Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/9/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
Punkte	3	3	4	3	7	5	2	3	3	2	5	10	5	2	3	4	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.
2. Ein *archimedisch* angeordneter Körper K.
3. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
4. Eine *gerade* Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
5. Der i-te *Standardvektor* im K^n.
6. Der *Rang* einer linearen Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow W$$
zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Fundamentalsatz der Algebra*.
2. Die *Taylor-Abschätzung*.
3. Der Satz über die Beschreibung einer linearen Abbildung bei einem Basiswechsel.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \times N) \cap (M \times B) = A \times B\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere Vor- und Nachteile des axiomatischen Aufbaus der Mathematik.

Aufgabe * (7 (1+1+2+3) Punkte)

Der Planet Trigeno wird von einer einzigen Tierart bevölkert, den Trigos. Diese Tierart besitzt drei Geschlechter: Antilopen (A), Büffel (B) und Cnus (C). Bei der Paarung treffen zwei Individuen zusammen und erzeugen ein neues Individuum. Wenn das Paar gleichgeschlechtlich ist, so ist das Ergebnis wieder dieses Geschlecht, wenn das Paar gemischtgeschlechtlich ist, so ist das Ergebnis das dritte unbeteiligte Geschlecht. Die Tiere gehören einer eindeutigen Generation an.

1. Die n-te Generation bestehe nur aus einem einzigen Geschlecht. Zeige, dass jede weitere Generation auch aus diesem Geschlecht besteht.
2. Die n-te Generation bestehe nur aus zwei Individuen unterschiedlichen Geschlechts. Zeige, dass diese Geschlechter mit ihrer Generation aussterben.
3. Es gelte nun die zusätzliche Bedingung, dass jedes Paar nur einen Nachkommen erzeugen darf. Zeige, dass die Tierart genau dann aussterben muss, wenn es in einer Generation nur zwei oder weniger Individuen gibt.
4. Es gelte nun die zusätzliche Bedingung, dass jedes Paar nur einen Nachkommen erzeugen darf, und in jeder Generation gebe es genau drei Individuen. Beschreibe die möglichen Generationsabfolgen. Welche Periodenlängen treten auf?

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei

$$P = X^3 + bX^2 + cX + d$$

ein normiertes Polynom über einem Körper K. Es seien u, v, w drei (verschiedene) Zahlen aus

K. Zeige, dass diese drei Zahlen genau dann Nullstellen von P sind, wenn sie das Gleichungssystem

$$uvw = -d\,,$$
$$uv + uw + vw = c\,,$$
$$u + v + w = -b\,,$$

erfüllen.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die harmonische Reihe divergiert.

Aufgabe * (3 (1+1+1) Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige die folgenden Aussagen.

1. Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.
2. Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.
3. Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung
$$f(x) \leq c$$
gilt, so gilt auch
$$f(a) \leq c\,.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1}. Was ist an folgendem „Beweis" für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y))}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe * (10 (1+2+3+4) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = e^x - x^e\,.$$

1. Bestimme die erste und die zweite Ableitung von f.
2. Bestimme die Taylor-Entwicklung von f im Punkt e vom Grad ≤ 2.
3. Bestimme die Nullstellen von f.
4. Bestimme die lokalen Extrema von f.

Aufgabe * (5 Punkte)

Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes des $\mathbb{Q}^4$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige direkt (ohne charakteristisches Polynom), dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.