Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/19/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	3	5	4	2	5	4	3	0	0	6	0	4	2	0	3	51

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
3. Ein *lokales Minimum* einer Funktion
   $$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$
   ($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) in einem Punkt $x \in D$.
4. Der *Grenzwert* zu einer auf $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion
   $$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Die *transponierte Matrix* zu einer $m \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die Rechenregeln für stetige Funktionen
   $$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
2. Die *Taylor-Formel* für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für einen inneren Punkt $a \in I$.

3. Der Festlegungssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe * (2 Punkte)

E wurde ermordet. Es gelten folgende Sachverhalte.

1. Der Mörder ist A oder B oder C oder D.
2. Wenn C der Mörder ist, dann ist D nicht der Mörder oder A ist der Mörder.
3. A, B, C, D sind alle verschieden.
4. Es gibt genau einen Mörder.
5. Wenn A nicht der Mörder ist, dann ist D nicht der Mörder.
6. A ist genau dann der Mörder, wenn B der Mörder ist.

Wer ist der Mörder?

Aufgabe * (2 Punkte)

Heinz Ngolo und Mustafa Müller wollen wissen, wie viele Kaulquappen sich im Teich im Wald befinden. Der Teich ist einen Meter tief und ist quadratisch mit einer Seitenlänge von zehn Metern, die Kaulquappen sind darin gleichmäßig verteilt. Heinz hat eine Teekanne dabei, in die ein halber Liter Wasser hineinpasst. Sie trinken den Tee leer und füllen die Kanne mit Teichwasser. Sie zählen, dass in der Kanne genau 23 Kaulquappen sind und schütten alles zurück. Wie viele Kaulquappen befinden sich im Teich?

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung. Zeige, dass es eine Teilmenge $S \subseteq L$ derart gibt, dass man φ als Abbildung

$$\varphi' \colon S \longrightarrow M$$

auffassen kann (φ und φ' unterscheiden sich nur hinsichtlich des Definitionsbereiches) und dass φ' bijektiv ist.

Aufgabe * (5 (3+2) Punkte)

Wir behaupten, dass die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch 8 teilbar ist.

1. Beweise diese Aussage mit vollständiger Induktion.
2. Beweise diese Aussage ohne vollständige Induktion.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{Q}$ für die Ungleichung

$$|7x-5| > |6x-7|\,.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass in einem Körper K zu jedem Element $x \neq 0$ das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Wir betrachten die Folge, die durch die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

gegeben ist. Zeige, dass dies eine Nullfolge ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe * (3 Punkte)

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{matrix} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\, . \end{matrix}$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ -9 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar und ob sie diagonalisierbar ist.