Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/45/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	4	4	3	4	7	2	0	2	0	4	2	3	1	3	4	3	55

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Eine reelle *Intervallschachtelung*.

3. Eine *Treppenfunktion*
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Der von einer Familie von Vektoren $v_i,\ i \in I$, aus einem K-Vektorraum V *aufgespannte Untervektorraum*.

6. Die *algebraische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow V$$
auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die geometrische Reihe.

2. Die *Taylor-Formel* für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für einen inneren Punkt $a \in I$.

3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe (3 Punkte)

Man erläutere die Aussage, dass man in der Mathematik auch „Extremfälle“ berücksichtigen muss, an typischen Beispielen.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

durch vollständige Induktion ($n \geq 2$).

Aufgabe * (4 (1+1+1+1) Punkte)

1. Es sei H die Menge aller (lebenden oder verstorbenen) Menschen. Untersuche die Abbildung

   $$\varphi\colon H \longrightarrow H,$$

   die jedem Menschen seine Mutter zuordnet, auf Injektivität und Surjektivität.

2. Welche Bedeutung hat die Hintereinanderschaltung φ^3?

3. Wie sieht es aus, wenn man die gleiche Abbildungsvorschrift nimmt, sie aber auf die Menge E aller Einzelkinder und auf die Menge M aller Mütter einschränkt?

4. Seien Sie spitzfindig (evolutionsbiologisch oder religiös) und argumentieren Sie, dass die Abbildung in (1) nicht wohldefiniert ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Unterteile die Strecke von $\frac{2}{7}$ nach $\frac{3}{4}$ rechnerisch in drei gleichlange Strecken.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Fünffache ihrer zweiten Potenz, gleich der siebten Wurzel von 17 ist?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Ordne die folgenden Funktionen den Bildern zu (man schreibe ohne Begründung hinter den Funktionsausdruck den Buchstaben des zugehörigen Bildes; nur für vollständig richtige Antworten gibt es Punkte).

1. $$\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) - 1,$$
2. $$\frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2} x - 1 \right) - 1,$$
3. $$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{3} x + 1 \right) - 1,$$
4.

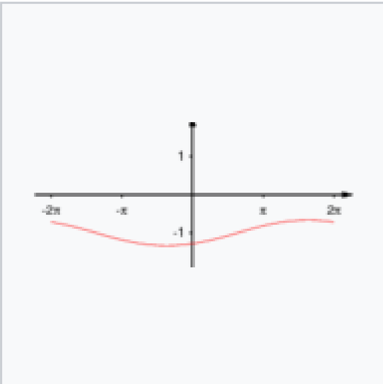
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1,$$

5.

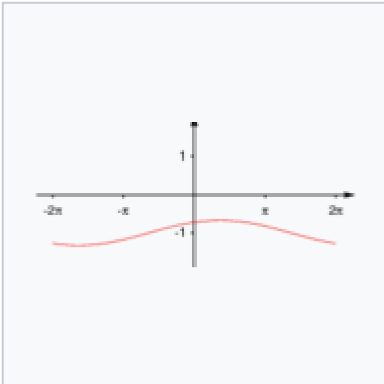
$$\frac{1}{3}\sin(2x+1)-1,$$

6.

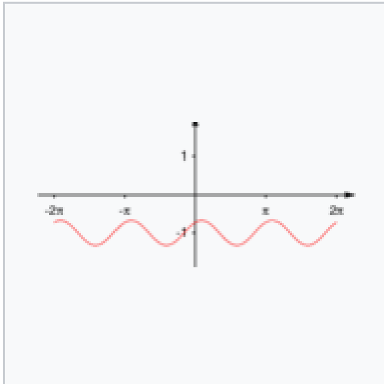
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)-1.$$



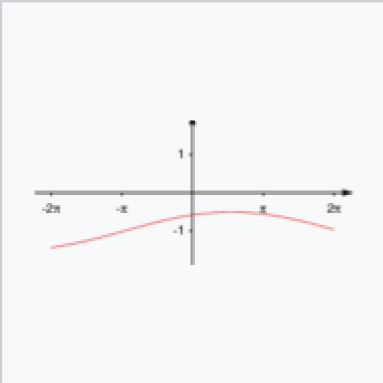
a)



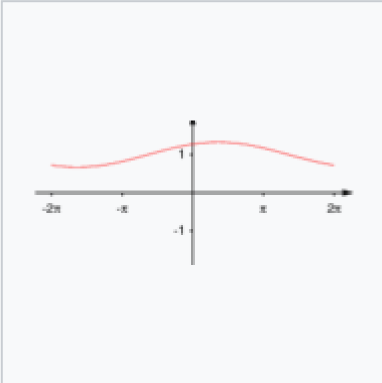
b)



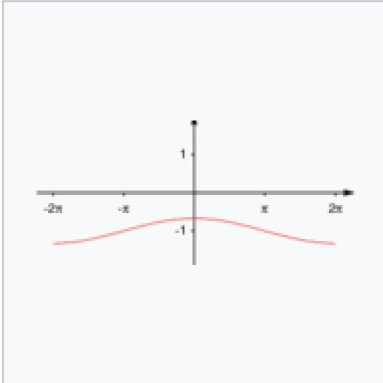
c)



d)



e)



f)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

die Extrema.

Aufgabe * (2 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$-5x - \frac{1}{3}y = 1 \text{ und } -7x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Basiselementen.

Aufgabe * (1 Punkt)

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Zeige $\varphi(0) = 0$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$, $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V. Zeige, dass die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}} = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}$$

stehen.

Aufgabe (4 (3+1) Punkte)

1. Zeige durch Induktion über n, dass die Determinante einer $n \times n$-Matrix, deren sämtliche Einträge ganze Zahlen sind, ebenfalls eine ganze Zahl ist.
2. Man gebe ein Beispiel für eine Matrix, deren sämtliche Einträge positive natürliche Zahlen sind und deren Determinante negativ ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar und ob sie diagonalisierbar ist.