Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/33/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	2	2	4	1	4	0	4	4	6	0	0	4	4	3	5	54

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.

2. Die *Gaußklammer* einer reellen Zahl x.
3. Eine *streng fallende* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

   $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. *Äquivalente* (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge über einem Körper K.
6. Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix M.

Lösung

1. Man sagt, dass die Menge T eine *Teilmenge* von M ist, wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist.
2. Die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ ist durch

   $$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z},$$

   definiert.
3. Die Funktion

   $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   heißt *streng fallend*, wenn

   $$f(x') < f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt.}$$
4. Das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f in a.

5. Zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
6. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Existenz der Primfaktorzerlegung.
2. Der Satz über die Ableitung von Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\alpha}$.
3. Der *Determinantenmultiplikationssatz*.

Lösung

1. Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren.
2. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^{\alpha},$$

ist differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Beziehung

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: „Das Prinzip „Beweis durch Widerspruch“ ist offenbar absurd. Wenn man alles annehmen darf, so kann man immer einen Widerspruch erzielen und somit alles beweisen“.

Lösung Widerspruchsbeweis/Einwand/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne

$$0{,}00000029 \cdot 0{,}00000000037.$$

Das Ergebnis soll in einer entsprechenden Form angegeben werden.

Lösung

Es ist

$$0{,}00000029 = 29 \cdot 10^{-8}$$

und

$$0{,}00000000037 = 37 \cdot 10^{-11} \, .$$

Somit ist das Produkt

$$0{,}00000029 \cdot 0{,}00000000037 = 29 \cdot 10^{-8} \cdot 37 \cdot 10^{-11} = 29 \cdot 37 \cdot 10^{-19} = 1073 \cdot 10^{-19} \, .$$

Die Kommadarstellung davon ist

$$0{,}0000000000000001073.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Lösung

Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne

$$(x + \mathrm{i}y)^n.$$

Lösung

Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$
\begin{aligned}
(x+\mathrm{i}y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \mathrm{i}^k y^k \\
&= \sum_{k \leq n \text{ gerade}} (-1)^{k/2} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \mathrm{i} \left(\sum_{k \leq n \text{ ungerade}} (-1)^{k-1/2} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe (4 Punkte)

Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Lösung

Es ist

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}\,,$$

vorausgesetzt, der Wurzelausdruck $b^2 - 4ac$ ist nichtnegativ. Dies sieht man so: Die Bedingung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ist äquivalent zu

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,,$$

was mittels quadratischem Ergänzen äquivalent zu

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

ist. Umstellen und Erweitern liefert

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\,.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und somit zu

$$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\,.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme den Exponenten, die Potenz und die Basis im Ausdruck

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}.$$

Lösung

In $\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}$ ist der Gesamtausdruck die Potenz, $\frac{3}{2}$ ist die Basis und π ist der Exponent.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Lösung

Die Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k .$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$$

ein Polynom vom Grad 2. Zeige, dass der Durchschnitt des Graphen der Funktion mit jeder Tangenten an den Graphen aus genau einem Punkt besteht.

Lösung

Die Tangente zu $x_0 \in \mathbb{K}$ wird durch

$$t(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

beschrieben. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehört zum Graphen und zur Tangente; wir müssen zeigen, dass kein weiterer Punkt zum Durchschnitt gehört. Nehmen wir an, es gäbe einen weiteren Punkt $x_1 \neq x_0$ mit $f(x_1) = t(x_1)$. Dies bedeutet

$$ax_1^2 + bx_1 + c = (2ax_0 + b)(x_1 - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c\,.$$

Dies führt auf

$$a(x_1^2 - x_0^2) + b(x_1 - x_0) = (2ax_0 + b)(x_1 - x_0)\,.$$

Division durch $x_1 - x_0 \neq 0$ ergibt

$$a(x_1 + x_0) + b = 2ax_0 + b$$

und daraus erhält man

$$ax_1 = ax_0\,.$$

Wegen $a \neq 0$ folgt der Widerspruch

$$x_1 = x_0\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die *Kettenregel* für differenzierbare Funktionen.

Lösung

Aufgrund von Satz 14.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) + s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0.

Aufgabe (6 Punkte)

Für ein Mathematikbuch soll der Graph der Exponentialfunktion über dem Intervall $[-5,3]$ maßstabsgetreu in cm gezeichnet werden, wobei der Fehler maximal $0,001$ cm sein darf. Es steht nur ein Zeichenprogramm zur Verfügung, das lediglich Polynom zeichnen kann. Welches Polynom kann man nehmen?

Lösung

Wir betrachten zur Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ die Teilpolynome

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \,.$$

Die Differenz der Exponentialfunktion zu diesen Polynomen ist somit

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,,$$

und der Betrag davon soll für jedes $x \in [-5,3]$ maximal gleich $0,001$ sein. Wegen

$$|\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\frac{x^n}{n!}| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

müssen wir k so wählen, dass

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \leq 0,001 = \frac{1}{1000}$$

ist. Wir betrachten

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} &= \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1+j)!} 5^j \right) \\
&= \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{5^j}{(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j)} \right) \\
&\leq \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{5}{k+2} \right)^j \right).
\end{aligned}
$$

Bei $5 < k+2$ liegt rechts eine geometrische Reihe vor, bei $k \geq 8$ ist deren Wert maximal gleich 2. Bei $k \geq 10$ (bzw. ≥ 13) können wir grob abschätzen

$$
\begin{aligned}
\frac{5^{k+1}}{(k+1)!} &= \frac{5}{k+1} \cdot \frac{5}{k} \cdots \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdots \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{5}{1} \\
&\leq \frac{5}{k+1} \cdot \frac{5}{k} \cdots \frac{5}{10} \cdot \frac{5^4}{24} \\
&\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{k-8} \cdot \frac{5^4}{24} \\
&\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{k-13}.
\end{aligned}
$$

Wegen $2^{10} \geq 1000$ ist dies bei $k \geq 24$ kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$. Daher ist $P_{24} = \sum_{n=0}^{24} \frac{x^n}{n!}$ ein Polynom, das die Exponentialfunktion wie gewünscht approximiert.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 5x & +2y & +z & -7w & = & 3 \\ 6x & +y & +2z & & = & 1 \\ x & +y & -z & & = & 0 \\ 3x & +5y & -7z & +14w & = & 1\,. \end{array}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable w, indem wir die erste Gleichung zweimal auf die vierte addieren . Dies führt auf

$$
\begin{array}{rrrcl}
6x & +y & +2z & = & 1 \\
x & +y & -z & = & 0 \\
13x & +9y & -5z & = & 7\,.
\end{array}
$$

Nun eliminieren wir die Variable y, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $-II+I$ und $-9II+III$ ausrechnen. Dies führt auf

$$
\begin{array}{rrcl}
5x & +3z & = & 1 \\
4x & +4z & = & 7\,.
\end{array}
$$

Es ergibt sich nun wenn man die erste Gleichung mit 4 multipliziert und 3 mal die zweite subtrahiert

$$8x = -17$$

und

$$x = -\frac{17}{8}\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$z = \frac{31}{8}\,,$$
$$y = 6$$

und

$$w = \frac{9}{28}\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit

$$M^2 + 3M - 4E_2 = 0\,.$$

Lösung

Die Gesamtbedingung führt wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

auf

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab+bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit auf die drei Bedingungen

$$a^2 + 3a - 4 = 0\,,$$
$$d^2 + 3d - 4 = 0$$

und

$$(a+d+3)b = 0\,.$$

Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gilt

$$a, d = 1, -4\,.$$

Bei $b = 0$ sind also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösungen. Bei $b \neq 0$ muss zusätzlich

$$a + d = -3$$

sein, und daher sind

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } b \neq 0$$

weitere Lösungen.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zueinander ähnlich sind.

Lösung

Die Matrix M bildet

$$e_2 \mapsto e_1,\ e_1 \mapsto 0,\ e_4 \mapsto e_3,\ e_3 \mapsto 0,$$

daher ist $M^2 = 0$. Die Matrix N bildet

$$e_1 \mapsto 0,\ e_4 \mapsto e_3,\ e_3 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto 0,$$

daher ist $N^2 \neq 0$. Die beiden Matrizen können also nicht die gleiche lineare Abbildung beschreiben und sind somit nicht zueinander ähnlich.

Aufgabe (5 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Lösung

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}\chi_M &= \det\begin{pmatrix} x-4 & 0 & -3 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -2 & 0 & x-3 \end{pmatrix} \\ &= (x-4)(x+1)(x-3) - 6(x+1) \\ &= (x+1)((x-4)(x-3)-6) \\ &= (x+1)(x^2-7x+6).\end{aligned}$$

Dies ergibt zunächst den Eigenwert -1. Durch quadratisches Ergänzen (oder direkt) sieht man für den quadratischen Term die Nullstellen 1 und 6, die die weiteren Eigenwerte sind. Da es drei verschiedene Eigenwerte gibt ist klar, dass zu jedem Eigenwert der Eigenraum eindimensional ist.

Eigenraum zu -1: Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu -1 gleich $\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Eigenraum zu 1: Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu 1 gleich $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

Eigenraum zu 6: Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu 6 gleich $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.