Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/37/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	5	4	0	4	2	3	3	5	3	4	0	1	5	3	0	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.

2. Eine *rationale Funktion* (in einer Variablen über $\mathbb{R}$).
3. Das *Minimum* der Funktion

   $$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

   wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.
4. Die *höheren Ableitungen* zu einer Funktion

   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   (rekursive Definition).
5. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

   $$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Die *inverse Matrix* zu einer invertierbaren Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ über einem Körper K.

Lösung

1. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.
2. Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion f, die man als Quotient aus zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ mit $Q \neq 0$ darstellen kann, also $f = P/Q$ (sie ist außerhalb der Nullstellen von Q definiert).
3. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Minimum* annimmt, wenn

   $$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt.}$$
4. Die Funktion f heißt n-mal *differenzierbar*, wenn sie $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung, also $f^{(n-1)}$, differenzierbar ist. Die Ableitung

   $$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

5. Das nach Voraussetzung existierende Oberintegral zu f über $[a,b]$ heißt bestimmtes Integral.
6. Die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit
$$A \circ M = E_n = M \circ A$$
heißt die *inverse Matrix* von M.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und absolute Konvergenz von reellen Reihen.
2. Der Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a > 0$.
3. Der Satz über lineare Abbildungen zwischen gleichdimensionalen Vektorräumen.

Lösung

1. Eine absolut konvergente Reihe von reellen Zahlen konvergiert.
2. Die Exponentialfunktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto a^x,$$
zur Basis $a > 0$ ist differenzierbar mit
$$(a^x)' = (\ln a)a^x\,.$$

3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass eine natürliche Zahl genau dann die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist, wenn sie ungerade ist.

Lösung

Zwei aufeinander folgende Quadratzahlen haben die Form n^2 und $(n+1)^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Ihre Differenz ist

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1\,.$$

Dies ist eine ungerade Zahl. Umgekehrt kann man eine ungerade Zahl u als $u = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben, und die Gleichungskette zeigt, dass u die Differenz von zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen ist.

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien n Geraden in der Ebene gegeben. Formuliere und beweise eine Formel (in Abhängigkeit von n) für die maximale Anzahl von Schnittpunkten der Geraden.

Lösung

Die maximale Anzahl der Schnittpunkte ist $\frac{n(n-1)}{2}$. Dies beweisen wir durch Induktion über n. Bei keiner oder einer Geraden gibt es keinen Schnittpunkt, die Formel ist also richtig, und dies sichert den Induktionsanfang. Sei die Aussage nun für n Geraden bewiesen, und es komme eine neue Gerade hinzu. Diese neue Gerade hat mit jeder der vorgegebenen Geraden höchstens einen Schnittpunkt. Wenn die neue Gerade einen Richtungsvektor besitzt, der von allen Richtungsvektoren der n Geraden verschieden ist, so besitzt die neue Gerade mit jeder alten Geraden einen Schnittpunkt. Da es unendlich viele Richtungsvektoren gibt, kann man stets eine neue Richtung für die neue Gerade wählen. Indem man die neue Gerade parallel verschiebt, kann man auch erreichen, dass die neuen Schnittpunkte von den alten Schnittpunkten verschieden sind. Es kann also erreicht werden, dass genau n Schnittpunkte hinzukommen. Wenn die n Geraden die maximale mögliche Anzahl von Schnittpunkten haben, so hat die neue Geradenkonfiguration genau

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Schnittpunkte (und wenn die n Geraden weniger als $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte haben, so hat auch die neue Geradenkonfiguration weniger als $\frac{(n+1)n}{2}$ Schnittpunkte), was den Induktionsschritt beweist.

Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Lösung

Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X-a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a-a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X-a)Q + R\,,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X-a)Q$ ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Lösung

Es sei $x_n \in I_n = [a_n, b_n]$ beliebig gewählt. Wir behaupten, dass dies eine Cauchy-Folge ist. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei n_0 derart, dass

$$b_{n_0} - a_{n_0} \leq \epsilon .$$

Für $m \geq n \geq n_0$ ist dann

$$|x_m - x_n| \leq b_n - a_n \leq \epsilon ,$$

da ja $x_m, x_n \in I_n$ ist. Es sei x der Limes dieser Cauchy-Folge. Wäre $x \notin I_m$ für ein m, so wäre

$$x < a_m$$

(oder $x > b_m$), doch wegen der Konvergenz der Folge gegen x würden dann auch die Folgenglieder für n hinreichend groß echt unterhalb von a_m und damit von a_n liegen, im Widerspruch zu $x_n \in I_n$. Also ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Würden zwei Zahlen $x < y$ zum Durchschnitt aller Intervalle gehören, so wäre

$$y - x \leq b_n - a_n$$

für alle n im Widerspruch dazu, dass die Intervalllängen gegen 0 konvergieren.

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ nicht gelten muss.

Lösung

Die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist

stetig und es ist $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$. Wenn der Zwischenwertsatz auch rational gelten würde, müsste es im rationalen Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle geben, also ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. Dies kann es aber nicht geben, da die Quadratwurzel aus 2 irrational ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktion.

Lösung

Aufgrund von Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \exp x.\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x)=\frac{\ln\left(x^2+3\right)-x\sqrt{x^2+2}}{1+\sin^2 x}\,.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\left(\ln\left(x^2+3\right)-x\sqrt{x^2+2}\right)'\left(1+\sin^2 x\right)-\left(\ln\left(x^2+3\right)-x\sqrt{x^2+2}\right)\left(1+\sin^2 x\right)'}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}\\
&=\frac{\left(\frac{2x}{x^2+3}-\sqrt{x^2+2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)\left(1+\sin^2 x\right)-\left(\ln\left(x^2+3\right)-x\sqrt{x^2+2}\right)(2\sin x\cos x)}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}\\
&=\frac{\left(\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\right)\left(1+\sin^2 x\right)-\left(\ln\left(x^2+3\right)-x\sqrt{x^2+2}\right)(2\sin x\cos x)}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Zu einem Startwert $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1}:=\sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = x - \sin x$$

auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Wegen

$$g'(x) = 1 - \cos x$$

ist dies positiv für $x > 0$ und gleich 0 für $x = 0$. Daher ist g streng wachsend und es gilt

$$\sin x < x$$

für $x > 0$ und $\sin 0 = 0$. Daher ist die Folge zu jedem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fallend und konvergiert gegen einen Grenzwert, da alle Folgenglieder nichtnegativ sind. Es sei a der Grenzwert, der wieder zu $[0, \frac{\pi}{2}]$ gehören muss. Wegen der rekursiven Beziehung

$$x_{n+1} = \sin x_n$$

und der Stetigkeit des Sinus folgt

$$a = \sin a\,.$$

Nach den bisherigen Überlegungen muss $a = 0$ sein. Die Folge konvergiert also bei jedem Startwert gegen 0.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\cos(\cos(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x.$$

Lösung

Die Funktion hat die Gestalt

$$-f(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x),$$

deshalb ist nach der Kettenregel (für drei Funktionen) $-F(g(h(x)))$ eine Stammfunktion dieser Funktion, wobei F eine Stammfunktion von f bezeichnet. Also ist

$$-\sin(\cos(\sin x))$$

eine Stammfunktion.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 1$ und mit $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung

Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion $g(x) = \ln f(x)$, die wohldefiniert ist, da f nur positive Werte annimmt. Die Funktion g ist differenzierbar mit

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda f(x)}{f(x)} = \lambda\,.$$

Die Ableitung ist also konstant gleich λ, daher ist $g(x) = \lambda x + c$. Somit ist

$$f(x) = \exp(\ln f(x)) = \exp(\lambda x + c) = \exp(\lambda x) \exp c$$

und wegen $f(0) = 1$ ist $c = 0$. Daher ist

$$f(x+y) = \exp(\lambda(x+y)) = \exp(\lambda x + \lambda y) = \exp(\lambda x) \cdot \exp(\lambda y) = f(x) \cdot f(y)\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{50}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{5}{3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 10^7 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die inverse Matrix ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{50} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{3}{5} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 10^{-7} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit dem Rang r. Zeige, dass es eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B, beide mit dem Rang r, mit $M = B \circ A$ gibt.

Lösung

Wir fassen die Matrix als lineare Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m.$$

Nach Lemma 26.2 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist der Rang dieser Abbildung gleich r, d.h. das Bild $V \subseteq K^m$ besitzt die Dimension r. Es gibt also eine Faktorisierung

$$K^n \longrightarrow V \longrightarrow K^m,$$

wobei die erste Abbildung die durch M gegebene Abbildung mit dem Bild V ist und die zweite Abbildung die Inklusion $V \subseteq K^m$. Mit einer Basis $v_1, \ldots, v_r$ von V und den Standardbasen links und rechts werden diese beiden linearen Abbildungen durch eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B beschrieben. Somit gilt

$$M = B \circ A.$$

Da die durch A beschriebene lineare Abbildung surjektiv auf V abbildet, ist ihr Rang gleich r. Da das Bild der durch B beschriebenen linearen Abbildung wegen der Injektivität ebenfalls die Dimension r besitzt, ist ihr Rang auch r.

Aufgabe (3 (2+0.5+0.5) Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

1. Der Eigenraum
$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von V.

2. λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.

3. Ein Vektor $v \in V,\ v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.

Lösung

(1). Seien $u, v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ und sei $w = au + bv$. Dann ist

$$\varphi(w) = a\varphi(u) + b\varphi(v) = a\lambda u + b\lambda v = \lambda(au + bv) = \lambda w\,.$$

(2) und (3) folgen direkt aus den Definitionen.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung