Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/16/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	1	4	6	5	2	4	4	2	7	4	0	0	0	1	5	4	2	57

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Eine *Folge* reeller Zahlen.
3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
4. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.
6. Eine *diagonalisierbare* lineare Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe von reellen Zahlen.
2. Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.
3. Der Satz über die Beziehung zwischen Eigenschaften von linearen Abbildungen und Matrizen.

Aufgabe * (1 Punkt)

Wir betrachten den Satz „Kein Mensch ist illegal“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

Aufgabe * (4 (1+1+2) Punkte)

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a,b,c \in \,]0,1[$ mit

$$a^2+b^2=c^2.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a,b,c \in \,]0,1[$ mit

$$a^2+b^2 \neq c^2.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a,b \in \,]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in \,]0,1[$ mit

$$a^2+b^2=c^2.$$

Aufgabe * (6 (1+1+1+1+2) Punkte)

Bei einer Fernsehaufzeichnung sitzen n Zuschauer im Studio, die über ein elektronisches Gerät auf verschiedene Fragen mit Ja oder Nein antworten und wobei das Ergebnis (die Ja-Antworten) in vollen Prozent auf einem Bildschirm erscheint und wobei ab $,5$ nach oben gerundet wird.

a) Erstelle eine Formel mit Hilfe der Gaußklammer $\lfloor \; \rfloor$, die bei gegebenem n aus i die Prozentzahl $p(i)$ berechnet.

b) Für welche n ist die Prozentabbildung aus a) injektiv und für welche surjektiv?

c) Es sei $n = 99$. Welche Prozentzahl tritt nie auf dem Bildschirm auf?

d) Es sei $n = 101$. Hinter welcher Prozentzahl können sich unterschiedlich viele Ja-Stimmen verbergen?

e) Es sei $n = 102$. Hinter welchen Prozentzahlen können sich unterschiedlich viele Ja-Stimmen verbergen?

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

definiert.

1. Bestimme x_{117} und x_{127}.
2. Konvergiert die Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe * (4 Punkte)

Berechne

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \right) \cdot \left(-\frac{2}{5} + 7\sqrt[3]{2} + \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \right).$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a) .$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$ gilt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass die Funktion $x \mapsto f(|x|)$ differenzierbar ist.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung und das Wachstumsverhalten einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (1 Punkt)

Inwiefern hat das Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit dem Induktionsprinzip zu tun?

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $s_1, \ldots, s_k \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^k s_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j \, .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{Q}^n$ ein Untervektorraum. Zeige, dass U eine Basis aus Vektoren besitzt, deren Einträge allesamt ganze Zahlen sind.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei M eine 2×2-Matrix über einem Körper K. Zeige, dass M genau dann trigonalisierbar ist, wenn M einen Eigenvektor besitzt.