Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/1/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	2	5	3	5	7	4	2	3	5	2	4	4	3	60

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.
2. Eine *bijektive* Abbildung
   $$f: M \longrightarrow N.$$
3. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
4. Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
5. *Äquivalente* (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge über einem Körper K.
6. Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix M.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das Induktionsprinzip für Aussagen.
2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus.
3. Die *Dimensionsformel* für eine lineare Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow W.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe * (2 (0.5+1+0.5) Punkte)

a) Berechne

$$(4 - 7\mathrm{i})(5 + 3\mathrm{i}).$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3 + 4\mathrm{i}$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe * (3 Punkte)

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert

$x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe * (5 Punkte)

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe * (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Aufgabe * (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$4 \sin^2 t \cdot \cos t - 5t^{11}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p,q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe * (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

1. Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
2. Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
3. Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
4. Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$