Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/45/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	4	4	3	4	7	2	0	2	0	4	2	3	1	3	4	3	55

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Eine reelle *Intervallschachtelung*.
3. Eine *Treppenfunktion*
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Der von einer Familie von Vektoren $v_i,\ i \in I$, aus einem K-Vektorraum V *aufgespannte Untervektorraum*.
6. Die *algebraische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow V$$
   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Lösung

1. Der Binomialkoeffizient ist durch
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
   definiert.
2. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$

in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

3. Eine Funktion

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

4. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf I, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

5. Man nennt

$$\langle v_i,\ i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \mid s_i \in K,\ J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

den von der Familie *aufgespannten Untervektorraum*.

6. Den Exponenten des linearen Polynoms $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ nennt man die *algebraische Vielfachheit* von λ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die geometrische Reihe.
2. Die *Taylor-Formel* für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für einen inneren Punkt $a \in I$.
3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

1. Für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ absolut und es gilt
   $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$
2. Zu jedem Punkt $x \in I$ gibt es ein $c \in I$ mit
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$
3. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und
   $$\varphi: V \longrightarrow W$$
   sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

Aufgabe (3 Punkte)

Man erläutere die Aussage, dass man in der Mathematik auch „Extremfälle“ berücksichtigen muss, an typischen Beispielen.

Lösung Mathematik/Extremfälle/Erläuterung/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

durch vollständige Induktion ($n \geq 2$).

Lösung

Induktionsanfang. Für $n=2$ steht links

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

und rechts ebenfalls

$$\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}\,.$$

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die Gleichheit für ein bestimmtes n gilt. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}\\
&= \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Dies ist der rechte Ausdruck für $n+1$ und die Aussage ist bewiesen.

Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

1. Es sei H die Menge aller (lebenden oder verstorbenen) Menschen. Untersuche die Abbildung

   $$\varphi\colon H \longrightarrow H,$$

   die jedem Menschen seine Mutter zuordnet, auf Injektivität und Surjektivität.

2. Welche Bedeutung hat die Hintereinanderschaltung φ^3?

3. Wie sieht es aus, wenn man die gleiche Abbildungsvorschrift nimmt, sie aber auf die Menge E aller Einzelkinder und auf die Menge M aller Mütter einschränkt?
4. Seien Sie spitzfindig (evolutionsbiologisch oder religiös) und argumentieren Sie, dass die Abbildung in (1) nicht wohldefiniert ist.

Lösung

1. Die Abbildung ist nicht injektiv, da Geschwister die gleiche Mutter haben, und nicht surjektiv, da nicht jeder Mensch ein Mutter ist.
2. Die Abbildung φ^3 ordnet jedem Menschen seine Urgroßmutter in der mütterlichen Stammlinie zu.
3. Die Abbildung ist jetzt injektiv, da verschiedene Einzelkinder verschiedene Mütter haben. Sie ist nicht surjektiv, da es Mütter gibt, die mehr als ein Kind haben.
4. Evolutionsbiologisch: Da sich die Menschheit evolutionär aus nichtmenschlichen Vorfahren entwickelt hat, muss es in der Folge $\varphi^n(x), n \in \mathbb{N}$, einen Übergang von Mensch zu Nichtmensch geben, also ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\varphi^n(x)$ schon ein Mensch ist, aber $\varphi^{n+1}(x)$ noch nicht. Für $\varphi^n(x)$ ist dann die Abbildung nicht definiert. Relgiös: Adam und Eva haben keine Mutter, obwohl sie Menschen sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Unterteile die Strecke von $\frac{2}{7}$ nach $\frac{3}{4}$ rechnerisch in drei gleichlange Strecken.

Lösung

Die Länge der Strecke ist

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{21-8}{28}=\frac{13}{28}\,.$$

Der dritte Teil davon ist

$$\frac{13}{3\cdot 28}=\frac{13}{84}\,.$$

Die Unterteilungspunkte, die die Strecke in drei gleichlange Stücke unterteilen, sind daher

$$\frac{2}{7},\ \frac{2}{7}+\frac{13}{84}=\frac{24+13}{84}=\frac{37}{84},\ \frac{2}{7}+2\cdot\frac{13}{84}=\frac{24+26}{84}=\frac{50}{84}=\frac{25}{42},\ \frac{3}{4}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Lösung

Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 12.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = c_n \,,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen.

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit der angegebenen Abschätzungseigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.
Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}_+$. D.h. für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe (2 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Fünffache ihrer zweiten Potenz, gleich der siebten Wurzel von 17 ist?

Lösung

Es geht um eine reelle Lösung für die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 5x^2 = \sqrt[7]{17}\,.$$

Es ist $f(0) = 0$ und $f(6) = (6-5)25 = 25$ und $0 \leq \sqrt[7]{17} \leq 25$. Da f als Polynomfunktion stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[7]{17}$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Ordne die folgenden Funktionen den Bildern zu (man schreibe ohne Begründung hinter den Funktionsausdruck den Buchstaben des zugehörigen Bildes; nur für vollständig richtige Antworten gibt es Punkte).

1. $$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1,$$
2. $$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1,$$
3.

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x+1\right)-1,$$

4.

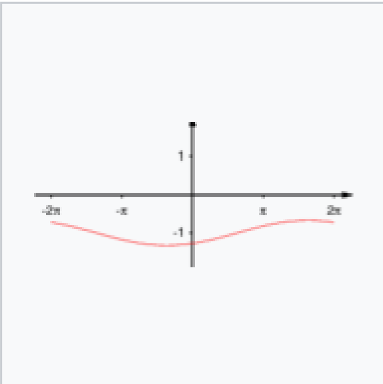
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1,$$

5.

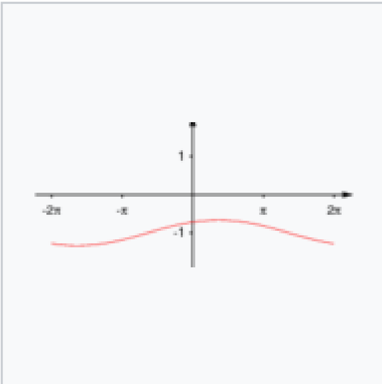
$$\frac{1}{3}\sin(2x+1)-1,$$

6.

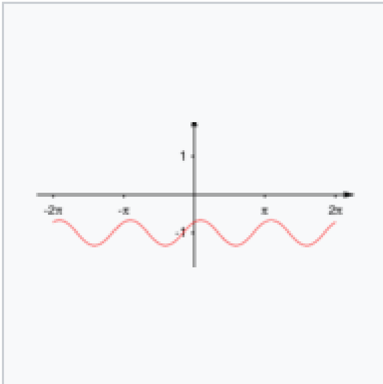
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)-1.$$



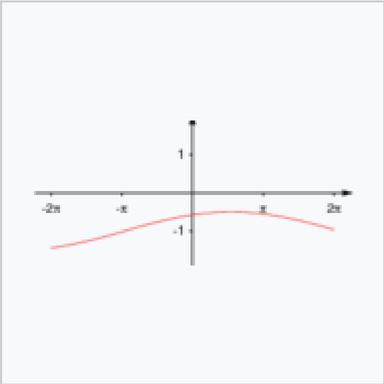
a)



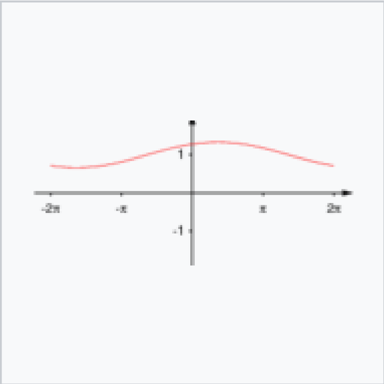
b)



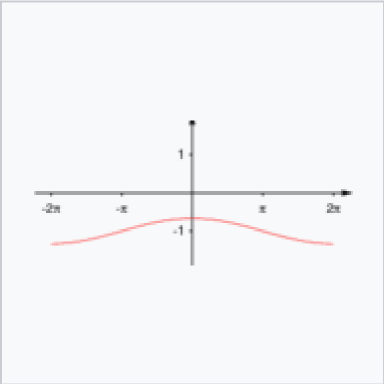
c)



d)



e)



f)

Lösung

1.
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1:\ b,$$

2.
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1:\ a,$$

3.
$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x+1\right)-1:\ d,$$

4.

$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1:\ e,$$

5.
$$\frac{1}{3}\sin(2x+1)-1:\ c,$$

6.
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)-1:\ f.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

die Extrema.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + 2^{-x} \\ &= e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2} . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Extrema betrachten wir die Ableitung, diese ist

$$f'(x) = (\ln 2) e^{x \ln 2} - (\ln 2) e^{-x \ln 2} .$$

Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt durch Multiplikation mit $e^{x \ln 2}$ und Division durch $\ln 2$ (die beide nicht 0 sind) auf

$$0 = e^{2x \ln 2} - 1 .$$

Daher muss

$$e^{2x \ln 2} = 1$$

sein, woraus sich

$$2x \ln 2 = 0 ,$$

also $x = 0$ ergibt. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = (\ln 2)\left((\ln 2) e^{x \ln 2} + (\ln 2) e^{-x \ln 2}\right)$$

und somit positiv, also liegt im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum vor. Da die Ableitung keine weitere Nullstelle hat, ist dieses Minimum das einzige Minimum und daher ein globales Minimum und es gibt keine Maxima.

Aufgabe (2 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$-5x - \frac{1}{3}y = 1 \text{ und } -7x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3}.$$

Lösung

Wir addieren zur ersten Gleichung das $-\frac{5}{7}$-fache der zweiten Gleichung und erhalten

$$-\frac{29}{42}y = \frac{11}{21}$$

bzw.

$$y = -\frac{22}{29}\,.$$

Daher ist

$$x = -\frac{1}{15}y - \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \cdot \frac{22}{29} - \frac{1}{5} = \frac{22-87}{435} = -\frac{65}{435} = -\frac{13}{87}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Basiselementen.

Lösung

Es seien $\mathfrak{b} = b_1, \ldots, b_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ zwei Basen von V. Aufgrund des Basisaustauschsatzes, angewandt auf die Basis $\mathfrak{b}$ und die linear unabhängige Familie $\mathfrak{u}$ ergibt sich $k \leq n$. Wendet man den Austauschsatz umgekehrt an, so folgt $n \leq k$, also insgesamt $n = k$.

Aufgabe (1 Punkt)

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Zeige $\varphi(0) = 0$.

Lösung

Aufgrund der Additivität der linearen Abbildung ist

$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)\,.$$

Addition mit dem negativen Element zu $\varphi(0)$, also mit $-\varphi(0)$, ergibt

$$0 = \varphi(0)\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$, $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V. Zeige, dass die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$$

stehen.

Lösung

Es sei

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$$

und

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} w_k \, .$$

Dann ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = (a_{ji})$$

und

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} = (b_{kj}) \, .$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
u_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} w_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji} \right) w_k .
\end{aligned}
$$

Der Koeffizient vor w_k ist dabei das Produkt aus der k-ten Zeile von $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$ und der i-ten Spalte von $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$, und dies ist der Eintrag $(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}})_{ik}$.

Aufgabe (4 (3+1) Punkte)

1. Zeige durch Induktion über n, dass die Determinante einer $n \times n$-Matrix, deren sämtliche Einträge ganze Zahlen sind, ebenfalls eine ganze Zahl ist.
2. Man gebe ein Beispiel für eine Matrix, deren sämtliche Einträge positive natürliche Zahlen sind und deren Determinante negativ ist.

Lösung Determinante/Ganzzahlig/Induktion/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar und ob sie diagonalisierbar ist.

Lösung

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned} \chi &= \det \begin{pmatrix} X-4 & -3 & 0 \\ 5 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X-11 \end{pmatrix} \\ &= ((X-4)(X+1)+15)(X-11) \\ &= (X^2-3X+11)(X-11). \end{aligned}$$

Den vorderen Faktor schreiben wir als

$$X^2-3X+11 = \left(X-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 11\,.$$

Daran erkennt man, dass dieses Polynom keine reelle Nullstelle besitzt und somit nicht in Linearfaktoren zerfällt. Also ist die Matrix nicht trigonalisierbar und somit auch nicht diagonalisierbar.