Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/51/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	5	3	4	4	5	10	3	1	5	5	3	6	64

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.
2. Eine reelle *Intervallschachtelung*.
3. Ein *isoliertes* lokales Maximum einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Der von einer Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, aus einem K-Vektorraum V *aufgespannte Untervektorraum*.

Lösung

1. Unter der *leeren Menge* versteht man diejenige Menge, die kein Element besitzt.
2. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen
   $$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$
   in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also
   $$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$
   gegen 0 konvergiert.

3. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein *isoliertes lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in \mathbb{R}$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ und $x' \neq x$ die Abschätzung
$$f(x) > f(x')$$
gilt.

4. Zu $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, heißt die Zahl
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

5. Die *Ableitungsfunktion* ist diejenige Funktion, die jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(a)$ zuordnet.

6. Man nennt
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \mid s_i \in K,\, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$
den von der Familie *aufgespannten Untervektorraum*.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über hintereinandergeschaltete stetige Funktionen.
2. Der Satz über die Monotonieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.
3. Die *Dimensionsformel* für eine lineare Abbildung
$$\varphi \colon V \longrightarrow W.$$

Lösung

1. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und
$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
und
$$g \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$$
Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann gelten folgende Aussagen.

1. Wenn f in $x \in D$ und g in $f(x)$ stetig sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.
2. Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.

2. Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion
$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$
und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion
$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$
3. Unter der Bedingung, dass V endlichdimensional ist, gilt
$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \dim(\operatorname{bild} \varphi)\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Begründe das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Lösung

Wegen der ersten Voraussetzung gilt $A(0)$. Wegen der zweiten Voraussetzung gilt auch $A(1)$. Deshalb gilt auch $A(2)$. Deshalb gilt auch $A(3)$. Da man so beliebig weitergehen kann und dabei jede natürliche Zahl erhält, gilt die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei M eine Menge und $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente. Definiere durch eine Fallunterscheidung eine Bijektion von M nach M, die a und b vertauscht, und sonst alle Elemente unverändert lässt.

Lösung

Wir definieren
$$f\colon M \longrightarrow M$$
durch

$$f(x) := \begin{cases} b, & \text{wenn } x = a\,, \\ a, & \text{wenn } x = b\,, \\ x \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv und besitzt offenbar die gewünschte Vertauschungseigenschaft.

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise die allgemeine binomische Formel.

Lösung

Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\ &= a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 4,\ f(1) = 0,\ f(2) = -7.$$

Lösung

Die Bedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$a - b + c = 4\,,$$
$$a + b + c = 0\,,$$
$$a + 2b + 4c = -7\,.$$

$I - II$ führt auf

$$b = -2$$

und $I - III$ führt auf

$$-3b - 3c = 11\,,$$

also

$$c = -\frac{11}{3} - b = -\frac{11}{3} + 2 = -\frac{5}{3}$$

und somit

$$a = -b - c = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}\,.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$\frac{11}{3} - 2X - \frac{5}{3}X^2.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Betrachte die Folge $x_n = (-1)^n$ und $x = -1$. Welche der Pseudokonvergenzbegriffe (siehe Angeordneter Körper/Folge/Pseudokonvergenz/Pseudo/Definition) treffen zu?

Lösung

Richtig sind (4), (5), (6), (7).

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der geometrischen Reihe.

Lösung

Für jedes x und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$(x-1)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $x \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\,.$$

Für $n \to \infty$ und $|x| < 1$ konvergiert dies wegen Lemma 8.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Aufgabe 8.22 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gegen $\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$.

Aufgabe (5 (1+3+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

auf $\mathbb{R}_+$.

1. Bestimme die erste und die zweite Ableitung von f.
2. Bestimme die lokalen Extrema von f.
3. Bestimme das Monotonieverhalten von f.

Lösung

1. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

und

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

2. Wir setzen

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Dies führt auf $1 - \frac{1}{x} = 0$ bzw. auf

$$\frac{1}{x} = 1,$$

also $x = 1$. Die einzige Nullstelle der Ableitung ist also in

$$x = 1.$$

Wegen

$$f''(1) = -1 + 2 = 1$$

liegt an dieser Stelle ein lokales isoliertes Minimum mit dem Wert

$$f(1) = 1$$

vor. Da die Ableitung keine weitere Nullstelle hat und da keine Randpunkte zu beachten sind, handelt es sich um ein globales Minimum.

3. Für $x < 1$ ist $\frac{1}{x} > 1$ und

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$$

und für $x > 1$ ist $\frac{1}{x} < 1$ und

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0.$$

Somit ist f auf $]0,1]$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$ streng wachsend.

Aufgabe (10 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$s_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diejenige untere Treppenfunktion zu f zur äquidistanten Unterteilung in n gleichlange Intervalle, die auf dem Teilintervall

$$I_j = [a + \frac{(j-1)(b-a)}{n}, a + \frac{j(b-a)}{n}[,\ j = 1, \ldots, n,$$

(für $j = n$ sei das Intervall rechtsseitig abgeschlossen) das Infimum von $f(x)$, $x \in I_j$, annimmt. Zeige, dass die Folge der Treppenintegrale zu s_n gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

Lösung

Es sei $c = \int_a^b f(x)dx$. Es gibt eine Folge von unteren Treppenfunktionen u_n derart, dass die zugehörige Folge der Treppenintegrale gegen c konvergiert. Wir müssen zeigen, dass dies auch für die Treppenintegrale zu den s_n gilt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der zuerst erwähnten Konvergenz gibt es zu $\frac{\epsilon}{2}$ ein k derart, dass für alle $n \geq k$ die Abschätzung

$$c - \int_a^b u_n(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Wir vergleichen die Treppenintegrale zu s_n mit dem Treppenintegral zu u_k. Es sei m die Anzahl der Unterteilungspunkte von u_k und es sei $d \in \mathbb{R}_+$ eine absolute Schranke für f. Insbesondere ist

$$u_k \leq d$$

und

$$s_n \geq -d\,.$$

Wir wählen n_0 so, dass

$$\frac{b-a}{n_0} md \leq \frac{\epsilon}{4}$$

ist. Sei $n \geq n_0$ fixiert. Von den n Teilintervallen gibt es maximal m Stück, in denen ein Unterteilungspunkt zu u_k liegt. Es sei $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Indexmenge dieser Teilintervalle. Auf einem Intervall I_j mit $j \notin J$ ist u_k konstant und es gilt dort

$$u_k \leq s_n \leq f$$

und entsprechend

$$\int_{I_j} u_k(x)dx \leq \int_{I_j} s_n(x)dx \leq \int_{I_j} f(x)dx \,.$$

Auf einem Intervall I_j mit $j \in J$ ist

$$\int_{I_j} u_k(x)dx \leq d\frac{b-a}{n}$$

und

$$\int_{I_j} s_n(x)dx \geq -d\frac{b-a}{n} \,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} c - \int_a^b s_n(x)dx &= c - \sum_{j=1}^n \int_{I_j} s_n(x)dx \\ &= c - \sum_{j \notin J} \int_{I_j} s_n(x)dx - \sum_{j \in J} \int_{I_j} s_n(x)dx \\ &\leq c - \sum_{j \notin J} \int_{I_j} u_k(x)dx - \sum_{j \in J} \int_{I_j} s_n(x)dx \\ &= c - \int_a^b u_k(x)dx + \sum_{j \in J} \int_{I_j} u_k(x)dx - \sum_{j \in J} \int_{I_j} s_n(x)dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + dm\frac{b-a}{n} + dm\frac{b-a}{n} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 (1+2) Punkte)

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 - 1$$

und

$$g(x) = -x^2 + 1 \,.$$

1. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f und g

2. Die beiden Graphen schließen eine endliche Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Lösung

1. Die Gleichung
$$x^2-1=-x^2+1$$
führt auf
$$2x^2=2$$
und damit auf $x=\pm 1$. Die Schnittpunkte sind also $(-1,0)$ und $(1,0)$.

2. Der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche ist das Doppelte des Flächeninhalts unterhalb des Graphen zu g und oberhalb der x-Achse zwischen -1 und 1. Dieser ist
$$\int_{-1}^{1} -x^2+1dx = \left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}+1-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}\,.$$
Der gesuchte Flächeninhalt ist also $\frac{8}{3}$.

Aufgabe (1 Punkt)

Beschreibe die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2,3)$ und $(5,-7)$ verläuft, in Punktvektorform.

Lösung

Die Gerade wird durch

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+t\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

beschrieben.

Aufgabe (5 (3+1+1) Punkte)

In der großen Pause fährt das Süßwarenmobil von Raul Zucchero auf den Schulhof. Gabi kauft einen Schokoriegel, zwei Packungen Brausepulver und drei saure Zungen und zahlt dafür $1,30$ €. Lucy kauft zwei Schokoriegel, eine Packung Brausepulver und zwei saure Zungen und zahlt dafür $1,60$ €. Veronika kauft drei Packungen Brausepulver und vier saure Zungen und zahlt dafür einen Euro.

1. Kann man daraus die Preise rekonstruieren?
2. Wie sieht es aus, wenn man weiß, dass die Preise volle positive Centbeträge sind?
3. Wie sieht es aus, wenn man weiß, dass die Preise positive Vielfache von Zehn-Cent-Beträgen sind?

Lösung

1. Es sei x der Preis für den Schokoriegel, y der Preis für die Packung Brausepulver, z der Preis für eine saure Zunge. Die drei Einkäufe führen zu den drei Gleichungen
$$x+2y+3z=1,3\,,$$
$$2x+y+2z=1,6\,,$$
$$3y+4z=1\,.$$
Die Gleichung $2I-II$ ergibt
$$3y+4z=1\,.$$
Dies stimmt mit der dritten Gleichung überein, daher ist das Gleichungssystem äquivalent zum System
$$x+2y+3z=1,3\,,$$
$$3y+4z=1$$
mit zwei Gleichungen. Dabei führt jede Vorgabe von z zu einer Lösung und die Preise sind nicht ermittelbar.
2. Es gibt die Lösungen (in Cent) $(60,20,10)$ und $(61,24,7)$, die Lösungen sind also auch unter der zusätzlichen Bedingung nicht eindeutig.
3. Bei $z=10$ haben wir die Lösung $(60,20,10)$. Bei $z=20$ ist
$$y=20/3\,,$$
also kein Vielfaches der 10. Bei $z\geq 30$ ist
$$4z\geq 120>100$$
und die zweite Gleichung kann nicht unter der gegebenen Nebenbedingung erfüllt werden. Es gibt also nur eine Lösung.

Aufgabe (5 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}$ und $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Lösung

Es ist

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Für die umgekehrte Übergangsmatrix müssen wir diese Matrix invertieren. Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{11}{3} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 \\ \frac{11}{26} & -\frac{1}{78} & -\frac{3}{26} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 \\ \frac{11}{26} & -\frac{1}{78} & -\frac{3}{26} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{17}{26} & \frac{11}{78} & \frac{7}{26} \\ \frac{5}{26} & -\frac{17}{78} & \frac{1}{26} \\ \frac{11}{26} & -\frac{1}{78} & -\frac{3}{26} \end{pmatrix}$$

Es ist also

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{26} & \frac{11}{78} & \frac{7}{26} \\ \frac{5}{26} & -\frac{17}{78} & \frac{1}{26} \\ \frac{11}{26} & -\frac{1}{78} & -\frac{3}{26} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösung

Wir betrachten den Vektorraum $K^{(\mathbb{N})}$ mit der Basis e_n, $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die durch den Festlegungssatz gegebene lineare Abbildung, die das Basiselement e_0 auf sich selbst und die weiteren Basiselemente e_n auf e_{n-1} schickt. Dann werden e_0 und e_1 beide auf e_0 abgebildet und die Abbildung ist daher nicht injektiv. Hingegen wird jedes Basiselement e_n durch e_{n+1} getroffen, und somit ist diese lineare Abbildung surjektiv.

Aufgabe (6 (1+1+1+1+2) Punkte)

Wir betrachten Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}.$$

1. Berechne
$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & 0 & g \\ 0 & h & 0 \\ i & 0 & j \end{pmatrix}.$$
2. Ist die Matrizenmultiplikation für solche Matrizen kommutativ?
3. Bestimme die Determinante von $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$.
4. Man gebe eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an, die nicht invertierbar ist.

5. Sei

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$$

invertierbar. Ist die Inverse der Matrix ebenfalls von diesem Typ?

Lösung

1. Es ist

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & 0 & g \\ 0 & h & 0 \\ i & 0 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af+bi & 0 & ag+bj \\ 0 & ch & 0 \\ df+ei & 0 & dg+ej \end{pmatrix}.$$

2. Die Multiplikation ist nicht kommutativ. Wenn man oben die Reihenfolge vertauscht, ergibt sich als Eintrag links oben $af+gd$ und nicht $af+bi$.

3. Die Determinante von $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$ ist gleich $c(ae-db)$.

4. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar, da die erste und die dritte Zeile übereinstimmen.

5. Sei $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$ invertierbar. Dann ist zunächst $c \neq 0$. Ferner ist $ae-bd \neq 0$, da die Determinante gleich $c(ae-db)$ ist. Es ist

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & -b \\ 0 & (ae-bd)c^{-1} & 0 \\ -d & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae-bd & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & 0 \\ 0 & 0 & ae-bd \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{ae-bd}\begin{pmatrix} e & 0 & -b \\ 0 & (ae-bd)c^{-1} & 0 \\ -d & 0 & a \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix und diese ist wieder von diesem Typ.

Anhang

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

1. Man sagt, dass die Folge gegen x *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon\,.$$
2. Man sagt, dass die Folge gegen x *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.
3. Man sagt, dass die Folge gegen x *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.
4. Man sagt, dass die Folge gegen x *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.
5. Man sagt, dass die Folge gegen x *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.
6. Man sagt, dass die Folge gegen x *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

7. Man sagt, dass die Folge gegen x *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.

8. Man sagt, dass die Folge gegen x *deuterovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$x_n - x \leq \epsilon$$
gilt.