Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/3/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	2	5	2	4	4	3	4	2	4	3	5	3	1	7	3	6	64

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.

2. Die *Umkehrabbildung* zu einer bijektiven Abbildung $F: L \to M$.

3. Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n.

4. Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.

5. Das *obere Treppenintegral* zu einer oberen Treppenfunktion t zu einer Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Eine *diagonalisierbare* lineare Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow V$$
auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0\,, \\ -x, \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

2. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$
gilt.

3. Der natürliche Logarithmus
$$\ln: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

4. Das nach Voraussetzung existierende Oberintegral zu f über $[a, b]$ heißt bestimmtes Integral.

5. Man nennt

$$\langle v_i, \, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \mid s_i \in K, \, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

den von der Familie *aufgespannten Untervektorraum*.

6. Die Abbildung φ werde bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und Beschränktheit von Folgen.
2. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*.
3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

1. Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.

2. Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b-a)\,.$$

3. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

Aufgabe (2 Punkte)

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 7 und der andere ein Fassungsvermögen von 10 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Lösung

Die folgende Kette von Inhaltspaaren kann man bei den gegebenen Möglichkeiten offensichtlich erreichen.

$$(0,0),\ (7,0),\ (0,7),\ (7,7),\ (4,10),\ (4,0),\ (0,4),\ (7,4),\ (1,10),\ (1,0).$$

Aufgabe (5 (1+1+1+2) Punkte)

Ein Zug ist 500 Meter lang (ohne Lokomotive) und bewegt sich mit 180 Stundenkilometer. Lucy Sonnenschein hat ihr Fahrrad mit in den Zug genommen und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 Metern pro Sekunde von ganz vorne nach ganz hinten.

1. Wie viele Sekunden benötigt Lucy für die gesamte Zuglänge?
2. Welche Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) hat Lucy bezogen auf die Umgebung?
3. Welche Entfernung (in Meter) legt der Zug während der Fahrradfahrt zurück?
4. Berechne auf zwei verschiedene Arten, welche Entfernung Lucy während ihrer Fahrradfahrt bezogen auf die Umgebung zurücklegt.

Lösung

1. Lucy benötigt 25 Sekunden für den 500 Meter langen Zug.
2. In Meter pro Sekunde hat der Zug eine Geschwindigkeit von
   $$\frac{180000}{3600} = \frac{1800}{36} = 50\,.$$
   Da die beiden Bewegungen sich überlagern, aber in umgekehrter Richtung ausgerichtet sind, ist die Gesamtgeschwindigkeit von Lucy gleich 30 Meter pro Sekunde.
3. In den 25 Sekunden legt der Zug
   $$25 \cdot 50 = 1250$$
   Meter zurück.
4. Man kann von der vom Zug zurückgelegten Strecke die von Lucy im Zug zurückgelegte Strecke subtrahieren, dies ergibt

$$1250 - 500 = 750$$

Meter. Ebenso kann man mit ihrer Geschwindigkeit bezogen auf die Umgebung rechnen, und erhält ebenfalls

$$25 \cdot 30 = 750$$

Meter.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \geq 0$. Zeige, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn $x^2 \geq y^2$ gilt.

Lösung

Wenn $x \geq y$ ist, so folgt daraus durch Multiplikation mit $y \geq 0$ die Abschätzung

$$xy \geq y^2$$

und durch Multiplikation mit $x \geq 0$ auch

$$x^2 \geq xy\,,$$

woraus sich insgesamt

$$x^2 \geq y^2$$

ergibt.

Sei nun

$$x^2 \geq y^2$$

vorausgesetzt. Wenn

$$x < y$$

gelten würde, so würde sich mit der Hinrichtung direkt

$$y^2 \geq x^2$$

ergeben, also insgesamt

$$x^2 = y^2 \, .$$

Wegen $x, y \geq 0$ folgt daraus

$$x = y \, ,$$

ein Widerspruch.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d-1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b-a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

Lösung

Wir setzen $x_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Die Konvergenz der Reihe bedeutet die Konvergenz dieser Folge der Partialsummen. Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn es sich um eine Cauchyfolge handelt. Eine solche liegt vor, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 derart gibt, dass zu jedem

$$n \geq m \geq n_0$$

die Abschätzung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt. Im Reihenfall bedeutet dies einfach

$$|x_n - x_m| = |\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \epsilon$$

(die Verschiebung um 1 in der Indexmenge macht keinen Unterschied).

Aufgabe (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine nichtstetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche Hintereinanderschaltungen $f \circ f, f \circ f \circ f, \ldots$ unendlich oft differenzierbar sind.

Lösung

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0\, , \text{ für } x \leq 1\, , \\ 1 \text{ sonst }, \end{cases}$$

definierte Funktion. Diese Funktion ist an der Stelle 1 nicht stetig, da sie dort eine Sprungstelle besitzt. Es ist $f \circ f$ die konstante Funktion mit dem Wert 0, da f nur die beiden Wert 0 und 1 besitzt und diese beiden auf 0 abgebildet werden. Höhere Hintereinanderschaltungen von f mit sich selbst sind aus demselben Grund ebenfalls die Nullabbildung. Als konstante Abbildung sind diese unendlich oft differenzierbar.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{x^2-5x+7}{x^3}=1$$

eine reelle Lösung im Intervall $[1,2]$ besitzt und bestimme diese bis auf einen Fehler von maximal ein Achtel.

Lösung

$$\frac{x^2-5x+7}{x^3}=1$$

Die Funktion hat an der Stelle 1 den Wert

$$\frac{1^2-5+7}{1}=3>1$$

und an der Stelle 2 den Wert

$$\frac{4-10+7}{8}=\frac{1}{8}<1\,,$$

nach dem Zwischenwertsatz muss es also dazwischen ein Element mit dem Wert 1 geben. Wir verwenden die Intervallhalbierung zur Approximation einer solchen Stelle. An der Stelle $\frac{3}{2}$ ist der Wert

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+7}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{\frac{9}{4}-5\left(\frac{3}{2}\right)+7}{\frac{27}{8}}=\frac{18-60+56}{27}=\frac{14}{27}<1\,.$$

Eine Lösung muss sich also im Intervall $[1, \frac{3}{2}]$ befinden. An der Stelle $\frac{5}{4}$ ist

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 7}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{4 \cdot 25 - 25 \cdot 16 + 7 \cdot 64}{125} = \frac{100 - 400 + 448}{125} = \frac{148}{125} > 1\,.$$

Eine Lösung muss sich also im Intervall $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ befinden. An der Stelle $\frac{11}{8}$ ist

$$\frac{\left(\frac{11}{8}\right)^2 - 5\left(\frac{11}{8}\right) + 7}{\left(\frac{11}{8}\right)^3} = \frac{8 \cdot 121 - 55 \cdot 64 + 7 \cdot 512}{1331} = \frac{968 - 3520 + 3584}{1331} = \frac{1032}{1331} < 1\,.$$

Daher liegt eine Lösung im Intervall $[\frac{10}{8}, \frac{11}{8}]$.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x)\,.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left(\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)' \\ &= -\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2} \\ &= -\frac{\cos(\ln x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a.$$

Zeige, dass

$f(x) \geq g(x)$ für alle $x \geq a$ gilt.

Lösung

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x).$$

Nach den Voraussetzungen ist h differenzierbar, es ist $h(a) \geq 0$ und es ist $h'(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$. Wir müssen zeigen, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$ ist. Nehmen wir also an, dass es ein $x > a$ gibt mit $h(x) < 0$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es ein $c \in [a, x]$ mit

$$h'(c) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a}.$$

Da diese Zahl negativ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3x - 1\,.$$

Lösung

Die Ableitung der Funktion f ist

$$f'(x) = -6x^2 + 14x - 3$$

und die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = -12x + 14\,.$$

Wenn wir die erste Ableitung gleich 0 setzen, so erhalten wir

$$x^2 - \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = 0$$

und damit

$$x_{1,2} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - \frac{18}{36}} = \frac{7}{6} \pm \frac{\sqrt{31}}{6}\,.$$

Für die zweite Ableitung an

$$x_2 = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{7-\sqrt{31}}{6}$$

ist

$$f''\left(\frac{7-\sqrt{31}}{6}\right) = -14 + 2\sqrt{31} + 14 > 0\,,$$

also liegt an der Stelle $\frac{7-\sqrt{31}}{6}$ ein isoliertes lokales Minimum vor.

Für die zweite Ableitung an

$$x_1 = \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{7+\sqrt{31}}{6}$$

ist

$$f''\left(\frac{7+\sqrt{31}}{6}\right) = -14 - 2\sqrt{31} + 14 < 0\,,$$

also liegt an der Stelle $\frac{7+\sqrt{31}}{6}$ ein isoliertes lokales Maximum vor. Beide sind nicht global, da das kubische Polynom surjektiv ist.

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Lösung

Eine Stammfunktion zu f ist

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln(2x+3) + e^{-x}\,.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)\,dx &= F(4) - F(1)\\ &= \frac{16}{3} - 4 + \frac{1}{2}\ln 11 + e^{-4} - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - e^{-1}\\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{11}{5} + e^{-4} - e^{-1}.\end{aligned}$$

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Umkehrfunktion zur linearen Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \mathrm{i}z.$$

Lösung

Die Umkehrfunktion ist

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto -\mathrm{i}z,$$

da

$$\mathrm{i}(-\mathrm{i}) = 1$$

ist.

Aufgabe (7 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

derart gibt, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Lösung

Der Unterraum U ist ebenfalls endlichdimensional. Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ eine Basis von U, die wir durch $v_1, \ldots, v_n \in V$ zu einer Basis von V ergänzen können. Es sei $W = K^n$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow K^n,$$

die durch

$$\varphi(u_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

und

$$\varphi(v_j) = e_j \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

festgelegt ist (dabei sei e_j der j-te Standardvektor des K^n), was nach dem Basisfestlegungssatz möglich ist. Wegen

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} t_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} t_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j$$

ist die Abbildung surjektiv. Offenbar ist $U \subseteq \operatorname{kern} \varphi$. Es sei

$$v = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} t_j v_j \in \operatorname{kern} \varphi.$$

Dann ist

$$0 = \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j \, .$$

Da die Standardbasis vorliegt, sind die $t_j = 0$ und daher ist $v \in U$. Also ist $U = \operatorname{kern} \varphi$.

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Wir entwickeln nach der vierten Zeile. Dies ergibt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} + 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 3 \cdot (3 \cdot 24 + 1 \cdot 18) + 7 \cdot (1(-5) + 1 \cdot 0)$$
$$= 270 - 35$$
$$= 235.$$

Aufgabe (6 (2+4) Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} T & T-1 \\ T+1 & \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

über dem Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{R}(T)$.

1. Bestimme das charakteristische Polynom von M.
2. Bestimme, ob M Eigenwerte besitzt.

Lösung

1. Es ist

$$\begin{aligned}\chi_M &= \det\begin{pmatrix} X-T & -(T-1) \\ -(T+1) & X-\frac{1}{T}\end{pmatrix} \\ &= (X-T)\left(X-\frac{1}{T}\right)-(T+1)(T-1) \\ &= X^2-\left(T+\frac{1}{T}\right)X+1-T^2+1 \\ &= X^2-\frac{T^2+1}{T}X-T^2+2.\end{aligned}$$

2. Wir führen quadratische Ergänzung durch und schreiben dieses Polynom als

$$\begin{aligned}X^2-\frac{T^2+1}{T}X-T^2+2 &= \left(X-\frac{T^2+1}{2T}\right)^2-\left(\frac{T^2+1}{2T}\right)^2-T^2+2 \\ &= \left(X-\frac{T^2+1}{2T}\right)^2-\frac{T^4+2T^2+1}{4T^2}-T^2+2 \\ &= \left(X-\frac{T^2+1}{2T}\right)^2+\frac{-T^4-2T^2-1-4T^4+8T^2}{4T^2} \\ &= \left(X-\frac{T^2+1}{2T}\right)^2-\frac{-5T^4+6T^2-1}{4T^2}.\end{aligned}$$

Wir behaupten, dass $-5T^4+6T^2-1$ keine Quadratwurzel in $\mathbb{R}(T)$ besitzt. Wenn es nämlich eine rationale Funktion P/Q mit

$$-5T^4+6T^2-1=\frac{P^2}{Q^2}$$

geben würde, so wäre

$$\left(-5T^4+6T^2-1\right)Q^2=P^2\,,$$

doch dann wäre der Leitkoeffizient dieses Polynoms einerseits negativ und andererseits positiv, was einen Widerspruch ergibt. Somit besitzt das charakteristische Polynom keine Nullstelle und daher hat die Matrix keinen Eigenwert.