Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/1/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	2	5	3	5	7	4	2	3	5	2	4	4	3	60

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.
2. Eine *bijektive* Abbildung
   $$f\colon M \longrightarrow N.$$

3. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
4. Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
5. *Äquivalente* (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge über einem Körper K.
6. Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix M.

Lösung

1. Die Menge
$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
heißt die *Vereinigung* der beiden Mengen.

2. Die Abbildung f heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

3. Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$
heißt die *geometrische Reihe* in x.

4. Der *Logarithmus zur Basis* b von $x \in \mathbb{R}_+$ ist durch
$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$
definiert.

5. Zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

6. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch
$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das Induktionsprinzip für Aussagen.
2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus.
3. Die *Dimensionsformel* für eine lineare Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow W.$$

Lösung

1. Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte
   1. $A(0)$ ist wahr.
   2. Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

   Dann gilt $A(n)$ für alle n.
2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus
$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$
ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

3. Unter der Bedingung, dass V endlichdimensional ist, gilt
$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \dim(\operatorname{bild} \varphi)\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

Lösung

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich die Abschätzung durch direktes Nachrechnen. Für $n \geq 4$ wird die Aussage durch Induktion bewiesen. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein $n \geq 3$ schon bewiesen ist und haben sie für $n+1$ zu zeigen. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &\geq 3n^3 \\ &= n^3 + n^3 + n^3 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung, in der vierten Zeile die Voraussetzung $n \geq 3$ und in der fünften Zeile die binomische Formel angewendet haben.

Aufgabe (2 Punkte)

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Lösung

Wir vergleichen die Strecken, die die beiden Fahrer pro Minute zurücklegen. Für Fahrer A ist dies (in Zentimetern)

$$s_A = 40 \cdot 6 \cdot 39 \cdot 2\pi,$$

für Fahrer B, der 30 Pedalumdrehungen pro Minute macht, ist dies

$$s_B = 30 \cdot 7 \cdot 45 \cdot 2\pi.$$

Der Quotient ist

$$\frac{s_A}{s_B} = \frac{40 \cdot 6 \cdot 39 \cdot 2\pi}{30 \cdot 7 \cdot 45 \cdot 2\pi} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 39}{3 \cdot 7 \cdot 45} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 13}{7 \cdot 15} = \frac{104}{105}\,.$$

Also fährt B schneller als A.

Aufgabe (2 (0.5+1+0.5) Punkte)

a) Berechne

$$(4-7\mathrm{i})(5+3\mathrm{i}).$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3+4\mathrm{i}$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Lösung

a) Es ist

$$(4-7\mathrm{i})(5+3\mathrm{i}) = 20+21-35\mathrm{i}+12\mathrm{i} = 41-23\mathrm{i}\,.$$

b) Das inverse Element zu z ist $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, also ist

$$z^{-1} = \frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2} = \frac{3-4\mathrm{i}}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}\,.$$

c) Der Abstand von z zum Nullpunkt ist $|z| = \sqrt{25} = 5$, daher ist der Abstand von z^{-1} zum Nullpunkt gleich $\frac{1}{5}$.

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Lösung

Es ist

$$x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a\,.$$

Bei $y_n - a \geq 0$ ist somit

$$\vert y_n - a\vert \leq \vert z_n - a\vert$$

und bei $y_n - a \leq 0$ ist

$$\vert y_n - a\vert \leq \vert x_n - a\vert\,.$$

Daher ist stets

$$\vert y_n - a\vert \leq \max\left(\vert x_n - a\vert, \vert z_n - a\vert\right).$$

Für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz der beiden äußeren Folgen gegen a natürliche Zahlen n_1 und n_2 derart, dass

$$\vert x_n - a\vert \leq \epsilon$$

für $n \geq n_1$ und

$$\vert z_n - a\vert \leq \epsilon$$

für $n \geq n_2$ gilt. Für $n \geq n_0 = \max\left(n_1, n_2\right)$ gilt daher

$$|y_n - a| \leq \epsilon\,.$$

Dies bedeutet die Konvergenz von y_n gegen a.

Aufgabe (3 Punkte)

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Lösung

Die Formel für x_{n+1} lautet

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{7}{x_n}\right).$$

Daher ist

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+7}{3}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\,.$$

Somit ist

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{7}{8/3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64+63}{24} = \frac{127}{48}\,.$$

Schließlich ist

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{7}{127/48}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{336}{127}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16129 + 16128}{6096} = \frac{32257}{12192}\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3 - 3n + 2}$$

konvergiert oder divergiert.

Lösung

Für $n \geq 5$ ist

$$2n + 5 \leq 3n$$

und für $n \geq 1$ ist

$$4n^3 - 3n + 2 = n^3 + 3n^3 - 3n + 2 \geq n^3 + 3n(n^2 - 1) \geq n^3\,.$$

Daher gilt für die Reihenglieder für $n \geq 5$ die Abschätzung

$$\frac{2n+5}{4n^3 - 3n + 2} \leq \frac{3n}{4n^3 - 3n + 2} \leq \frac{3n}{n^3} = 3\frac{1}{n^2}\,.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 9.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und dies gilt auch für $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{n^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

und daher konvergiert auch die in Frage stehende Reihe.

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit der angegebenen Abschätzungseigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.
Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}_+$. D.h. für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe (4 Punkte)

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Lösung

Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und die Exponentialreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen ergibt sich einfach dadurch, dass man jeden Summanden mit jedem Summanden multipliziert und gleiche Potenzen aufsummiert. Daher können die Potenzen x^5, x^6, etc. ignoriert werden und es ist

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+x^4)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right) \\
&= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)+\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4\right)+\left(x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\right)+x^3+x^4+x^4+\ldots \\
&= 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\ldots.
\end{aligned}
$$

Das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der beiden Reihen ist also

$$1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4.$$

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2} .$$

b) Es ist

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4} .$$

Aufgabe (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Lösung

Eine lineare Funktion wird durch $g(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Eine lineare Funktion, die im Punkt $(x, f(x))$ tangential zu f ist, muss $a = f'(x)$ und $f(x) = ax$ erfüllen. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$x^2 + 1 = (2x)x$$

bzw.

$$x^2 = 1.$$

Also ist $x = 1$ oder $x = -1$. Daher gibt es zwei Tangenten an f, die lineare Funktionen sind, nämlich $2x$ und $-2x$.

Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Lösung

Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist überall differenzierbar und die Ableitung ist nur an der Stelle $x = 0$ gleich 0. Daher ist die Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ für $y \neq 0$ differenzierbar. Daher ist auch f als Hintereinanderschaltung von $x \mapsto x^2$ und dieser Funktion für $x \neq 0$ differenzierbar.

Für $x = 0$ betrachten wir direkt den Differenzenquotient, also für $h \neq 0$ den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}.$$

Wir betrachten positive h und können den Nenner als

$$h = \sqrt[3]{h^3} = \sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}$$

schreiben. Daher ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{h}}.$$

Für $h_n = \frac{1}{n}$ steht hier $\sqrt[3]{n}$ und dies divergiert, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht. Daher ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$4\sin^2 t \cdot \cos t - 5t^{11}.$$

Lösung

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{4}{3}\sin^3 t - \frac{5}{12}t^{12}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p,q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Lösung

Jeder Vektor aus dem Durchschnitt $U \cap V$ besitzt eine Darstellung

$$s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffiziententupel (s,t,p,q) bilden den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das wir lösen müssen. Wir ersetzen die erste Gleichung durch

$$I' = I - 3II: \ -s + 10t + q = 0$$

und die dritte Gleichung durch

$$III' = III - 4I': \ 11s - 31t = 0.$$

Wir wählen $s = 31$, so dass $t = 11$ sein muss. Dies legt eindeutig q und dann auch p fest. Daher ist der Durchschnitt $U \cap V$ eindimensional und

$$31 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 + 44 \\ 31 - 22 \\ 217 + 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 9 \\ 316 \end{pmatrix}$$

ist ein Basisvektor von $U \cap V$.

Aufgabe (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

1. Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
2. Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
3. Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
4. Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Lösung

a) Die Matrix, die die Kundenbewegungen (in der Reihenfolge A, B, C und Nichtleser) beschreibt, ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kundenverteilung nach einem Jahr zur Ausgangsverteilung $(20000, 20000, 20000, 40000)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20000 \\ 20000 \\ 20000 \\ 40000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22000 \\ 20000 \\ 23000 \\ 35000 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ausgangsverteilung ist $(0, 0, 0, 100000)$, daher ist die Verteilung nach einem Jahr gleich $(10000, 10000, 10000, 70000)$.

Nach zwei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \\ 70000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12800 + 1500 + 5250 \\ 1600 + 9000 + 1650 + 5250 \\ 800 + 3000 + 11550 + 5250 \\ 800 + 1500 + 3300 + 36750 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19550 \\ 17500 \\ 20600 \\ 42350 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{3}{26} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$