Prof. Dr. M. Chimani
L. Enz, J. Kirstein, T. Oelschlägel, F. Stutzenstein, N. Troost
https://kreuzerl.tcs.uos.de

Universität Osnabrück
Theoretische Informatik
Sommersemester 2020

Übungsblatt 8 zur Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 19. Juni 2020 Kreuzerl-Deadline: 28. Juni 2020

Die Aufgaben auf diesem Blatt beziehen sich auf den Vorlesungsstoff bis inklusive Kapitel 7.5

Aufgabe 8.1 Fermats ~~Vermutung~~ großer Satz

Fermat formulierte die Vermutung, dass es keine positiven natürlichen Zahlen a, b, c, n gäbe, mit $n > 2$, so dass $a^n = b^n + c^n$. Dies zu beweisen dauerte über 350 Jahre.

Angenommen, Sie hätten schon vor Andrew Wiles' Beweis auf dem Jahr 1995 ein Programm $a(m)$ zur Verfügung gehabt, das:

- 0 liefert, falls m kein gültiges Programm ist,
- 1 liefert, falls m ein gültiges Programm ist, das immer anhält,
- 2 liefert, falls m ein gültiges Programm ist, das bei einigen aber nicht allen Eingaben anhält,
- 3 liefert, falls m ein gültiges Programm ist, das nie anhält.

Wie hätten Sie $a(m)$ benutzen können, um Fermats Vermutung zu beweisen und den Ruhm einzuheimsen?

Aufgabe 8.2 Laufzeit

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus $\mathcal{A}$, der als Eingabe die Zahl $x \in \mathbb{N}$ liest:

```
y := 3
for i = 1, ..., x:
   y := y * y * y
return y
```

(a) Welche Funktion berechnet $\mathcal{A}$?

(b) Betrachten Sie das uniforme Kostenmaß sowohl für konstante als auch für „ausreichend große" Speicherzellengröße. Was ist die Laufzeit des Algorithmus? Warum ist das uniforme Kostenmaß untauglich zur Analyse?

(c) *Bonusfrage (nicht notwendig für das Kreuzerl)*: Was ist die Laufzeit von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{O}$-Notation mit logarithmischem Kostenmaß? *Tipp*: Die Kosten für „$y * y * y$" sind $3(\log y)^2$.

Aufgabe 8.3 Disjunktive Normalform

Eine Formel F in *disjunktiver Normalform* (DNF) besteht aus einer Disjunktion (Veroderung), von Konjunktionstermen d. h. $F = T_1 \vee T_2 \vee \ldots \vee T_m$, wobei jeder Konjunktionsterm eine Konjunktion (Verundung) von Literalen ist, also $T_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \ldots \wedge \ell_{i,k_i}$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Ein Literal ist eine boolesche Variable oder die Negation einer solchen.

Wir betrachten das Entscheidungsproblem DnfSat:

Gegeben: Eine Formel F in DNF.
Frage: Ist F erfüllbar?

(a) Geben Sie eine Ja- und eine Nein-Instanz für DnfSat mit jeweils genau zwei Variablen an.

In der Vorlesung wurden Zeugen für Ja-Instanzen definiert. Analog kann man Zeugen auch für Nein-Instanzen definieren. Man spricht dementsprechend von *Ja-Zeugen* und *Nein-Zeugen*. Geben Sie auch Ja- bzw. Nein-Zeugen für Ihre Ja- bzw. Nein-Instanzen an.

(b) Wie kann man DnfSat in Linearzeit entscheiden?

(c) Aus (b) folgt DnfSat $\in P$. Wo liegt der Fehler in folgendem Beweis?

Theorem. Sat *kann in polynomieller Zeit gelöst werden.*

Beweis. Gegeben eine beliebige Formel (z. B. in KNF). Wir können diese Formel in DNF umformen, und dann das Erfüllbarkeitsproblem in polynomieller Zeit lösen. Daher haben wir eine korrekte Antwort für das allgemeine Sat-Problem. □

Aufgabe 8.4 Ein Märchen

Es war einmal ein alter König, der lebte mit seinen drei Söhnen in einem armen, kleinen Königreich. Als er merkte, dass sein Leben sich dem Ende zuneigte, holte er seine Nachkommen zu sich und sprach: »Meine lieben Söhne, einer von Euch wird bald meine Nachfolge antreten müssen. Bisher ging ich davon aus, dass es nach alter Väter Sitte mein Erstgeborener sein würde. Doch als ich gestern durch den Burghof spazierte, kam plötzlich ein Eichhörnchen auf mich zugesprungen, das sagte: *Vergiss nicht die Baba Yaga!* Und damit war es auch schon wieder verschwunden.«
Die Prinzen waren sehr verwirrt ob dieser Worte und fragten nach, was es mit der Baba Yaga auf sich habe. Der König begann zu erzählen: »Vor langer, langer Zeit, als ich noch ein unerfahrener Wanderritter war, begann ich aus Feigheit einen Fehler und verärgerte damit die Hexe Baba Yaga. Daraufhin verwünschte sie mich, dass nur ein wahrer Held meine Nachfolge antreten könne. Bisher glaubte ich nicht daran, dass diese Worte Gewicht trügen. Doch seit ich heute das Eichhörnchen sprechen hörte, denke ich darüber anders. Darum geht hinaus in die Welt, erlebt Abenteuer und kehrt als wahre Helden zurück, damit ihr des Thrones würdig seid!«
Der Erstgeborene aber sprach: »Ich glaube nicht an Hexen und Verwünschungen! Ich bleibe hier.«
Der Zweitgeborene sprang auf und sattelte sein Ross. Aber noch bevor er zum Burgtor hinaus war, scheute der Rappe und warf ihn ab, sodass er nun nur mehr am Krückstock gehen konnte.
Da ging der Letztgeborene zu seinem Mentor, dem greisen Hofgelehrten, und sprach: »Ich habe kein Schwert und auch kein Pferd. Bitte helft mir, trotzdem ein wahrer Held zu werden!« – Der Greis überlegte einen Moment: »Vor nicht allzu langer Zeit wurde die Prinzessin des benachbarten Königreichs von einem Drachen entführt und auf eine verwunschene Insel gebracht. Rettest du die Prinzessin, bist du ein wahrer Held! Aber keine Sorge, du wirst nicht ohne Schwert gegen einen Drachen kämpfen müssen, denn er hat sehr schnell wieder das Weite gesucht. Aber vor seinem Verschwinden hat er den wildesten Zolltroll damit beauftragt, die einzige Brücke auf die Insel zu bewachen. Einige haben schon versucht, den Troll zu bekämpfen, aber noch keiner hat es bisher geschafft. Ich bin in meinem Leben schon vielen Trollen begegnet und weiß daher, dass gerade Zolltrolle von Natur aus bestechlich sind. Du wirst ihn einfach fragen können, wie viel Goldmünzen er verlangt, um dir den Weg zur Prinzessin zu gewähren.«
Der junge Prinz rief aus: »Ach welche Schande! Gold habe ich doch auch keines. Woher nehme ich genügend Gold, ohne unehrlich zu werden?«
Da sprach der alte Meister: »Verzage nicht, mein treuer Schüler. Im Umfeld der Insel haben sich viele Räuber niedergelassen, denen es gefiel, in der Nähe eines Drachens zu hausen. Man weiß von jedem einzelnen, dass er zu jeder Zeit einen gewissen Goldbetrag mit sich führt: Der *Dreiste Dolfried* hat beispielsweise stets drei Goldmünzen in der Manteltasche, der *Zähe Zabel* trägt zehn Goldmünzen im Stiefelabsatz.«
Er ging kurz in sein Hinterzimmer und kam mit einer langen Liste zurück, sowie mit einem großen Bündel, gefüllt mit kleinen Fläschchen: »Nimm diese Stärkungstränke. Sie werden dir

solche Kräfte verleihen, dass du es auch ohne Ross und Schwert mit den Räubern aufnehmen kannst. Doch beachte: Du benötigst für jeden Schurken eine unterschiedliche Anzahl von Tränken! Ich habe dir auf dieser Liste alles notiert, was ich über jeden der Räuber weiß, insbesondere die Größe seines Goldvorrats und die Anzahl von Tränken, die nötig sind, um ihn zu überwältigen. Aber nutze die Tränke mit Bedacht, denn dies sind alle, die ich dir geben kann.«

TROLLZOLL
Gegeben: Eine Anzahl $Z \in \mathbb{N}$ von Stärkungstränken, eine Menge von n Räubern $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und die vom Zolltroll geforderte Goldsumme $G \in \mathbb{N}$.
Gefragt: Gibt es eine Menge $R' \subseteq R$, sodass $\sum_{(z,g)\in R'} z \leq Z$ und $\sum_{(z,g)\in R'} g \geq G$?

Zeigen Sie, dass TROLLZOLL *NP*-vollständig ist.

Aufgabe 8.5 Noch ein Märchen

Es war einmal ein böser Zauberer, der lebte in einer schwarzen Burg, umgeben von einem großen, dichten Wald. Nachdem ihm eines Morgens beim Frühstück eine Fliege in die Suppe geflogen war, beschloss er, alles Lebendige aus der Umgebung seiner Burg zu entfernen, angefangen bei dem Wald. Er braute einen Gifttrank, der innerhalb von fünf Tagen jeden Baum des Waldes töten würde und ließ ihn von einem Schwarm Raben über dem Wald verteilen.
Das hörte der König des benachbarten Königreichs und rief sofort seinen Hofmagier zu sich: »Bereite mir ein Gegengift und rette unseren Wald!« Der Hofmagier verkroch sich für drei Tage und drei Nächte in seiner Kammer, bis er mit einer kleinen Ampulle wieder zum Vorschein kam und sagte: »Eure Majestät, ich habe mein Bestes gegeben. Leider ist das Gift des bösen Zauberers so stark, dass es sich mit meinem Gegengift nicht vollständig aufheben lässt. Vielmehr verstärkt es sogar die Wirkung des Gifts, wenn es auf zwei Bäume angewendet wird, deren Äste sich berühren. Die gute Nachricht ist jedoch, dass ich vor zwei Tagen meine Tauben losgeschickt habe, um eine Karte des Waldes anzufertigen. Sie sind inzwischen zurückgekehrt und auf dieser Karte sind alle Bäume des Waldes eingezeichnet, zusammen mit Markierungen, ob je zwei Bäume sich berühren.«
Der König war erschüttert ob dieser so unerwartet schlechten Kunde, war sein Hofmagier doch sonst der Beste seines Fachs. Doch so leicht wollte er sich nicht aus der Ruhe bringen lassen und so rief er aus: »Nun, wenn wir nicht den gesamten Wald retten können, so wollen wir doch wenigstens das Beste tun und so viele Bäume wie möglich retten!«
Der Hofmagier nickte zustimmend und sagte: »Ich lasse sofort nach den Gelehrten schicken, um zu berechnen, für wie viele Bäume mein Gegengift reichen soll. Kennen sie wohl eine effiziente Möglichkeit, die Anzahl zu bestimmen?«

MÄRCHENWALD
Gegeben: Eine Karte des Waldes, auf der es für je zwei Bäume eine Markierung gibt, ob sie sich berühren und eine Mindestanzahl von k Bäumen, die geheilt werden sollen.
Gefragt: Kann man mindestens k Bäume retten?

Formulieren Sie das Problem MÄRCHENWALD als Graphenproblem. Zeigen Sie, dass dieses *NP*-vollständig ist. Welche Antwort werden die Gelehrten dem Hofmagier geben?

Aufgabe 8.6 SAT-Formulierung

Sauron ist bestürzt: Sein Monokel ist verschwunden! Nur unter großer Anstrengung ist er noch in der Lage, seine geliebten Groschenhefte zu lesen. Inzwischen ist sein Auge schon ganz rot und gereizt.

Es kommen nicht viele in Frage, die Interesse daran hätten, einem aufrichtigen Heerführer des Schreckens wie ihm so etwas anzutun. *Die Gefährten* sind ihm schon immer suspekt; so wäre es nicht das erste Mal, dass Frodo etwas geklaut hätte, was ihm gehört. Und dieser Tunichtgut Legolas droht ihm ständig an, ihm mit Pfeilen ins Auge zu piksen. Letztlich wirft sicherlich auch das hässlichste aller Wesen – Gollum – schon lange ein Auge auf sein Monokel.

Traurig betrachtet Sauron *die zwei Türme* an ungelesenen Romanen auf seinem Schreibtisch. Nach einiger Überlegung schickt er seine Schwarzen Reiter aus, um den Übeltäter zu finden und so *die Rückkehr des Königs* der dunklen Mächte zu gewährleisten. Sie berichten ihm über die Ereignisse der letzten vier Tage:

(a) Sauron war sowohl vor vier als auch vor drei Tagen am Fluss Isen. Danach war er an keinem Ort aus $O := \{\mathsf{Auenland}, \mathsf{Bruchtal}, \mathsf{Isen}\}$.

(b) Legolas und Gollum waren mindestens einmal am selben Tag am selben Ort aus O.

(c) Frodo war nie an zwei aufeinanderfolgenden Tagen am selben Ort aus O.

(d) Es waren nie mehr als zwei Personen aus $P := \{\mathsf{Frodo}, \mathsf{Gollum}, \mathsf{Legolas}, \mathsf{Sauron}\}$ am selben Tag am selben Ort aus O.

(e) Frodo war in den letzten vier Tagen an jedem Ort aus O mindestens einmal.

(f) Immer wenn Frodo an einem Ort aus O war, war Gollum dort einen Tag später auch.

(g) In Summe befanden sich am Fluss Isen und im Auenland nie mehr als drei Personen pro Tag.

(h) An jedem Tag befand sich jede Person aus P an höchstens einem Ort aus O.

- Frodo, Gollum und Legolas waren an jedem der betrachteten Tage an Orten aus O.
- Die Anzahl der Tage, an denen Legolas im Auenland war, ist identisch zur Anzahl der Tage, an denen Frodo am Isen war <u>und</u> zur Anzahl der Tage, an denen Gollum am Fluss Isen war.
- Gollum war vor zwei Tagen nicht am Fluss Isen.
- Die Liste der Orte, die Legolas in den letzten vier Tagen besucht hat ist palindromisch (natürlich nur, wenn man einen Ort als einzelnes Symbol auffasst).
- Eine Person konnte nur dann in den Besitz des Monokels gelangen, wenn sie am selben Tag am selben Ort aus O war wie die Person, die zuvor das Monokel besaß.
- Das Monokel wechselt dreimal den Besitzer, davon mindestens einmal im Auenland.
- Am Morgengrauen vor vier Tagen hatte Sauron das Monokel noch selbst.

Aufgabenstellung:

(a) Kann Sauron herausfinden, wer das Monokel besitzt? Wenn ja, wer besitzt es?

(b) Stellen Sie die Aussagen **(a)**–**(h)** mittels einfacher aussagenlogischer Formeln (d. h. mit $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) dar. Sie dürfen auch Quantorensymbole ($\exists$ und $\forall$) mit Einschränkungen auf die auszuwählenden Elemente verwenden, wenn sie erklären können, wie man diese in Ausdrücke der obigen Form umwandelt.

Benutzen Sie dazu Variablen $x_{p,t,o}$ für $p \in P, t \in T := \{1, ..., 4\}$ und $o \in O$ mit der folgenden Interpretation: $x_{p,t,o}$ ist genau dann wahr, wenn Person p vor t Tagen am Ort o war.

Bonusfrage: Welche zusätzlichen Variablen sind nötig, um die Fragestellung von Aufgabenteil **(a)** als SAT-Instanz zu modellieren?

Isoja kaloja kannattaa pyyt vaikkei saisikaan.