Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/5/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	2	4	4	3	6	2	4	4	5	4	5	6	4	64

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

3. Das *Maximum* der Funktion
   $$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$
   wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.

4. Eine *Treppenfunktion*
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.

6. Ein *Eigenwert* zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
   auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Unter der *leeren Menge* versteht man diejenige Menge, die kein Element besitzt.

2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
   $$|x - x_n| \leq \epsilon$$
   gilt.

3. Man sagt, dass f in $x \in M$ das Maximum annimmt, wenn
   $$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt.}$$

4. Eine Funktion

$$t \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

5. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren

6. Ein Element $\lambda \in K$ heißt ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit

$$\varphi(v) = \lambda v$$

gibt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer reellen Folge.
2. Der Satz über die Differenz zwischen Stammfunktionen.
3. Der Satz über die Dimension des Standardraumes.

Lösung

1. Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.
2. Sei I ein reelles Intervall und sei
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Es seien F und G

zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.
3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n.

Aufgabe (2 Punkte)

Begründe das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Lösung

Wegen der ersten Voraussetzung gilt $A(0)$. Wegen der zweiten Voraussetzung gilt auch $A(1)$. Deshalb gilt auch $A(2)$. Deshalb gilt auch $A(3)$. Da man so beliebig weitergehen kann und dabei jede natürliche Zahl erhält, gilt die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n.

Aufgabe (3 Punkte)

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

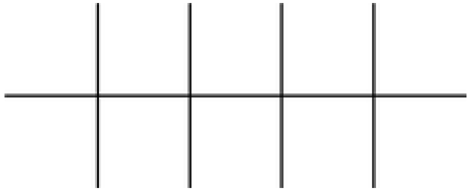
Lösung

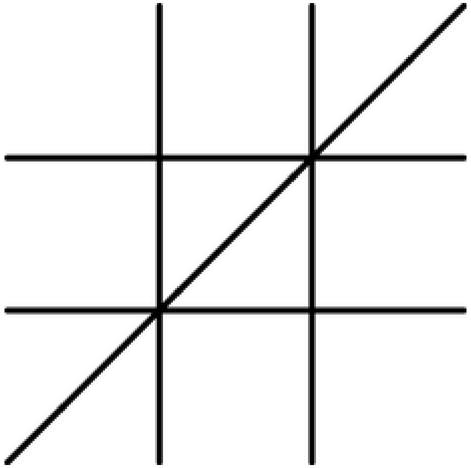
Es gibt insgesamt 5 Fladenbrote, so dass also jede Person $\frac{5}{3}$ Brote isst. Somit gibt A genau $\frac{1}{3}$ Brot an C ab und B gibt $\frac{4}{3}$ Brote an C ab. B gibt also 4-mal soviel ab wie A und bekommt daher 4 Taler, und A bekommt einen Taler von C.

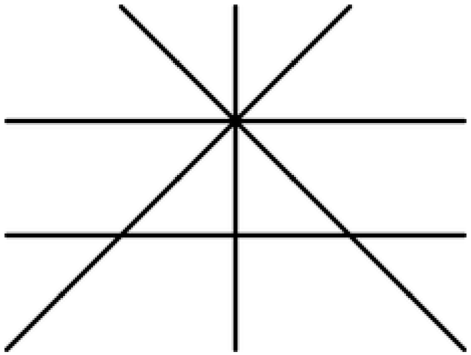
Aufgabe (2 Punkte)

Skizziere möglichst viele wesentlich verschiedene Konfigurationen von fünf Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in vier Schnittpunkten treffen.

Lösung







Aufgabe (4 Punkte)

Zeige durch Induktion über n, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Lösung

Es sei $a > 0$ fixiert. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt mit $q = 0$ und $r = n = 0$. Für den Induktionsschluss sei die Aussage für n bewiesen, d.h. wir haben eine Darstellung $n = aq + r$ mit $r < a$ und müssen eine ebensolche Darstellung für $n + 1$ finden. Wenn $r < a - 1$ ist, so ist

$$n + 1 = aq + r + 1$$

und wegen $r+1<a$ ist dies eine gesuchte Darstellung. Ist hingegen $r=a-1$, so ist

$$n+1=aq+r+1=aq+a=a(q+1)+0\,,$$

und dies ist eine gesuchte Darstellung.

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P=X^3-2\mathrm{i}X^2+4X-1 \quad \text{und} \quad Q=\mathrm{i}X-3+2\mathrm{i}$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Lösung

$$\begin{aligned}
P(Q) &= Q^3-2\mathrm{i}Q^2+4Q-1\\
&= (\mathrm{i}X-3+2\mathrm{i})^3-2\mathrm{i}(\mathrm{i}X-3+2\mathrm{i})^2+4(\mathrm{i}X-3+2\mathrm{i})-1\\
&= -\mathrm{i}X^3+3\mathrm{i}^2(-3+2\mathrm{i})X^2+3\mathrm{i}(-3+2\mathrm{i})^2X+(-3+2\mathrm{i})^3\\
&\quad -2\mathrm{i}\left(\mathrm{i}^2X^2+2(-3+2\mathrm{i})\mathrm{i}X+(-3+2\mathrm{i})^2\right)+4\mathrm{i}X-12+8\mathrm{i}-1\\
&= -\mathrm{i}X^3+9X^2-6\mathrm{i}X^2+3\mathrm{i}(9-4-12\mathrm{i})X-27+54\mathrm{i}+36-8\mathrm{i}\\
&\quad +2\mathrm{i}X^2-12X+8\mathrm{i}X-18\mathrm{i}-24+8\mathrm{i}+4\mathrm{i}X-13+8\mathrm{i}\\
&= -\mathrm{i}X^3+(9-4\mathrm{i})X^2+(24+27\mathrm{i})X-28+44\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3\sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir erweitern den Bruch mit $1/n^3$ $(n \geq 1)$ und schreiben

$$\frac{3\sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n} = \frac{3\frac{\sin^4 n}{n^3} - 7\frac{n^3}{n^3} + 11\frac{n}{n^3}}{5\frac{n^3}{n^3} - 4\frac{n^2}{n^3} - \frac{\cos n}{n^3}}$$
$$= \frac{3\frac{\sin^4 n}{n^3} - 7 + 11\frac{1}{n^2}}{5 - 4\frac{1}{n} - \frac{\cos n}{n^3}}$$

Dabei konvergieren $11\frac{1}{n^2}$ und $-4\frac{1}{n}$ gegen 0 und wegen $-1 \leq \sin n, \cos n \leq 1$ konvergieren auch $\frac{\sin^4 n}{n^3}$ und $\frac{\cos n}{n^3}$ gegen 0. Somit konvergiert die Folge gegen $-\frac{7}{5}$.

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Lösung

Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0).$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \quad \text{und} \quad b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \quad \text{und} \quad b_1 := c_0.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{\ln\left(2x^2\right)}{7^x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Darstellung $7^x = e^{x\ln(7)}$. Aufgrund der Quotientenregel und der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(2x^2)}{e^{x\ln(7)}}\right)' \\ &= \frac{e^{x\ln(7)}\,\frac{1}{2x^2}4x - \ln(2x^2)\ln(7)e^{x\ln(7)}}{(e^{x\ln(7)})^2} \\ &= \frac{2e^{x\ln(7)}x^{-1} - \ln(2x^2)\ln(7)e^{x\ln(7)}}{e^{2x\ln(7)}} \\ &= \frac{2e^{x\ln(7)} - x\ln(2x^2)\ln(7)e^{x\ln(7)}}{xe^{2x\ln(7)}} \\ &= \frac{2 - x\ln(2x^2)\ln(7)}{x7^x}. \end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^2e^{-t}.$$

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(t) = (2t - t^2)e^{-t} = t(2-t)e^{-t},$$

deren Nullstellen sind 0 und 2. Die zweite Ableitung ist

$$f''(t) = (t^2 - 4t + 2)e^{-t},$$

so dass $f''(0) > 0$ und $f''(2) < 0$ ist. Daher liegt in 0 ein (isoliertes) lokales Minimum mit dem Wert $f(0) = 0$ und in 2 ein (isoliertes) lokales Maximum mit dem Wert $4 \cdot e^{-2}$ vor. Da für $t \neq 0$ sowohl t^2 als auch e^{-t} positiv sind, liegt in 0 auch das globale Minimum vor. Für $t \to -\infty$ wächst die Funktion hingegen gegen $+\infty$, sodass in 2 kein globales Maximum vorliegt.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir berechnen zuerst die Ableitungen, diese sind

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2xe^{x^2} - 1, \\
f''(x) &= 2e^{x^2} + 2x2xe^{x^2} = \left(2 + 4x^2\right)e^{x^2}, \\
f'''(x) &= (8x)e^{x^2} + 2x\left(2 + 4x^2\right)e^{x^2} = \left(12x + 8x^3\right)e^{x^2}, \\
f''''(x) &= \left(12 + 24x^2\right)e^{x^2} + 2x\left(12x + 8x^3\right)e^{x^2} = \left(12 + 48x^2 + 16x^4\right)e^{x^2}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$f(1) = e - 1,\ f'(1) = 2e - 1,\ f''(1) = 6e,\ f'''(1) = 20e,\ f''''(1) = 76e.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 ist demnach

$$e - 1 + (2e - 1)(x - 1) + 3e(x - 1)^2 + \frac{10e}{3}(x - 1)^3 + \frac{19e}{6}(x - 1)^4$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $f(x) := \dfrac{x^2 + 4x - 3}{x^2 + 7}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 2$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Lösung

Die Ableitung von $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 3}{x^2 + 7}$ ist

$$f'(x) = \frac{(x^2+7)(2x+4) - 2x(x^2+4x-3)}{(x^2+7)^2}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} f(0) &= -\frac{3}{7}\,, \\ f'(0) &= \frac{28}{49} = \frac{4}{7}\,, \\ f(2) &= \frac{9}{11}\,, \\ f'(2) &= \frac{88-36}{121} = \frac{52}{121}\,. \end{aligned}$$

Diese Daten legen die linearen Approximationen fest. Wir setzen das gesuchte Polynom als

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

an. Die Ableitung davon ist

$$h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\,.$$

Aus den Werten an der Stelle 0 folgt direkt

$$d = -\frac{3}{7}$$

und

$$c = \frac{4}{7}\,.$$

Somit verbleiben die beiden Bedingungen

$$h(2) = 8a + 4b + 2 \cdot \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{9}{11}$$

und

$$h'(2) = 12a + 4b + \frac{4}{7} = \frac{52}{121} \, .$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen führt auf

$$-4a + \frac{1}{7} = \frac{9}{11} - \frac{52}{121} = \frac{99-52}{121} = \frac{47}{121}$$

bzw.

$$-4a = \frac{47}{121} - \frac{1}{7} = \frac{329-121}{847} = \frac{208}{847} \, ,$$

also

$$a = -\frac{52}{847} \, .$$

Somit ist

$$b = -3a - \frac{1}{7} + \frac{13}{121} = 3\left(\frac{52}{847}\right) - \frac{1}{7} + \frac{13}{121} = \frac{52-121+91}{847} = \frac{22}{847} \, .$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$h(x) = -\frac{52}{847}x^3 + \frac{22}{847}x^2 + \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} \, .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Lösung

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^3 t\,dt &= \int_0^x \sin t \cdot \sin^2 t\,dt\\ &= \int_0^x \sin t \cdot \left(1-\cos^2 t\right)dt\\ &= \int_0^x \sin t\,dt - \int_0^x (\sin t\cos t)\cos t\,dt\\ &= \int_0^x \sin t\,dt - \left(\frac{\sin^2 t}{2}\cos t\right)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\left(\int_0^x \sin^3 t\,dt\right).\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit 2 und Umstellen erhält man

$$\begin{aligned}3\int_0^x \sin^3 t\,dt &= 2\int_0^x \sin t\,dt - \sin^2 x\cos x\\ &= -2\cos x - \sin^2 x\cos x.\end{aligned}$$

Also ist

$$-\frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}\sin^2 x\cos x$$

eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (bezüglich der Standardbasis) festgelegte lineare Abbildung. Bestimme die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung

Es ist

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Diese Bildvektoren müssen wir bezüglich der Basis ausdrücken. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$9 = a + 4b \text{ und } 14 = 4a + 2b$$

führt auf

$$-19 = -7a$$

und damit auf $a = \frac{19}{7}$ und $b = \frac{11}{7}$. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 14 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$22 = c + 4d \text{ und } 14 = 4c + 2d$$

führt auf

$$-6 = -7c$$

und damit auf $c = \frac{6}{7}$ und $d = \frac{37}{7}$. Daher ist die beschreibende Matrix von φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{37}{7} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (6 (2+4) Punkte)

Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung.

a) Zeige, dass der Kern von φ ein Untervektorraum von V ist.

b) Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

a) Bei einer linearen Abbildung ist $\varphi(0) = 0$, also ist $0 \in \operatorname{kern} \varphi$. Seien $u, v \in \operatorname{kern} \varphi$. Dann ist $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0 + 0 = 0$, also $u + v \in \operatorname{kern} \varphi$. Für $v \in \operatorname{kern} \varphi$ und $a \in K$ ist schließlich

$$\varphi(av) = a\varphi(v) = a0 = 0\,,$$

also $av \in \operatorname{kern} \varphi$. Damit ist der Kern ein Untervektorraum von V.

b) Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$.
Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0\,.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe (4 Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M=\begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 54+72\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

a) Wir berechnen die Determinante der Matrix. Diese ist

$$\begin{aligned} \det M &= (2+5\mathrm{i})(6-2\mathrm{i})-(3-4\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) \\ &= 12+10+30\mathrm{i}-4\mathrm{i}-(3-8-4\mathrm{i}-6\mathrm{i}) \\ &= 27+36\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Matrix invertierbar.

b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 54+72\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \det M \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher können wir direkt eine Lösung angeben, nämlich

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 6-2\mathrm{i} \\ -(3-4\mathrm{i}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12-4\mathrm{i} \\ -6+8\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Es ist ja

$$\begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(6-2\mathrm{i}) \\ 2(-3+4\mathrm{i}) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} (2+5\mathrm{i})(6-2\mathrm{i}) + (1-2\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i}) \\ (3-4\mathrm{i})(6-2\mathrm{i}) + (6-2\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \det M \\ 0 \end{pmatrix}.$$