Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/41/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	4	0	3	2	0	4	0	8	3	4	8	1	4	0	0	51

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Umkehrabbildung* zu einer bijektiven Abbildung $F: L \rightarrow M$.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.

3. Eine *fallende* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.

5. Das *Unterintegral* einer nach unten beschränkten Funktion
$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

6. Die *beschreibende Matrix* zu einer linearen Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow W$$
zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W bezüglich einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ von W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.

2. Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.

3. Der Satz über den Zusammenhang zwischen der Verknüpfung linearer Abbildungen und der Matrizenmultiplikation (genaue Formulierung mit Basen).

Aufgabe (2 Punkte)

Betrachte die Aussage: „Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren“. Rasiert er sich selbst?

Aufgabe * (2 Punkte)

Frau Maier-Sengupta ist für ein halbes Jahr in Elternzeit. Ihr Sohn Siddhartha kam mit einem Gewicht von drei Kilogramm auf die Welt und wurde in den sechs Monaten ausschließlich von Muttermilch ernährt. Nach den sechs Monaten wiegt er zehn Kilogramm. Jeden Tag hat das Kind 150 Milliliter Milch getrunken. Wie viel Milch hat Siddhartha in den sechs Monaten getrunken und wie viel Prozent davon ging in die Gewichtszunahme? (Rechne mit Monat = 30 Tage und setze das Milchgewicht gleich dem Gewicht von Wasser an).

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise, dass eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen konvergiert.

Aufgabe * (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n, wobei a_n streng wachsend und b_n streng fallend ist, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Ordne die Zahlen

$$\exp(0,6), \ \exp(0,7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (8 (2+5+1) Punkte)

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ eine auf einem offenen Intervall definierte Funktion. Wir interessieren uns für den Limes

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}$$

zu einem Punkt $x \in I$.

1. Bestimme diesen Limes für die Funktion
   $$f(x) = a^x$$
   mit einem $a \in \mathbb{R}_+$.

2. Es sei f in $x \in I$ differenzierbar. Zeige
   $$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

3. Überprüfe das Ergebnis aus (1) mit Hilfe der Formel aus (2).

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Stammfunktion der Umkehrfunktion.

Aufgabe * (4 (1+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3.$$

a) Bestimme zu einer Geraden $y = sx$, $s > 0$, die Schnittpunkte mit dem Graphen von f.

b) Zu einer gegebenen Geraden aus Teil (a) legen der Schnittpunkt (c, d) mit $c > 0$, sein Basispunkt $(c, 0)$ und der Nullpunkt $(0, 0)$ ein Dreieck fest. Zeige, dass der Graph von f dieses Dreieck in zwei gleich große Flächen zerlegt.

Aufgabe * (8 (2+2+4) Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

a) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension d. Wie viele Elemente besitzt V?

b) Zeige, dass ein K-Vektorraum genau dann endlich ist, wenn er endlichdimensional ist.

c) Wie viele Basen besitzt ein d-dimensionaler K-Vektorraum?

Aufgabe * (1 Punkt)

Wie lautet die Matrix, die bezüglich der Standardbasis die Vierteldrehung im $\mathbb{R}^2$ gegen den Uhrzeigensinn beschreibt?

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2z & 0 & -z+1 \\ 1 & 1 & 3 \\ z & 2 & -z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)