Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/2/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	3	4	3	3	3	6	5	5	4	2	3	8	3	1	64

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Betrag* einer reellen Zahl.

2. Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.

3. Der *natürliche Logarithmus*

   $$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

4. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

   $$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

5. Der von einer Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, aus einem K-Vektorraum V *aufgespannte Untervektorraum*.

6. Die *Determinante* eines Endomorphismus

   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

   auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V.

Lösung

1. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

   $$|x| = \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0\,, \\ -x, \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

2. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

   $$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

   gilt.

3. Der natürliche Logarithmus

   $$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

   ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

4. Das nach Voraussetzung existierende Oberintegral zu f über $[a, b]$ heißt bestimmtes Integral.

5. Man nennt

$$\langle v_i, \, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \mid s_i \in K, \, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

den von der Familie *aufgespannten Untervektorraum*.

6. Die Abbildung φ werde bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Nullstellen und lineare Faktoren eines Polynoms $F \in K[X]$.

2. Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Abbildung

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt

$x \in D$.

3. Der Satz über die Ableitung in einem Extremum.

Lösung

1. Ein Element $a \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von F, wenn F ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.
2. Für $f: D \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.
    1. f ist stetig im Punkt x.
    2. Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.
3. Es sei
   $$f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine Funktion, die in $c \in]a, b[$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist
   $$f'(c) = 0.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Franziska möchte mit ihrem Freund Heinz Schluss machen. Sie erwägt die folgenden drei Begründungen.

1. „Du hast dich schon am ersten Tag voll daneben benommen. Seitdem ist es von jedem Tag zum nächsten Tag nur noch schlimmer geworden. Du wirst Dich also immer völlig daneben benehmen“.
2. „Wenn ich mit Dir zusammenbleiben würde, so würde ich irgendwann als eine traurige, gelangweilte, vom Leben enttäuschte Person enden, das möchte ich aber auf gar keinen Fall“.

3. „Also, wenn Du mich nicht liebst, will ich Dich sowieso nicht. Wenn Du mich aber liebst, so komme ich zu dem Schluss, dass Du dein Verhalten mit Deinen Gefühlen nicht zur Deckung bringen kannst. Dann bist Du also unreif und dann will ich Dich auch nicht".

Welche mathematischen Beweisprinzipien spiegeln sich in den drei Begründungen wieder?

Lösung

1. Induktionsbeweis.
2. Beweis durch Widerspruch.
3. Beweis durch Fallunterscheidung.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{N}_+$. Zeige, wie man a^{10} mit vier Multiplikationen berechnen kann.

Lösung

Sei

$$b := a \cdot a = a^2$$

und

$$c := b \cdot b = b^2 = a^4 .$$

Dann ist

$$a^{10} = (c \cdot c) \cdot b$$

eine Berechnung mit vier Multiplikationen.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Induktionsschritt. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6\left(6^{n+2} + 7^{2n+1}\right) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 43 \cdot \left(6 \cdot s + 7^{2n+1}\right), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Lösung

Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R\,,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^3$) als

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}}$$

schreiben. Folgen vom Typ $a/n,\ a/n^2$ und a/n^3 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 2, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $3/2 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Lösung

Wir zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert, woraus nach Satz 9.9 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) die Konvergenz folgt. Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ ist

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 9.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)), so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{n^2}\right|$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise, dass eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen konvergiert.

Lösung

Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$|\sum_{k=m}^{n} |a_k|| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq |\sum_{k=m}^{n} |a_k|| \leq \epsilon \, ,$$

was die Konvergenz bedeutet.

Aufgabe (6 (4+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Lösung

a) Die Funktion f ist differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \, .$$

Für $x > 0$ sind diese beiden Summanden positiv, so dass die Ableitung stets positiv ist und f daher streng wachsend ist. Daher ist die Abbildung injektiv. Die Funktion ist stetig, da sie differenzierbar ist. Daher genügt es für die Surjektivität, aufgrund des Zwischenwertsatzes, nachzuweisen, dass beliebig große und beliebig kleine Werte angenommen werden.

Für $0 < x < 1$ ist $1 - \frac{1}{x} < 0$ und daher

$$f(x) \leq \ln x.$$

Da der Logarithmus für $x \rightarrow 0$ beliebig kleine Werte annimmt, gilt das auch für f.

Für $x > 1$ ist $1 - \frac{1}{x} > 0$ und daher

$$f(x) \geq \ln x.$$

Da der Logarithmus für $x \rightarrow \infty$ beliebig große Werte annimmt, gilt das auch für f.

b) Durch Einsetzen ergibt sich $f(1) = 0$, also ist $u = 1$ das Urbild von 0. Aufgrund der Berechnung der Ableitung oben ist

$$f'(1) = 2.$$

Aufgrund der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt daher

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösung

Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\frac{f^{-1}(y)-a}{y-b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \rightarrow b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Nach Satz 11.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist f^{-1} stetig. Daher konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{f^{-1}(y_n)-a}{y_n-b}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)}=\left(\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert und die zweite Gleichheit auf Lemma 8.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (5) beruht.

Aufgabe (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\, x\longmapsto f(x)=(2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Lösung

Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, liegt nur bei $2x+3=0$, also bei $x_0=-\frac{3}{2}$ eine Nullstelle vor. Unterhalb davon ist die Funktion negativ, oberhalb davon positiv.

Zur Bestimmung der lokalen Extrema leiten wir ab, was zu

$$f'(x)=2e^{-x^2}+(2x+3)(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(-4x^2-6x+2\right)$$

führt. Die Nullstellenbestimmung der Ableitung führt auf

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0.$$

Quadratisches Ergänzen führt zu

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}=0$$

bzw.

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}.$$

Also ist

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

und somit

$$x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4} \text{ und } x_2 = +\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4}.$$

Für $x < x_1$ ist die Ableitung negativ, für x mit $x_1 < x < x_2$ ist sie positiv und für $x > x_2$ wieder negativ. Daher ist die Funktion f unterhalb von x_1 streng fallend, zwischen x_1 und x_2 streng wachsend und oberhalb von x_2 wieder streng fallend. Daher liegt in x_1 ein isoliertes lokales Minimum und in x_2 ein isoliertes lokales Maximum vor. Da es sonst keine lokalen Extrema gibt, und die Funktion für $x \rightarrow -\infty$ wächst, aber negativ bleibt, und für $x \rightarrow +\infty$ fällt, aber positiv bleibt, sind dies auch globale Extrema.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2x^{-3}, \text{ also } f''(2) = \frac{1}{4}.$$

Die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = -6x^{-4}, \text{ also } f'''(2) = -\frac{3}{8}.$$

Die vierte Ableitung ist

$$f''''(x) = 24x^{-5}, \text{ also } f''''(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist demnach

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4 \cdot 2}(x-2)^2 - \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{3}{4 \cdot 4!}(x-2)^4$$

bzw.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x,$$

über $[-1, 0]$.

Lösung

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x.$$

Daher ist das bestimmte Integral gleich

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &= (0+3+1) - \left(\frac{1}{2}(-1)^4 + 3e^{-1} + \cos(-1)\right) \\ &= \frac{7}{2} - 3e^{-1} - \cos(-1).\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1,0,0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1,-2,5),\,(4,0,3) \text{ und } (2,1,1)$$

aus.

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 1 \\ -2x + z &= 0 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der dritten Gleichung die Variable y aus der ersten Gleichung. Das resultierende System ist ($I' = 3I - 4III$)

$$\begin{array}{rcl} -17x \quad + 2z & = & 3 \\ -2x \quad + z & = & 0 \\ 5x + 3y + z & = & 0\,. \end{array}$$

Wir eliminieren nun aus I' mittels II die Variable z, das ergibt ($I' - 2II$)

$$\begin{array}{rcl} -13x \qquad & = & 3 \\ -2x \quad + z & = & 0 \\ 5x + 3y + z & = & 0\,. \end{array}$$

Wir können jetzt dieses System lösen. Es ist

$$x = -\frac{3}{13},$$
$$z = 2x = -\frac{6}{13}$$

und

$$y = \frac{-5x - z}{3} = \frac{15 + 6}{39} = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}\,.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{7}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (8 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von V bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

Lösung

Die Familie sei zunächst eine Basis. Dann ist sie insbesondere ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \, .$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie.

Sei nun die Familie ein minimales Erzeugendensystem. Um zu zeigen, dass eine Basis vorliegt, muss also lediglich gezeigt werden, dass die Familie linear unabhängig ist. Nehmen wir an, sie sei nicht linear unabhängig. Dann gibt es eine Darstellung

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \, ,$$

wobei mindestens ein Koeffizient $a_i \neq 0$ ist. Wir behaupten, dass dann auch die um v_i reduzierte Familie noch ein Erzeugendensystem ist im Widerspruch zur Minimalität. Dazu sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor, den man als

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_i v_i + \cdots + b_n v_n$$

schreiben kann. Wir können v_i schreiben als

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_i} v_n \,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v &= b_1 v_1 + \cdots + b_i v_i + \cdots + b_n v_n \\ &= b_1 v_1 + \cdots + b_i \left(-\frac{a_1}{a_i} v_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_i} v_n \right) + \cdots + b_n v_n \,, \end{aligned}$$

woraus ablesbar ist, dass man v auch als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ darstellen kann.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Lösung

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Die Determinante der Matrix ist

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} x^2+x & -x \\ -x^3+2x^2+5x-1 & x^2-x \end{pmatrix} &= (x^2+x)(x^2-x)+x(-x^3+2x^2+5x-1) \\ &= x^4-x^2-x^4+2x^3+5x^2-x \\ &= 2x^3+4x^2-x \\ &= x(2x^2+4x-1).\end{aligned}$$

Dies ist gleich 0 bei $x_1 = 0$ oder bei $2x^2+4x-1=0$. Diese quadratische Gleichung ist äquivalent zu $x^2+2x-\frac{1}{2}=0$ bzw. zu

$$(x+1)^2-1-\frac{1}{2}=0.$$

Also ist

$$x+1=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

und damit

$$x_2=\sqrt{\frac{3}{2}}-1 \text{ und } x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}-1.$$

Die einzigen komplexen Zahlen, bei denen die Matrix nicht invertierbar ist, sind also

$$0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}-1,\ -\sqrt{\frac{3}{2}}-1.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Eigenvektoren der Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \pi x$.

Lösung

Jede reelle Zahl $x \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert π.