Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/55/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	4	5	3	2	2	2	0	3	5	0	4	5	4	1	3	51

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung
   $$f \colon L \longrightarrow M.$$
2. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $+\infty$.
3. Der *Tangens*.
4. Die *Taylor-Reihe* im Punkt a zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.
5. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Die *Matrizenmultiplikation*.

Lösung

1. Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit $f(x) = y$ gibt.
2. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit
   $$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N$$
   gibt.

3. Die Funktion
$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
heißt *Tangens*.

4. Die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a ist
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

5. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

6. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Dann ist das *Matrixprodukt*
$$AB$$
diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$
gegeben sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quotientenkriterium* für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
2. Die Beziehung zwischen differenzierbar und stetig.
3. Der Satz über die Anzahl von Basiselementen.

Lösung

1. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$$
für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und
   $$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.
3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.

Aufgabe (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Lösung

$$p \vee q.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Berechne

$$(-1)^{73420504063658}.$$

Lösung

Das Ergebnis ist 1, da der Exponent gerade ist.

Aufgabe (4 (2+2) Punkte)

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & B \\ \downarrow & & \downarrow h \\ L & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

von Mengen und Abbildungen, d.h. es gilt

$$h \circ \varphi = \psi \circ g \, .$$

Es seien g und h bijektiv.

1. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ injektiv ist.
2. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn ψ surjektiv ist.

Lösung

1. Sei φ injektiv, es ist zu zeigen, dass auch ψ injektiv ist. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms und der Bijektivität von g ist
   $$\psi = h \circ \varphi \circ g^{-1} \, .$$
   Somit ist ψ als Verknüpfung von drei injektiven Abbildungen wieder injektiv. Wenn man im Diagramm g und h durch ihre Umkehrabbildungen ersetzt, so sieht man, dass auch die andere Implikation gilt.

2. Sei φ surjektiv, es ist zu zeigen, dass auch ψ surjektiv ist. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms und der Bijektivität von g ist
   $$\psi = h \circ \varphi \circ g^{-1} \, .$$
   Somit ist ψ als Verknüpfung von drei surjektiven Abbildungen wieder surjektiv. Wenn man im Diagramm g und h durch ihre Umkehrabbildungen ersetzt, so sieht man, dass auch die andere Implikation gilt.

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass für $n \geq 3$ die Abschätzung

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n$$

gilt.

Lösung

Es ist

$$n^{n+1} = n \cdot n^n$$

und

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} = n^n + n \cdot n^{n-1} + \binom{n}{2} n^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} n^1 + 1\,.$$

Hier stehen $n+1$ Summanden, wobei der allerletzte gleich 1 ist. Wir vergleichen die Summanden mit n^n. Die ersten beiden Summanden sind gleich n^n, für $k \geq 2$ ist

$$\binom{n}{k} n^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} < n^n\,.$$

Bei

$$n \geq 3$$

sind somit insbesondere die letzten beiden Summanden zusammengenommen kleinergleich n^n und die Summe rechts ist somit $\leq n \cdot n^n$.

Aufgabe (3 Punkte)

Man bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und man gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Lösung

Zunächst ist 1 eine Nullstelle und daher ist $X-1$ ein Linearfaktor. Division mit Rest ergibt

$$(X^3 - 1) = (X-1)(X^2 + X + 1)\,.$$

Wir müssen also noch die komplexen Nullstellen von $X^2 + X + 1$ bestimmen. Dazu ist

$$X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,.$$

Damit ist

$$X + \frac{1}{2} = \pm \mathrm{i} \sqrt{\frac{3}{4}}$$

und somit sind die weiteren Nullstellen

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + \frac{4}{3} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{3} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{-27+16}{12} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Da der quadratische Term links stets ≥ 0 ist, ist $-\frac{11}{12}$ der minimale Wert der Funktion.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, gelte $x \leq \epsilon$. Zeige $x = 0$.

Lösung

Wir nehmen $x \neq 0$ an. Dann ist $x > 0$. Dann ist auch $\frac{x}{2} > 0$ und die Voraussetzung, angewandt auf $\epsilon = \frac{x}{2}$, ergibt $x \leq \frac{x}{2}$, woraus sich durch beidseitige Subtraktion von $\frac{x}{2}$ der Widerspruch $\frac{x}{2} \leq 0$ ergibt.

Aufgabe (2 Punkte)

Drücke

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{7}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{7} &= 4^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(4^5\right)^{\frac{1}{15}} \cdot \left(7^3\right)^{\frac{1}{15}} \\ &= 1024^{\frac{1}{15}} \cdot 343^{\frac{1}{15}} \\ &= 351232^{\frac{1}{15}} \\ &= \sqrt[15]{351232}. \end{aligned}$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r und ein $s > r$ gegeben. Für welches $x \in \mathbb{R}$ verläuft die Tangente zu x an den oberen Kreisbogen durch den Punkt $(s,0)$?

Lösung

Der obere Kreisbogen wird (für $x \in [-r, r]$) durch die Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

beschrieben. Die Ableitung davon ist

$$f'(x) = -x \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Die Steigung der Geraden durch $(x, f(x))$ und $(s, 0)$ wird durch

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

beschrieben. Dies führt auf die Bedingung

$$-x \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

bzw. auf

$$-x(x - s) = r^2 - x^2.$$

Daher ist

$$x = \frac{r^2}{s}.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise die *Quotientenregel* für differenzierbare Funktionen.

Lösung

Wir betrachten zuerst den Fall $f = 1$ und behaupten

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Für einen Punkt a ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Da g nach Korollar 14.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. Somit ist mit der Produktregel

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \\ &= f\left(\frac{1}{g}\right)' + f'\frac{1}{g} \\ &= f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) + \frac{f'g}{g^2} \\ &= -\frac{f'g - fg}{g^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{matrix} x & +7y & -z & -3w & = & 0 \\ x & +y & +2z & -w & = & 1 \\ & +2y & -3z & +2w & = & 3 \\ & -y & -5z & +4w & = & -2\,. \end{matrix}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable x, indem wir die zweite Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren. Dies führt auf

$$\begin{matrix} +6y & -3z & -2w & = & -1 \\ +2y & -3z & +2w & = & 3 \\ -y & -5z & +4w & = & -2\,. \end{matrix}$$

Nun eliminieren wir die Variable w, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $II + I$ und $III - 2II$ ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{matrix} +8y & -6z & = & 2 \\ -5y & +z & = & -10\,. \end{matrix}$$

Mit $I+6II$ ergibt sich

$$-22y=58$$

und

$$y=\frac{29}{11}\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$z=\frac{35}{11}\,,$$
$$w=\frac{40}{11}$$

und

$$x=-\frac{48}{11}\,.$$

Aufgabe (5 (1+1+1+1+1) Punkte)

Es sei $\mathfrak{v}=v_1,\ldots,v_n$ eine Basis eines K-Vektorraumes V. Es seien $a_1,\ldots,a_n\in K$ von 0 verschiedene Elemente.

a) Zeige, dass $\mathfrak{w}=a_1v_1,a_2v_2,a_3v_3,\ldots,a_nw_n$ ebenfalls eine Basis von V ist.

b) Bestimme die Übergangsmatrix $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{v}}$.

c) Bestimme die Übergangsmatrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}$.

d) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ besitzt.

e) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der

Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix}$ besitzt.

Lösung

a) Es ist

$$v_i = a_i^{-1} w_i$$

für alle $i = 1, \ldots, n$. Daher ist $w_1, \ldots, w_n$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von V und somit eine Basis, da die Dimension n ist und n Vektoren vorliegen.

b) In den Spalten von $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}}$ müssen die Koordinaten der Vektoren w_j bezüglich der Basis v_i stehen, also ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

d) Die Koordinaten ergeben sich aus

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ na_n \end{pmatrix}.$$

e) Die Koordinaten ergeben sich aus

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ 2a^{-1} \\ \vdots \\ 2^n a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$.
Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0\,.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Determinante zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Determinante ist 0, da eine obere Dreiecksmatrix vorliegt, deren Hauptdiagonalelemente 0 sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Lösung

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned} \det XE_4 - \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} X+4 & 1 & 2 & -3 \\ -6 & X-7 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & X-3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & X-2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X+4 & 1 \\ -6 & X-7 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} X-3 & 2 \\ -6 & X-2 \end{pmatrix} \\ &= ((X+4)(X-7)+6)((X-3)(X-2)+12) \\ &= (X^2-3X-22)(X^2-5X+18). \end{aligned}$$

Der rechte Faktor ist

$$X^2 - 5X + 18 = \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 + 18 - \frac{25}{4} > 0$$

stets positiv und besitzt daher in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle. Also zerfällt das charakteristische Polynom nicht vollständig in Linearfaktoren und nach Satz 28.16 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist die Matrix nicht trigonalisierbar.