Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/48/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	4	1	7	3	7	6	0	0	4	0	0	4	0	0	4	51

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.
2. Eine *Teilfolge* einer Folge reeller Zahlen.

3. Eine *gerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
5. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produktes.
2. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*.
3. Der Satz über die Beziehung zwischen Eigenschaften von linearen Abbildungen und Matrizen.

Aufgabe * (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	r	$?$
w	w	w	w
w	w	f	f

w f w f

w f f   f

f w w f

f w f   f

f f w f

f f f w

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

eine injektive Abbildung. Zeige, dass es eine Teilmenge $T \subseteq M$ derart gibt, dass man φ als Abbildung

$$\varphi': L \longrightarrow T$$

auffassen kann (φ und φ' unterscheiden sich nur hinsichtlich des Wertebereichs) und dass φ' bijektiv ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien x, y rationale Zahlen. Zeige, dass

$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Aufgabe * (1 Punkt)

Schreibe das Polynom

$$X^4 - 1$$

als Produkt von Linearfaktoren in $\mathbb{C}[X]$.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise die Division mit Rest im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe * (7 (2+2+3) Punkte)

1. Man gebe ein Beispiel für reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \neq 0$, derart, dass $\frac{x_n}{y_n}$ gegen 1 konvergiert, aber $x_n - y_n$ nicht konvergiert.
2. Man gebe ein Beispiel für reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \neq 0$, derart, dass $x_n - y_n$ gegen 0 konvergiert, aber $\frac{x_n}{y_n}$ nicht konvergiert.
3. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen derart, dass $x_n - y_n$ gegen 0 konvergiert. Es gebe ein $a > 0$ mit
   $$y_n \geq a$$
   für alle n. Zeige, dass $\frac{x_n}{y_n}$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Funktion $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ für $x \rightarrow 0$ ($x > 0$).

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Wir betrachten die Quadratabbildung

$$\varphi \colon K \longrightarrow K, \, x \longmapsto x^2,$$

für verschiedene Körper K.

1. Ist φ linear für
   $$K = \mathbb{Q}\,?$$
2. Ist φ linear für
   $$K = \mathbb{Z}/(2)\,,$$

dem Körper mit zwei Elementen.

3. Es sei nun K ein Körper, in dem $2 = 1 + 1 = 0$ gelte, der mehr als zwei Elemente enthalte. Ist φ linear? Ist φ verträglich mit der Addition?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $\varphi, \psi \colon V \to V$ lineare Abbildungen, von denen die charakteristischen Polynome bekannt seien. Kann man daraus das charakteristische Polynom von $\varphi + \psi$ bestimmen?