Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/7/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
Punkte	3	3	1	3	3	4	4	4	2	3	5	5	12	2	4	2	4	64

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Die *komplexe Konjugation*.

3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

4. Eine reelle *Potenzreihe*.

5. Die *Matrizenmultiplikation*.

6. Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit $f(x) = y$ gibt.

2. Die Abbildung
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z = a + b\mathrm{i} \longmapsto \overline{z} = a - b\mathrm{i},$$
heißt komplexe Konjugation.

3. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist,wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt.

4. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Dann ist das *Matrixprodukt*
$$AB$$

diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind.

6. Die Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.
   1. $0 \in U$.
   2. Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
   3. Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und absolute Konvergenz von reellen Reihen.
2. Die *Quotientenregel* für differenzierbare Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. Der Satz über n Vektoren in einem n-dimensionalen K-Vektorraum V.

Lösung

1. Eine absolut konvergente Reihe von reellen Zahlen konvergiert.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und seien

$$f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Wenn g keine Nullstelle in a besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Für n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V sind folgende Eigenschaften äquivalent.
   1. $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
   2. $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
   3. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe (1 Punkt)

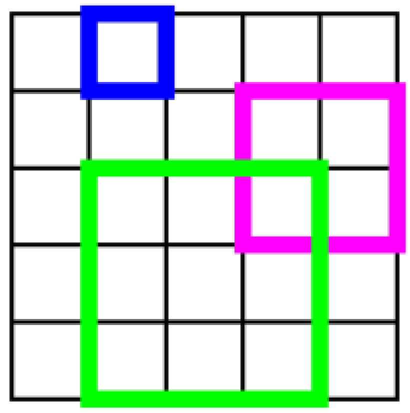
Wir betrachten den Satz „Diese Vorlesung versteht keine Sau“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

Lösung

Es gibt eine Sau, die diese Vorlesung versteht.

Aufgabe (3 Punkte)

Wie viele Teilquadrate mit positiver Seitenlänge gibt es in einem Quadrat der Seitenlänge 5? Die Seiten der Teilquadrate sollen wie im Bild auf dem „Gitter“ liegen, ein einzelner Punkt gelte nicht als Quadrat.



Lösung

Die möglichen Seitenlängen sind $1, 2, 3, 4, 5$. Ein Unterquadrat ist durch die Lage des Eckes links oben eindeutig bestimmt, man muss bei fixierter Seitenlänge nur berücksichtigen, dass das Teilquadrat ganz im Grundquadrat liegt. Somit gibt es für die Seitenlänge 5 eine Möglichkeit, für die Seitenlänge 4 vier Möglichkeiten, für die Seitenlänge 3 neun Möglichkeiten, für die Seitenlänge 2 16 Möglichkeiten und für die Seitenlänge 1 25 Möglickeiten, Insgesamt gibt es also

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Unterquadrate.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Lösung

Wir beweisen die Existenz durch Induktion über n. Für $n = 2$ liegt eine Primzahl vor. Bei $n \geq 3$ ist entweder n eine Primzahl, und diese bildet die Primfaktorzerlegung, oder aber n ist keine Primzahl. In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Zerlegung $n = ab$ mit kleineren Zahlen $a, b < n$. Für diese Zahlen gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Zerlegung in Primfaktoren, und diese setzen sich zu einer Primfaktorzerlegung für n zusammen.

Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

Bestimme, welche der folgenden Wertetabellen Abbildungen $\varphi\colon L \to M$ zwischen den angegebenen Mengen festlegen. Welche sind injektiv, welche surjektiv, welche bijektiv?

1. $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	b	e	f	h	e	g	c	d

2. $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	c	e		d	e	a	b	a

3. $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(x)$	c	f	d	e	h	b	a

4. $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

x	3	7	1	4	6	8	5	2

$\varphi(x)\, c\, d\, f\, a\, e\, h\, b\, g$

Lösung

1. Es handelt sich um eine Abbildung. Diese ist nicht injektiv, da e zweifach getroffen wird, und nicht surjektiv, da a nicht getroffen wird.
2. Es handelt sich um keine Abbildung, da für die 3 kein Wert festgelegt ist.
3. Es handelt sich um eine Abbildung. Sie ist injektiv, aber nicht surjektiv (und somit nicht bijektiv), da g nicht getroffen wird.
4. Es handelt sich um eine Abbildung. Diese ist injektiv und surjektiv, also auch bijektiv.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Finde alle Lösungen $(a,b,c) \in K^3$, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cdot b &= c\,, \\ b \cdot c &= a\,, \\ a \cdot c &= b \end{aligned}$$

erfüllen.

Lösung

Wenn

$$a = 0$$

ist, so sind wegen der ersten und der dritten Gleichung auch b und c gleich 0. Dies ergibt die Lösung $(0,0,0)$. Es kann ansonsten nur noch Lösungen geben, wo alle Zahlen ungleich 0 sind. Wir setzen die erste Gleichung $c = a \cdot b$ in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$b \cdot (a \cdot b) = a\,.$$

Daraus folgt wegen $a \neq 0$ durch Kürzen

$$b^2 = 1\,.$$

Somit ist $b = 1$ oder $b = -1$. Entsprechende Überlegungen führen dazu, dass auch a und c nur 1 oder -1 sein können. Bei $b = 1$ folgt mit der ersten Gleichung

$$a = c\,.$$

Dies führt zu den Lösungen $(1,1,1)$ und $(-1,1,-1)$ (wobei letzteres wegen $(-1)^2 = 1$ in der Tat eine Lösung ist). Bei $b = -1$ ist

$$a = -c\,,$$

was zu den Lösungen

$$(1,-1,-1)$$

und

$$(-1,-1,1)$$

führt.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente reelle Folge beschränkt ist.

Lösung

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in \mathbb{R}$ und es sei ein $\epsilon > 0$ gewählt. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n<n_0}\{|x_n|, \ |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Daher ist B eine obere Schranke und $-B$ eine untere Schranke für $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

1. Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2\,.$$
2. Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2{,}5\,.$$

Lösung

1. Es ist
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6} < 2$$
und
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{44+6}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12} > 2\,.$$
Die Summe der ersten vier Stammbrüche ist also erstmals größer als 2.

2. Es ist
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{125+12+10}{60} = \frac{147}{60} = \frac{49}{20} < 2,5\,.$$
Wegen
$$\frac{1}{7} > \frac{1}{20}$$
ist die Summe der ersten sieben Stammbrüche größer als $2,5$.

Aufgabe (3 (1+2) Punkte)

Für die Eulersche Zahl e seien die Abschätzungen

$$2,71 \leq e \leq 2,72$$

bekannt.

1. Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^2 sagen?
2. Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^{-1} sagen?

Lösung

1. Es ist
$$2{,}71 \cdot 2{,}71 = 7{,}3441$$
und
$$2{,}72 \cdot 2{,}72 = 7{,}3984\,.$$
Somit ist
$$7{,}3441 \leq e^2 \leq 7{,}3984$$
und die Ziffernentwicklung von e^2 beginnt mit $7{,}3$, die zweite Nachkommaziffer liegt zwischen 3 und 9, über die weiteren Nachkommaziffern kann man keine Aussage machen.
2. Es ist

$$1 : 2{,}71 = 0{,}369\ldots$$

und

$$1 : 2{,}72 = 0{,}367\ldots\,.$$

Somit hat man die Abschätzungen

$$0{,}367 \leq e^{-1} \leq 0{,}370\,.$$

Die Dezimalentwicklung von e^{-1} beginnt also mit $0{,}36$, ($3{,}7$ ist ausgeschlossen, da die Division durch $2{,}71$ nicht auf die Periode 9 führt) die dritte Nachkommaziffer ist 7 oder 8 oder 9, über die folgenden Stellen kann man keine Aussage machen.

Aufgabe (5 Punkte)

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise K_1 und K_2, wobei K_1 den Mittelpunkt $(3, 4)$ und den Radius 6 und K_2 den Mittelpunkt $(-8, 1)$ und den Radius 7 besitzt.

Lösung

Die Kreisgleichungen der beiden Kreise sind

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25 = 36$$

und

$$(x+8)^2 + (y-1)^2 = x^2 + 16x + y^2 - 2y + 65 = 49\,.$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt

$$22x+6y+40=13\,.$$

Also ist

$$y=\frac{-22x-27}{6}\,.$$

Dies setzen wir in die erste Kreisgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} x^2-6x+\left(\frac{-22x-27}{6}\right)^2-8\frac{-22x-27}{6}-11 &= x^2+\frac{121}{9}x^2-6x+33x+\frac{81}{4}+\frac{88}{3}x+36-11 \\ &= \frac{130}{9}x^2+\frac{169}{3}x+\frac{181}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach der Lösungsformel für eine quadratische Gleichung ist

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\frac{169}{3}\pm\sqrt{\frac{28561}{9}-4\cdot\frac{130}{9}\cdot\frac{181}{4}}}{\frac{260}{9}} \\ &= \frac{-169\pm\sqrt{28561-130\cdot 181}}{\frac{260}{3}} \\ &= \frac{-3\cdot 169\pm 3\sqrt{28561-23530}}{260} \\ &= \frac{-507\pm 3\sqrt{5031}}{260} \\ &= \frac{-507\pm 9\sqrt{559}}{260}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-22x_1 - 27}{6} \\
&= \frac{-22\frac{-507+9\sqrt{559}}{260} - 27}{6} \\
&= -11\frac{-169+3\sqrt{559}}{260} - \frac{9}{2} \\
&= -\frac{33\sqrt{559}}{260} + \frac{11\cdot 13}{20} - \frac{9}{2} \\
&= -\frac{33\sqrt{559}}{260} + \frac{53}{20}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{-22x_2 - 27}{6} \\
&= \frac{-22\frac{-507-9\sqrt{559}}{260} - 27}{6} \\
&= -11\frac{-169-3\sqrt{559}}{260} - \frac{9}{2} \\
&= \frac{33\sqrt{559}}{260} + \frac{11\cdot 13}{20} - \frac{9}{2} \\
&= \frac{33\sqrt{559}}{260} + \frac{53}{20}.
\end{aligned}
$$

Die Schnittpunkte sind also

$$
\left(\frac{-507+9\sqrt{559}}{260}, -\frac{33\sqrt{559}}{260} + \frac{53}{20}\right)
$$

und

$$\left(\frac{-507 - 9\sqrt{559}}{260}, \frac{33\sqrt{559}}{260} + \frac{53}{20} \right).$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise die *Quotientenregel* für differenzierbare Funktionen.

Lösung

Wir betrachten zuerst den Fall $f = 1$ und behaupten

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Für einen Punkt a ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Da g nach Korollar 14.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. Somit ist mit der Produktregel

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \\ &= f\left(\frac{1}{g}\right)' + f'\frac{1}{g} \\ &= f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) + \frac{f'g}{g^2} \\ &= -\frac{f'g - fg}{g^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe weiter

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1\,.$$

1. Bestimme die erste und die zweite Ableitung von f.
2. Bestimme die lokalen Extrema von f.
3. Wie viele reelle Nullstellen hat f?
4. Wie viele komplexe Nullstellen hat f?
5. Bestimme eine Gleichung für die Tangente durch das lokale Maximum der Funktion.
6. Bestimme die Schnittpunkte der Tangente mit dem Funktionsgraphen.
7. Die Tangente und der Funktionsgraph beschränken ein endliches Gebiet. Berechne dessen Flächeninhalt.

Lösung

1. Es ist
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$
und
$$f''(x) = 6x + 2\,.$$

2. Wir bestimmen die Nullstellen der ersten Ableitung. Die Gleichung $3x^2 + 2x - 1 = 0$ bzw. $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ führt auf
$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}}{2} \\ &= \frac{-\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} \\ &= -1, \frac{1}{3}. \end{aligned}$$
Wegen
$$f''(-1) = -4 < 0$$
liegt an der Stelle -1 ein isoliertes lokales Maximum mit dem Wert 2 vor und wegen
$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 4 > 0$$
liegt an der Stelle $\frac{1}{3}$ ein isoliertes lokales Minimum mit dem Wert $\frac{22}{27}$ vor.

3. Aufgrund der Berechnung aus Teil (2) wissen wir, dass für
   $$x \geq -1$$
   die Funktion positiv ist. Für
   $$x \leq -1$$
   ist die Funktion streng wachsend und somit gibt es dort genau eine Nullstelle (da ein Polynom vom Grad 3 vorliegt oder wegen
   $$f(-2) = -1$$
   wissen wir, dass es negative Werte gibt).

4. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es über $\mathbb{C}$ eine Zerlegung des Polynoms in drei Linearfaktoren. Die reelle Nullstelle ist wegen dem dortigen strengen Wachstum keine mehrfache Nullstelle, somit muss es zumindest eine nichtreelle komplexe Nullstelle geben. Zu dieser ist auch die konjugiert-komplexe Zahl eine Nullstelle, also gibt es genau drei komplexe Nullstellen.

5. Die Tangente am lokalen Maximum $(-1, 2)$ hat die konstante Funktionsbeschreibung
   $$t(x) = 2\,,$$
   da ja die Ableitung von f an dieser Stelle 0 ist.

6. Es geht um die $x \in \mathbb{R}$ mit
   $$f(x) = 2$$
   bzw. mit
   $$f(x) - 2 = x^3 + x^2 - x - 1 = 0\,.$$
   Da wir die Lösung $x = -1$ schon kennen, können wir die Division mit Rest durchführen und erhalten
   $$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2-1) = (x+1)(x+1)(x-1)\,.$$

Die Schnittpunkte sind also $(-1, 2)$ und $(1, 2)$.

7. Im eingeschlossenen Gebiet verläuft der Funktionsgraph unterhalt der Tangente. Ihr Flächeninhalte berechnen wir, indem wir vom Inhalt des Rechteckes $[-1, 1] \times [0, 2]$ den Flächeninhalt unterhalb des Graphen abziehen. Wegen der lokalen Minimumsberechnung wissen wir, dass auf $[-1, 1]$ die Funktion positiv ist. Eine Stammfunktion zu f ist
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\,.$$
Somit ist
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}2 + 2 = \frac{7}{3}$$
und damit ist der gesuchte Flächeninhalt gleich
$$2 \cdot 2 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme für die Teilmenge

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11} \leq a_{22} \right\} \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})\,,$$

welche der Untervektorraumaxiome erfüllt sind und welche nicht.

Lösung

Die Nullmatrix erfüllt wegen

$$0 \leq 0$$

die angegebene Bedingung und gehört somit zu T. Wenn zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

zu T gehören, so ist $a_{11} \leq a_{22}$ und $b_{11} \leq b_{22}$. Damit ist auch

$$a_{11} + b_{11} \leq a_{22} + b_{22}$$

und somit gehört auch die Summe dieser Matrizen zu T. Dagen ist T nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen. Beispielsweise gehört $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu T, aber

$$(-1)C = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nicht.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & +y & +5z & +2w & = & 0 \\ 3x & -2y & +7z & -w & = & 0 \\ 2x & -y & -4z & +3w & = & 0 \end{array}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Gleichung die Variable y. Das resultierende System ist ($II' = II + 2I, \; III' = III + I$)

$$\begin{array}{cccccc} 2x & +y & +5z & +2w & = & 0 \\ 7x & & +17z & +3w & = & 0 \\ 4x & & +z & +5w & = & 0\,. \end{array}$$

Wir eliminieren nun aus II' mittels III' die Variable z, das ergibt

($II' - 17III'$)

$$\begin{array}{cccccc} 2x & +y & +5z & +2w & = & 0 \\ 4x & & +z & +5w & = & 0 \\ -61x & & & -82w & = & 0\,. \end{array}$$

Wir können jetzt dieses System lösen, wobei $x \neq 0$ die anderen Variablen eindeutig festlegt. Sei $x = 82$. Dann ist $w = -61$. Damit ist

$$z = -4x - 5w = -4 \cdot 82 - 5(-61) = -328 + 305 = -23\,.$$

Schließlich ist

$$y = -2x - 5z - 2w = -2(82) - 5(-23) - 2(-61) = -164 + 115 + 122 = 73\,.$$

Die Lösungsmenge, also der Kern, ist somit

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 82 \\ 73 \\ -23 \\ -61 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die zweite Zeile minus die erste Zeile ergibt den Standardvektor e_3, die dritte Zeile minus die vierte Zeile ergibt e_2. Die erste Zeile minus e_2 ergibt e_1 und die vierte Zeile minus e_3 ergibt e_4. Der durch die Zeilen erzeugte Untervektorraum ist also vierdimensional und somit ist der Rang gleich 4.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ist also

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}.$$