Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/56/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	5	1	2	3	3	10	4	2	3	0	3	4	3	0	3	54

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Ein *Polynom* über einem Körper K in einer Variablen X.

3. Das *Maximum* der Funktion

   $$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

   wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.

4. Eine *Treppenfunktion*

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.

6. Die *geometrische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow V$$

   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Abbildung

   $$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt

   $x \in D$.

2. Die wichtigsten Eigenschaften des natürlichen Logarithmus.

3. Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion*.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist.

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$3x \geq -8$$

und

$$7x \leq 10$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in K_+$. Sei $u \in K_+, d = c \cdot u^2, y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0. Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Standardparabel.

Aufgabe * (10 (1+1+1+3+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1},$$

die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ falls } x \leq 2, \\ \frac{x}{2}, \text{ falls } x > 2, \end{cases}$$

definiert ist.

1. Skizziere den Graphen der Funktion.
2. Zeige, dass f wohldefiniert ist.
3. Bestimme die Fixpunkte von f.
4. Bestimme die Fixpunkte von der Hintereinanderschaltung $f \circ f$.
5. Zeige, dass f stetig ist.
6. Was hat die Abbildung mit der Halbierung eines Blatt Papieres zu tun?

Aufgabe * (4 Punkte)

Von einem Rechteck sind der Umfang U und die Fläche A bekannt. Bestimme die Längen der Seiten des Rechtecks.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Eliminationslemma für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in n Variablen über einem Körper K.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
2. $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
3. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung auf dem K-Vektorraum V, es seien $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ und es sei $a \operatorname{Id}_V$ die Streckung zu a. Zeige, dass b genau dann ein Eigenwert zu φ ist, wenn ab ein Eigenwert zur Hintereinanderschaltung $a \operatorname{Id}_V \circ \varphi$ ist.