Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/44/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	1	6	3	5	3	4	8	3	3	3	0	4	4	0	4	2	0	59

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *Körper*.

2. Eine *wachsende* reelle Folge.

3. Der *Grenzwert* zu einer auf $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion

   $$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

4. Die *reelle Exponentialfunktion*.

5. Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion

   $$t: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$.

6. Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

   $$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

   und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

   1. Axiome der Addition
      1. Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
      2. Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
      3. 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
      4. Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

2. Axiome der Multiplikation
    1. Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
    2. Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
    3. 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
    4. Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
3. Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

2. Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

3. Die reelle Zahl b heißt *Grenzwert* von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.

4. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

heißt (reelle) *Exponentialfunktion*.

5. Das Treppenintegral von t ist durch

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_{i-1})$$

definiert.

6. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.
2. Die *Kreisgleichung* für die trigonometrischen Funktionen.
3. Der *Charakterisierungssatz* für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$.
2. Die trigonometrischen Funktionen

   $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos x,$$

   und

   $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x,$$

   erfüllen für $x \in \mathbb{R}$ die Kreisgleichung

   $$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1\,.$$

3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
    1. Die Familie ist eine Basis von V.
    2. Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.
    3. Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung
       $u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n.$
    4. Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.

Aufgabe (1 Punkt)

Das Brötchen von vorvorgestern ist überüberübermorgen von ....?

Lösung

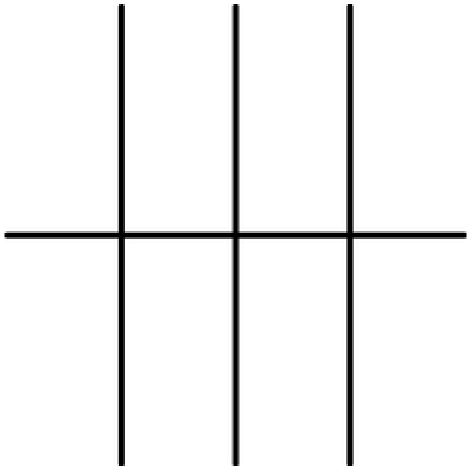
Vorvorvorvorvorvorgestern.

Aufgabe (6 (1+1+4) Punkte)

1. Skizziere vier Geraden im Raum mit der Eigenschaft, dass es insgesamt zwei Schnittpunkte gibt.

2. Skizziere vier Geraden in der Ebene mit der Eigenschaft, dass es insgesamt drei Schnittpunkte gibt.
3. Zeige, dass es in der Ebene nicht vier Geraden geben kann, die insgesamt zwei Schnittpunkte besitzen.

Lösung

1.
2. 
3. Es sei angenommen, dass es eine solche Geradenkonfiguration gibt. Wir behandeln die beiden Fälle, dass die beiden Schnittpunkte auf einer der Geraden G liegen oder nicht. Im ersten Fall müssen die Geraden, die mit G die Schnittpunkte definieren, zueinander parallel sein. Die vierte Gerade kann weder zu G noch zu den beiden anderen Geraden parallel sein, sonst würde es neue Schnittpunkte geben. Damit schneidet die vierte Gerade die ersten drei Geraden, und dabei kann zwar ein Schnittpunkt mit den beiden Schnittpunkten zusammenfallen, aber nicht mit beiden. Im zweiten Fall gibt es zwei Geradenpaare, die jeweils die beiden Schnittpunkte definieren. Doch dann trifft jede Gerade zumindest eine Gerade des anderen Geradenpaares in einem neuen Schnittpunkt, da sie nicht zu beiden parallel sein kann und nicht durch deren Schnittpunkt verläuft (sonst wären wir im ersten Fall).

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung

Angenommen, die Menge aller Primzahlen sei endlich, sagen wir $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Man betrachtet die Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_r \ + 1 \, .$$

Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da bei Division von N durch p_i immer ein Rest 1 verbleibt. Damit sind die Primfaktoren von N, die es nach Satz 2.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) geben muss, nicht in der Ausgangsmenge enthalten - Widerspruch.

Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die naürliche Additionstabelle bis zu einer bestimmten Zahl n, also

$$\begin{array}{lllllll} + & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1+1 & 1+2 & 1+3 & \ldots & 1+n-1 & 1+n \\ 2 & 2+1 & 2+2 & 2+3 & \ldots & 2+n-1 & 2+n \\ 3 & 3+1 & 3+2 & 3+3 & \ldots & 3+n-1 & 3+n \\ \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+1 & n-1+2 & n-1+3 & \ldots & n-1+n-1 & n-1+n \\ n & n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & n+n-1 & n+n \end{array}$$

Zeige durch Induktion, dass die Gesamtsumme aller in der Tabelle auftretenden Summen gleich $(n+1)n^2$ ist, also

$$\sum_{1\le i\le n,\, 1\le j\le n} (i+j) = (n+1)n^2\,.$$

Lösung

Für $n = 1$ gibt es nur den einen Summanden $1 + 1$, so dass der Induktionsanfang gesichert ist. Sei die Aussage für ein n bewiesen. Wir unterteilen die zu berechnende Summe je nachdem, ob die beteiligten Summanden kleiner oder gleich $n + 1$ sind. Dann ist unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung und der Formel für die Summe der ersten n Zahlen

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n+1,\, 1\le j\le n+1} (i+j) &= \sum_{1\le i\le n,\, 1\le j\le n} (i+j) + \sum_{1\le j\le n} (n+1+j) + \sum_{1\le i\le n} (i+n+1) + (n+1) + (n+1)\\ &= (n+1)n^2 + 2\sum_{1\le j\le n} (n+1+j) + 2(n+1)\\ &= (n+1)n^2 + 2n(n+1) + 2\sum_{1\le j\le n} j + 2(n+1)\\ &= (n+1)n^2 + 2n(n+1) + n(n+1) + 2(n+1)\\ &= (n+1)(n^2+2n+n+2)\\ &= (n+1)(n+2)(n+1)\\ &= (n+2)(n+1)^2.\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

In Beweisen findet man häufig die Formulierung „Wir nehmen (jetzt, also) an“. Welche Bedeutungen im Beweis kann diese Formulierung haben?

Lösung Annahme/Funktion im Beweis/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P.

Aufgabe (8 (3+2+3) Punkte)

1. Bestimme ein Polynom P vom Grad ≤ 3 mit

$$P(-1) = -4\,,$$
$$P(0) = 2\,,$$
$$P(1) = 2$$

und

$$P(2) = 3$$

2. Bestimme ein normiertes Polynom Q vom Grad 3 mit

$$Q(0) = 1\,,$$
$$Q(2) = 3$$

und

$$Q(3) = 10\,.$$

3. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen zu P und zu Q.

Lösung

1. Wir machen den Ansatz

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d\,.$$

Die Bedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$-a + b - c + d = -4\,,$$
$$d = 2\,,$$
$$a + b + c + d = 2\,,$$
$$8a + 4b + 2c + d = 3\,.$$

Elimination von d führt auf

$$-a + b - c = -6\,,$$
$$a + b + c = 0\,,$$

$$8a + 4b + 2c = 1\,.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen führt auf

$$2b = -6\,,$$

also

$$b = -3\,.$$

Dies führt auf

$$a + c = 3$$

und

$$8a + 2c = 13\,.$$

Somit ist

$$6a = 7\,,$$

also

$$a = \frac{7}{6}$$

und

$$c = \frac{11}{6}\,.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$P = \frac{7}{6}X^3 - 3X^2 + \frac{11}{6}X + 2\,.$$

2. Wir machen den Ansatz

$$Q = X^3 + rX^2 + sX + t\,.$$

Die Bedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t &= 1\,, \\ 8 + 4r + 2s + t &= 3\,, \\ 27 + 9r + 3s + t &= 10\,. \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} 4r + 2s &= -6\,, \\ 9r + 3s &= -18\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung $3I - 2II$ ist

$$-6r = 18\,,$$

also

$$r = -3$$

und

$$s = 3\,.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$Q = X^3 - 3X^2 + 3X + 1\,.$$

3. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zu P und zu Q sind die Nullstellen von

$$P-Q=\frac{7}{6}X^3-3X^2+\frac{11}{6}X+2-\left(X^3-3X^2+3X+1\right)=\frac{1}{6}X^3-\frac{7}{6}X+1\,.$$

Wir arbeiten mit X^3-7X+6. Wegen

$$P(2)=3=Q(2)$$

ist 2 eine Nullstelle dieses Polynoms. Die Division mit Rest führt auf

$$X^3-7X+6=(X-2)(X^2+2X-3)\,.$$

Es geht also noch um die Nullstellen von

$$X^2+2X-3.$$

Diese sind 1 und -3. Die Schnittpunkte der beiden Graphen sind demnach

$$(-3,-62),\ (1,2),\ (2,3).$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme das Konvergenzverhalten der durch

$$x_n=(-1)^n\frac{7n^2-8n+6}{4n^2+3n-1}$$

gegebenen Folge.

Lösung

Wir schreiben die Folge (es sei $n \geq 1$) als

$$x_n = (-1)^n \frac{7n^2 - 8n + 6}{4n^2 + 3n - 1} = (-1)^n \frac{7 - \frac{8}{n} + \frac{6}{n^2}}{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} .$$

Das Zählerpolynom konvergiert gegen 7 und das Nennerpolynom konvergiert gegen 4. Damit konvergiert die Teilfolge x_n für gerades n gegen $\frac{7}{4}$ und die Teilfolge x_n für ungerades n gegen $-\frac{7}{4}$. Somit sind sowohl $\frac{7}{4}$ als auch $-\frac{7}{4}$ Häufungspunkte der Folge und daher liegt keine Konvergenz vor.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der Exponentialreihe.

Lösung

Für $x = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1} .$$

Dies ist für $n \geq 2|x|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz.

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne

$$5^{\frac{2}{3}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Lösung

Es ist

$$x \leq 5^{\frac{2}{3}}$$

genau dann, wenn

$$x^3 \leq 5^2 = 25$$

ist. Es ist

$$(2,9)^3 = 24,389 < 25$$

und

$$3^3 = 27 > 25\,,$$

also ist

$$2,9 < 5^{\frac{2}{3}} < 3\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Lösung Sinus und Kosinus/Monotonieeigenschaften/Fakt/Beweis/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige gerade Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im Nullpunkt kein lokales Extremum besitzt.

Lösung

Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0, \\ 0 \text{ sonst }. \end{cases}.$$

Diese Funktion ist stetig, was für $x \neq 0$ klar ist und für $x = 0$ daraus folgt, dass der Kosinus beschränkt ist und daher der Limes von $x^2 \cos \frac{1}{x}$ für $x \to 0$ gleich 0 ist. Da der Kosinus eine gerade Funktion ist, gilt

$$f(-x) = (-x)^2 \cos \frac{1}{-x} = x^2 \cos\left(-\frac{1}{x}\right) = x^2 \cos \frac{1}{x} = f(x)\,,$$

also ist f gerade. Im Nullpunkt liegt kein lokales Extremum vor, da an den Stellen

$$x = \frac{1}{2n\pi}$$

mit $n \in \mathbb{N}_+$ die Funktion positive und an den Stellen

$$y = \frac{1}{(1+2n)\pi}$$

mit $n \in \mathbb{N}_+$ die Funktion negative Werte besitzt, und diese Stellen beliebig nahe an der 0 liegen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

1. Die Abonnenten von A bleiben zu 90% bei A, 0% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
2. Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 15% wechseln zu C und 15% werden Nichtleser.
3. Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
4. Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Lösung

a) Die Matrix, die die Kundenbewegungen (in der Reihenfolge A, B, C und Nichtleser) beschreibt, ist

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kundenverteilung nach einem Jahr zur Ausgangsverteilung $(20000, 20000, 20000, 40000)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20000 \\ 20000 \\ 20000 \\ 40000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24000 \\ 18000 \\ 22000 \\ 36000 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ausgangsverteilung ist $(0, 0, 0, 100000)$, daher ist die Verteilung nach einem Jahr gleich $(10000, 10000, 10000, 70000)$.

Nach zwei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \\ 70000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17000 \\ 14000 \\ 16000 \\ 53000 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17000 \\ 14000 \\ 16000 \\ 53000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22000 \\ 15300 \\ 19450 \\ 43250 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & \frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{5}{4} & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{12}{7} & -\frac{4}{7}\\ -\frac{5}{4} & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}\frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{5}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ist also $\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{5}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung