Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/5/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	2	4	4	3	6	2	4	4	5	4	5	6	4	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
3. Das *Maximum* der Funktion
   $$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$
   wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.
4. Eine *Treppenfunktion*
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.
6. Ein *Eigenwert* zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
   auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer reellen Folge.
2. Der Satz über die Differenz zwischen Stammfunktionen.

3. Der Satz über die Dimension des Standardraumes.

Aufgabe * (2 Punkte)

Begründe das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe * (2 Punkte)

Skizziere möglichst viele wesentlich verschiedene Konfigurationen von fünf Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in vier Schnittpunkten treffen.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige durch Induktion über n, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2\mathrm{i}X^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = \mathrm{i}X - 3 + 2\mathrm{i}$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Aufgabe * (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3\sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{\ln\left(2x^2\right)}{7^x}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei $f(x) := \frac{x^2+4x-3}{x^2+7}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 2$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (bezüglich der Standardbasis) festgelegte lineare Abbildung. Bestimme die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe * (6 (2+4) Punkte)

Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung.

a) Zeige, dass der Kern von φ ein Untervektorraum von V ist.

b) Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (4 Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$