Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/50/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	2	4	4	3	2	8	0	5	4	0	3	1	1	3	5	55

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Der *Betrag* einer reellen Zahl.

3. Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
4. Die *höheren Ableitungen* zu einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
(rekursive Definition).
5. Die durch eine Matrix *festgelegte* lineare Abbildung.
6. Eine *diagonalisierbare* lineare Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Interpolation durch Polynome*.
2. Die *Summenregel* für reelle Folgen.
3. Der Satz über die Existenz von Stammfunktionen.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten den Satz „Nachts sind alle Katzen grau".

1. Negiere diesen Satz durch eine Existenzausssage, wenn der Satz sich auf eine bestimmte Nacht bezieht.
2. Negiere diesen Satz durch eine Existenzausssage, wenn der Satz sich auf jede Nacht bezieht.

Aufgabe * (2 Punkte)

Mustafa Müller beschließt, sich eine Woche lang ausschließlich von Schokolade seiner Lieblingssorte „Gaumenfreude“ zu ernähren. Eine Tafel besitzt einen Energiewert von 2300 kJ und sein Tagesbedarf an Energie ist 10000 kJ. Wie viele Tafeln muss er am Tag (gerundet auf zwei Nachkommastellen) und wie viele Tafeln muss er in der Woche essen?

Aufgabe * (2 Punkte)

Es seien $A,\ B$ und C Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C) \, .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme, welche der folgenden Wertetabellen Abbildungen $\varphi \colon L \rightarrow M$ zwischen den angegebenen Mengen festlegen. Welche sind injektiv, welche surjektiv, welche bijektiv?

1. $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	a	e	f	h	e	a	c	d

2. $L = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	1	2	3	4	5	5	6	7
$\varphi(x)$	c	e	f	d	e	a	b	a

3. $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(x)$	c	e	f	d	e	b	a

4. $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	2	1	4	3	6	5	8	7
$\varphi(x)$	h	b	f	d	e	c	g	a

Aufgabe * (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Vergleiche

$$\sqrt{3}+\sqrt{8} \text{ und } \sqrt{5}+\sqrt{6}.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

In $\mathbb{Q}$ sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, deren Anfangsglieder durch $x_0 = 0$, $x_1 = 0,7$, $x_2 = 0,73$, $x_3 = 0,734$ gegeben sind. Muss die Folge in $\mathbb{Q}$ konvergieren? Muss die Folge in $\mathbb{R}$ konvergieren? Kann die Folge in $\mathbb{Q}$ konvergieren? Kann die Folge in $\mathbb{R}$ konvergieren?

Aufgabe * (8 (5+3) Punkte)

Wir betrachten die durch

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

definierte Folge ($n \geq 1$). Zeige folgende Aussagen.

1. Für $n \geq 3$ ist die Folge monoton fallend.
2. Die Folge konvergiert gegen 1.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass es zu jedem $\lambda,\ -1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die *Kettenregel* für differenzierbare Funktionen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 8 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (1 Punkt)

Erläutere, warum das Achsenkreuz im $\mathbb{R}^2$ kein Untervektorraum ist

Aufgabe * (1 Punkt)

Beweise den Satz über die Dimension des Standardraumes.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit Vielfachheiten und die Eigenräume zur reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$