Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/49/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	6	3	3	3	1	2	5	0	0	2	1	5	4	4	4	3	3	55

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Eine *ungerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Die *Kosinusreihe* zu $x \in \mathbb{R}$.

4. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K.

6. Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi\colon V \rightarrow V$, wobei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer reellen Folge.

2. Der Satz über die Konvergenz der Exponentialreihe.

3. Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion

   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe * (6 (3+2+1) Punkte)

In einer Äpfelpackung befinden sich stets sechs Äpfel, die zusammen ein Kilo wiegen sollen, wobei eine Toleranz zwischen 995 und 1005 Gramm erlaubt ist. Der kleinste Apfel in der Packung muss mindestens 90 Prozent des Gewichts des größten Apfels der

Packung haben.

1. Wie schwer (in gerundeten Gramm) kann ein Apfel in einer Packung maximal sein?
2. Wie leicht (in gerundeten Gramm) kann ein Apfel in einer Packung minimal sein?
3. Um wie viel Prozent ist der größtmögliche Apfel schwerer als der kleinstmögliche Apfel?

Aufgabe * (3 Punkte)

Die Hochschule „Tellerrand“ bietet lediglich 4 Fächer an, nämlich Hethitologie, Assyriologie, Ägyptologie und Semitistik. Sie bietet lediglich 2-Fächer-Bachelor an in beliebiger Fächerkombination. Wie viele Fächerkombinationen gibt es (es wird nicht zwischen Erst- und Zweitfach unterschieden)? Skizziere ein Mengendiagramm, das die Studentenschaft mit ihren Fächern widergibt. Die zu einem Fach gehörenden Studenten und Studentinnen sollen dabei durch ein zusammenhängendes Gebiet dargestellt werden.

Aufgabe * (3 (1+1+1) Punkte)

Die Funktionen

$$f,g,h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien durch

$$f(x) = x^3 + x\,,$$
$$g(y) = y^2 - 1$$

und

$$h(z) = 3z + 4$$

gegeben.

1. Berechne $g \circ f$.
2. Berechne $h \circ g$.
3. Berechne $h \circ g \circ f$ auf zwei unterschiedliche Arten.

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

1. Finde eine quadratische Gleichung der Form
   $$x^2 + px + q = 0$$
   mit $p, q \in \mathbb{Z}$, für die 17 die einzige Lösung ist.

2. Finde unendlich viele verschiedene quadratische Gleichungen der Form
   $$x^2 + px + q = 0$$
   mit $p, q \in \mathbb{Z}$, für die 17 eine Lösung ist.

Aufgabe * (1 Punkt)

Man finde ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ und $f(3) = 9$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \, z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 1$$

definiert. Entscheide, für welche x_0 die Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

Aufgabe (1 Punkt)

Skizziere den Graphen der Sinusfunktion.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe * (4 Punkte)

Der Graph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Bestimme die Gerade durch den Nullpunkt, die diese Fläche in zwei gleich große Teile unterteilt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Der K-Vektorraum K^2 sei zusätzlich mit der komponentenweisen Multiplikation versehen. Bestimme die Untervektorräume $U \subseteq K^2$, die unter dieser Multiplikation abgeschlossen sind.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Es sei

$$MN = 0$$

für jede $n \times n$-Matrix N vom Rang 1. Zeige

$$M = 0\,.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu einer ebenen Drehung $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, über $\mathbb{R}$.