Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/31/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	4	2	1	3	3	3	3	4	6	0	0	0	0	4	4	3	6	52

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

2. Der *Betrag* einer reellen Zahl.

3. Die *eulersche Zahl* e.

4. Die *Taylor-Reihe* im Punkt a zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.

5. Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.

6. Ein *Eigenvektor* zu einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und n sind.

2. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0\,, \\ -x, \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

3. Die eulersche Zahl ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

definiert.

4. Die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

5. Die Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.
    1. $0 \in U$.
    2. Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
    3. Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.
6. Ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, heißt ein *Eigenvektor* von φ, wenn
   $$\varphi(v) = \lambda v$$
   mit einem gewissen $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das Induktionsprinzip für Aussagen.
2. Der *Zwischenwertsatz*.
3. Der Satz über die Ableitung einer reellen Potenzreihe.

Lösung

1. Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte
    1. $A(0)$ ist wahr.
    2. Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

   Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

2. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $y \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

3. Es sei

   $$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   eine Potenzreihe, die auf dem offenen Intervall $]-r, r[$ konvergiere und dort die Funktion $f\colon]-r, r[\to \mathbb{R}$ darstellt. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

   $$\tilde{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

   auf $]-r, r[$ konvergent. Die Funktion f ist in jedem Punkt dieses Intervalls differenzierbar mit

   $$f'(x) = \tilde{g}(x)\,.$$

Aufgabe (4 (2+1+1) Punkte)

Lucy Sonnenschein und Heidi Gonzales haben jeweils eine zylinderförmige Laugenstange der Länge 20 cm und mit einem Durchmesser von 3 cm. Beide wollen daraus eine Butterlaugenstange machen. Lucy schneidet ihre Stange der Länge nach in der Mitte auf und bestreicht sie einseitig mit Butter der Dicke $0,5$ mm. Heidi zerlegt ihre Stange gleichmäßig in Stücke der Höhe $2,5$ cm, und bestreicht auf jedem Stück einseitig die runden Querschnitte mit Butter der Dicke $0,5$ mm.

1. Wer verwendet mehr Butter?

2. Wie viel Butter verwendet Lucy?

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

3. Wie viele Laugenstangen kann Lucy mit ihrer Methode bestreichen, wenn sie eine 250 Gramm Butterpackung zur Verfügung hat und wenn ein Kubikzentimeter Butter ein Gramm wiegt?

Lösung

1. Da beide mit der gleichen Dicke streichen, ist der Butterverbrauch proportional zur bestrichenen Fläche. Bei Lucy ist die bestrichene Fläche (in Quadratzentimetern) gleich
   $$20 \cdot 3 = 60\,.$$
   Wegen $20 : 2{,}5 = 8$ hat Heidi 8 Stücke zu bestreichen, ihre bestrichene Fläche ist gleich
   $$8 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 = 8 \cdot 2{,}25 \cdot \pi = 18 \cdot \pi \leq 18 \cdot 3{,}2 = 57{,}6\,.$$
   Lucy verwendet also mehr Butter.

2. Lucy verwendet
   $$60 \cdot 0{,}05 = 3$$
   Kubikzentimeter Butter für ihre Laugenstange.

3. Es ist
   $$250 : 3 = 83{,}33..\,,$$
   Lucy kann also 83 Laugenstangen mit ihrer Methode bestreichen.

Aufgabe (2 Punkte)

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe“. Analysiere diese Argumentation.

Lösung Pferde/Farbe/Induktion/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (1 Punkt)

Drücke

$$\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Lösung

Es ist

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$
\begin{aligned}
\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{7} &= 5^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(5^3\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(7^2\right)^{\frac{1}{6}} \\
&= 125^{\frac{1}{6}} \cdot 49^{\frac{1}{6}} \\
&= 6125^{\frac{1}{6}} \\
&= \sqrt[6]{6125}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K die invertierbaren Elemente, also Polynome P, für die es ein weiteres Polynom Q mit $PQ = 1$ gibt.

Lösung

Es sind genau die konstanten Polynome a, $a \neq 0$ invertierbar. Wegen $a \in K$ besitzen diese ein Inverses. Das Nullpolynom ist sicher nicht invertierbar. Sei nun

$$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

ein nichtkonstantes Polynom, also $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Dann besitzt für jedes Polynom $Q \neq 0$ das Polynom

$$PQ$$

einen Grad ≥ 1, ist also nicht 1 (und $P \cdot 0 = 0 \neq 1$).

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es gelte

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Folgt daraus, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?

Lösung

Das muss keine Cauchy-Folge sein. Betrachten wir die harmonische Reihe, also die Folge, die durch

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$$

gegeben ist. Es ist dann

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}$$

und diese Folge erfüllt die Bedingung. Die harmonische Reihe ist aber nach Beispiel 9.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) nicht konvergent und daher auch keine Cauchy-Folge.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der Exponentialreihe.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Lösung

Für $x = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1}\,.$$

Dies ist für $n \geq 2|x|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2\,.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x+2| \leq \frac{1}{1000}\,,$$

dann ist

$$|f(x) - f(-2)| \leq \frac{1}{20}\,.$$

Lösung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Unter der Bedingung

$$|x+2| \leq \frac{1}{1000}$$

ist

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(-2)| &= |x^3-5x^2-x+2-\big((-2)^3-5\cdot(-2)^2-(-2)+2\big)| \\
&= |x^3-5x^2-x+2-(-2)^3+5\cdot(-2)^2-2-2| \\
&= |x^3-(-2)^3-5\big(x^2-(-2)^2\big)-x-2| \\
&\leq |x^3-(-2)^3|+5|x^2-(-2)^2|+|x+2| \\
&= |x+2|\cdot|x^2-2x+(-2)^2|+5|x+2|\cdot|x-2|+|x+2| \\
&\leq \frac{1}{1000}\cdot|x^2-2x+(-2)^2|+\frac{5}{1000}\cdot|x-2|+\frac{1}{1000} \\
&\leq \frac{1}{1000}\cdot|9+6+4|+\frac{5}{1000}\cdot 5+\frac{1}{1000} \\
&= \frac{45}{1000} \\
&\leq \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die *Produktregel* für differenzierbare Funktionen mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit.

Lösung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Wir gehen von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus, wobei die Bedingungen aus der linearen Approximierbarkeit erfüllt sein sollen, und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad + (f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) + s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 10.10 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$.

Aufgabe (6 (1+1+2+2) Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ und $g(y) = \frac{y^2}{y-1}$.

a) Bestimme die Ableitung von f und von g.

b) Berechne die Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$.

c) Bestimme die Ableitung von h direkt.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

d) Bestimme die Ableitung von h mittels der Kettenregel.

Lösung

a) Nach der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{2xx - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

und

$$g'(y) = \frac{2y(y-1) - y^2}{(y-1)^2} = \frac{y^2 - 2y}{y^2 - 2y + 1} \; .$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2}{\frac{x^2-1}{x} - 1} \\ &= \frac{\left(x^2 - 1\right)^2}{x(x^2 - 1) - x^2} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x}. \end{aligned}$$

c) Die Ableitung von

$$h(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x}$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

ist

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{\left(4x^3-4x\right)\left(x^3-x^2-x\right)-\left(x^4-2x^2+1\right)\left(3x^2-2x-1\right)}{\left(x^3-x^2-x\right)^2} \\
&= \frac{4x^6-4x^5-4x^4-4x^4+4x^3+4x^2-\left(3x^6-2x^5-x^4-6x^4+4x^3+2x^2+3x^2-2x-1\right)}{x^2\left(x^2-x-1\right)^2} \\
&= \frac{x^6-2x^5-x^4-x^2+2x+1}{x^2\left(x^4+x^2+1-2x^3-2x^2+2x\right)} \\
&= \frac{x^6-2x^5-x^4-x^2+2x+1}{x^6-2x^5-x^4+2x^3+x^2}.
\end{aligned}$$

d) Es ist

$$\begin{aligned}
g'(f(x))f'(x) &= \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2-2\frac{x^2-1}{x}}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2-2\frac{x^2-1}{x}+1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2} \\
&= \frac{\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)x}{\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)x+x^2}\cdot\frac{x^2+1}{x^2} \\
&= \frac{x^4-2x^2+1-2x^3+2x}{x^4-2x^2+1-2x^3+2x+x^2}\cdot\frac{x^2+1}{x^2} \\
&= \frac{x^4-2x^3-2x^2+2x+1}{x^4-2x^3-x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2} \\
&= \frac{x^6-2x^5-x^4-x^2+2x+1}{x^6-2x^5-x^4+2x^3+x^2}.
\end{aligned}$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 3x & -4y & +2z & +5w & = & 12 \\ x & +5y & -7z & +w & = & 1 \\ & +y & +z & +2w & = & 3 \\ & +3y & +2z & +w & = & 2\,. \end{array}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable x, indem wir die zweite Gleichung dreimal von der ersten Gleichung abziehen. Dies führt auf

$$\begin{array}{ccccc} -24y & +23z & +2w & = & 9 \\ +y & +z & +2w & = & 3 \\ +3y & +2z & +w & = & 2\,. \end{array}$$

Nun eliminieren wir die Variable w, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $-2III+I$ und $-2III+I$ ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{array}{cccc} -30y & 19z & = & 5 \\ -5y & -3z & = & -1\,. \end{array}$$

Mit $I-6II$ ergibt sich

$$37y = 11$$

und

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$y = \frac{11}{37} \, .$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$y = \frac{4}{185} \, ,$$
$$w = \frac{248}{185}$$

und

$$x = \frac{886}{555} \, .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K der Körper mit zwei Elementen. Bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes des K^4.

Lösung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Da in allen Vektoren zwei Einträge gleich 1 sind, gehören wegen $1+1=0$ sämtliche Vektoren zum Kern der durch

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

gegebenen Linearform. Die Dimension ist also maximal gleich 3. Wir betrachten den dritten, zweiten und den ersten Vektor der Familie, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Matrix. Die ersten drei Zeilen davon bilden eine obere Dreiecksmatrix mit Determinante 1. Also ist der Rang dieser Untermatrix gleich 3 und somit ist die Dimension des erzeugten Raumes gleich 4.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{80} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{16} & -\frac{1}{26} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{80} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

für beliebiges $k \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ klar ist. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

wobei wir die Einträge mit a_{ij} bezeichnen, und

$$M' = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei wir die Einträge mit a'_{ij} bezeichnen. Für $i \neq k$ ist $a'_{ij} = a_{ij}$ und nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\det M'_i = s \det M_i \,.$$

Für $i = k$ ist $a'_{kj} = sa_{kj}$ und

$$M'_k = M_k \,.$$

Insgesamt ist somit

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$
\begin{aligned}
\det M' &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det M'_i \\
&= \sum_{i=1,\, i \neq k}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det M'_i + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M'_k \\
&= \sum_{i=1,\, i \neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}\, s \det M_i + (-1)^{k+1} s a_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} s a_{i1} \det M_i \\
&= s \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i \\
&= s \det M .
\end{aligned}
$$

Zuletzt bearbeitet vor 2 Monaten von Marymay0609

Wikiversity

Der Inhalt ist verfügbar unter CC BY-SA 3.0, sofern nicht anders angegeben.

Datenschutz • Klassische Ansicht