Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/39/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	5	1	4	2	4	0	4	3	0	4	0	4	5	1	4	52

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung
   $$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Eine *Folge* reeller Zahlen.

3. Das *Cauchy-Produkt* zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen.

4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

5. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Ein *Eigenwert* zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow V$$

   auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Produktregel* für reelle Folgen.
2. Der *zweite Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.
3. Der Satz über Zeilenrang und Spaltenrang.

Aufgabe * (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	r	$?$
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Prinzip *Beweis durch Fallunterscheidung*.

Aufgabe * (5 (3+2) Punkte)

Es seien $M_1, \ldots, M_k$ und $N_1, \ldots, N_k$ nichtleere Mengen und

$$\varphi_i \colon M_i \longrightarrow N_i$$

Abbildungen für $i = 1, \ldots, k$. Es sei $M = M_1 \times \cdots \times M_k$, $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, und φ die Produktabbildung, also

$$\varphi \colon M \longrightarrow N,\ (x_1, \ldots, x_k) \longmapsto (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_k(x_k)).$$

a) Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn alle φ_i surjektiv sind.

b) Zeige, dass a) nicht gelten muss, wenn die beteiligten Mengen leer sein dürfen.

Aufgabe * (1 Punkt)

Finde eine natürliche Zahl n derart, dass

$$\left(\frac{8}{7}\right)^n \geq 1000$$

ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die ganzzahligen Lösungen $x \neq 0$ der Ungleichung

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{-7}{4}} > -1\,.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{7}\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right).$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz, dass der Limes einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Die beiden lokalen Extrema der Funktion

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

definieren ein achsenparalleles Rechteck, das vom Funktionsgraphen in zwei Bereiche zerlegt wird. Bestimme deren Flächeninhalte.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))).

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, die Gleichheit

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

gilt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Eliminationslemma für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in n Variablen über einem Körper K.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig in K^m sind.

Aufgabe * (1 Punkt)

Es seien A und B quadratische Matrizen über einem Körper K. Zeige

$$\det(A \circ B) = \det(B \circ A) .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Beziehung zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit.