Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/4/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
Punkte	3	3	3	6	5	4	3	4	3	3	2	5	4	4	5	3	4	64

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.
2. Eine *ungerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Eine reelle *Intervallschachtelung*.
4. Die *Taylor-Reihe* im Punkt a zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.
5. Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion

   $$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$.
6. Ein *Eigenvektor* zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

   auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und n sind.
2. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

   $$f(-x) = -f(x)$$

   gilt.
3. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

   $$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$

   in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

   $$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

   gegen 0 konvergiert.

4. Die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a ist
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

5. Das Treppenintegral von t ist durch
$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$
definiert.

6. Ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, heißt ein *Eigenvektor* von φ, wenn
$$\varphi(v) = \lambda v$$
mit einem gewissen $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über das angenommene Maximum* einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
(welche Voraussetzungen muss die Funktion f und das Intervall I erfüllen)?

2. Die *Kreisgleichung* für die trigonometrischen Funktionen.

3. Der allgemeine Entwicklungssatz für die Determinante.

Lösung

1. Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei
   $$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit
   $$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in [a,b].$$

2. Die trigonometrischen Funktionen
   $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos x,$$
   und
   $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x,$$
   erfüllen für $x \in \mathbb{R}$ die Kreisgleichung
   $$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1\,.$$

3. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)
   $$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es soll Holz unterschiedlicher Länge (ohne Abfall) in Stücke zerlegt werden, die zwischen 30 und 40 cm lang sein sollen (jeweils einschließlich). Für welche Holzlängen ist dies möglich?

Lösung

Es sei ℓ die Länge des Holzes, das zerlegt werden soll. Für $\ell < 30$ ist eine Zerlegung offenbar nicht möglich. Für $30 \leq \ell \leq 40$ kann man das Stück so lassen, wie es ist, eine Zerlegung ist also möglich. Für $40 < \ell < 60$ ist eine Zerlegung nicht möglich, da das Stück zu lang ist, um es direkt zu übernehmen, aber zu kurz, um es in zwei oder mehr Teile zu zerlegen. Für $60 \leq \ell \leq 80$ kann man das Stück in zwei (beispielsweise gleichgroße) Teile unterteilen, eine Zerlegung ist also möglich. Für $80 < \ell < 90$ ist keine Zerlegung möglich. Für zwei Teile ist das Stück nämlich zu lang und für drei oder mehr Teile ist es zu kurz. Ab

$$\ell \geq 90$$

ist eine Zerlegung stets möglich. Die Länge erfüllt dann nämlich

$$30s \leq \ell < 30(s+1)$$

mit einer natürlichen Zahl $s \geq 3$. Wenn man ℓ durch s dividiert, erhält man

$$30 \leq \frac{\ell}{s} < \frac{30(s+1)}{s} = 30\frac{(s+1)}{s} \leq 30\frac{4}{3} \leq 40\,,$$

was als Länge eines Teilstücks erlaubt ist.

Aufgabe (6 (1+1+1+2+1) Punkte)

Wir betrachten die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	3	5	1	7	8	2	6	4

gegebene Abbildung F von $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ in sich selbst.

1. Erstelle eine Wertetabelle für $F^2 = F \circ F$.
2. Erstelle eine Wertetabelle für $F^3 = F \circ F \circ F$.
3. Begründe, dass sämtliche iterierten Hintereinanderschaltungen F^n bijektiv sind.
4. Bestimme für jedes $x \in M$ das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass
   $$F^n(x) = x$$
   ist.
5. Bestimme das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass
   $$F^n(x) = x$$
   für alle $x \in M$ ist.

Lösung

1. Es ist

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(F(x))$	1	8	3	6	4	5	2	7

2. Es ist

x	1	2	3	4	5	6	7	8

$F(F(F(x)))$ 3 4 1 2 7 8 5 6

3. Aus der Wertetabelle kann man unmittelbar entnehmen, dass F bijektiv ist. Nach Satz . (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (3) sind dann sämtliche Hintereinanderschaltungen der Abbildung mit sich selbst wieder bijektiv.
4. Die Abbildungsvorschrift bewirkt
$$1 \mapsto 3 \mapsto 1$$
und
$$2 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 7 \mapsto 6 \mapsto 2.$$
Für $x = 1, 3$ ist also $n = 2$ und für $x = 2, 5, 8, 4, 7, 6$ ist $n = 6$.
5. Bei $n = 6$ sind nach Teil (4) die Zahlen $2, 5, 8, 4, 7, 6$ wieder an ihrer Stelle, aber auch $1, 3$ sind an ihrer Stelle, da 6 ein Vielfaches von 2 ist.

Aufgabe (5 Punkte)

Finde die komplexen Quadratwurzeln von

$$w = \frac{-5 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

über den Ansatz

$$(a + b\mathrm{i})^2 = w\,.$$

Lösung

Der Ansatz

$$(a+b\mathrm{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} = w = \frac{-5+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

führt auf die zwei reellen Gleichungen

$$a^2 - b^2 = \frac{-5}{2}$$

und

$$2ab = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Daraus folgt direkt, dass a und b nicht 0 sein können. Wir lösen die zweite Gleichung nach b auf und erhalten

$$b = \frac{\sqrt{3}}{4a}\,.$$

Dies setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten

$$a^2 - b^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4a}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{3}{16a^2}\right) = -\frac{5}{2}\,.$$

Multiplikation mit a^2 und umstellen ergibt

$$a^4 + \frac{5}{2}a^2 - \frac{3}{16} = 0\,.$$

Dies ist eine biquadtatische Gleichung, die zugrunde liegende quadratische Gleichung ist (mit $y = a^2$)

$$y^2+\frac{5}{2}y-\frac{3}{16}=0$$

mit den Lösungen

$$y_1\,,y_2=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{3}{4}}}{2}=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{28}{4}}}{2}=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{7}}{2}=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\,.$$

Dabei ist

$$y_1=-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{4}\left(-5+2\sqrt{7}\right)$$

positiv und besitzt die reellen Quadratwurzeln

$$a_1\,,a_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-5+2\sqrt{7}}$$

und somit sind die komplexen Quadratwurzeln von w gleich

$$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{-5+2\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{-5+2\sqrt{7}}}\mathrm{i}$$

und

$$z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{-5+2\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{-5+2\sqrt{7}}}\mathrm{i}\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Produktfolge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

ist.

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 7.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C := \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Lösung

Für reelles x ist immer $-1 \leq \sin x \leq 1$. Somit ist

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Da die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergiert und dies auch für die negative Folge $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gilt, muss aufgrund des Quetschkriteriums auch die Folge $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergieren.

Aufgabe (4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $\left|a\right| < 1$. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(ax) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte. Zeige, dass f konstant ist.

Lösung

Unter der gegebenen Voraussetzung konvergiert die Folge a^n gegen 0. Daher konvergiert auch für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die Folge $a^n x$ gegen 0. Durch iterative Anwendung der Voraussetzung an f erhält man

$$f(x) = f(ax) = f(a^2 x) = \ldots = f(a^n x)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist also

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(a^n x) = f(\lim_{n \to \infty} a^n x) = f(0)\,.$$

Somit ist $f(0)$ der einzige Wert der Funktion.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))).

Lösung

Nach Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n) \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= (-1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= -\sin x,
\end{aligned}
$$

wobei wir im vorletzten Schritt $k = n - 1$ gesetzt haben.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir müssen das Polynom

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k$$

berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,,\\
f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,\\
f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\,,\\
f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

und

$$f''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

Daher ist das vierte Taylor-Polynom (also die Taylor-Reihe bis zum Grad vier) gleich

$$1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4.$$

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Lösung

a) Die Länge des Intervalls ist 9, daher muss die Länge der Teilintervalle gleich $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1{,}5$ sein. Dies ergibt die Teilintervalle

$$[-4,\frac{-5}{2}],\ [\frac{-5}{2},-1],\ [-1,\frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2},2],\ [2,\frac{7}{2}],\ [\frac{7}{2},5].$$

b) Die Treppenfunktion, die abwechselnd die Werte 2 und -1 besitzt, hat das Treppenintegral

$$1{,}5\cdot(2-1+2-1+2-1)=1{,}5\cdot 3=4{,}5\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Lösung

Es sei $a \in [6, 21]$ der Anfangszeitpunkt des Sonnenbades. Die Gesamteinstrahlung der Sonne in der Stunde $[a, a+1]$ ist das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} (-t^3 + 27t^2 - 120t)\, dt \\ &= \left(-\frac{1}{4}t^4 + 9t^3 - 60t^2\right)|_a^{a+1} \\ &= \left(-\frac{1}{4}(a+1)^4 + 9(a+1)^3 - 60(a+1)^2\right) - \left(-\frac{1}{4}a^4 + 9a^3 - 60a^2\right) \\ &= -\frac{1}{4}(4a^3 + 6a^2 + 4a + 1) + 9(3a^2 + 3a + 1) - 60(2a + 1) \\ &= -a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}. \end{aligned}$$

Für diese Funktion muss das Maximum im Intervall $[6, 21]$ bestimmt werden. Dafür berechnen wir die Ableitung, diese ist

$$S'(a) = \left(-a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}\right)' = -3a^2 + 51a - 94\,.$$

Die Nullstellenberechnung dieser Ableitung führt auf $a^2 - 17a + \frac{94}{3} = 0$ bzw. auf

$$\left(a - \frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \frac{289}{4} = \frac{-376 + 867}{12} = \frac{491}{12}\,.$$

Also ist

$$a_0 = \sqrt{\frac{491}{12}} + \frac{17}{2} \cong 14,8966 \cong 14 \text{ Uhr } 54$$

(die negative Wurzel muss nicht berücksichtigt werden, da diese zu einem a außerhalb des Definitionsbereiches führt). Die zweite Ableitung

$$S''(a) = -6a + 51$$

ist an der Stelle a_0 negativ, so dass dort das Maximum vorliegt. Da die Ableitung keine weiteren Nullstellen im Intervall besitzt, müssen die Randpunkte nicht gesondert betrachtet werden.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Newton-Leibniz-Formel.

Lösung

Aufgrund von Fakt ***** existiert das Integral. Mit der Integralfunktion

$$G(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) = G(b) - G(a)\,.$$

Aufgrund von Fakt ***** ist G differenzierbar mit

$$G'(x) = f(x)\,,$$

d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Fakt ***** ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}.$$

Lösung

Wir lösen zuerst das lineare Gleichungssystem

$$a\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}.$$

Die Zeilenoperation $IV = 2II - III$ führt auf

$$(IV)\;\; 7b - c = -14$$

und $V = I + 2IV$ führt auf

$$(V)\;\; 15b = -25.$$

Damit ist

$$b = \frac{-25}{15} = -\frac{5}{3}$$

und

$$2c = 3 - b = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}\,,$$

also

$$c = \frac{7}{3},$$

und

$$a = -5 - 4b - c = -5 - 4\left(\frac{-5}{3}\right) - \frac{7}{3} = \frac{-15}{3} + \frac{20}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} &= \varphi\left(-\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\
&= -\frac{2}{3} \cdot \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \cdot \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{3} \cdot \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 - \frac{5}{3} + \frac{49}{3} \\ \frac{4}{3} + \frac{14}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ \frac{18}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man gebe Beispiele für a, b, c derart, dass der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum die Dimension $0, 1, 2, 3$ besitzt.

Lösung

Sei $a = b = c = 0$. Dann steht hier dreimal der Nullvektor und der davon erzeugte Untervektorraum ist der Nullraum, welcher die Dimension 0 besitzt.

Sei $a = b = c = 1$. Dann steht hier dreimal der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der davon erzeugte Untervektorraum besitzt die Dimension 1.

Sei $a = 0$, $b = 1$ und $c = -1$. Dann liegen die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vor. Addition dieser drei Vektoren ergibt den Nullvektor, so dass eine lineare Abhängigkeit vorliegt und die Dimension des erzeugten Raumes maximal 2 sein kann. Da die ersten beiden Vektoren offenbar linear unabhängig sind, ist die Dimension genau 2.

Sei $a = 1$ und $b = c = 0$. Dann liegt die Standardbasis vor und der erzeugte Vektorraum ist $\mathbb{R}^3$, also dreidimensional.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Determinante von A ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -10 - 2(-4) = -2$$

und die Determinante von B ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -9 + 12 = 3\,.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 31 \\ 2 & -6 & -1 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned}\det AB &= \det \begin{pmatrix} 1 & 14 & 31 \\ 2 & -6 & -1 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix} \\ &= -90+8-2(14\cdot 15-8\cdot 31) \\ &= -82-2(210-248) \\ &= -82-2(-38) \\ &= -82+76 \\ &= -6.\end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Produkt der beiden einzelnen Determinanten überein.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit Vielfachheiten und die Eigenräume zur reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Das charakteristische Polynom ist

$$\det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix} = x^3 - x + x = x^3 \,.$$

Somit ist 0 der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Der Kern von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Dabei ist klar, dass dies zum Kern gehört. Der Rang der Matrix ist 2, da die beiden ersten Zeilen linear unabhängig sind. Nach der Dimensionsformel ist also der Kern eindimenional und die geometrische Vielfachheit ist 1.