Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/29/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	6	2	2	3	2	0	5	2	4	0	2	2	2	4	6	50

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Eine *Teilfolge* einer Folge reeller Zahlen.
3. Eine *gerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$.
5. Ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Variablen über einem Körper K.
6. Der *Kern* einer linearen Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Der Binomialkoeffizient ist durch
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
   definiert.
2. Zu einer streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $i \longmapsto n_i$, heißt die Folge
   $$i \mapsto x_{n_i}$$
   eine *Teilfolge* der Folge.
3. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
   $$f(x) = f(-x)$$

gilt.

4. Eine Funktion $F\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf $]a,b[$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a,b[$ gilt.

5. Das System
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{matrix}$$
heißt ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem*, wobei die a_{ij} und die c_i aus K sind.

6. Man nennt
$$\operatorname{kern} \varphi := \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}$$
den *Kern* von φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.
2. Der Satz über Ableitung und Wachstumsverhalten einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Der Satz über die Lösungsmenge zu einem linearen Gleichungssystem in Dreiecksgestalt über einem Körper K.

Lösung

1. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$.

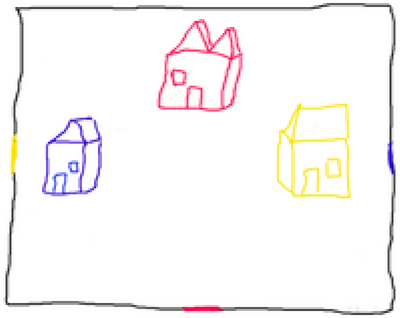
2. Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.
    1. Die Funktion f ist genau dann wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.
    2. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.
    3. Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.

3. Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m & \ldots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mm}x_m & \ldots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{matrix}$$
gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in K^{n-m}$.

Aufgabe (1 Punkt)

Lege in der Skizze für die drei Häuser überschneidungsfrei Wege zu den zugehörigen gleichfarbigen Gartentoren an.

Lösung Häuser/Gartentor/Verbindung/Aufgabe/Lösung



Aufgabe (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Lösung

q.

Aufgabe (6 (2+2+1+1) Punkte)

Wir betrachten die beiden Sätze „Für jeden Topf gibt es einen Deckel“ und „Es gibt einen Deckel für jeden Topf“, die man im alltäglichen Verständnis wohl als gleichbedeutend ansehen würde. Wenn man aber die beiden Aussagen streng prädikatenlogisch (quantorenlogisch) von vorne nach hinten abarbeitet, so ergeben sich zwei unterschiedliche Bedeutungen.

1. Formuliere die beiden Aussagen durch zusätzliche Wörter so um, dass die unterschiedlichen Bedeutungen deutlich hervortreten.
2. Es sei T die Menge der Töpfe und D die Menge der Deckel. Es sei P ein zweistelliges Prädikat derart, dass (für $x \in T$ und $y \in D$) $P(x, y)$ besagt, dass y auf x passt. Formuliere die beiden Aussagen allein mit geeigneten mathematischen Symbolen.
3. Kann man aus der Aussage, dass es für jeden Topf einen Deckel gibt, logisch erschließen, dass es für jeden Deckel einen Topf gibt?
4. Wie kann man erklären, dass die beiden Aussagen im alltäglichen Verständnis als gleichbedeutend interpretiert werden?

Lösung

1. Erste Aussage: Für jeden Topf gibt es einen von diesem jeweiligen Topf abhängigen und zu diesem Topf passenden Deckel. Zweite Aussage: Es gibt einen bestimmten Deckel, der gleichzeitig für überhaupt alle Töpfe gleichermaßen passt.
2. Die erste Aussage ist
   $$\forall x \in T(\exists y \in D(P(x, y)),$$
   die zweite Aussage ist
   $$\exists y \in D(\forall x \in T(P(x, y)).$$
3. Nein, es kann ja sein, dass es beispielsweise in der Küche für die drei Töpfe jeweils den passenden Deckel gibt, es aber auch noch einen ganz anderen Deckel gibt, der mit keinem Topf was zu tun hat.
4. Das alltägliche Sprachverständnis versucht, Aussagen sinnvoll zu interpretieren. Da die Aussage, dass es wirklich nur einen Deckel gibt, der gleichzeitig für alle Töpfe passt, offenbar absurd ist, versteht man auch die zweite Formulierung im Sinne der ersten sinnvollen Aussage.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Person A wird 80 Jahre alt und Person B wird 70 Jahre alt. Vergleiche die Gesamtlebenswachzeit und die Gesamtlebensschlafzeit der beiden Personen bei folgendem Schlafverhalten.

1. A schläft jede Nacht 7 Stunden und B schläft jede Nacht 8 Stunden.
2. A schläft jede Nacht 8 Stunden und B schläft jede Nacht 7 Stunden.

Lösung

1. Person A schläft in seinem Leben insgesamt
$$80 \cdot 7 \cdot 365$$
Stunden, Person B schläft insgesamt
$$70 \cdot 8 \cdot 365$$
Stunden, sie schlafen also gleich lang. Die Wachzeit der beiden ist
$$80 \cdot 17 \cdot 365$$
bzw.
$$70 \cdot 16 \cdot 365,$$
wegen
$$8 \cdot 17 > 7 \cdot 16$$

ist A länger wach.

2. Person A schläft in seinem Leben insgesamt
   $$80 \cdot 8 \cdot 365$$
   Stunden, Person B schläft insgesamt
   $$70 \cdot 7 \cdot 365$$
   Stunden, Person A schläft also insgesamt mehr. Die Wachzeit der beiden ist
   $$80 \cdot 16 \cdot 365$$
   bzw,
   $$70 \cdot 17 \cdot 365,$$
   wegen
   $$8 \cdot 16 = 128 > 119 = 7 \cdot 17$$
   ist A auch länger wach.

Aufgabe (2 Punkte)

Es seien L, M, N Mengen und $F: L \rightarrow M$ und $G: M \rightarrow N$ surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $G \circ F$ ebenfalls surjektiv ist.

Lösung

Sei $z \in N$ gegeben. Aufgrund der Surjektivität von G gibt es ein $y \in M$ mit

$$G(y) = z\,.$$

Aufgrund der Surjektivität von F gibt es ein $x \in L$ mit

$$F(x) = y\,.$$

Insgesamt ist

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(y) = z\,,$$

es gibt also ein Urbild von z und somit ist die Gesamtabbildung surjektiv.

Aufgabe (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi \colon K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

1. $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
2. $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
3. $1(a) = 1$.

Lösung

Es seien $P = \sum_i a_i X^i$ und $Q = \sum_j b_j X^j$.

1. Es ist

$$P + Q = \sum_i (a_i + b_i) X^i$$

und somit ist unter Verwendung des Distributivgesetzes für K

$$\begin{aligned}(P+Q)(z) &= \left(\sum_i (a_i + b_i) X^i\right)(z) \\ &= \sum_i (a_i + b_i) z^i \\ &= \sum_i a_i z^i + \sum_i b_i z^i \\ &= \left(\sum_i a_i X^i\right)(z) + \left(\sum_i b_i X^i\right)(z) \\ &= P(z) + Q(z).\end{aligned}$$

2. Es ist

$$P \cdot Q = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) X^k$$

und somit ist unter Verwendung des Distributivgesetzes und der Potenzgesetze für K

$$\begin{aligned}(P\cdot Q)(z) &= \left(\sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) X^k\right)(z)\\ &= \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) z^k\\ &= \sum_{i,j} a_i \cdot b_j z^{i+j}\\ &= \left(\sum_i a_i z^i\right) \cdot \left(\sum_j b_j z^j\right)\\ &= \left(\sum_i a_i X^i\right)(z) \cdot \left(\sum_j b_j X^j\right)(z)\\ &= P(z)\cdot Q(z).\end{aligned}$$

3. Für jedes konstante Polynom a_0 gilt $a_0(z) = a_0$, da nicht eingesetzt werden kann.

Aufgabe (2 Punkte)

Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Lösung

Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdots 3}{n^{n-2}} \cdot \frac{2 \cdot 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor und damit konvergiert die angegebene Reihe.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die lineare Approximierbarkeit.

Lösung

Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a \, , \\ 0 \text{ für } x = a \, , \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} r(x) = \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist.
Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x).$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren.

Aufgabe (2 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a > 0$.

Lösung

Nach Definition . ist

$$a^x = \exp(x \ln a) \, .$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 16.3 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) unter Verwendung der Kettenregel gleich

$$(a^x)' = (\exp(x \ln a))' = (\ln a) \exp'(x \ln a) = (\ln a) \exp(x \ln a) = (\ln a) a^x \, .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Lösung

a) Durch Polynomdivision erhält man $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ und $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$. Daher ist

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \frac{x-2}{x^2 + x - 1} \, .$$

Daher ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2+x-1} = \frac{-1}{1} = -1\,.$$

b) Die Ableitungen sind $(x^2-3x+2)' = 2x-3$ und $(x^3-2x+1)' = 3x^2-2$, die beide für $x=1$ keine Nullstelle besitzen. Nach der Regel von l'Hospital ist daher

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{3x^2-2} = \frac{-1}{1} = -1\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien U,V,W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Lösung

Für $u_1, u_2 \in U$ ist

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) &= \psi(\varphi(u_1 + u_2)) \\ &= \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \\ &= \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)\end{aligned}$$

und für $u \in U, s \in K$ ist

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(su) &= \psi(\varphi(su)) \\ &= \psi(s\varphi(u)) \\ &= s\psi(\varphi(u)) \\ &= s(\psi \circ \varphi)(u),\end{aligned}$$

was insgesamt die Linearität der Hintereinanderschaltung bedeutet.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zueinander ähnlich sind.

Lösung

Die Matrix M bildet

$$e_3 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto e_1,\ e_1 \mapsto 0,\ e_4 \mapsto 0$$

ab. Wir setzen $u_1 := e_4, u_2 := e_1, u_3 := e_2, u_4 := e_3$. Bezüglich dieser Basis wird die durch M gegebene lineare Abbildung durch die Matrix N beschrieben, die Matrizen sind also zueinander ähnlich.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 3\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix},$$

die Angaben sind dabei als gemischte Brüche zu verstehen und das Ergebnis soll ebenso angegeben werden.

Lösung

Die inverse Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei

$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Lösung

Aufgrund der verschiedenen Eigenwerte ist φ nach Korollar 28.10 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) diagonalisierbar. Es gibt daher nach Satz 28.9 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) eine invertierbare Matrix B derart, dass

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist, wobei in der Diagonalen die verschiedenen Eigenwerte $d_1, \ldots, d_n$ stehen. Nach Satz 26.13 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Lemma 26.8 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist

$$\det M = \det BMB^{-1} = d_1 \cdots d_n \, .$$

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix, mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0 \, .$$

Bestimme das charakteristische Polynom der mit $s \in K$ gestreckten Matrix sM.

Lösung

Es sei $M = (a_{ij})_{ij}$, somit ist

$$sM = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \ldots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \ldots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{n1} & sa_{n2} & \ldots & sa_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sei zunächst

$$s \neq 0 \, .$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\chi_{sM} &= \det(XE_n - sM)\\
&= \det\begin{pmatrix} X - sa_{11} & sa_{12} & \dots & sa_{1n}\\ sa_{21} & X - sa_{22} & \dots & sa_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ sa_{n1} & sa_{n2} & \dots & X - sa_{nn} \end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} s\left(\frac{X}{s} - a_{11}\right) & sa_{12} & \dots & sa_{1n}\\ sa_{21} & s\left(\frac{X}{s} - a_{22}\right) & \dots & sa_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ sa_{n1} & sa_{n2} & \dots & s\left(\frac{X}{s} - a_{nn}\right) \end{pmatrix}\\
&= s^n \cdot \det\begin{pmatrix} \frac{X}{s} - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \frac{X}{s} - a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \frac{X}{s} - a_{nn} \end{pmatrix}\\
&= s^n \cdot \chi_M\left(\frac{X}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Hier steht also das charakteristische Polynom zu M, wobei man die Variable überall durch $\dfrac{X}{s}$ ersetzt, und das Ganze mit s^n multipliziert. Daher ist

$$\begin{aligned}\chi_{sM} &= s^n\left(\left(\frac{X}{s}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{X}{s}\right)^{n-1} + c_{n-2}\left(\frac{X}{s}\right)^{n-2} + \cdots + c_2\left(\frac{X}{s}\right)^2 + c_1\left(\frac{X}{s}\right) + c_0\right)\\ &= X^n + sc_{n-1}X^{n-1} + s^2c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + s^{n-2}c_2X^2 + s^{n-1}c_1X + s^nc_0.\end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang gilt auch bei $s = 0$, da dann sM die Nullmatrix ist, deren charakteristisches Polynom gleich X^n ist.