Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/40/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	4	2	3	1	3	0	5	0	0	0	0	4	3	4	9	7	1	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *bijektive* Abbildung
$$f\colon M \longrightarrow N.$$
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.

3. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.

4. Der *Kotangens*.

5. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K.

6. Der *Kern* einer linearen Abbildung

   $$\varphi : V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Cauchykriterium für Reihen*.

2. Der *Satz von Rolle*.

3. Der Satz über Basiswechsel bei einem Endomorphismus.

Aufgabe * (4 (2+2) Punkte)

Es sei $T_n, n \in \mathbb{N}_+$, eine Familie von Mengen. Wir setzen

$$S_n = T_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} T_i \right).$$

a) Zeige

$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \,.$$

b) Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ disjunkt ist, dass also

$$S_n \cap S_k = \emptyset$$

für $n \neq k$ ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Erläutere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Aufgabe * (1 Punkt)

Eine Termitenkönigin legt 36000 Eier pro Tag und lebt zwanzig Jahre lang. Wie viele Eier legt sie in ihrem Leben?

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$x^2 + px + q = 0$$

eine quadratische Gleichung über einem Körper K, und es sei $r \neq 0$ eine Lösung davon. Zeige, dass auch $\frac{q}{r}$ eine Lösung der Gleichung ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 (2+3) Punkte)

1. Bestimme die Glieder x_1, x_2 der Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startglied
$$x_0 = 1 .$$
2. Finde ganze Zahlen
$$a, b \neq 0$$
mit

$$|a + b\sqrt{3}| \leq \frac{1}{10}\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Regel von l'Hospital.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sinh t}$$

für $t > 0$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Aufgabe * (9 (1+1+6+1) Punkte)

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	11	5	3
P_2	8	4	6
P_3	7	30	1
P_4	12	0	15

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

P_1	P_2	P_3	P_4
8	5	7	4

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

R_1	R_2	R_3
8	15	7

Zeige, dass man daraus kein Produkttupel ohne Abfall produzieren kann.

d) Wie viel vom Produkt P_2 kann man mit den unter c) gelieferten Rohstoffen produzieren, wie viel vom Produkt P_3?

Aufgabe * (7 (5+2) Punkte)

Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit dem Rang r.

1. Zeige, dass es eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B, beide mit dem Rang r, mit $M = B \circ A$ gibt.
2. Sei $s < r$. Zeige, dass es nicht möglich ist, $M = B \circ A$ mit einer $s \times n$-Matrix A und einer $m \times s$-Matrix B zu schreiben.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Eigenvektoren der Funktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto ix$.