Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/37/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	5	4	0	4	2	3	3	5	3	4	0	1	5	3	0	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Eine *rationale Funktion* (in einer Variablen über $\mathbb{R}$).

3. Das *Minimum* der Funktion
   $$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$
   wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.

4. Die *höheren Ableitungen* zu einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   (rekursive Definition).

5. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
   $$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

6. Die *inverse Matrix* zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und absolute Konvergenz von reellen Reihen.
2. Der Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a > 0$.
3. Der Satz über lineare Abbildungen zwischen gleichdimensionalen Vektorräumen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass eine natürliche Zahl genau dann die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist, wenn sie ungerade ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien n Geraden in der Ebene gegeben. Formuliere und beweise eine Formel (in Abhängigkeit von n) für die maximale Anzahl von Schnittpunkten der Geraden.

Aufgabe * (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ nicht gelten muss.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktion.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+3) - x\sqrt{x^2+2}}{1+\sin^2 x}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\cos(\cos(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 1$ und mit $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{50}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{5}{3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 10^7 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit dem Rang r. Zeige, dass es eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B, beide mit dem Rang r, mit $M = B \circ A$ gibt.

Aufgabe * (3 (2+0.5+0.5) Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

1. Der Eigenraum
   $$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$
   ist ein Untervektorraum von V.
2. λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.
3. Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ ist.

Aufgabe (0 Punkte)