Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/25/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	1	2	11	4	5	4	0	0	0	4	0	5	0	5	0	0	6	53

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *bijektive* Abbildung

$$f: M \longrightarrow N.$$

2. Ein *lokales Maximum* einer Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) in einem Punkt $x \in D$.

3. Die reelle *Exponentialfunktion* zu einer Basis $b > 0$.

4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

5. Die durch eine Matrix *festgelegte* lineare Abbildung.

6. Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einem Endomorphismus

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Die Abbildung f heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

2. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt.

3. Die *Exponentialfunktion zur Basis* b ist als

$$b^x := \exp(x \ln b)$$

definiert.

4. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

5. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch
$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$
gemäß Satz 24.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) definierte lineare Abbildung $\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$ die *durch* M *festgelegte lineare Abbildung*.

6. Man nennt
$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$
den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quotientenkriterium* für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
2. Die *Kettenregel* für differenzierbare Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Der *Charakterisierungssatz* für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit
   $$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$$
   für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

2. Seien
   $$D, E \subseteq \mathbb{R}$$
   Teilmengen und seien
   $$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
   und
   $$g \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$$
   Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung
   $$g \circ f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in a differenzierbar mit der Ableitung
   $$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) .$$

3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
   1. Die Familie ist eine Basis von V.

2. Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.
3. Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung
   $$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n.$$
4. Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.

Aufgabe (1 Punkt)

Beurteile die Snookerweisheit „Ein Snookerspiel kann man in der ersten Session nicht gewinnen, aber verlieren" vom logischen Standpunkt aus.

Lösung

Es spielen zwei Spieler gegeneinander, der eine gewinnt genau dann, wenn der andere verliert. Wenn einer also in der ersten Session verlieren kann, so kann auch einer (nämlich der andere) in der ersten Session gewinnen. Die Weisheit ist also unlogisch.

Aufgabe (2 Punkte)

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 5 und der andere ein Fassungsvermögen von 8 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Lösung

Die folgende Kette von Inhaltspaaren kann man bei den gegebenen Möglichkeiten offensichtlich erreichen.

$$(0,0),\ (5,0),\ (0,5),\ (5,5),\ (2,8),\ (2,0),\ (0,2),\ (5,2),\ (0,7),\ (5,7),\ (4,8),\ (4,0),\ (0,4),\ (5,4),\ (1,8),\ (1,0).$$

Aufgabe (11 (5+4+2) Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus $\mathbb{N}$ sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von u^k gleich $\left(u^{-1}\right)^k$ ist, verwenden.

1.
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \,.$$

2.
$$(a^m)^n = a^{mn} \,.$$

3.
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \,.$$

Lösung

Für einen negativen Exponenten $m = -k$ ist nach Definition

$$a^m = \left(a^{-1}\right)^k ,$$

wobei a^{-1} das inverse Element zu a bezeichnet.

1. Wenn beide Exponenten nichtnegativ sind, ist das Ergebnis bekannt. Wenn beide Exponenten negativ sind, so setzen wir $m = -k$ und $n = -\ell$ und es ist
$$a^m \cdot a^n = \left(a^{-1}\right)^k \left(a^{-1}\right)^\ell = \left(a^{-1}\right)^{k+\ell} = a^{-(k+\ell)} = a^{m+n} \, ,$$
wobei wir für die zweite Gleichung das Potenzgesetz für nichtnegative Exponenten verwendet haben. Für den gemischten Fall können wir wegen der Symmetrie der Situation $m \in \mathbb{N}$ und $n = -\ell$ als negativ annehmen. Dann ist
$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \left(a^{-1}\right)^\ell .$$
Bei $m \geq \ell$ schreiben wir
$$m = \ell + r$$
und das Produkt ist gleich
$$a^m \cdot \left(a^{-1}\right)^\ell = a^{\ell+r} \cdot \left(a^{-1}\right)^\ell = a^r a^\ell \cdot \left(a^{-1}\right)^\ell = a^r \left(a \cdot a^{-1}\right)^\ell = a^r \cdot 1 = a^r = a^{m-\ell} = a^{m+n} \, ,$$
wobei wir für die dritte Gleichheit das dritte Potenzgesetz für nichtnegative Exponenten verwendet haben.

Bei $m < \ell$ schreiben wir
$$\ell = m + s$$
und das Produkt ist gleich
$$a^m \cdot \left(a^{-1}\right)^\ell = a^m \cdot \left(a^{-1}\right)^{m+s} = a^m \cdot \left(a^{-1}\right)^m \cdot \left(a^{-1}\right)^s = \left(a \cdot a^{-1}\right)^m \cdot \left(a^{-1}\right)^s = 1 \cdot \left(a^{-1}\right)^s = a^{-s} = a^{m-\ell} = a$$

2. Wenn beide Exponenten nichtnegativ sind, so ist die Aussage bekannt. Seien beide Exponenten negativ, wobei wir die gleichen Buchstaben wie unter (1) verwenden. Dann ist

$$(a^m)^n = \left((a^m)^{-1}\right)^\ell = \left(\left(\left(a^{-1}\right)^k\right)^{-1}\right)^\ell = \left(\left(\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)^k\right)^\ell = \left(a^k\right)^\ell = a^{k\ell} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn},$$

wobei wir verwendet haben, dass das Inverse von u^k gleich $\left(u^{-1}\right)^k$ ist und dass das Inverse des Inversen das Ausgangselement ist.

Wenn m nichtnegativ und $n = -\ell$ negativ ist, so ist

$$(a^m)^n = \left((a^m)^{-1}\right)^\ell = \left(\left(a^{-1}\right)^m\right)^\ell = \left(a^{-1}\right)^{m\ell} = a^{-m\ell} = a^{mn}.$$

Wenn $m = -k$ negativ und n nichtnegativ ist, so ist

$$(a^m)^n = \left(\left(a^{-1}\right)^k\right)^n = \left(a^{-1}\right)^{kn} = a^{-kn} = a^{mn}.$$

3. Wir müssen nur den Fall $n = -\ell$ negativ behandeln. Dann ist
$$(ab)^n = (ab)^{-\ell} = \left((ab)^{-1}\right)^\ell = \left(a^{-1}b^{-1}\right)^\ell = \left(a^{-1}\right)^\ell \cdot \left(b^{-1}\right)^\ell = a^{-\ell}b^{-\ell} = a^n b^n.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Lösung

Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0 \, .$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R \, ,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R \, .$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist.

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto b^x \, ,$$

stetig ist.

Lösung

Sei $b > 1$. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit im Nullpunkt. Da nach Aufgabe ***** die Folge $\sqrt[n]{b}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen 1 konvergiert, und da die Exponentialfunktion wachsend ist, gibt es zu jedem positiven ϵ ein positives δ mit der Eigenschaft, dass aus

$$|x| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$|1 - b^x| \leq \epsilon$$

folgt. Sei nun x beliebig und ϵ vorgegeben. Wir betrachten ein δ, das zu

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{b^x}$$

die Stetigkeit im Nullpunkt sichert. Dann gilt unter Verwendung von Satz 12.16 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (1) für x' mit

$$|x' - x| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$|b^x - b^{x'}| = |b^x \left(1 - b^{x'-x}\right)| = |b^x| \cdot |1 - b^{x'-x}| \leq b^x \cdot \frac{\epsilon}{b^x} = \epsilon \, .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1, 1)$ und $(4, -2)$ verläuft.

Lösung

Der Richtungsvektor der Geraden ist $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Somit besitzt die Geradengleichung die Form

$$3x + 5y = c\,.$$

Einsetzen eines Punkt ergibt $c = 2$. Somit ist

$$y = \frac{2 - 3x}{5}\,.$$

Dies setzen wir in die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

ein und erhalten

$$x^2 + \left(\frac{2 - 3x}{5}\right)^2 = 1$$

oder

$$x^2 + \frac{4 - 12x + 9x^2}{25} - 1 = \frac{34}{25}x^2 - \frac{12}{25}x - \frac{21}{25} = 0\,.$$

Die Normierung davon ist

$$x^2 - \frac{6}{17}x - \frac{21}{34}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{\frac{6}{17} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{17}\right)^2 + 4 \cdot \frac{21}{34}}}{2} \\
&= \frac{\frac{6}{17} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{17}\right)^2 + \frac{42}{17}}}{2} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 714}}{34} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{750}}{34} \\
&= \frac{6 \pm 5\sqrt{30}}{34}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y_{1,2} &= \frac{2 - 3x_{1,2}}{5} \\
&= \frac{2 - 3\left(\frac{6 \pm 5\sqrt{30}}{34}\right)}{5} \\
&= \frac{68 - 3\left(6 \pm 5\sqrt{30}\right)}{170} \\
&= \frac{50 \mp 15\sqrt{30}}{170} \\
&= \frac{10 \mp 3\sqrt{30}}{34}.
\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind also

$$\left(\frac{6+5\sqrt{30}}{34}, \frac{10-3\sqrt{30}}{34}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{6-5\sqrt{30}}{34}, \frac{10+3\sqrt{30}}{34}\right).$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1,1]$$

induziert.

Lösung Sinus und Kosinus/Monotonieeigenschaften/Fakt/Beweis/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m,M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Lösung

Der Produktraum besitzt die Dimension $n+m$. Um dies zu beweisen sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W. Wir behaupten, dass die Elemente

$$(v_j, 0),\ j \in \{1, \ldots, n\},\ \text{und}\ (0, w_i),\ i \in \{1, \ldots, m\},$$

eine Basis von $V \times W$ bilden.

Sei $(v, w) \in V \times W$. Dann gibt es Darstellungen

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \text{ und } w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i .$$

Daher ist

$$\begin{aligned}(v, w) &= (\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, 0) + (0, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, 0) + \sum_{i=1}^{m} b_i (0, w_i),\end{aligned}$$

d.h., es liegt ein Erzeugendensystem vor.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit sei

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(v_j,0) + \sum_{i=1}^{m} b_i(0,w_i) = 0 = (0,0)$$

angenommen. Die gleiche Rechnung rückwärts ergibt

$$(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) = (0,0)$$

und das bedeutet

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} b_i w_i = 0.$$

Da es sich jeweils um Basen handelt, folgt $a_j = 0$ für alle j und $b_i = 0$ für alle i.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 (2+3+1) Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 & -2-\mathrm{i} \\ 0 & x-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & x+1-2\mathrm{i}\end{pmatrix} \\ &= (x-1)(x-\mathrm{i})(x+1-2\mathrm{i}) \\ &= x^3-(0+3\mathrm{i})x^2+(-3+2\mathrm{i})x+2+1\mathrm{i}\end{aligned}$$

und die Eigenwerte von A sind $1, \mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}$.

b) Wir bestimmen für jeden Eigenwert einen Eigenvektor.

$x = 1$:

Wir müssen ein nichttriviales Element im Kern von

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2-\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2-2\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

bestimmen. Da gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$ dazu.

$x = \mathrm{i}$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & -2 & -2-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}.$$

Wir wählen $c = 0$ und $a = 2$ und erhalten $b = -1 + \mathrm{i}$, also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert i.

$x = -1 + 2\mathrm{i}$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -2 + 2\mathrm{i} & -2 & -2 - \mathrm{i} \\ 0 & -1 + \mathrm{i} & -1 - i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $c = -1 + \mathrm{i}$ und $b = 1 + \mathrm{i}$ ist die mittlere Zeile erfüllt. Die erste Zeile wird dann zu

$$(-3 + 2\mathrm{i})a - 1 - \mathrm{i} + (2 - \mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}) = 0$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} -2 + \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \\ -1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $-1 + 2\mathrm{i}$.

c) Bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren besitzt die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$