Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/15/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	$\sum$
Punkte	3	3	4	5	2	3	3	3	0	3	5	7	0	4	0	0	6	51

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Ein *angeordneter* Körper.

3. Die *reelle Exponentialfunktion*.
4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Eine *stetig differenzierbare* Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
6. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K.

Lösung

1. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.
2. Ein Körper K heißt *angeordneter Körper*, wenn es zwischen den Elementen von K eine Beziehung $>$ („größer als") gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt ($a \geq b$ bedeutet $a > b$ oder $a = b$).
    1. Für je zwei Elemente $a, b \in K$ gilt entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
    2. Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
    3. Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
    4. Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$).
3. Die Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
heißt (reelle) *Exponentialfunktion*.
4. Zu $x \in \mathbb{R}, x \neq a$, heißt die Zahl
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

5. Man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.
6. Unter einem *Vektorraum* V über K versteht man eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen
$$+: V \times V \longrightarrow V,\ (u, v) \longmapsto u + v,$$
und
$$K \times V \longrightarrow V,\ (s, v) \longmapsto sv = s \cdot v,$$
derart, dass die folgenden Axiome erfüllt sind (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig):
   1. $u + v = v + u$,
   2. $(u + v) + w = u + (v + w)$,
   3. $v + 0 = v$,
   4. Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$,
   5. $r(su) = (rs)u$,
   6. $r(u + v) = ru + rv$,
   7. $(r + s)u = ru + su$,
   8. $1 \cdot u = u$.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz von Euklid* über Primzahlen.
2. Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
3. Der Satz über Basiswechsel bei einem Endomorphismus.

Lösung

1. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
2. Sei $a < b$ und sei
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in\,]a,b[$ mit
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$
3. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung
$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{u}}(\varphi) = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}.$$

Aufgabe (4 (2+1+1) Punkte)

Folgende Aussagen seien bekannt.

1. Der frühe Vogel fängt den Wurm.
2. Doro wird nicht von Lilly gefangen.
3. Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
4. Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
5. Doro ist ein Wurm.
6. Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
7. Lilly schläft bis 5 Uhr am Morgen und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

1. Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
2. Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
3. Fängt der späte Igel den Wurm?

Lösung

1. Lilly ist ein Igel. Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass Lilly kein Igel ist. Dann ist sie nach (3) ein Vogel. Da Lilly nach (7) um 5 Uhr schon unterwegs ist, ist nach (6) Lilly ein früher Vogel. Nach (1) fängt Lilly also den Wurm. Da nach (5) Doro ein Wurm ist, wird er von Lilly gefangen im Widerspruch zu (2).
2. Nach dem ersten Teil ist Lilly ein Igel, und nach (7) steht sie um 5 Uhr auf. Dies ist nach (4) für Igel spät, Lilly ist also ein später Igel und somit ein spätes Tier.

3. Da nach dem zweiten Teil Lilly ein später Igel ist und sie nach (2) Doro, die nach (5) ein Wurm ist, nicht fängt, fängt der späte Igel im Allgemeinen nicht den Wurm.

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien zwei rationale Zahlen $x < y$ gegeben. Zeige, dass für jede positive natürliche Zahl n die rationale Zahl

$$z_n := \frac{x + ny}{1 + n}$$

echt zwischen x und y liegt. In welcher Relation stehen die Zahlen z_n zueinander?

Lösung

Die Ungleichung

$$x < \frac{x + ny}{1 + n}$$

folgt gemäß der Überkreuzungsregel unter Verwendung der Voraussetzung $x < y$ aus

$$(1 + n)x = x + nx < x + ny\,,$$

die Ungleichung

$$\frac{x + ny}{1 + n} < y$$

folgt ebenso aus

$$x + ny < y + ny = (1+n)y\,.$$

Wir behaupten, dass für

$$n+1 > n$$

die Beziehung

$$z_{n+1} = \frac{x+(n+1)y}{1+n+1} > \frac{x+ny}{1+n} = z_n$$

gilt. Dazu berechnen wir

$$(x+(n+1)y)(1+n) = (1+n)x + n^2y + 2ny + y$$

und

$$(x+ny)(2+n) = (2+n)x + n^2y + 2ny\,.$$

Die Differenz des ersten Term zum zweiten Term ist

$$y - x > 0\,,$$

was die Behauptung bestätigt.

Aufgabe (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

mit Hilfe des allgemeinen binomischen Lehrsatzes.

Lösung

Der binomische Lehrsatz besagt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \,.$$

Wir setzen $a = b = 1$. Dann ergibt sich auf der linken Seite

$$(1+1)^n = 2^n$$

und auf der rechten Seite einfach $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Lösung

Sei $B > 0$ eine Schranke für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu $\frac{\epsilon}{B}$ ein n_0 derart, dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n| \leq \frac{\epsilon}{B}$ gilt. Für diese Indizes ist dann auch

$$|x_n y_n| \leq |x_n| \cdot |y_n| \leq \frac{\epsilon}{B} \cdot B = \epsilon \, .$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der durch

$$y = 3x - 2$$

gegebenen Geraden.

Lösung

Der Einheitskreis ist durch

$$x^2 + y^2 = 1$$

gegeben. Darin setzen wir

$$y = 3x - 2$$

ein und erhalten

$$x^2 + (3x - 2)^2 = 10x^2 - 12x + 4 = 1 \, .$$

Also ist

$$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\frac{6}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{10}}}{2} \\ &= \frac{\frac{6}{5} \pm \sqrt{\frac{36}{25} - \frac{6}{5}}}{2} \\ &= \frac{\frac{6}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{6}}{10}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= 3 \cdot \frac{6 \pm \sqrt{6}}{10} - 2 \\ &= \frac{-2 \pm 3\sqrt{6}}{10}. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind also $\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}, \frac{-2+3\sqrt{6}}{10}\right)$ und $\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}, \frac{-2-3\sqrt{6}}{10}\right)$.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}} \right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}} \right) + 2 &= -1+\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}} + \\ &= 3\left(\sqrt[3]{(-1+\sqrt{2})^2(-1-\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(-1+ \right. \\ &= 3\left(\sqrt[3]{(3-2\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(-1+\sqrt{} \right. \\ &= 3\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} \right. \\ &= 3\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} - \right. \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Lösung

Wir betrachten

$$h(x) := f(x) - g(x) \, .$$

Diese Funktion ist nach Fakt ***** wieder stetig und es ist

$$h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$$

und

$$h(b) = f(b) - g(b) \leq 0\,.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$h(c) = 0 = f(c) - g(c)\,,$$

also ist

$$f(c) = g(c)\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen über die Funktionslimiten für die Differenzenquotienten.

Lösung

Es seien $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die beide in $a \in D$ differenzierbar seien. Der Differenzenquotient der Produktfunktion $f(x)g(x)$ ist $\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$ und es ist zu zeigen, dass davon der Limes für x gegen a existiert und gleich $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x-a} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a}. \end{aligned}$$

Der Limes der Brüche existiert nach Voraussetzung und ist gleich $g'(a)$ bzw. $f'(a)$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt a ist der Limes von $f(x)$ für x gegen a gleich $f(a)$. Daher folgt die Behauptung aus den Rechenregeln für Limiten.

Aufgabe (7 (1+1+3+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Lösung

a) Es ist

$$\sin x = 0$$

genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$.

b)

c) Nach der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}\,.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} \\ &= \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2\cos x \sin x \sin^3 x - 3\left(1+\cos^2 x\right)\sin^2 x \cos x}{\sin^6 x} \\ &= \cos x \frac{2\sin^2 x - 3\left(1+\cos^2 x\right)}{\sin^4 x} \\ &= \cos x \frac{-1 - 5\cos^2 x}{\sin^4 x} \end{aligned}$$

d) Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$$
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,,$$

und

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$$

daher ist das Taylor-Polynom der Ordnung 3 gleich

$$1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Lösung

Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}0 = 0$$

für alle $i = 1, \ldots, m$ ist das Nulltupel $(0, \ldots, 0)$ eine Lösung. Es seien $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ Lösungen des linearen Gleichungssystems. Zu $s \in K$ ist dann für jedes i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(sx_j) = s \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) = s \cdot 0 = 0 \,.$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j + a_{ij}y_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

für alle i. Somit ist der Lösungsraum unter Multiplikation mit einem Skalar und unter Addition abgeschlossen und bildet demnach einen Untervektorraum.

Der Gesamtlösungsraum ist der Durchschnitt der Lösungsräume zu den einzelnen Gleichungen.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 (2+3+1) Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det\begin{pmatrix} x-2 & -1 & 2-\mathrm{i} \\ 0 & x-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & x+1-2\mathrm{i}\end{pmatrix} \\ &= (x-2)(x-\mathrm{i})(x+1-2\mathrm{i}) \\ &= x^3-(1+3\mathrm{i})x^2+(2\mathrm{i}-2(1-2\mathrm{i})-\mathrm{i}(1-2\mathrm{i}))x+2\mathrm{i}(1-2\mathrm{i}) \\ &= x^3-(1+3\mathrm{i})x^2+(-4+5\mathrm{i})x+4+2\mathrm{i}\end{aligned}$$

und die Eigenwerte von A sind $2, \mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}$.

b) Wir bestimmen für jeden Eigenwert einen Eigenvektor.

$x=2$:

Wir müssen ein nichttriviales Element im Kern von

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 2-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 3-2\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

bestimmen. Da gehört $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dazu.

$x=\mathrm{i}$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -2+\mathrm{i} & -1 & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir wählen $c = 0$ und $a = 1$ und erhalten $b = -2 + \mathrm{i}$, also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert i.

$x = -1 + 2\mathrm{i}$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -3+2\mathrm{i} & -1 & 2-\mathrm{i} \\ 0 & -1+\mathrm{i} & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $c = -1 + \mathrm{i}$ und $b = 1 + \mathrm{i}$ ist die mittlere Zeile erfüllt. Die erste Zeile wird dann zu

$$(-3+2\mathrm{i})a - 1 - \mathrm{i} + (2-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) = 0$$

und daher ist

$$(-3+2\mathrm{i})a = 1 + \mathrm{i} - (2-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2 - 1 - \mathrm{i} = 2 - 2\mathrm{i}\,.$$

Daher ist

$$a = (2-2\mathrm{i})(-3+2\mathrm{i})^{-1} = (2-2\mathrm{i})\frac{-3-2\mathrm{i}}{13} = \frac{-10+2\mathrm{i}}{13}\,.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-10+2\mathrm{i}}{13} \\ 1+\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $-1+2\mathrm{i}$.

c) Bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren besitzt die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$