Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/17/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
Punkte	3	3	2	6	3	8	7	2	4	2	0	5	5	3	4	5	62

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Das *offene Intervall* $]a,b[$.
2. Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$.

3. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $-\infty$.
4. Das *Cauchy-Produkt* zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen.
5. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
6. Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$, wobei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist.

Lösung

1. Das *offene Intervall* ist $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x < b\}$.
2. Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ist durch
   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
   definiert.
3. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit
   $$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N$$
   gibt.
4. Das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe
   $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

5. Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes

$$\lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

6. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \rightarrow V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Existenz der Primfaktorzerlegung.
2. Der Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a > 0$.
3. Der Satz über die Multilinearität der Determinante (mit Erläuterung).

Lösung

1. Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren.
2. Die Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto a^x,$$

zur Basis $a > 0$ ist differenzierbar mit

$$(a^x)' = (\ln a) a^x \,.$$

3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für je $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	r	?
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	w	f	f
f	f	w	w
f	f	f	w

Lösung

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r).$$

Aufgabe (6 (1+1+4) Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $0 \leq k \leq n$ seien die Abbildungen

$$D_k \colon [n] \longrightarrow [n+1]$$

durch

$$D_k(j) = \begin{cases} j, \text{ falls } j < k, \\ j+1 \text{ sonst,} \end{cases}$$

und die Abbildungen

$$S_k \colon [n+1] \longrightarrow [n]$$

durch

$$S_k(j) = \begin{cases} j, \text{ falls } j \leq k, \\ j-1 \text{ sonst,} \end{cases}$$

definiert.

a) Erstelle eine Wertetabelle für

$$D_3 \colon [4] \longrightarrow [5].$$

b) Erstelle eine Wertetabelle für

$$S_3 \colon [6] \longrightarrow [5].$$

c) Beschreibe die durch die Wertetabelle

j	0	1	2	3	4	5
$\varphi(j)$	0	2	2	4	5	5

gegebene Abbildung

$$\varphi\colon [5] \longrightarrow [5]$$

als eine Hintereinanderschaltung von geeigneten D_k und S_i.

Lösung

a)

j	$0\;1\;2\;3\;4$
$D_3(j)$	$0\;1\;2\;4\;5$

b)

j	$0\;1\;2\;3\;4\;5\;6$
$S_3(j)$	$0\;1\;2\;3\;3\;4\;5$

c) Wir behaupten

$$\varphi = D_3 \circ D_1 \circ S_3 \circ S_1 \,.$$

Die Komposition hat für die Elemente $0, 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils den folgenden Effekt:

$$\begin{aligned}
0 &\mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto 0, \\
1 &\mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 2, \\
2 &\mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 2, \\
3 &\mapsto 2 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4, \\
4 &\mapsto 3 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5, \\
5 &\mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5.
\end{aligned}$$

Das Gesamtergebnis stimmt also mit φ überein.

Aufgabe (3 Punkte)

Die offizielle Berechtigung für eine Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Professor Knopfloch sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Lösung

Wir wollen zeigen, dass man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit n Punkten zur Klausur zugelassen wird. Dies folgt für $n \geq 200$ unmittelbar aus der offiziellen Grenze. Wir betrachten $n \leq 200$ und setzen $k = 200 - n$. Dies ist eine nichtnegative Zahl, über die wir Induktion führen, die Aussage ist

$$A(k) = \text{mit } 200 - k \text{ Punkten wird man zugelassen.}$$

Bei $k = 0$ ist $n = 200$ und dies reicht zur Zulassung. Sei nun die Aussage für irgendein $k \in \mathbb{N}$ bewiesen, d. h., mit $n = 200 - k$ Punkten wird man zugelassen. Es ist zu zeigen, dass die Aussage auch für $k + 1$ gilt, d.h. dass man auch mit $n = 200 - k - 1$ Punkten zugelassen wird. Wenn das aber nicht so wäre, so würde man mit $200 - k$ Punkten zugelassen werden, aber nicht mit einem Punkt weniger, und es würde doch auf einen einzigen Punkt ankommen im Widerspruch zur Zusicherung des Professors.

Aufgabe (8 (5+3) Punkte)

Wir betrachten die alternierende Reihe der Stammbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit

$$x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

also

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\dots,$$

die bekanntlich konvergiert.

a) Zeige, dass die umgeordnete Reihe

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\dots,$$

konvergiert.

b) Man gebe eine Umordnung der Reihe an, die divergiert.

Lösung

a) Drei aufeinanderfolgende Summanden haben die Form

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}$$

mit $k \in \mathbb{N}_+$. Dies kann man schreiben als

$$\begin{aligned}\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k} &= \frac{(4k-1)(2k)+(4k-3)(2k)-(4k-3)(4k-1)}{(4k-3)(4k-1)(2k)}\\ &= \frac{8k^2-2k+8k^2-6k-16k^2+16k-3}{(16k^2-16k+3)(2k)}\\ &= \frac{8k-3}{32k^3-32k^2+6k}.\end{aligned}$$

Der Zähler ist $\leq 8k$ und der Nenner ist $\geq 32k^3-32k^2 \geq 31k^3$ für $k \geq 32$. Somit kann man die Summanden für $k \geq 32$ durch

$$\frac{7k}{31k^3}=\frac{7}{31}\cdot\frac{1}{k^2}$$

nach oben abschätzen. Da nach Beispiel 9.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) die Reihe der Kehrwerte der Quadrate konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch diese Reihe.

Aufgabe (7 (3+3+1) Punkte)

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

b)

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\,.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

Lösung

a) Es ist $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ nach Satz 16.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (3). Daher ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

da Kosinus eine gerade Funktion ist. Aus

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ergibt sich

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \, .$$

Da $\sin \frac{\pi}{4} > 0$ ist, ist

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$

b) Nach den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus ist

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \cos\alpha\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)\sin\alpha \\ &= \cos\alpha(2\cos\alpha\sin\alpha) + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\sin\alpha \\ &= \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \\ &= \sin\alpha\left(4\cos^2\alpha - 1\right).\end{aligned}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ist also

$$0 = \sin\pi = \sin\frac{\pi}{3}\left(4\cos^2\frac{\pi}{3} - 1\right).$$

Wegen

$$\sin\frac{\pi}{3} \neq 0$$

ist somit

$$0 = 4\cos^2\frac{\pi}{3} - 1\,,$$

woraus sich

$$\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$$

ergibt. Da $\cos\frac{\pi}{3}$ positiv ist, folgt

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

c) Aus

$$1=\cos^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$$

folgt

$$\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\,,$$

woraus sich wegen der Positivität von $\sin\frac{\pi}{3}$ schließlich

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ergibt.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der durch

$$y=\frac{1}{7}$$

gegebenen Geraden.

Lösung

Der Einheitskreis ist durch

$$x^2 + y^2 = 1$$

gegeben. Darin setzen wir

$$y = \frac{1}{7}$$

ein und erhalten

$$x^2 + \frac{1}{49} = 1\,.$$

Also ist

$$x^2 = \frac{48}{49}$$

und damit

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm\frac{\sqrt{48}}{7} \\ &= \pm\frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind also $\left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}, \frac{1}{7}\right)$ und $\left(-\frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Lösung

Die Ableitung f' ist ein Polynom vom Grad $d-1$. Dieses besitzt nach Korollar 6.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) höchstens $d-1$ Nullstellen. Nach Fakt ***** besitzt daher f höchstens $d-1$ lokale Extrema. Zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Ableitung und auch unterhalb der kleinsten und oberhalb der größten Nullstelle ist die Ableitung entweder echt positiv oder echt negativ. Wenn wir stets benachbarte Intervalle zusammenlegen, auf denen die Ableitung jeweils positiv oder jeweils negativ ist, so erhalten wir eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in Intervalle, auf denen die Ableitung positiv oder negativ mit eventuell endlich vielen Ausnahmepunkten ist, und positiv und negativ wechseln sich ab. In diesen Intervallen ist dann f nach Satz 15.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) streng wachsend oder streng fallend.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lösung

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, können wir Satz 14.9 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) anwenden und erhalten mit Satz 16.3 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $]0, 1]$.

Lösung

Die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $\ln x$. Daher ist $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$. Die äquidistante Unterteilung von $[1, 2]$ in n Teilintervalle führt zu den Teilungspunkten

$$1+\frac{i}{n}, i=0,\ldots,n.$$

Da $\frac{1}{x}$ streng fallend ist, ist die Treppenfunktion, die auf dem Intervall $]1+\frac{i-1}{n}, 1+\frac{i}{n}[$ den Wert

$$f(1+\frac{i}{n})=\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\frac{n}{n+i}$$

annimmt, eine untere Treppenfunktion zu f. Das Treppenintegral zu dieser Treppenfunktion ist

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

und dies ist maximal gleich dem bestimmten Integral.

Aufgabe (5 (1+1+1+1+1) Punkte)

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei zusätzlich mit der komponentenweisen Multiplikation versehen. Bestimme, welche der folgenden Teilmengen unter dieser Multiplikation abgeschlossen sind.

1. Die Punktmenge $\{(0,\,0)\,,(0,\,1)\,,(1,\,0)\,,(1,\,1)\}$.
2. Die Gerade
$$\{(x,\,y)\mid y=3x\}.$$
3. Das Achsenkreuz
$$\{(x,\,y)\mid x=0 \text{ oder } y=0\}.$$

4. Die Hyperbel
$$\{(x,\,y) \mid xy = 1\}.$$
5. Die Parabel
$$\{(x,\,y) \mid y = x^2\}.$$

Lösung

1. Ist multiplikativ abgeschlossen. Bei jedem möglichen Produkt sind die Komponenten 0 oder 1, gehören also wieder zu der Punktmenge.
2. Ist nicht multiplikativ abgeschlossen. Es ist $(1, 3)$ ein Punkt der Geraden, aber
$$(1, 3) \cdot (1, 3) = (1, 9)$$
ist kein Punkt der Geraden.
3. Ist multiplikativ abgeschlossen. Ein Produkt von zwei Punkten des Achsenkreuzes hat in mindestens einer Komponenten den Wert 0 und gehört somit wieder zum Achsenkreuz.
4. Ist multiplikativ abgeschlossen. Seien (x, y) und (z, w) Punkte der Hyperbel, also $xy = 1$ und $zw = 1$. Das Produkt der Punkte ist
$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz, yw)$$
und wegen
$$(xz) \cdot (yw) = xzyw = xyzw = 1 \cdot 1 = 1$$
liegt das Produkt wieder auf der Hyperbel.
5. Ist multiplikativ abgeschlossen. Die Punkte auf der Parabel sind die Punkte der Form (x, x^2), und das Produkt von zwei solchen Punkten ist

$$(x, x^2) \cdot (u, u^2) = (xu, x^2u^2) = (xu, (xu)^2)\,,$$

und hat also wieder diese Form.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und es seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ Vektoren. Zeige, dass v_1, v_2, v_3 genau dann linear unabhängig sind, wenn $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$ linear unabhängig sind.

Lösung

Seien v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und sei

$$b_1v_1 + b_2(v_1 + v_2) + b_3(v_1 + v_2 + v_3) = 0$$

eine Darstellung der 0. Dies bedeutet

$$(b_1 + b_2 + b_3)v_1 + (b_2 + b_3)v_2 + b_3v_3 = 0\,,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit

$$b_3, b_2 + b_3, b_1 + b_2 + b_3 = 0\,,$$

also

$$b_1, b_2, b_3 = 0$$

folgt.

Seien nun umgekehrt $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$ linear unabhängig und sei

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

eine Darstellung der 0. Dann ist

$$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = (a_1 - a_2) v_1 + (a_2 - a_3)(v_1 + v_2) + a_3 (v_1 + v_2 + v_3) \, .$$

Daraus ergibt sich

$$a_3, a_2 - a_3, a_1 - a_2 = 0$$

und daraus

$$a_1, a_2, a_3 = 0 \, .$$

Aufgabe (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

1. Die Abonnenten von A bleiben zu 75% bei A, 10% wechseln zu B, 0% wechseln zu C und 15% werden Nichtleser.
2. Die Abonnenten von B bleiben zu 70% bei B, 10% wechseln zu A, 10% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
3. Die Abonnenten von C bleiben zu 50% bei C, 5% wechseln zu A, 20% wechseln zu B und 25% werden Nichtleser.
4. Von den Nichtlesern entscheiden sich je 15% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 1500 Abonnenten und es gibt 3500 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 8000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Lösung

a) Die Matrix, die die Kundenbewegungen (in der Reihenfolge A, B, C und Nichtleser) beschreibt, ist

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,05 & 0,15 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 & 0,25 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kundenverteilung nach einem Jahr zur Ausgangsverteilung $(1500, 1500, 1500, 3500)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,05 & 0,15 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 & 0,25 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 1500 \\ 3500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1875 \\ 2025 \\ 1425 \\ 2675 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ausgangsverteilung ist $(0, 0, 0, 8000)$, daher ist die Verteilung nach einem Jahr gleich $(1200, 1200, 1200, 4400)$.

Nach zwei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,05 & 0,15 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 & 0,25 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 4400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1740 \\ 1860 \\ 1380 \\ 3020 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,05 & 0,15 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 & 0,25 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1740 \\ 1860 \\ 1380 \\ 3020 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2013 \\ 2205 \\ 1329 \\ 2453 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als n Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \, .$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten einerseits

$$a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_n \varphi(v_n) = \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0 \, .$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0 \,.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1) a_1 v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{n-1} v_{n-1} = 0 \,.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i) a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$.