Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/32/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	1	7	0	4	3	1	5	4	0	4	2	2	4	3	3	53

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.
2. Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n.

3. Eine *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von reellen Zahlen a_k.
4. Der *Arkuskosinus*.
5. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.
6. Die *transponierte Matrix* zu einer $m \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Quadratwurzel von 2.
2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus.
3. Der allgemeine Entwicklungssatz für die Determinante.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestätige die folgende Identität.

$$3^5 + 11^4 = 122^2 .$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Eine leere Flasche stand über Nacht draußen und es hat dann angefangen zu regnen. Am Morgen steht in der Flasche Wasser in einer Höhe von $\frac{1}{2}$ cm. Die Flaschenöffnung hat einen (inneren) Durchmesser von 2 cm und die Flasche hat einen Durchmesser von 6 cm. Wie viel Regen fiel in der Nacht (gemessen in Zentimetern)?

Aufgabe * (1 Punkt)

Zeige, dass zwischen den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k+1}$ der Zusammenhang

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

besteht.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise die Division mit Rest im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die harmonische Reihe divergiert.

Aufgabe (1 Punkt)

Skizziere den Graphen der Kosinusfunktion.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Satz über die lineare Approximierbarkeit.

Aufgabe * (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right)e^{3x}$$

ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1 + \sin x)) \cdot \sin x.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 7 & 3 & 0 & -7 \\ 6 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(5)\ \ 1u = u$$

erfüllt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme, ob die drei Funktionen

$$f,g,h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ und $h(x) = \cos x$ linear abhängig sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Determinantenmultiplikationssatz für den Spezialfall, wo die linke der beteiligten Matrizen eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.