Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/29/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	6	2	2	3	2	0	5	2	4	0	2	2	2	4	6	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Eine *Teilfolge* einer Folge reeller Zahlen.

3. Eine *gerade* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f:]a, b[\to \mathbb{R}$.
5. Ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Variablen über einem Körper K.
6. Der *Kern* einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

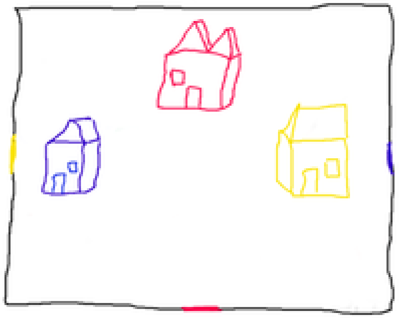
Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.
2. Der Satz über Ableitung und Wachstumsverhalten einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Der Satz über die Lösungsmenge zu einem linearen Gleichungssystem in Dreiecksgestalt über einem Körper K.

Aufgabe (1 Punkt)

Lege in der Skizze für die drei Häuser überschneidungsfrei Wege zu den zugehörigen gleichfarbigen Gartentoren an.

Aufgabe * (1 Punkt)



Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Aufgabe * (6 (2+2+1+1) Punkte)

Wir betrachten die beiden Sätze „Für jeden Topf gibt es einen Deckel“ und „Es gibt einen Deckel für jeden Topf“, die man im alltäglichen Verständnis wohl als gleichbedeutend ansehen würde. Wenn man aber die beiden Aussagen streng prädikatenlogisch (quantorenlogisch) von vorne nach hinten abarbeitet, so ergeben sich zwei unterschiedliche Bedeutungen.

1. Formuliere die beiden Aussagen durch zusätzliche Wörter so um, dass die unterschiedlichen Bedeutungen deutlich hervortreten.
2. Es sei T die Menge der Töpfe und D die Menge der Deckel. Es sei P ein zweistelliges Prädikat derart, dass (für $x \in T$ und $y \in D$) $P(x, y)$ besagt, dass y auf x passt. Formuliere die beiden Aussagen allein mit geeigneten mathematischen Symbolen.

3. Kann man aus der Aussage, dass es für jeden Topf einen Deckel gibt, logisch erschließen, dass es für jeden Deckel einen Topf gibt?
4. Wie kann man erklären, dass die beiden Aussagen im alltäglichen Verständnis als gleichbedeutend interpretiert werden?

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Person A wird 80 Jahre alt und Person B wird 70 Jahre alt. Vergleiche die Gesamtlebenswachzeit und die Gesamtlebensschlafzeit der beiden Personen bei folgendem Schlafverhalten.

1. A schläft jede Nacht 7 Stunden und B schläft jede Nacht 8 Stunden.
2. A schläft jede Nacht 8 Stunden und B schläft jede Nacht 7 Stunden.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es seien L, M, N Mengen und $F \colon L \to M$ und $G \colon M \to N$ surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $G \circ F$ ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi: K[X] \longrightarrow K,\, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

1. $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
2. $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
3. $1(a) = 1$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Satz über die lineare Approximierbarkeit.

Aufgabe * (2 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a > 0$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zueinander ähnlich sind.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 3\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix},$$

die Angaben sind dabei als gemischte Brüche zu verstehen und das Ergebnis soll ebenso angegeben werden.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei

$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe * (6 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix, mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0 \, .$$

Bestimme das charakteristische Polynom der mit $s \in K$ gestreckten Matrix sM.