Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/46/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	3	3	1	2	3	3	5	3	5	3	0	2	4	1	9	55

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *angeordneter* Körper.

2. Die *absolute Konvergenz* einer reellen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

3. Eine *ungerade* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Ein *Erzeugendensystem* $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V.

6. Der *Kern* einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Ein Körper K heißt *angeordneter Körper*, wenn es zwischen den Elementen von K eine Beziehung $>$ („größer als") gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt ($a \geq b$ bedeutet $a > b$ oder $a = b$).
   1. Für je zwei Elemente $a, b \in K$ gilt entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
   2. Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
   3. Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
   4. Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$).
2. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \vert a_k \vert$$

konvergiert.

3. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

   $$f(-x) = -f(x)$$

   gilt.

4. Das Oberintegral ist definiert als das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f.

5. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ als Linearkombination der v_i darstellen kann.

6. Man nennt

   $$\operatorname{kern} \varphi := \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}$$

   den *Kern* von φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Regel für die inverse Folge* einer reellen Folge.
2. Die *Periodizätseigenschaften* für Sinus und Kosinus (ohne spezielle Werte).
3. Der Festlegungssatz für lineare Abbildungen.

Lösung

1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$
2. Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in $\mathbb{R}$ folgende *Periodizitätseigenschaften*.
   1. Es ist $\cos(x+2\pi) = \cos x$ und $\sin(x+2\pi) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   2. Es ist $\cos(x+\pi) = -\cos x$ und $\sin(x+\pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   3. Es ist $\cos(x+\pi/2) = -\sin x$ und $\sin(x+\pi/2) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $v_i, i \in I$, eine Basis von V und es seien $w_i, i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung
$$f\colon V \longrightarrow W$$
mit
$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I.$$

Aufgabe (1 Punkt)

In einer psychologischen Längsschnittstudie wird die Entwicklung von Einstellungen und Verhaltensweisen von Personen untersucht. Ein Fallbeispiel: Im Alter von 20 Jahren geht Linda regelmäßig auf Demonstrationen, sie hilft im Eine-Welt-Laden mit, braut ökologisches Bier, kocht Bio-Gemüse und studiert manchmal Soziologie.

Welcher der folgenden Befunde ist nach 10 Jahren am unwahrscheinlichsten?

1. Linda arbeitet für eine Versicherungsagentur.
2. Linda engagiert sich bei Attac und arbeitet für eine Versicherungsagentur.
3. Linda engagiert sich bei Attac.

Lösung

(2) ist am unwahrscheinlichsten. Dass zwei Ereignisse gleichzeitig eintreffen ist stets unwahrscheinlicher als die beiden einzelnen Ereignisse.

Aufgabe (1 Punkt)

Winnetou und Old Shatterhand liegen nachts am Strand des Rio Pecos und halten ihre vom harten Tagesritt müden Füße in den Fluss. Dabei schauen sie in den Himmel und zählen Sternschnuppen. Winnetou sieht 117 und Old Shatterhand sieht 94 Sternschnuppen. Old Shatterhand sieht von den von Winnetou gesichteten Sternschnuppen 39 nicht. Wie viele der Sternschnuppen, die von Old Shatterhand gesichtet wurden, sieht Winnetou nicht?

Lösung

Es gibt

$$117 - 39 = 78$$

Sternschnuppen, die beide sehen. Daher sieht Winnetou von den von Old Shatterhand gesehenen Sternschnuppen

$$94 - 78 = 16$$

nicht.

Aufgabe (3 Punkte)

Wir fassen die Lösung eines Sudokus (unabhängig von Zahlenvorgaben) als eine Abbildung

$$\{1,2,\ldots,9\} \times \{1,2,\ldots,9\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,9\},\ (i,j) \longmapsto a_{i,j},$$

auf. Charakterisiere mit dem Begriff der Bijektivität, dass eine korrekte Lösung vorliegt.

Lösung

Die Bedingungen sind:

Für jedes

$$i = 1,\ldots,9$$

ist die Abbildung

$$\{1,\ldots,9\} \longrightarrow \{1,\ldots,9\},\, j \longmapsto a_{i,j},$$

bijektiv.

Für jedes

$$j=1,\ldots,9$$

ist die Abbildung

$$\{1,\ldots,9\} \longrightarrow \{1,\ldots,9\},\, i \longmapsto a_{i,j},$$

bijektiv.

Für jedes Paar

$$0 \leq r,s \leq 2$$

ist die Abbildung

$$\{3r+1,3r+2,3r+3\} \times \{3s+1,3s+2,3s+3\} \longrightarrow \{1,\ldots,9\},\, (i,j) \longmapsto a_{i,j},$$

bijektiv.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung

Angenommen, die Menge aller Primzahlen sei endlich, sagen wir $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Man betrachtet die Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_r \; + 1 \, .$$

Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da bei Division von N durch p_i immer ein Rest 1 verbleibt. Damit sind die Primfaktoren von N, die es nach Satz 2.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) geben muss, nicht in der Ausgangsmenge enthalten - Widerspruch.

Aufgabe (1 Punkt)

Skizziere die Funktion

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \, x \longmapsto - \lfloor -x \rfloor \, .$$

Lösung Gaußklammer/Minus innen und außen/Skizze/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme eine Symmetrieachse für den Graphen der Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto x^2 - 7x + 5.$$

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 7x + 5 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 5 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}. \end{aligned}$$

Daher ist die durch $x = \frac{7}{2}$ gegebene Gerade eine Spiegelungsachse für den Graphen.

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Konzept „Approximation“ anhand typischer Beispiele.

Lösung Approximation/Erläuterung/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{7n^4 - 2n^2 + 5}{4n^4 - 5n^3 + n - 6}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^4$) als

$$x_n := \frac{7n^4 - 2n^2 + 5}{4n^4 - 5n^3 + n - 6} = \frac{7 - 2\frac{1}{n^2} + 5\frac{1}{n^4}}{4 - 5\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} - 6\frac{1}{n^4}}$$

schreiben. Folgen vom Typ a/n, a/n^2, a/n^3 und a/n^4 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 7 und der Nenner gegen 4, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $7/4 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

1. f ist stetig im Punkt x.

2. Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Lösung

Aufgrund des Folgenkriteriums müssen wir zeigen, dass wenn (2) erfüllt ist, dass dann der Grenzwert stets der Funktionswert des Grenzwertes ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen x konvergiert. Die Bildfolge $f(x_n)$ konvergiert nach Voraussetzung, sagen wir gegen b. Wir müssen $b = f(x)$ zeigen. Wir betrachten dann die Folge

$$x_1, x, x_2, x, x_3, x, x_4, \ldots .$$

Diese Folge konvergiert offenbar gegen x, deshalb muss nach Voraussetzung auch die Bildfolge konvergieren, sagen wir gegen c. Jede Teilfolge davon muss ebenfalls gegen c konvergieren. Die Teilfolge, die durch die ungeraden Folgenglieder gegeben ist, ist $f(x_n)$, und diese konvergiert gegen b. Also ist $b = c$. Die Teilfolge, die durch die geraden Folgenglieder gegeben ist, ist die konstante Folge $f(x)$, die gegen $f(x)$ konvergiert. Also ist $f(x) = b$.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen unter Verwendung der Regel

$$\left(f^2\right)' = 2f \cdot f'$$

mit Hilfe von

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}(fg)' &= \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)' \\ &= \frac{1}{4}(2(f+g)(f+g)' - 2(f-g)(f-g)') \\ &= \frac{1}{2}((f+g)(f'+g') - (f-g)(f'-g')) \\ &= \frac{1}{2}(ff' + fg' + gf' + gg' - ff' + fg' + gf' - gg') \\ &= \frac{1}{2}(2gf' + 2fg') \\ &= gf' + fg'.\end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Lösung

Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 15.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)). Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x) \,.$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Also ist $h(a) = h(b)$ und Satz 15.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) liefert die Existenz eines $c \in \,]a, b[$ mit

$$h'(c) = 0 \,.$$

Umstellen ergibt die Behauptung.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad n und $a \in \mathbb{R}$. Zeige unter Verwendung der Taylor-Formel, dass das Taylor-Polynom vom Grad n zu f im Entwicklungspunkt a mit f übereinstimmt.

Lösung

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es aufgrund der Taylor-Formel ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

wobei der linke Summand das Taylor-Polynom vom Grad n ist. Da f den Grad n besitzt, ist aber die $(n+1)$-te Ableitung davon 0. Daher fällt der rechte Summand weg und f stimmt mit dem n-ten Taylor-Polynom überein.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in K$. Zeige durch Induktion, dass

$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ist.

Lösung

Für

$$n = 0, 1$$

ist die Aussage klar. Sei die Aussage für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \circ M \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \circ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^{n-1} \cdot \lambda \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimme die Anzahl der nicht invertierbaren 2×2-Matrizen über K.

Lösung

Die 2×2-Matrizen haben die Form

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

mit $x, y, z, w \in K$. Die Eigenschaft, nicht invertierbar zu sein, kann man mit der Determinante durch die Bedingung

$$xw - yz = 0$$

ausdrücken. Wenn $w = 0$ ist, so muss $y = 0$ oder $z = 0$ sein. Im ersten Fall gibt es für x und z jeweils q Möglichkeiten. Im zweiten Fall gibt es für x und y ebenfalls jeweils q Möglichkeiten, allerdings darf man $y = 0$ nicht doppelt zählen. Somit erhalten wir bei $w = 0$ insgesamt $q^2 + q(q-1)$ Möglichkeiten. Sei also $w \neq 0$. Dann gilt

$$x = \frac{yz}{w},$$

d.h. x ist durch die drei anderen Belegungen eindeutig bestimmt. Von dieser Art gibt es $(q-1)q^2$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also

$$\begin{aligned} q^2 + q(q-1) + (q-1)q^2 &= q^2 + q^2 - q + q^3 - q^2 \\ &= q^3 + q^2 - q \end{aligned}$$

nichtinvertierbare 2×2-Matrizen.

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Determinante zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Summe der ersten und der vierten und die Summe der zweiten und der fünften Zeile ergeben jeweils $(1, 1, 1, 1, 1)$, daher liegt eine lineare Abhängigkeit vor und die Determinante ist 0.

Aufgabe (9 (2+3+4) Punkte)

Wir betrachten die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Sei

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erstelle eine Beziehung zwischen den Folgen x_n und y_n und Rekursionsformeln für diese Folgen.

c) Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren zu M.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Wir behaupten

$$y_{n+1} = x_n$$

und die rekursive Beziehung

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Beides beweisen wir durch Induktion über n, wobei der Induktionsanfang klar ist. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

ist

$$x_{n+1} = x_n + y_n = x_n + x_{n-1}$$

und

$$y_{n+1} = x_n \, .$$

c) Das charakteristische Polynom zu M ist

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = (x-1)x - 1 = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \, .$$

Somit sind

$$x_1, x_2 = \frac{\pm\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

die Nullstellen und nach Satz 28.2 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) die Eigenwerte von M. Der Kern zu

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$$

wird von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$$

und der Kern zu

$$\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}+1}{2} - 1 & -1 \\ -1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$$

wird von

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$$

erzeugt. Die Eigenvektoren sind also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}.$$