Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/20/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	2	2	0	1	2	4	4	6	0	7	0	4	1	3	6	4	53

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.

2. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M.

3. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.

4. Die *Stetigkeit* einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

5. Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Das *charakteristische Polynom* zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K.

Lösung

1. Man nennt die Menge

$$L \times M = \{(x,y) \mid x \in L,\, y \in M\}$$

die *Produktmenge* der Mengen L und M.

2. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ\colon M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y.$$

3. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

heißt die *geometrische Reihe* in x.

4. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist,wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt.
5. Das Oberintegral ist definiert als das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f.
6. Das Polynom

   $$\chi_M := \det\left(X \cdot E_n - M\right)$$

   heißt *charakteristisches Polynom* von M.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über das Verhalten der Reihenglieder bei Konvergenz.
2. Das Ableitungskriterium für konstante Funktionen.
3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

1. Es sei

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

   eine konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0\,.$$

2. Sei
$$f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$.

   Dann ist f konstant.

3. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

Aufgabe (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Lösung

$\neg p$.

Aufgabe (2 Punkte)

Erläutere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Lösung

Mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion werden Aussagen $A(n)$ bewiesen, die von den natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Man beweist zuerst die Aussage $A(0)$. Ferner zeigt man, dass man für alle n aus der Gültigkeit von $A(n)$ auf die Gültigkeit von $A(n+1)$ schließen kann. Daraus folgt die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in $\mathbb{N}$ auch Lösungen $a \neq b$ besitzt.

Lösung

Beispielsweise ist

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$2x \geq 7$$

und

$$5x \leq 12$$

über $\mathbb{Q}$.

Lösung

Es soll einerseits

$$x \geq \frac{7}{2}$$

und andererseits

$$x \leq \frac{12}{5}$$

sein. Wegen

$$\frac{7}{2} > \frac{12}{5}$$

ist das nicht gleichzeitig erfüllbar, die Lösungsmenge ist also leer.

Aufgabe (2 Punkte)

Es seien L, M, N Mengen und $F: L \rightarrow M$ und $G: M \rightarrow N$ injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $G \circ F$ ebenfalls injektiv ist.

Lösung

Seien $x, x' \in L$ mit

$$G(F(x)) = G(F(x'))$$

gegeben. Aufgrund der Injektivität von G folgt

$$F(x) = F(x')$$

und aufgrund der Injektivität von F folgt

$$x = x' ,$$

was die Injektivität von $G \circ F$ bedeutet.

Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit dem Startwert $y_0 = 1$.

1. Berechne x_1 und x_2.
2. Berechne y_1 und y_2.
3. Berechne $x_0 \cdot y_0$, $x_1 \cdot y_1$ und $x_2 \cdot y_2$.
4. Konvergiert die Produktfolge $z_n = x_n \cdot y_n$ innerhalb der rationalen Zahlen?

Lösung

1. Es ist
   $$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$
   und

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{3}{x_1}}{2} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}\,.$$

2. Es ist

$$y_1 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

und

$$y_2 = \frac{y_1 + \frac{\frac{1}{3}}{y_1}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12}\,.$$

3. Es ist

$$x_0 \cdot y_0 = 1 \cdot 1 = 1\,,$$
$$x_1 \cdot y_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,,$$

und

$$x_2 \cdot y_2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{48}\,.$$

4. Die Heron-Folge x_n konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{3}$ und die Heron-Folge y_n konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $\frac{1}{\sqrt{3}}$, daher konvergiert die Produktfolge $x_n \cdot y_n$ gegen 1. Da dies zu $\mathbb{Q}$ gehört, konvergiert die Produktfolge auch in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 3\sqrt{n}\,.$$

Lösung

Es sei k die größte natürliche Zahl mit $k^2 \leq n$. Die Folge $\frac{1}{\sqrt{i}}$ ist fallend, deshalb können wir Glieder durch vorhergehende Glieder nach oben abschätzen. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} &\leq \sum_{i=1}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{i}} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=j^2}^{(j+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=j^2}^{j^2+2j} \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} (2j+1) \frac{1}{\sqrt{j^2}} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{2j+1}{j} \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} 3 \\
&= 3k \\
&\leq 3\sqrt{n}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{R}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z - w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

Lösung

Es ist

$$t(z) = f'(w)z + f(w) - f'(w)w = f'(w)(z - w) + f(w)\,.$$

Wir schreiben

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$$

mit $a_d \neq 0$. Somit ist

$$f'(z) = d a_d z^{d-1} + (d-1) a_{d-1} z^{d-2} + \cdots + a_1 = \sum_{i=1}^{d} i a_i z^{i-1}\,.$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
f(z)-t(z) &= f(z)-f(w)-f'(w)(z-w)\\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i z^i - \sum_{i=0}^{d} a_i w^i - f'(w)(z-w)\\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i (z^i - w^i) - f'(w)(z-w)\\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i (z-w) \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - f'(w)(z-w)\\
&= (z-w) \left(\sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - f'(w) \right).
\end{aligned}
$$

Für den rechten Faktor gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - f'(w) &= \sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - \sum_{i=1}^{d} i a_i w^{i-1}\\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} - i w^{i-1} \right).
\end{aligned}
$$

Die einzelnen Summanden (ohne die Koeffizienten a_i) haben die Form

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} - i w^{i-1} &= \sum_{j=0}^{i-1} \left(z^j w^{i-1-j} - w^{i-1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \left(z^j w^{i-1-j} - w^{i-1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} w^{i-1-j} \left(z^j - w^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} w^{i-1-j} (z-w) \left(\sum_{k=0}^{j-1} w^k z^{j-1-k}\right).\end{aligned}$$

Hier kann man also nochmal einen Faktor $z - w$ ausklammern.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.

Lösung

Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c (abhängig von x) zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a)>0$ oder $f^{(n+1)}(a)<0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x)>0$ bzw. $f^{(n+1)}(x)<0$ für $x\in[a-\epsilon,a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon>0$. Für diese x ist auch $c\in[a-\epsilon,a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt.
Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen bei $x=a$ (abhängig von $x>a$ oder $x<a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x)-f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann.
Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1}>0$ für alle $x\neq a$ in der Umgebung ist. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a)>0$, dass $f(x)>f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a)<0$, dass $f(x)<f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 (1+3) Punkte)

1. Überführe die Matrixgleichung
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
in ein lineares Gleichungssystem.

2. Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Lösung

1. Die einzelnen Einträge der Matrixgleichung ergeben das lineare Gleichungssystem
$$3x + 7z = 1$$
$$-4x + 5z = 0$$
$$3y + 7w = 0$$
$$-4y + 5w = 1\,.$$

2. Aus der ersten und der zweiten Gleichung ergibt sich mittels $4I + 3II$ die Bedingung
$$43z = 4$$
und somit
$$z = \frac{4}{43}\,.$$
Daher ist
$$x = \frac{5}{4}z = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{43} = \frac{5}{43}\,.$$

Aus der dritten und der vierten Gleichung ergibt sich mittels $4III + 3IV$ die Bedingung

$$43w = 3$$

und somit

$$w = \frac{3}{43}\,.$$

Daher ist

$$y = -\frac{7}{3}w = -\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{43} = -\frac{7}{43}\,.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Beweise den Satz über die Dimension des Standardraumes.

Lösung

Die Standardbasis $e_i, i = 1, \ldots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn es einen Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt, für den die Familie eine Basis bildet.

Lösung

Wenn die Familie in $U \subseteq V$ eine Basis bildet, so ist sie linear unabhängig (in U und in V). Wenn die Familie linear unabhängig ist, so betrachten wir den durch sie erzeugten Untervektorraum

$$U := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq V\,.$$

Diese linear unabhängige Familie ist somit ein Erzeugendensystem von U und daher eine Basis von U.

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix. Zeige durch zwei Matrizenmultiplikationen, dass

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

ist.

Lösung

Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg) & a(ch-bi)+b(ai- \\ d(ei-fh)+e(fg-di)+f(dh-eg) & d(ch-bi)+e(ai- \\ g(ei-fh)+h(fg-di)+i(dh-eg) & g(ch-bi)+h(ai- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aei-afh+bfg-bdi+cdh-ceg & ach-abi+bai-bc \\ dei-dfh+efg-edi+fdh-feg & dch-dbi+eai-ec \\ gei-gfh+hfg-hdi+idh-ieg & gch-gbi+hai-h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aei-afh+bfg-bdi+cdh-ceg & 0 \\ 0 & dch-dbi+eai-ec \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In der Diagonalen steht immer der gleiche Eintrag, nämlich

$$aei-afh+bfg-bdi+cdh-ceg = a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg) = \det M \, .$$

Mit dem Vorfaktor $\frac{1}{\det M}$ ergibt sich also bei Multiplikation die Einheitsmatrix.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, v \longmapsto Mv.$$

Lösung

Aus der Matrix kann man direkt die drei Eigenwerte $3, -1, 7$ ablesen. Daher ist die Matrix diagonalisierbar und die Eigenräume sind eindimensional.

Es ist

$$M - 3E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und der zugehörige Eigenraum ist

$$\operatorname{Eig}_3(\varphi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$M - 3E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Element des Kernes und somit ist der zugehörige Eigenraum

$$\operatorname{Eig}_{-1}(\varphi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$M - 3E_3 = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es ist $\begin{pmatrix} \frac{23}{10} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Element des Kernes und somit ist der zugehörige Eigenraum

$$\operatorname{Eig}_{7}(\varphi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{23}{10} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$