Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/9/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
Punkte	3	3	4	3	7	5	2	3	3	2	5	10	5	2	3	4	64

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.
2. Ein *archimedisch* angeordneter Körper K.

3. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
4. Eine *gerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
5. Der i-te *Standardvektor* im K^n.
6. Der *Rang* einer linearen Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Man nennt die Menge
$$L \times M = \{(x, y) \mid x \in L,\, y \in M\}$$
die *Produktmenge* der Mengen L und M.
2. Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit
$$n \geq x$$
gibt.
3. Der Grad eines von 0 verschiedenen Polynoms
$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$
mit $a_n \neq 0$ ist n.
4. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(x) = f(-x)$$
gilt.

5. Der Vektor

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht, heißt i-ter *Standardvektor*.

6. Unter dem *Rang* einer linearen Abbildung φ versteht man

$$\text{rang}\ \varphi = \dim(\text{bild}\,\varphi)\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Fundamentalsatz der Algebra*.
2. Die *Taylor-Abschätzung*.
3. Der Satz über die Beschreibung einer linearen Abbildung bei einem Basiswechsel.

Lösung

1. Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.
2. Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(|f^{(n+1)}(c)|,\, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung
   $$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k| \leq \frac{B}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\,.$$
3. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix
   $$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$
   beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$

   beschreiben.

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \times N) \cap (M \times B) = A \times B\,.$$

Lösung

Wir zeigen die beiden Inklusionen. Sei zunächst

$$(x,y) \in (A \times N) \cap (M \times B)\,.$$

Dies bedeutet

$$(x,y) \in (A \times N)$$

und

$$(x,y) \in (M \times B)\,.$$

Dies bedeutet einerseits $x \in A$ und andererseits $y \in B$. Also ist $(x,y) \in A \times B$.

Wenn umgekehrt $(x,y) \in A \times B$ gilt, so ist $x \in A$ und $y \in B$. Wegen der Teilmengenbeziehungen $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ ist

$$(x,y) \in (A \times N)$$

und

$$(x,y) \in (M \times B)$$

und damit auch

$$(x,y) \in (A \times N) \cap (M \times B)\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere Vor- und Nachteile des axiomatischen Aufbaus der Mathematik.

Lösung Axiomatischer Aufbau/Vor- und Nachteile/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (7 (1+1+2+3) Punkte)

Der Planet Trigeno wird von einer einzigen Tierart bevölkert, den Trigos. Diese Tierart besitzt drei Geschlechter: Antilopen (A), Büffel (B) und Cnus (C). Bei der Paarung treffen zwei Individuen zusammen und erzeugen ein neues Individuum. Wenn das Paar gleichgeschlechtlich ist, so ist das Ergebnis wieder dieses Geschlecht, wenn das Paar gemischtgeschlechtlich ist, so ist das Ergebnis das dritte unbeteiligte Geschlecht. Die Tiere gehören einer eindeutigen Generation an.

1. Die n-te Generation bestehe nur aus einem einzigen Geschlecht. Zeige, dass jede weitere Generation auch aus diesem Geschlecht besteht.
2. Die n-te Generation bestehe nur aus zwei Individuen unterschiedlichen Geschlechts. Zeige, dass diese Geschlechter mit ihrer Generation aussterben.
3. Es gelte nun die zusätzliche Bedingung, dass jedes Paar nur einen Nachkommen erzeugen darf. Zeige, dass die Tierart genau dann aussterben muss, wenn es in einer Generation nur zwei oder weniger Individuen gibt.
4. Es gelte nun die zusätzliche Bedingung, dass jedes Paar nur einen Nachkommen erzeugen darf, und in jeder Generation gebe es genau drei Individuen. Beschreibe die möglichen Generationsabfolgen. Welche Periodenlängen treten auf?

Lösung

1. Wenn die Generation nur aus dem Geschlecht X besteht, so sind nur Paarungen innerhalb dieses Geschlechts möglich und das Ergebnis gehört stets diesem Geschlecht an. Mit Induktion folgt, dass dies über alle folgenden Generationen so bleibt.
2. Die Generation bestehe aus einem Individuum des Geschlechts X und aus einem Individuum des Geschlechts $Y \neq X$. Die Folgegeneration besteht dann ausschließlich aus dem dritten Geschlecht Z und nach Teil (1) überträgt sich das auf alle folgenden Generationen.
3. Wenn es nur ein oder kein Individuum gibt, so ist keine Paarung möglich und die nächste Generation ist leer. Wenn es zwei Individuen gibt, so ist nur eine Paarung möglich und es gibt nur einen Nachkommen, der sich allein nicht fortpflanzen kann. Wenn es dagegen mindestens drei Individuen, egal welchen Geschlechts, gibt, so sind auch mindestens drei Paarungen möglich und die nächste Generation besitzt mindestens wieder drei Individuen.
4. Wenn drei gleichgeschlechtliche Individuen in einer Generation leben, so erzeugen die drei möglichen Paare stets wieder ebendieses Geschlecht. Die Möglichkeiten sind A, A, A oder B, B, B oder C, C, C und die Periodenlänge ist 1. Wenn drei unterschiedliche Geschlechter vertreten sind, so ist jedes Geschlecht durch genau ein Individuum vertreten, es liegt also A, B, C vor. Die drei Paarungen führen dann wieder zu A, B, C und die Periodenlänge ist ebenfalls 1. Wenn ein Geschlecht durch zwei Individuen vertreten ist und ein zweites Geschlecht durch ein Individuum, sagen wir X, X, Y, so wird daraus X, Z, Z und daraus Y, Y, Z und daraus X, X, Y. Die Periodenlänge ist also 3. Von diesem Typ gibt es zwei Generationsabfolgen, nämlich die mit A, A, B (mit A, C, C und B, B, C) und die mit A, B, B (mit B, C, C und A, A, C).

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei

$$P = X^3 + bX^2 + cX + d$$

ein normiertes Polynom über einem Körper K. Es seien u, v, w drei (verschiedene) Zahlen aus K. Zeige, dass diese drei Zahlen genau dann Nullstellen von P sind, wenn sie das Gleichungssystem

$$uvw = -d\,,$$
$$uv + uw + vw = c\,,$$
$$u + v + w = -b\,,$$

erfüllen.

Lösung

Nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist eine Zahl $u \in K$ genau dann eine Nullstelle von P, wenn $X - u$ ein Linearfaktor von P ist. Da u, v, w verschieden sind, sind diese drei Zahlen Nullstellen von P genau dann, wenn

$$P = (X-u)(X-v)(X-w)$$

ist. Wenn man dieses Produkt ausrechnet, so erhält man

$$(X-u)(X-v)(X-w) = X^3 - (u+v+w)X^2 + (uv+uw+vw)X - uvw\,.$$

Dies stimmt mit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ genau dann überein, wenn es koeffizientenweise damit übereinstimmt, wenn also gleichzeitig

$$uvw = -d\,,$$
$$uv + uw + vw = c\,,$$
$$u + v + w = -b\,,$$

gilt. Dies ist das angegebene Gleichungssystem.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Lösung

Nehmen wir an, dass x^{-1} nicht größer als 0 ist. Dann ist

$$x^{-1} < 0$$

und somit wäre nach Fakt ***** (6) sofort

$$1 = x \cdot x^{-1} < 0$$

im Widerspruch zu Fakt ***** (1).

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die harmonische Reihe divergiert.

Lösung

Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1)\frac{1}{2}\,.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 7.10 (Mathematik_für_Anwender_(Osnabrück_2019-2020)) nicht konvergent sein.

Aufgabe (3 (1+1+1) Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige die folgenden Aussagen.

1. Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.
2. Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.
3. Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung
   $$f(x) \leq c$$
   gilt, so gilt auch
   $$f(a) \leq c\,.$$

Lösung

1. Nach Fakt ***** gibt es für jede reelle Zahl x eine Folge x_n von rationalen Zahlen (sogar von Dezimalbrüchen), die gegen x konvergiert. Wegen der Stetigkeit und Satz 10.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist dann
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) .$$
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist
$$x_n = a - \frac{1}{n} < a .$$
Da die Folge der Stammbrüche eine Nullfolge ist, konvergiert diese Folge gegen a. Wegen der Stetigkeit und Satz 10.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist wieder
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) .$$
3. Dies folgt aus Teil (2) und Fakt *****.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1}. Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y))}.$$

Lösung

Die Kettenregel setzt voraus, dass beide Abbildungen differenzierbar sind, das weiß man hier aber von f^{-1} nicht.

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Lösung

Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 15.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)). Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b)-g(a)} \\ &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Also ist $h(a) = h(b)$ und Satz 15.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) liefert die Existenz eines $c \in \,]a, b[$ mit

$$h'(c) = 0\,.$$

Umstellen ergibt die Behauptung.

Aufgabe (10 (1+2+3+4) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$f(x) = e^x - x^e$.

1. Bestimme die erste und die zweite Ableitung von f.
2. Bestimme die Taylor-Entwicklung von f im Punkt e vom Grad ≤ 2.
3. Bestimme die Nullstellen von f.
4. Bestimme die lokalen Extrema von f.

Lösung

1. Es ist
   $$f'(x) = e^x - ex^{e-1} = e\left(e^{x-1} - x^{e-1}\right)$$
   und
   $$f''(x) = \left(e^x - ex^{e-1}\right)' = e^x - e(e-1)x^{e-2} .$$
2. Es ist
   $$f(e) = 0 ,$$
   $$f'(e) = e\left(e^{e-1} - e^{e-1}\right) = 0$$
   und
   $$f''(e) = e^e - e(e-1)e^{e-2} = e^e - e^2e^{e-2} + ee^{e-2} = e^e - e^e + e^{e-1} = e^{e-1} .$$
   Die Taylorentwicklung im Punkt e vom Grad 2 ist daher
   $$\frac{e^{e-1}}{2}(x-e)^2.$$

3. Es ist e eine Nullstelle von f, wir behaupten, dass dies die einzige Nullstelle ist. Wegen $f(0) = 1$ können wir $x > 0$ annehmen. Die Gleichung
$$e^x - x^e = 0$$
bzw. $e^x = x^e$ führt über den natürlichen Logarithmus auf $x = e \ln x$ und auf
$$g(x) = x - e \ln x = 0 \,.$$
Die Ableitung von $g(x)$ ist
$$1 - \frac{e}{x}.$$
Für $x < e$ ist dies negativ und für $x > e$ ist dies positiv. Somit ist $g(x)$ unterhalb von e streng fallend und oberhalb von e streng wachsend und das Minimum liegt in e mit dem Wert 0 vor. Der Wert 0 wird also von g und damit auch von f nur einmal angenommen.

4. Wegen
$$f'(x) = e\left(e^{x-1} - x^{e-1}\right)$$
liegen bei $x = 1$ und bei $x = e$ Nullstellen der Ableitung vor. Wegen
$$f''(e) > 0$$
liegt in e ein lokales isoliertes Minimum mit dem Wert 0 vor, das auch ein globales Minimum ist, da der Wert 0 nirgendwo sonst angenommen wird. Wegen
$$f''(1) = e - e(e-1) < 0$$
liegt au der Stelle 1 ein lokales isoliertes Maximum vor. Wir behaupten, dass die Ableitung keine weitere Nullstelle besitzt. Die Bedingung

$$e^{x-1} = x^{e-1}$$

führt auf $x - 1 = (e-1)\ln x$ bzw. auf

$$h(x) = x - 1 - (e-1)\ln x = 0$$

mit den beiden bekannten Lösungen 1 und e. Die Ableitung von h ist $1 - (e-1)\frac{1}{x}$. Dies ist negativ für $x < e-1$ und positiv für $x > e-1$. Deshalb ist h unterhalb von $e-1$ streng fallend und oberhalb davon streng wachsend und h besitzt nur die beiden angegebenen Nullstellen. Für $x = 0$ gibt es noch ein isoliertes lokales Minimum mit dem Wert 1. Dies folgt daraus, dass es zwischen 0 und 1 keine weitere Nullstelle der Ableitung gibt.

Aufgabe (5 Punkte)

Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Lösung

Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem h ein $c_h \in [x, x+h]$ mit

$$f(c_h)\cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

und damit ist

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}\,.$$

Für $h \to 0$ konvergiert c_h gegen x und wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(c_h)$ gegen $f(x)$.

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Lösung

Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes des $\mathbb{Q}^4$.

Lösung

Wir betrachten den ersten, zweiten, dritten und fünften Vektor der Familie, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Matrix. Die Determinante dieser Matrix ist nach der Entwicklung nach der ersten Spalte gleich

$$1 \cdot 0 - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1(0 - 1(-1) + 1) = -2 \neq 0\,,$$

der Rang der Matrix ist also 4 und die sechs Vektoren erzeugen den Gesamtraum. Die Dimension ist also 4.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige direkt (ohne charakteristisches Polynom), dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

Lösung

Es sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $M = (d_{ij})_{ij}$ zum Eigenwert $t \in K$. Da eine obere Dreiecksmatrix vorliegt, bedeutet dies

$$d_{11}x_1 + \cdots + d_{1n}x_n = tx_1 \, ,$$
$$d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n = tx_2 \, ,$$
$$\vdots$$
$$d_{n-1\,n-1}x_{n-1} + d_{(n-1)n}x_n = tx_{n-1} \, ,$$
$$d_{nn}x_n = tx_n \, .$$

Es sei k der größte Index mit $x_k \neq 0$, was es gibt, da ein Eigenvektor nicht der Nullvektor ist. Dann vereinfacht sich die k-te Gleichung

$$d_{kk}x_k + \cdots + d_{kn}x_n = tx_k$$

zu

$$d_{kk}x_k = tx_k$$

und wegen

$$x_k \neq 0$$

folgt

$$t = d_{kk} \, ,$$

d.h. dass der Eigenwert t ein Diagonalelement ist.