Prof. Dr. M. Chimani
L. Enz, J. Kirstein, T. Oelschlägel, F. Stutzenstein, N. Troost
https://kreuzerl.tcs.uos.de
Universität Osnabrück
Theoretische Informatik
Sommersemester 2020

Übungsblatt 10 zur Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 03. Juli 2020 Kreuzerl-Deadline: 12. Juli 2020

Aufgabe 10.1 Algorithmische Fragestellungen zu DEAs und DLBAs

DEAs und DLBAs können – analog zu Turingmaschinen, wie aus der Vorlesung bekannt – als Wort dargestellt werden. Für DLBAs $\mathcal{M}$ nutzen wir diese Kodierung $\mathbb{W}(\mathcal{M})$.

Sei A ein DEA mit Zuständen $Z_1, \ldots, Z_\alpha$, wobei Z_1 der Startzustand ist und die letzten β Zustände Endzustände sind. Sei $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_\gamma\}$. Es gibt δ Übergänge $U_1, \ldots, U_\delta$. Einen Übergang U_k von Z_i nach Z_j mit dem Symbol a_m kodieren wir als $\mathbb{U}(U_k) := \mathbb{B}(i) \diamond \mathbb{B}(j) \diamond \mathbb{B}(m)$. Dann definieren wir $\mathbb{W}_{\mathrm{DEA}}(A) := \mathbb{B}(\alpha) \diamond \mathbb{B}(\beta) \diamond \mathbb{B}(\gamma) \diamond \mathbb{B}(\delta) \diamond \mathbb{U}(U_1) \diamond \cdots \diamond \mathbb{U}(U_\delta)$.

(a) Seien $L_1 := \{\mathbb{W}_{\mathrm{DEA}}(A) \mid A \text{ ist ein DEA, dessen Zustände alle erreichbar sind}\}$ und $L_2 := \{\mathbb{W}_{\mathrm{DEA}}(A) \mid A \text{ ist ein DEA, der einen nicht erreichbaren Zustand hat}\}$.
Sind L_1 und L_2 entscheidbar? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

(b) Wir betrachten beliebige DLBAs $\mathcal{M}$ mit n Zuständen und Bandalphabet Γ. Es existiert eine berechenbare Funktion $f(\mathcal{M}, \ell) = \mathcal{O}(n \cdot \ell \cdot |\Gamma|^\ell)$ die die Anzahl der Schritte angibt, die ein DLBA, der auf einer Eingabe der Länge ℓ hält, maximal machen kann. Warum?

(c) Seien $L_1' := \{\mathbb{W}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ ist ein DLBA, dessen Zustände alle erreichbar sind}\}$ und $L_2' := \{\mathbb{W}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ ist ein DLBA, der einen nicht erreichbaren Zustand hat}\}$.
Zeigen Sie, dass L_1' semi-entscheidbar und L_2' co-semi-entscheidbar ist. Nutzen Sie dazu die Funktion $f(\mathcal{M}, \ell)$ aus Aufgabe **(b)**.

Aufgabe 10.2 Zeugen erzeugen

Gegeben sei das Problem VertexCover. Nehmen Sie an, Sie haben einen Entscheidungsalgorithmus $\mathcal{A}$ für VertexCover. Sie wissen *nichts* über diesen Algorithmus, außer, dass Sie ihn mit einer Instanz $\mathcal{I} = (G = (V, E), k)$ aufrufen können, und entsprechend korrekt `ja` oder `nein` als Ergebnis erhalten.

Sei $\mathcal{I}^*$ eine *JA*-Instanz. Wie können Sie mithilfe von $\mathcal{A}$ einen Zeugen ermitteln? Was ist die Laufzeit Ihres Algorithmus in $\mathcal{O}$-Notation, wenn Sie für $\mathcal{A}$ die gegebene Laufzeit $t_\mathcal{A}(\mathcal{I})$ annehmen?

Aufgabe 10.3 Technisch gesehen kein Märchen

Die Sprachwissenschaftler und Volkskundler Jacob Grimm (1785–1863) und Wilhelm Grimm (1786–1859) verbrachten viel Zeit damit, durch das Land zu reisen und sich für ihre Forschungen traditionell mündlich überlieferte Geschichten erzählen zu lassen. Sie sahen darin eine Möglichkeit, die geschichtliche Entwicklung der deutschsprachigen Literatur zu studieren. Aus diesen Studien ist die allseits bekannte Märchensammlung der *Kinder- und Hausmärchen* entstanden. Möglicherweise haben sich die Gebrüder Grimm auch mit dieser Fragestellung beschäftigt:

Man bemerkt schnell, dass gewisse Charaktere (Hexe, Zauberer, König, Prinzessin, ...) immer wieder auftreten. Für eine gegebene Charaktersammlung $\mathcal{C}$ und eine gegebene Menge von Märchen $\mathcal{M}$ lässt sich eindeutig zuordnen, welche Charaktere aus $\mathcal{C}$ in einem Märchen aus $\mathcal{M}$ auftreten und umgekehrt, in welchen Märchen aus $\mathcal{M}$ ein Charakter aus $\mathcal{C}$ auftritt.

MÄRCHENBUCH **Gegeben:** Eine Sammlung von Märchen (üblicherweise spricht man von einem *Märchenbuch*) $\mathcal{M}$, eine Charaktersammlung $\mathcal{C}$ und zwei natürliche Zahlen $k_\mathcal{M}, k_\mathcal{C} \in \mathbb{N}$. **Gefragt:** Gibt es (i) eine Menge $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ mit $\lvert\mathcal{M}'\rvert \leq k_\mathcal{M}$, sodass alle Charaktere aus $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}'$ auftreten *oder* (ii) eine Menge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ mit $\lvert\mathcal{C}'\rvert \leq k_\mathcal{C}$, sodass in allen Märchen aus $\mathcal{M}$ mindestens ein Charakter aus $\mathcal{C}'$ auftritt?

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem MÄRCHENBUCH NP-vollständig ist.

Hinweis: Bearbeiten Sie zunächst nur eine der Optionen (i) oder (ii). Wie können Sie die Reduktion so modifizieren, dass dies im Wesentlichen ausreicht?

Aufgabe 10.4 Tiefenbeschränkte ternäre Suchbäume

Zwei Knoten in einem ungerichteten Graph liegen in einer *Zusammenhangskomponente*, falls es zwischen ihnen einen Pfad gibt. Ein *Cliquengraph* ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten jeweils Cliquen sind.

(a)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph G, $k \in \mathbb{N}$. **Gefragt:** Gibt es ein $W \subseteq V$ mit $\lvert W\rvert \leq k$, sodass $G - W$ ein Cliquengraph ist?

(b) Eine *Aktion* ist entweder das Hinzufügen oder Löschen einer Kante.

Gegeben: Ein ungerichteter Graph G, $k \in \mathbb{N}$. **Gefragt:** Kann man durch höchstens k Aktionen einen Cliquengraph erzeugen?

Geben Sie je einen FPT-Algorithmus (bezüglich Parameter k) an, der das Problem entscheidet.

Aufgabe 10.5 TWITTERGREATNESS

Sie möchten den Twitteraccount von Präsident P. Murt analysieren. Ihnen ist bekannt, dass die Tweets entweder von P. Murt persönlich oder von seiner Presseabteilung formuliert werden.

Wir nennen einen Tweet *great*, wenn er mindestens 25% der Wahlberechtigten in Rage bringt. Ein Tweet heißt *covfefe*, wenn er niemanden in Rage bringt. Ein von P. Murt formulierter Tweet ist immer great; stammt ein Tweet von der Presseabteilung, ist er immer covfefe.

Sei n die Anzahl der Wahlberechtigten. Sie verfügen über ein Programm $\mathcal{P}$ (im folgenden *Umfrageprogramm*), das in polynomieller Zeit für einen gegebenen Tweet w und eine gegebene Person $p \in \{1, \ldots, n\}$ die Frage entscheidet: *Wird p von w in Rage gebracht?*

Betrachten Sie das folgende Problem:

TWITTERGREATNESS **Gegeben:** Tweet w; Anzahl der Wahlberechtigten n; Umfrageprogramm $\mathcal{P}$. **Gefragt:** Ist w great?

Geben Sie einen *RP*-Algorithmus für TWITTERGREATNESS mit Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens 1/2 an. Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten garantiert Ihr Algorithmus in den verschiedenen Fällen? Begründen Sie, dass es sich um einen *RP*-Algorithmus handelt.

Aufgabe 10.6 Gertrude running wild

Chemie-Grundlagen:
Dischwefelmonoxid (S_2O) besteht aus zwei S-Atomen und einem O-Atom.
Schwefeldioxid (SO_2) besteht aus einem S-Atom und zwei O-Atomen.

Der autonome Roboter *Gertrude* befindet sich auf einem fremden Planeten. Vor ihm liegt ein See, bestehend aus $3n$ Atomen. Er weiß, dass der See entweder komplett aus Dischwefelmonoxid oder komplett aus Schwefeldioxid besteht. Mit den vorhandenen Geräten ist *Gertrude* in der Lage, in konstanter Zeit ein zufälliges Atom (also S oder O, unabhängig von vorherigen Messungen) zu entnehmen und daraufhin zu erkennen. Das Atom wird danach nicht wieder dem See hinzugefügt; eventuell auftretende chemische Reaktionen der übrigen Atome werden vernachlässigt.

(a) Geben sie die Anzahl an Messvorgängen an, die benötigt wird, um mithilfe eines deterministischen Algorithmus zu entscheiden aus welchem Stoff der See (vor den Messungen) bestand.

(b) Geben Sie einen *BPP*-Algorithmus mit Erfolgswahrscheinlichkeit größer (!) als $2/3$ an.

Hinweis: Durch geschickte Argumentation lassen sich die Rechnungen so durchführen, als würde ein entnommenes Atom doch wieder dem See hinzugefügt werden.

Kia waimarie!