Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/41/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	4	0	3	2	0	4	0	8	3	4	8	1	4	0	0	51

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Umkehrabbildung* zu einer bijektiven Abbildung $F: L \to M$.

2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.

3. Eine *fallende* Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.

5. Das *Unterintegral* einer nach unten beschränkten Funktion
$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

6. Die *beschreibende Matrix* zu einer linearen Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow W$$
zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W bezüglich einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ von W.

Lösung

1. Die Abbildung
$$G: M \longrightarrow L,$$
die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, heißt die *Umkehrabbildung* zu F.

2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
$$|x - x_n| \leq \epsilon$$
gilt.

3. Die Funktion
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *fallend*, wenn

$$f(x') \leq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt.}$$

4. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
die *Exponentialreihe* in x.

5. Das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f heißt das *Unterintegral* von f.

6. Unter der *beschreibenden Matrix zu* φ bezüglich der Basen versteht man die $m \times n$-Matrix
$$M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij} \, ,$$
wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
2. Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
3. Der Satz über den Zusammenhang zwischen der Verknüpfung linearer Abbildungen und der Matrizenmultiplikation (genaue Formulierung mit Basen).

Lösung

1. Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.
2. Sei $a < b$ und sei
   $$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit
   $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$
3. Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen
   $$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m.$$
   Es seien
   $$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$
   lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung
   $$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) = (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)).$$

Aufgabe (2 Punkte)

Betrachte die Aussage: „Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren“. Rasiert er sich selbst?

Lösung Russell Antinomie/Barbier/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Frau Maier-Sengupta ist für ein halbes Jahr in Elternzeit. Ihr Sohn Siddhartha kam mit einem Gewicht von drei Kilogramm auf die Welt und wurde in den sechs Monaten ausschließlich von Muttermilch ernährt. Nach den sechs Monaten wiegt er zehn Kilogramm. Jeden Tag hat das Kind 150 Milliliter Milch getrunken. Wie viel Milch hat Siddhartha in den sechs Monaten getrunken und wie viel Prozent davon ging in die Gewichtszunahme? (Rechne mit Monat = 30 Tage und setze das Milchgewicht gleich dem Gewicht von Wasser an).

Lösung

150 Milliliter sind $0{,}15$ Liter. Siddhartha hat somit in den sechs Monaten

$$6 \cdot 30 \cdot 0{,}15 = 180 \cdot 0{,}15 = 27$$

Liter Milch getrunken.

Dabei hat er $10 - 3 = 7$ Kilogramm zugenommen. Der Anteil der Gewichtszunahme an der Gesamttrinkmenge beträgt also

$$\frac{7}{27} = 0{,}259\ldots$$

In Prozent ist der Anteil ca. 26 Prozent.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösung

Wir machen die Annahme, dass es eine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, und führen das zu einem Widerspruch. Sei also angenommen, dass

$$x \in \mathbb{Q}$$

die Eigenschaft besitzt, dass

$$x^2 = 2$$

ist. Eine rationale Zahl hat die Beschreibung als ein Bruch, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Die rationale Zahl x können wir somit als

$$x = \frac{a}{b}$$

ansetzen. Ferner können wir annehmen (dieses Annehmen ist eine Vereinfachung der Situation und hat nichts mit der zum Widerspruch zu führenden Annahme zu tun), dass dieser Bruch gekürzt ist, dass also a und b keinen echten gemeinsamen Teiler haben. In der Tat brauchen wir lediglich, dass wir annehmen dürfen, dass zumindest eine Zahl, a oder b ungerade ist (wenn beide gerade sind, so können wir mit 2 kürzen, u.s.w.) Die Eigenschaft

$$x^2 = 2$$

bedeutet ausgeschrieben

$$x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2\,.$$

Multiplikation mit b^2 ergibt die Gleichung

$$2b^2 = a^2$$

(dies ist eine Gleichung in $\mathbb{Z}$ bzw. sogar in $\mathbb{N}$). Diese Gleichung besagt, dass a^2 gerade ist, da ja a^2 ein Vielfaches der 2 ist. Daraus ergibt sich aber auch, dass a selbst gerade ist, da ja das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist. Deshalb können wir den Ansatz

$$a = 2c$$

mit einer ganzen Zahl c machen. Dies setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten

$$2b^2 = (2c)^2 = 2^2c^2\,.$$

Wir können mit 2 kürzen und erhalten

$$b^2 = 2c^2\,.$$

Also ist auch b^2 und damit b selbst gerade. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass nicht sowohl a als auch b gerade sind.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise, dass eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen konvergiert.

Lösung

Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$|\sum_{k=m}^{n} |a_k|| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq |\sum_{k=m}^{n} |a_k|| \leq \epsilon \, ,$$

was die Konvergenz bedeutet.

Aufgabe (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n, wobei a_n streng wachsend und b_n streng fallend ist, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Lösung

Sei $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $b_n = 2 + \frac{1}{n}$, dann sind alle geforderten Eigenschaften erfüllt, die Intervalllängen sind aber stets ≥ 1 und somit bilden diese keine Nullfolge, es liegt also keine Intervallschachtelung vor.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Ordne die Zahlen

$$\exp(0,6),\ \exp(0,7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

Lösung

Es ist einerseits

$$\begin{aligned}\exp(0{,}7) &\geq 1+0{,}7+\frac{1}{2}\cdot 0{,}7^2+\frac{1}{6}\cdot 0{,}7^3\\ &= 1{,}7+0{,}245+\frac{1}{6}\cdot 0{,}343\\ &> 1{,}945+0{,}057\\ &= 2{,}002\\ &> 2.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\exp(0{,}6) &\leq 1+0{,}6+\frac{1}{2}\cdot 0{,}6^2+\frac{1}{6}\left(0{,}6^3+0{,}6^4+\cdots\right)\\ &= 1{,}6+0{,}18+\frac{1}{6}\cdot 0{,}6^3\left(1+0{,}6+0{,}6^2+\cdots\right)\\ &= 1{,}78+\frac{1}{6}\cdot 0{,}6^3\cdot\frac{5}{2}\\ &= 1{,}78+\frac{3^3\cdot 5}{6\cdot 5^3\cdot 2}\\ &= 1{,}78+\frac{9}{100}\\ &= 1{,}87\\ &< 2,\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die geometrische Reihe verwendet haben. Daher ist

$$\exp(0{,}6)<2<\exp(0{,}7)\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (8 (2+5+1) Punkte)

Es sei $f\colon I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine auf einem offenen Intervall definierte Funktion. Wir interessieren uns für den Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

zu einem Punkt $x \in I$.

1. Bestimme diesen Limes für die Funktion
$$f(x) = a^x$$
mit einem $a \in \mathbb{R}_+$.

2. Es sei f in $x \in I$ differenzierbar. Zeige
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

3. Überprüfe das Ergebnis aus (1) mit Hilfe der Formel aus (2).

Lösung

1. Unter Verwendung von Rechenregeln für Exponentialfunktionen ist

$$\left(\frac{a^{x+h}}{a^x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(a^{x+h}a^{-x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(a^{x+h-x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(a^h\right)^{\frac{1}{h}} = a\,.$$

   Da dies unabhängig von h ist, ist auch der Limes für $h \to 0$ gleich a.

2. Wir betrachten den natürlichen Logarithmus des funktionalen Ausdrucks, also

$$\ln\left(\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right) = \frac{1}{h}(\ln f(x+h) - \ln f(x))\,.$$

   Dies ist der Differenzenquotient zur Funktion $\ln f$ im Punkt x. Da f differenzierbar ist, ist auch diese Verknüpfung differenzierbar mit der Ableitung

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

   Somit ist

$$\lim_{h\to 0} \ln\left(\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,,$$

   und insbesondere existiert der Limes links. Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt daraus

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) &= \exp\left(\lim_{h\rightarrow 0}\ \ln\left(\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}\right)\right) \\ &= \lim_{h\rightarrow 0}\ \exp\left(\ln\left(\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}\right)\right) \\ &= \lim_{h\rightarrow 0}\ \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}.\end{aligned}$$

3. Für

$$f(x) = a^x$$

ist die Ableitung gleich $(\ln(a))a^x$. Somit ist

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\ln a)a^x}{a^x} = \ln a\,,$$

die Exponentialfunktion davon ist in der Tat gleich a.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Stammfunktion der Umkehrfunktion.

Lösung

Ableiten unter Verwendung von Lemma 14.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Satz 14.8 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ergibt

$$\begin{aligned}\left(yf^{-1}(y) - F\left(f^{-1}(y)\right)\right)' &= f^{-1}(y) + y\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} - f\left(f^{-1}(y)\right)\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

Aufgabe (4 (1+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3.$$

a) Bestimme zu einer Geraden $y = sx$, $s > 0$, die Schnittpunkte mit dem Graphen von f.

b) Zu einer gegebenen Geraden aus Teil (a) legen der Schnittpunkt (c, d) mit $c > 0$, sein Basispunkt $(c, 0)$ und der Nullpunkt $(0, 0)$ ein Dreieck fest. Zeige, dass der Graph von f dieses Dreieck in zwei gleich große Flächen zerlegt.

Lösung

a) Wir setzen

$$sx = x^3 .$$

Dies ergibt die Lösungen $x = 0$, $x = \sqrt{s}$ und $x = -\sqrt{s}$, die Schnittpunkte sind also

$$(0,0),\ (\sqrt{s}, \sqrt{s}^3) \text{ und } (-\sqrt{s}, -\sqrt{s}^3).$$

b) Die Eckpunkte des Dreiecks sind

$$(0,0),\ (\sqrt{s},\sqrt{s}^3)\ \text{und}\ (\sqrt{s},0).$$

Sein Flächeninhalt ist demnach gleich

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{s}^3=\frac{1}{2}s^2\,.$$

Der Flächeninhalt innerhalb des Dreiecks und unterhalb des Graphen berechnet sich als bestimmtes Integral zu

$$\int_0^{\sqrt{s}} x^3dx=\frac{1}{4}\sqrt{s}^4=\frac{1}{4}s^2\,.$$

Dies ist die Hälfte des Dreiecksinhalts.

Aufgabe (8 (2+2+4) Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

a) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension d. Wie viele Elemente besitzt V?

b) Zeige, dass ein K-Vektorraum genau dann endlich ist, wenn er endlichdimensional ist.

c) Wie viele Basen besitzt ein d-dimensionaler K-Vektorraum?

Lösung

a) Da es eine Basis $v_1, \ldots, v_d$ gibt, ist V isomorph zu K^d. Dieser Raum besteht aus allen d-Tupeln und besitzt damit q^d Elemente.

b) Wenn V endlichdimensional ist, so folgt die Endlichkeit der Menge V direkt aus a). Wenn V endlich ist, so kann man ganz V als endliches Erzeugendensystem wählen. Eine Teilmenge davon bildet eine endliche Basis. Also ist V endlichdimensional.

c) Wir überlegen uns, auf wie viele Arten wir eine Basis $v_1, \ldots, v_d$ zusammenstellen können. Damit müssen wir nur beachten, dass v_{i+1} jeweils nicht im dem von den $v_1, \ldots, v_i$ erzeugten Untervektorraum liegt. Durch diese Bedingung besitzt dieser Untervektorraum insbesondere q^i Elemente. Das bedeutet, dass man für v_{i+1} genau $q^d - q^i$ Auswahlmöglichkeiten hat. Daher gibt es insgesamt

$$(q^d-1)(q^d-q)(q^d-q^2)\cdots(q^d-q^{d-2})(q^d-q^{d-1}) = q^{\frac{d(d-1)}{2}}(q^d-1)(q^{d-1}-1)(q^{d-2}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)$$

Basen.

Aufgabe (1 Punkt)

Wie lautet die Matrix, die bezüglich der Standardbasis die Vierteldrehung im $\mathbb{R}^2$ gegen den Uhrzeigensinn beschreibt?

Lösung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2z & 0 & -z+1 \\ 1 & 1 & 3 \\ z & 2 & -z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Lösung

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Wir müssen also die Nullstellen der Determinante bestimmen. Die Determinante ist (nach der Regel von Sarrus)

$$-2z^2 - 2z + 2 - 12z - z + z^2 = -z^2 - 15z + 2\,.$$

Dies ist gleich 0 genau dann, wenn

$$z^2 + 15z - 2 = 0$$

ist. Durch quadratisches Ergänzen führt diese Gleichung auf

$$\left(z + \frac{15}{2}\right)^2 = 2 + \frac{225}{4} = \frac{233}{4}\,.$$

Daher sind

$$z_1 = \frac{\sqrt{233}}{2} + \frac{15}{2} = \frac{15 + \sqrt{233}}{2} \text{ und } z_2 = -\frac{\sqrt{233}}{2} + \frac{15}{2} = \frac{15 - \sqrt{233}}{2}$$

die beiden einzigen Lösungen der quadratischen Gleichung. Diese zwei reellen Zahlen sind also die einzigen (reellen oder komplexen) Zahlen, für die die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung