# Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/54/Klausur

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 2 | 3 | 6 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 7 | 0 | 5 | 3 | 2 | 0 | 3 | 6 | 52 |

Inhaltsverzeichnis

## Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* $T$ einer Menge $M$.
2. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper $K$.

3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

4. Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion
   $$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten $t_i$, $i = 1, \ldots, n$.

5. Eine *lineare* Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei $K$-Vektorräumen $V$ und $W$.

6. Der *Spaltenrang* einer $m \times n$-Matrix $M$ über einem Körper $K$.

## Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe von reellen Zahlen.
2. Der Satz über die Taylorreihe einer Potenzreihe.
3. Der Satz über $n$ Vektoren in einem $n$-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$.

## Aufgabe * (2 Punkte)

Erläutere das Prinzip *Beweis durch Widerspruch*.

## Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $M$ eine endliche Menge und $\varphi: M \to M$ eine Abbildung. Es sei $\varphi^n$ die $n$-fache Hintereinanderschaltung von $\varphi$ mit sich selbst. Zeige, dass es natürliche Zahlen $m > n \geq 1$ mit $\varphi^n = \varphi^m$ gibt.

## Aufgabe * (6 (1+4+1) Punkte)

Es sei

$$P = X^3 - X^2 - 5X + 6 \, .$$

1. Finde eine ganzzahlige Nullstelle von $P$.
2. Finde sämtliche reellen Nullstellen von $P$.
3. Bestimme eine Zerlegung von $P$ in Linearfaktoren.

## Aufgabe * (2 Punkte)

Eine Bahncard $25$, mit der man ein Jahr lang $25$ Prozent des Normalpreises einspart, kostet $62$ Euro und eine Bahncard $50$, mit der man ein Jahr lang $50$ Prozent des Normalpreises einspart, kostet $255$ Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard $25$ oder die Bahncard $50$ die günstigste Option?

### Aufgabe * (3 Punkte)

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz. Verwende, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ gegen $0$ konvergiert.

### Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die harmonische Reihe divergiert.

### Aufgabe (0 Punkte)

### Aufgabe (0 Punkte)

## Aufgabe * (1 Punkt)

Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(2, 7)$, der durch den Punkt $(4, -3)$ läuft.

## Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung und das Wachstumsverhalten einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

## Aufgabe (0 Punkte)

## Aufgabe * (5 Punkte)

Sei $I$ ein reelles Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann $F$ differenzierbar ist und dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

### Aufgabe * (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(0,0,1)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(2,3,0), (4,-1,2) \text{ und } (1,2,1)$$

aus.

### Aufgabe * (2 Punkte)

Es seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $K$-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ Basen von $V$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ und $\mathfrak{z} = z_1, \ldots, z_m$ Basen von $W$. Es seien $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}}$ die Übergangsmatrizen. Durch welche Übergangsmatrix wird der Basiswechsel von der Basis $(v_1,0), \ldots, (v_n,0), (0,w_1), \ldots, (0,w_m)$ zur Basis $(u_1,0), \ldots, (u_n,0), (0,z_1), \ldots, (0,z_m)$ vom Produktraum $V \times W$ beschrieben?

### Aufgabe (0 Punkte)

## Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe * (6 (2+3+1) Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2\mathrm{i} \\ 0 & 3\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von $A$.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für $\varphi$ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.