Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/49/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	6	3	3	3	1	2	5	0	0	2	1	5	4	4	4	3	3	55

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung

$$f\colon L \longrightarrow M.$$

2. Eine *ungerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Die *Kosinusreihe* zu $x \in \mathbb{R}$.

4. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K.

6. Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$, wobei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist.

Lösung

1. Die Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M$$
ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in L$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.

2. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(-x) = -f(x)$$
gilt.

3. Die *Kosinusreihe* ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

4. Die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

heißt die Integralfunktion zu f zum Startpunkt a.

5. Unter einem *Vektorraum* V über K versteht man eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

   $$+\colon V \times V \longrightarrow V,\, (u,v) \longmapsto u+v,$$

   und

   $$K \times V \longrightarrow V,\, (s,v) \longmapsto sv = s \cdot v,$$

   derart, dass die folgenden Axiome erfüllt sind (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig):

   1. $u+v = v+u$,
   2. $(u+v)+w = u+(v+w)$,
   3. $v+0 = v$,
   4. Zu jedem v gibt es ein z mit $v+z = 0$,
   5. $r(su) = (rs)u$,
   6. $r(u+v) = ru+rv$,
   7. $(r+s)u = ru+su$,
   8. $1 \cdot u = u$.

6. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer reellen Folge.
2. Der Satz über die Konvergenz der Exponentialreihe.
3. Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

1. Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.
2. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
   absolut konvergent.
3. Satzantwort Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ ist die Integralfunktion
   $$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$
   differenzierbar

   und es gilt
   $$F'(x) = f(x)$$
   für alle $x \in I$.

Aufgabe (6 (3+2+1) Punkte)

In einer Äpfelpackung befinden sich stets sechs Äpfel, die zusammen ein Kilo wiegen sollen, wobei eine Toleranz zwischen 995 und 1005 Gramm erlaubt ist. Der kleinste Apfel in der Packung muss mindestens 90 Prozent des Gewichts des größten Apfels der Packung haben.

1. Wie schwer (in gerundeten Gramm) kann ein Apfel in einer Packung maximal sein?
2. Wie leicht (in gerundeten Gramm) kann ein Apfel in einer Packung minimal sein?
3. Um wie viel Prozent ist der größtmögliche Apfel schwerer als der kleinstmögliche Apfel?

Lösung

Die Gewichte der Äpfel seien

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$$

und die Bedingungen sind

$$995 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1005$$

und

$$x_1 \geq 0{,}9 x_6 \, .$$

1. Wenn x_6 besonders groß werden soll, so hat man die besten Chancen beim Gesamtgewicht 1005 Gramm und wenn die fünf übrigen Äpfel alle möglichst klein sind. Daher setzen wir

   $$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$$

und

$$x_1 = 0{,}9x_6$$

an. Dies führt auf

$$1005 = 5x_1 + x_6 = 5 \cdot 0{,}9x_6 + x_6 = 5{,}5x_6 \, .$$

Division führt auf

$$1005 : 5{,}5 = 182{,}72.. \, ,$$

also gerundet 183 Gramm. 90 Prozent davon sind

$$182{,}72 - 18{,}27 = 164{,}45 \, .$$

Die anderen Äpfel der Packung wiegen also 164 Gramm.

2. Der analoge Ansatz führt auf das Gesamtgewicht 995 Gramm,

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$$

und

$$x_1 = 0{,}9x_6 \, .$$

Dann ist

$$995 = x_1 + 5x_6 = 5{,}9x_6 \, .$$

Division ergibt

$$995 : 5{,}9 = 168{,}64..$$

und somit

$$x_1 = 168{,}64 - 16{,}86 = 151{,}78\,.$$

Der leichteste Apfel hat also das Gewicht 152 Gramm, die anderen fünf Äpfel in der Packung wiegen 169 Gramm.

3. Es ist

$$183 : 152 = 1{,}2039\,,$$

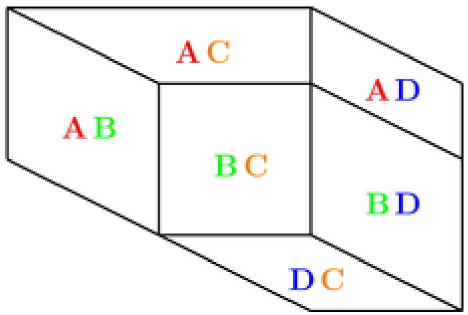
der größtmögliche Apfel in einer Packung ist also 20 Prozent größer als der kleinstmögliche Apfel in einer Packung.

Aufgabe (3 Punkte)

Die Hochschule „Tellerrand“ bietet lediglich 4 Fächer an, nämlich Hethitologie, Assyriologie, Ägyptologie und Semitistik. Sie bietet lediglich 2-Fächer-Bachelor an in beliebiger Fächerkombination. Wie viele Fächerkombinationen gibt es (es wird nicht zwischen Erst- und Zweitfach unterschieden)? Skizziere ein Mengendiagramm, das die Studentenschaft mit ihren Fächern widergibt. Die zu einem Fach gehörenden Studenten und Studentinnen sollen dabei durch ein zusammenhängendes Gebiet dargestellt werden.

Lösung

Es gibt 6 Möglichkeiten.



Aufgabe (3 (1+1+1) Punkte)

Die Funktionen

$$f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien durch

$$f(x) = x^3 + x\,,$$
$$g(y) = y^2 - 1$$

und

$$h(z) = 3z + 4$$

gegeben.

1. Berechne $g \circ f$.
2. Berechne $h \circ g$.
3. Berechne $h \circ g \circ f$ auf zwei unterschiedliche Arten.

Lösung

1. Es ist
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (f(x))^2 - 1 \\ &= \left(x^3 + x\right)^2 - 1 \\ &= x^6 + 2x^4 + x^2 - 1.\end{aligned}$$
2. Es ist

$$
\begin{aligned}
(h \circ g)(y) &= h(g(y)) \\
&= 3(g(y)) + 4 \\
&= 3\left(y^2 - 1\right) + 4 \\
&= 3y^2 - 3 + 4 \\
&= 3y^2 + 1.
\end{aligned}
$$

3. Es ist einerseits

$$
\begin{aligned}
(h \circ g \circ f)(x) &= h((g \circ f)(x)) \\
&= h(x^6 + 2x^4 + x^2 - 1) \\
&= 3(x^6 + 2x^4 + x^2 - 1) + 4 \\
&= 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 - 3 + 4 \\
&= 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1
\end{aligned}
$$

und andererseits

$$
\begin{aligned}
(h \circ g \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\
&= 3(f(x))^2 + 1 \\
&= 3(x^3 + x)^2 + 1 \\
&= 3(x^6 + 2x^4 + x^2) + 1 \\
&= 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (3 (1+2) Punkte)

1. Finde eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{Z}$, für die 17 die einzige Lösung ist.

2. Finde unendlich viele verschiedene quadratische Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{Z}$, für die 17 eine Lösung ist.

Lösung

Für jede ganze Zahl k ist generell

$$(x - 17)(x - k) = x^2 - (k + 17)x + 17k\,.$$

Dies führt zu einer quadratischen Gleichung mit $p = -(k + 17)$ und $q = 17k$. Wenn man darin x gleich 17 setzt, ergibt sich 0 wegen dem ersten Faktor. Somit sind unendlich viele quadratische Gleichungen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ gefunden, die 17 als Lösung besitzen. Wenn man

$$k = 17$$

setzt, so erhält man die quadratische Gleichung

$$(x - 17)(x - 17) = x^2 - 34x + 289 = 0\,.$$

Für diese ist nur 17 eine Lösung.

Aufgabe (1 Punkt)

Man finde ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ und $f(3) = 9$.

Lösung

Das Polynom X^2 erfüllt offenbar diese Eigenschaften.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

Lösung

Sei $c \in \mathbb{C}$ vorgegeben. Da P nicht konstant ist, ist auch $P(z) - c$ nicht konstant und besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine Nullstelle. Also gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$P(w) - c = 0\,,$$

also

$$P(w) = c\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 1$$

definiert. Entscheide, für welche x_0 die Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^x - 1$. Es ist $f(0) = 0$. Die Ableitung der Funktion f ist e^x. Daher verläuft der Graph von f für $x > 0$ echt oberhalb der Diagonalen und für $x < 0$ echt unterhalb der Diagonalen. Insbesondere ist $f(x) \geq x$, wobei Gleichheit nur bei

$$x = 0$$

gilt. Insbesondere ist also die rekursiv definierte Folge wachsend. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt für den Grenzwert x einer solchen Folge (falls er existiert)

$$x = e^x - 1\,.$$

Diese Bedingung wird nur von $x = 0$ erfüllt und dies ist der einzige mögliche Grenzwert. Bei einem Startwert $x_0 > 0$ kann die Folge wegen des Wachstumsverhaltens nicht konvergieren. Bei einem Startwert $x_0 \leq 0$ ist

$$e^{x_0} - 1 \leq 0\,.$$

Daher ist eine solche Folge wachsend und nach oben beschränkt und muss somit konvergieren, und zwar gegen den einzig möglichen Grenzwert 0.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

Lösung

Nach Voraussetzung besitzt die Potenzreihe die Gestalt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} .
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
f(-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-z)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-1)^{2k+1} z^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-1) z^{2k+1} \\
&= - \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} \right) \\
&= -f(z) .
\end{aligned}
$$

Die Funktion ist also ungerade.

Aufgabe (1 Punkt)

Skizziere den Graphen der Sinusfunktion.

Lösung Reelle Sinusfunktion/Skizziere/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m,M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe (4 Punkte)

Der Graph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Bestimme die Gerade durch den Nullpunkt, die diese Fläche in zwei gleich große Teile unterteilt.

Lösung

Es ist

$$-x^2 + 5x = -x(x-5)\,,$$

die Fläche befindet sich also oberhalb des Intervalls $[0, 5]$. Eine Stammfunktion von f ist

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

und somit ist

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)dx &= [-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2]_0^5 \\ &= -\frac{1}{3}125 + \frac{5}{2}25 \\ &= \frac{125}{6}.\end{aligned}$$

Die Gerade durch den Nullpunkt setzen wir als $y = ax$ an. Der Durchstoßungspunkt (abgesehen vom Nullpunkt) mit dem Graphen ergibt sich aus

$$ax = -x^2 + 5x$$

zu

$$x = 5 - a\,.$$

Die obere Fläche besitzt den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}\int_0^{5-a} -x^2 + 5x - ax dx &= [-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5-a}{2}x^2]_0^{5-a}\\ &= (5-a)^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\\ &= (5-a)^3\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Die Bedingung

$$(5-a)^3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{6}$$

führt auf

$$(5-a)^3 = \frac{125}{2}$$

und damit auf

$$5 - a = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\,.$$

Also ist

$$a = 5\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right).$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Der K-Vektorraum K^2 sei zusätzlich mit der komponentenweisen Multiplikation versehen. Bestimme die Untervektorräume $U \subseteq K^2$, die unter dieser Multiplikation abgeschlossen sind.

Lösung

Die Untervektorräume des K^2 sind der Nullraum, die Geraden durch den Nullpunkt und die Gesamtebene. Der Nullraum und die Ebene sind offenbar unter der komponentenweisen Multiplikation abgeschlossen. Eine Gerade durch den Nullpunkt hat entweder die Form

$$x = 0$$

oder

$$y = ax$$

mit einem $a \in K$. Die erstgenannte Gerade (die y-Achse) ist multiplikativ abgeschlossen, da ja

$$(0, y) \cdot (0, z) = (0, yz)$$

wieder dazu gehört. Sei also

$$G = \{(x,\, y) \mid y = ax\} = K \cdot (1,\, a)\ .$$

Die multiplikative Abgeschlossenheit bedeutet, dass für beliebige $c, d \in K$ das Produkt

$$c\,(1,\, a) \cdot d\,(1,\, a) = cd\,\left(1,\, a^2\right)$$

wieder auf der Geraden liegt. Dies ist genau bei

$$a^2 = a$$

der Fall, also bei

$$a(a-1) = 0\,,$$

was $a = 0$ oder $a = 1$ bedeutet. Es sind also auch noch die x-Achse und die Diagonale unter der Multiplikation abgeschlossen, und keine weiteren Untervektorräume.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Es sei

$$MN = 0$$

für jede $n \times n$-Matrix N vom Rang 1. Zeige

$$M = 0\,.$$

Lösung

Es sei

$$M \neq 0$$

angenommen. Dann gibt es einen Vektor $v \in K^n$ mit

$$Mv = w \neq 0\,.$$

Wir ergänzen v zu einer Basis

$$v = v_1, v_2, \ldots, v_n$$

von K^n. Es sei N die Matrix bezüglich der Standardbasis, die die durch $v \mapsto v$ und $v_i \mapsto 0$ für $i \geq 2$ festgelegte lineare Abbildung beschreibt. Der Rang von N ist 1, da ja das Bild gerade Kv ist, und es ist

$$MNv = Mv = w \neq 0\,,$$

also ist

$$MN \neq 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Determinante von A ist

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 4 = -5$$

und die Determinante von B ist

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 20 + 5 = 25\,.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 18 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} \det AB &= \det\begin{pmatrix} 10 & 7 & 18 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 40 - 35 - 90 - 40 \\ &= -125. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Produkt der beiden einzelnen Determinanten überein.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu einer ebenen Drehung $\begin{pmatrix} \cos \alpha & - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, über $\mathbb{R}$.

Lösung

Bei $\alpha = 0$ liegt die Identität vor, dafür ist 1 der einzige Eigenwert, jeder Vektor $\neq 0$ ist ein Eigenvektor und der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist $\mathbb{R}^2$. Alle anderen Eigenräume sind der Nullraum.

Bei $\alpha = \pi$ liegt die Halbdrehung vor, also die Punktspiegelung bzw. die Streckung mit dem Faktor -1. Dafür ist -1 der einzige Eigenwert, jeder Vektor $\neq 0$ ist ein Eigenvektor und der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist $\mathbb{R}^2$. Alle anderen Eigenräume sind der Nullraum.

Bei allen anderen Drehwinkeln wird keine Gerade auf sich selbst abgebildet, so dass diese Drehungen keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren besitzen und alle Eigenräume der Nullraum sind.