Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/12/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	1	4	3	6	4	3	2	2	4	4	7	6	2	3	3	4	64

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M.

2. Ein *Polynom* über einem Körper K in einer Variablen X.

3. Die *Sinusreihe* zu $x \in \mathbb{R}$.

4. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$.

5. Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).

6. Die *beschreibende Matrix* zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

   zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W bezüglich einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ von W.

Lösung

1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

   $$\circ\colon M \times M \longrightarrow M,\, (x,y) \longmapsto x \circ y.$$

2. Ein Ausdruck der Form

   $$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

   mit $a_i \in K \text{ und } n \in \mathbb{N}$

   heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

3. Die *Sinusreihe* ist

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4. Eine Funktion $F\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf $]a,b[$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a,b[$ gilt.

5. Unter der Dimension eines Vektorraums V versteht man die Anzahl der Elemente in einer Basis von V.

6. Unter der *beschreibenden Matrix zu* φ bezüglich der Basen versteht man die $m \times n$-Matrix

   $$M = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij} \, ,$$

   wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Division mit Rest* im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.
2. Der Satz über die lineare Approximierbarkeit.
3. Der Satz über die Charakterisierung von invertierbaren Matrizen.

Lösung

1. Es seien $P,T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q,R \in K[X]$ mit

   $$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0.$$

2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

   $$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

   eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

   $$r \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s \cdot (x - a) + r(x)(x - a)\,.$$

3. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.
   1. $\det M \neq 0$.
   2. Die Zeilen von M sind linear unabhängig.
   3. M ist invertierbar.
   4. $\operatorname{rang} M = n$.

Aufgabe (1 Punkt)

Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor \frac{487}{23} \right\rfloor.$$

Lösung

Es ist

$$487 = 23 \cdot 21 + 4\,,$$

also ist

$$\left\lfloor \frac{487}{23} \right\rfloor = 21\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das das arithmetische Mittel aus zwei vorgegebenen nichtnegativen rationalen Zahlen berechnet.

- Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.
- Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.
- Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, 0, 0, 0, \ldots)$$

mit $b, d \neq 0$. Dabei sind a/b und c/d die rationalen Zahlen, von denen das arithmetische Mittel berechnet werden soll. Das Ergebnis soll ausgedruckt werden (in der Form Zähler Nenner) und anschließend soll das Programm anhalten.

Lösung

1. Berechne Produkt aus 2. und 4. Speicherinhalt, schreibe das Ergebnis in 5. Speicher.

2. Berechne Summe aus 5. und 6. Speicherinhalt, schreibe das Ergebnis in 7. Speicher.

3. Berechne Summe aus 5. und 7. Speicherinhalt, schreibe das Ergebnis in 8. Speicher.
4. Berechne Produkt aus 1. und 4. Speicherinhalt, schreibe das Ergebnis in 9. Speicher.
5. Berechne Produkt aus 2. und 3. Speicherinhalt, schreibe das Ergebnis in 10. Speicher.
6. Berechne Summe aus 9. und 10. Speicherinhalt, schreibe das Ergebnis in 11. Speicher.
7. Drucke den 11. Speicherinhalt.
8. Drucke den 8. Speicherinhalt.
9. Halte an.

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Konzept „Approximation“ anhand typischer Beispiele.

Lösung Approximation/Erläuterung/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Lösung

Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0).$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \quad \text{und} \quad b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \quad \text{und} \quad b_1 := c_0 .$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$.

Aufgabe (4 (1+1+2) Punkte)

Wir betrachten das Polynom

$$P = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 .$$

1. Berechne die Werte von P an den Stellen $-2, -1, 0, 1, 2$.
2. Skizziere den Graphen von P oberhalb von $[-2, 2]$. Gibt es einen Bezug zur Exponentialfunktion e^x?

3. Bestimme eine Nullstelle von P innerhalb von $[-2, 2]$ mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{4}$.

Lösung

1.

x	-2	-1	0	1	2
$P(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	$\frac{19}{3}$

2. Da die Exponentialfunktion e^x die Reihendarstellung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ besizt, handelt es sich bei P um eine polynomiale Approximation der Exponentialfunktion. Dies erklärt für betragsmäßig kleine Werte eine gewisse Verwandtschaft mit der Exponentialfunktion, die sich im Graphen niederschlägt.

3. Aufgrund des Zwischenwertsatzes muss P eine Nullstelle zwischen -2 und -1 besitzen. Zur Bestimmung der Nullstelle rechnen wir mit

$$Q = 6P = 6 + 6x + 3x^2 + x^3\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned} Q(-\frac{3}{2}) &= 6 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \\ &= 6 - 9 + \frac{27}{4} - \frac{27}{8} \\ &= -3 + \frac{27}{8} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Die Nullstelle muss also zwischen -2 und $-\dfrac{3}{2}$ liegen.

Es ist

$$\begin{aligned} Q(-\frac{7}{4}) &= 6 - 6 \cdot \frac{7}{4} + 3\left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^3 \\ &= 6 - \frac{21}{2} + \frac{3 \cdot 49}{16} - \frac{343}{64} \\ &= -\frac{9}{2} + \frac{588 - 343}{64} \\ &= -\frac{288}{64} + \frac{245}{64} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also liegt eine Nullstelle im Intervall $[-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}]$ der Länge $\frac{1}{4}$.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

streng wachsend ist.

Lösung

Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} e^x \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} e^x . \end{aligned}$$

Wegen $e^x > 0$ und $(x-1)^2 \geq 0$ und $(x-1)^2 > 0$ für $x \neq 1$ ist die Ableitung nichtnegativ und hat nur für $x = 1$ eine Nullstelle. Die Funktion ist also nach Satz 15.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) streng wachsend.

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass die reelle Zahl $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^4 - 20X^2 + 16$ ist.

Lösung

Es ist

$$
\begin{aligned}
X^2 &= \left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 \\
&= \sqrt{3}^2+\sqrt{7}^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7} \\
&= 3+7+2\sqrt{21} \\
&= 10+2\sqrt{21}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
X^4 &= \left(X^2\right)^2 \\
&= \left(10+2\sqrt{21}\right)^2 \\
&= 100+4\cdot 21+40\sqrt{21} \\
&= 184+40\sqrt{21}.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
X^4-20X^2+16 &= 184+40\sqrt{21}-20\left(10+2\sqrt{21}\right)+16 \\
&= 184-200+16+(40-20\cdot 2)\sqrt{21} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass eine streng wachsende Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Lösung Funktionen/R/Streng monoton wachsend/Injektiv/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Lösung

Die Ableitung f' ist ein Polynom vom Grad $d-1$. Dieses besitzt nach Korollar 6.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) höchstens $d-1$ Nullstellen. Nach Fakt ***** besitzt daher f höchstens $d-1$ lokale Extrema. Zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Ableitung und auch unterhalb der kleinsten und oberhalb der größten Nullstelle ist die Ableitung entweder echt positiv oder echt negativ. Wenn wir stets benachbarte Intervalle zusammenlegen, auf denen die Ableitung jeweils positiv oder jeweils negativ ist, so erhalten wir eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in Intervalle, auf denen die Ableitung positiv oder negativ mit eventuell endlich vielen Ausnahmepunkten ist, und positiv und negativ wechseln sich ab. In diesen Intervallen ist dann f nach Satz 15.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) streng wachsend oder streng fallend.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion $\frac{1}{\cos x}$ im Nullpunkt mit einem Potenzreihenansatz unter Verwendung von $\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i$

Lösung

Wir möchten die Taylor-Reihe bis zum Grad 6 von $\frac{1}{\cos x}$ im Entwicklungspunkt 0 gemäß [[Taylorreihe/R/Invertierte Funktion/Bestimmung/Bemerkung|Kurs:Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)/Teil I/12/Klausur mit Lösungen (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))]] bestimmen. Nach Definition . ist

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \ldots .$$

Zur Berechnung des Taylor-Polynoms bis zum Grad 6 braucht man nur die angeführte Entwicklung des Kosinus bis zum Grad 6. Das Taylorpolynom bis zum Grad 6 von $1/\cos x$ im Nullpunkt ist somit

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^3 &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{24}x^4 \end{aligned}$$

Dabei wurden nur die für den Grad 6 relevanten Monome ausgerechnet.

Aufgabe (7 (1+1+2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 3\,.$$

1. Bestimme die Ableitung von f.
2. Bestimme die Tangente t zu f im Punkt 2.
3. Bestimme die Schnittpunkte der Tangente t mit dem Funktionsgraphen zu f.
4. Die Tangente t und der Funktionsgraph zu f schließen eine endliche Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Lösung

1. Es ist
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4\,.$$
2. Es ist
$$f(2) = 7$$
und
$$f'(2) = 12\,.$$
Die Gleichung für die Tangente an diesem Punkt ist also
$$t(x) = 12(x-2) + 7 = 12x - 17\,.$$
3. Wir setzen
$$x^3 + x^2 - 4x + 3 = 12x - 17$$

bzw.

$$x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0\,.$$

Die Nullstelle 2 ist bereits bekannt, somit ist

$$x^3 + x^2 - 16x + 20 = (x-2)(x-2)(x+5)\,.$$

Die beiden Schnittpunkte sind also $(2, 7)$ und $(-5, -77)$.

4. Im relevanten Bereich verläuft t unterhalb von f. Der eingeschlossene Flächeninhalt ist daher gleich

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{2} f(x) - t(x)dx &= \int_{-5}^{2} x^3 + x^2 - 16x + 20dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 20x\right)\Big|_{-5}^{2} \\ &= \frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{3}2^3 - 8\cdot 2^2 + 20\cdot 2 - \left(\frac{1}{4}(-5)^4 + \frac{1}{3}(-5)^3 - 8(-5)^2 + 20(-5)\right) \\ &= 4 + \frac{8}{3} - 32 + 40 - \frac{625}{4} + \frac{125}{3} + 200 + 100 \\ &= 312 + \frac{133}{3} - \frac{625}{4} \\ &= \frac{3744 + 532 - 1875}{12} \\ &= \frac{2401}{12}.\end{aligned}$$

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei I ein beschränktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das Supremum über alle Treppenintegrale zu äquidistanten unteren Treppenfunktionen existiert. Zeige, dass dann auch das Supremum zu allen Treppenintegralen zu unteren Treppenfunktionen (also das Unterintegral) existiert und mit dem zuerst genannten Supremum übereinstimmt.

Lösung

Wir zeigen, dass jedes Treppenintegral zu einer unteren Treppenfunktion bis auf jeden vorgegebenen Fehler $\epsilon > 0$ durch das Treppenintegral zu einer äquidistanten unteren Treppenfunktion angenähert werden kann, woraus die Aussagen folgen. Es seien $a < b$ die Intervallgrenzen und sei

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

eine Unterteilung des Intervalls mit einer unteren Treppenfunktion t mit den Werten t_i auf dem Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$. Es sei c der maximale Wert von t und es sei d eine untere Schranke von f und von t. Es sei m so gewählt, dass

$$\frac{n(b-a)(c-d)}{m} \leq \epsilon$$

ist. Wir betrachten die äquidistante Unterteilung von I mit m Teilintervallen I_j, $j = 1, \ldots, m$, und wir betrachten darauf die Treppenfunktion s, die folgendermaßen definiert ist.

$$s|_{I_j} = s_j = \begin{cases} d, \text{ falls } \text{ es ein } a_i \in I_j \text{ gibt}, \\ t_i, \text{ falls } I_j \subseteq]a_{i-1}, a_i[\text{ für ein } i\,. \end{cases}$$

Damit ist $s \leq t$ und s stimmt in jedem Punkt x mit t überein oder hat den Wert d, letzteres kommt aber nur auf höchstens n äquidistanten Teilintervallen vor. Daher gilt für die Differenz der beiden Treppenintegrale die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})t_i - \frac{b-a}{m}\sum_{j=1}^{m} s_j \leq n\frac{b-a}{m}(c-d) \leq \epsilon\,,$$

wie gefordert.

Aufgabe (2 Punkte)

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen $2{,}50$ € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen $2{,}30$ €. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Lösung

Es sei x der Preis für ein Schneeglöckchen und y der Preis für einen Mistelzweig. Dann gilt

$$3x + 4y = 2{,}50$$

und

$$5x + 2y = 2{,}30\,.$$

Wenn man von der ersten Zeile das Doppelte der zweiten Zeile abzieht, erhält man

$$-7x = -2{,}10$$

und damit

$$x = 0{,}30\,.$$

Daraus ergibt sich

$$y = 0{,}40$$

und somit ist der Preis für den gewünschten Strauß gleich

$$1 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}4 = 4{,}70\,.$$

Aufgabe (3 (2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K, den wir als (unendlichdimensionalen) K-Vektorraum betrachten, und es sei $c \in K$, $c \neq 0$, ein fixiertes Element.

1. Ist die Abbildung
$$K[X] \longrightarrow K[X],\ P(X) \longmapsto P(X+c),$$
(es wird also überall die Variable X durch $X+c$ ersetzt) linear?

2. Ist die Abbildung
$$K[X] \longrightarrow K[X],\ P(X) \longmapsto P(X)+c,$$
(es wird also zu jedem Polynom c hinzuaddiert) linear?

Lösung

1. Es sei Ψ die Gesamtabbildung. Dann ist wegen

$$\begin{aligned}\Psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right) &= \Psi\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)X^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)(X + c)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i (X + c)^i + \sum_{i=0}^{n} b_i (X + c)^i \\ &= \Psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) + \Psi\left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Psi\left(s\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) &= \Psi\left(\sum_{i=0}^{n} s a_i X^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} s a_i (X + c)^i \\ &= s\sum_{i=0}^{n} a_i (X + c)^i \\ &= s\Psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\end{aligned}$$

die Abbildung linear.

2. Dies ist nicht linear, da das Nullpolynom 0 auf $c \neq 0$ abgebildet wird.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zur Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{t^2-1} & \frac{1}{t^3} \\ \frac{t^2-4}{t} & \frac{t-1}{t+1} \end{pmatrix}$$

Lösung

Für eine invertierbare 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die inverse Matrix generell gleich

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Im vorliegenden Fall ist die Determinante gleich

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2-1} \cdot \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{t^3} \cdot \frac{t^2-4}{t} &= \frac{t^2-t}{(t^2-1)(t+1)} - \frac{t^2-4}{t^4} \\ &= \frac{t^6-t^5-(t^2-4)(t^2-1)(t+1)}{(t^2-1)(t+1)t^4} \\ &= \frac{t^6-2t^5-t^4-5t^3+5t^2-4t-4}{t^7+t^6-t^5-t^4}. \end{aligned}$$

Somit ist die inverse Matrix gleich

$$\frac{t^7+t^6-t^5-t^4}{t^6-2t^5-t^4-5t^3+5t^2-4t-4}\begin{pmatrix} \frac{t-1}{t+1} & -\frac{1}{t^3} \\ -\frac{t^2-4}{t} & \frac{t}{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3+2X^2-2.$$

Zeige, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{(1+\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert λ ist.

Lösung

Es ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{(1+\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+\lambda)^3} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ -\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)} \\ -\frac{1}{(1+\lambda)} + 1 \\ -\frac{1}{(1+\lambda)^3} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1+1+\lambda}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{-1+1+\lambda}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{-1+1+\lambda}{1+\lambda} \\ \frac{-1+(1+\lambda)^3}{(1+\lambda)^3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{\lambda}{1+\lambda} \\ \frac{\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda}{(1+\lambda)^3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{\lambda^2+3\lambda+3}{(1+\lambda)^3} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{\lambda^2+3\lambda+3}{\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{\lambda^2+3\lambda+3}{\lambda^2+3\lambda+3} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{1+\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zuletzt bearbeitet vor 2 Monaten von Marymay0609