Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/43/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	4	10	3	3	6	0	0	4	2	3	4	0	4	0	0	3	54

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M.

2. Eine reelle *Potenzreihe*.
3. Der *natürliche Logarithmus*

   $$\ln \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

4. Der *Sinus hyperbolicus*.
5. Das *untere Treppenintegral* zu einer unteren Treppenfunktion s zu einer Funktion

   $$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.

Lösung

1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

   $$\circ \colon M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y.$$

2. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Der natürliche Logarithmus

   $$\ln \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

   ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

4. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

5. Zur unteren Treppenfunktion

   $$s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   von f zur Unterteilung $a_i, i = 0, \ldots, n$, und den Werten $s_i, i = 1, \ldots, n$, heißt

   $$S := \sum_{i=1}^{n} s_i (a_i - a_{i-1})$$

   ein *unteres Treppenintegral* von f auf I.

6. Eine Familie $v_i, i \in I$, von Vektoren in V heißt Basis, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über wachsende, nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.
2. Die Rechenregeln für stetige Funktionen

   $$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

3. Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösung

1. Eine nach oben beschränkte, wachsende Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

2. Unter der vorausgesetzten Stetigkeit sind auch die Funktionen
$$f+g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)+g(x),$$
$$f-g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)-g(x),$$
$$f\cdot g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)\cdot g(x),$$
stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion
$$f/g\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$
stetig.

3. Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei
$$f\colon D \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$
eine bijektive stetige Funktion mit der Umkehrfunktion.
$$f^{-1}\colon E \longrightarrow D.$$
Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$.

Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar mit
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bei der Onlinepartnervermittlung „e-Tarzan meets e-Jane“ verliebt sich alle elf Minuten ein Single. Wie lange (in gerundeten Jahren) dauert es, bis sich alle erwachsenen Menschen in Deutschland (ca. 65000000) verliebt haben, wenn ihnen allein dieser Weg zur Verfügung steht.

Lösung

Es benötigt

$$65000000 \cdot 11 = 715000000$$

Minuten. Ein Jahr besteht aus

$$365 \cdot 24 \cdot 60 = 525600$$

Minuten. Der benötigte Zeitraum ist somit

$$\frac{715000000}{525600} = \frac{7150000}{5256} \cong 1360,35$$

Jahre.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösung

Wir machen die Annahme, dass es eine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, und führen das zu einem Widerspruch. Sei also angenommen, dass

$$x \in \mathbb{Q}$$

die Eigenschaft besitzt, dass

$$x^2 = 2$$

ist. Eine rationale Zahl hat die Beschreibung als ein Bruch, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Die rationale Zahl x können wir somit als

$$x = \frac{a}{b}$$

ansetzen. Ferner können wir annehmen (dieses Annehmen ist eine Vereinfachung der Situation und hat nichts mit der zum Widerspruch zu führenden Annahme zu tun), dass dieser Bruch gekürzt ist, dass also a und b keinen echten gemeinsamen Teiler haben. In der Tat brauchen wir lediglich, dass wir annehmen dürfen, dass zumindest eine Zahl, a oder b ungerade ist (wenn beide gerade sind, so können wir mit 2 kürzen, u.s.w.) Die Eigenschaft

$$x^2 = 2$$

bedeutet ausgeschrieben

$$x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2\,.$$

Multiplikation mit b^2 ergibt die Gleichung

$$2b^2 = a^2$$

(dies ist eine Gleichung in $\mathbb{Z}$ bzw. sogar in $\mathbb{N}$). Diese Gleichung besagt, dass a^2 gerade ist, da ja a^2 ein Vielfaches der 2 ist. Daraus ergibt sich aber auch, dass a selbst gerade ist, da ja das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist. Deshalb können wir den Ansatz

$$a = 2c$$

mit einer ganzen Zahl c machen. Dies setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten

$$2b^2 = (2c)^2 = 2^2c^2 \,.$$

Wir können mit 2 kürzen und erhalten

$$b^2 = 2c^2 \,.$$

Also ist auch b^2 und damit b selbst gerade. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass nicht sowohl a als auch b gerade sind.

Aufgabe (10 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie Ihren Lieblingssatz der Vorlesung.

Lösung Fakt/Beweis/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 (1+2) Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

1. $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
2. $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Lösung

Es seien

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

und

$$Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$$

mit $a_n, b_m \neq 0$, also $n = \operatorname{grad}(P)$ und $m = \operatorname{grad}(Q)$. Bei $m \neq n$ ist $\max(m,n)$ der Grad der Summe, bei $m = n$ ist bei $a_n \neq -b_n$ dies auch der Grad des Summenpolynoms, im andern Fall wird der Grad kleiner (die Summe kann 0 sein, dann ist die Aussage als erfüllt zu interpretieren). Wegen Lemma 4.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist $a_n b_m \neq 0$ und somit ist $a_n b_m X^{n+m}$ der Leitterm des Produktpolynoms PQ, dessen Grad somit gleich $n+m$ ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Wir betrachten Rechtecke mit dem konstanten Umfang d. Zeige, dass unter diesen Rechtecken das Quadrat den maximalen Flächeninhalt besitzt.

Lösung

Bei konstantem Umfang d ist das Rechteck durch die eine Seitenlänge $s \neq 0$ bestimmt, die andere Seitenlänge ist $\frac{d}{2} - s$ und der Flächeninhalt ist

$$s\left(\frac{d}{2} - s\right) = s\frac{d}{2} - s^2 .$$

Beim Quadrat ist die Seitenlänge gleich $\frac{d}{4}$ und der Flächeninhalt gleich $\frac{d^2}{16}$. Es ist also

$$s\frac{d}{2} - s^2 \leq \frac{d^2}{16}$$

zu zeigen. Dies ist wegen

$$\frac{d^2}{16} - s\frac{d}{2} + s^2 = \left(s - \frac{d}{4}\right)^2 \geq 0$$

erfüllt.

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Lösung

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k].$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert nach Aufgabe 8.18 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

Die Süddeutsche Zeitung schrieb am 10.3.2020 unter dem Titel „Die Wucht der großen Zahl“ (von Christian Endt, Michael Mainka und Sören Müller-Hansen):

„Um zu verstehen, warum das neue Coronavirus so gefährlich ist, muss man sich klarmachen, was exponentielles Wachstum bedeutet. Der Begriff ist etwas sperrig, das Konzept dahinter aber einfach. Es geht um eine Vermehrung, die sich ständig selbst beschleunigt. Und dieses Muster lässt sich auch beim Coronavirus erkennen. Das ist der Hintergrund, warum nun immer strengere Auflagen verhängt werden, Fußballspiele ohne Publikum ausgetragen, Feste und Kongresse abgesagt werden. Und warum Gesundheitsminister Jens Spahn, Kanzlerin Angela Merkel und andere davon sprechen, man müsse die Ausbreitung des Virus verlangsamen. Sprich: Verhindern, dass es sich exponentiell verbreitet.“

1. Beschleunigt sich lineares Wachstum „ständig selbst“?
2. Beschleunigt sich quadratisches Wachstum wie bei der Funktion $f(x) = x^2$ „ständig selbst“?
3. Wie kann man exponentielles Wachstum charakterisieren?
4. Wenn man exponentielles Wachstum wie bei einer Virusausbreitung „verlangsamen“ möchte, verhindert man dann exponentielles Wachstum oder ändert man Parameter (welche?) für exponentielles Wachstum?

Aufgabe (2 Punkte)

Ergänze die folgende Tabelle, in der Winkel in verschiedenen Maßeinheiten miteinander in Bezug gesetzt werden. Die Prozentangabe bezieht sich auf den Vollkreis.

Grad	Bogenmaß	Prozent
		$100\,\%$
270°		
	$\frac{\pi}{10}$	
60°		
	π	
		$1\,\%$

Lösung

Grad	Bogenmaß	Prozent
360°	2π	$100\,\%$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	$75\,\%$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$5\,\%$

60°	$\dfrac{\pi}{3}$	$16{,}\overline{6}\,\%$
180°	π	$50\,\%$
$3{,}6^\circ$	$\dfrac{\pi}{50}$	$1\,\%$

Aufgabe (3 (1+2) Punkte)

Bestimme die Ableitung (auf den jeweiligen Definitionsbereichen) der folgenden Funktionen:

a) $\tan x$,

b) $\arctan x$.

Lösung

a)

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x)+\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe (4 (2+2) Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Es sei f differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls periodisch mit der Periode L ist.

b) Man gebe ein Beispiel einer nichtkonstanten, periodischen, stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Stammfunktion nicht periodisch ist.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x+L) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+L+h) - f(x+L)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

daher ist die Ableitung periodisch mit Periodenlänge L.

b) Wir betrachten

$$f(x) = 2 + \sin x > 0 .$$

Diese Funktion ist periodisch mit der Periodenlänge 2π. Die Stammfunktion ist nach Satz 15.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) streng wachsend, also nicht periodisch.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & & +z & +4w & = & -2 \\ 2x & +2y & & +w & = & 7 \\ 4x & +6y & & +w & = & 3 \\ x & +3y & +5z & & = & -1 . \end{array}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable z, indem wir die zweite und die dritte Gleichung übernehmen und $IV - 5I$ hinzunehmen. Dies führt auf

$$\begin{array}{rrrrr} 2x & +2y & +w & = & 7 \\ 4x & +6y & +w & = & 3 \\ -14x & +3y & -20w & = & 9\,. \end{array}$$

Nun eliminieren wir die Variable w, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $II - I$ und $III + 20I$ ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{array}{rrrr} 2x & +4y & = & -4 \\ 26x & +43y & = & 149\,. \end{array}$$

Mit $13I - II$ ergibt sich

$$9y = -201$$

und

$$y = -\frac{67}{3}\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$x = -2 - 2y = \frac{128}{3}\,,$$
$$w = 7 - 2x - 2y = -\frac{115}{3}$$

und

$$z=-2-3x-4w=\frac{70}{3}\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Determinante von A ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

und die Determinante von B ist

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} \det AB &= \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Produkt der beiden einzelnen Determinanten überein.

Zuletzt bearbeitet vor 2 Monaten von Marymay0609