Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/23/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	6	1	5	3	4	2	5	5	3	8	0	0	0	0	0	0	4	52

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *Körper*.
2. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $+\infty$.

3. Der *Kosinus hyperbolicus*.
4. Eine *obere Treppenfunktion* zu einer Funktion

   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine $m \times n$-*Matrix* über einem Körper K.
6. Die *geometrische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über wachsende, nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.
2. Die *Additionstheoreme* für die trigonometrischen Funktionen.
3. Der Satz über die Ableitung einer reellen Potenzreihe.

Aufgabe * (6 (2+1+3) Punkte)

Professor Knopfloch kommt gelegentlich mit verschiedenen Socken und/oder mit verschiedenen Schuhen in die Universität. Er legt folgende Definitionen fest.

1. Ein Tag heißt *sockenzerstreut*, wenn er verschiedene Socken anhat.
2. Ein Tag heißt *schuhzerstreut*, wenn er verschiedene Schuhe anhat.
3. Ein Tag heißt *zerstreut*, wenn er sockenzerstreut oder schuhzerstreut ist.
4. Ein Tag heißt *total zerstreut*, wenn er sowohl sockenzerstreut als auch schuhzerstreut ist.

a) Vom Jahr 2015 weiß man, dass 17 Tage sockenzerstreut und 11 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal zerstreut? Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal total zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

b) Vom Jahr 2013 weiß man, dass 270 Tage sockenzerstreut und 120 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

c) Erstelle eine Formel, die die Anzahl der sockenzerstreuten, der schuhzerstreuten, der zerstreuten und der total zerstreuten Tage in einem Jahr miteinander in Verbindung bringt.

Aufgabe * (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	f

w f w

f w f

f f w

Aufgabe * (5 (1+1+1+2) Punkte)

Ein Zug ist 500 Meter lang (ohne Lokomotive) und bewegt sich mit 180 Stundenkilometer. Lucy Sonnenschein hat ihr Fahrrad mit in den Zug genommen und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 Metern pro Sekunde von ganz hinten nach ganz vorne.

1. Wie viele Sekunden benötigt Lucy für die gesamte Zuglänge?
2. Welche Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) hat Lucy bezogen auf die Umgebung?
3. Welche Entfernung (in Meter) legt der Zug während der Fahrradfahrt zurück?
4. Berechne auf zwei verschiedene Arten, welche Entfernung Lucy während ihrer Fahrradfahrt bezogen auf die Umgebung zurücklegt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise die *Nichtnullteilereigenschaft* für einen Körper K.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. Es gibt ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $P(z) = 0$.
2. Es gibt ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $Q \neq 0$, mit $Q(z) = 0$.
3. Es gibt ein normiertes Polynom $R \in \mathbb{Q}[X]$ mit $R(z) = 0$.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im reellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Summenfolge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) + \left(\lim_{n \to \infty} y_n\right)$$

ist.

Aufgabe * (8 (1+4+3) Punkte)

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $\varphi, \psi \colon V \rightarrow V$ lineare Abbildungen, von denen die charakteristischen Polynome bekannt seien. Kann man daraus das charakteristische Polynom von $\varphi \circ \psi$ bestimmen?