Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/38/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	3	1	2	4	7	2	4	1	4	6	0	0	4	4	6	5	59

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung
   $$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$.

3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

4. Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5. Die *Matrizenmultiplikation*.

6. Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix M über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Division mit Rest* im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

2. Die Ableitung des Sinus und des Kosinus.

3. Der Satz über die Beschreibung einer linearen Abbildung bei einem Basiswechsel.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

1. Finde eine ganzzahlige Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ für die Gleichung
$$x^2 - y^3 + 2 = 0\,.$$
2. Zeige, dass
$$\left(\frac{383}{1000}, \frac{129}{100} \right)$$
eine Lösung für die Gleichung
$$x^2 - y^3 + 2 = 0$$
ist.

Aufgabe * (1 Punkt)

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{33}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme für das Polynom

$$P = -6X^9 - 5X^8 - 4X^7 + \frac{1}{9}X^6 + X^2 + X$$

den Grad, den Leitkoeffizienten, den Leitterm und den Koeffizienten zu X^6.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente reelle Folge beschränkt ist.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto e^x,$$

keine rationale Funktion ist.

Aufgabe * (1 Punkt)

Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(-5, 5)$, der durch den Punkt $(-4, -1)$ läuft.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

die Extrema.

Aufgabe * (6 Punkte)

Sei

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige $f = 0$.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & x \geq 0\,, \\ & y + x \geq 0\,, \\ & -1 - y \leq -x\,, \\ & 5y - 2x \leq 3\,, \end{aligned}$$

gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

Aufgabe * (4 Punkte)

Sei V der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 4 mit der Basis

$$x^i, 0 \leq i \leq 4.$$

Erstelle für die Ableitungsabbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V, \, P \longmapsto P',$$

die beschreibende Matrix bezüglich dieser Basis.

Bestimme den Kern und das Bild dieser Abbildung sowie deren Dimensionen.

Aufgabe * (6 Punkte)

Es seien $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ Matrizen über einem Körper K mit

$$A \circ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass dann auch

$$M \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.