# Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/8/Klausur

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 2 | 3 | 9 | 5 | 4 | 3 | 4 | 3 | 64 |

## Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung
   $$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Ein *Körper*.
3. Der *Tangens hyperbolicus*.
4. Die Zahl $\pi$ (gefragt ist nach der analytischen Definition).
5. Eine *lineare* Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei $K$-Vektorräumen $V$ und $W$.
6. Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einem Endomorphismus
   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
   auf einem $K$-Vektorraum $V$.

## Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
2. Die *Regel von l'Hospital*.

3. Der *Determinantenmultiplikationssatz*.

## Aufgabe * (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

| $p$ | $q$ | $?$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | f |
| f | f | f |

## Aufgabe * (1 Punkt)

Ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+,\ (a,b) \longmapsto (a+b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

## Aufgabe * (2 Punkte)

Im Wald lebt ein Riese, der $8$ Meter und $37$ cm groß ist, sowie eine Kolonie von Zwergen, die eine Schulterhöhe von $3$ cm haben und mit dem Kopf insgesamt $4$ cm groß sind. Hals und Kopf des Riesen sind $1,23$ Meter hoch. Auf der Schulter des Riesen steht ein Zwerg. Wie viele Zwerge müssen aufeinander (auf den Schultern) stehen, damit der oberste Zwerg mit dem Zwerg auf dem Riesen zumindest gleichauf ist?

## Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise die allgemeine binomische Formel.

## Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

## Aufgabe * (3 Punkte)

Vergleiche

$$\sqrt{3} + \sqrt{10} \text{ und } \sqrt{5} + \sqrt{6}.$$

## Aufgabe * (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „$P$ durch $T$" für die beiden Polynome $P = 6X^3 + X + 1$ und $T = 3X^2 + 2X - 4$ durch.

## Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^n .$$

## Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme den folgenden Funktionslimes

$$\lim_{x\rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\ln x}.$$

## Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-6}$$

im Punkt $a=-1$ bis zum Grad $\leq 2$.

## Aufgabe * (9 (1+1+2+5) Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^2-3x+2$$

und

$$g(x) = 2x+1\,.$$

1. Bestimme die Nullstellen von $f$.
2. Bestimme das globale Minimum von $f$.
3. Finde mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{8}$ ein $x \in [0,1]$ mit
   $$f(x)=1\,.$$
4. Die Graphen zu $f$ und zu $g$ begrenzen eine endliche Fläche. Skizziere die Situation und berechne den Flächeninhalt der eingegrenzten Fläche.

## Aufgabe * (5 Punkte)

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x \, dx = e - 1 \, .$$

## Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien $2 \times 2$-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ gegeben. Das Produkt $A \cdot B$ ergibt sich mit der üblichen Multiplikationsregel „Zeile x Spalte", bei der man insgesamt $8$ Multiplikationen im Körper $K$ ausführen muss. Wir beschreiben, wie man diese Matrixmultiplikation mit nur $7$ Multiplikationen (aber mit mehr Additionen) durchführen kann. Wir setzen

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \, , \\ m_2 &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \, , \\ m_3 &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \, , \\ m_4 &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \, , \\ m_5 &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \, , \\ m_6 &= (a_{21} - a_{11}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \, , \\ m_7 &= (a_{12} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \, . \end{aligned}$$

Zeige, dass für die Koeffizienten der Produktmatrix

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{11} &= m_1 + m_4 - m_5 + m_7 \, , \\ c_{12} &= m_3 + m_5 \, , \\ c_{21} &= m_2 + m_4 \, , \\ c_{22} &= m_1 - m_2 + m_3 + m_6 \, , \end{aligned}$$

gelten.

## Aufgabe * (3 (2+1) Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und es seien $V$ und $W$ Vektorräume über $K$. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein

Erzeugendensystem von $V$ und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in $W$.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle $i$

geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle $i$ gibt.

## Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

## Aufgabe * (3 (1+1+1) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimme das charakteristische Polynom von $M$.
2. Bestimme eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $M$ und klammere den entsprechenden Linearfaktor aus.
3. Begründe, dass das charakteristische Polynom von $M$ zumindest zwei reellen Nullstellen hat.