Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/4/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	$\sum$
Punkte	3	3	3	6	5	4	3	4	3	3	2	5	4	4	5	3	4	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.
2. Eine *ungerade* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Eine reelle *Intervallschachtelung*.
4. Die *Taylor-Reihe* im Punkt a zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.
5. Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion
   $$t: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung
   $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$.
6. Ein *Eigenvektor* zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow V$$
   auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über das angenommene Maximum* einer Funktion
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   (welche Voraussetzungen muss die Funktion f und das Intervall I erfüllen)?
2. Die *Kreisgleichung* für die trigonometrischen Funktionen.

3. Der allgemeine Entwicklungssatz für die Determinante.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es soll Holz unterschiedlicher Länge (ohne Abfall) in Stücke zerlegt werden, die zwischen 30 und 40 cm lang sein sollen (jeweils einschließlich). Für welche Holzlängen ist dies möglich?

Aufgabe * (6 (1+1+1+2+1) Punkte)

Wir betrachten die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	3	5	1	7	8	2	6	4

gegebene Abbildung F von $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ in sich selbst.

1. Erstelle eine Wertetabelle für $F^2 = F \circ F$.
2. Erstelle eine Wertetabelle für $F^3 = F \circ F \circ F$.
3. Begründe, dass sämtliche iterierten Hintereinanderschaltungen F^n bijektiv sind.
4. Bestimme für jedes $x \in M$ das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass
   $$F^n(x) = x$$
   ist.
5. Bestimme das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass
   $$F^n(x) = x$$
   für alle $x \in M$ ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Finde die komplexen Quadratwurzeln von

$$w = \frac{-5 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

über den Ansatz

$$(a+b\mathrm{i})^2 = w\,.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Produktfolge $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n\in\mathbb{N}_+.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Sei $a\in\mathbb{R}$, $|a|<1$. Es sei

$$f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto f(x),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(ax)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gelte. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))).

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Newton-Leibniz-Formel.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man gebe Beispiele für a, b, c derart, dass der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum die Dimension $0, 1, 2, 3$ besitzt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit Vielfachheiten und die Eigenräume zur reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$