Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/20/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	1	2	2	0	1	2	4	4	6	0	7	0	4	1	3	6	4	53

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.
2. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M.
3. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
4. Die *Stetigkeit* einer Funktion
   $$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
5. Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion
   $$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
6. Das *charakteristische Polynom* zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über das Verhalten der Reihenglieder bei Konvergenz.
2. Das Ableitungskriterium für konstante Funktionen.

3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Aufgabe * (2 Punkte)

Erläutere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in $\mathbb{N}$ auch Lösungen $a \neq b$ besitzt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$2x \geq 7$$

und

$$5x \leq 12$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es seien L, M, N Mengen und $F\colon L \rightarrow M$ und $G\colon M \rightarrow N$ injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $G \circ F$ ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe * (4 (1+1+1+1) Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit dem Startwert $y_0 = 1$.

1. Berechne x_1 und x_2.
2. Berechne y_1 und y_2.
3. Berechne $x_0 \cdot y_0$, $x_1 \cdot y_1$ und $x_2 \cdot y_2$.
4. Konvergiert die Produktfolge $z_n = x_n \cdot y_n$ innerhalb der rationalen Zahlen?

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 3\sqrt{n}\,.$$

Aufgabe * (6 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{R}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z-w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 (1+3) Punkte)

1. Überführe die Matrixgleichung
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
in ein lineares Gleichungssystem.

2. Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Aufgabe * (1 Punkt)

Beweise den Satz über die Dimension des Standardraumes.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn es einen Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt, für den die Familie eine Basis bildet.

Aufgabe * (6 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix. Zeige durch zwei Matrizenmultiplikationen, dass

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, v \longmapsto Mv.$$