţie. Deoarece $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ rezultă că V_1, V_2 sunt sumanzi direcţi. Prin definiţie

$$V_1 + V_2 = \{x + y \,|\, x \in V_1 \text{ şi } y \in V_2\}.$$

Cum $x + y$ este un element de forma $(\alpha, \beta)^T$ deducem că $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$. În plus,

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^2.$$

relaţie ce demonstrează că V_1 şi V_2 sunt subspaţii *suplimentare*. ■

Dăm următoarea caracterizare a sumei directe.

Teoremă 2.4.3 — Teorema de caracterizare a sumei directe. Fie (V, K) spaţiu vectorial de dimensiune finită. Următoarele sunt echivalente

i) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$.

ii) $V = V_1 + \ldots + V_m = \Sigma_{i=1}^m V_i$ şi $V_i \cap \left(\Sigma_{j=1, j \neq i}^m V_j\right) = \{0_V\}$ $\forall i = 1, \ldots, m$.

iii) $V = \Sigma_{i=1}^m V_i$ şi $\dim_K V = \dim_K V_1 + \ldots + \dim_K V_m = \Sigma_{i=1}^m \dim_K V_i$.

Exerciţiu 2.4.3 Fie subspaţiile vectoriale

$$V_1 = \left\{ (x, x, x)^T \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \text{ şi } V_2 = \left\{ (0, x, y)^T \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

ale lui $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$. Să se calculeze $\dim_{\mathbb{R}} V_1$, $\dim_{\mathbb{R}} V_2$ şi să se demonstreze că $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. ■

Soluţie. Metoda 1. Observăm că

$$V_1 = \left\{ (x, x, x)^T \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x (1, 1, 1)^T \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

şi deci

$$B_1 = \left\{ (1, 1, 1)^T \right\} \overset{\textit{bază}}{\subset} V_1$$

deoarece este sistem de generatori, iar pe de altă parte este sistem liniar independent ($a (1, 1, 1)^T = (0, 0, 0)^T \Longrightarrow a = 0$). Aşadar $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1$ (=numărul de elemente ale lui B_1).

Analog

$$V_2 = \left\{ (0, x, y)^T \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x (0, 1, 0)^T + y (0, 0, 1)^T \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

şi deci

$$B_2 = \left\{ (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \right\} \overset{\textit{bază}}{\subset} V_2$$

deoarece este sistem de generatori, iar pe de altă parte este sistem liniar independent

$$(a (0, 1, 0)^T + b (0, 0, 1)^T = (0, 0, 0)^T \Longrightarrow a = b = 0).$$

Aşadar $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$ (=numărul de elemente ale lui B_2).

Rămâne să demonstrăm că $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Amintim că

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| v \in V_1 \text{ şi } v \in V_2 \right\} \\ V_1 + V_2 &= \{ v_1 + v_2 | v_1 \in V_1 \text{ şi } v_2 \in V_2 \} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| \exists v_1 \in V_1 \text{ şi } \exists v_2 \in V_2 \text{ astfel încât } v = v_1 + v_2 \right\}. \end{aligned}$$

Fie $v = (v_1, v_2, v_3)$. Avem

$$\left. \begin{array}{r} v \in V_1 \Longrightarrow v_1 = v_2 = v_3 \\ v \in V_2 \Longrightarrow v_1 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0 \Longrightarrow v = (0,0,0)^T$$

şi ca o concluzie $V_1 \cap V_2 = \left\{ (0,0,0)^T \right\}$. Or, aceasta spune, că $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$. Rămâne să demonstrăm că $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ sau echivalent ($V_1 \oplus V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ şi $V_1 \oplus V_2 \supseteq \mathbb{R}^3$).

Clar

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

şi ca atare "$\subseteq$" este îndeplinită.

Demonstrăm că

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \supseteq \mathbb{R}^3.$$

Aceasta se reduce la a arata că $\forall x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ avem că

$$\exists v_1 = (a,a,a)^T \in V_1 \text{ şi } \exists v_2 = (0,n,m)^T \in V_2$$

astfel încât

$$(x_1,x_2,x_3)^T = (a,a,a)^T + (0,n,m)^T \Longleftrightarrow (x_1,x_2,x_3)^T = (a, a+n, a+m)^T$$

adică, sistemul

$$\begin{cases} a = x_1 \\ a + n = x_2 \\ a + m = x_3. \end{cases}$$

Cum matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rangA = 3 \text{ deoarece } det(A) = 1 \neq 0$$

şi deci sistemul este compatibil. Am demonstrat că $\mathbb{R}^3 \subseteq V_1 \oplus V_2$.

Metoda 2. Arătăm că $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ sub presupunerea că deja am demonstrat că $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$. Este suficient să demonstrăm că

i) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} V_1 \oplus V_2$

ii) $V_1 \oplus V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Evident $V_1 \oplus V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ este adevărat, deoarece, conform teoriei, $V_1 \oplus V_2$ este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3$. Rămâne să probăm ii). Cum $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ vom arăta că $\dim_{\mathbb{R}} V_1 \oplus V_2 = 3$. Or, această din urmă relaţie se probează folosind Teorema Grassmann

$$\dim_{\mathbb{R}} (V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 - \dim_{\mathbb{R}} (V_1 \cap V_2)$$

unde deja cunoaştem că $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 0$ deoarece $V_1 \cap V_2 = \left\{(0,0,0)^T\right\}$. Rămâne să arătăm că

$$\dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3.$$

Căutăm o bază în V_1

$$(x,x,x)^T = x(1,1,1)^T$$

şi deci $V_1 = Span\left(\left\{(1,1,1)^T\right\}\right)$. Cum $\left\{(1,1,1)^T\right\}$ este liniar independent în V_1 deducem că

$$\left\{(1,1,1)^T\right\} \overset{bază}{\subset} V_1 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1.$$

Analog

$$B_2 = \left\{(0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\} \overset{bază}{\subset} V_2 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2.$$

Din i), ii) rezultă că $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ iar din Teorema de caracterizare a sumei directe obţinem mai multe informaţii. ■

Teoremă 2.4.4 — Teorema de existenţă a suplimentului. Fie (V,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $V_1 \subset V$ este subspaţiu vectorial în V atunci există $V_2 \subset V$ subspaţiu vectorial astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$.

Demonstraţie. Fie $p = \dim_K V_1 \leq n$ şi $B_{V_1} = \{b_1, ..., b_p\}$ o bază a lui V_1. Cum $\dim_K V = n$ putem completa B_{V_1} până la o bază B_V a lui V, astfel

$$B_V = \{b_1, ..., b_p, g_1, ..., g_{n-p}\}.$$

Demonstrăm că $V_2 = Span\{g_1, ..., g_{n-p}\}$ are proprietatea că $V = V_1 \oplus V_2$. Evident

$$V_1 + V_2 \subset V. \tag{2.17}$$

Pe de altă parte

$$\forall v \in V,\ v = \underbrace{\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i b_i}_{x \in V_1} + \underbrace{\Sigma_{i=1}^{n-p} \beta_i g_i}_{y \in V_2} = x + y \in V_1 + V_2 \Longrightarrow V \subset V_1 + V_2. \tag{2.18}$$

Relaţiile (2.17) şi (2.18) implică

$$V = V_1 + V_2. \tag{2.19}$$

Mai mult, observăm că

$$\dim_K V_1 + \dim_K V_2 = p + (n-p) = n = \dim_K V = n. \tag{2.20}$$

În final (2.19) şi (2.20) arată că este aplicabil punctul iii) al Teoremei 2.4.4 şi deci $V = V_1 \oplus V_2$.

Exerciţiu 2.4.4 Dacă $V_1 \subset \left(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}\right)$ este mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

atunci să se determine o bază a lui V_1 şi apoi să se indice un subspaţiu V_2 al lui $\left(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}\right)$ astfel încât $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^5$. ∎

Soluţie. Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că

$$M_3^A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow rang\,(A) \geq 3.$$

Pe de altă parte

$$M_{4,1}^A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } M_{4,2}^A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

implică $rang\,(A) = 3$. Astfel că sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu x_1, x_2, x_3 necunoscute principale, iar x_4, x_5 necunoscute secundare. Un calcul simplu arată că

$$x_1 = \frac{1}{2}x_5, x_2 = -\frac{3}{2}x_5, x_3 = x_4 + \frac{3}{2}x_5.$$

În concluzie,

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \left(\frac{1}{2}x_5, -\frac{3}{2}x_5, x_4 + \frac{3}{2}x_5, x_4, x_5\right)^T \middle| x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_4\,(0,0,1,1,0)^T + x_5\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1\right)^T \middle| x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Span\,(e_1, e_2) \text{ unde } e_1 = (0,0,1,1,0)^T \text{ iar } e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1\right)^T. \end{aligned}$$

Se verifică uşor că

$$\{e_1, e_2\} \overset{\text{liniar independent}}{\subset} V_1 \text{ şi deci } \{e_1, e_2\} \overset{\textit{bază}}{\subset} V_1.$$

Completăm $\{e_1, e_2\}$ până la o bază în $\mathbb{R}^5$. În acest sens, formăm o matrice B care să aibă rangul 5, astfel

$$B = \begin{pmatrix} \overbrace{}^{e_1} & \overbrace{}^{e_2} & \overbrace{}^{e_3} & \overbrace{}^{e_4} & \overbrace{}^{e_5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; detB = -1 \Longrightarrow rangB = 5.$$

Avem

$$rangB = 5 \Longrightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \text{ este sistem liniar independent în } \mathbb{R}^5.$$

Cum

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5 = 5 \text{ iar } \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \text{ este sistem liniar independent}$$

deducem că

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \overset{bază}{\subset} \mathbb{R}^5.$$

Atunci $V_2 = Span(\{e_3, e_4, e_5\})$ are proprietatea cerută. ■

2.5 Nucleul şi imaginea unui operator liniar

Definiţie 2.5.1 Fie (X, K) şi (Y, K) spaţii vectoriale şi $U : X \to Y$ operator liniar.

i) Mulţimea

$$Ker\ U = \{x \in X | U(x) = 0_Y\}$$

se numeşte nucleul operatorului U iar $\dim_K KerU$ se numeşte defectul lui U.

ii) Mulţimea

$$ImU = \{y \in Y | \exists x \in X \text{ astfel încât } U(x) = y\}$$

se numeşte imaginea operatorului U iar $\dim_K ImU$ se numeşte rangul lui U.

Exerciţiu 2.5.1 Se consideră operatorul liniar $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a lui U în reperul canonic din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

i) Să se calculeze $U(-1, 1, 2)$.

ii) Să se determine ImU şi $KerU$. ■

Soluţie. i) Avem

$$U(-1,1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

ii) Prin definiţie

$$KerU = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | U(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Din enunţ $U(x) = Ax$. Atunci

$$U(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow Ax = 0_{\mathbb{R}^3}$$

sau echivalent cu

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

cu $rangA = 2$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \text{ iar } M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum $rangA = 2$ deducem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Avem

$$M_2 \text{ minor principal} \Rightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \text{ necunoscute principale} \\ x_3 \text{ necunoscută secundară } x_3 \overset{not}{=} \alpha. \end{cases}$$

Din sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3\alpha \\ x_1 - x_2 = -\alpha \end{cases} \quad \text{rezultă } x_1 = \frac{\alpha}{3}, x_2 = \frac{4}{3}\alpha$$

şi

$$KerU = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarcăm că

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \overset{bază}{\subset} KerU$$

şi deci $\dim_{\mathbb{R}} KerU = 1$.

Determinăm imaginea operatorului T. Se cunoaşte că

$$ImU = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ astfel încât } U(x) = y \right\}.$$

Fie

$$y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3 \text{ şi } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Relaţia $Ux = y$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = y_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = y_3. \end{cases}$$

Scriem

$$\underset{\text{matricea sistemului}}{A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{matricea extinsă a sistemului}}{\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & y_1 \\ 2 & -2 & 2 & y_2 \\ 4 & 2 & -4 & y_3 \end{pmatrix}}.$$

Din rezultatul de mai sus $rangA = 2$. Punem condiţia ca $rang\overline{A} = 2$ (deoarece trebuie să existe x cu proprietatea cerută). $rang\overline{A} = 2$ atrage

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & y_1 \\ 2 & -2 & y_2 \\ 4 & 2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12y_1 + 12y_2 - 12y_3 = 0$$

şi

$$ImU = \left\{ y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,|y_1 + y_2 - y_3 = 0 \right\}.$$

Observăm că

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 - y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şi deci

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \overset{bază}{\subset} ImU \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} ImU = 2.$$

Mai mult se observă că $\dim_{\mathbb{R}} KerU + \dim_{\mathbb{R}} ImU = 1 + 2 = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$. ■

Exerciţiu 2.5.2 Trei persoane (notate cu P1, P2, P3), organizate într-o societate închisă produc trei produse de bază Z1, Z2, Z3. Fiecare persoană vinde şi cumpără una de la alta. Toate produsele lor sunt consumate de ei, nicio altă marfă nu intră în sistem ("modelul închis"). Proporţiile produselor consumate de fiecare dintre P1, P2, P3 sunt date în tabelul următor:

	Z1	Z2	Z3
P1	0,6	0,2	0,3
P2	0,1	0,7	0,2
P3	0,3	0,1	0,5

De exemplu, prima coloană afirmă că 60% din produsul Z1 este consumat de către P1, 10% de P2 şi 30% de P3. Să se precizeze ce venituri trebuie să aibă persoanele P1, P2, P3 astfel încât să poată supravieţui. ■

Soluţie. Este evident că suma de pe fiecare coloană Z1, Z2, Z3 este 1. Să notăm cu x_1, x_2, x_3 veniturile persoanelor P1, P2, P3. Atunci suma cheltuită de P1 pentru Z1, Z2, Z3 este

$$0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3.$$

Cum consumul fiecărei persoane este egal cu venitul său, obţinem ecuaţia

$$0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3 = x_1,$$

similar pentru alte persoane. În final avem de rezolvat sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3 &= x_1 \\ 0,1 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 + 0,2 \cdot x_3 &= x_2 \\ 0,3 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Acest sistem poate fi scris ca o ecuaţie de forma $f(x) = x$, unde $f(x) = Ax$ cu

$$A = [A]_{B_c}^{f} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ în reperul canonic din } \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right) \text{ şi } x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Mai mult decât atât, vom presupune că venitul este pozitiv, adică $x_i \geq 0$ pentru $i = 1,2,3$ (notăm $x \geq 0$). Putem rescrie această ecuaţie în forma echivalentă $(A - I_3)x = 0_{\mathbb{R}^3}$ şi definim $U : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3$ prin

$$U(x) = (A - I_3)x.$$

Avem astfel de determinat $KerU$ şi deci de rezolvat sistemul $U(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. O soluţie arbitrară a acestui sistem are forma $x = t(13, 11, 10)^T$ cu $x \geq 0$ pentru $t \geq 0$. Astfel, pentru a se asigura că această societate supravieţuieşte, trebuie ca persoanele P1, P2, P3 să aibă veniturile lor în proporţiile 13 : 11 : 10. (Problemă care a generat un premiu Nobel). ■

R Sunt adevărate:

i) $Ker\ U$ este subspaţiu vectorial în (X,K) iar ImU în (Y,K).

ii) Dacă $Ker\ U = \{0_X\}$ atunci operatorul liniar U este injectiv, şi reciproc. Se mai spune că U este monomorfism.

iii) Dacă $Im\ U = Y$ atunci operatorul liniar U este surjectiv. Se mai spune că U este epimorfism.

Exerciţiu 2.5.3 În $\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ fie $X = Span(a_1,\ a_2)$, $Y = Span(a_3, a_4)$ unde

$$a_1 = (1,2)^T, a_2 = (-2,-4)^T, a_3 = (-3,1)^T, a_4 = (9,-3)^T.$$

Se cere:

i) Să se arate că X este izomorf cu Y.

ii) Să se construiască un izomorfim $f : X \to Y$. ■

Soluţie. i) Utilizăm Teorema 2.1.5 pentru a demonstra că $\dim_{\mathbb{R}} X = \dim_{\mathbb{R}} Y \in \mathbb{N}^*$. Căutăm o bază $B_1 \subset X$ şi o bază $B_2 \subset Y$. Pentru B_1 formăm matricea alcătuită din vectorii

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2^{A_1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow rangA_1 = 1 < \text{număr de vectori din } \{a_1,\ a_2\} \end{aligned}$$

şi deci $\{a_1,\ a_2\}$ sunt liniar dependenţi. Cum a_1, a_2 sunt diferiţi de vectorul nul, deducem că $\{a_1\}$, respectiv $\{a_2\}$ sunt liniar independeţi. Din

$$\{a_1\} \subset X = Span(a_1,\ a_2), \{a_2\} \subset X = Span(a_1,\ a_2)$$

deducem că $\{a_1\}$, respectiv $\{a_2\}$ sunt sisteme de generatori. Astfel că, putem considera $B_1 = \{a_1\} \overset{bază}{\subset} X \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} X = 1$. Mai mult, rezultă că $X = Span(a_1)$. Analog

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2^{A_2} = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow rangA_2 = 1 < \text{număr de vectori din } \{a_3,\ a_4\} \end{aligned}$$

şi în final $B_2 = \{a_3\} \overset{bază}{\subset} Y \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} Y = 1$. Mai mult, rezultă că $Y = Span(a_3)$. Am demonstrat că $\dim_{\mathbb{R}} X = \dim_{\mathbb{R}} Y = 1 \in \mathbb{N}^*$ şi deci $(X,K) \overset{izomorf}{\cong} (Y,K)$.

ii) Conform demonstraţiei Teoremei 2.1.5 putem defini

$$f : X \to Y,\ f(\alpha a_1) = \alpha a_3 \text{ deoarece } B_1, B_2 \overset{bază}{\subset} X.$$

Analog ca în demonstraţia Teoremei 2.1.5 se poate arăta că f este bijectivă şi liniară, deci izomorfism.

Dăm o altă metodă celei prezentate în demonstraţia Teoremei 2.1.5 pentru a arăta că f este bijectivă. Mai exact vom arăta că $Kerf = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ şi $Imf = Y$. Într-adevăr,

$$Kerf = \{x \in X | f(x) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Fie $x = (\alpha, 2\alpha)^T \in X$. Relaţia $f(x) = 0_{\mathbb{R}^2}$ este echivalentă cu

$$\alpha a_3 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow x = (0,0)^T.$$

Cum

$$x = (0,0)^T \Longrightarrow Kerf = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Longrightarrow f \text{ injectivă.}$$

Observăm că

$$Imf = \{y \in Y | \exists x \in X \text{ astfel încât } f(x) = y\}.$$

Fie $y = \beta(-3,1)^T \in Y$. Cercetăm dacă $\exists x = (\alpha, 2\alpha)^T \in X$ astfel încât $f(\alpha, 2\alpha) = \beta(-3,1)^T$ sau echivalent

$$\alpha(-3,1)^T = \beta(-3,1)^T \Longrightarrow \alpha = \beta.$$

Cum pentru orice $y \in Y$ $\exists x \in X$ astfel încât $f(x) = y$ deducem că $Y = Imf \Longrightarrow f$ surjectivă. ■

Teoremă 2.5.1 — Teorema fundamentală de izomorfism II. Dacă (X,K), (Y,K) sunt spaţii vectoriale finit dimensionale nenule iar $U : X \to Y$ este operator liniar atunci există un izomorfism $g : X/KerU \to ImU$.

Demonstraţie. Distingem cazurile

Caz 1: $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $n > \dim_K KerU = d \in \mathbb{N}^*$.

Dacă

$$B_1 = \{v_1, ..., v_d\} \overset{bază}{\subset} KerU$$

atunci putem extinde această bază astfel încât

$$\{v_1, ..., v_d, v_{d+1}, ..., v_n\} \overset{\text{baza extinsă}}{\subset} X.$$

Arătăm că

$$\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\} \overset{\text{bază}}{\subset} ImU.$$

Remarcăm că pentru $w \in ImU$ există $v \in X$ astfel încât $U(v) = w$.

Demonstrăm că

$$\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\}$$

este sistem de generatori în ImU. Într-adevăr, din

$$\{v_1,...,v_d,v_{d+1},...,v_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$$

deducem că există $\alpha_1,...,\alpha_n \in K$ astfel încât

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n.$$

Aplicând U avem

$$\begin{aligned} U(v) &= U(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \underbrace{U(v_1)}_{=0_Y \text{ deoarece } v_1 \in KerU} + ... + \alpha_d \underbrace{U(v_d)}_{=0_Y \text{ deoarece } v_d \in KerU} + \alpha_{d+1} U(v_{d+1}) + ... + \alpha_n U(v_n) \\ &= \alpha_{d+1} U(v_{d+1}) ... + \alpha_n U(v_n) \end{aligned}$$

şi deci

$$\{U(v_{d+1}),...,U(v_n)\} \subseteq Span(ImU).$$

Demonstrăm că $\{U(v_{d+1}),...,U(v_n)\}$ este liniar independent în ImU :

$$\alpha_{d+1} U(v_{d+1}) + ... + \alpha_n U(v_n) = 0_Y \Longrightarrow U(\alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n) = 0_Y$$

şi deci

$$\alpha_{d+1} v_{d+1} ... + \alpha_n v_n \in KerU.$$

Dar $\{v_1,...,v_d\} \overset{\textit{bază}}{\subset} KerU \Longrightarrow$ există $\beta_1,...,\beta_d \in K$ astfel încât

$\alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_d v_d$ echivalent $\beta_1 v_1 + ... + \beta_d v_d - \alpha_{d+1} v_{d+1} - ... - \alpha_n v_n = 0_Y$.

Cum

$$\{v_1,...,v_d,v_{d+1},...,v_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$$

deducem că

$$\beta_1 = ... = \beta_d = -\alpha_{d+1} = ... = -\alpha_n = 0$$

şi deci $\{U(v_{d+1}),...,U(v_n)\}$ este liniar independent în ImU. Am demonstrat că

$$\{U(v_{d+1}),...,U(v_n)\} \overset{\text{bază}}{\subset} ImU$$

şi deci

$$\dim_K ImU = n - d. \tag{2.21}$$

Pe de altă parte din Teorema dimensiunii pentru spaţiul cât, avem

$$\dim_K \frac{X}{KerU} = n - d. \tag{2.22}$$

Folosind acum Teorema fundamentală de izomorfism I, (2.21) şi (2.22) deducem că $\frac{X}{KerU}$ este izomorf cu ImU şi deci există un izomorfism $g : X/KerU \to ImU$.

Caz 2: $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $KerU = \{0_X\}$. În această situaţie observăm că

$$\frac{X}{\{0_X\}} = X$$

şi deci există un izomorfism $g : X \to ImU$.

Caz 3: $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $KerU = X$. În această situaţie observăm că

$$\frac{X}{KerU} = \{0_X\}$$

iar folosind din nou faptul că $KerU = X$ deducem că $ImU = \{0_X\}$ şi deci există un izomorfism $g : \frac{X}{KerU} \to ImU$.

Teoremă 2.5.2 — Teorema dimensiunii pentru operatori liniari. Dacă (X,K), (Y,K) sunt spaţii vectoriale finit dimensionale nenule iar $U : X \to Y$ este operator liniar atunci

$$\dim_K X = \dim_K KerU + \dim_K ImU.$$

Demonstraţie. Distingem cazurile

Caz 1: $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $n > \dim_K KerU = d \in \mathbb{N}^*$, caz în care, fie $\{v_1,...,v_d\} \overset{bază}{\subset} KerU$ iar $\{v_1,...,v_d,v_{d+1},...,v_n\} \overset{\text{baza extinsă}}{\subset} X$.

Ca în Teorema fundamentală de izomorfism II, se observă că $\{U(v_{d+1}),...,U(v_n)\}$ este bază în ImU. Recapitulând, avem că

$$\dim_K X = \dim_K KerU + \dim_K ImU$$

este echivalentă cu relaţia adevărată $n = d + n - d$.

Caz 2: $\dim_K KerU = \dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ de unde deducem că $KerU = X$ şi deci $U(x) = 0_Y$ pentru orice $x \in X$. Avem astfel $ImU = \{0_Y\}$ şi deci $\dim_K ImU = 0$.

Evident $n = \dim_K X = \dim_K KerU + \dim_K ImU$ este verificată.

Caz 3: $d = 0 \Longrightarrow KerU = \{0_X\}$ şi deci U este injectiv. În acest caz, dacă $\{v_1,...,v_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$ atunci se poate arăta analog ca în demonstraţia Teoremei fundamentale de izomorfism II că

$$\{U(v_1),...,U(v_n)\} \overset{\text{bază}}{\subset} ImU$$

şi deci $n = \dim_K X = 0 + n = \dim_K KerU + \dim_K ImU$.

Alternativă:

Caz 1: dacă $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $n > \dim_K KerU = d \in \mathbb{N}^*$ deducem din **Teorema fundamentală de izomorfism II,** că

$$\dim_K \frac{X}{KerU} = \dim_K ImU \tag{2.23}$$

iar din **Teorema dimensiunii pentru spaţiul cât**, avem

$$\dim_K \frac{X}{KerU} = \dim_K X - \dim_K KerU. \tag{2.24}$$

Din (2.23) şi (2.24) deducem că $\dim_K X - \dim_K KerU = \dim_K ImU$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Caz 2: dacă $d = n \Longrightarrow KerU = X$ iar din **Teorema fundamentală de izomorfism II** rezultă

$$X/KerU = \{0_X\} \text{ izomorf cu } ImU \Longrightarrow \dim_K ImU = \dim_K \{0_X\} = 0.$$

Caz 3: dacă $d = 0 \Longrightarrow KerU = \{0_X\}$ iar din **Teorema fundamentală de izomorfism II** avem că

$$X/\{0_X\} = X \text{ izomorf cu } ImU \Longrightarrow \dim_K ImU = \dim_K X = n.$$

Exerciţiu 2.5.4 Se consideră operatorul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea lui U în reperul canonic din $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$.

i) Să se determine ImU şi $KerU$.

ii) Să se determine $\dim_{\mathbb{R}} KerU$ şi $\dim_{\mathbb{R}} ImU$. ■

Soluţie. i) Se cunoaşte că $KerU = \left\{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,|U(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$.

Relaţia $U(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ este echivalentă cu $Ax = 0_{\mathbb{R}^3}$ şi cu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistem cu matricea A. Un minor nenul de ordinul 2 al matricei A este

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

şi deci $rangA \geq 2$. Pe de altă parte observăm că determinantul lui A este nul. Concludem că $rangA = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat. Necunoscuta secundară x_3 o notăm prin α. Observăm că sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = -\alpha \end{cases}$$

are soluţia $x_1 = x_2 = -\alpha$. Am obţinut că $KerU = \left\{\alpha(-1, -1, 1)^T \,|\alpha \in \mathbb{R}\right\}$. O bază în $KerU$ este $\left\{(-1, -1, 1)^T\right\}$ şi deci $\dim_{\mathbb{R}} KerU = 1$.

Determinăm imaginea operatorului U.

Prin definiţie $ImU = \left\{y \in R^3 \,\middle|\, \text{există } x \in \mathbb{R}^3 \text{ cu } y = U(x)\right\}$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3)^T$. Relaţia $y = U(x)$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3. \end{cases}$$

Am văzut că rangul matricei este 2. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca rangul matricei extinse să fie egal cu rangul matricei sistemului (adică cu 2).

Matricea extinsă este

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ -1 & 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

iar $rang\overline{A} = 2$ dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ -1 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

echivalent cu $y_3 - y_1 - y_2 = 0$ ecuaţie ce reprezintă un sistem cu 3 necunoscute. Considerăm y_3 necunoscuta principală şi notăm prin

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta \end{cases}$$

necunoscutele secundare. Atunci $y_3 = \alpha + \beta$ şi deci

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Am obţinut

$$ImU = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = Span\left((1,0,1)^T, (0,1,1)^T \right).$$

ii) Din punctul i) observăm că $\dim_{\mathbb{R}} ImU = 2$ deoarece $B = \left\{ (1,0,1)^T, (0,1,1)^T \right\} \overset{bază}{\subset} ImU$.

Desigur puteam utiliza teorema dimensiunii $\dim_{\mathbb{R}} KerU + \dim_{\mathbb{R}} ImU = 3 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} ImU = 2$.

O bază în ImU o putem determina prin folosirea demonstraţiei Teoremei fundamentală de izomorfism II. Mai exact: având baza $\left\{ (-1,-1,1)^T \right\}$ în $KerU$ o putem completa la o bază în $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ astfel

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \left\{ (-1,-1,1)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T \right\} \overset{bază}{\subset} \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$$

şi deci conform demonstraţiei Teoremei fundamentală de izomorfism II avem că

$$\{U((0,1,0)), U((0,0,1))\} = \left\{ (-1,2,1)^T, (0,1,1)^T \right\} \overset{bază}{\subset} ImU$$

deoarece

$$\begin{aligned} U((0,1,0)) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1,2,1)^T \\ U((0,0,1)) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,1,1)^T. \end{aligned}$$

■

2.6 Operatori de proiecţie

Presupunem că $V = V_1 \oplus V_2$. Pentru fiecare $x \in V$ $\exists! x_1 \in V_1$ şi $\exists! x_2 \in V_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$.

Definiţie 2.6.1 Vectorul x_1 se numeşte proiecţia lui x pe V_1 în direcţia V_2 iar operatorul $P : V \longrightarrow V$ definit prin $P(x) = x_1$ se numeşte proiecţia lui V pe V_1 în direcţia V_2.

R Analog se defineşte proiecţia lui V pe V_2 în direcţia V_1.

R Sunt adevărate
i) P este operator liniar;
ii) $ImP = V_1$, $KerP = V_2 \Longrightarrow V = ImP \oplus KerP$;
iii) $P(P(\cdot)) = P(\cdot)$ (proprietatea de idempotenţă);
iv) Dacă $P(\cdot) : V \longrightarrow V$ este proiecţie atunci $(1_V - P)(\cdot) : V \to V$ este tot o proiecţie.

Teoremă 2.6.1 Operatorul liniar $P(\cdot) : V \longrightarrow V$ este proiecţie (proiector) dacă şi numai dacă $P(P(x)) = P(x)$ pentru orice $x \in V$.

Exerciţiu 2.6.1 Pentru fiecare $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat, operatorul $p_\alpha(\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin

$$p_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2)^T$$

este operator de proiecţie, numit operatorul de proiecţie oblică. ■

Soluţie. Se observă că

$$p_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + \alpha x_1 \end{pmatrix}$$

şi

$$p_\alpha(p_\alpha(x)) = p_\alpha(0, x_1 + \alpha x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + \alpha x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + \alpha x_1 \end{pmatrix} = p_\alpha(x).$$

■

2.7 Reprezentarea matriceală a operatorilor liniari

Reamintim:

Definiţie 2.7.1 Fie (X, K), (Y, K) spaţii vectoriale de dimensiune finită $n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $m \in \mathbb{N}^*$, $U : X \to Y$ operator liniar,

$$E = \{x_1, ..., x_n\} \overset{reper}{\subset} X \text{ iar } F = \{y_1, ..., y_m\} \overset{reper}{\subset} Y.$$

Matricea ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $U(x_1), ..., U(x_n)$ în raport cu reperul F se numeşte matricea lui U în raport cu reperele E şi F.

R Dacă

$$\begin{aligned} U(x_1) &= \alpha_{11} y_1 + ... + \alpha_{m1} y_m \\ &... \\ U(x_n) &= \alpha_{1n} y_1 + ... + \alpha_{mn} y_m \end{aligned}$$

atunci matricea lui U în raport cu reperele E şi F este

$$[A]_{E,F}^{U}=(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,..n\\ j=1,...,m}}=\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \uparrow & & \uparrow \\ [U(x_1)]_F & \cdots & [U(x_n)]_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \cdots & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\ (\overset{not}{=}A).$$

În plus, are loc $(U(x))_F=[A]_{E,F}^{U}\cdot x_E$ unde x_E este vectorul coordonatelor elementului $x\in X$ în raport cu reperul E.

R Fie (X,K), (Y,K) spaţii vectoriale finit dimensionale nenule şi $U:X\to Y$ operator liniar. Dacă $E\overset{\text{reper canonic}}{\subset}(X,K)$, $F\overset{\text{reper canonic}}{\subset}(Y,K)$ iar $[A]_{E,F}^{U}$ este matricea lui U corespunzătoare reperelor canonice E, F atunci U admite următoarea reprezentare $U(x)=[A]_{E,F}^{U}\cdot x$.

Definiţie 2.7.2 Fie (X,K) spaţiu vectorial de dimensiune finită $n\in\mathbb{N}^*$ iar $U:X\to X$ endomorfism. Dacă $E=\{x_1,...,x_n\}\overset{reper}{\subset}X$ iar $U(x_i)=\alpha_{1i}x_1+...+\alpha_{ni}x_n$ pentru orice $i=1,...,n$ atunci

$$[A]_{E}^{U}=(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,...,n\\ j=1,...,n}}=\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \uparrow & & \uparrow \\ [U(x_1)]_E & \cdots & [U(x_n)]_E \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \cdots & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\ (\overset{not}{=}A\ ),$$

se numeşte matricea endomorfismului U în raport cu reperul E.

Exerciţiu 2.7.1 Fie $(\mathscr{P}_2[X],\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 şi operatorul liniar $U:\mathscr{P}_2[X]\to\mathscr{P}_2[X]$ definit prin $U(f(X))=f'(X)+f''(X)$. Să se determine matricea endomorfismului U în raport cu reperul canonic $B_c=\{1,X,X^2\}$ din $\mathscr{P}_2[X]$. ■

Demonstraţie. Metoda 1. Observăm că

$$\begin{aligned}U(1)&=(1)'+(1)''=0\\ U(X)&=(X)'+(X)''=1\\ U(X^2)&=(X^2)'+(X^2)''=2X+2\end{aligned}$$

iar, conform teoriei

$$\begin{aligned}0&=\alpha_{11}\cdot 1+\alpha_{21}X+\alpha_{31}X^2\\ 1&=\alpha_{12}\cdot 1+\alpha_{22}X+\alpha_{32}X^2\\ 2X+2&=\alpha_{13}\cdot 1+\alpha_{23}X+\alpha_{33}X^2\end{aligned}$$

sistem din care, prin identificarea coeficienţilor polinoamelor, obţinem matricea operatorului U

$$[A]_{B_c}^{U}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Metoda 2. Deoarece $\mathscr{P}_2[X]\overset{\text{izomorf}}{\simeq}\mathbb{R}^3$ deducem că U este operator liniar de la $\mathbb{R}^3$ la $\mathbb{R}^3$, dat de o matrice A de tip 3×3. Vom determina $[A]_{B_c}^{U}$. Dacă $f(X)=a+bX+cX^2$ atunci putem scrie operatorul U astfel

$$U(a+bX+cX^2)=(a+bX+cX^2)'+(a+bX+cX^2)''=(b+2c)+2cX.$$

Vom scrie $f(X) = a + bX + cX^2$ şi $U(f(X)) = (b+2c) + 2cX$ în coordonate în raport cu reperul canonic $B_c = \{1, X, X^2\}$ din $\mathscr{P}_2[X]$:

$$\begin{array}{ccc} f(X) = a + bX + cX^2 & \overset{U}{\to} & U(f(X)) = (b+2c) + 2cX \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (f(X))_{B_C} = (a,b,c)^T & \to & (U(f(X)))_{B_c} = ((b+2c), 2c, 0)^T. \end{array}$$

Scriem coordonatele operatorului U astfel

$$(U(f(X)))_{B_c} = \begin{pmatrix} b+2c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (f(X))_{B_C}.$$

Matricea

$$[A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U.

Exerciţiu 2.7.2 Dacă $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este operator liniar definit prin $T(x) = [A_1]_{B_c}^T x$ unde $[A_1]_{B_c}^T$ este matricea operatorului T în reperul canonic $B_c = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dată prin

$$[A_1]_{B_c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

atunci să se determine un reper B pentru $\frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}}$ şi matricea $[A_2]_B^{\widehat{T}}$ operatorului $\widehat{T} : \frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}} \to \frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}}$ în reperul B. ■

Soluţie. Probăm că vectorii $\widehat{e_1}$, $\widehat{e_3}$ sunt liniar independenţi. O combinaţie liniară a lor dă vectorul nul $\alpha_1\widehat{e_1} + \alpha_2\widehat{e_3} = \widehat{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in Span\{e_2\}$ deducem că

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3 = \alpha_3 e_2 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Mai mult

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}^3 / Span\{e_2\}\right) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} Span\{e_2\} = 2$$

adică egală cu numărul de vectori liniar independenţi $\{\widehat{e_1}, \widehat{e_3}\}$ ai lui $\frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}}$ şi deci $B = \{\widehat{e_1}, \widehat{e_3}\} \overset{reper}{\subset} \frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}}$.

Pentru a determina $[A_2]_B^{\widehat{T}}$ matricea operatorului

$$\widehat{T} : \frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}} \to \frac{\mathbb{R}^3}{Span\{e_2\}}$$

în reperul B determinată vom observa că

$$T(\widehat{e_1}) = \widehat{T(e_1)} = \widehat{e_1 + e_3} = \widehat{e_1} + \widehat{e_3} \text{ şi } T(\widehat{e_3}) = \widehat{T(e_3)} = \widehat{-e_1} = -\widehat{e_1}$$

şi deci

$$[A_2]_B^{\widehat{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

2.8 Legătura dintre operaţiile cu operatori liniari şi matricele lor

Teoremă 2.8.1 Fie (X,K), (Y,K), (Z,K) spaţii vectoriale de dimensiune finită nenule. Presupunem că

$$E \overset{reper}{\subset} X, F \overset{reper}{\subset} Y, G \overset{reper}{\subset} Z, U_1 : X \to Y, U_2 : X \to Y \text{ şi } U_3 : Y \to Z$$

operatori liniari. Dacă $[A_1]_{E,F}^{U_1}$ este matricea lui U_1 în raport cu reperele E şi F, $[A_2]_{E,F}^{U_2}$ a lui U_2 în raport cu reperele E şi F iar $[A_3]_{F,G}^{U_3}$ matricea lui U_3 în raport cu reperele F şi G atunci

i) operatorului liniar $U_1 + U_2$ îi corespunde matricea

$$[A]_{E,F}^{U_1+U_2} = [A_1]_{E,F}^{U_1} + [A_2]_{E,F}^{U_2};$$

ii) operatorului liniar αU_1 $(\alpha \in K)$ îi corespunde matricea

$$[A]_{E,F}^{\alpha U_1} = \alpha \cdot [A_1]_{E,F}^{U_1};$$

iii) operatorului liniar $U_3 \circ U_1$ îi corespunde matricea

$$[A]_{E,G}^{U_3 \circ U_1} = [A_3]_{F,G}^{U_3} \cdot [A_1]_{E,F}^{U_1};$$

iv) sub ipoteza că $[A_1]_{E,F}^{U_1}$ este inversabilă, operatorului liniar U_1^{-1} îi corespunde matricea

$$[A]_{F,E}^{U_1^{-1}} = \left([A_1]_{E,F}^{U_1}\right)^{-1}.$$

Exerciţiu 2.8.1 Fie aplicaţia bijectivă $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$U(v) = A \cdot v \text{ unde } v = (v_1, v_2)^T \text{ iar } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

este matricea lui U în reperul canonic din $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Să se determine U^{-1}. ■

Soluţie. Observăm că

$$\det A \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi deci

$$U^{-1}(v_1, v_2) = A^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

■

2.9 Modificarea matricei unui operator liniar la schimbarea reperelor

Teoremă 2.9.1 Fie (X,K), (Y,K) spaţii vectoriale de dimensiune finită nenule şi $U : X \to Y$ operator liniar. Dacă $[A]_{E_1,F_1}^{U}$ este matricea lui U în raport cu reperele $E_1 \subset X$, $F_1 \subset Y$ iar

$[B]^U_{E_2,F_2}$ este matricea lui U în raport cu reperele $E_2 \subset X$, $F_2 \subset Y$ atunci

$$[B]^U_{E_2,F_2} = (D_{F_1,F_2})^{-1} \cdot [A]^U_{E_1,F_1} \cdot C_{E_1,E_2}$$

unde C_{E_1,E_2} este matricea de trecere de la reperul E_1 la E_2 iar D_{F_1,F_2} este matricea de trecere de la reperul F_1 la F_2.

R Fie (X,K) spaţiu vectorial de dimensiune finită nenul şi $U : X \to X$ endomorfism. Dacă $[A]^U_E$ este matricea lui U în raport cu reperul E al lui X, iar $[B]^U_F$ este matricea lui U în raport cu reperul $F \subset X$ atunci

$$[B]^U_F = (C_{E,F})^{-1} \cdot [A]^U_E \cdot C_{E,F}$$

unde $C_{E,F}$ este matricea de trecere de la reperul E la reperul F.

■ **Exemplu 2.9.1** Fie $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ spaţiu vectorial şi $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin

$$U(x,y) = (x+y,-2x+4y).$$

Dacă

$$[A]^U_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ atunci să se arate că } [B]^U_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

unde

$$B_c = \left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\} \overset{\text{reper canonic}}{\subset} \mathbb{R}^2,\ B = \left\{(1,1)^T,(1,2)^T\right\} \overset{\text{reper}}{\subset} \mathbb{R}^2.$$

■

Soluţie. Observăm că

$$C_{B_c,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1_{B_c} & 2_{B_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi deci } (C_{B_c,B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$[B]^U_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

Exerciţiu 2.9.1 Fie $(\mathscr{P}_2[X],\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult doi peste corpul numerelor reale şi $U : \mathscr{P}_2[X] \to \mathscr{P}_2[X]$ operator liniar definit prin $U(P(X)) = P(X+1)$. Să se determine matricea $[A]^U_B$ lui U în reperul $B = \left\{1,X,X^2\right\}$, matricea $[B]^U_{B_1}$ lui U în reperul $B_1 = \left\{X,X^2+1,X^2-1\right\}$ precum şi matricea C_{B,B_1} de trecere de la reperul B la B_1. Ce legătură există între cele trei matrice? ■

Soluţie. Fie $x_1 = 1$, $x_2 = X$, $x_3 = X^2$. Conform definiţiei lui U avem

$$\begin{aligned} U(x_1) &= 1 \\ U(x_2) &= X+1 \\ U(x_3) &= (X+1)^2. \end{aligned}$$

Însă $U(P(X)) = P(X+1)$ şi deci

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 \\
X+1 &= \alpha_{12}\cdot x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 \\
(X+1)^2 &= \alpha_{13}\cdot x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3,
\end{aligned}$$

sau echivalent

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha_{11}\cdot 1 + \alpha_{21}X + \alpha_{31}X^2 \\
X+1 &= \alpha_{12}\cdot 1 + \alpha_{22}X + \alpha_{32}X^2 \\
(X+1)^2 &= \alpha_{13}\cdot 1 + \alpha_{23}X + \alpha_{33}X^2.
\end{aligned}$$

Două polinoame sunt egale dacă coeficienţii termenilor care conţin pe X la aceleaşi puteri sunt egali. Avem aşadar

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{21} = 0, \alpha_{31} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{22} = 1, \alpha_{32} = 0, \alpha_{13} = 1, \alpha_{23} = 2, \alpha_{33} = 1,$$

adică

$$[A]_B^U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina $[B]_{B_1}^U$ notăm

$$y_1 = X, y_2 = X^2+1, y_3 = X^2-1$$

iar din $U(P(X)) = P(X+1)$ avem

$$\begin{cases} U(y_1) = X+1 \\ U(y_2) = (X+1)^2+1 \\ U(y_3) = (X+1)^2-1 \end{cases}$$

şi deci trebuie aflaţi α_{ij} astfel încât

$$\begin{cases} X+1 = \alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 \\ (X+1)^2+1 = \alpha_{12}\cdot y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{32}y_3 \\ (X+1)^2-1 = \alpha_{13}\cdot y_1 + \alpha_{23}y_2 + \alpha_{33}y_3. \end{cases}$$

Ori, echivalent

$$\begin{cases} X+1 = \alpha_{11}\cdot X + \alpha_{21}\left(X^2+1\right) + \alpha_{31}\left(X^2-1\right) \\ (X+1)^2+1 = \alpha_{12}\cdot X + \alpha_{22}\left(X^2+1\right) + \alpha_{32}\left(X^2-1\right) \\ (X+1)^2-1 = \alpha_{13}\cdot X + \alpha_{23}\left(X^2+1\right) + \alpha_{33}\left(X^2-1\right). \end{cases}$$

Din identificarea coeficienţilor polinoamelor din prima egalitate a sistemului obţinem

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{21} - \alpha_{31} = 1 \end{cases}$$

cu soluţia $\alpha_{11} = 1, \alpha_{21} = \frac{1}{2}, \alpha_{31} = -\frac{1}{2}$. Procedând la fel cu egalitatea a doua şi a treia din sistem se obţine

$$[B]_{B_1}^U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Răspundem la întrebarea ce legătură există între $[A]_B^U$ şi $[B]_{B_1}^U$. Pentru început, calculăm matricea C_{B,B_1} de trecere de la reperul B la reperul B_1. Conform teoriei trebuie exprimaţi vectorii din B_1 în funcţie de vectorii din B. Astfel

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 \\ y_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 \\ y_3 = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} X = \alpha_{11} \cdot 1 + \alpha_{21}X + \alpha_{31}X^2 \\ X^2 + 1 = \alpha_{12} \cdot 1 + \alpha_{22}X + \alpha_{32}X^2 \\ X^2 - 1 = \alpha_{13} \cdot 1 + \alpha_{23}X + \alpha_{33}X^2. \end{cases}$$

De unde, prin identificarea coeficienţilor polinoamelor deducem că

$$\alpha_{11} = 0, \alpha_{21} = 1, \alpha_{31} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{22} = 0, \alpha_{32} = 1, \alpha_{13} = -1, \alpha_{23} = 0, \alpha_{33} = 1$$

şi deci

$$C_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Relaţia cerută este

$$[B]_{B_1}^U = (C_{B,B_1})^{-1} [A]_B^U C_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru a verifica dacă s-a greşit la calcule, avem

$$(C_{B,B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} (C_{B,B_1})^{-1} [A]_B^U C_{B,B_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = [B]_{B_1}^U \end{aligned}$$

şi deci nu există erori de calcul. Aşadar pentru a determina $[B]_{B_1}^U$ era suficient să determinăm C_{B,B_1} şi $[A]_B^U$ matricea $[B]_{B_1}^U$ rezultând din relaţia

$$[B]_{B_1}^U = (C_{B,B_1})^{-1} [A]_B^U C_{B,B_1}.$$

■

2.10 Valori proprii, vectori proprii şi subspaţii proprii

Fie (X,K) spaţiu vectorial nenul şi $U : X \to X$ endomorfism.

Definiţie 2.10.1 Vectorul $x \in X$, $x \neq 0_X$ se numeşte vector propriu al lui U dacă există $\lambda \in K$ astfel încât

$$U(x) = \lambda x. \tag{2.25}$$

Definiţie 2.10.2 Un scalar $\lambda \in K$ se numeşte valoare proprie a lui U dacă există $x \in X$, $x \neq 0_X$ ce verifică (2.25).

Definiţie 2.10.3 Fie λ valoare proprie a lui U. Mulţimea $X_\lambda = \{x \in X | U(x) = \lambda x\}$ se numeşte subspaţiul propriu al lui U corespunzător valorii proprii λ. (Notăm că în X_λ este inclus şi 0_X.)

R $X_\lambda = Ker(U - \lambda 1_X)$ este subspaţiu vectorial în X.

Definiţie 2.10.4 Mulţimea tuturor valorilor proprii se notează prin ΛU şi se numeşte spectrul operatorului U. Numărul $R_s = \max\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \Lambda U\}$ se numeşte raza spectrală a operatorului U.

R Dacă $\dim_K X = n \in N^*$ iar $A \overset{not}{=} [A]_B^U$ este matricea lui U în raport cu reperul $B \subset X$ atunci $\lambda \in K$ este valoare proprie pentru U (se mai spune pentru A) dacă şi numai dacă

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{2.26}$$

În plus, vectorul propriu x corespunzător valorii proprii λ se determină din sistemul

$$(A - \lambda I_n)x_B = 0_X. \tag{2.27}$$

Definiţie 2.10.5 Dimensiunea subspaţiului propriu X_λ peste K se numeşte multiplicitatea geometrică a valorii proprii λ. Se notează $\dim_K X_\lambda$ prin m_{g_λ}.

Definiţie 2.10.6 Multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ este multiplicitatea lui λ ca rădăcină a ecuaţiei (2.26). Notăm prin m_{a_λ} multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ.

R Dacă $\dim_K X = n \in N^*$ iar $\lambda \in K$ este o valoare proprie a endomorfismului U atunci $m_{g_\lambda} \leq m_{a_\lambda}$.

Exerciţiu 2.10.1 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x) = A \cdot x$ unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U în reperul canonic din $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$. Să se determine spectrul ΛU şi subspaţiul propriu al operatorului liniar, X_λ. ■

Soluţie. i) Valorile proprii se determină din relaţia

$$|A-\lambda I_3|=0$$

ori echivalent

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^3+3\lambda^2-4=0.$$

Din schema lui Horner

	1	3	0	−4
1	1	4	4	0
−2	1	2	0	

deducem că ecuaţia $\lambda^3+3\lambda^2-4=0$ are soluţiile

$$\lambda_1=1;\lambda_2=\lambda_3=-2$$

şi în acelaşi timp ele reprezintă valorile proprii. Astfel că $\Lambda U=\{-2,1\}$.

Determinăm vectorii proprii. Prin definiţie vectorii proprii sunt

$$X_\lambda=\left\{x_\lambda\in\mathbb{R}^3\,|(A-\lambda I_3)x_\lambda=0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

Pentru $\lambda=\lambda_1=1$ determinăm $x_{\lambda_1}=(a,b,c)^T$. Avem

$$(A-\lambda_1 I_3)x_{\lambda_1}=0_{\mathbb{R}^3}$$

ori echivalent cu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} -2a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \\ a+b-2c=0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

cu $rangC=2$ deoarece

$$M_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

şi

$$M_3=|C|=0 \text{ deoarece } |A-\lambda_1 I_3|=0.$$

Din cele de mai sus deducem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

$$M_2 \text{ minor principal } \Rightarrow \begin{cases} a, b \text{ necunoscute principale} \\ c \text{ necunoscută secundară} \Rightarrow c \overset{not}{=} \alpha. \end{cases}$$

Rezultă uşor că

$$x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şi deci

$$X_{\lambda_1} = \left\{ \alpha (1,1,1)^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = Span_{\mathbb{R}} \left((1,1,1)^T \right).$$

Pentru $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ obţinem analog că

$$X_{\lambda_{2,3}} = \left\{ (m,n,p)^T \in \mathbb{R}^3 \mid m+n+p=0 \right\} = Span_{\mathbb{R}} \left((-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T \right).$$

deoarece

$$(m,n,p)^T = (-n-p,n,p)^T = n(-1,1,0)^T + p(-1,0,1)^T.$$

■

2.11 Polinoame de endomorfisme sau de matrice pătratice

Fie (X,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in N^*$, $U : X \to X$ endomorfism iar $A \overset{not}{=} [A]_B^U$ matricea lui U în raport cu reperul $B \subset X$.

Definiţie 2.11.1 Polinomul

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n,\ p_i \in K \text{ cu } i = 0, \ldots, n$$

ce intervine în (2.26) se numeşte polinomul caracteristic al endomorfismului U iar ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ ce-i corespunde lui $P_A(\lambda)$, se numeşte ecuaţia caracteristică a lui U.

Invarianţa polinomului caracteristic la schimbarea reperelor este redată în:

Teoremă 2.11.1 Prin schimbarea reperului în spaţiul vectorial (X,K), polinomul caracteristic al operatorului liniar U nu se modifică.

Demonstraţie. Fie $E, F \overset{reper}{\subset} X$. Notăm $A = [A]_E^U$, $B = [B]_F^U$ iar prin $C = [C]_{E,F}$ matricea de legătură între reperele E, F. Observăm că

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = \left| C^{-1}AC - \lambda I_n \right| = \left| C^{-1}(A - \lambda I_n) C \right| = |A - \lambda I_n| = P_A(\lambda),$$

şi deci polinomul caracteristic nu depinde de alegerea reperului.

Teoremă 2.11.2 — Teorema Hamilton-Cayley. Fie $\mathscr{M}_n(K)$ spaţiul vectorial al matricelor de tip $n \times n$. Dacă $B \overset{reper}{\subset} X$, $U : X \to X$ este endomorfism iar $A \in \mathscr{M}_n(K)$ este matricea lui U în reperul B atunci $P_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(K)}$.

Demonstraţie. Observăm că

$$(A-\lambda I_n)(A-\lambda I_n)^* = |A-\lambda I_n| I_n \text{ pentru } \lambda \notin \Lambda U \tag{2.28}$$

unde

$$(A-\lambda I_n)^* = \begin{pmatrix} \beta_{11}^0+\beta_{11}^{(1)}\lambda+...+\beta_{11}^{(n-1)}\lambda^{n-1} & ... & \beta_{1n}^0+\beta_{1n}^{(1)}\lambda+...+\beta_{1n}^{(n-1)}\lambda^{n-1} \\ ... & ... & ... \\ \beta_{n1}^0+\beta_{n1}^{(1)}\lambda+...+\beta_{n1}^{(n-1)}\lambda^{n-1} & ... & \beta_{nn}^0+\beta_{nn}^{(1)}\lambda+...+\beta_{nn}^{(n-1)}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

este matricea adjunctă a lui $A-\lambda I_n$. Notaţiile introduse sunt reprezentate de

$$\beta_{11}^0+\beta_{11}^{(1)}\lambda+...+\beta_{11}^{(n-1)}\lambda^{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{22}-\lambda & ... & \alpha_{n2} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{2n} & ... & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix}, ...$$

Descompunând (2.29) în sume de n matrice avem

$$\begin{aligned} & (A-\lambda I_n)^* \\ = \; & \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}^0 & ... & \beta_{1n}^0 \\ ... & ... & .. \\ \beta_{n1}^0 & ... & \beta_{nn}^0 \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=}B_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & ... & \beta_{1n}^{(1)} \\ ... & ... & .. \\ \beta_{n1}^{(1)} & ... & \beta_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=}B_1}\lambda+...+\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(n-1)} & ... & \beta_{1n}^{(n-1)} \\ ... & ... & ... \\ \beta_{n1}^{(n-1)} & ... & \beta_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=}B_{n-1}}\lambda^{n-1} \\ = \; & B_0+B_1\lambda+...+B_{n-1}\lambda^{n-1}. \end{aligned}$$

Egalitatea (2.28) devine

$$(A-\lambda I_n)\left(B_0\lambda+B_1\lambda^2+...+B_{n-1}\lambda^{n-1}\right) = \left(p_0\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+...+p_{n-1}\lambda+p_n\right)I_n.$$

Efectuând produsul în membrul întâi şi identificând coeficienţii polinoamelor, obţinem

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= p_0 I_n \\ AB_{n-1}-I_nB_{n-2} &= p_1 I_n \\ & ... \\ AB_1-I_nB_0 &= p_{n-1}I_n \\ AB_0 &= p_n I_n. \end{aligned}$$

Înmulţind prima relaţie cu A^n a 2-a cu A^{n-1}, ..., $n+1$-a cu I_n, respectiv şi adunând rezultă

$$p_0A^n+p_1A^{n-1}+...+p_{n-1}A+p_nI_n = 0_{\mathscr{M}_n(K)} \text{ sau echivalent } P_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(K)}.$$

Exerciţiu 2.11.1 Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi & i \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^{24} şi A^{12}. ■

Soluţie. Observăm că

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - \lambda^2$$

astfel că teorema Hamilton-Cayley implică $A^3 = A^2$. Folosim această relaţie de recurenţă pentru a deduce puterile lui A astfel

$$\begin{aligned} A^{12} &= \left(A^3\right)^4 = \left(A^2\right)^4 = \left(A^2\right)^3 \cdot A^2 = \left(A^3\right)^2 \cdot A^2 = \left(A^2\right)^2 \cdot A^2 = \left(A^3\right)^2 \\ &= \left(A^2\right)^2 = A^3 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = A^2 \end{aligned}$$

şi

$$A^{24} = \left(A^{12}\right)^2 = \left(A^2\right)^2 = A^3 A = A^2 A = A^3 = A^2.$$

Deci

$$A^{24} = A^{12} = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 7\pi + i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

R Dacă $\det A = p_n = P_A(0) \neq 0$ atunci

$$p_n I_n = -\left(\lambda \sum_{k=0}^{n-1} p_k \lambda^{n-k-1}\right)_{\lambda = A} \text{ şi deci } A^{-1} = -\frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k A^{n-k-1}.$$

Exerciţiu 2.11.2 Folosind teorema Hamilton-Cayley să se calculeze A^{-1} pentru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Soluţie. Considerăm polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$$

din teorema Hamilton-Cayley se cunoaşte că $P_A(A) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ sau echivalent $-A^3 + 3A - 2I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Mai mult

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(-A^3 + 3A\right) = A \underbrace{\frac{1}{2}\left(-A^2 + 3I_3\right)}_{=A^{-1}}.$$

Calculăm

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

şi

$$A^{-1} = \frac{-A^2 + 3I_3}{2} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

■

2.12 Operator liniar diagonalizabil. Matrice diagonalizabilă

Fie (X,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in N^*$ şi $U : X \to X$ endomorfism.

Definiţie 2.12.1 O matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in \mathscr{M}_n(K)$ se numeşte diagonală dacă $a_{i,j} = 0$ $\forall i \neq j$.

R Dacă $A \in \mathscr{M}_n(K)$ este o matrice diagonală de forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ atunci } A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Definiţie 2.12.2 O matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ se numeşte diagonalizabilă dacă există C o matrice nesingulară (inversabilă) astfel încât matricea $D = C^{-1}AC$ este o matrice diagonală.

R Dacă $A \in \mathscr{M}_n(K)$ este diagonalizabilă atunci $A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$ unde $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$ iar C este matricea de trecere ce permite diagonalizarea.

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} D &= C^{-1} \cdot A \cdot C \Longrightarrow A = C \cdot D \cdot C^{-1} \Longrightarrow \\ A^k &= \left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right)^k = \left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right)\left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right) \dots \left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right) \\ &= C \cdot \underbrace{D \cdot \dots \cdot D}_{\text{de } k \text{ ori}} \cdot C^{-1} = C \cdot D^k \cdot C^{-1}. \end{aligned}$$

Exerciţiu 2.12.1 Fie $A,B,C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $B = C^{-1}AC$. Dacă f este un polinom oarecare atunci să se arate că $f(B) = C^{-1} f(A) C$. ■

Soluţie. Am văzut că

$$B = C^{-1}AC \Longrightarrow B^k = C^{-1}A^kC \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}.$$

Dacă

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

atunci

$$\begin{aligned} f(B) &= a_n B^n + a_{n-1}B^{n-1} + \dots + a_0 I_n \\ &= a_n C^{-1}A^nC + a_{n-1}C^{n-1}A^{n-1}C + \dots + a_0 I_n \\ &= C^{-1}\left(a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 I_n\right) C = C^{-1} f(A) C \end{aligned}$$

adică, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Are loc următorul rezultat general:

Teoremă 2.12.1 O matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă are n vectori proprii ce formează o bază.

Algoritmul de diagonalizare pentru o matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ este următorul:

R [**Etapa 1:**] Dacă $A \in \mathscr{M}(n;K)$ determinăm $P_A(\lambda)$ şi spectrul

$$\Lambda U = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$$

cu multiplicităţile $m_{a_{\lambda_1}}$, ..., $m_{a_{\lambda_p}}$ valorilor proprii respective.

R [**Etapa 2:**] Pentru $\lambda = \lambda_1$ determinăm spaţiul X_{λ_1} şi un reper B_1 al său. Dacă există $i \in \{1, ..., p\}$ astfel încât $m_{g_{\lambda_i}} \neq m_{a_{\lambda_i}}$ atunci matricea A nu se diagonalizează. Însă dacă

$$m_{g_{\lambda_1}} = m_{a_{\lambda_1}}, ..., m_{g_{\lambda_p}} = m_{a_{\lambda_p}}$$

atunci determinăm reperele $B_1, ..., B_p$ pentru $X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_p}$.

R [**Etapa 3:**] Considerăm matricea C punând pe coloane la rând vectorii reperului B_1, apoi ai lui B_2, ... , B_p. Atunci $C^{-1} \cdot A \cdot C = D$ este matrice diagonală. Totodată, $A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$.

Definiţie 2.12.3 Spunem că operatorul $U \in L_K(X, X)$ este diagonalizabil dacă există un reper al lui X în raport cu care matricea sa este diagonală.

Teoremă 2.12.2 — Teorema de caracterizare a diagonalizării. Fie $A \in \mathscr{M}_n(K)$ matricea lui U într-un reper al lui X. Sunt echivalente:

i) U diagonalizabil.

ii) Rădăcinile $\lambda_1, ..., \lambda_p$ ale polinomului caracteristic $P_A(\lambda)$ sunt în K, $m_{g_{\lambda_i}} = m_{a_{\lambda_i}}$ pentru orice $i = 1, ..., p$ şi $m_{g_{\lambda_1}} + ... + m_{g_{\lambda_p}} = n$.

R Fie $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ cele p valori proprii distincte ale lui U. U este diagonalizabil dacă şi numai dacă $X = X_{\lambda_1} \oplus ... \oplus X_{\lambda_p}$ unde X_{λ_i} $(i = 1, ..., p)$ este subspaţiul propriu corespunzător lui λ_i.

Exerciţiu 2.12.2 Să se afle subspaţiile proprii ale operatorului liniar $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definit prin $U(x_1, x_2) = (-4x_1 + 4x_2, -9x_1 + 8x_2)^T$. Este operatorul liniar diagonalizabil? Justificaţi răspunsul. ■

Soluţie. Scriem

$$U(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ şi deci } A \overset{not}{=} A_{B_c}^U = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix},$$

unde $B_c = \left\{ e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T \right\}$ este reperul canonic din $\mathbb{R}^2$.

Calculăm valorile proprii

$$|A - \lambda I_2| = 0 \text{ sau echivalent } \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -9 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de unde deducem că

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \text{ cu } m_{a_\lambda} = 2.$$

Pentru $\lambda = 2$ dederminăm vectorul propriu $x = (x_1, x_2)^T \neq (0,0)^T$, din sistemul

$$(A - \lambda I_3)\,x = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -6x_1 + 4x_2 = 0$$

şi deci

$$\text{subspaţiul propriu este} \left| \begin{array}{c} x_1 = 2x_2/3 \Longrightarrow x = (2x_2/3, x_2)^T = x_2\,(2/3, 1)^T \\ X_\lambda = \left\{ x_2\,(2/3, 1)^T \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = Span\left(\left\{ (2,3)^T \right\} \right) \\ \Longrightarrow B = \left\{ (2,3)^T \right\} \overset{bază}{\subset} X_\lambda \Longrightarrow m_{g_\lambda} = 1. \end{array} \right.$$

Cum $m_{g_\lambda} = 1 < m_{a_\lambda} = 2$ deducem că U nu este diagonalizabil (Conform Teoremei de caracterizare a diagonalizării). ■

Algoritmul de diagonalizare pentru endomorfismul U este următorul:

R [**Etapa 1:**] Determinăm un reper $B \subset X$ şi scriem matricea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ asociată endomorfismului U în aceast reper.

R [**Etapa 2:**] Determinăm $P_A(\lambda)$ şi spectrul

$$\Lambda U = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$$

cu multiplicităţile $m_{a_{\lambda_1}}, ..., m_{a_{\lambda_p}}$ respective.

R [**Etapa 3**:] Pentru $\lambda = \lambda_1$ determinăm spaţiul X_{λ_1} şi un reper B_1 al lui. Dacă există $i \in \{1, ..., p\}$ astfel încât $m_{g_{\lambda_i}} \neq m_{a_{\lambda_i}}$ atunci operatorul U nu se diagonalizează. Însă, dacă

$$m_{g_{\lambda_1}} = m_{a_{\lambda_1}}, ..., m_{g_{\lambda_p}} = m_{a_{\lambda_p}}$$

vom determina reperele $B_1, ..., B_p$ pentru $X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_p}$.

R [**Etapa 4:**] Scriem reperul B' al spaţiului vectorial în raport cu care matricea asociată lui U are forma diagonală canonică, adică

$$B' = B_1 \cup ... \cup B_p.$$

Matricea asociată lui U în reperul B' este matrice diagonală şi are pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, ..., \lambda_p$ fiecare dintre acestea apărând de un număr de ori egal cu ordinul său de multiplicitate:

$$[D]_{B'}^U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & .. & 0 \\ 0 & \lambda_1 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

R [**Etapa 5:**] Construim matricea de trecere de la reperul B la reperul B', adică $C_{B,B'}$.

R [**Etapa 6:**] Verificăm corectitudinea calculelor testând valabilitatea relaţiei

$$[D]_{B'}^U = \left(C_{B,B'}\right)^{-1} \cdot A \cdot C_{B,B'}.$$

Exerciţiu 2.12.3 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin

$$U(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_3, x_1 + 3x_2)^T$$

şi se cere:

i) să se scrie matricea $A = [A]_{B_C}^U$ unde B_c este reperul canonic al lui $\mathbb{R}^3$;

ii) să se determine pentru fiecare valoare proprie λ a lui U subspaţiul său propriu X_λ şi o bază în X_λ;

iii) să se determine un reper, B' al spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ în raport cu care matricea asociată lui U are forma diagonală. ■

Soluţie. i) Fie $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper canonic din $\mathbb{R}^3$. Matricea lui U în B_c este

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Ecuaţia caracteristică a lui U este

$$|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

cu soluţiile $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

Aşadar spectrul lui U este $\Lambda U = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ cu multiplicităţile

$$m_{a_{\lambda_1}} = m_{a_{\lambda_2}} = m_{a_{\lambda_2}} = 1.$$

Pentru $\lambda = \lambda_1 = -2$ căutăm $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in X_{\lambda_1}$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi obţinem soluţia $x = \left(-\frac{1}{2}x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3\right)^T$. Aşadar

$$X_{\lambda_1} = \left\{ x_3 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un reper $B_1 \subset X_{\lambda_1}$ este $B_1 = \left\{ v_1 = (1, 1, -2)^T \right\}$. Analog, pentru λ_2 şi λ_3 găsim subspaţiile proprii

$$X_{\lambda_2} = \left\{ x_3 \left(-\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, 1\right)^T \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

şi, respectiv

$$X_{\lambda_3} = \left\{ x_3 (1, 1, 1)^T \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Evident $B_2 = \left\{ v_2 = (-5, 4, 7)^T \right\} \overset{bază}{\subset} X_{\lambda_2}$ iar $B_3 = \left\{ v_3 = (1, 1, 1)^T \right\} \overset{bază}{\subset} X_{\lambda_3}$ fapt ce încheie demonstraţia lui ii).

iii) Remarcăm că este îndeplinit ii) din Teorema de caracterizare a diagonalizării

$$m_{g_{\lambda_1}} = m_{g_{\lambda_2}} = m_{g_{\lambda_3}} = m_{a_{\lambda_1}} = m_{a_{\lambda_2}} = m_{a_{\lambda_2}} = 1$$

respectiv $m_{a_{\lambda_1}} + m_{a_{\lambda_2}} + m_{a_{\lambda_2}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ astfel se poate deduce că U este diagonalizabil şi

$$[D]_{B'}^{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reperul spaţiului vectorial $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ în raport cu care matricea asociată lui U are forma diagonală este $B' = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ iar

$$C_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Se verifică

$$\begin{aligned} [D]_{B'}^{U} &= \left(C_{B,B'}\right)^{-1} \cdot A \cdot C_{B,B'} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

deci că nu s-a greşit. ■

2.13 Forma diagonală/forma canonică Jordan a unui endomorfism

Fie (X,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$, $U : X \to X$ endomorfism şi $\lambda \in K$ valoare proprie a lui U.

Definiţie 2.13.1 Se numeşte celulă Jordan de ordin p ataşată scalarului $\lambda \in K$ o matrice de tip $p \times p$ de forma:

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definiţie 2.13.2 Se numeşte bloc Jordan de ordin $(p_1, ..., p_r)$ ataşat scalarului $\lambda \in K$ o matrice de tip $(p_1 + ... + p_r) \times (p_1 + ... + p_r)$ de forma:

$$B_p(\lambda) = diag\left(J_{p_1}(\lambda), ..., J_{p_r}(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & J_{p_2}(\lambda) & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & J_{p_{r-1}}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & J_{p_r}(\lambda) \end{pmatrix}$$

unde $p_1 + ... + p_r = p$.

Definiţie 2.13.3 Se numeşte matrice sub forma canonică Jordan o matrice pătratică de ordin n pe a cărei diagonală principală se află blocuri Jordan cu scalari diferiţi, adică:

$$J = diag\left(B_{n_1}(\lambda_1), ..., B_{n_p}(\lambda_r)\right), n_1 + ... + n_p = n.$$

Definiţie 2.13.4 Spunem că U este jordanizabil, dacă există un reper în X faţă de care matricea lui U să aibă forma canonică Jordan.

Definiţie 2.13.5 O matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ spunem că este jordanizabilă, dacă există o matrice nesingulară $C \in \mathscr{M}_n(K)$ astfel încât $C^{-1}AC$ să fie o matrice sub forma canonică Jordan.

2.14 Forma canonică a unui operator nilpotent

Fie (X, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie 2.14.1 Un operator $N \in L_K(X, X)$ se numeşte nilpotent dacă există $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $N^r(\cdot) = 0_X$. Cel mai mic $r \in \mathbb{N}$ cu această proprietate se numeşte gradul lui N (sau indexul de nilpotenţă).

Definiţie 2.14.2 O matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ se numeşte nilpotentă dacă există $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^r = 0_{\mathscr{M}_n(K)}$.

R O matrice nilpotentă are numai valoarea proprie zero.

Teoremă 2.14.1 Operatorul $N \in L_K(X, X)$ este nilpotent dacă şi numai dacă există $B \subset (X, K)$ astfel încât matricea $[A]_B^N$ a operatorului N în reperul B este nilpotentă.

Demonstraţie. Se observă că $[A]_B^{N^r} = \left([A]_B^N\right)^r$ şi deci $[A]_B^{N^r} = 0_X$ dacă şi numai dacă $N^r = 0_X$.

Definiţie 2.14.3 Fie operatorul $U \in L_K(X, X)$. Vectorul $x \in X$, $x \neq 0_X$ se numeşte vector propriu generalizat al lui U dacă există $\lambda \in K$ şi $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$(U - \lambda 1_X)^r(x) = 0_X \tag{2.30}$$

iar mulţimea

$$X^\lambda = \{x \in X | (U - \lambda 1_X)^r(x) = 0_X\} = Ker(U - \lambda 1_X)^r : X \to X,$$

se numeşte spaţiul vectorilor proprii generalizaţi asociat lui λ.

R Are loc $X_\lambda \subset X^\lambda$ iar operatorul $N(x) \overset{not\breve{a}m}{=} (U - \lambda 1_X)(x) \in L_K(X, X)$ cu proprietatea (2.30) este nilpotent.

Definiţie 2.14.4 Un ciclu (sau lanţ) de vectori proprii generalizaţi ai endomorfismului nilpotent $N \in L_K(X, X)$ este un şir de vectori nenuli, de forma $\left\{v, N(v), ..., N^{r-1}(v)\right\}$ unde $N^r(v) = 0_X$. v este rădăcina ciclului de vectori proprii generalizaţi, $N^{r-1}(v)$ este vectorul de final iar r este lungimea ciclului.

R Fie $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$, operatorul $U \in L_K(X,X)$ şi $A \overset{notăm}{=} [A]_B^U$ matricea lui U în raport cu reperul $B \subset X$. Vectorul propriu generalizat $v \neq 0_X$ corespunzător valorii proprii λ se determină din sistemul $(A - \lambda I_n)^r v_B = 0_X$ unde $(A - \lambda I_n)^r = 0_{\mathscr{M}_n(K)}$ iar un ciclu de vectori proprii generalizaţi corespunzători lui λ este

$$\left\{v, (A-\lambda I_n)^1 \cdot v, (A-\lambda I_n)^2 \cdot v, ..., (A-\lambda I_n)^{r-1} \cdot v\right\}. \tag{2.31}$$

R Ciclul de vectori proprii generalizaţi din (2.31) formează un sistem liniar independent.

Teoremă 2.14.2 — Forma canonică Jordan a operatorilor nilpotenţi. Dacă $N \in L_K(X,X)$ este endomorfism nilpotent atunci X are un reper format din vectori proprii generalizaţi ai lui N. Matricea asociată lui N în aceast reper este matrice Jordan.

2.15 Reper Jordan. Algoritm de jordanizare

Fie (X,K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$, $U : X \to X$ endomorfism.

Definiţie 2.15.1 Se numeşte reper Jordan un reper al lui X în care matricea lui U este o matrice Jordan.

Algoritmul de jordanizare pentru $U \in L_K(X,X)$ este redat în cele ce urmează:

R [**Etapa 1:**] Fixăm $B \overset{reper}{\subset} X$ şi scriem matricea $A \in M_n(K)$ a lui U în raport cu aceast reper.

R [**Etapa 2:**] Determinăm polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|.$$

Sunt posibile două cazuri:
Caz 1. $P_A(\lambda) = 0$ nu admite n rădăcini în K situaţie în care U **nu este jordanizabil.**
Caz 2. $P_A(\lambda) = 0$ are soluţiile

$$\lambda_1, ..., \lambda_r \in K \text{ cu } m_{a_{\lambda_1}} + ... + m_{a_{\lambda_r}} = n$$

iar U **este jordanizabil** şi se continuă:

R [**Etapa 3:**] Fixăm o valoare proprie λ şi calculăm matricea endomorfismului

$$N(\cdot) \overset{notăm}{=} U(\cdot) - \lambda 1_X(\cdot)$$

în raport cu reperul B. O notăm prin N această matrice.

R [**Etapa 4:**] Determinăm numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ :

$$m_{g_\lambda} = \dim_K KerN(\cdot) = \dim_K X_\lambda.$$

Pot să existe două cazuri:
Caz 1. Dacă $m_{g_\lambda} = m_{a_\lambda}$ un reper pentru X_λ va fi format din m_{g_λ} vectori proprii liniar independenţi. Deci, pentru λ vom avea m_{a_λ} celule Jordan de forma $J_1(\lambda)$.
Caz 2. Dacă $m_{g_\lambda} < m_{a_\lambda}$ se trece la:

R [**Etapa 5:**] Determinăm $s \in \mathbb{N}^*$, minim, $s \leq m_{a_\lambda}$, astfel încât

$$rangN^s = rangN^{s+p} \text{ pentru orice } p \in \mathbb{N}.$$

R [**Etapa 6:**] Determinăm n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1, 2, ..., s\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rang\left(I_{\mathscr{M}_n(K)}\right) = n,\ rangN^{s+1} = rangN^s,\ \Sigma_{h=1}^s hn_h = m_{a_\lambda}.$$

R [**Etapa 7:**] Se repetă algoritmul începând cu **Etapa 3** pentru fiecare valoare proprie a lui U.

R [**Etapa 8:**] Se scrie matricea J a lui U sub forma canonică Jordan.

R [**Etapa 9.**] În general, ţinând seama de definiţia matricei unei aplicaţii liniare în raport cu un reper, se determină reperul B' al lui X în raport cu care U are matricea J.

R Matricea Jordan J este unic determinată de matricea A, până la o permutare a blocurilor de pe diagonala principală.

Exerciţiu 2.15.1 Fie $(\mathscr{M}_4(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor de tip 4×4 cu elemente numere reale şi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

matricea operatorului $U : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ în reperul canonic din $\mathbb{R}$. Să se determine forma canonică Jordan. ■

Soluţie. Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 \overset{Hamilton-Cayley}{\Longrightarrow} A^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.$$

Deducem de aici că A este matrice nilpotentă. Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_\lambda} = 4$.

Pentru $\lambda = 0$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ : $m_{g_\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pentru aceasta, calculăm $rangN$. Cum

$$M_2^N = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

iar toţi minorii de ordin 3 sunt nuli deducem că $rangN = 2$. Astfel că

$$\left\{ (-2,-1,1,0)^T, (1,0,0,1)^T \right\}$$

este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$ şi deci $2 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_\lambda} = 4$.

Trecem la:

Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi deci } s = 3.$$

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1,2,3\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_4 = 4, rangN^{s+1} = rangN^s, \Sigma_{h=1}^s hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că

$$rangN = 2, rangN^2 = 1, rangN^3 = rangN^4 = rangN^5 = 0.$$

Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 1 - 4 + 4 = 1 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = -2 + 2 = 0 \\ n_3 &= rangN^4 - 2rangN^3 + rangN^2 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar, matricea Jordan asociată lui A are: o celulă de ordin 1¸ zero celule de ordin 2, o celulă de ordin 3:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Exercițiu 2.15.2 Fie $(\mathscr{M}_4(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor de tip 4×4 cu elemente numere reale şi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

matricea operatorului $U : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ în reperul canonic din $\mathbb{R}^4$. Să se determine forma canonică Jordan. ■

Soluţie. Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 [-\lambda(2-\lambda)+1].$$

Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda_1 = 2 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_{\lambda_1}} = 2$ şi $\lambda_2 = 1 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_{\lambda_2}} = 2$.

Pentru $\lambda_1 = 2$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ_1 : $m_{g_{\lambda_1}} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pentru aceasta, calculăm $rangN$. Cum

$$M_3^N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

iar $\det N = 0$ deducem că $rangN = 3$. Astfel că $\left\{(1,0,0,0)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$ şi deci

$$1 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_{\lambda_1}} = 2.$$

Trecem la:

Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deci $s=2$ deoarece $rangN^2 = rangN^{2+p} = 2$ pentru orice $p\in\mathbb{N}$. Într-adevăr, observăm că

$$N^{2+p} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+p+2 & -(2+p+1) \\ 0 & 0 & 2+p+1 & -(2+p) \end{pmatrix} & \text{dacă } p\in\mathbb{N} \text{ este impar} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2+p+2) & 2+p+1 \\ 0 & 0 & -(2+p+1) & 2+p \end{pmatrix} & \text{dacă } p\in\mathbb{N} \text{ este par} \end{cases}$$

(de verificat afirmaţia) şi se va întâmpla să avem

$$\det M_2^{N^{2+p}} = \begin{vmatrix} -(2+p+2) & 2+p+1 \\ -(2+p+1) & 2+p \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

şi

$$\det M_2^{N^{2+p}} = \begin{vmatrix} 2+p+2 & -(2+p+1) \\ 2+p+1 & -(2+p) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h\in\{1,2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_4 = 4,\ rangN^{s+1} = rangN^s,\ \Sigma_{h=1}^{s} hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că

$$rangN = 3, rangN^2 = 2, rangN^3 = 2.$$

Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 2-6+4 = 0 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 2-4+3 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar, avem: zero celule de ordin 1¸ o celulă de ordin 2:

$$B_1(\lambda_1) = J_2(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda_2 = 1$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ : $m_{g_{\lambda_2}} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pentru aceasta, calculăm $rangN$. Cum

$$M_2^N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

iar $\det N = 0$ deducem că $rangN = 3$. Astfel că $\left\{(0,0,1,1)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$ şi deci

$$m_{g_{\lambda_2}} = 1 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_{\lambda_2}} = 2.$$

Trecem la:

Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

deci $s = 2$ deoarece $rangN^2 = rangN^{2+p} = 2$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, observăm că

$$N^{2+p} = \begin{pmatrix} 1 & 2+p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(de verificat afirmaţia) şi se va întâmpla să avem

$$\det M_2^{N^{2+p}} = \begin{vmatrix} 1 & 2+p \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1,2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_4 = 4, rangN^{s+1} = rangN^s, \Sigma_{h=1}^s hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că

$$rangN = 3, rangN^2 = 2, rangN^3 = 2.$$

Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 2 - 6 + 4 = 0 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 2 - 4 + 3 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar, avem zero celule de ordin 1¸ o celulă de ordin 2:

$$B_2(\lambda_2) = J_2(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea Jordan asociată lui A este

$$J = diag(B_1(\lambda_1), B_2(\lambda_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

R Vectorul $v_1 \in X$, $v_1 \neq 0_X$ definit prin $N(v_1) = 0_X$ se numeşte vector propriu iar vectorii v_2, v_3, ... , v_s definiţi prin

$$N(v_2) = v_1, ..., N(v_s) = v_{s-1} \tag{2.32}$$

se numesc vectori proprii principali. Nucleele $KerN(\cdot), ..., KerN^{s-1}(\cdot)$ se numesc nuclee principale. Şirul (2.32), este echivalent cu

$$(A - \lambda I_n) v_2 = v_1, \ ... \ , \ (A - \lambda I_n)^{s-1} v_s = v_{s-1}$$

în reprezentarea matriceală.

Exerciţiu 2.15.3 Fie $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor de tip 3×3 cu elemente numere reale şi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),$$

matricea operatorului $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ în reperul canonic din $\mathbb{R}^3$. Să se determine forma canonică Jordan şi matricea jordanizatoare. ■

Soluţie. Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_\lambda} = 3$.

Pentru $\lambda = 1$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie $\lambda :\ m_{g_\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pentru aceasta, calculăm $rangN$. Cum

$$M_2^N = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \text{ şi } \det N \neq 0,$$

deducem că $rangN = 2$. Astfel că, în sistemul

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avem două necunoscute principale şi una secundară

$$\Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3)^T = (x_3, x_3, x_3)^T = x_3 (1, 1, 1)^T$$

şi $\left\{(1,1,1)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$. Am demonstrat că

$$1 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_\lambda} = 3.$$

Trecem la:
Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rangN^2 = 1$$

şi

$$N^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci $s = 3$ deoarece $rangN^3 = rangN^{3+p} = 0$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$.

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1,2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_3 = 3, rangN^{s+1} = rangN^s, \Sigma_{h=1}^{s} hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că $rangN = 2, rangN^2 = 1, rangN^3 = 0$.
Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 1 - 4 + 3 = 0 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 0 - 2 + 2 = 0 \\ n_3 &= rangN^4 - 2rangN^3 + rangN^2 = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar, avem zero celule de ordin 1, zero celule de ordin 2 şi o celulă de ordin trei:

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea Jordan asociată lui U este

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina matricea jordanizatoare C observăm că avem un ciclu (lanţ) de vectori generalizaţi de lungime trei $\left\{v, N \cdot v, N^2 \cdot v\right\}$ deoarece $N^3 \cdot v = 0$ nu este $\neq 0$ şi deci nu intră în această mulţime.

Scriem ce înseamnă că J este matricea Jordan a lui U

$$\begin{cases} U(v_1) = v_1 \\ U(v_2) = v_1 + v_2 \\ U(v_3) = v_2 + v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - I_3) v_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ (A - I_3) v_2 = v_1 \\ (A - I_3) v_3 = v_2. \end{cases}$$

Pentru $v_1 = (1,1,1)^T$ se poate determina $v_2 = (a,b,c)^T$ din

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a+b=1 \\ -b+c=1 \end{cases} \Longrightarrow a = c-2, b = c-1,$$

şi în final $v_2 = (a,b,c)^T = (-2,-1,0)^T$ dacă $c = 0$.

Pentru $v_2 = (-2,-1,0)^T$ se poate determina $v_3 = (m,n,p)^T$ din

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -m+n=-2 \\ -n+p=-1 \end{cases} \Longrightarrow m = 2p+3, n = 2p+1,$$

şi în final $v_3 = (m,n,p)^T = (3,1,0)^T$ dacă $p = 0$.

Am obţinut reperul Jordan $B = \left\{(1,1,1)^T, (-2,-1,0)^T, (3,1,0)^T\right\}$ format din vectorii proprii generalizaţi de mai sus.

Un calcul simplu arată că

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J.$$

■

Exerciţiu 2.15.4 Fie $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor de tip 3×3 cu elemente numere reale şi

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

matricea operatorului $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ în reperul canonic din $\mathbb{R}$. Să se determine forma canonică Jordan şi matricea jordanizatoare. ■

Soluţie. Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda - 27.$$

Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda = -3 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_\lambda} = 3$.

Pentru $\lambda = -3$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ : $m_{g_\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pentru aceasta, calculăm $rangN$. Cum

$$M_2^N = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } \det N = 0.$$

deducem că $rangN = 1$. Astfel că, în sistemul

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avem o necunoscută principală şi două secundare $\Longrightarrow$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3)^T = (x_2 - x_3, x_2, x_3)^T = x_2\,(1,1,0)^T + x_3\,(-1,0,1)^T$$

şi deci $\left\{(1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$. Am demonstrat că

$$2 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_\lambda} = 3.$$

Trecem la:

Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

deci $s = 2$ deoarece $rangN^2 = rangN^{2+p} = 0$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$.

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1,2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_3 = 3, rangN^{s+1} = rangN^s, \Sigma_{h=1}^s hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că $rangN = 1, rangN^2 = 0, rangN^3 = 0$.

Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 0 - 2 + 3 = 1 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 0 - 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar, avem o celulă de ordin 1 şi o celulă de ordin 2:

$$J_1(\lambda) = (-3) \text{ şi } J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matricea Jordan asociată lui A este

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ sau } J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

după o eventuală permutare a blocurilor.

Pentru a determina matricea jordanizatoare C observăm că avem un ciclu (lanţ) de vectori generalizaţi de lungime doi $\{v, N \cdot v\}$, deoarece $N^2 \cdot v = 0$ nu este $\neq 0$ şi deci nu intră în această mulţime. În această situaţie este recomandat să considerăm un vector propriu generalizat $v_2 = (a,b,c)^T$ astfel încât $N \cdot v_2 \neq 0$. Putem considera de exemplu $v_2 = (1,0,0)^T$ şi obţinem

$$v_1 = N \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectorul $v_3 = (a,b,c)^T$ astfel încât

$$B = \left\{ v_1 = (1,2,1)^T,\ v_2 = (1,0,0)^T, v_3 = (a,b,c)^T \right\}$$

să fie reper în $KerN^2 \cdot v = \mathbb{R}^3$ este oricare element dintre vectorii proprii $\left\{(1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\right\}$. Un calcul simplu arată că

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J.$$

Dacă am fi considerat

$$\begin{aligned} U(v_1) &= -3v_1 \Longrightarrow (A + I_3)\, v_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ U(v_2) &= v_1 - 3v_2 \Longrightarrow (A + 3I_3)\, v_2 = v_1 \\ U(v_3) &= -3v_3 \Longrightarrow (A + 3I_3)\, v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned}$$

am fi avut probleme, întrucât, după cum se poate constata, sistemul

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nu are soluţie. Motiv pentru care am apelat la un alt raţionament pentru construirea vectorilor proprii generalizaţi pe care este util sa-l reţinem. ■

Exerciţiu 2.15.5 Fie $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor de tip 2×2 cu elemente numere reale şi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

matricea operatorului $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ în reperul canonic din $\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Să se determine forma canonică Jordan şi un reper în care este atinsă această formă. ■

Soluţie. Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Deducem de aici că $A - 3I_2$ este matrice nilpotentă. Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_\lambda} = 2$.

Pentru $\lambda = 3$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ : $m_{g_\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observăm că $rangN = 1$ unde

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel că $\left\{(-1,-1)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$ şi deci

$$1 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_\lambda} = 2.$$

Trecem la:

Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

şi deci $s = 2$. În fapt, N nilpotentă rezultă din $P_A(A) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$, direct.

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1, 2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_2 = 2, rangN^{s+1} = rangN^s, \Sigma_{h=1}^{s} hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că $rangN = 1, rangN^2 = rangN^3 = 0$.

Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 0 - 2 + 2 = 0 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar matricea Jordan asociată lui A are: zero celule de ordin 1¸ o celulă de ordin 2:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ţinând seama de definiţia matricei unei aplicaţii liniare în raport cu un reper, se determină reperul $B' = \left\{ v_1 = (a_1, b_1)^T, v_2 = (a_2, b_2)^T \right\}$ al lui $\mathbb{R}^2$ în raport cu care U are matricea J:

$$\begin{array}{l} U(v_1) = 3v_1 \\ U(v_2) = v_1 + 3v_2 \end{array} \iff \begin{array}{l} Av_1 = 3v_1 \\ Av_2 = v_1 + 3v_2 \end{array} \iff \begin{array}{l} (A - 3I_2)v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ (A - 3I_2)v_2 = v_1 \end{array}$$

Alegând

$$v_1 = (a_1, b_1)^T \text{ în } (A - 3I_2)v_1 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

obţinem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -a_1 + b_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = b_1 \Longrightarrow v_1 = a_1 (1,1)^T .$$

Alegând

$$v_2 = (a_2, b_2)^T \text{ şi } v_1 = (1,1)^T$$

corespunzător lui $a_1 = 1$, în $(A - 3I_2)\, v_2 = v_1$ obţinem

$$\begin{aligned} (A - 3I_2)\, v_2 &= v_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow -a_2 + b_2 = 1 \Longrightarrow a_2 = b_2 - 1 \Longrightarrow v_2 = (b_2 - 1, b_2)^T . \end{aligned}$$

Astfel că $B' = \left\{ v_1 = (1,1)^T, v_2 = (1,2)^T \right\}$ este reperul Jordan în care este atinsă forma J. În plus, putem spune că $v = (1,2)^T$ este vector propriu principal. Observăm că

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = J \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

adică nu s-a greşit la calcule şi în plus matricea C are pe coloane vectorii v_1, v_2. ■

3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale

3.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare omogene

Definiţie 3.1.1 Un simbol matematic de forma

$$\left\{\begin{array}{l} y' = a_{11}y + a_{12}z \\ z' = a_{21}y + a_{22}z \end{array}\right. \quad \text{cu} \quad \begin{array}{ll} y : G \longrightarrow D_1, & y = y(x) \\ z : G \longrightarrow D_2, & z = z(x) \end{array} \tag{3.1}$$

unde $G \subseteq \mathbb{R}$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}$ iar a_{ij} sunt constante reale, se numeşte sistem de două ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi cu două funcţii necunoscute, de coeficienţi constanţi, omogen.

Definiţie 3.1.2 Un sistem de două funcţii $y(x) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1$, respectiv $z(x) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_2$ derivabile cu derivata continuă pe G, formează o soluţie a sistemului omogen (3.1) pe G dacă verifică sistemul (3.1) pentru orice $x \in G$. Sistemul de funcţii $y(x)$, $z(x)$ cu această proprietate se notează prin $\varphi(x) = (y(x), z(x))^T$ iar despre $\varphi : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$ spunem că este soluţie a lui (3.1).

Definiţie 3.1.3 Fie următoarele două soluţii

$$\varphi_1(x) = (y_1(x), z_1(x))^T : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$$

şi

$$\varphi_2(x) = (y_2(x),\ z_2(x))^T : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$$

ale sistemului (3.1). Se spune că $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ formează un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (3.1) pe G dacă sunt liniar independente. Altfel spus, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ formează un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (3.1) pe G dacă

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ z_1(x) & z_2(x) \end{vmatrix}$$

numit determinantul fundamental al lui celor două soluţii $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ nu se anulează în niciun punct din G.

R Dacă determinantul $W(x)$ a două soluţii ale sistemului este diferit de zero într-un punct din G atunci el este diferit de zero pe G.

Teoremă 3.1.1 Fie sistemul (3.1). Dacă

$$\varphi_1 : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2, \varphi_2 : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$$

sunt soluţii ale sistemului (3.1) ce formează un sistem fundamental de soluţii pe G, atunci soluţia generală a sistemului (3.1) este dată de

$$w(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \text{ unde } c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$$

sunt constante arbitrare.

R Dacă $U : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este operatorul de derivare definit prin $U(\varphi) = \varphi'$ atunci sistemul (3.1) se scrie sub forma echivalentă $\varphi' = A\varphi$ unde

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]^U_{B_c} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

este matricea operatorului U în reperul canonic B_c al lui $\mathbb{R}^2$ iar $\varphi = (y,z)^T : G \to D_1 \times D_2$.

R Mulţimea

$$S_A = \{\varphi(\cdot) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2 | \varphi(\cdot) \text{ verifică } \varphi'(x) = A\varphi(x)\}$$

este subspaţiu vectorial de dimensiune 2 al spaţiului $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ al aplicaţiilor de clasă C^1 de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^2$.

Prezentăm un algoritm de determinare a soluţiei generale a sistemului (3.1).

Fie $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, c_1, c_2 constante reale. Definim $U(w) = w' = A \cdot w$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

şi scriem ΛU, respectiv m_{a_λ}. Soluţia generală a sistemului (3.1) este

$$w(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \; c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

unde $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ este un sistem fundamental de soluţii ce se determină parcurgând unul din cazurile următoare precizat de valoarea proprie λ:

Caz 1: Dacă $\lambda = \alpha + i\beta \in \Lambda U$ ($\beta > 0$) se determină un vector propriu $v_\lambda = v_1 + iv_2 \in X_\lambda$ cu ajutorul căruia se scriu soluţiile

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= Re\left(e^{\lambda x}v_\lambda\right) \\ &= e^{\alpha x}(v_1 \cdot \cos\beta x - v_2 \sin\beta x) \\ \varphi_2(x) &= Im\left(e^{\lambda x}v_\lambda\right) = e^{\alpha x}(v_1 \cdot \sin\beta x + v_2\cos\beta x) \text{ cu } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

corespunzătoare valorilor proprii λ şi, respectiv $\overline{\lambda}$. (În calcule, se recomandă deducerea acestor formule din relaţia lui Euler $e^{ia} = \cos a + i\sin a$, $a \in \mathbb{R}$).

Caz 2: Dacă $\lambda_1 \in \mathbb{R} \cap \Lambda U$ cu $m_{a_{\lambda_1}} = 1$ atunci şi $\lambda_2 \in \mathbb{R} \cap \Lambda U$ cu $m_{a_{\lambda_2}} = 1$. În acest caz, dacă $m_{a_{\lambda_1}} = m_{g_{\lambda_1}}$ şi $m_{a_{\lambda_2}} = m_{g_{\lambda_2}}$ matricea A este diagonalizabilă $\Longrightarrow$ există un reper B în care matricea $D \overset{not}{=} [A_1]_B^U$ este diagonală. În fapt,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Notăm $B = \{v_1, v_2\}$ unde

$$\begin{cases} v_1 = (m,n)^T \text{ este vectorul propriu corespunzător lui } \lambda_1\text{, se determină din } (A - \lambda_1 I_2)\, v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ v_2 = (p,q)^T \text{ este vectorul propriu corespunzător lui } \lambda_2\text{, se determină din } (A - \lambda_2 I_2)\, v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

Scriem matricea diagonalizatoare

$$C = C_{B_c,B} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \text{ cu } D = C^{-1}AC.$$

Scriem sistemul astfel

$$w' = Aw$$

şi efectuăm schimbarea de variabilă

$$w = Cu \text{ unde } u = (u_1, u_2)^T.$$

Prin schimbarea de variabilă, avem

$$(Cu)' = ACu \Longleftrightarrow Cu' = ACu \big| \cdot C^{-1} \Longleftrightarrow u' = C^{-1}ACu \Longleftrightarrow u' = Du.$$

Din

$$u' = Du \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \lambda_2 u_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

obţinem

$$\begin{aligned} \frac{u_1'}{u_1} &= \lambda_1 \Longrightarrow (\ln|u_1|)' = \lambda_1 \Longrightarrow \ln|u_1| = \int \lambda_1 dx \\ &\Longleftrightarrow \ln|u_1| = \lambda_1 x + \ln|K_1| \Longrightarrow u_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \text{ unde } c_1 = \pm|K_1| \\ \frac{u_2'}{u_2} &= \lambda_2 \Longrightarrow (\ln|u_2|)' = \lambda_2 \Longrightarrow \ln|u_2| = \int \lambda_2 dx \\ &\Longleftrightarrow \ln|u_2| = \lambda_2 x + \ln|K_2| \Longrightarrow u_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x} \text{ unde } c_2 = \pm|K_2|. \end{aligned}$$

Revenim la schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

de unde obţinem soluţia în coordonate

$$\begin{cases} y(x) = mu_1 + pu_2 = mc_1 e^{\lambda_1 x} + pc_2 e^{\lambda_2 x} \\ z(x) = nu_1 + qu_2 = nc_1 e^{\lambda_1 x} + qc_2 e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

iar dacă dorim să determinăm două soluţii ale sistemului, scriem

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x),$$

de unde obtinem

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} v_{\lambda_1} \text{ şi } \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} v_{\lambda_2}$$

cu ajutorul cărora se scrie soluţia generală (3.2).

Caz 3: Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \cap \Lambda U$ atunci $\lambda \overset{notăm}{=} \lambda_1 = \lambda_2$ şi observăm că $m_{a_\lambda} = 2$. Dacă $m_{a_\lambda} = m_{g_\lambda}$ aplicăm **Caz 2** deoarece A este diagonalizabilă iar dacă $m_{g_\lambda} < m_{a_\lambda} = 2$ matricea A este jordanizabilă $\Longrightarrow$ există un reper B' în care matricea $J \overset{not}{=} [A_2]_{B'}^{U}$ este sub forma canonică Jordan. În fapt,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Notăm $B' = \{v_1, v_2\}$ unde

$$\begin{cases} v_1 = (m,n)^T \text{ se determina din } (A - \lambda I_2) v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ v_2 = (p,q)^T \text{ se determina din } (A - \lambda_2 I_2) v_2 = v_1, \end{cases}$$

(v_1 este vectorul propriu corespunzător lui λ iar v_2 este vector propriu generalizat/principal). Atunci matricea jordanizatoare este

$$C = C_{B_c,B'} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \text{ cu } J = C^{-1}AC.$$

Scriem sistemul astfel

$$w' = Aw$$

şi efectuăm schimbarea de variabilă

$$w = Cu \text{ unde } u = (u_1, u_2)^T.$$

Prin schimbarea de variabilă, avem

$$(Cu)' = ACu \Longleftrightarrow Cu' = ACu \Big| \cdot C^{-1} \Longleftrightarrow u' = C^{-1}ACu \Longleftrightarrow u' = Ju.$$

Din

$$u' = Ju \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + u_2 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1' = \lambda u_1 + u_2 \\ u_2' = \lambda u_2. \end{cases}$$

Din $u_2' = \lambda u_2 \Longrightarrow u_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$. Înlocuim $u_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$ în $u_1' = \lambda u_1 + u_2 \Longrightarrow u_1' = \lambda u_1 + c_2 e^{\lambda x}$. Observăm că

$$\begin{aligned} u_1' = \lambda u_1 + c_2 e^{\lambda x} \Big| \cdot e^{-\lambda x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(u_1 e^{-\lambda x}\right)' = c_2 \Longrightarrow \int \left(u_1 e^{-\lambda x}\right)' dx = \int c_2 dx \\ &\Longrightarrow \quad u_1 e^{-\lambda x} = c_2 x + c_1 \Longrightarrow u_1(x) = c_2 x e^{\lambda x} + c_1 e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Revenim la schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

de unde obtinem soluţia generală în coordonate

$$\begin{cases} y(x) = mu_1 + pu_2 = m\left(c_2 x e^{\lambda x} + c_1 e^{\lambda x}\right) + pc_2 e^{\lambda x} \\ z(x) = nu_1 + qu_2 = n\left(c_2 x e^{\lambda x} + c_1 e^{\lambda x}\right) + qc_2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} y(x) = c_2\left(mxe^{\lambda x} + pe^{\lambda x}\right) + mc_1e^{\lambda x} \\ z(x) = c_2\left(nxe^{\lambda x} + qe^{\lambda x}\right) + nc_1e^{\lambda x}. \end{cases}$$

Putem scrie două soluţii ale sistemului, astfel

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} me^{\lambda x} \\ ne^{\lambda x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} mxe^{\lambda x} + pe^{\lambda x} \\ nxe^{\lambda x} + qe^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

sau echivalent

$$w(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

de unde obţinem

$$\varphi_1(x) = \left(me^{\lambda x}, ne^{\lambda x}\right)^T \text{ şi } \varphi_2(x) = \left(mxe^{\lambda x} + pe^{\lambda x}, nxe^{\lambda x} + qe^{\lambda x}\right)^T$$

cu ajutorul cărora se scrie soluţia generală (3.2).

Exerciţiu 3.1.1 Pentru $w = (y,z)^T \in \mathbb{R}^2$ să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y'(x) = -9y(x) + 9z(x) \\ z'(x) = -16y(x) + 15z(x) \end{cases}$$

■

Soluţie. Sistemul poate fi scris astfel

$$w' = A \cdot w \text{ unde } w = (y,z)^T, A = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -16 & 15 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -9-\lambda & 9 \\ -16 & 15-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_\lambda} = 2$.

Pentru $\lambda = 3$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ : $m_{g_\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1,x_2)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observăm că $rangN = 1$ unde $N = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}$.

Astfel că $\left\{(3,4)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$ şi deci

$$1 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_\lambda} = 2.$$

Într-adevăr, alegând $v_1 = (a_1, b_1)^T$ în $(A - 3I_2)\, v_1 = 0_{\mathbb{R}^2}$ obţinem

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -12a_1 + 9b_1 = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 = \frac{3b_1}{4} \Longrightarrow v_1 = 4b_1\,(3,4)^T .\end{aligned}$$

Trecem la:

Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (confirmă } P_A(A) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\text{)},$$

si deci $s = 2$.

Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1, 2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde

$$rangN^0 = rangI_2 = 2, rangN^{s+1} = rangN^s, \Sigma_{h=1}^{s} hn_h = m_{a_\lambda}.$$

Pentru aceasta, se observă că

$$rangN = 1, rangN^2 = rangN^3 = 0.$$

Astfel că

$$\begin{aligned} n_1 &= rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 0 - 2 + 2 = 0 \\ n_2 &= rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Aşadar matricea Jordan asociată lui A are: zero celule de ordin 1¸ o celulă de ordin 2:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ţinând seama de definiţia matricei unei aplicaţii liniare în raport cu un reper, se determină reperul

$$B' = \left\{ v_1 = (a_1, b_1)^T, v_2 = (a_2, b_2)^T \right\}$$

a lui $\mathbb{R}^2$ în raport cu care U are matricea J:

$$\begin{array}{lcl} U(v_1) = 3v_1 & & Av_1 = 3v_1 & & (A - 3I_2)\,v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ U(v_2) = v_1 + 3v_2 & \Longleftrightarrow & Av_2 = v_1 + 3v_2 & \Longleftrightarrow & (A - 3I_2)\,v_2 = v_1. \end{array}$$

Alegând $v_2 = (a_2, b_2)^T$ şi $v_1 = (3,4)^T$ în $(A - 3I_2)\, v_2 = v_1$ obţinem

$$\begin{aligned}(A - 3I_2)\,v_2 &= v_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow -12a_2 + 9b_2 = 3 \Longrightarrow 4a_2 = 3b_2 - 1\end{aligned}$$

$\Longrightarrow v_2 = (-1,-1)^T$ pentru $a_2 = -1 = b_2$.

Astfel că

$$B' = \left\{ v_1 = (3,4)^T, v_2 = (-1,-1)^T \right\}$$

este reperul Jordan în care este atinsă forma J. În plus, putem spune că

$$B' = \left\{ v_1 = (3,4)^T, v_2 = (-1,-1)^T \right\}$$

este un ciclu de vectori proprii generalizaţi. În fapt $v_1 = (3,4)^T$ este vector propriu iar $v_2 = (-1,-1)^T$ este vector propriu principal.

Observăm că $C^{-1} \cdot A \cdot C = J$ este echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -16 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

adică nu s-a greşit la calcule şi în plus matricea C are pe coloane vectorii v_1, v_2.

Efectuând schimbarea de variabilă $w = C \cdot u$ obţinem

$$u' = D \cdot u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

În final

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' = 3u_1 + u_2 \\ u_2' = 3u_2 \end{cases}.$$

Rezolvăm

$$u_2' = 3u_2 \Longrightarrow \text{prin integrarea fiecărei ecuaţii, că } u_2(x) = c_2 e^{3x}.$$

Într-adevăr,

$$\frac{u_2'}{u_2} = 3 \Longrightarrow (\ln|u_2|)' = 3 \Longrightarrow \ln|u_2| = \int 3dx \Longleftrightarrow \ln|u_2| = 3x + \ln|K_2| \Longrightarrow u_2(x) = c_2 e^{3x}.$$

Înlocuind $u_2(x) = c_2 e^{3x}$ în prima ecuaţie avem

$$u_1' = 3u_1 + c_2 e^{3x} \Leftrightarrow \left(u_1 e^{-3x}\right)' = c_2$$

iar prin integrare avem $u_1(x) = c_2 x e^{3x} + c_1 e^{3x}$.

Acum, folosind schimbarea de variabilă efectuată

$$w = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = 3u_1 - u_2 \text{ şi } z = 4u_1 - u_2,$$

de unde, soluţia genearală, în coordonate

$$\begin{cases} y(x) = 3\left(c_2 x e^{3x} + c_1 e^{3x}\right) - c_2 e^{3x} \\ z(x) = 4\left(c_2 x e^{3x} + c_1 e^{3x}\right) - c_2 e^{3x}. \end{cases}$$

■

Exerciţiu 3.1.2 Pentru $w = (y,z)^T \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$ să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 3z - 2y \end{cases}.$$

■

Soluţie. Sistemul poate fi scris astfel

$$w' = A \cdot w \text{ unde } w = (y,z)^T,\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii ale lui A, din ecuaţia caracteristică

$$|A-\lambda I_2| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2+i \text{ şi } \overline{\lambda} = 2-i.$$

Cum $\lambda = 2+i$ este număr complex, **pentru** $\lambda = 2+i$ determinăm vectorul propriu corespunzător $v_\lambda \in X_\lambda$ din sistemul

$$(A-\lambda I_2)\, v_\lambda = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{pmatrix} n-(1+i)\,m \\ (1-i)\,n-2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow n-(1+i)\,m = 0 \Longrightarrow n = (1+i)\,m$$

iar într-un final $v_\lambda = (m,n)^T = m\,(1,1+i)^T$, de unde pentru $m = 1$ se poate considera $v_\lambda = (1,1+i)^T$ şi deci, conform relaţiei lui Euler, avem

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} v_\lambda &= e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2x}\,(\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2x}\,(\cos x + i\sin x) \\ e^{2x}\,[\cos x - \sin x + (\sin x + \cos x)\, i] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un sistem fundamental de soluţii este

$$\varphi_1(x) = Re\left(e^{\lambda x} v_\lambda\right) = \left(e^{2x}\cos x, e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right)^T$$

şi

$$\varphi_2(x) = Im\left(e^{\lambda x} v_\lambda\right) = \left(e^{2x}\sin x, e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right)^T$$

care dau soluţia generală

$$w(x) = c_1\left(e^{2x}\cos x, e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right)^T + c_2\left(e^{2x}\sin x, e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right)^T,\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}$$

iar în coordonate are forma

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x \\ z(x) = c_1\left(e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right) + c_2\left(e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right) \end{cases} \text{cu } c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Exerciţiu 3.1.3 Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -12y(x) + 8z(x). \end{cases}$$

■

Soluţie. Sistemul poate fi scris astfel

$$w' = A \cdot w \text{ unde } w = (y,z)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii ale lui A, din ecuaţia caracteristică

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -12 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 6 \text{ şi } \lambda_1 = 2.$$

Pentru $\lambda_1 = 2$ determinăm vectorul propriu corespunzător $v_{\lambda_1} = (a,b)^T$ din

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I_2)\, v_{\lambda_1} &= 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow -2a + b = 0 \Longrightarrow v_{\lambda_1} = a\,(1,2)^T. \end{aligned}$$

Pentru $\lambda_2 = 6$ determinăm vectorul propriu corespunzător $v_{\lambda_2} = (c,d)^T$ din

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I_2)\, v_{\lambda_2} &= 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow -6c + d = 0 \Longrightarrow v_{\lambda_2} = c\,(1,6)^T. \end{aligned}$$

Se observă că

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Efectuând schimbarea de variabilă $w = C \cdot u$ obţinem

$$u' = D \cdot u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

În final

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' = 2u_1 \\ u_2' = 6u_2 \end{cases}.$$

Rezolvăm sistemul omogen

$$\begin{cases} u_1' = 2u_1 \\ u_2' = 6u_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$prin integrarea fiecărei ecuaţii, că

$$u_1(x) = c_1 e^{2x} \text{ şi } u_2(x) = c_2 e^{6x}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \frac{u_1'}{u_1} &= 2 \Longrightarrow (\ln|u_1|)' = 2 \Longrightarrow \ln|u_1| = \int 2dx \Longleftrightarrow \ln|u_1| = 2x + \ln|K_1| \Longrightarrow u_1(x) = c_1 e^{2x} \\ \frac{u_2'}{u_2} &= 6 \Longrightarrow (\ln|u_2|)' = 6 \Longrightarrow \ln|u_2| = \int 6dx \Longleftrightarrow \ln|u_2| = 6x + \ln|K_2| \Longrightarrow u_2(x) = c_2 e^{6x}. \end{aligned}$$

Acum, folosind schimbarea de variabilă efectuată

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = u_1 + u_2 \text{ şi } z = 2u_1 + 6u_2,$$

de unde

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x} \\ z(x) = 2c_1 e^{2x} + 6c_2 e^{6x} \end{cases}, c_1 = \pm |K_1| \in \mathbb{R}^*, c_2 = \pm |K_2| \in \mathbb{R}^*.$$

■

R Dacă $U : D_1 \times ... \times D_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este operatorul de derivare definit prin $U(\varphi) = \varphi'$ atunci sistemul $\varphi' = A\varphi$ unde

$$A \overset{notăm}{=} [A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

este matricea operatorului U în reperul canonic B_c al lui $\mathbb{R}^n$ iar

$$\varphi(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T : G \to D_1 \times ... \times D_n,$$

se tratează analog.

3.2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare neomogene

Definiţie 3.2.1 Expresia matematică

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z + f_3(x) \\ z' = a_{21}y + a_{22}z + f_4(x) \end{cases} \text{ cu } \begin{array}{ll} y : G \longrightarrow D_1, & y = y(x) \\ z : G \longrightarrow D_2, & z = z(x) \\ f_i : G \to D_i, & f_i = f_i(x),\ i = 3,4 \text{ continue pe } G \end{array} \tag{3.3}$$

unde $G \subseteq \mathbb{R}$, $D_i \subseteq \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3,4)$ iar $a_{ij} \in \mathbb{R}$, se numeşte sistem de două ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi cu două funcţii necunoscute, cu coeficienţi constanţi, neomogen.

R Dacă $f_3(x) = f_4(x) = 0$ în (3.3) atunci sistemul obţinut este omogen.

Definiţie 3.2.2 Funcţiile $y(x) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1$, $z(x) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_2$ derivabile cu derivata continuă pe G, formează o soluţie a sistemului neomogen (3.3) pe G dacă verifică sistemul (3.3) pentru orice $x \in G$. Notăm $w(x) = (y(x), z(x))^T$ iar despre $w : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$ spunem că este soluţie a lui (3.3).

Teoremă 3.2.1 Soluţia sistemului (3.3) se obţine adăugând la soluţia generală a sistemului omogen (3.1) o soluţie particulară, oarecare, a sistemului neomogen (3.3).

R Dacă

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \text{ cu } c_1 \in \mathbb{R}, \text{ respectiv } c_2 \in \mathbb{R},$$

este soluţia generală a sistemului omogen (3.1) atunci

$$\varphi_p(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

este soluţie particulară a lui (3.3), unde $c_1(x)$, $c_2(x)$ sunt funcţii derivabile ce se determină punând condiţia ca $\varphi_p(x)$ să verifice (3.3). Metoda prin care se determină $c_1(x)$, $c_2(x)$ se numeşte **metoda variaţiei constantelor**. Astfel că, $w(x) = \varphi(x) + \varphi_p(x)$ este soluţia sistemului (3.3).

R Dacă $U : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este operatorul de derivare definit prin $U(w) = w'$ atunci sistemul (3.3) se scrie sub forma echivalentă $w' = Aw + f$ unde

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]_{B_c}^{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

este matricea operatorului U în reperul canonic B_c al lui $\mathbb{R}^2$, $w = (y,z)^T : G \to D_1 \times D_2$ iar $f = (f_3, f_4)^T : G \to D_3 \times D_4$ este continuă.

R Presupunem că A este matrice diagonalizabilă (respectiv jordanizabilă) şi fie C astfel încât $C^{-1}AC = D$ unde D este matricea diagonală formată cu valorile proprii distincte ale lui A (respectiv matricea jordanizatoare). Efectuând schimbarea de variabilă $w = C \cdot u$ obţinem

$$(C \cdot u)' = A \cdot C \cdot u + f(x) \Longleftrightarrow Cu' = A \cdot C \cdot u + f(x)$$

sau echivalent

$$C^{-1} \cdot Cu' = \underbrace{C^{-1} \cdot A \cdot C}_{D} \cdot u + \underbrace{C^{-1} \cdot f(x)}_{\overset{not\breve{a}m}{=} g(x)}$$

şi în final $u' = D \cdot u + g(x)$.

Exerciţiu 3.2.1 Pentru $w = (y,z)^T \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$ să se determine soluţia sistemului

$$\begin{cases} y' = 2y + z + 1 \\ z' = y + 2z + x \end{cases}.$$

■

Soluţie. Sistemul poate fi scris astfel

$$w' = A \cdot w + f(x) \text{ unde } w = (y,z)^T, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f(x) = (1,x)^T.$$

Determinăm valorile proprii ale lui A, din ecuaţia caracteristică

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ şi } \lambda_2 = 3.$$

Pentru $\lambda_1 = 1$ determinăm vectorul propriu corespunzător $v_{\lambda_1} = (a,b)^T$ din

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I_2) v_{\lambda_1} &= 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow v_{\lambda_1} = b(1,-1)^T. \end{aligned}$$

Pentru $\lambda_2 = 3$ determinăm vectorul propriu corespunzător $v_{\lambda_2} = (c,d)^T$ din

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I_2) v_{\lambda_2} &= 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow -c + d = 0 \Longrightarrow v_{\lambda_2} = c(1,1)^T. \end{aligned}$$

Se observă că

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Efectuând schimbarea de variabilă $w = C \cdot u$ obţinem

$$u' = D \cdot u + g(x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1+x \end{pmatrix}.$$

În final

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1+x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' = u_1 + \frac{1}{2}(1-x) \\ u_2' = 3u_2 + \frac{1}{2}(1+x) \end{cases}. \tag{3.4}$$

Rezolvăm sistemul omogen

$$\begin{cases} u_1' = u_1 \\ u_2' = 3u_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$prin integrarea fiecărei ecuaţii, că $u_1(x) = c_1 e^x$ şi $u_2(x) = c_2 e^{3x}$.

În cele ce urmează aplicăm metoda variaţiei constantelor pentru a determina o soluţie particulară a sistemului (3.4). Căutăm $c_1(x)$ şi $c_2(x)$ astfel încât $u_1(x) = c_1(x) e^x$ şi $u_2(x) = c_2(x) e^{3x}$ să fie soluţie pentru sistemul neomogen

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + \frac{1}{2}(1-x) \\ u_2' = 3u_2 + \frac{1}{2}(1+x) \end{cases} \tag{3.5}$$

adică

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x = c_1(x) e^x + \frac{1}{2}(1-x) \\ c_2'(x) e^{3x} + c_1(x) 3e^{3x} = 3c_2(x) e^{3x} + \frac{1}{2}(1+x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2}(1-x) e^{-x} \\ c_2'(x) = \frac{1}{2}(1+x) e^{-3x} \end{cases}$$

şi deci $c_1(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$, respectiv $c_2(x) = -\frac{1}{18} e^{-3x}(3x+4)$ iar în final obţinem soluţia

$$\begin{cases} u_1(x) = c_1 e^x + c_1(x) e^x = c_1 e^x + \frac{1}{2} x e^{-x} e^x = c_1 e^x + \frac{1}{2} x \\ u_2(x) = c_2 e^{3x} + c_2(x) e^{3x} = c_2 e^{3x} - \frac{1}{18} e^{-3x}(3x+4) e^{3x} = c_2 e^{3x} - \frac{1}{6} x - \frac{2}{9} \end{cases}$$

pentru sistemul (3.5).

Acum, folosind schimbarea de variabilă efectuată $w = C \cdot u \implies y = u_1 + u_2$ şi $z = -u_1 + u_2$ de unde

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^x + \frac{1}{2} x + c_2 e^{3x} - \frac{1}{6} x - \frac{2}{9} \\ z(x) = -\left(c_1 e^x + \frac{1}{2} x\right) + c_2 e^{3x} - \frac{1}{6} x - \frac{2}{9} \end{cases}$$

este soluţie a sistemului iniţial. ■

R Dacă $U : D_1 \times ... \times D_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este operatorul de derivare definit prin $U(\varphi) = \varphi'$ iar $f = (f_1, ..., f_n)^T$ sunt funcţii (definite ca mai sus) atunci sistemul $\varphi' = A\varphi + f$ unde

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

este matricea operatorului U în reperul canonic B_c al lui $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ iar

$$\varphi(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T : G \to D_1 \times ... \times D_n$$

se tratează analog.

4. Forme liniare, biliniare şi pătratice

4.1 Funcţionale liniare-dualul algebric al unui spaţiu liniar

Fie (X,K) spaţiu vectorial.

Definiţie 4.1.1 O funcţie $f : X \to K$ se numeşte funcţională (sau formă) liniară dacă f este operator liniar, adică

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall x,y \in X, \forall \alpha,\beta \in K.$$

Teoremă 4.1.1 Mulţimea $X^* = L(X,K)$ a funcţionalelor liniare $f : X \to K$ înzestrată cu operaţiile

i) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ \forall x \in X$;
ii) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)\ \forall x \in X, \forall \alpha \in K$;

are o structură de spaţiu vectorial peste K, notat (X^*,K) şi numit spaţiul vectorial dual al lui X.

R [**Reprezentarea unei funcţionale liniare**] Presupunem că $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $E = \{e_1,...,e_n\}$ este reper al lui X, $a_i = f(e_i)$, $i = \overline{1,n}$, $a = (a_1,...,a_n)^T$ şi $x_E = (x_1,...,x_n)^T$ atunci

$$\forall x \in X \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ şi } f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a_1...a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = a^T \cdot x_E.$$

Dacă în plus de la reperul E se trece la un reper $F = \{f_1,...,f_n\}$ al lui X prin matricea de trecere $C \overset{notăm}{=} C_{E,F}$ atunci avem următoarea reprezentare a lui f în reperul F

$$f(x) = b^T \cdot x_F$$

unde $b_i = f(f_i)$. Cum $x_F = C^{-1}x_E$ deducem că

$$f(x) = b^T \cdot x_F = b^T \cdot C^{-1} \cdot x_E$$

şi deci $a^T = b^T \cdot C^{-1} \Longrightarrow b^T = a^T C$.

4.2 Funcţionale biliniare şi sesquiliniare

Fie (X,K) şi (Y,K) spaţii vectoriale reale sau complexe (adică $K=\mathbb{R}$ sau $K=\mathbb{C}$).

Definiţie 4.2.1 O funcţie $f:X\times Y\to K$ se numeşte funcţională (sau formă) biliniară dacă
i) $f(\alpha x+\beta y,z)=\alpha f(x,z)+\beta f(y,z)\ \forall x,y\in X,\ \forall z\in Y,\ \forall\alpha,\beta\in K$;
ii) $f(x,\alpha y+\beta z)=\alpha f(x,y)+\beta f(x,z)\ \forall x\in X,\ \forall y,z\in Y,\ \forall\alpha,\beta\in K$.

R Dacă se fixează $z\in Y$ rezultă din i) că f este o funcţională liniară pe X iar dacă se fixează $x\in X$ rezultă din ii) că f este o funcţională liniară pe Y.

R Dacă $x=0_X$ sau $y=0_Y$ atunci $f(0_X,y)=0_K\ \forall y\in Y$ şi $f(x,0_Y)=0_K\ \forall x\in X$.

■ **Exemplu 4.2.1** Dacă $f:X\to K$ şi $g:Y\to K$ sunt funcţionale liniare atunci $h:X\times Y\to K$ definită prin $h(x,y)=f(x)g(y)$ este o funcţională biliniară. Într-adevăr, pentru $x\in X$ fixat, $x=\overline{x}$ se deduce că $h(\overline{x},y)=f(\overline{x})g(y)$ este funcţie liniară în $y\in X$, deoarece $f(\overline{x})\in K$ este un scalar. Analog, pentru y fixat. ■

■ **Exemplu 4.2.2** Fie $A\in\mathscr{M}_{n,m}(K)$. Pentru $x,y\in\mathbb{K}^n$ definim $f:\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\longrightarrow K,\ f(x,y)=x^TAy\in K$. Probăm că f este o funcţională biliniară. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
f(\alpha x+\beta y,z) &= (\alpha x+\beta y)^T Az=(\alpha x)^T Az+(\beta y)^T Az=\alpha x^T Az+\beta y^T Az\\
&= \alpha f(x,z)+\beta f(y,z),\\
f(x,\alpha y+\beta z) &= x^T A(\alpha y+\beta z)=x^T A(\alpha y)+x^T A(\beta z)=\alpha x^T Ay+\beta x^T Az\\
&= \alpha f(x,y)+\beta f(x,z).
\end{aligned}$$

■

Adunarea formelor biliniare şi înmulţirea cu scalari se definesc în mod similar ca la funcţionalele liniare. În raport cu aceste operaţii, mulţimea tuturor formelor biliniare este un spaţiu vectorial peste corpul scalarilor.

Definiţie 4.2.2 Funcţia $f:X\times X\to\mathbb{C}$ se numeşte funcţională (sau formă) sesquiliniară dacă

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\quad f(\alpha x+\beta y,z) = \alpha f(x,z)+\beta f(y,z)\ \ \forall x,y,z\in X,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\\
&\text{ii)}\quad f(x,\alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}f(x,y)+\overline{\beta}f(x,z)\ \ \forall x,y,z\in X,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}
\end{aligned}$$

unde prin $\overline{\alpha}$, respectiv $\overline{\beta}$ am notat numărul complex conjugat lui α, respectiv β.

4.3 Funcţionale biliniare simetrice şi sesquiliniare hermitiene

Presupunem că (X,K) şi (Y,K) sunt spaţii vectoriale reale sau complexe cu $\dim_K X=n\in\mathbb{N}^*$ şi $\dim_K Y=m\in\mathbb{N}^*$ iar $f:X\times Y\to K$ este funcţională biliniară.

Teoremă 4.3.1 Dacă $F=\{f_1,\dots,f_n\}\overset{reper}{\subset}X$, $G=\{g_1,\dots,g_m\}\overset{reper}{\subset}Y$, $x_F=(x_1,\dots,x_n)^T$ este vectorul coordonatelor unui element $x\in X$ în reperul F iar $y_G=(y_1,\dots,y_m)^T$ este vectorul coordonatelor unui element $y\in Y$ în reperul G atunci f admite următoarea reprezentare

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_if_i,\ \sum_{j=1}^{m}y_jg_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jf(f_i,g_j). \tag{4.1}$$

Este necesar să introducem:

Definiţie 4.3.1 Matricea

$$A = [A]_{F,G}^{f} = \begin{pmatrix} f(f_1, g_1) & \dots & f(f_1, g_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(f_n, g_1) & \dots & f(f_n, g_m) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$$

se numeşte matricea lui f în raport cu reperele F, G iar numerele $a_{ij} = f(f_i, g_j) \in K$ ($i = 1, ..., n$ şi $j = 1, ..., m$) se numesc coeficienţii funcţionalei biliniare f în perechea de repere

$$F = \{f_1, ..., f_n\} \subset X, \; G = \{g_1, ..., g_m\} \subset Y.$$

Cu aceste notaţii formula (4.1) se poate scrie astfel

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} = (x_F)^T A y_G$$

iar reprezentarea $f(x,y) = (x_F)^T A y_G$ se numeşte reprezentarea matriceală a funcţionalei biliniare f în timp ce $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij}$ se numeşte forma algebrică a funcţionalei biliniare f.

Definiţie 4.3.2 Presupunem $\dim_K X = \dim_K Y = n \in \mathbb{N}^*$. Fie A matricea funcţionalei biliniare $f : X \times Y \to K$ în raport cu reperele F, G din X, respectiv Y. Dacă matricea A este nesingulară (singulară), atunci forma biliniară f se numeşte nedegenerată (degenerată). Rangul matricei A se numeşte rangul formei biliniare f.

R Dacă $X = Y$ atunci $F = G$ în Definiţia 4.3.2.

R Unei matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}} \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ i se poate asocia o formă biliniară.

R Dacă $X = Y$ atunci $F = G$ iar $f(x,y) = (x_F)^T A y_F$ unde $A \overset{notăm}{=} [A]_F^f$ este matricea lui f în raport cu reperul F. În plus, matricea A cu această proprietate este unică.

■ **Exemplu 4.3.1** Fie $x = (x_1, x_2)^T$ şi $y = (y_1, y_2)^T$. Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

atunci funcţionala biliniară asociată matricei A este

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2. \tag{4.2}$$

■

Definiţie 4.3.3 Fie (X, K) spaţiu vectorial real sau complex. O funcţională biliniară $f : X \times X \to K$ se numeşte

i) simetrică dacă $f(x,y) = f(y,x)$ pentru orice $x, y \in X$;

ii) antisimetrică dacă $f(x,y) = -f(y,x)$ pentru orice $x, y \in X$.

Teoremă 4.3.2 Fie (X,K) spaţiu vectorial real sau complex cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $f : X \times X \to K$ este o funcţională biliniară, ce are matricea $A = [A]_B^f$ în reperul $B \subset X$, atunci f este simetrică (respectiv antisimetrică) dacă şi numai dacă $A = A^T$ (respectiv $A = -A^T$).

(R) Funcţionala biliniară definită în (4.2) este simetrică.

Definiţie 4.3.4 Fie $(X,\mathbb{C})$ spaţiu vectorial complex. O funcţională sesquiliniară $f : X \times X \to \mathbb{C}$ se numeşte funcţională sesquiliniară hermitienă (sau sesquiliniară simetrică sau funcţionala lui Hermite sau funcţională hermitică) dacă $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ pentru orice $x,y \in X$.

(R) Fie $(X,\mathbb{C})$ spaţiu vectorial complex. Dacă $f : X \times X \to \mathbb{C}$ este funcţională sesquiliniară hermitienă atunci $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$ pentru orice $x \in X$ şi deci $f(x,x) \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu 4.3.1 Dacă (V,K) este spaţiu vectorial real sau complex ($V = \mathbb{R}^n$ sau $V = \mathbb{C}^n$) peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale iar

$$\begin{aligned} f_1 &: V \times V \to \mathbb{R},\ f_1(v,w) = v_1w_1 + \ldots + v_nw_n,\ v = (v_1,\ldots,v_n)^T,\ w = (w_1,\ldots,w_n)^T, \\ f_2 &: V \times V \to \mathbb{C},\ f_2(v,w) = v_1\overline{w_1} + \ldots + v_n\overline{w_n},\ v = (v_1,\ldots,v_n)^T,\ w = (w_1,\ldots,w_n)^T, \end{aligned}$$

atunci să se arate că:

i) f_1, f_2 sunt funcţionale biliniare dacă $V = \mathbb{R}^n$. (În acest caz $\sqrt{f_1(v,v)}$ defineşte noţiunea de lungime a vectorilor în $\mathbb{R}^n$!).

ii) f_1 nu este o funcţională biliniară dacă $V = \mathbb{C}^n$.

iii) f_2 este sesquiliniară şi are loc formula de polarizare

$$4f_2(u,v) = f_2(u+v,u+v) - f_2(u-v,u-v) + if_2(u+iv,u+iv) - if_2(u-iv,u-iv).$$

■

Soluţie. i) Se verifică axiomele

$$\begin{aligned} f_1(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha f_1(x,z) + \beta f_1(y,z)\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \\ f_1(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha f_1(x,y) + \beta f_1(x,z)\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, dacă $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$, $y = (y_1,\ldots,y_n)^T$ iar $z = (z_1,\ldots,z_n)^T$ atunci

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)^T\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

şi $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) z_n \\ &= \alpha (x_1 z_1 + \ldots + \alpha x_n z_n) + \beta (y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n) = \alpha f_1(x,z) + \beta f_1(y,z), \end{aligned}$$

fapt ce probează i). Analog rezultă ii). Dacă $V = \mathbb{R}^n$ atunci $\overline{w_i} = w_i$ şi $f_1(v,w) = f_2(v,w)$.

ii) Presupunem prin absurd că f_1 este funcţională biliniară. Cum

$$f_1((i,\ldots,i),(i,\ldots,i)) < 0$$

obţinem o contradicţie cu $f_1(v,v) \geq 0\ \forall v \in \mathbb{C}^n$.

iii) Se verifică axiomele

$$\begin{aligned} f_2(\alpha x+\beta y,z) &= \alpha f_2(x,z)+\beta f_2(y,z) \quad \forall x,y,z\in\mathbb{C}^n, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}, \\ f_2(x,\alpha y+\beta z) &= \overline{\alpha} f_2(x,y)+\overline{\beta} f_2(x,z) \quad \forall x,y,z\in\mathbb{C}^n, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Formula de polarizare rezultă prin calcul direct. ■

Definiţie 4.3.5 Fie (X,K) spaţiu vectorial real sau complex. Funcţionala $f : X\times X\to K$ (unde $K=\mathbb{R}$ sau $K=\mathbb{C}$) se numeşte:

i) pozitiv semidefinită (respectiv pozitiv definită) dacă este hermitienă şi $f(x,x)\geq 0$ pentru $x\in X$ (respectiv $f(x,x)>0$ pentru $x\neq 0$);

ii) negativ semidefinită (respectiv negativ definită) dacă este hermitienă şi $f(x,x)\leq 0$ pentru $x\in X$ (respectiv $f(x,x)<0$ pentru $x\neq 0$);

iii) nedefinită dacă există $x_1, x_2\in X$ astfel încât $f(x_1,x_1)<0$ şi $f(x_2,x_2)>0$.

4.4 Efectul schimbării reperelor la matricea unei funcţionale biliniare

Presupunem că (X,K) şi (Y,K) sunt spaţii vectoriale reale sau complexe cu $\dim_K X=n\in\mathbb{N}^*$ şi $\dim_K Y=m\in\mathbb{N}^*$ iar $f : X\times Y\to K$ este funcţională biliniară.

Teoremă 4.4.1 Dacă $F_1=\left\{f_1^1,\ldots,f_n^1\right\}\overset{reper}{\subset} X$, $F_2=\left\{f_1^2,\ldots,f_n^2\right\}\overset{reper}{\subset} X$, $G_1=\left\{g_1^1,\ldots,g_m^1\right\}\overset{reper}{\subset} Y$, $G_2=\left\{g_1^2,\ldots,g_m^2\right\}\overset{reper}{\subset} Y$, $x_{F_1}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ este vectorul coordonatelor elementului $x\in X$ în reperul F_1, $y_{G_1}=(y_1,\ldots,y_m)^T$ este vectorul coordonatelor elementului $y\in Y$ în reperul G_1, $C\overset{notăm}{=}C_{F_1,F_2}$ este matricea de trecere de la reperul F_1 la reperul F_2, $D\overset{notăm}{=}D_{G_1,G_2}$ este matricea de trecere de la reperul G_1 la reperul G_2 iar $A=[A]^f_{F_1,G_1}$ este matricea lui f în raport cu reperele F_1, G_1 atunci

$$f(x,y)=(x_{F_1})^T A y_{G_1}=(C\cdot x_{F_2})^T\cdot A\cdot(D\cdot y_{G_2})=(x_{F_2})^T\cdot C^T\cdot A\cdot D\cdot y_{G_2}$$

unde $x_{F_2}=C^{-1}\cdot x_{F_1}$, $x_{G_2}=D^{-1}\cdot x_{G_1}$.

R Dacă $X=Y$ atunci

$$F_1=G_1 \text{ şi } F_2=G_2 \text{ iar } f(x,y)=(x_{F_1})^T\cdot C^T\cdot A\cdot Cy_{F_2}$$

unde $C\overset{notăm}{=}C_{F_1,F_2}$ este matricea de trecere de la reperul F_1 la reperul F_2.

Exerciţiu 4.4.1 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y)=4x_1y_2-2x_2y_2+8x_2y_1$$

unde $x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2$, $y=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$.

i) Să se arate că f este biliniară dar nu simetrică.

ii) Să se determine matricea lui f în reperul

$$B=\left\{b_1=(-2,6)^T, b_2=(4,2)^T\right\}.$$

■

Soluţie. Scriem matricea lui f în reperul canonic

$$B_c = \left\{e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T\right\} \text{ din } \mathbb{R}^2$$

prin două metode:

Metoda 1. Avem

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]_{B_c}^{f} = (a_{ij})_{i,j=1,2} \text{ unde } a_{ij} = f(e_i, e_j).$$

Astfel

$$\begin{aligned} a_{12} &= f(e_1,e_2) = 4\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 1 + 8\cdot 0\cdot 0 = 4 \\ a_{11} &= f(e_1,e_1) = 0,\ a_{21} = f(e_2,e_1) = 8,\ a_{22} = f(e_2,e_2) = -2 \end{aligned}$$

iar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Metoda 2. Avem direct

$$\begin{aligned} a_{11} &= \text{coeficientul lui } x_1y_1,\ a_{12} = \text{coeficientul lui } x_1y_2,\ a_{21} = \text{coeficientul lui } x_2y_1 \\ a_{22} &= \text{coeficientul lui } x_2y_2 \text{ caz în care } A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Trecem la rezolvarea problemei.

i) Din Metoda 1 sau Metoda 2 avem că

$$f(x,y) = x^T A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

iar procedând ca în Exemplul 4.2.2 deducem că f este biliniară. Cum matricea A nu este simetrică deducem că f nu este simetrică (vezi Teorema 4.3.2).

ii) Prezentăm două metode.

Metoda 1. Avem

$$A_1 \overset{not\breve{a}m}{=} [A_1]_{B}^{f} = (b_{ij})_{i,j=1,2} \text{ unde } b_{ij} = f(b_i, b_j).$$

Astfel

$$b_{11} = f(b_1,b_1) = -216,\ b_{12} = f(b_1,b_2) = 152,\ b_{21} = f(b_2,b_1) = 40,\ b_{22} = f(b_2,b_2) = 88.$$

şi

$$A_1 = \begin{pmatrix} -216 & 152 \\ 40 & 88 \end{pmatrix}.$$

Metoda 2. Dacă $C \overset{not\breve{a}m}{=} C_{B_c,B}$ este matricea de trecere de la reperul B_C la reperul B atunci $A_1 = C^T AC$ unde A_1 este matricea lui f în reperul B_c. Avem

$$\begin{cases} b_1 = -2e_1 + 6e_2 \\ b_2 = 4e_1 + e_2 \end{cases} \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

şi deci

$$A_1 = C^T AC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -216 & 152 \\ 40 & 88 \end{pmatrix}.$$

■

Exerciţiu 4.4.2 Dacă $(\mathscr{P}_2[X], \mathbb{R})$ este spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult doi peste corpul numerelor reale,

$$B = \left\{a_1 = 1, a_2 = 1 + t, a_3 = t^2\right\} \text{ reper în } (\mathscr{P}_2[X], \mathbb{R})$$

şi

$$p_1 = a_1 + 2a_2 + a_3,\ p_2 = a_1 - 2a_3,\ p_3 = 2 + 2t + 3t^2 = 2a_2 + 3a_3,\ p_4 = a_2 + a_3$$

atunci:
- i) să se arate că p_1, p_2, p_3, p_4 generează spaţiul $\mathscr{P}_2[X]$;
- ii) să se extragă un reper B' din $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$;
- iii) să se determine coordonatele lui $p = 2a_1 + a_2$ în reperul B';
- iv) să se arate că $f : \mathscr{P}_2[X] \times \mathscr{P}_2[X] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(p, q) = \int_0^1 p(t)\,dt \cdot \int_0^1 q(t)\,dt$$

este o funcţională biliniară simetrică şi să se determine matricea ei în reperul canonic al lui $\mathscr{P}_2[X]$ apoi în reperele B şi, respectiv B'. ∎

Soluţie. Organizăm datele astfel

i), ii), iii)	p_1	p_2	p_3	p_4	p
a_1	$\boxed{1}$	1	0	0	2
a_2	2	0	2	1	1
a_3	1	-2	3	1	0
p_1	1	1	0	0	2
a_2	0	-2	2	$\boxed{1}$	-3
a_3	0	-3	3	1	-2
p_1	1	1	0	0	2
p_4	0	-2	2	1	-3
a_3	0	-1	$\boxed{1}$	0	1
p_1	1	1	0	0	2
p_4	0	0	0	1	-5
p_3	0	-1	1	0	1

Lema substituţiei dă răspuns cerinţelor i), *ii*) şi iii) astfel:
- i) $\mathscr{P}_2[X] = Span\{p_1, p_3, p_4\}$;
- ii) $B' = \{p_1, p_3, p_4\}$ este bază în $(\mathscr{P}_2[X], \mathbb{R})$;
- iii) $p = 2p_1 - 5p_4 + p_3$ iar $p_{B'} = (2, 1, -5)^T$.

Rămâne să rezolvăm:
- iv) Se observă că $\forall p, q, r \in \mathscr{P}_2[X]$ şi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are loc

$$\begin{aligned} f(\alpha p + \beta r, q) &= \int_0^1 (\alpha p(t) + \beta r(t))\,dt \cdot \int_0^1 q(t)\,dt \\ &= \alpha \int_0^1 p(t)\,dt \cdot \int_0^1 q(t)\,dt + \beta \int_0^1 r(t)\,dt \cdot \int_0^1 q(t)\,dt = \alpha f(p, q) + \beta f(r, q) \end{aligned}$$

Analog

$$f(p, \alpha q + \beta r) = \alpha f(p, q) + \beta f(p, r)\ \forall p, q, r \in \mathscr{P}_2[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Am probat că f este o funcţională biliniară. Observăm că

$$f(p,q) = \int_0^1 p(t)\,dt \cdot \int_0^1 q(t)\,dt = \int_0^1 q(t)\,dt \cdot \int_0^1 p(t)\,dt = f(q,p)$$

şi deci f este simetrică

Componentele matricei A, ataşată formei biliniare în reperul canonic $\{1,t,t^2\}$, sunt

$$\begin{aligned} a_{11} &= f(1,1) = \int_0^1 1dt \cdot \int_0^1 1dt = 1,\ a_{12} = a_{21} = f(1,t) = \int_0^1 1dt \cdot \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \\ a_{13} &= a_{31} = f\left(1,t^2\right) = \int_0^1 1dt \cdot \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3},\ a_{22} = \int_0^1 tdt \cdot \int_0^1 tdt = \frac{1}{4} \\ a_{23} &= a_{32} = f\left(t,t^2\right) = \int_0^1 tdt \cdot \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6},\ a_{33} = \int_0^1 t^2dt \cdot \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

şi deci matricea ei în reperul canonic al lui $\mathscr{P}_2[X]$ este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Notăm cu A_2 matricea funcţionalei biliniare în noul reper B. Din teorie $A_2 = C_1^T \cdot A_1 \cdot C_1$ unde

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la reperul canonic B_c la reperul B. Atunci

$$\begin{aligned} A_2 &= C_1^T \cdot A_1 \cdot C_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog, notăm cu A_3 matricea funcţionalei biliniare în noul reper B'. Din teorie $A_3 = C_2^T \cdot A_2 \cdot C_2$ unde

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la reperul canonic B la reperul B'. Atunci

$$\begin{aligned} A_3 &= C_2^T \cdot A_2 \cdot C_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \phantom{\frac{169}{9}} & a_{12}^3 & \phantom{\frac{143}{18}} \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{169}{9} & \frac{52}{3} & \frac{143}{18} \\ \frac{52}{3} & 16 & \frac{22}{3} \\ \frac{143}{18} & \frac{22}{3} & \frac{121}{36} \end{pmatrix} \end{array}. \end{aligned}$$

Ne putem verifica dacă am greşit, prin soluţia doi! Astfel

$$p_1 = a_1 + 2a_2 + a_3 = 1 + 2 + 2t + t^2 \text{ iar } p_3 = 2 + 2t + 3t^2$$

şi

$$a_{12}^3 = \int_0^1 p_1(t)\,dt \cdot \int_0^1 p_3(t)\,dt = \int_0^1 \left(1 + 2 + 2t + t^2\right)dt \cdot \int_0^1 \left(2 + 2t + 3t^2\right)dt = \frac{52}{3}.$$

Analog pentru celelalte componente ale matricei A_3. ■

4.5 Funcţionale pătratice reale

Fie $(X,\mathbb{R})$ spaţiu vectorial real.

Definiţie 4.5.1 Presupunem că $f : X \times X \to \mathbb{R}$ este o funcţională biliniară simetrică.
Funcţionala liniară $V : X \to \mathbb{R}$ definită de $V(x) = f(x,x)$ se numeşte funcţională pătratică reală.

Definiţie 4.5.2 Fie $V : X \to \mathbb{R}$ o funcţională pătratică reală. Funcţionala biliniară simetrică

$$f : X \times X \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{1}{2}\left(V(x+y) - V(x) - V(y)\right) \tag{4.3}$$

asociată lui V, se numeşte funcţionala polară sau funcţionala dedublată a lui V.

R Funcţionala polară a unei funcţionale pătratice reale este unică.

Teoremă 4.5.1 Fie $V : X \to \mathbb{R}$ o funcţională pătratică reală şi $f : X \times X \to \mathbb{R}$ funcţionala polară a lui V. Dacă $\dim_{\mathbb{R}} X = n \in \mathbb{N}^*$, $F = \{f_1, ..., f_n\} \overset{reper}{\subset} X$ iar $x_F = (x_1, ..., x_n)^T$ este vectorul coordonatelor unui element $x \in X$ în reperul F atunci

$$V(x) = f(x,x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f(f_i, f_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} = x_F^T A x_F \tag{4.4}$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ iar $a_{ij} = f(f_i, f_j) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, ..., n)$.

R Reţinem:

i) Reprezentarea $V(x) = (x_F)^T A x_F$ se numeşte reprezentarea matriceală a funcţionalei pătratice reale V în timp ce $V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$ se numeşte forma algebrică a funcţionalei pătratice reale V.

ii) Matricea şi rangul unei funcţionale pătratice coincid cu matricea, respectiv cu rangul funcţionalei biliniare simetrice asociate.

Exerciţiu 4.5.1 Fie $(X,\mathbb{R})$ spaţiu vectorial real şi $V : X \to \mathbb{R}$ o funcţională pătratică reală definită prin $V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$. Să se determine funcţionala biliniară simetrică $f : X \times X \to \mathbb{R}$ din care provine V. ■

Soluţie. Se rezolvă prin trei metode:

Metoda 1. Se determină prin dedublare: monomul $a_{ii}x_i^2$ din V devine $a_{ii}x_i y_i$ în f iar monomul $a_{ij}x_i x_j$ din V (pentru $j \neq i$) devine $\frac{a_{ij}}{2} x_i y_j + \frac{a_{ij}}{2} x_j y_i$ în f.

Metoda 2. Se aplică (4.3), adică direct definiţia.

Metoda 3. Se scrie matricea lui V după care ţinem cont de faptul că oricărei matrice i se poate asocia o funcţională biliniară. ■

Definiţie 4.5.3 O funcţională pătratică se numeşte pozitiv definită (negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită, nedefinită) dacă funcţionala biliniară simetrică asociată formei pătratice are această proprietate.

Definiţie 4.5.4 Matricea unei funcţionale pătratice se numeşte pozitiv definită (respectiv nedefinită, negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită) după cum funcţionala pătratică asociată ei are aceste proprietăţi.

4.6 Forma canonică a unei funcţionale pătratice (matrice pătratice)

Fie $(X, \mathbb{R})$ spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}} X = n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie 4.6.1 Spunem că expresia unei funcţionale pătratice $V : X \to \mathbb{R}$ a fost adusă la forma canonică dacă există un reper F al lui X astfel încât $V(x) = \lambda_1 \omega_1^2 + ... + \lambda_n \omega_n^2$ unde $x_F = (\omega_1, ..., \omega_n)^T$ este vectorul coordonatelor lui $x \in X$ în raport cu reperul F iar $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

R Matricea formei canonice este o matrice diagonală.

Definiţie 4.6.2 Presupunem că $f : X \times X \to \mathbb{R}$ este o funcţională biliniară simetrică, $V : X \to \mathbb{R}$ este funcţionala pătratică reală asociată lui f iar $Y \subset X$ este subspaţiu vectorial al lui X.

i) Vectorii $x, y \in X$ se numesc ortogonali în raport cu f (sau cu V) dacă $f(x, y) = 0$.

ii) Mulţimea $Y^{\perp} = \{x \in X | f(x, y) = 0 \ \forall y \in Y\}$ se numeşte complementul ortogonal al lui Y în X faţă de f.

R $Y^{\perp}$ este subspaţiu vectorial în X.

Definiţie 4.6.3 Presupunem că $f : X \times X \to \mathbb{R}$ este o funcţională biliniară simetrică (respectiv $V : X \to \mathbb{R}$ este funcţionala pătratică reală asociată lui f).

Baza $F = \{f_1, ..., f_n\} \subset X$ se numeşte

i) bază ortogonală în raport cu funcţionala f (respectiv V) dacă $f(f_i, f_j) = 0$ pentru $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,n})$, adică vectorii ei sunt ortogonali doi câte doi faţă de f.

ii) bază ortonormată în raport cu funcţionala f (respectiv V) dacă este ortogonală şi în plus $f(f_i, f_j) = 1$ pentru $i = j$ $(i = \overline{1,n})$.

Teoremă 4.6.1 — Metoda Jacobi. Presupunem că $f : X \times X \to \mathbb{R}$ este o funcţională biliniară simetrică iar $V : X \to \mathbb{R}$ este funcţionala pătratică reală asociată lui f.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ matricea lui $V : X \to \mathbb{R}$ în raport cu reperul $E = \{e_1, ..., e_n\} \subset X$ şi

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = a_{11} \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, ..., \Delta_n = \det A \neq 0.$$

În aceste ipoteze, există un reper ortonormat $F = \{f_1, ..., f_n\} \subset X$ faţă de care forma pătratică V are expresia canonică

$$V(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\omega_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\omega_2^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\omega_n^2$$

unde $\omega_1, ..., \omega_n$ sunt componentele coordonatelor lui x în baza F (Echivalent: $x = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + ... + \omega_n f_n$ sau $x_F = (\omega_1, ..., \omega_n)^T$).

R [**Algoritmul Jacobi de determinare al bazei F este redat în:**] Se caută vectorii $f_1, ..., f_n$ de forma

$$\begin{cases} f_1 = b_{11}e_1 \\ f_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 \\ ... \\ f_i = b_{1i}e_1 + b_{2i}e_2 + ... + b_{ii}e_i \\ ... \\ f_n = b_{1n}e_1 + b_{2n}e_2 + ... + b_{nn}e_n \end{cases} \tag{4.5}$$

unde $b_{i,j} \in \mathbb{R}$ se determină din

$$\begin{array}{l} f(e_1, f_1) = a_{11} \cdot b_{11} = 1 \\ \begin{cases} f(e_1, f_2) = 0 \\ f(e_2, f_2) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} f(e_1, f_3) = 0 \\ f(e_2, f_3) = 0 \\ f(e_3, f_3) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ ... \\ \begin{cases} f(e_1, f_n) = 0 \\ ... \\ f(e_{n-1}, f_n) = 0 \\ f(e_n, f_n) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n-1,1} & ... & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1n} \\ ... \\ b_{n-1,n} \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.6}$$

sunt relaţiile cu ajutorul cărora determinăm necunoscutele b_{ij}.
Cum $\Delta_i \neq 0$ deducem că sistemele (4.6) din care aflăm b_{ij} au soluţie unică şi deci se rezolvă folosind regula lui Cramer. Soluţiile lui (4.6) se înlocuiesc în (4.5) de unde rezultă reperul căutat. Matricea lui V în noul reper F este matricea $C = (c_{ij})$ unde

$$c_{ij} = f(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad i \neq j, \\ b_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} & \text{pentru} \quad i = j. \end{cases}$$

Metoda Jacobi este un instrument util în clasificarea funcţionalelor pătratice şi a matricelor pătratice:

Teoremă 4.6.2 — Criteriul lui Sylvester. Fie $(X, \mathbb{R})$ spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}} X = n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ matricea funcţionalei pătratice reale $V : X \to \mathbb{R}$ în raport cu reperul $F = \{f_1, ..., f_n\} \subset X$ şi

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ &... \\ \Delta_n &= \det A. \end{aligned}$$

Următoarele sunt adevărate:
i) A şi V sunt pozitiv definite dacă şi numai dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$;
ii) A şi V sunt negativ definite dacă şi numai dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$;
iii) dacă $\Delta_i \neq 0$ pentru orice $i = 1, ..., n$ şi i), ii) sunt false atunci A şi V sunt nedefinite.

R Forma pătratică V este negativ definită dacă şi numai dacă forma pătratică $V_1 : X \to \mathbb{R}$ definită prin $V_1(x) = -V(x)$ este pozitiv definită. Matricea asociată lui V_1 este $-A$ iar minorii ei principali sunt $\Delta_i^1 = (-1)^i \Delta_i$ pentru $i = 1, ..., n$.

R O matrice simetrică este pozitiv definită $\Longleftrightarrow$ toţi minorii principali ai matricei sunt strict pozitivi.

Exerciţiu 4.6.1 — problemă nonstandard. Se consideră funcţionala pătratică definită pe $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$

$$V(y) = f(y,y) = y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3y_2 + y_3^2.$$

i) Determinaţi matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$.

ii) Determinaţi forma canonică a funcţionalei pătratice.

iii) Să se studieze natura funcţionalei pătratice. ■

Soluţie. i) Evident

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Cum $\Delta_2 = 0$ nu putem aplica metoda lui Jacobi. Cu toate acestea, dacă efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

rezultă

$$f(x,x) = x_3^2 + 2x_1x_3 + x_1x_2 + x_1^2$$

cu matricea

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cum

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

deducem că $f(x,x) = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2$.

iii) Deoarece $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = -1$ criteriul lui Sylvester implică o formă pătratică nedefinită. ■

Teoremă 4.6.3 — Metoda lui Gauss. Dacă $V : X \to \mathbb{R}$ este funcţională pătratică reală atunci există o bază ortogonală în X în raport cu care funcţionala pătratică V poate fi scrisă sub forma canonică.

Metoda lui Gauss de aducere la forma canonică şi de determinare a unei baze ortogonală în X este redată în:

Fie $(X,\mathbb{R})$ spaţiu vectorial real, $F_1 = \{f_{11},...,f_{1n}\} \overset{reper}{\subset} X$ şi $V : X \to \mathbb{R}$ o funcţională pătratică reală definită prin

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

expresia algebrică a funcţionalei în această bază. Pentru a determina un reper ortogonal în X în raport cu care funcţionala pătratică V poate fi scrisă sub forma canonică se repetă etapele descrise mai jos atâta timp cât există expresii de forma $x_i x_j$ cu $i \neq j$:

Etapa 1. V nu conţine pătrate, caz în care este obligatorie transformarea de coordonate

$$x_i = x_i' + x_j',\ x_j = x_i' - x_j' \text{ şi } x_k = x_k',\ k \neq i,j \Longrightarrow x_i' = \frac{x_i + x_j}{2},\ x_j' = \frac{x_i - x_j}{2},\ x_k = x_k',\ k \neq i,j \quad (4.7)$$

în scopul obţinerii de pătrate în V. Scriem noua expresie pentru V şi notăm cu $F_2 = \{f_{21}, ..., f_{2n}\}$ reperul lui X faţă de care coordonatele lui x sunt x_i', $i = \overline{1,n}$. Matricea de trecere la noul reper este

$$C_{F_1,F_2} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \xleftarrow{i} \text{ linia} \\ \xleftarrow{j} \text{ linia} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{matricea rezultată din (4.7)}$$

Folosim formula $x_{F_2} = (C_{F_1,F_2})^{-1} x_{F_1}$ pentru a afla F_2, unde $x_{F_2} = (x_1', ..., x_n')^T$ sunt coordonatele lui x în reperul F_2. În fapt, coloanele lui C_{F_1,F_2} sunt vectorii reperului F_2. Dacă nu suntem în ipotezele **Etapei 1** se trece la:

Etapa 2. V conţine pătrate, situaţie în care nu este necesară transformarea de coordonate de la **Etapa 1**. În acest caz, presupunând că V posedă un termen în x_1^2 atunci V se poate scrie astfel

$$\begin{aligned} V(x) &= a_{11}x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_1x_i + \sum_{i>1}^{n}\sum_{j>1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}\sum_{i>1}^{n}\sum_{j>1}^{n} a_{1i}a_{1j}x_ix_j + \sum_{i>1}^{n}\sum_{j>1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i\right)^2 + \sum_{i>1}^{n}\sum_{j>1}^{n} a_{ij}'x_ix_j \end{aligned}$$

unde

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}} \text{ pentru orice } 2 \leq i,j \leq n.$$

Efectuăm transformarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x_2' = x_2 \\ ... \\ x_n' = x_n \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

şi avem noua expresie pentru V

$$V(x) = \frac{1}{a_{11}}x_1' + \sum_{i>1}^{n}\sum_{j>1}^{n} a_{ij}'x_i'x_j'. \quad (4.9)$$

Din (4.8) deducem că

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}a_{12} & \dots & -\frac{1}{a_{11}}a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

iar dacă notăm cu $F_2 = \{f_{21}, ..., f_{2n}\}$ reperul lui X faţă de care V este transformată în (4.9) atunci matricea de trecere de la reperul F_1 la reperul F_2 va fi

$$C_{F_1,F_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}a_{12} & \dots & -\frac{1}{a_{11}}a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Evident, avem formula $x_{F_2} = (C_{F_1,F_2})^{-1} x_{F_1}$ pentru a afla F_2, unde $x_{F_2} = (x'_1, ..., x'_n)^T$ sunt coordonatele lui x în reperul F_2. În fapt, coloanele lui C_{F_1,F_2} sunt vectorii reperului F_2.

Cum în funcţionala pătratică $\sum\limits_{i>1}^{n} \sum\limits_{j>1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j$ nu figurează decât coordonate de indice superior lui 1 se repetă procedura de la **Etapele 1, 2** pentru celelalte variabile până ce se obţine reperul ortogonal în X în raport cu care funcţionala pătratică V poate fi scrisă sub forma canonică.

R Expresia canonică a unei funcţionale pătratice nu este unică.

Exerciţiu 4.6.2 Se consideră funcţionala pătratică definită pe $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$V(x) = f(x,x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

i) Determinaţi matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

ii) Determinaţi forma canonică a funcţionalei pătratice.

iii) Să se studieze natura funcţionalei pătratice. ■

Soluţie. i) Matricea funcţionalei pătratice este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Efectuăm transformarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_2 = \frac{x_1-x_2}{2} \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

şi avem

$$V(x) = f(x,x) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - y_2^2.$$

Observăm că $V(x) = f(x,x) = (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - y_2^2$ iar după transformarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

se obţine forma canonică $f(x,x) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

iii) Din

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se deduce că $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -1$ şi $\Delta_3 = 1$ iar din Criteriul lui Sylvester deducem că funcţionala pătratică este nedefinită. ■

Exerciţiu 4.6.3 Se consideră funcţionala pătratică definită pe $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$V(x) = f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

i) Determinaţi matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

ii) Determinaţi funcţionala biliniară polară a funcţionalei pătratice.

iii) Determinaţi forma canonică a funcţionalei pătratice precum şi baza formei canonice.

iv) Să se studieze natura funcţionalei pătratice. ■

Soluţie. i) Matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ este

Metoda 1 de determinare a matricei A. Direct

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{2} & -\frac{2}{2} \\ \frac{6}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Metoda 2 de determinare a matricei A. Scriem funcţionala biliniară simetrică $f : X \times X \to \mathbb{R}$ din care provine V. f se determină prin dedublare:

x_1^2 din V devine x_1y_1 $\quad$ x_2^2 din V devine x_2y_2

$6x_1x_2$ din V devine $\frac{6x_1y_2}{2} + \frac{6x_2y_1}{2}$ $\quad$ $-2x_1x_3$ din V devine $\frac{-2x_1y_3}{2} + \frac{-2y_1x_3}{2}$

astfel că

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{6x_1y_2}{2} + \frac{6x_2y_1}{2} - \frac{2x_1y_3}{2} - \frac{2y_1x_3}{2} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_1y_3 - y_1x_3. \end{aligned}$$

Reperul canonic este

$$B_c = \left\{ e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T \right\}$$

Calculăm

$$\begin{array}{lll} f(e_1,e_1) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 0 - 1\cdot 0 = 1, & f(e_2,e_2) = 1, & f(e_3,e_3) = 0 \\ f(e_1,e_2) = 3, & f(e_1,e_3) = -1, & f(e_2,e_3) = 0 \\ f(e_2,e_1) = 3, & f(e_3,e_1) = -1, & f(e_3,e_2) = 0 \end{array}$$

şi obţinem exact ce a dat **Metoda 1**.

ii) Avem trei metode pentru a răspunde la această problemă:

Metoda 1. Folosind definiţia: "Funcţionala biliniară simetrică

$$f : X \times X \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{1}{2}\left(V(x+y) - V(x) - V(y)\right)$$

asociată lui V, se numeşte funcţionala polară sau funcţionala dedublată a lui V".

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ şi $y = (y_1, y_2, y_3)^T$. Trebuie evaluat

$$\begin{aligned} V(x+y) &= V(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= (x_1+y_1)^2 + (x_3+y_3)^2 + 6(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 2(x_2+y_2)(x_3+y_3), \\ V(x) &= x_1^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ V(y) &= y_1^2 + y_3^2 + 6y_1y_2 - 2y_2y_3 \end{aligned}$$

iar, după calcule,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(V(x+y) - V(x) - V(y)\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1.$$

Metoda 2. $f(x,y)$ se determină prin dedublare ca în rezolvarea punctului i) (Metoda 2). Remarcăm că este indicată Metoda 2.

Metoda 3. $f(x,y)$ se scrie cunoscând că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Determinăm forma canonică a funcţionalei pătratice prin două metode:

Metoda lui Iacobi. Am demonstrat că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic

$$F = \left\{ e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T \right\} \text{ din } \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right).$$

Minorii principali sunt

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Rezultă expresia canonică a funcţionalei pătratice:

$$V(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\omega_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\omega_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\omega_3^2 = \omega_1^2 - \frac{1}{8}\omega_2^2 + 8\omega_3^2, \tag{4.10}$$

unde $x = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \omega_3 f_3$ iar $F = \{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathbb{R}^3$ este reperul faţă de care forma pătratică V are expresia canonică (4.10).

Determinăm reperul F. Prezentăm două soluţii:

Metoda 1. Se caută vectorii f_1, f_2, f_3 de forma

$$\begin{cases} f_1 = b_{11}e_1 = b_{11}(1,0,0)^T = (b_{11},0,0)^T \\ f_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 = b_{12}(1,0,0)^T + b_{22}(0,1,0)^T = (b_{12},b_{22},0)^T \\ f_3 = b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3 = (b_{13},b_{23},b_{33})^T \end{cases}$$

unde

$$f(e_1,f_1) = 1 \iff f(e_1,f_1) = a_{11}\cdot b_{11} = 1$$

$$\begin{cases} f(e_1,f_2) = 0 \\ f(e_2,f_2) = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(e_1,f_3) = 0 \\ f(e_2,f_3) = 0 \\ f(e_3,f_3) = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iar, în final,

$$b_{11} = 1$$

$$\begin{cases} b_{12} + 3b_{22} = 0 \\ 3b_{12} + b_{22} = 1 \end{cases} \Longrightarrow b_{12} = \tfrac{3}{8}, b_{22} = -\tfrac{1}{8}$$

$$\begin{cases} b_{13} + 3\cdot b_{23} - b_{33} = 0 \\ 3b_{13} + 1\cdot b_{23} = 0 \\ b_{13} = -1 \end{cases} \Longrightarrow b_{13} = -1, b_{23} = 3, b_{33} = 8.$$

În concluzie, vectorii f_1, f_2, f_3 sunt de forma

$$\begin{cases} f_1 = b_{11}e_1 = b_{11}(1,0,0)^T = (1,0,0)^T \\ f_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 = b_{12}(1,0,0)^T + b_{22}(0,1,0)^T = \left(\tfrac{3}{8},-\tfrac{1}{8},0\right)^T \\ f_3 = b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3 = (b_{13},b_{23},b_{33})^T = (-1,3,8)^T \end{cases}$$

iar matricea formei pătratice în raport cu reperul $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nu există greşeli de calcul deoarece

$$\begin{aligned} C^TAC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = A_1. \end{aligned}$$

În final observăm că $x = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \omega_3 f_3$ este echivalentă cu

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \omega_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_2\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sau echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 + \frac{3}{8}\omega_2 - \omega_3 \\ x_2 = -\frac{1}{8}\omega_2 + 3\omega_3 \\ x_3 = 8\omega_3 \end{cases}$$

este transformarea de coordonate care duce la forma canonică. Este de observat că metoda o putem aplica atunci şi numai atunci când toţi minorii principali Δ_i sunt nenuli.

Metoda 2 pentru determinarea bazei. Căutăm

$$F=\left\{f_1=(a,0,0)^T,\ f_2=(b,c,0)^T,\ f_3=(d,e,h)^T\right\}$$

reperul corespunzător formei canonice, unde vectorii f_1, f_2, f_3 sunt determinaţi din

$$f(f_i,f_j)=\begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad i\neq j, \\ \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} & \text{pentru} \quad i=j. \end{cases} \tag{4.11}$$

Notăm că sistemul (4.11) este echivalent cu

$$\begin{cases} f(f_1,f_1)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1} \\ f(f_1,f_2)=0 \\ f(f_2,f_2)=\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \\ f(f_1,f_3)=0 \\ f(f_2,f_3)=0 \\ f(f_3,f_3)=\frac{\Delta_2}{\Delta_3}. \end{cases}$$

Avem

$$f(f_1,f_1)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\Leftrightarrow(a,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=1$$

de unde

$$a^2=1\Longrightarrow \begin{array}{c} a=1 \\ sau \\ a=-1 \end{array} \quad \text{şi } f_1=(1,0,0)^T.$$

Considerăm următoarele două ecuaţii ale sistemului

$$\begin{cases} f(f_2,f_2)=\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \\ f(f_1,f_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b,c,0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{8} \\ (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

sau echivalent cu

$$\begin{cases} b(b+3c)+c(3b+c)=-\frac{1}{8} \\ b+3c=0\Longrightarrow b=-3c \end{cases}$$

sistem cu soluţia

$$b=\frac{3}{8},c=-\frac{1}{8} \text{ sau } b=-\frac{3}{8},c=\frac{1}{8} \text{ şi } f_2=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{8},0\right)^T.$$

Considerăm următoarele trei ecuaţii ale sistemului

$$\begin{cases} f(f_3,f_3)=\frac{\Delta_2}{\Delta_3} \\ f(f_1,f_3)=0 \\ f(f_2,f_3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (d,e,h)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \\ h \end{pmatrix}=8 \\ (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \\ h \end{pmatrix}=0 \\ \left(\frac{3}{8},-\frac{1}{8},0\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \\ h \end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

sau echivalent cu

$$\begin{cases} d(d-h+3e)+e(3d+e)-dh=8 \\ d-h+3e=0 \\ e-\frac{3}{8}h=0 \end{cases} \Longrightarrow d=-1,h=8,e=3 \text{ sau } d=1,h=-8,e=-3$$

şi $f_3=(-1,3,8)^T$.

Dezavantajul acestei metode este că sunt foarte multe calcule ce trebuie urmate precum şi o experienţă în rezolvarea de sisteme de ecuaţii nonstandard. În concluzie, este recomandată **Metoda 1**.

Metoda lui Gauss.

Etapa 1. Se grupează termenii care conţin x_1 şi obţinem

$$V(x)=x_1^2+6x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2=\underbrace{x_1^2+2x_1(3x_2-x_3)}+x_2^2.$$

În grupul format scoatem factor forţat $\frac{1}{\text{coeficientul lui } x_1^2}$ (în acest caz coeficientul lui x_1^2 este 1).

Se formează pătrate în grupul de termeni ce conţine x_1 după formula

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

Avem

$$V(x)=(x_1+3x_2-x_3)^2-(3x_2-x_3)^2+x_2^2.$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=y_1 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \quad \text{unde } y=(y_1,y_2,y_3)^T \tag{4.12}$$

şi avem

$$V(x)=y_1^2-(3y_2-y_3)^2+y_2^2=y_1^2-8y_2^2+6y_2y_3-y_3^2. \tag{4.13}$$

Etapa 2. Se repetă raţionamentul de la **Etapa 1** pentru a 2-a variabilă y_2 şi avem

$$V(x)=y_1^2+\frac{1}{-8}\left(64y_2^2-48y_2y_3\right)-y_3^2=y_1^2+\frac{1}{-8}\left[(8y_2-3y_3)^2-9y_3^2\right]-y_3^2.$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1=\omega_1 \\ 8y_2-3y_3=\omega_2 \\ y_3=\omega_3 \end{cases} \quad \text{unde } \omega=\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix}^T \tag{4.14}$$

şi avem

$$V(x)=\omega_1^2+\frac{1}{-8}\left[\omega_2^2-9\omega_3^2\right]-\omega_3^2=\omega_1^2-\frac{\omega_2^2}{8}+\frac{9\omega_3^2}{8}-\omega_3^2=\omega_1^2-\frac{1}{8}\omega_2^2+\frac{1}{8}\omega_3^2. \quad (4.15)$$

Pentru determinarea reperului prezentăm două metode:

Metoda 1. Se parcurg transformările de coordonate de la ultima la prima înlocuindu-se datele astfel

$$\begin{cases} \omega_1=y_1=x_1+3x_2-x_3 \\ \omega_2=8y_2-3y_3=8x_2-3x_3 \\ \omega_3=y_3=x_3 \end{cases}$$

sau echivalent cu

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&8&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x_F=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&8&-3\\0&0&1\end{pmatrix}x_{B_C}$$

unde F este reper al lui $\mathbb{R}^3$ faţă de care V are forma canonică (4.15) iar $x_F=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T$ sunt coordonatele lui x în reperul F. Matricea de transformare este

$$C_{B_c,F}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&8&-3\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

care dă

$$x_{B_C}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot x_F$$

şi

$$F=\left\{f_1=(1,0,0)^T,f_2=\left(-\frac{3}{8},\frac{1}{8},0\right)^T,f_3=\left(-\frac{1}{8},\frac{3}{8},1\right)^T\right\}.$$

După cum se observă din calcul F este ortogonal în raport cu f (sau cu V).

Deoarece

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{8}&0\\0&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

decidem că nu există greşeli de calcul.

Metoda 2 de determinare a reperului. Notăm

$$\text{reper canonic } B_c=\left\{e_1=(1,0,0)^T,e_2=(0,1,0)^T,\ e_3=(0,0,1)^T\right\} \text{ din } \mathbb{R}^3 \text{ prin } F_1.$$

Observăm că (4.12) este echivalent cu

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=y_1 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

de unde

$$x_{F_2}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}x_{F_1}$$

cu F_2 un reper al lui $\mathbb{R}^3$ faţă de care V este transformată în (4.13) iar $x_{F_2}=(y_1,y_2,y_3)^T$ sunt coordonatele lui x în reperul F_2. Atunci matricea de trecere de la reperul canonic $F_1 \overset{notăm}{=} B_c$ la reperul F_2 va fi

$$C_{F_1,F_2}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow x_{F_1}=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}x_{F_2}$$

şi găsim noul reper

$$f_{21}=1\cdot e_1,\ f_{22}=-3\cdot e_1+e_2,\ f_{23}=1\cdot e_1+1\cdot e_3$$

de unde

$$F_2=\left\{f_{21}=(1,0,0)^T,f_{22}=(-3,1,0)^T,f_{23}=(1,0,1)^T\right\}.$$

Observăm că (4.14) este echivalent cu

$$\begin{cases}y_1=\omega_1\\8y_2-3y_3=\omega_2\\y_3=\omega_3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

de unde

$$x_{F_3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&-3\\0&0&1\end{pmatrix}x_{F_2}$$

cu F_3 reper al lui $\mathbb{R}^3$ faţă de care V este transformată în (4.15) iar $x_{F_3}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T$ sunt coordonatele lui x în reperul F_3. Atunci matricea de trecere de la reperul F_2 la reperul F_3 va fi

$$C_{F_2,F_3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&-3\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}\text{ cu }x_{F_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}x_{F_3}$$

relaţie din care găsim noul reper

$$f_{31}=1\cdot f_{21},f_{32}=\frac{1}{8}\cdot f_{22},f_{33}=\frac{3}{8}f_{22}+f_{23}$$

de unde

$$F_3=\left\{f_{31}=(1,0,0)^T,f_{32}=\left(-\frac{3}{8},\frac{1}{8},0\right)^T,f_{33}=\left(-\frac{1}{8},\frac{3}{8},1\right)^T\right\}$$

este reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$ în raport cu care funcţionala pătratică V poate fi scrisă sub forma canonică (4.15). Ne verificăm

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{8}&0\\0&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

adică nu s-a greşit. Remarcăm că, prin această a doua metodă, suntem conduşi la calcule pe care în prima metodă le-am evitat.

Un comentariu de final este necesar: prin metoda lui Gauss, nu se obţine direct noul reper ci trebuie să apelăm la schimbarea de coordonate.

iv) Clar

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

iar din Criteriul lui Sylvester deducem că funcţionala pătratică este nedefinită. ■

R Dacă funcţionala pătratică a fost adusă la forma canonică prin metoda Jacobi atunci baza se determină prin **algoritmul Jacobi de determinare al bazei**. Discuţia are loc şi în cazul metodei lui Gauss.

4.7 Teorema inerţiei-Sylvester

Presupunem că $(X, \mathbb{R})$ este spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}} X = n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie 4.7.1 Fie

$$V(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + ... + a_n x_n^2$$

expresia canonică a funcţionalei pătratice $V : X \to \mathbb{R}$ în care

i) există $i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\}$ astfel încât $a_{i_1} > 0, ..., a_{i_p} > 0$
ii) există $j_1, ..., j_q \in \{1, ..., n\}$ astfel încât $a_{j_1} < 0, ..., a_{j_p} < 0$
iii) există $k_1, ..., k_d \in \{1, ..., n\}$ cu $d = n - (p + q)$ astfel încât $a_{k_1} = 0, ..., a_{k_d} = 0$.

Un triplet (p, q, d) cu proprietăţile i)-iii) se numeşte signatura funcţionalei pătratice V.

Se observă că signatura unei forme pătratice este invariantă la trecerea de la o expresie canonică la alta:

Teoremă 4.7.1 — Teorema inerţiei-Sylvester. Dacă $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţională pătratică iar

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i^2 - \sum_{j=r+1}^{r+s} \omega_i^2, \text{ respectiv } f_2(x) = \sum_{i=1}^{t} \widetilde{\omega}_i^2 - \sum_{j=t+1}^{t+h} \widetilde{\omega}_j^2$$

sunt formele canonice ale funcţionalei pătratice V atunci numărul coeficienţilor strict pozitivi şi cel al coeficienţilor strict negativi nu depinde de baza în care s-a obţinut forma canonică.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd $r \neq t$, $r > t$ (situaţia $t > r$ tratându-se analog). Fie X_1, respectiv X_2 spaţiul soluţiilor sistemului omogen

$$S_1 : \begin{cases} \omega_{r+1} = 0 \\ \quad ... \\ \omega_n = 0, \end{cases}$$

respectiv

$$S_2 : \begin{cases} \widetilde{\omega}_1 = 0 \\ \quad ... \\ \widetilde{\omega}_t = 0. \end{cases}$$

Din presupunerea făcută, $r < t$, obsevăm că nu putem avea $\dim_{\mathbb{R}}(X_1 \cap X_2) = 0$. Într-adevăr, dacă $\dim_{\mathbb{R}}(X_1 \cap X_2) = 0$ atunci aplicând Teorema lui Grassman

$$\dim_{\mathbb{R}}(X_1 + X_2) = \dim_{\mathbb{R}} X_1 + \dim_{\mathbb{R}} X_2.$$

Pe de altă parte din $X_1 + X_2 \subseteq X$ deducem că

$$n = \dim_{\mathbb{R}} X \geq \dim_{\mathbb{R}}(X_1 + X_2) = \dim_{\mathbb{R}} X_1 + \dim_{\mathbb{R}} X_2 = n - t + r$$

sau echivalent cu $n \geq n - t + r \Longrightarrow t \geq r$ adică o contradicţie cu $t < r$. Argument din care reţinem că

$$\dim_{\mathbb{R}}(X_1 \cap X_2) \neq 0 \text{ şi deci } X_1 \cap X_2 \neq \{0_X\}$$

fapt ce atrage existenţa unui element $x \in X_1 \cap X_2$, $x \neq 0_X$ care să verifice sistemul omogen

$$S_3 : \begin{cases} \omega_{r+1} = 0 \\ \quad \ldots \\ \omega_n = 0 \\ \widetilde{\omega}_1 = 0 \\ \quad \ldots \\ \widetilde{\omega}_t = 0, \end{cases}$$

mai mult $V(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \omega_i^2 \geq 0$ şi $V(x) = -\sum\limits_{j=t+1}^{t+h} \widetilde{\omega}_j^2 \leq 0$.

De unde deducem că $V(x) = 0$. În final $V(x) = 0$ atrage $\omega_i^2 = 0$ pentru $i = 1, .., r$, respectiv $\widetilde{\omega}_j^2 = 0$ pentru $j = t+1, ..., t+h$ ceea ce implică $x = 0_X$ ($V(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_X$!), adică o contradicţie cu $x \neq 0_X$. Rezultă $r = t$. Pentru a demonstra că $s = h$ notăm $g = -V$ şi observăm că toţi coeficienţii strict negativi din expresia lui V devin strict pozitivi în g. Atunci procedând Analog cazului din demonstraţia $r = t$ se obţine $h = s$.

R Cum $r = t$ iar $h = s$ se poate introduce denumirea t indice pozitiv de inerţie iar s indice negativ de inerţie. Perechea $(t, s, n-t-s)$ se numeşte signatura funcţionalei pătratice V.

Dăm următoarea clasificare a funcţionalelor pătratice:

Teoremă 4.7.2 Dacă $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţională pătratică de rang R, indice pozitiv de inerţie t şi indice negativ de inerţie s, echivalent V are forma canonică

$$V(x) = \sum_{i=1}^{t} \omega_i^2 - \sum_{j=t+1}^{t+s} \omega_i^2,$$

atunci

1. V este pozitiv definită dacă şi numai dacă $R = t = n$
2. V este negativ definită dacă şi numai dacă $R = s = n$
3. V este pozitiv semidefinită dacă şi numai dacă $R = t < n$
4. V este negativ semidefinită dacă şi numai dacă $R = s < n$

(dacă nu se aplică 1., 2., 3., 4. trecem la:)

5. V este nedefinită dacă şi numai dacă $t \cdot s \neq 0$.

■ **Exemplu 4.7.1** Dacă $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţională pătratică a cărei matrice în reperul canonic este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

atunci $V(x) = -\omega_2^2$ este sub forma canonică iar pe de altă parte

$$R = rangV = rangA = s = 1 < 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2, s = 1$$

şi deci conform 2 funcţionala pătratică V este negativ semidefinită. ∎

5. Probleme metrice în spaţii euclidiene

5.1 Spaţiu euclidian. Spaţiu unitar. Noţiunea de normă

Vom presupune că (X,K) este spaţiu vectorial.

Definiţie 5.1.1 Spunem că aplicaţia $< \cdot, \cdot >: X \times X \to K$ este un produs scalar pe X dacă are următoarele proprietăţi

i) $< x,y >= \overline{< y,x >}$ oricare ar fi $x,y \in X$;

ii) $< x+y,z >=< x,z > + < y,z >$ oricare ar fi $x,y,z \in X$;

iii) $< \alpha x,y >= \alpha < x,y >$ oricare ar fi $\alpha \in K$ şi $x,y \in X$;

iv) $< x,x >\geq 0$ oricare ar fi $x \in X$ şi $< x,x >= 0$ dacă şi numai dacă $x = 0_X$.

Definiţie 5.1.2 Spaţiul vectorial (X,K) înzestrat cu un produs scalar $<,>$ se numeşte spaţiu liniar euclidian.

R Dacă $K = \mathbb{R}$ atunci i) devine

$$< x,y >=< y,x > \text{ oricare ar fi } x,y \in X$$

iar cuplul $(X,<,>)$ se numeşte spaţiu vectorial euclidian real.

R Dacă $X = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{C}$, $x = (x_1,...,x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ şi $y = (y_1,...,y_n)^T \in \mathbb{C}^n$ atunci $< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ este numit produsul scalar standard sau canonic.

R Dacă $K = \mathbb{C}$ iar $<,>: X \times X \to K$ este produs scalar (numit produs scalar complex) atunci $<,>$ este liniar în prima variabilă şi conjugat liniar în a doua variabilă iar cuplul $(X,<,>)$ se numeşte spaţiu vectorial euclidian complex sau simplu spaţiu unitar.

R Produsul scalar complex se mai numeşte funcţională sesquiliniară hermitică.

R Produsul scalar real este o funcţională biliniară însă produsul scalar complex nu.

R În loc de notaţia $<\cdot,\cdot>$, utilizată în definiţia produsului scalar, se mai foloseşte uneori şi $f(\cdot,\cdot)$.

Exerciţiu 5.1.1 Dacă $X = C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ este continuă}\}$ atunci

$$< f,g >= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

este un produs scalar. ■

Soluţie. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ oarecare şi $f,g,h \in X$ funcţii arbitrare. Trebuie verificate axiomele produsului scalar:

verificăm $i)$ $< f,g >= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,f(x)\,dx =< g,f >$;
verificăm $ii)$ $< f+h,g >= \int_a^b (f(x)+h(x))\,g(x)\,dx$
$= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,g(x)\,dx =< f,g > + < h,g >$;
verificăm $iii)$ $< \alpha f,g >= \int_a^b \alpha f(x)\,g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \alpha < f,g >$;

verificăm iv) Din $f^2(x) \geq 0$ oricare ar fi $f \in X$ şi $x \in [a,b]$ deducem că

$$< f,f >= \int_a^b f(x)\,f(x)\,dx \geq 0.$$

Rămâne să demonstrăm că

$$< f,f >= \int_a^b f(x)\,f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

Dacă $f = 0$ clar $< 0,0 >= \int_a^b 0dx = 0$.

Implicaţia $< f,f >= 0 \Longrightarrow f = 0$ o demonstrăm presupunând prin absurd că $f \neq 0$. Cum f este continuă deducem că există un interval deschis $I \subset [a,b]$ astfel încât $f^2(x) > 0$ pentru orice $x \in I$. Putem considera $[c,d] \subset I$ şi observa că $m = \inf f^2(x) = f^2(x_1) > 0$ pentru orice $x \in [c,d]$ fapt ce atrage

$$\begin{aligned} 0 &= < f,f >= \int_a^b f(x)\,f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,f(x)\,dx \\ &\geq \int_c^d f(x)\,f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x_1)\,f(x_1)\,dx \geq m(d-c) > 0 \end{aligned}$$

şi deci o contradicţie. ■

Exerciţiu 5.1.2 Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + x_1 \cdot y_1 \text{ pentru orice } x = (x_1,x_2)^T, y = (y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

este produs scalar pe $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$. ■

Soluţie. Folosim notaţia $< x,y >$ în loc de $f(x,y)$. Atunci

$$< x,y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

iar matricea lui $< x,y >$ în reperul canonic este

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]_{B_c}^{<x,y>} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aşadar

$$< x,y >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^T Ay \text{ unde } x = (x_1,x_2)^T \text{ iar } y = (y_1,y_2)^T.$$

Evident matricea A este simetrică şi deci $< x,y >$ este simetrică, fapt ce probează prima axiomă a produsului scalar.

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} &< x+y,z >= (x+y)^T Az = x^T Az + y^T Az =< x,z > + < y,z > \\ &< \alpha x,y >= (\alpha x)^T Ay = \alpha x^T Ay = \alpha < x,y > \end{aligned}$$

astfel că, rămâne să verificăm ultima axiomă a produsului scalar:

$$< x,x >\geq 0 \text{ oricare ar fi } x \in X \text{ şi } < x,x >= 0 \text{ dacă şi numai dacă } x = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Aducem $< x,x >$ la forma canonică cu Jacobi

$$V(x) =< x,x >= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\omega_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2 + 2\omega_2^2$$

şi avem, evident că V este pozitiv definită.

De asemenea pentru a arăta că V este pozitiv definită puteam scrie

$$V(x) =< x,x >= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = V(x) =< x,x >= x_1^2 + (x_1+x_2)^2.$$

Rămâne să probăm că $< x,x >= 0$ dacă şi numai dacă $x = (x_1,x_2)^T = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Metoda 1. Cum V este liniară cunoaştem că $V(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0_{\mathbb{R}^2}$ fapt ce probează axioma iv) a produsului scalar.

Metoda 2. Observăm că $< x,x >= 0$ dacă şi numai dacă $\omega_1 = \omega_2 = 0$ deoarece f se scrie ca sumă de pătrate. Pe de altă parte demonstrăm că $\omega_1 = \omega_2 = 0$ dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = 0$. Într-adevăr, reperul în care se realizează forma canonică a lui f se determină din

$$\begin{aligned} 2 \cdot b_{11} &= 1 \Longrightarrow f_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)^T \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_2 = (-1,2)^T \end{aligned}$$

şi deci

$$x = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

de unde pentru $\omega_1 = \omega_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0$. Reciproc, observăm că

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

de unde pentru $x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0$. ∎

Teoremă 5.1.1 Dacă (X,K) este spaţiu vectorial real sau complex cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $<,>: X \times X \to K$ este produs scalar pe X atunci
i) $< 0_X, x >=< x, 0_X >= 0$ oricare ar fi $x \in X$;
ii) $< x, y+z >=< x,y > + < x,z >$ oricare ar fi $x,y,z \in X$;
iii) dacă $K = \mathbb{C}$ avem $< x, \alpha y >= \overline{\alpha} < x,y >$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $x,y \in X$;
iv) dacă $K = \mathbb{R}$ avem $< x, \alpha y >= \alpha < x,y >$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x,y \in X$.

Definiţie 5.1.3 Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian real/complex. Scalarul $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ se numeşte lungimea (modulul, norma) vectorului $x \in X$.

Exerciţiu 5.1.3 Dacă (X,K) spaţiu euclidian real sau complex atunci

$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Im\langle x,y\rangle \text{ oricare ar fi } x,y \in X.$$

■

Soluţie. Observăm că

$$\begin{aligned}
\|x+iy\|^2 &= < x+iy, x+iy >=< x, x+iy > + < iy, x+iy > \\
&= < x,x > + < x,iy > + < iy,x > + < iy,iy > \\
&= < x,x > + \bar{i} < x,y > + i\overline{< x,y >} + i\cdot\bar{i} < y,y > \\
&= < x,x > - i < x,y > + i\overline{< x,y >} + i\cdot\bar{i} < y,y > \\
&= < x,x > + 2Im\langle x,y\rangle + i\cdot\bar{i} < y,y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Im\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

unde am folosit faptul că $z =< x,y >= a+bi$ implică

$$-i\cdot z + i\cdot\bar{z} = -i(a+bi) + i(a-bi) = -ia + b + ia + b = 2b = 2Imz.$$

■

(R) Notăm că $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0_X$.

Exerciţiu 5.1.4 — Regula paralelogramului. Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian real sau complex. Să se verifice că

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \forall x,y \in X.$$

■

Soluţie. Se observă că

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= < x+y, x+y > + < x-y, x-y > \\
&= < x, x+y > + < y, x+y > + < x, x-y > + < -y, x-y > \\
&= < x,x > + < x,y > + < y,x > + < y,y > + < x,x > \\
+ &< x,-y > + < -y,x > + < -y,-y > \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2Re < x,y > - 2Re < x,y > \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

■

5.2 Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Definiţie 5.2.1 Fie $(X, <,>)$ spaţiu vectorial euclidian. Următoarele sunt acceptate ca atare:

i) vectorii $x, y \in X$ se numesc ortogonali, notăm $x \perp y$, dacă $< x, y >= 0$,

ii) subspaţiul vectorial $Y \subset X$ se numeşte familie ortogonală dacă vectorii săi sunt ortogonali doi câte doi, adică $< x, y >= 0$ $\forall x, y \in Y$ cu $x \neq y$,

iii) subspaţiul vectorial $Y \subset X$ se numeşte familie ortonormată dacă este ortogonală şi fiecare element al său are norma egală cu unitatea,

iv) o bază care are calităţile de la ii), iii) mai sus se numeşte bază ortogonală, respectiv bază ortonormată,

v) $x \in X$ se numeşte ortogonal pe Y, notăm $x \perp Y$, dacă $< x, y >= 0$ $\forall y \in Y$. Mulţimea

$$Y^{\perp} = \{x \in X | < x, y >= 0 \forall y \in Y\},$$

o numim complementul ortogonal al lui Y în X (în raport cu $<,>$),

vi) subspaţiile vectoriale Y_1, $Y_2 \subset X$ ai căror vectori sunt relativ ortogonali, adică $\forall y_1 \in Y_1$ şi $\forall y_2 \in Y_2$ avem $< y_1, y_2 >= 0$, spunem ca sunt subspaţii vectoriale ortogonale.

Definiţie 5.2.2 Fie $(X, <,>)$ spaţiu vectorial euclidian şi $y \in X$ cu $y \neq 0_X$ fixat. Proiecţia ortogonală a lui $x \in X$ pe $y \in X$, notată, $pr_y x$, este definită prin

$$pr_y x = \frac{< x, y >}{< y, y >} y$$

iar numărul

$$\frac{< x, y >}{\sqrt{< y, y >}}$$

se numeşte mărimea algebrică a proiecţiei lui x pe y.

R Vectorul $x - pr_y x$ este ortogonal pe $pr_y x$.

Teoremă 5.2.1 — Teorema lui Pitagora. Fie $(X, <,>)$ spaţiu vectorial euclidian complex. Dacă $< x, y >= 0$ atunci $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Demonstraţie. Observăm că

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= < x+y, x+y >=< x, x+y > + < y, x+y > \\ &= < x, x > + < y, y > + < x, y > + < y, x >= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

unde am folosit $< x, y >=< y, x >= 0$.

Exerciţiu 5.2.1 — *Teorema lui Pitagora în $\mathbb{R}^m$*. *i) Dacă $x, y \in \mathbb{R}^m \backslash \{\theta\}$, atunci să se arate că*

$$x \perp y \text{ dacă şi numai dacă } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

ii) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^m$ sunt elemente ortogonale două câte două, atunci să se arate că: $\|x_1 + ... + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_m\|^2$. ■

Soluţie. i) Avem

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

”$\subset$” Dacă $x \perp y$ atunci $\langle x,y\rangle = 0$ şi deci $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

”$\supset$” Relaţia $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ împreună cu

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

conduce la $2\langle x,y\rangle = 0$, relaţie care demonstrează că $x \perp y$.

ii) Analog. ■

Teoremă 5.2.2 — Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz. Fie $(X, <,>)$ spaţiu euclidian complex. Are loc $|< x,y >| \leq \|x\|\,\|y\|$ pentru orice $x,y \in X$.

Demonstraţie. Rezultatul este clar dacă $x = 0_X$ sau $y = 0_X$, altfel presupunem $\|x\| \neq 0$, respectiv $\|y\| \neq 0$ şi alegem

$$z = \|y\|^2 (x - pr_y x) = \|y\|^2 \left(x - \frac{< x,y >}{< y,y >} y \right) = \|y\|^2 x - < x,y > y.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} 0 &\leq < z,z > = < \|y\|^2 x - < x,y > y, \|y\|^2 x - < x,y > y > \\ &= \|y\|^4 < x,x > - < x,y > \|y\|^2 < y,x > - \|y\|^2 \overline{< x,y >} < x,y >< x,y > \\ + &< x,y > \overline{< x,y >} < y,y > \\ &= \|y\|^2 \left(\|x\|^2 \|y\|^2 - |< x,y >|^2 - |< x,y >|^2 + |< x,y >|^2 \right) \\ &= \|y\|^2 \left(\|x\|^2 \|y\|^2 - |< x,y >|^2 \right) \end{aligned}$$

de unde rezultă inegalitatea de demonstrat.

Exerciţiu 5.2.2 Să se răspundă următoarelor cerinţe:

i) Să se scrie cu ajutorul coordonatelor inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^m$;

ii) Dacă $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *sunt astfel încat* $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, *atunci să se arate că* $|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$ *pentru orice* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$;

iii) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *sunt astfel încât* $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$, *atunci să se arate că* $|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq 1$;

iv) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *sunt astfel încât* $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1$, *atunci să se arate că* $\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) \geq 1$. ■

Soluţie. i) Fie $x = (\alpha_1, ..., \alpha_m)^T$ şi $y = (\beta_1, ..., \beta_m)^T$ elemente din $\mathbb{R}^m$. Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^m$ este $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. În coordonate, este echivalentă cu

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_m\beta_m| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_m^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_m^2};$$

ii) De la punctul i) observăm că inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^2$ scrisă cu ajutorul coordonatelor este

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Înlocuind în această inegalitate $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ obţinem ceea ce trebuia demonstrat.

iii) Se înlocuieşte $\alpha_1^2+\alpha_2^2=\beta_1^2+\beta_2^2=1$ în inegalitatea lui Cauchy-Schwarz pentru $\mathbb{R}^2$ şi obţinem concluzia;

iv) Analog ca ii) şi iii), în sensul că se scrie inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^2$ şi se foloseşte faptul că $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=1$. ■

Teoremă 5.2.3 — Inegalitatea triunghiului sau a lui Minkowski. Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian complex. Pentru orice $x,y\in X$ are loc $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Demonstraţie. Observăm că

$$\|x+y\|^2=<x+y,x+y>\leq\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

unde am folosit faptul că

$$\begin{aligned} < & \; x,y>+<y,x>=<x,y>+\overline{<x,y>} \\ = & \; 2Re(<x,y>)\leq 2|<x,y>|\overset{C.-B.-S.}{\leq} 2(\|x\|+\|y\|). \end{aligned}$$

Exerciţiu 5.2.3 Să se răspundă următoarelor cerinţe:

i) Cu ajutorul coordonatelor să se scrie inegalitatea lui Minkowski în $\mathbb{R}^m$;

ii) Dacă $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in R$ *sunt astfel încât* $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=1$, *atunci să se arate că*

$$\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\geq\sqrt{2};$$

iii) Dacă $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ *sunt astfel încât* $\alpha_1^2+\alpha_2^2=\beta_1^2+\beta_2^2=1$, *atunci să se arate că*

$$(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2\leq 4.$$

■

Soluţie. i) Fie $x=(\alpha_1,...,\alpha_m)^T$ şi $y=(\beta_1,...,\beta_m)^T$ elemente din $\mathbb{R}^m$. Inegalitatea lui Minkowski în $\mathbb{R}^m$ este $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ care, cu ajutorul coordonatelor, se transformă în

$$\sqrt{(\alpha_1+\beta_1)^2+...+(\alpha_m+\beta_m)^2}\leq\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_m^2}+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_m^2}.$$

ii) Pentru $\mathbb{R}^2$ inegalitatea lui Cauchy-Schwarz scrisă cu ajutorul coordonatelor este

$$\sqrt{(\alpha_1+\beta_1)^2+(\alpha_2+\beta_2)^2}\leq\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}.$$

Înlocuind în această inegalitate $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=1$ obţinem ceea ce trebuia demonstrat.

iii) Se înlocuieşte $\alpha_1^2+\alpha_2^2=\beta_1^2+\beta_2^2=1$ în inegalitatea lui Minkowski pentru $\mathbb{R}^2$ şi se obţine concluzia. ■

R Dacă $(X,<,>)$ este spaţiu vectorial euclidian real atunci

$$-1\leq\frac{|<x,y>|}{\|x\|\,\|y\|}\leq 1$$

şi deci există $\theta\in[0,\pi]$ astfel încât $\cos\theta=\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$. Numim θ unghiul dintre x şi y.

Exerciţiu 5.2.4 Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât elementele $x = (1, 3, \alpha)^T$ şi $y = (2, -1, 3)^T$ din spaţiul $\mathbb{R}^3$ să fie ortogonale. Cu α astfel determinat, să se calculeze $\cos(\widehat{x,y})$. ■

Soluţie. Punem condiţia $\langle x, y\rangle = 0$ şi obţinem $2 - 3 + 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$. Deoarece

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \text{ şi } \langle x, y\rangle = 0$$

avem $\cos(\widehat{x,y}) = 0$. ■

Definiţie 5.2.3 Fie $(X, <,>)$ spaţiu vectorial euclidian real finit dimensional, Y subspaţiu în X şi $\{u_1, ..., u_p\}$ bază ortogonală în Y. Proiecţia ortogonală a lui $x \in X, x \neq 0_X$ pe Y, notată $pr_Y x$ (sau $proi_Y x$), este definită prin

$$pr_Y x = \frac{< x, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 + ... + \frac{< x, u_p >}{< u_p, u_p >} u_p.$$

În fapt, $pr_Y x = \{x_0 \in X | x - x_0 \perp Y\}$.

Teoremă 5.2.4 Dacă $(X, <,>)$ este spaţiu vectorial euclidian atunci oricare submulţime ortogonală formată din elemente nenule este liniar independentă. Dacă, în plus, $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$, atunci orice submulţime ortogonală care conţine n elemente nenule este o bază a lui X.

Teoremă 5.2.5 — Gram-Schmidt. Dacă $(X, <,>)$ este spaţiu euclidian finit dimensional nenul iar $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază în X atunci există o bază

i) $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ ortogonală în X;

ii) $B_3 = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ ortonormată în X.

Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Fie $(X, <,>)$ spaţiu vectorial euclidian finit dimensional şi $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bază în X.

R [**Etapa 1**:] Folosim B_1 pentru a defini n vectori astfel

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - pr_{w_1} v_2 \\
&= v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 \\
w_3 &= v_3 - pr_{w_1} v_3 - pr_{w_2} v_3 \\
&= v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 \\
&\quad \dots \\
w_n &= v_n - pr_{w_1} v_n - ... - pr_{w_{n-1}} v_n \\
&= v_n - \frac{< v_n, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< v_n, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 - ... - \frac{< v_n, w_{n-1} >}{< w_{n-1}, w_{n-1} >} w_{n-1}.
\end{aligned}$$

R [**Etapa 2**:] Mulţimea $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ este bază ortogonală în X.

R [**Etapa 3**:] Împărţind fiecare vector din B_2 prin lungimea sa obţinem o bază ortonormată pentru X :

$$B_3 = \left\{ y_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, y_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, ..., y_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}.$$

Exerciţiu 5.2.5 În $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră elementele $x_1 = (1,1,1)^T$, $x_2 = (1,1,0)^T$, $x_3 = (0,1,0)^T$.

i) Să se arate că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este o bază a lui $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;

ii) Să se determine o bază ortonormată B' a lui $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ înzestrat cu produsul scalar canonic, *obţinută prin ortonormarea bazei B.* ∎

Soluţie. i) x_1, x_2, x_3 sunt liniar independenţi, deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

este nenul. $\{x_1, x_2, x_3\}$ sunt sistem de generatori, deoarece dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este finită $(= 3)$.

ii) Aplicăm **procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt,** puţin diferit. Prin **puţin diferit** vom înţelege modul algebric de obţinere a formulelor enumerate în procedeu.

Astfel, determinăm $B' = \{y_1, y_2, y_3\}$ din relaţiile:

$$\begin{array}{lcl} y_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 & & w_1 = x_1 \\ y_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 & \text{cu} & w_2 = x_2 + \lambda_1 x_1 \\ y_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 & & w_3 = x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \end{array}$$

iar λ_1, λ_2, λ_3 sunt numere reale ce se vor determina, din relaţia: $\langle w_i, w_j \rangle = 0, i \neq j$.

y_1 se determină din

$$y_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1,1,1)^T = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T.$$

y_2 se determină din

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle x_1, x_2 + \lambda_1 x_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle x_1, x_2 \rangle + \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$$

adică

$$w_2 = x_2 + \lambda_1 x_1 = x_2 - \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} x_1 = x_2 - \frac{2}{3} x_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$$

conduce la

$$y_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T.$$

y_3 se determină din relaţiile:

$$\begin{array}{l} \langle w_1, w_3 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \\ \langle x_1, x_3 \rangle + \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle + \lambda_3 \langle x_1, x_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \end{array}$$

şi

$$\begin{array}{l} \langle w_2, w_3 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \left\langle x_2 - \frac{2}{3} x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \\ \langle x_2, x_3 \rangle + \lambda_2 \langle x_2, x_2 \rangle + \lambda_3 \langle x_2, x_1 \rangle - \frac{2}{3} \langle x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ 1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \frac{2}{3}(1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Astfel, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ şi $\lambda_3 = 0 \Rightarrow w_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ şi

$$y_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)^T = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T.$$

∎

Exerciţiu 5.2.6 În $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră elementele

$$x_1 = (1,2,-3)^T, x_2 = (1,-1,2)^T, x_3 = (2,1,1)^T \text{ şi } x = (4,3,5)^T.$$

i) Să se arate că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază în $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;
ii) Să se determine coordonatele lui x în baza B;
iii) Plecând de la baza B *să se construiască o bază ortonormată a lui* $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ înzestrat cu produsul scalar canonic. ■

Soluţie. i) Probăm că $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem liniar independent. Într-adevăr, din

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avem

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -3a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cu $rangA = 3$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ şi } M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

rezultat ce arată că sistemul este compatibil unic determinat. În consecinţă $a = b = c = 0$ şi deci $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem liniar independent.

Rămâne să arătăm că $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem de generatori. Într-adevăr, din

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = y \\ \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ şi } \forall y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

avem

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} a+b+2c = y_1 \\ 2a - b + c = y_2 \\ -3a + 2b + c = y_3. \end{cases}$$

Matricea extinsă a sistemului este

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & y_1 \\ 2 & -1 & 1 & y_2 \\ -3 & 2 & 1 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Din rezultatul de mai sus observăm că

$$rangA = rang\overline{A} = 3$$

şi deci sistemul este compatibil. Am probat că $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem de generatori. Ca o consecinţă a teoriei avem demonstrat şi faptul că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) Coordonatele lui x în baza B se determină din

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = x \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

echivalent cu a rezolva sistemul

$$\begin{cases} a + b + 2c = 4 \\ 2a - b + c = 3 \\ -3a + 2b + c = 5. \end{cases}$$

Un calcul simplu arată că

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -2,\ b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{8}{3},\ c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{13}{3}.$$

Conform teoriei coordonatele lui x în baza B sunt $x_B = \left(-2, -\frac{8}{3}, \frac{13}{3}\right)^T$.

iii) Notăm prin $B_o = \{y_1, y_2, y_3\}$. Din teorie se cunoaşte că

$$y_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, y_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, y_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

unde

$$\begin{cases} w_1 = x_1 \\ w_2 = x_2 + \lambda_1 x_1 \\ w_3 = x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \end{cases}$$

iar $\lambda_{i_{i=\overline{1,3}}} \in \mathbb{R}$ se determină din

$$\begin{cases} < w_1, w_2 >= 0 \\ < w_1, w_3 >= 0 \\ < w_2, w_3 >= 0. \end{cases}$$

Observăm că

$$\begin{cases} < w_1, w_2 >= 0 \Leftrightarrow < x_1, x_2 + \lambda_1 x_1 >= 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ < w_1, w_3 >= 0 \Leftrightarrow < x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 >= 0 \Rightarrow 14\lambda_3 - 7\lambda_2 + 1 = 0 \\ < w_2, w_3 >= 0 \Leftrightarrow < x_2 + \lambda_1 x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 >= 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-7}{5}. \end{cases}$$

Înlocuind $\lambda_2 = \frac{-7}{5}$ în relaţia $14\lambda_3 - 7\lambda_2 + 1 = 0$ obţinem $\lambda_1 = -\frac{27}{35}$.

Uu calcul simplu arată că

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, y_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ şi } y_3 = \frac{35}{6\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{35} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{18}{35} \end{pmatrix}.$$

■

5.3 Teorema de descompunere în subspaţii ortogonale

Teoremă 5.3.1 Fie $(X,<,>)$ spaţiu vectorial euclidian şi Y subspaţiu în X. Au loc
i) $Y^{\perp}$ este subspaţiu vectorial în X;
ii) $Y \cap Y^{\perp} = \{0_X\}$.

Demonstraţie. i) Fie u şi v din $Y^{\perp}$ iar w din Y astfel încât $<u,w>=0$ şi $<v,w>=0$. Observăm că pentru orice scalari α, β are loc

$$< \alpha u+\beta v, w >= \alpha < u,w > +\beta < v,w >= 0$$

şi deci $\alpha u+\beta v \in Y^{\perp}$.

ii) Dacă $u \in Y \cap Y^{\perp}$ atunci $<u,u>=0 \Longleftrightarrow u=0_X$ şi deci $Y \cap Y^{\perp} = \{0_X\}$.

Teoremă 5.3.2 — Teorema de descompunere în subspaţii ortogonale. Dacă $(X,<>)$ este spaţiu euclidian real cu $\dim_{\mathbb{R}} X = n \in \mathbb{N}^*$ iar Y este subspaţiu vectorial în X atunci $X = Y \oplus Y^{\perp}$ unde $Y^{\perp}$ este complementul ortogonal al lui Y.

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1,...,e_n\} \subset Y$ bază ortogonală a lui Y, $x \in X$ şi $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{<x,e_i>}{<e_i,e_i>} e_i \in Y$ proiecţia ortogonală a lui x pe $Y \underset{\text{vectorial}}{\overset{\text{subspaţiu}}{\subset}} X$. Fie $z = x-y$. Deoarece

$$\begin{aligned}
< & z,y >=< x,y > - < y,y > \\
= & < x, \sum_{i=1}^{n} \frac{< x,e_i >}{< e_i,e_i >} e_i > - < \sum_{i=1}^{n} \frac{< x,e_i >}{< e_i,e_i >} e_i, \sum_{j=1}^{n} \frac{< x,e_j >}{< e_j,e_j >} e_j > \\
= & \sum_{i=1}^{n} \frac{< x,e_i >^2}{< e_i,e_i >} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{< x,e_i >}{< e_i,e_i >} \frac{< x,e_j >}{< e_j,e_j >} < e_i,e_j > \\
= & \sum_{i=1}^{n} \frac{< x,e_i >^2}{< e_i,e_i >} - \sum_{i=1}^{n} \frac{< x,e_i >< x,e_i >}{< e_i,e_i >} = 0
\end{aligned}$$

fapt ce demonstrează că $z \in Y^{\perp}$. Exprimarea unică $x = y+z$ arată că $X = Y \oplus Y^{\perp}$.

Altfel spus:

R Fie $(X,<,>)$ spaţiu vectorial euclidian real finit dimensional nenul şi Y subspaţiu în X cu $\dim_K Y = p$. Dacă $\{u_1,...,u_p\}$ este o bază ortogonală în Y atunci orice $x \in X$ se poate descompune în mod unic astfel $x = pr_Y x + pr_{Y^{\perp}} x$ unde

$$< pr_{Y^{\perp}} x, pr_Y x >= 0, pr_Y x = c_1 u_1 + ... + c_p u_p \text{ iar } c_i = \frac{< x,u_i >}{< u_i,u_i >}, i = 1,...,p.$$

În aceste condiţii $y = pr_Y x$ este proiecţia ortogonlă a vectorului x pe Y iar $z = pr_{Y^{\perp}} x$ este vectorul proiectat sau proiecţia ortogonlă a vectorului x pe $Y^{\perp}$ şi în plus $(x - pr_Y x) \in Y^{\perp}$ iar distanţa de la vectorul x la subspaţiul Y este norma vectorului z, adică

$$d(x,Y) = \|x - pr_Y x\|.$$

Mai mult, datorită acestei observaţii se poate defini proiecţia ortogonală $P_Y : X \to X$ definită prin $P_Y(x) = pr_Y x$ pentru orice vector $x \in X$.

Exerciţiu 5.3.1 În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră X mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor

$$v_1 = (-1,1,1)^T, v_2 = (-1,2,3)^T \text{ şi } v_3 = (1,1,3)^T.$$

i) Să se determine câte o bază ortogonală pentru subspaţiile vectoriale X şi, respectiv $X^{\perp}$.
ii) Să se determine proiecţiile ortogonale ale vectorilor $x=(2,3,4)^T$ şi $y=(1,2,-1)^T$ pe X. ∎

Soluţie. i) Se observă că

$$M_2=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ şi } \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Avem aşadar

$$X=Span\left((-1,1,1)^T,(-1,2,3)^T\right),$$

iar conform procedeului de ortogonalizare Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2-pr_{w_1}v_2=v_2-\frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>}w_1 \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1=(-1,1,1)^T \\ w_2 &= (-1,2,3)^T-\frac{<(-1,2,3)^T,(-1,1,1)^T>}{<(-1,1,1)^T,(-1,1,1)^T>}(-1,1,1)^T \\ &= (-1,2,3)^T-\frac{(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 1}{(-1)^2+1^2+1^2}(-1,1,1)^T \\ &= (-1,2,3)^T-\frac{6}{3}(-1,1,1)^T=\left(-1+\frac{6}{3},2-\frac{6}{3},3-\frac{6}{3}\right)^T=(1,0,1)^T. \end{aligned}$$

O bază ortogonală pentru subspaţiul vectorial X este $B_1=\left\{b_1=(-1,1,1)^T,b_2=(1,0,1)^T\right\}$.

Se cunoaşte că

$$\begin{aligned} X^{\perp} &= \left\{x\in\mathbb{R}^3 \middle| <x,y>=0\forall y\in X\right\} \\ &= \left\{x=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} <(x_1,x_2,x_3)^T,(-1,1,1)^T>=0 \\ <(x_1,x_2,x_3)^T,(-1,2,3)^T>=0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{x=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} -x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}\right\}. \end{aligned}$$

Rezolvăm

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

şi obţinem

$$x_1=-x_3,x_2=-2x_3\Longrightarrow x=(-x_3,-2x_3,x_3)^T$$

de unde

$$X^{\perp}=Span\left((-1,-2,1)^T\right).$$

Avem conform procedeului de ortogonalizare Gram-Schmidt

$$w_1 = v_1 = (-1,-2,1)^T$$

şi deci $B_2 = \left\{(-1,-2,1)^T\right\}$ este bază ortogonală în $X^{\perp}$.

ii) **Metoda 1.** Proiecţiile ortogonale ale vectorilor $x = (2,3,4)^T$ şi $y = (1,2,-1)^T$ pe X sunt

$$\begin{aligned}
pr_X x &= \frac{< x,b_1 >}{< b_1,b_1 >}b_1 + \frac{< x,b_2 >}{< b_2,b_2 >}b_2 \\
&= \frac{< (2,3,4)^T,(-1,1,1)^T >}{< (-1,1,1)^T,(-1,1,1)^T >}(-1,1,1)^T + \frac{< (2,3,4)^T,(1,0,1)^T >}{< (1,0,1)^T,(1,0,1)^T >}(1,0,1)^T \\
&= \frac{5}{3}(-1,1,1)^T + \frac{6}{2}(1,0,1)^T = \left(-\frac{5}{3}+\frac{6}{2},\frac{5}{3},\frac{5}{3}+\frac{6}{2}\right)^T = \left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{14}{3}\right)^T. \\
pr_X y &= \frac{< y,b_1 >}{< b_1,b_1 >}b_1 + \frac{< y,b_2 >}{< b_2,b_2 >}b_2 = (0,0,0)^T.
\end{aligned}$$

Metoda 2. Se cunoaşte că $pr_{X^{\perp}}x = \left\{x_0 \in \mathbb{R}^3 \middle| x - x_0 \perp X^{\perp}\right\}$. Notăm $x_0 = pr_{X^{\perp}}x$ şi deducem că

$$x_0 \in X^{\perp} \Longrightarrow x_0 = \alpha v_1 = \alpha(-1,-2,1)^T.$$

Mai mult

$$x - x_0 \perp X^{\perp} \Longrightarrow x - x_0 \perp (-1,-2,1)^T \Longrightarrow < x - x_0,(-1,-2,1)^T >= 0$$

sau echivalent $< (2,3,4)^T - \alpha(-1,-2,1)^T,(-1,-2,1)^T >= 0$ ce implică

$$< (2+\alpha,3+2\alpha,4-\alpha)^T,(-1,-2,1)^T >= 0$$

iar în final $-(2+\alpha)-2(3+2\alpha)+4-\alpha = 0$ implică

$$\alpha = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \Longrightarrow x_0 = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)^T.$$

Cum $x = pr_X x + pr_{X^{\perp}}x$ obţinem

$$pr_X x = x - pr_{X^{\perp}}x = (2,3,4)^T - \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)^T = \left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{14}{3}\right)^T.$$

Analog, $pr_{X^{\perp}}y = \left\{y_0 \in \mathbb{R}^3 \middle| y - y_0 \perp X^{\perp}\right\}$.

Notăm $y_0 = pr_{X^{\perp}}y$ şi deducem că $y_0 \in X^{\perp} \Longrightarrow y_0 = \alpha v_1 = \alpha(-1,-2,1)^T$.

Mai mult $y - y_0 \perp X^{\perp} \Longrightarrow y - y_0 \perp (-1,-2,1)^T$ implică $< y - y_0,(-1,-2,1)^T >= 0$ sau echivalent

$$< (1,2,-1)^T - \alpha(-1,-2,1)^T,(-1,-2,1)^T >= 0$$

implică

$$< (1+\alpha,2+2\alpha,-1-\alpha)^T,(-1,-2,1)^T >= 0.$$

În final

$$-(1+\alpha)-2(2+2\alpha)-1-\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -1 \Longrightarrow y_0 = (1,2,-1)^T.$$

Cum $y = pr_X y + pr_{X^\perp} y$ obţinem

$$pr_X y = y - pr_{X^\perp} y = (1,2,-1)^T - (1,2,-1)^T = (0,0,0)^T .$$

Metoda 3. Se cunoaşte că $pr_X x = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \middle| x - x_0 \perp X \right\}$.
O bază ortogonală pentru subspaţiul vectorial X este

$$B_1 = \left\{ b_1 = (-1,1,1)^T, b_2 = (1,0,1)^T \right\}.$$

Notăm $x_0 = pr_{X^\perp} x$ şi deducem că

$$x_0 \in X \Longrightarrow x_0 = \alpha b_1 + \beta b_2 = \alpha (-1,1,1)^T + \beta (1,0,1)^T .$$

Mai mult

$$x - x_0 \perp X \Longrightarrow \begin{cases} x - x_0 \perp (-1,1,1)^T \\ x - x_0 \perp (1,0,1)^T \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} < x - x_0, (-1,1,1)^T >= 0 \\ < x - x_0, (1,0,1)^T >= 0 \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} < x - \alpha (-1,1,1)^T - \beta (1,0,1)^T, (-1,1,1)^T >= 0 \\ < x - \alpha (-1,1,1)^T - \beta (1,0,1)^T, (1,0,1)^T >= 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{5}{3} \text{ iar } \beta = 3.$$

În concluzie,

$$pr_X x = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3} \right)^T .$$

Analog, $pr_X y = (0,0,0)^T$. ■

5.4 Noţiunea de distanţă, punct fix, contracţie. Teorema de punct fix

Fie $X \neq \phi$ şi $X \times X = \{(x,y) \,|x \in X, y \in X\}$.

Definiţie 5.4.1 Aplicaţia (funcţia) $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte distanţă (sau metrică) pe X, dacă:

M1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

M2) $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x,y \in X$ (simetria);

M3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)\ \forall x,y,z \in X$ (inegalitatea triunghiului).

Exerciţiu 5.4.1 — Metrica discretă. Să se arate că pe orice mulţime nevidă X se poate defini o distanţă pe X cu ajutorul funcţiei

$$d_0 : X \times X \to \mathbb{R}_+, d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y \end{cases}$$

numită şi metrica discretă. ■

Soluţie. Într-adevăr, M1), M2) sunt evidente. Probăm că M3) are loc. Observăm că membrul stâng al acestei inegalităţi este ≤ 1. Dacă

$$d_0(x,y) + d_0(y,z) < 1$$

atunci

$$\begin{cases} d_0(x,z) = 0 \Longrightarrow x = z \\ d_0(z,y) = 0 \Longrightarrow z = y \end{cases} \Longrightarrow x = y \Longrightarrow d_0(x,y) = 0$$

şi deci inegalitatea triunghiului este verificată. ■

R **[Spaţiul metric $\mathbb{R}^n$]** Funcţia $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$d_E(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \text{ (metrica euclidiană)}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n)^T$ şi $y = (y_1, ..., y_n)^T$ sunt elemente arbitrare din $\mathbb{R}^n$ este metrică pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţie 5.4.2 Fie d o distanţă pe X. Perechea ordonată (X, d) se numeşte spaţiu metric.

Exerciţiu 5.4.2 Să se arate că $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$d(x,y) = |arctgx - arctgy|$$

defineşte o metrică pe $\mathbb{R}$. ■

Soluţie. Observăm că $d(x,y) \geq 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}$. Probăm axiomele M1)-M3).

M1) funcţia $arctgt$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ deoarece

$$(arctgt)' = \frac{1}{1+t^2} > 0.$$

Deci $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

M2) Observăm că

$$d(x,y) = |arctgx - arctgy| = |arctgy - arctgx| = d(y,x).$$

M3) Inegalitatea triunghiului rezultă astfel

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |arctgx - arctgy| \leq |arctgx - arctgz + arctgz - arctgy| \\ &\leq |arctgx - arctgz| + |arctgz - arctgy| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

■

Exerciţiu 5.4.3 Fie $X = \mathbb{Q}$ mulţimea numerelor raţionale. Pentru $a, b \in \mathbb{Q}$ definim

$$d(a,b) = \frac{|a-b|}{1+|a-b|}.$$

Să se arate că (X, d) este spaţiu metric. ■

Soluţie. Observăm că $d(a,b) \geq 0 \; \forall a, b \in \mathbb{Q}$.

Probăm axiomele M1)-M3).

M1) $d(a,b) = 0 \iff |a-b| = 0 \iff a = b$.

M2) $d(a,b) = \frac{|a-b|}{1+|a-b|} = \frac{|b-a|}{1+|b-a|} = d(b,a)$.

M3) Observăm că funcţia

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

este crescătoare. Folosind această proprietate a ei avem

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a-c|+|c-b|}{1+|a-c|+|c-b|} \\ &= \frac{|a-c|}{1+|a-c|+|c-b|} + \frac{|c-b|}{1+|a-c|+|c-b|} \\ &\leq \frac{|a-c|}{1+|a-c|} + \frac{|c-b|}{1+|c-b|} = d(a,c) + d(c,b). \end{aligned}$$

Cum M1)-M3) au fost verificate $\Longrightarrow (\mathbb{Q}, d)$ este spaţiu metric. ■

Exerciţiu 5.4.4 — Metrica Manhattan . În $\mathbb{R}^2$ definim

$$d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Să se arate că $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$ este spaţiu metric şi să se determine mulţimea

$$B_r(0,0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| d\left((x,y),(0,0)\right) < r \right\}$$

numită bila deschisă de centru $(0,0)$ şi rază $r > 0$. ■

Soluţie. Observăm că $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \geq 0 \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Probăm axiomele M1)-M3).

M1) Rezultă astfel

$$d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$$

dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} |x_1 - y_1| = 0 \\ |x_2 - y_2| = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

M2) Rezultă astfel

$$\begin{aligned} d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |x_2 - y_2| + |x_1 - y_1| \\ &= d\left((y_1,y_2),(x_1,x_2)\right). \end{aligned}$$

M3) Alegem trei puncte $P(x_1,x_2)$, $Q(y_1,y_2)$ şi $R(z_1,z_2)$. Avem

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = d(P,R) + d(R,P) \end{aligned}$$

şi inegalitatea triunghiului este verificată.

Cum M1)-M3) au loc rezultă că $\left(\mathbb{R}^2, d\right)$ este spaţiu metric. Notăm că d nu este metrica euclidiană (sau naturală) din $\mathbb{R}^2$. Remarcăm că bila deschisă de centru $(0,0)$ şi rază r $(r > 0)$ este

$$B_r(0,0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| d\left((x,y),(0,0)\right) < r \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| |x| + |y| < r \right\}$$

şi aceasta este de fapt interiorul pătratului de vârfuri $(r,0)$, $(0,r)$, $(-r,0)$ şi $(0,-r)$. ■

Definiţie 5.4.3 Fie d o distanţă pe X. Perechea ordonată (X,d) se numeşte spaţiu metric.

Notă. Noţiunea de spaţiu metric a fost introdusă de matematicianul francez René Maurice Frèchet (1878-1973) în anul 1906.

Definiţie 5.4.4 Se numeşte subspaţiu metric al unui spaţiu metric (X,d) perechea (X',d') unde X' este o submulţime nevidă a lui X, iar d' este restricţia lui d la mulţimea $X' \times X'$.

R Dacă d_1 şi d_2 sunt metrici diferite pe X atunci spaţiile metrice (X,d_1) şi (X,d_2) sunt distincte.

Definiţie 5.4.5 Fiind dat un punct x_0 al spaţiului metric $X = (X, d)$ şi un număr $r > 0$ definim

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= \{x \in X \,|\, d(x, x_0) < r\} \text{ bila deschisă cu centrul în } x_0 \text{ şi rază } r, \\ \overline{B}_r(x_0) &= \{x \in X \,|\, d(x, x_0) \le r\} \text{ bila închisă cu centrul în } x_0 \text{ şi rază } r, \\ S_r(x_0) &= \{x \in X \,|\, d(x, x_0) = r\} \text{ sfera cu centrul în } x_0 \text{ şi rază } r. \end{aligned}$$

Definiţie 5.4.6 Se numeşte vecinătate a punctului x_0 din spaţiul metric (X, d), o submulţime V a lui X care include o bilă deschisă cu centrul în x_0 şi rază $r > 0$.

O vecinătate a lui x_0 se notează cu V_{x_0}. Mulţimea vecinătăţilor punctului x_0 se numeşte sistemul de vecinătăţi ale lui x_0 şi se notează cu $\mathscr{V}_{x_0}$.

5.4.1 Convergenţa în spaţii metrice

Fie (X, d) spaţiu metric.

Definiţie 5.4.7 Se numeşte şir de puncte în X aplicaţia $f : N_k \to X$ unde

$$N_k = \{n \in \mathbb{N} | n \ge k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Punând $f(n) = x_n$, unde $x_n \in X$, şirul se notează prin $(x_n)_{n \ge k}$ sau (x_n) sau simplu x_n. Presupunem $k = 0$ în continuare.

Definiţie 5.4.8 Spunem că şirul de puncte (x_n) din spaţiul metric (X, d) are limita $x \in X$ dacă în afara oricărei vecinătăţi $V_x \subseteq \mathscr{V}_x$ se află un număr finit de termeni ai şirului său, altfel spus, dacă mulţimea valorilor lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n \notin V_x$ este finită. Se scrie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ sau } x_n \xrightarrow{d} x \text{ pentru } n \to \infty \text{ sau } x_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} x.$$

Teoremă 5.4.1 Şirul de puncte $(x_n)_n$, $x_n \in (X, d)$ este convergent la $x \in X \Leftrightarrow$ şirul de numere reale nenegative $(d(x_n, x))_n$ este convergent la zero, sau echivalent

$$x_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in N \text{ astfel încât } d(x_n, x) < \varepsilon\ \forall n \ge N(\varepsilon).$$

R Am demonstrat că (X, d_0) este spaţiu metric discret. Putem caracteriza şirurile din X unde $d_0(x_n, x) \to 0$.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $d_0(x_n, x) \to 0$ atunci alegând $\varepsilon = \frac{1}{2}$ obţinem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_0(x_n, x) < \varepsilon = \frac{1}{2}$ pentru $n \ge n_0$. Aceasta este posibil numai dacă $d_0(x_n, x) = 0$ adică $x_n = x$ pentru orice $n \ge n_0$.

Exerciţiu 5.4.5 Fie şirul $a_n = \left(\frac{7n}{n+1}, 2^{-n}, \frac{3^{n-1}-2}{3^n+2}\right)^T$, $n \ge 1$, de puncte din $\left(\mathbb{R}^3, d_E\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Soluţie. Limita unui şir convergent de puncte din $\mathbb{R}^n$ se calculează pe componente. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \left(7, 0, \frac{1}{3}\right)^T$. Notând $a = (7, 0, 3)^T$ se observă că $d_E(a_n, a) \to 0$ când $n \to \infty$. ■

Definiţie 5.4.9 Fie şirul de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ şi (k_n) un şir strict crescător de numere naturale. Şirul de puncte (y_n) cu proprietatea că $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_n = x_{k_n}$ se numeşte subşir al şirului de puncte (x_n) din spaţiul metric (X, d).

5.4.2 Şiruri fundamentale

Fie (X,d) spaţiu metric şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de puncte din X.

Definiţie 5.4.10 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şir fundamental, sau şir Cauchy, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există numărul natural $N(\varepsilon)$, astfel încât $d(x_m,x_n) < \varepsilon \forall m \geq N(\varepsilon)$ şi $\forall n \geq N(\varepsilon)$ sau echivalent $d(x_{n+p},x_n) < \varepsilon \forall n \geq N(\varepsilon)$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$.

R $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir fundamental dacă şi numai dacă $d(x_{n+p},x_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall p \in \mathbb{N}$.

R Orice şir convergent este un şir Cauchy.

R Orice şir Cauchy este mărginit.

R Orice şir Cauchy care conţine un subşir convergent este el însuşi convergent.

Definiţie 5.4.11 Un spaţiu metric (X,d) se numeşte complet dacă orice şir Cauchy de elemente din X este convergent.

R Într-un spaţiu metric complet şirurile convergente sunt precis şirurile Cauchy.

R Spaţiul metric $(\mathbb{R}^n,d)$ unde d este metrica Euclidiană este spaţiu metric complet.

Exerciţiu 5.4.6 Să se dea exemplu de şir fundamental care nu este convergent. ■

Soluţie. Şirul de numere raţionale $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este fundamental în $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ (căci este convergent în $(\mathbb{R},|\cdot|)$) dar nu este convergent în $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ deoarece în caz contrar ar rezulta că $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n \in \mathbb{Q}$, absurd. Deducem că $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ nu este spaţiu metric complet. ■

Exerciţiu 5.4.7 În spaţiul metric $(\mathbb{R},|\cdot|)$ să se dea exemplu de şir mărginit care nu este fundamental. ■

Soluţie. Şirul $x_n = 1+(-1)^n$ este mărginit în $(\mathbb{R},|\cdot|)$ căci $|x_n| \leq 2$, dar nu este fundamental, deoarece $|x_{2n}-x_{2n-1}| = 2\ \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Exerciţiu 5.4.8 Daţi exemplu de contracţie $f: X \to X$ pentru care $X \subseteq \mathbb{R}$ nu este spaţiu metric complet. ■

Soluţie. Observăm că $(0,1)$ înzestrat cu metrica uzuală din $\mathbb{R}$ nu este spaţiu metric complet. Într-adevăr, fie $x_n = \frac{1}{n}$. Fiecare membru al acestui interval este în $(0,1)$. În plus, x_n este şir Cauchy dar limita lui este $0 \notin (0,1)$. Evident $f:(0,1)\to(0,1)$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2}x$ este o contracţie în $(0,1)$ fără a avea puncte fixe în $(0,1)$. ■

5.4.3 Principiul contracţiei

Fie spaţiile metrice (X,d) şi (Y,σ), $A \subseteq X$ o submulţime nevidă a lui X, $f : A \to Y$ funcţie şi $a \in A$ punct oarecare al mulţimii A.

Definiţie 5.4.12 Spunem că funcţia $f : A \to Y$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathscr{V}_{f(a)}$ există vecinătatea $U \in \mathscr{V}_a$ astfel încât $f(U \cap A) \subset V$.

Definiţie 5.4.13 Dacă funcţia f nu este continuă în punctul $a \in A$ spunem că f este discontinuă în a sau că a este punct de discontinuitate al lui f.

Teoremă 5.4.2 Teorema de caracterizare a continuităţii. Fie $f : A \to Y, A \subseteq (X,d)$ şi $a \in A$. Următoarele sunt echivalente

i) f este continuă în a;

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $d(x,a) < \delta$ să avem $\sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

iii) $\forall (x_n), x_n \in A$ cu $x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$.

R Orice distanţă este o funcţie continuă.

Definiţie 5.4.14 Fie (X,d) spaţiu metric. Spunem că funcţia $f : X \to X$ este contracţie pe (X,d) dacă există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x,y)$ pentru orice $x, y \in X$.

Definiţie 5.4.15 Fie (X,d) spaţiu metric. Elementul $x \in X$ se numeşte punct fix pentru aplicaţia (operatorul) $f : X \to X$ dacă $f(x) = x$.

Exerciţiu 5.4.9 Să se dea exemplu de funcţie care are cel puţin două puncte fixe. ■

Soluţie. Aplicaţia $f : [0,1] \to [0,1]$ definită prin $f(x) = x^2$ are ca puncte fixe pe $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$ deoarece $f(0) = 0$ iar $f(1) = 1$. ■

Exerciţiu 5.4.10 Se consideră spaţiul metric (M,d) unde $M = [1,\infty)$ iar d este distanţa uzuală. Fie funcţia $f : M \to M$ dată prin $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Să se arate că f este contracţie şi să se determine α şi punctul fix. ■

Soluţie. Pentru început evaluăm

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy}\right| = |x-y|\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right|.$$

Din $x, y \ge 1$ rezultă $0 < \frac{1}{xy} \le 1$ şi deci funcţia $(x,y) \to \frac{1}{2} - \frac{1}{xy}$. Concludem că $\alpha = \frac{1}{2}$ pentru ca $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \le \alpha$.

Punctul fix este soluţia ecuaţiei $f(x) = x$, deci $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sau echivalent $x^2 = 2$. Deoarece $x \ge 1$, punctul fix este $x = \sqrt{2}$. Pe de altă parte, cum $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ rezultă că $x = \sqrt{2}$ este unicul punct fix. ■

Un rezultat fundamental în teoria spaţiilor metrice este principiul contracţiei dat de

Teoremă 5.4.3 — Teorema de punct fix a lui Banach. Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ este o contracţie de constantă $\alpha \in (0,1)$ atunci

i) f este continuă pe X;

ii) $\forall x_0 \in X$ şirul $(x_n)_n$ al aproximaţiilor succesive $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, converge la

punctul x^* care este unicul punct fix al lui f;
iii) eroarea aproximării $d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0))$ $\forall n \in N^*$.

Demonstraţie. i) Fie $a \in X$ şi şirul $(a_n)_n \subset X$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$. Avem

$$0 \leq \underset{\downarrow 0}{d(f(a_n), f(a))} \leq \alpha d(a_n, a)$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(a_n), f(a)) = 0 \Longrightarrow f$ continuă.

ii) Avem

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) = \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq ... \leq \alpha^n d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Să calculăm $d(x_{n+p}, x_n)$. Avem

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+p}) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + \alpha^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n \left(1 + \alpha + ... + \alpha^{p-1}\right) d(x_0, x_1) = \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{5.2}$$

deoarece α^p este subunitar şi nenegativ. Am demonstrat că

$$0 \leq \underset{\downarrow n\to\infty \; 0}{d(x_n, x_{n+p})} \leq \alpha^n \underset{\swarrow \text{(d-continuă)}}{\frac{1}{1-\alpha}} d(x_0, x_1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0 \forall p \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow (x_n)$ este şir Cauchy $\overset{X \text{ complet}}{\to}$ $(x_n)_n$ este convergent, fie $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. În $x_{n+1} = f(x_n)$ trecem la limită, folosind f continuă rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

deci $x^* = f(x^*)$. O altă soluţie x^{**} nu poate să existe deoarece am avea

$$0 < d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq \alpha d(x^*, x^{**}) < d(x^*, x^{**})$$

evident imposibil.

iii) Conform inegalităţii (5.2) avem

$$0 \leq d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

R Se poate demonstra că dacă (X, d) este un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ este o contracţie de constantă $\alpha \in (0, 1)$ atunci

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n).$$

R O ecuaţie de forma $f(x)=0$ se poate pune sub forma $g(x)=x$ în mai multe moduri, nu toate la fel de convenabile aplicabilităţii metodei aproximaţiilor succesive. De exemplu, pentru a rezolva ecuaţia $x^2-2=0$ se preferă punerea ei sub forma $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$. Cele două soluţii, $-\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2}$ se obţin pornind de la aproximaţiile strict negative şi, respectiv strict pozitive.

Exerciţiu 5.4.11 Fie (I,d_E) spaţiu metric complet al lui $(\mathbb{R},d_E)$ şi $f:I\to I$ funcţie continuă pe I şi derivabilă pe interiorul lui I. Frecvent în analiza matematică sunt întâlnite iteraţii de forma $x_{n+1}=f(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Să se demonstreze că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent pentru orice alegere a lui $x_0\in I$ dacă există $\alpha\in(0,1)$ astfel încât $|f'(x)|\leq\alpha$ pentru orice $x\in I$. ■

Soluţie. Rezultă din teorema lui Lagrange că pentru orice x şi y din I există $t=t(x,y)$ între x şi y astfel încât $f(x)-f(y)=f'(t)(x-y)$.

Deci $|f(x)-f(y)|=|f'(t)||x-y|\leq\alpha|x-y|\Longleftrightarrow d_E(f(x),f(y))\leq\alpha d_E(x,y)$, adică f este contracţie.

Recapitulare:

$$\left.\begin{array}{l}(I,d_E)\text{ spaţiu metric complet}\\ f\text{ contracţie}\end{array}\right\}\overset{\text{Teorema Banach}}{\Longrightarrow}\text{ că } x_n \text{ este convergent.}$$

■

Exerciţiu 5.4.12 Să se arate că ecuaţia $x^3+12x-1=0$ are o singură rădăcină reală şi să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de $0,0001$ (altfel spus cu o precizie de 10^{-4}). ■

Soluţie. Etapa 1. Se localizează rădăcina. Folosim şirul lui Rolle.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-113	111	$+\infty$
	$-$	$-$	$+$	$+$

$g(x)=x^3+12x-1\Longrightarrow g'(x)=3x^2+12$

$g'(x)=0\Longrightarrow 3x^2+12=0\Longrightarrow x\notin\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$

$g(-4)=(-4)^3+12(-4)-1=-64-48-1=-113$

$g(4)=4^3+12\cdot4-1=64+48-1=111$

Şirul lui Rolle este $-\underbrace{-+}+$ şi deoarece există o singură schimbare de semn (corespunzătoare valorilor -4 şi 4) deducem că ecuaţia are o singură rădăcină reală în intervalul $[-4,4]$. Mai mult, cum $g(0)\cdot g(1)<0$ o localizare mai bună a rădăcinii este intervalul $(0,1)$.

Etapa 2. Ecuaţia se mai scrie $x\left(x^2+12\right)-1=0$ sau echivalent $x=\frac{1}{x^2+12}$.

Dorim să aplicăm Teorema Banach. Ultima expresie sugerează să considerăm $f(x)=\frac{1}{x^2+12}$. Probăm că f este contracţie în $I=[0,1]$. Pentru aceasta folosim Exerciţiul 5.4.11. Observăm că

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+12\right)^2}.$$

Pe de altă parte $|f'(x)|=\left|\frac{-2x}{(x^2+12)^2}\right|=\frac{2x}{(x^2+12)^2}$ iar cum $x^2+12\geq12$ şi $x\leq1$ deducem că

$$\frac{1}{x^2+12}\leq\frac{1}{12}\quad\text{şi}\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(x^2+12)^2}\leq\frac{1}{12^2}\\ 2x\leq2.\end{array}\right.$$

Am demonstrat că $|f'(x)|\leq\frac{1}{12^2}\cdot2=\frac{1}{72}$.

Conform Exerciţiului 5.4.11 avem $|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{72}|x-y|\ \forall x,y\in[0,1]$ adică f este contracţie.

Etapa 3. Alegem $x_0 = 0 \in [0,1]$. Construim şirul aproximaţiilor succesive $x_1 = f(x_0) = f(0) = \frac{1}{12}$ şi deci $|x_1 - x_0| = \frac{1}{12}$.

Din Etapa 1 şi Teorema Banach cunoaştem că f are un unic punct fix iar eroarea aproximării este dată de relaţia

$$d(x_n, x^*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Această ultimă relaţie ne furnizează câte iteraţii să facem pentru ca eroarea să fie mai mică de $0,0001$. Determinăm $n \in \mathbb{N}^*$ minim astfel încât

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \text{ adică } \frac{1}{2}\frac{72}{71}\left(\frac{1}{72}\right)^n < \frac{1}{10^4}.$$

Pentru

$$\begin{array}{lll} n = 0 & \Longrightarrow & 0,25352112 < \frac{1}{10^4} \qquad \textit{Fals} \\ n = 2 & \Longrightarrow & \frac{1}{2}\frac{72}{71}\left(\frac{1}{72}\right)^2 = \frac{72}{736128} < \frac{1}{10^4} \quad \textit{Adevărat} \end{array}$$

astfel că trebuie făcute două iteraţii. Pentru $n = 2$ găsim

$$x^* \simeq x_2 = f(x_1) = \frac{1}{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + 12} = \frac{12^2}{1 + 12^3} = \frac{144}{1729} \simeq 0,08328514$$

soluţie a problemei cu o eroare mai mică de 10^{-4}. ■

Exerciţiu 5.4.13 Să se demonstreze că este posibil să rezolvăm ecuaţia $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ folosind iteraţia $x_n = g(x_{n-1}) = \frac{1}{1+x_{n-1}^2}$ pentru $n \ge 1$. Să se calculeze x_1, x_2, x_3 pentru $x_0 = 1$ şi să se estimeze $d(x, x_n)$. ■

Soluţie. Fie $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Egalitatea $g(x) = x$ este echivalentă cu $x = \frac{1}{1+x^2}$ sau cu $x\left(1+x^2\right) = 1$ adică chiar ecuaţia $x^3 + x - 1 = 0$ ce dorim să o rezolvăm.

Etapa 1. Se localizează rădăcina. Folosim şirul lui Rolle.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$
	$-$	$+$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ ecuaţia nu are soluţii reale.

Şirul lui Rolle este $\underbrace{-+}$ şi deci ecuaţia are o singură rădăcină reală în intervalul $(-\infty, \infty)$. Mai mult $f(0) \cdot f(1) = (-1) \cdot 1 < 0$ şi rădăcina se află în $(0,1)$.

Considerăm spaţiul metric complet $([0,1], d_E)$ şi verificăm că g este contracţie pe $[0,1]$. Observăm că

$$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ şi } \left|g'(x)\right| = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \le \frac{2}{1}$$

adică nu avem o estimare bună. Încercăm astfel

$$g''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} - 2x\frac{(-2)\,2x}{(1+x^2)^3} = \frac{2}{(1+x^2)^3}\left(-1 - x^2 + 4x^2\right) = \frac{6\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{(1+x^2)^3}.$$

Rezolvăm $g''(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Construim tabelul

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0
$g''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Rezultă din tabel că $g'(x) \leq g'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ şi $g'(x) \geq g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ deoarece $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ este punct de maxim iar $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ este punct de minim.

Inegalitatea $g'(x) \geq g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ este echivalentă cu $-g'(x) \leq -g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ sau, mai mult $|g'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ (deoarece $x \in [0,1] \Longrightarrow g'(x) \leq 0$).

Cum $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1 \Longrightarrow$ din Exerciţiul 5.4.11 că g este contracţie. În concluzie, $f(x) = 0$ poate fi rezolvată folosind iteraţia dată.

Etapa 3. Fie $x_0 = 1$. Observăm că

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\; x_2 = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5},\; x_3 = g\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{1+\frac{16}{25}} = \frac{25}{41}.$$

În final $|x^* - x_n| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$ sau echivalent

$$|x - x_n| \leq \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n}{1-\frac{3\sqrt{3}}{8}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8-3\sqrt{3}}\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{n}{2}} < \frac{3}{2}\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

■

Exerciţiu 5.4.14 Să se estimeze $\sqrt{3}$ cu 4 zecimale, folosind principiul contracţiei. ■

Soluţie. Observăm că $\sqrt{3}$ este rădăcină a ecuaţiei $x^2 = 3$. Deci problema se reduce la a afla soluţia pozitivă a acestei ecuaţii cu 4 zecimale, adică să se estimeze soluţia cu o eroare mai mică de 10^{-4}. Mai mult, trebuie să observăm că $\sqrt{3}$ este un punct fix pentru $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

Se arată ca mai sus că f este contracţie pe $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ de constantă $\alpha = \frac{1}{2}$. Dacă alegem $x_0 = \frac{3}{2}$ atunci

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{3}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{7}{4}.$$

Pe de altă parte $d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)\, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

În cazul nostru

$$\left|x_n - \sqrt{3}\right| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}|x_0 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 \cdot \left|\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Membrul drept este mai mic decât $\frac{1}{10^4}$ pentru $n = 13$, care înseamnă că x_{13} aproximează $\sqrt{3}$ cu 4 zecimale. Mai mult, iteraţia $x_{n+1} = f(x_n)$ ne dă un răspuns mai rapid. Din calcule, se observă $x_3 \simeq 1,732050810$ şi $x_4 \simeq 1,732050807$. Deci $|x_3 - x_4| \leq \frac{1}{10^8}$.

Pentru $\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left|x_4 - \sqrt{3}\right| \leq |x_4 - x_3|$ şi deci $\sqrt{3}$ este aproximat foarte bine chiar de către x_4. Am obţinut $\sqrt{3} \simeq 1,73205$. ■

5.5 Noţiunea de spaţiu normat

Fie $(X, <,>)$ spaţiu euclidian real. Am văzut că lungimea (sau norma euclidiană) a unui vector $x \in X$ este numărul real $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$. Un calcul direct arată că

N1) $\|x\| \geq 0\; \forall x \in X$ şi $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;
N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\; \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\; \forall x, y \in X$,

proprietăţi ce demonstrează că o normă poate fi definită direct, astfel:

Definiţie 5.5.1 Fie $(X,\mathbb{R})$ spaţiu vectorial real.

i) Se numeşte normă în $(X,\mathbb{R})$ o funcţie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice x şi y din X şi orice scalari α au loc $N1)$, $N2)$ şi $N3)$.

ii) Se numeşte spaţiu normat un spaţiu vectorial $(X,\mathbb{R})$ pe care s-a fixat o normă $\|\cdot\|$. Notăm situaţia $(X,\|\cdot\|)$.

R Funcţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile $N1)$, $N2)$ şi $N3)$ este continuă.

R Fie $(X,\mathbb{R})$ spaţiu vectorial real. Dacă $B = \{b_1,...,b_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$ atunci orice vector $x \in X$ se scrie $x = \Sigma_{i=1}^{n} x_i b_i$, unde $x = (x_1,...,x_n)^T$ este vectorul coordonatelor în baza B iar următoarele funcţionale sunt norme

$\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ norma ∞ (norma maximum)

$\|x\|_p = \left(\Sigma_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ norma p (pentru $p = 2$ norma euclidiană).

R Normele operatoriale pentru o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,..,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ subordonate normelor $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ şi $\|x\|_2$ sunt

$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \Sigma_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma liniilor)

$\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \Sigma_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma coloanelor)

$\|A\|_2 = [R_s(A^* \cdot A)]^{1/2}$ în care $A^* = \overline{A}^T$ iar R_s este raza spectrală (norma euclidiană).

Exerciţiu 5.5.1 Fie $X = C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ este continuă}\}$. Să se arate că dacă $(X,\mathbb{R})$ este spaţiul vectorial real al funcţiilor definite pe $[a,b]$ atunci $\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\,dx$ defineşte o normă pe X. ■

Soluţie. Arătăm că sunt îndeplinite axiomele N1)-N2):

verificăm N1): deoarece $|f(x)| \ge 0$ evident şi $\|f\|_{L^1} \ge 0$. Pe de altă parte, dacă $f = 0$ atunci $|f| = 0 \Longrightarrow \|f\|_{L^1} = 0$. Presupunem acum că $\|f\|_{L^1} = 0$ şi demonstrăm că $f = 0$. Într-adevăr dacă prin absurd există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) \neq 0 \Longrightarrow |f(x_0)| > 0$. Pe de altă parte, din continuitatea lui f, deducem că există o constantă $m > 0$ şi un interval $[c,d] \subseteq [a,b]$ astfel încât $|f(x)| > m$ pentru orice $x \in [c,d]$ $(c < d)$. Atunci avem estimarea

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\,dx \ge \int_c^d |f(x)|\,dx \ge m(d-c) > 0$$

adică o contradicţie cu $\|f\|_{L^1} = 0$. Deci $\|f\|_{L^1} = 0 \Longrightarrow |f| = 0$ şi $f = 0$;

verificăm N2): avem

$$\|\alpha x\| = \int_a^b |\alpha f(x)|\,dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|\,dx = |\alpha|\,\|f\|_{L^1};$$

verificăm N3): observăm că

$$\|f+g\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$$

fapt ce încheie demonstraţia că $(X,\|\cdot\|_{L^1})$ este spaţiu vectorial normat. ■

R Orice spaţiu normat $(X,\|\cdot\|)$ admite o metrică d, definită prin $d(x,y) = \|x-y\|$ pentru orice $x,y \in X$.

5.6 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Banach

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ matrice inversabilă ale cărei elemente de pe diagonala principală sunt egale cu 1, $x = (x_1,..,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ şi $b = (b_1,..,b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Vom considera problema determinării soluţiei sistemului de ecuaţii liniare neomogen $A \cdot x = b$.

Pentru aceasta, scriem sistemul sub forma $(I - A) \cdot x + b = x$ şi considerăm spaţiul metric complet $(\mathbb{R}^n, d)$ unde $d(x,y) = \|x - y\|_\infty$. Definim $f = (f_1,...,f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prin $f(x) = (I_n - A) \cdot x + b$ şi observăm că

$$f(x) - f(y) = (I_n - A) \cdot (x - y).$$

Din această relaţie se poate obţine estimarea

$$\begin{aligned} \max_{1 \le i \le n} |f_i(x) - f_i(y)| &\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|(I_n - A)_{ij}\right| \left|x_j - y_j\right| = \|I_n - A\|_\infty \left|x_j - y_j\right| \\ &= \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left|(I_n - A)_{ij}\right| \left|x_j - y_j\right| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left|a_{ij}\right| \left|x_j - y_j\right|. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|_\infty \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left|a_{ij}\right| d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left|a_{ij}\right| \|x - y\|_\infty.$$

Această discuţie împreună cu Teorema de punct fix a lui Banach demonstrează veridicitatea următorului rezultat:

Teoremă 5.6.1 Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ matrice inversabilă, $x = (x_1,..,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ şi $b = (b_1,..,b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dacă $\sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left|a_{ij}\right| < |a_{ii}|$ pentru orice $i = 1,...,n$ atunci pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$ şirul aproximaţiilor succesive $x_{m+1} = (I_n - A) \cdot x_m + b$ pentru $m = 0, 1, ...$ converge la unica soluţie a sistemului $A \cdot x = b$.

6. Clase speciale de operatori

6.1 Adjunctul unui operator liniar

Fie $(X,<,>_X)$ şi $(Y,<,>_Y)$ spaţii euclidiene (reale sau complexe).

Definiţie 6.1.1 Fie $u : X \longrightarrow Y$ operator liniar. Se numeşte adjunct al lui u un operator liniar $u^* : Y \longrightarrow X$ definit prin

$$< u(x), y >_Y = < x, u^*(y) >_X \ \ \forall x \in X \text{ şi } y \in Y. \tag{6.1}$$

Teoremă 6.1.1 Dacă X este finit dimensional atunci orice operator liniar $u : X \longrightarrow Y$ admite un unic adjunct $u^* : Y \longrightarrow X$.

Demonstraţie. Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază ortonormată a lui X atunci u^* îndeplineşte

$$< u(e_j), y >_Y = < e_j, u^*(y) >_X \ \text{ pentru orice } j.$$

Deci $u^*(y) = \sum_{j=1}^{n} < u(e_j), y >_Y e_j$ şi u^* este unic. Definim u^* în acest mod şi observăm că (6.1) este îndeplinită pentru $x = e_j$. Din liniaritatea lui u şi u^* deducem că (6.1) este îndeplinită pentru orice $x \in X$. Deci u^* există.

Exerciţiu 6.1.1 Pe $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ se consideră produsul scalar

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2, \forall x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \forall y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

şi operatorul liniar $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, u(x) = (x_1 - x_2, 2x_1)^T$ pentru orice $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Determinaţi operatorul adjunct al lui u (notat cu u^*). ■

Soluţie. Observăm că $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2, \forall x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \ \forall y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ este chiar produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^2$. Mai mult

$$u(x) = A \cdot x \text{ unde } A = [A]_{B_c}^{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru a răspunde problemei se cunoaşte că $\left\{ e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T \right\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^2$. Pe de altă parte

$$u^*(y)=\sum_{j=1}^{2}<u(e_j),y>e_j \; =<u(e_1),y>e_1+<u(e_2),y>e_2 \text{ unde } y=(y_1,y_2)^T$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} u^*(y) &= <(1,2)^T,(y_1,y_2)^T>(1,0)^T+<(-1,0)^T,(y_1,y_2)^T>(0,1)^T \\ &= (y_1+2y_2)(1,0)^T-y_1(0,1)^T=(y_1+2y_2,-y_1)^T. \end{aligned}$$

Desigur se poate verifica că $<u(x),y>=<x,u^*(y)>\ \forall x,y\in\mathbb{R}^2$. Într-adevăr,

$$<(x_1-x_2,2x_1)^T,(y_1,y_2)^T>=<(x_1,x_2)^T,(y_1+2y_2,-y_1)^T>$$

sau echivalent $y_1(x_1-x_2)+2x_1y_2=x_1(y_1+2y_2)-x_2y_1$ egalitate adevărată. ■

Teoremă 6.1.2 Presupunem că $\dim_{\mathbb{R}} X=\dim_{\mathbb{R}} Y=n\in\mathbb{N}^*$. Următoarele au loc:

i) Dacă operatorul liniar $u:X\longrightarrow Y$ admite ca operator liniar adjunct pe $u^*:Y\longrightarrow X$, $B_e=\{e_1,...,e_n\}$ este o bază ortonormată a lui X iar $B_f=\{f_1,...,f_n\}$ este o bază ortonormată a lui Y atunci matricea lui u în raport cu B_e şi B_f este matricea transpusă conjugată a lui u^* în raport cu B_e şi B_f.

ii) Dacă u_1, $u_2:X\longrightarrow Y$ sunt operatori liniari iar λ_1, $\lambda_2\in K$ atunci

$$(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)^*=\overline{\lambda_1}u_1^*+\overline{\lambda_2}u_2^*.$$

iii) Dacă operatorul liniar $u:X\longrightarrow Y$ admite ca operator liniar adjunct pe $u^*:Y\longrightarrow X$ atunci $(u^*)^*=u$.

6.2 Endomorfisme autoadjuncte

Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian (real sau complex).

Definiţie 6.2.1 Endomorfismul $u:X\longrightarrow X$ se numeşte operator autoadjunct dacă $u=u^*$ (sau, echivalent $<u(x),y>=<x,u(y)>\ \forall x,y\in X$).

Unele proprietăţi pentru operatori autoadjuncţi sunt redate în:

Teoremă 6.2.1 Dacă $u:X\longrightarrow X$ este operator autoadjunct atunci

i) $\forall x\in X$ avem $<u(x),x>\in\mathbb{R}$;

ii) u are toate valorile proprii reale;

iii) dacă λ şi μ sunt valori proprii distincte atunci vectorii proprii corespunzători sunt ortogonali;

iv) dacă X este spaţiu euclidian real cu $\dim_{\mathbb{R}} X=n\in\mathbb{N}^*$ atunci matricea lui u corespunzătoare unei baze ortonormate este simetrică. Reciproc, dacă X este spaţiu euclidian real cu $\dim_{\mathbb{R}} X=n\in\mathbb{N}^*$ iar matricea lui $u:X\longrightarrow X$ corespunzătoare unei baze ortonormate este simetrică atunci u este operator autoadjunct.

Demonstraţie. i) Observăm că

$$z\overset{not\check{a}m}{=}<u(x),x>\underset{\text{scalar}}{\overset{\text{definiţia produsului}}{=}}\overline{<x,u(x)>}\underset{\text{autoadjunct}}{\overset{u}{=}}\overline{<u(x),x>}=\bar{z}.$$

ii) Cum λ este valoare proprie arbitrară a lui u deducem că există $x\neq 0_X$ astfel încât $u(x)=\lambda x$.

Evaluăm $< u(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda < x, x >= \lambda \|x\|^2 > 0$ şi obţinem

$$\lambda = -\frac{< u(x), x >}{\|x\|^2} \in \mathbb{R} \text{ deoarece } \|x\|^2 \in \mathbb{R} \text{ iar din } i) \text{ avem } < u(x), x >\in \mathbb{R}.$$

iii) Fie λ şi μ valori proprii distincte. Din

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valoare proprie rezultă că există } x &\neq 0_X \text{ astfel încât } u(x) = \lambda x \\ \mu \text{ valoare proprie rezultă că există } y &\neq 0_X \text{ astfel încât } u(y) = \mu y \end{aligned}$$

iar din $u : X \longrightarrow X$ este operator autoadjunct obţinem

$$< u(x), y >=< x, u(y) > \forall x, y \in X \text{ sau echivalent } < \lambda x, y >=< x, \mu y > .$$

Avem succesiv

$$< \lambda x, y >=< x, \mu y > \Longleftrightarrow \lambda < x, y >= \overline{\mu < y, x >} \overset{\mu=\overline{\mu}}{\Leftrightarrow} \lambda < x, y >= \mu < x, y >$$

iar în final

$$< x, y > (\lambda - \mu) = 0 \Longrightarrow < x, y >= 0$$

deoarece λ şi μ sunt valori proprii distincte. Mai mult $X_\lambda \perp X_\mu$.

iv) Fie $n = \dim_{\mathbb{R}} X$. Cum

$$\dim_{\mathbb{R}} X = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n \in \mathbb{N}^*$$

deducem din Teorema fundamentală de izomorfism I că $(X, \mathbb{R}) \overset{\text{izomorf}}{\simeq} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ astfel că putem considera $< x, y >= x^T y$ pentru orice $x, y \in X$. Fie $A \overset{\text{notăm}}{=} [A]_B^u$ matricea operatorului u într-o bază ortonormată B a lui X. Dacă $u(x) = Ax$ atunci

$$< u(x), y >=< x, u(y) > \forall x, y \in X$$

este echivalentă cu

$$< Ax, y >=< x, Ay > \Longleftrightarrow (Ax)^T y = x^T Ay \Longleftrightarrow x^T A^T y = x^T Ay, \forall x, y \in X,$$

relaţie din care se deduce că $A = A^T \Longrightarrow A$ este simetrică. Reciproca este lăsată ca exerciţiu.

Exerciţiu 6.2.1 Ştiind că $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$ defineşte un produs scalar real pe $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, să se arate că

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2) = (-2x_1 - x_2, 5x_1 + 3x_2)^T$$

este operator liniar autoadjunct în raport cu produsul scalar definit. ■

Soluţie. Notăm că

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) =< (x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T > .$$

Trebuie arătat că

$$< T(x), y >=< x, T(y) > \forall x = (x_1, x_2)^T, y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

sau mai mult

$$< T(x_1,x_2),(y_1,y_2)^T >=< (x_1,x_2)^T, T(y_1,y_2) > \ \forall (x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

echivalent cu

$$< (-2x_1-x_2, 5x_1+3x_2)^T,(y_1,y_2)^T >=< (x_1,x_2)^T,(-2y_1-y_2,5y_1+3y_2)^T > .$$

Pentru aceasta, observăm că

$$< (x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T >= 5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

egalitate ce uşurează calculele din

$$\begin{aligned} < (-2x_1-x_2, 5x_1+3x_2)^T,(y_1,y_2)^T > &= \begin{pmatrix} -2x_1-x_2 & 5x_1+3x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= y_2(x_1+x_2)+x_2y_1 \end{aligned} \tag{6.2}$$

şi

$$\begin{aligned} < (x_1,x_2)^T,(-2y_1-y_2,5y_1+3y_2)^T > &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2y_1-y_2 \\ 5y_1+3y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Rămâne să observăm că (6.2) şi (6.3) implică

$$< T(x),y >=< x,T(y) > \forall x = (x_1,x_2)^T, y = (y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

şi deci T este autoadjunct în raport cu produsul scalar definit. ■

R Dacă $u : X \to X$ este operator autoadjunct atunci există o bază ortonormată în raport cu care matricea lui u este o matrice diagonală.

Definiţie 6.2.2 O matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ se numeşte hermitică dacă $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ pentru orice $i,j = 1,...,n$.

Teoremă 6.2.2 Fie X spaţiu euclidian (real sau complex) finit dimensional nenul. Endomorfismul $u : X \longrightarrow X$ este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată este o matrice hermitică.

6.3 Metoda valorilor proprii de aducere la forma canonică

Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian real cu $\dim_{\mathbb{R}} X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $V : X \to \mathbb{R}$ formă pătratică.

R [**Etapa 1:**] Fixăm un reper $B \subset X$ şi scriem $A = [A]_B^V$ matricea lui V în reperul B.

R [**Etapa 2:**] Determinăm valorile proprii λ_i ($i = 1,...,p$ cu $p \leq n$) din relaţia

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

având ordinele de multiplicitate $m_{a_{\lambda_i}}$ iar pentru fiecare valoare proprie λ_i determinăm subspaţiile proprii corespunzătoare X_{λ_i}.

R [**Etapa 3:**] Pentru fiecare subspaţiu propriu X_{λ_i} determinăm câte un reper ortonormat B_i, $i = 1, ..., p$.

R [**Etapa 4:**] Forma canonică a funcţionalei pătratice date este

$$V(x) = \lambda_1 \omega_1^2 + ... + \lambda_p \omega_n^2$$

cu menţiunea că în această scriere fiecare valoare proprie apare de un număr de ori egal cu ordinul de multiplicitate algebrică. Reperul ortonormat în care se obţine această formă este $B = B_1 \cup ... \cup B_p$ iar ω_i sunt coordonatele lui x în reperul B.

Având acest rezultat, clasificarea funcţionalelor pătratice şi a matricelor pătratice poate fi redată în:

R Natura funcţionalei pătratice se determină cu ajutorul valorilor proprii astfel
i) dacă $\lambda_i > 0, \forall i = 1, ..., p$ atunci A şi V sunt pozitiv definite;
ii) dacă $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, ..., p$ şi $\exists \lambda_j = 0$ atunci A şi V sunt pozitiv semidefinite;
iii) dacă $\lambda_i < 0, \forall i = 1, ..., p$ atunci A şi V sunt negativ definite;
iv) dacă $\lambda_i \leq 0, \forall i = 1, ..., p$ şi $\exists \lambda_j = 0$ atunci A şi V sunt negativ semidefinite;
v) dacă există $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq p$, cu $\lambda_i > 0$ şi $\lambda_j < 0$ atunci A şi V sunt nedefinite.

Exerciţiu 6.3.1 Se consideră funcţionala pătratică

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ definită prin } V(x) = f(x,x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2.$$

Determinaţi forma canonică a funcţionalei pătratice precum şi reperul formei canonice. ■

Soluţie. Matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ este

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{6}{2} \\ \frac{6}{2} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii din relaţia

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Ecuaţia $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$ are soluţiile $\lambda_1 = 7$ cu $m_{a_{\lambda_1}} = 1$ şi $\lambda_2 = 1$ cu $m_{a_{\lambda_2}} = 1$ (Evident $\lambda_1 = 7 > 0$ şi $\lambda_2 = 1 > 0$ implică o formă pătratică pozitiv definită.).

Pentru fiecare valoare proprie determinăm subspaţiile proprii corespunzătoare.

Astfel, pentru $\lambda_1 = 7$ căutăm $v_{\lambda_1} = (m,n)^T$ din relaţia

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow m = n \text{ şi } v_{\lambda_1} = n(1,1)^T \Longrightarrow X_{\lambda_1} = Span\left((1,1)^T\right)$$

iar pentru $\lambda_2 = 1$ căutăm $v_{\lambda_2} = (a,b)^T$ din relaţia

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -b \text{ şi } v_{\lambda_1} = b(-1,1)^T \Longrightarrow X_{\lambda_2} = Span\left((-1,1)^T\right).$$

Pentru fiecare subspaţiu propriu determinăm câte un reper ortonormat:

$$\text{pentru } X_{\lambda_1} \Longrightarrow B_1 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\} \text{ iar pentru } X_{\lambda_2} \Longrightarrow B_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}.$$

Forma canonică a funcţionalei pătratice date este

$$V(x) = 7\omega_1^2 + \omega_2^2 \text{ cu matricea } D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reperul ortonormat în care se obţine această formă este

$$B = B_1 \cup B_2 = \left\{ f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, f_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}$$

iar ω_1, ω_1 sunt coordonatele lui x în reperul B, mai exact $x = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2$.

Verificăm relaţia $C^T AC = D$ sau echivalent

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pentru a observa că nu s-a greşit la calcule.

Este necesar să remarcăm că dacă aplicam metoda lui Jacobi s-ar fi obţinut $V(x) = \frac{1}{4}\omega_1^2 + \frac{4}{7}\omega_2^2$ rezultând concluzia că atunci când folosim metode distincte de aducere la forma canonică putem obţine expresii distincte. ■

6.4 Operatori liniari (endomorfisme) ortogonali

Fie $(X, <,>)$ spaţiu euclidian real finit dimensional.

Definiţie 6.4.1 Endomorfismul $u : X \longrightarrow X$ se numeşte operator liniar ortogonal dacă are loc $< u(x), u(y) > = < x, y >$ pentru orice $x, y \in X$.

Redăm câteva proprietăţi ale operatorilor liniari ortogonali:

Teoremă 6.4.1 Dacă $(X, <,>)$ spaţiu euclidian real finit dimensional iar $u : X \longrightarrow X$ este operator liniar ortogonal atunci

i) se conservă norma euclidiană:

$$\|u(x)\| = \|x\| \, \forall x \in X,$$

ii) se conservă distanţa dată de normă:

$$d(u(x), u(y)) = d(x, y) \, \forall x, y \in X,$$

iii) se conservă cosinusul: $\cos\left(\widehat{u(x), u(y)}\right) = \cos(\widehat{x, y}) \, \forall x, y \in X$.

Demonstraţie. i) Evident

$$\|u(x)\| = \sqrt{< u(x), u(x) >} = \sqrt{< x, x >} = \|x\|.$$

ii) Avem

$$d(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

iii) Clar

$$\cos\left(\widehat{u(x),u(y)}\right)=\frac{<u(x),u(y)>}{\|u(x)\|\,\|u(y)\|}=\frac{<x,y>}{\|x\|\,\|y\|}=\cos\left(\widehat{x,y}\right).$$

Definiţie 6.4.2 Matricea $A\in\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este numită matrice ortogonală dacă $A^T\cdot A=I_n$.

Teoremă 6.4.2 Un operator liniar este operator ortogonal dacă şi numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată este o matrice ortogonală.

Exerciţiu 6.4.1 Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului liniar ortogonal

$$U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, U(x)=\left(\frac{3}{5}x_1-\frac{4}{5}x_2,-\frac{4}{5}x_1-\frac{3}{5}x_2\right)^T, \forall x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2.$$

■

Soluţie. Avem

$$U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, U(x)=\left(\frac{3}{5}x_1-\frac{4}{5}x_2,-\frac{4}{5}x_1-\frac{3}{5}x_2\right)^T, \forall x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2$$

de unde

$$U(x)=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \text{ şi deci } A=[A]_{B_c}^{U}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

Remarcăm că

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

egalitate ce într-adevăr confirmă că U este ortogonal.

Determinăm valorile proprii

$$|A-\lambda I_2|=0\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}\frac{3}{5}-\lambda & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}-\lambda\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\lambda_1=1 \text{ şi } \lambda_2=-1.$$

Determinăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii:

- pentru $\lambda_1=1$ căutăm $v_{\lambda_1}=(m,n)^T$ din relaţia

$$\begin{pmatrix}\frac{-2}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow(m,n)^T=n\underbrace{(-2,1)^T}_{\overset{not\breve{a}m}{=}v_1}$$

- pentru $\lambda_1=-1$ căutăm $v_{\lambda_2}=(a,b)^T$ din relaţia

$$\begin{pmatrix}\frac{8}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow(a,b)^T=b\underbrace{\left(\frac{1}{2},1\right)^T}_{\overset{not\breve{a}m}{=}v_2}.$$

Mai mult, remarcăm că, în raport cu produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^2$, avem $<v_1,v_2>=0$.

■

Exerciţiu 6.4.2 Să se arate că determinantul matricei unui operator ortogonal relativ la o bază ortonormată este 1 (caz în care spunem că operatorul este rotaţie) sau este -1 (caz în care spunem că este simetric). ■

Soluţie. Într-adevăr, fie $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matricea unui operator ortogonal în raport cu o bază ortonormată. Din relaţia $A^T \cdot A = I_n$ deducem că

$$\det\left(A^T \cdot A\right) = \det I_n \Leftrightarrow \det A^T \det A = \det I_n \Longleftrightarrow (\det A)^2 = 1 \Longrightarrow \det A \in \{\pm 1\}.$$

■

7. Autoevaluare

7.1 Test 1

Exercițiu 7.1.1 În $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ se consideră elementele

$$x_1 = (1,2)^T, x_2 = (1,-1)^T, x_3 = (2,4)^T \ .$$

i) Să se extragă din $\{x_1,x_2,x_3\}$ un subsistem B care să constituie o bază în $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$. Câte repere se pot forma cu elementele bazei B?

ii) Să se determine coordonatele lui $x = (3,5)^T$ în baza B.

iii) Dacă $X = Span\,(x_1,x_2,x_3)$ atunci să se determine câte o bază ortonormată pentru subspațiile vectoriale X şi, respectiv $X^{\perp}$ în raport cu produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^2$ precum şi proiecţiile ortogonale ale vectorilor $x = (x_1,x_2)^T$ pe $X = Span\,(x_1,x_2,x_3)$, respectiv distanţa de la $x = (2,3)^T$ la $X^{\perp}$.

iv) Să se cerceteze dacă $(0,0)^T = u_1 + u_2$ cu $u_1 \in X_1 = Span\left((1,2)^T,(2,4)^T\right)$ şi $u_2 \in X_2 = Span\left((1,-1)^T,(2,4)^T\right)$ se poate realiza în cel puţin două moduri distincte. ■

Exercițiu 7.1.2 Să se determine matricea funcţionalei pătratice $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$V(x) = f(x,x) = 5x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ şi să se studieze natura funcţionalei pătratice V folosind metoda Jacobi. ■

Exercițiu 7.1.3 Fie F_0^1 mulţimea funcţiilor continue pe $[0,1]$ şi $<\cdot,\cdot>: F_0^1 \times F_0^1 \to \mathbb{R}$ definit prin

$$< f,g >= \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx, \forall f,g \in F_0^1.$$

Să se arate că $<\cdot,\cdot>$ defineşte un produs scalar pe $F_0^1 \times F_0^1$ şi să se calculeze $< f,g >$ pentru $f(x) = 2x^2 - x$ şi $g(x) = x^4 + 1$. ■

Exerciţiu 7.1.4 Se consideră endomorfismul $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definit prin

$$U(x_1,x_2,x_3)=(-x_3,-x_2,-x_1)^T.$$

i) Să se scrie matricea operatorului U în baza canonică din $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$.
ii) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
ii) Este operatorul liniar diagonalizabil? Dar jordanizabil? Justificaţi răspunsurile iar în caz afirmativ să se determine forma diagonală/jordan precum şi reperul în care U are această formă. ■

Exerciţiu 7.1.5 Pentru $w(x)=(y(x),z(x))^T\in\mathbb{R}^2$ se consideră operatorul $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definit prin

$$U(w)=Aw,\text{ unde } A=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ cu } \alpha\in\mathbb{R}$$

este matricea lui U în baza canonică din $\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.
i) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
ii) Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare $U(w)=w'$.
■

Exerciţiu 7.1.6 Să se determine
i) toate funcţionalele linire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Generalizare.
ii) funcţionala liniară $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(0,1,2)=1, f(1,0,2)=2 \text{ şi } f(1,2,0)=1.$$

■

Exerciţiu 7.1.7 Definiţi noţiunea de acoperire liniară a (unui) unei (spaţiu generat de o mulţime) mulţimi de vectori şi arătaţi că este subspaţiu vectorial. ■

Exerciţiu 7.1.8 Fie (X,K) şi (Y,K) subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial (V,K). Definiţi suma directă a subspaţiilor (X,K) şi (Y,K) şi arătaţi că este subspaţiu vectorial al lui (V,K). ■

Exerciţiu 7.1.9 În spaţiul vectorial (V,K) se consideră subspaţiile vectoriale V_1 şi V_2. Să se definească noţiunea de supliment direct şi să se arate că dacă V_1' este suplimentul direct al lui $V_1\cap V_2$ în V_1 iar V_2' este suplimentul direct al lui $V_1\cap V_2$ în V_2 atunci $V_1'\cap V_2=V_2'\cap V_1=\{0_V\}$.
■

Exerciţiu 7.1.10 Fie X un spaţiu euclidian real şi un operator liniar $U\in L(X,X)$. Scrieţi definiţia operatorului ortogonal U. ■

Exerciţiu 7.1.11 Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian real cu $\dim_{\mathbb{R}}X=n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $u:X\longrightarrow X$ este operator liniar autoadjunct iar A este matricea lui u corespunzătoare unei baze ortonormate atunci să se arate că $\det\left(AA^T\right)=(\det A)^2$. ■

7.2 Test 2

Exerciţiu 7.2.1 Fie următoarele sisteme de vectori

$$\begin{aligned} F &= \left\{f_1 = (-2,1,1)^T, f_2 = (3,-1,1)^T, f_3 = (1,1,-1)^T\right\} \\ G &= \left\{g_1 = (2,1,0)^T, g_2 = (0,-1,1)^T, g_3 = (1,1,0)^T\right\}. \end{aligned}$$

i) Să se arate că F, G sunt repere în $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
ii) Să se determine matricea de trecere de la G la F şi de la F la G.
iii) Dacă $x \in \mathbb{R}^3$ este astfel încât $x_F = (4,-2,1)^T$ atunci să se determine x_G. ■

Exerciţiu 7.2.2 Considerăm spaţiul vectorial $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ înzestrat cu produsul scalar canonic şi

$$W = span\left\{(1,1,i)^T, (1,1,-i)^T\right\} \subset (\mathbb{C}^3, \mathbb{C}).$$

Să se determine o bază ortonormată în W. ■

Exerciţiu 7.2.3 Să se discute după valorile parametrului λ natura funcţionalei pătratice

$$V(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 20x_3^2 + 8\lambda x_1 x_2 - 8x_1 x_3 + 16x_2 x_3.$$

■

Exerciţiu 7.2.4 Pentru $w(x) = (y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^2$ se consideră operatorul $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definit prin

$$U(w) = Aw, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R}$$

este matricea lui U în baza canonică din $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
i) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
ii) Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare $U(w) = w'$.
■

Exerciţiu 7.2.5 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x) = A \cdot x$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
i) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
ii) Este operatorul liniar diagonalizabil? Dar jordanizabil? Justificaţi răspunsul. În caz afirmativ să se determine forma diagonală/jordan precum şi baza în care U are această formă.
■

Exerciţiu 7.2.6 Să se studieze dacă operatorul $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definit prin

$$U(x,y)=(4x+y,2x-y)^T$$

este inversabil şi să se calculeze inversul său. ■

Exerciţiu 7.2.7 Fie X,Y,S subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial (V,K). Ce înseamnă că S este suma directă a lui X şi Y? ■

Exerciţiu 7.2.8 Se consideră un spaţiu euclidian X şi un operator liniar $U\in L(X,X)$. Scrieţi definiţia operatorului autoadjunct U. ■

Exerciţiu 7.2.9 Fie $(X,<,>)$ spaţiu euclidian (real sau complex). Dacă $u:X\longrightarrow X$ este operator liniar autoadjunct atunci să se arate că $\forall x\in X\setminus\{0_X\}$ avem $<u(x),x>\cdot i$ este număr pur imaginar. ■

7.3 Test 3

Exerciţiu 7.3.1 Fie $A=(a_{ij})_{i,j=1,2}\in\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $trA\overset{not}{=}a_{11}+a_{22}$ urma matricei A, $(X,\mathbb{C})$ spaţiul vectorial al matricelor pătratice de tip 2×2 de urmă 0 de componente numere complexe peste corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$:

$$X=\left\{A=(a_{ij})_{i,j=1,2}\in M_{2\times 2}(\mathbb{C})\middle|\,trA=0\right\}$$

şi

$$Y=Span_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\text{ subspaţiu vectorial al lui }(X,\mathbb{C}).$$

Dacă pe $(X,\mathbb{C})$ se defineşte $<A,B>=tr(AB^*)$ atunci:

i) să se arate că $<A,B>$ este produs scalar;

ii) să se determine o bază ortonormată pentru $Y^\perp$. ■

Exerciţiu 7.3.2 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y)=4x_1y_1+x_1y_2-x_2y_2+x_2y_1$$

unde $x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2$, $y=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$.

i) Să se arate că f este funcţională biliniară simetrică.

ii) Să se determine matricea lui f în reperul $B=\left\{b_1=(-1,3)^T,b_2=(2,1)^T\right\}$.

iii) Să se scrie funcţionala pătratică asociată lui $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ şi să se studieze natura lui V folosind metoda lui Jacobi de aducere la forma canonică. ■

Exerciţiu 7.3.3 Fie $f : \mathscr{P}_3[X] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(p) = \int_0^1 p(x)\,dx.$$

i) Să se arate că f este funcţională liniară.
ii) Să se scrie matricea funcţionalei liniare f în baza canonică din $(\mathscr{P}_3[X], \mathbb{R})$. ■

Exerciţiu 7.3.4 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x) = A \cdot x$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
i) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
ii) Este operatorul liniar diagonalizabil? Dar jordanizabil? Justificaţi răspunsul. În caz afirmativ să se determine forma diagonală/jordan precum şi reperul în care U are această formă. ■

Exerciţiu 7.3.5 Fie $U_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U_1(x,y) = (x-y, x+y, -x+y)^T$ şi $U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U_2(x,y,z) = (x+y, y+z, x)^T$. Să se calculeze $U_2 \circ U_1$. ■

Exerciţiu 7.3.6 Fie (X,K) şi (Y,K) subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial (V,K). Arătaţi că $(X \cap Y, K)$ este subspaţiu vectorial al lui (V,K). ■

Exerciţiu 7.3.7 Fie X, Y spaţii euclidiene reale şi un operator liniar $U \in L(X,Y)$. Scrieţi teorema privind unicitatea operatorului adjunct. ■

Exerciţiu 7.3.8 Fie $(X, <,>)$ spaţiu euclidian (real sau complex). Dacă $u : X \longrightarrow X$ este operator liniar autoadjunct iar $\lambda \neq 0$ este valoare proprie oarecare a lui U atunci să se arate că λi este număr complex pur imaginar. ■

7.4 Test 4

Exerciţiu 7.4.1 Dacă $(\mathscr{P}_2[X], \mathbb{R})$ este spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult doi peste corpul numerelor reale,

$$B = \left\{a_1 = 1, a_2 = 1+t, a_3 = t^2\right\} \text{ reper în } (\mathscr{P}_2[X], \mathbb{R})$$

şi

$$p_1 = a_1 + 2a_2 + a_3,\ p_2 = a_1 - 2a_3,\ p_3 = 2 + 2t + 3t^2 = 2a_2 + 3a_3,\ p_4 = a_2 + a_3$$

atunci:
i) să se arate că p_1, p_2, p_3, p_4 generează spaţiul $\mathscr{P}_2[X]$;
ii) să se extragă un reper B' din $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$;

iii) să se determine coordonatele lui $p = 2a_1 + a_2$ în reperul B';

iv) să se arate că $< \cdot, \cdot >: \mathscr{P}_2[X] \times \mathscr{P}_2[X] \to \mathbb{R}$ definit prin $< p,q >= \int_0^1 p(t)\,q(t)\,dt$ defineşte un produs scalar şi să se determine o bază ortonormată B_o pornind de la baza B', în raport cu produsul scalar astfel definit. ■

Exerciţiu 7.4.2 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x) = A \cdot x$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

i) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.

ii) Este operatorul liniar diagonalizabil? Dar jordanizabil? Justificaţi răspunsul. În caz afirmativ să se determine forma diagonală/jordan precum şi baza în care U are această formă. ■

Exerciţiu 7.4.3 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = 2x_1y_2 - x_2y_2 + 4x_2y_1$$

unde $x = (x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

i) Să se arate că f este funcţională biliniară. Este f biliniară simetrică? Dacă da, justificaţi.

ii) Să se determine matricea lui f în reperul $B = \left\{ b_1 = (-1,3)^T, b_2 = (2,1)^T \right\}$. ■

Exerciţiu 7.4.4 Fie $f : \mathscr{P}_3[X] \times \mathscr{P}_3[X] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(p,q) = \int_0^1 p'(x)\,q'(x)\,dx.$$

i) Să se arate că f este funcţională biliniară simetrică.

ii) Să se scrie matricea funcţionalei biliniare f în reperul canonic din $(\mathscr{P}_3[X], \mathbb{R})$. ■

Exerciţiu 7.4.5 Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + 2x_3$.

i) Să se arate că f este funcţională liniară.

ii) Să se se determine $Ker f$, $Im f$, $\dim_{\mathbb{R}} Ker f$ şi $\dim_{\mathbb{R}} Im f$.

iii) Să se scrie matricea funcţionalei liniare f în reperul

$$B = \left\{ (0,1,1)^T, (1,0,1)^T, (1,1,0)^T \right\} \subset \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right).$$

■

Exerciţiu 7.4.6 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definit prin

$$U(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 + x_2, 2x_2, x_4, -x_3 + 2x_4)^T.$$

i) Să se scrie matricea operatorului U în baza canonică din $\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$.
ii) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
iii) Este operatorul liniar diagonalizabil? Dar jordanizabil? Justificaţi răspunsurile iar în caz afirmativ să se determine forma diagonală/jordan precum şi baza în care U are această formă. ■

Exerciţiu 7.4.7 Fie $a > 0$ parametru real, $p \in \mathbb{N}^*$ şi $f : [\sqrt[p+1]{a}, +\infty) \to [\sqrt[p+1]{a}, +\infty)$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{p+1}\left[px + \frac{a}{x^p}\right].$$

i) Să se arate că f este contracţie;
ii) Să se arate că unicul punct fix al lui f este $\sqrt[p+1]{a}$;
iii) Să se găsească o aproximare a lui $\sqrt[p+1]{a}$ cu o eroare de cel mult $\varepsilon > 0$. ■

Exerciţiu 7.4.8 Să se enunţe şi demonstreze Teorema de existenţă a suplimentului. ■

Exerciţiu 7.4.9 Definiţi suma a două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial (V, K) şi arătaţi că este subspaţiu vectorial în (V, K). ■

Exerciţiu 7.4.10 Presupunem că $(X, <,>)$ este spaţiu euclidian (real sau complex), $u : X \longrightarrow X$ este operator liniar autoadjunct, x_λ este un vector propriu de normă 1 al lui u corespunzător valorii proprii λ iar x_μ este un vector propriu de normă 1 al lui u corespunzător valorii proprii μ. Să se arate că $< ix_\lambda + x_\mu, x_\lambda + ix_\mu >= 0$ pentru $\lambda \neq \mu$. ■

7.5 Test 5

Exerciţiu 7.5.1 Se consideră endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x) = A \cdot x$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
i) Să se determine spectrul şi subspaţiile proprii ale operatorului liniar U.
ii) Este operatorul liniar diagonalizabil? Dar jordanizabil? Justificaţi răspunsul. În caz afirmativ să se determine forma diagonală/jordan precum şi baza în care U are această formă.
■

Exerciţiu 7.5.2 Fie $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operator definit prin $U(x) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)^T$ pentru orice $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$.
i) Să se arate că U este operator liniar autoadjunct;
ii) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului liniar autoadjunct U;
iii) Să se determine nucleul $KerU$ şi imaginea ImU ale operatorului liniar autoadjunct U precum şi $\dim_{\mathbb{R}} KerU$, respectiv $\dim_{\mathbb{R}} ImU$. ■

Exerciţiu 7.5.3 Fie A matricea endomorfismul $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)^T$ în baza canonică din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Să se determine A^n. ■

Exerciţiu 7.5.4 Să se discute după valorile parametrului λ natura funcţionalei pătratice

$$V(x) = 3\lambda x_1^2 + (3\lambda + 9)x_3^2 - 12x_1x_2.$$

■

Exerciţiu 7.5.5 Fie matricea

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\alpha + 3 \end{pmatrix}.$$

i) Să se discute (fără aflarea bazei) în funcţie de parametrul α natura funcţionalei pătratice care are matricea $A(\alpha)$.

ii) Pentru operatorul care are matricea $A(1)$ să se afle: forma canonică Jordan, baza Jordan şi să se verifice formula de schimbare a matricei la schimbarea bazei cu regula pivotului. ■

Exerciţiu 7.5.6 Fie $U : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2[X]$ definit prin

$$U(A)(x) = ax^2 + (b-c)x + d, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Să se se determine $KerU$, ImU, $\dim_{\mathbb{R}} KerU$ şi $\dim_{\mathbb{R}} ImU$. ■

Exerciţiu 7.5.7 Să se arate că $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x, y) = (x, x+y, y)^T$ este operator liniar. ■

Exerciţiu 7.5.8 Să se arate că $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $U(x, y) = (x, xy, y)^T$ nu este operator liniar. ■

Exerciţiu 7.5.9 Să se arate că $U : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definit prin

$$U\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b, c+d)^T$$

este operator liniar. ■

Exerciţiu 7.5.10 Să se studieze dacă operatorul liniar $U : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definit prin

$$U\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a+d, b+c, d)^T$$

este inversabil. ■

8. Bibliografie

[1] L. Bădin, M. Cărpuşcă, G. Ciurea şi R. Şerban, *Algebră liniară culegere de probleme*, Editura ASE, 1999.

[2] Gh. Cenuşă, V. Burlacu, R. Coroi, M. Toma şi A. Filip, *Matematici aplicate în economie*, Tipografia A.S.E., 1990.

[3] Gh. Cenuşă, A. Filip, C. Raischi, ş.a., *Matematici pentru economişti*, Editura Cison, Bucureşti, 2000.

[4] Gh. Cenuşă şi C. Neculăescu, *Elemente de algebră liniară pentru economişti*, Editura A.S.E., Bucureşti, 1998.

[5] Gh. Cenuşă, A. Filip, C. Raischi, D. Baz, M. Toma, V. Burlacu, I. Săcuiu şi I. Mircea, *Matematici pentru economişti*, Editura Cison, Bucureşti, 2000.

[6] D.-P. Covei, *Matematici aplicate în economie*, Editura Academica Brâncuşi**,** Târgu-Jiu, 2009.

[7] S. Dedu şi F. Şerban, *Matematici aplicate în economie*, Editura Teocora, Bucureşti, 2009.

[8] J. Defranza şi G. Gagliardi, *Introduction to linear algebra with applications*, 1st Edition, Tata Mcgraw Hill Education**,** 2012**.**

[9] C. Neculăescu şi O.Vegheş, *Introducere în algebra liniară*, Editura ASE, Bucuresti, 2005.

[10] O. Popescu, *Matematici aplicate în economie*, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[11] I. Purcaru, *Elemente de algebră şi programare liniară*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1982.

[12] D. Simms, *Linear Algebra*, School of Mathematics, Trinity College, Dublin, Course 211, 2009.

[13] A. Toma, *Algebră liniară: culegere de probleme*, Editura Economică, Bucureşti, 2002.

[14] I. Vladimirescu şi M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Universitaria, Craiova, 1994.

[15] G. Vraciu, *Algebră liniară şi complemente de analiză matematică*, Editura Reprograph, Craiova, 2001.