Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/35/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	5	2	2	6	5	5	0	3	0	5	0	0	4	4	3	3	0	53

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.
2. Eine *streng wachsende* Funktion $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3. Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
4. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f\colon]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$.
6. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und Beschränktheit von Folgen.
2. Das Ableitungskriterium für konstante Funktionen.
3. Der Satz über die Eigenschaft der Determinante, *alternierend* zu sein (mit Erläuterung).

Aufgabe * (5 (1+1+3) Punkte)

1. Löse das folgende Minisudoku
   $$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Begründe, dass das Minisudoku aus (1) nur eine Lösung besitzt.

3. Welche mathematischen Beweisverfahren finden sich als typische Argumentationsschemata beim Lösen eines Sudokus wieder?

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$\binom{49}{6}.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne

$$\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{3}\sqrt{5}\right).$$

Aufgabe * (6 (3+3) Punkte)

Wir betrachten eine Rekursionsvorschrift, die zu einen Zahlendreieck (analog zum Pascalschen Dreieck) führt. In der ersten Zeile steht zentral die 256, links und rechts davon stehen unendlich viele 1 (die nicht aufgeführt werden müssen). Die jeweils nächste

Zeile entsteht, indem man von zwei benachbarten Zahlen der Vorgängerzeile das geometrische Mittel nimmt und das Ergebnis darunter in der neuen Zeile platziert.

1. Bestimme die ersten Zeilen dieses Zahlendreiecks, bis sämtliche Einträge kleiner als 6 sind.
2. Welche Eigenschaft gilt in jeder Zeile? Warum?

Aufgabe * (5 (1+2+2) Punkte)

1. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom über einem Körper K der Form
$$F = aX^n$$
mit $n \in \mathbb{N}_+$ und $a \neq 0$. Zeige, dass F die 0 als einzige Nullstelle besitzt.
2. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit der Eigenschaft, dass 0 die einzige komplexe Nullstelle von F ist. Zeige, dass F die Form
$$F = aX^n$$
mit $n \in \mathbb{N}_+$ und $a \neq 0$ hat.
3. Man gebe ein Beispiel für ein reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X]$ mit der Eigenschaft, dass 0 die einzige reelle Nullstelle von F ist, dass F aber nicht die Gestalt aus Teil (1) besitzt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Element mit $0 \leq a < 1$. Es gebe ein N derart, dass

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$$

gelte für alle $n \geq N$. Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = xe^x.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Ein Dreieck soll die Grundseite $[0, s]$ und die Höhe h besitzen ($s, h > 0$). Für welchen Höhenfußpunkt x besitzt das Dreieck einen minimalen Umfang, und wie lange ist dieser?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ -2 & 7 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0$$

ist.

Aufgabe (0 Punkte)