Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/57/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	2	4	3	4	0	4	4	4	0	0	4	3	3	4	3	53

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.
2. Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.

3. Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.

4. Die *eulersche Zahl* e.

5. Das *untere Treppenintegral* zu einer unteren Treppenfunktion s zu einer Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Der *Rang* einer linearen Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow W$$
zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.

2. Der Satz über die lineare Approximierbarkeit.

3. Der Satz über die Lösungsmenge zu einem linearen Gleichungssystem in Dreiecksgestalt über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Karl trinkt eine Flasche Bier ($0{,}5$ Liter) mit einem Alkoholgehalt von 5 Prozent. 10 Prozent des getrunkenen Alkohols werden von seinem Blut aufgenommen, wobei er fünf Liter Blut hat (diese Gesamtmenge wird durch die Aufnahme nicht verändert). Wie viel Promille hat Karl, wenn er zuvor nüchtern war?

Aufgabe * (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine natürliche Zahl, die man als Summe von vier Quadraten darstellen kann, aber nicht als Summe von drei Quadraten.

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{3}$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass für positive natürliche Zahlen a, n, k die Beziehung

$$a^{(n^k)} = \underbrace{((\ldots((a^n)^n)^n\ldots)^n)^n}_{k \text{ Potenzierungen}}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3\,.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 (3+1) Punkte)

Es sei

$$P = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + 1\,.$$

1. Bestimme die kleinste positive Nullstelle von P.
2. Besteht ein Zusammenhang zwischen dieser Nullstelle und $\frac{\pi}{2}$?

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $y - 3x + 1 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(-2, 3)$ und den Radius 4 gegeben ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die *Produktregel* für differenzierbare Funktionen mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{matrix} 2x & +3y & -z & +w & = & 2 \\ 2x & -y & -2z & +w & = & 0 \\ -x & +y & +z & & = & -2 \\ x & +2y & +5z & & = & 3\,. \end{matrix}$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
2. $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
3. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Determinante von

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2-5}{x+3} & \frac{x^3-7}{2x} \\ \frac{x^2+1}{x^2-4x} & \frac{3x^2-x}{x^2-3} \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{R}(X)$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es dann nur endlich viele Eigenwerte zu φ gibt.