Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/24/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	5	3	3	4	3	0	6	5	0	2	4	0	3	3	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.
2. Eine *Folge* reeller Zahlen.

3. Das *Minimum* der Funktion

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.

4. Der *Sinus hyperbolicus*.

5. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Ein *Eigenwert* zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *allgemeine binomische Formel* für $(a+b)^n$.
2. Die Beziehung zwischen differenzierbar und stetig.
3. Der Satz über *partielle Integration*.

Aufgabe * (3 Punkte)

In einem Hörsaal befindet sich ein Tafelgestell mit drei hintereinander liegenden, vertikal verschiebbaren Tafeln. Diese seien mit V (vordere Tafel), M (mittlere Tafel) und H (hintere Tafel) bezeichnet. Aufgrund der Höhe des Gestells sind nur (maximal) zwei Tafeln gleichzeitig einsehbar. Die Lehrperson schreibt in der Vorlesung jede Tafel genau einmal voll. In welcher Reihenfolge (alle Möglichkeiten!) muss sie die Tafeln einsetzen, wenn beim Beschreiben einer Tafel stets die zuletzt beschriebene Tafel sichtbar sein soll.

Aufgabe * (2 Punkte)

Die Biologin Hertha McGillen ist eine renommierte Forscherin über fliegende Fische. Zur Beobachtung hat ihr Team eine Drohne entwickelt, die sowohl oberhalb als auch unterhalb des Meeresspiegels fliegen kann. Bei einem Einsatz startet die Drohne vom Ausgangspunkt auf dem Schiff, der vier Meter oberhalb des Meeresspiegels liegt. Sie steigt zunächst drei Meter in die Höhe, fliegt dann elf Meter nach unten, dann einen Meter nach oben, dann zwei Meter nach unten, dann sechs Meter nach oben, dann fünf Meter nach unten, dann drei Meter nach oben, dann vier Meter nach unten, dann reißt der Funkkontakt ab.

Wie hoch bzw. tief ist die Drohne insgesamt von ihrem Ausgangspunkt aus geflogen und auf welcher Höhe unter- oder oberhalb des Meeresspiegels brach der Kontakt ab? Wie oft ist die Drohne ein- und wie oft aufgetaucht?

Aufgabe * (5 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei z eine rationale Zahl. Zeige, dass z genau dann ganzzahlig ist, wenn

$$\lfloor -z \rfloor = - \lfloor z \rfloor$$

gilt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Bernoulli-Ungleichung für einen angeordneten Körper.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & 1+3\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 1 & 2+3\mathrm{i} \\ -1 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, welche der folgenden elementargeormetrischen Abbildungen linear, welche diagonalisierbar und welche trigonalisierbar sind.

1. Die Achsenspiegelung durch die durch $4x - 7y = 0$ gegebene Achse.
2. Die Verschiebung um den Vektor $(5, -3)$.
3. Die Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.
4. Die Punktspiegelung mit dem Punkt $(1, 0)$ als Zentrum.