Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/2/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	3	4	3	3	3	6	5	5	4	2	3	8	3	1	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Betrag* einer reellen Zahl.
2. Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
3. Der *natürliche Logarithmus*
   $$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$
4. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
   $$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
5. Der von einer Familie von Vektoren $v_i,\, i \in I$, aus einem K-Vektorraum V *aufgespannte Untervektorraum*.
6. Die *Determinante* eines Endomorphismus
   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
   auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Nullstellen und lineare Faktoren eines Polynoms $F \in K[X]$.
2. Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Abbildung
   $$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt

$x \in D$.

3. Der Satz über die Ableitung in einem Extremum.

Aufgabe * (3 Punkte)

Franziska möchte mit ihrem Freund Heinz Schluss machen. Sie erwägt die folgenden drei Begründungen.

1. „Du hast dich schon am ersten Tag voll daneben benommen. Seitdem ist es von jedem Tag zum nächsten Tag nur noch schlimmer geworden. Du wirst Dich also immer völlig daneben benehmen“.
2. „Wenn ich mit Dir zusammenbleiben würde, so würde ich irgendwann als eine traurige, gelangweilte, vom Leben enttäuschte Person enden, das möchte ich aber auf gar keinen Fall“.
3. „Also, wenn Du mich nicht liebst, will ich Dich sowieso nicht. Wenn Du mich aber liebst, so komme ich zu dem Schluss, dass Du dein Verhalten mit Deinen Gefühlen nicht zur Deckung bringen kannst. Dann bist Du also unreif und dann will ich Dich auch nicht“.

Welche mathematischen Beweisprinzipien spiegeln sich in den drei Begründungen wieder?

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{N}_+$. Zeige, wie man a^{10} mit vier Multiplikationen berechnen kann.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise, dass eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen konvergiert.

Aufgabe * (6 (4+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe * (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x,$$

über $[-1, 0]$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1,0,0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1,-2,5),\, (4,0,3) \text{ und } (2,1,1)$$

aus.

Aufgabe * (8 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von V bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2+x & -x \\ -x^3+2x^2+5x-1 & x^2-x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Eigenvektoren der Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \pi x$.