

Übungsblatt 6 zur Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 05. Juni 2020

Kreuzerl-Deadline: 14. Juni 2020

Die Aufgaben auf diesem Blatt beziehen sich auf den Vorlesungsstoff bis inklusive Kapitel 6.5. Bitte darauf achten, dass TMn möglichst „aufgeräumt“ dargestellt werden.

Aufgabe 6.1 Turingmaschine: Modulo, unär nach binär

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{U}_a(n)$ ihre Unärkodierung mittels Symbol a und $\mathbb{B}(n)$ ihre Binärkodierung. Seien $n, k \in \mathbb{N}_+$ gegeben durch den Eingabestring $\mathbb{U}_a(k) \square \mathbb{B}(n)$. Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die $\mathbb{B}(f(n, k))$ für die folgende Funktion berechnet:

$$f(n, k) := \begin{cases} n \cdot (k \bmod 3) & \text{wenn } k \text{ ungerade ist,} \\ \text{undef} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 6.2 Turingmaschine, Rekursiv addieren

Sei $a_0 = 0$ und $a_k = 2a_{k-1} + k$ für alle $k \geq 1$. Erstellen Sie eine deterministische TM, die bei Eingabe einer unär kodierten Zahl $k \geq 1$ den Wert a_k berechnet. Die Ausgabe soll ebenfalls in Unärkodierung erfolgen.

Anmerkung: Gehen Sie davon aus, dass die Turingmaschine eine gültige Eingabe erhält. Am Ende muss der SL-Kopf am linken Symbol des Ergebniswortes stehen. Rechts vom Ergebniswort befinden sich dann nur \square -Symbole auf dem Band.

Aufgabe 6.3 WHILE

Schreiben Sie ein WHILE-Programm, mit Eingabevariablen x_1, x_2 , das den Wert

$$x_3 := \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 = x_2 \\ 1 & \text{falls } x_1 < x_2 \\ 2 & \text{falls } x_1 > x_2 \end{cases}$$

berechnet. Definieren Sie dazu eine Hilfsoperation $\text{if}(x_i \neq 0) \{ \dots \} \text{else} \{ \dots \}$. Beachten Sie, dass ein WHILE-Programm keine negativen Zahlen zulässt.

Aufgabe 6.4 Paradoxon: Matrjoschkoiden Mengen

Eine Menge X heißt *n-matrjoschkoid*, falls es Mengen Y_1, \dots, Y_n gibt (nicht notwendigerweise paarweise verschieden), mit

$$X \in Y_1 \in Y_2 \in \dots \in Y_n \in X.$$

Ist die Menge $M_n := \{X \mid X \text{ ist nicht } n\text{-matrjoschkoid}\}$ selbst wieder *n-matrjoschkoid* oder nicht? Begründen Sie! Achten Sie auf den Titel der Aufgabe!

Hinweis: Ist eine 1-matrjoschkoid Menge M gegeben, so gibt es eine Menge X mit $M \in X \in M$. Damit ist aber die Menge X ebenso wieder 1-matrjoschkoid, da $X \in M \in X$.

Aufgabe 6.5 PASIC

Betrachten Sie die folgende *Primes allow significantly interesting computations* (PASIC).

Ein Programm in PASIC besteht aus einer Liste von durch ! getrennten Arbeitsanweisungen, die sequentiell ausgeführt werden. Gegeben ist eine Variable N , die durch die Eingabe auf einen Wert ≥ 1 initialisiert wird und in welche (sofern nicht anders bestimmt) das Ergebnis einer Anweisung wieder geschrieben wird. Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit p_i die i -te Primzahl (also $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$) und mit $\nu(p_i) := \max\{\ell \in \mathbb{N} : p_i^\ell \text{ teilt } N\}$ die *Vielfachheit* von p_i in N .

$+i$	Multipliziere N mit p_i .
$-i$	Teile N durch p_i .
$\leftarrow i$	Multipliziere N mit $2^{\nu(p_i)}$.
$\infty(\text{Anweisungen})$	Führe <i>Anweisungen</i> auf einer Kopie N' von N aus. Ist nach Ausführung von <i>Anweisungen</i> $N' \in \mathbb{N}$, ersetze N durch N' und wiederhole, sonst fahre fort.

Zeigen Sie, dass die Programmiersprache PASIC Turing-vollständig ist.

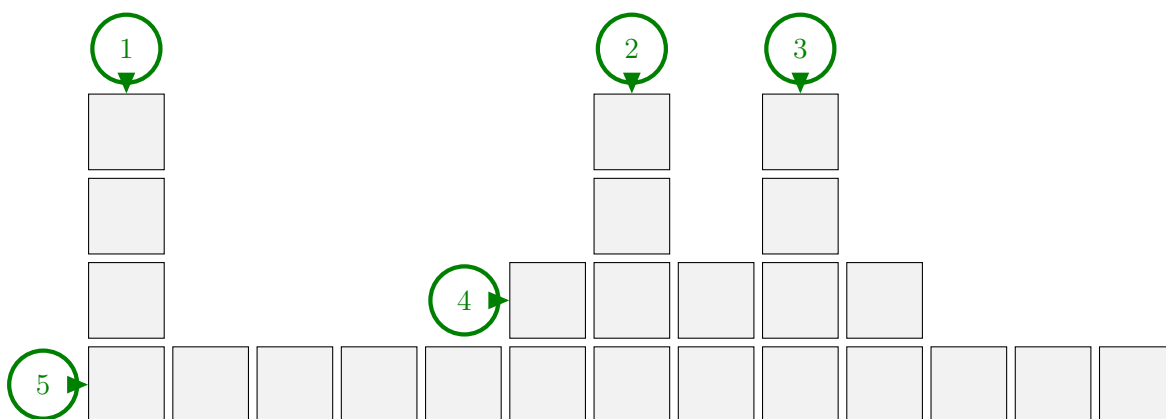
Beispiel: Bei Eingabe von $N = 3^a 5^b$ terminiert das folgende Programm mit $N = 3^{a+b}$.

$\leftarrow 2! \infty(+1! - 0)! \infty(-2)$

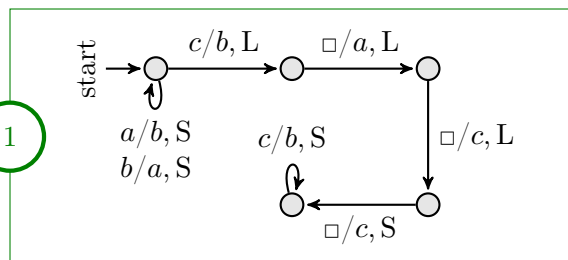
Aufgabe 6.6 Kreuzwörtertsel (rechnende Turingmaschinen)

Lösen Sie das folgende Kreuzwörtertsel. Gegeben sind rechnende Turingmaschinen und, falls notwendig, ihre Eingabe. Das Lösungswort entspricht jeweils dem Ausgabewort auf dem Band (von links nach rechts) vom SL-Kopf bis zum ersten \square . Es gilt jeweils $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $\Gamma = \Sigma \cup \{\square, A, B, C\}$.

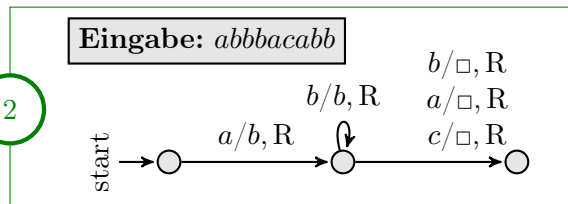
Ist keine Eingabe explizit gegeben, so müssen Sie die Eingabe selbständig mithilfe des Kreuzwörtertsels schlussfolgern.



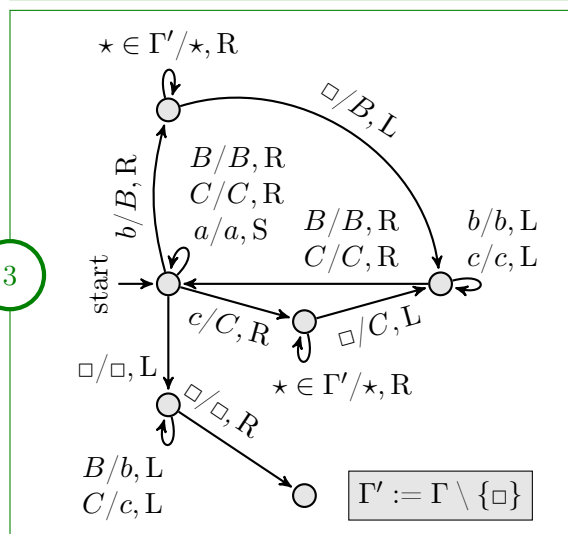
1



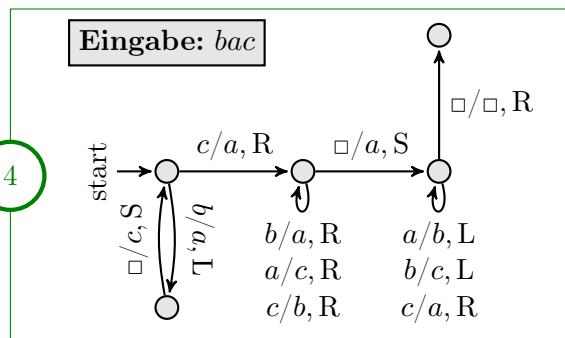
2



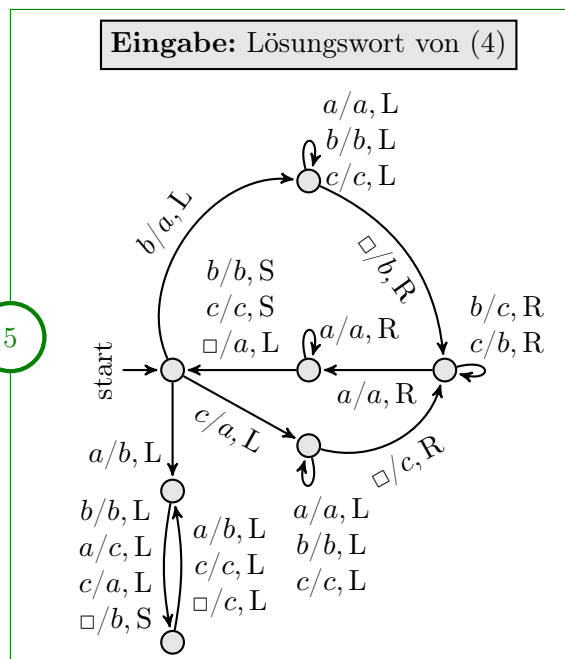
3



4



5



A mentsh zol leben shoin nor fun neigerikeit vegen.