Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/11/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	4	2	3	4	3	4	5	5	3	3	3	5	4	4	1	3	64

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.

2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.
3. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *lineare* Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
6. Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix M über einem Körper K.

Lösung

1. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.
2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
   $$\vert x - x_n \vert \leq \epsilon$$
   gilt.
3. Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes

$$\lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert.

4. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf I, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.
5. Eine Abbildung
   $$\varphi : V \longrightarrow W$$
   heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   1. $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   2. $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.
6. Die Matrix M heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit
   $$A \circ M = E_n = M \circ A$$
   gibt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Interpolation durch Polynome*.
2. Der *Zwischenwertsatz*.
3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

1. Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.
2. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $y \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.
3. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Im Pokal spielt Bayern München gegen den TSV Wildberg. Der Trainer vom TSV Wildberg, Herr Tor Acker, sagt „Wir haben in dem Spiel nichts zu verlieren“. Die Logiklehrerin von Wildberg, Frau Loki Schummele, sagt „Wenn die Wildberger in dem Spiel nichts zu verlieren haben, dann haben auch die Münchner in dem Spiel nichts zu gewinnen“. Der Trainer von Bayern München, Herr Roland Rollrasen, sagt „Wir haben in dem Spiel etwas zu gewinnen“.

1. Ist die Aussage von Frau Schummele logisch korrekt?
2. Es sei vorausgesetzt, dass die Aussage des Bayerntrainers wahr ist. Welche Folgerung kann man dann für die Aussage von Herrn Acker ziehen?

Lösung

1. Die Aussage ist logisch korrekt.
2. Die Kontraposition der korrekten Aussage aus Teil (1) ist: Wenn die Münchner in dem Spiel etwas zu gewinnen haben, dann haben die Wildberger in dem Spiel etwas zu verlieren. Da der Vordersatz, der die Aussage des Bayerntrainers ist, vorausgesetzt werden soll, so folgt mit Modus Ponens, dass die Wildberger in dem Spiel etwas zu verlieren haben. Dies steht im Widerspruch zur Aussage des Trainers von Wildberg, seine Aussage ist also falsch.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2-17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Lösung

Eine ungerade Zahl n besitzt die Form $n=2k+1$ mit einer ganzen Zahl k. Somit ist

$$\begin{aligned} 25n^2-17 &= 25(2k+1)^2-17 \\ &= 25(4k^2+4k+1)-17 \\ &= 25\cdot 4\cdot k(k+1)+25-17 \\ &= 25\cdot 4\cdot k(k+1)+8. \end{aligned}$$

Die 8 hinten ist ein Vielfaches von 8. Genau eine der beiden Zahlen k und $k+1$ ist gerade, also von der Form $2m$. Daher ist $4\cdot k(k+1)$ ein Vielfaches von 8 und somit ist die gesamte Zahl ein Vielfaches von 8.

Aufgabe (2 Punkte)

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5\mathrm{i})z = (3-7\mathrm{i})$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} z &= (3-7\mathrm{i})(2+5\mathrm{i})^{-1} \\ &= (3-7\mathrm{i})\frac{(2-5\mathrm{i})}{29} \\ &= \frac{6-35-14\mathrm{i}-15\mathrm{i}}{29} \\ &= \frac{-29-29\mathrm{i}}{29} \\ &= -1-\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Der Betrag ist

$$|-1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

Lösung

Mit der Formel für die geometrische Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3} .$$

Ferner ist

$$\sum_{n=0}^{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25+10+4}{25} = \frac{39}{25} .$$

Also ist insgesamt

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{3} - \frac{39}{25} = \frac{125-117}{75} = \frac{8}{75} .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Lösung

Die Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k \,.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Lösung

Wegen $f(0) = 1$ und $f(1) = -1$ muss nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[0,1]$ eine Nullstelle von f liegen.

Die Intervallmitte ist $\frac{1}{2}$, dort hat f den Wert

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-12+8}{8}=-\frac{3}{8}\,.$$

Dies ist negativ, also muss eine Nullstelle im Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ liegen.

Die Intervallmitte von diesem Intervall ist $\frac{1}{4}$, dort hat f den Wert

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3-3\left(\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1-48+64}{64}=\frac{17}{64}\,.$$

Dies ist positiv, also muss eine Nullstelle im Intervall $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ liegen.

Die Intervallmitte von diesem Intervall ist $\frac{3}{8}$, dort hat f den Wert

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{3}{8}\right)^3-3\left(\frac{3}{8}\right)+1=\frac{27-576+512}{512}=-\frac{37}{512}\,.$$

Dies ist negativ, also muss eine Nullstelle im Intervall $[\frac{1}{4},\frac{3}{8}]=[\frac{2}{8},\frac{3}{8}]$ liegen. Die Länge dieses Intervalls ist $\frac{1}{8}$.

Aufgabe (4 (2+2) Punkte)

Es seien die beiden Polynome

$$P=X^2+3X-5 \;\text{ und }\; Q=X^2-4X+7$$

gegeben.

a) Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

b) Berechne die Ableitung von $P(Q)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned}P(Q) &= (X^2-4X+7)^2+3(X^2-4X+7)-5\\ &= X^4+16X^2+49-8X^3+14X^2-56X+3X^2-12X+21-5\\ &= X^4-8X^3+33X^2-68X+65.\end{aligned}$$

b) Die Ableitung von $P(Q)$ ist

$$(X^4-8X^3+33X^2-68X+65)' = 4X^3-24X^2+66X-68\,.$$

Es ist $P' = 2X+3$ und

$$P'(Q) = 2(X^2-4X+7)+3 = 2X^2-8X+17\,.$$

Nach der Kettenregel ist daher

$$\begin{aligned}(P(Q))' &= P'(Q)\cdot Q'\\ &= (2X^2-8X+17)(2X-4)\\ &= 4X^3-8X^2-16X^2+32X+34X-68\\ &= 4X^3-24X^2+66X-68.\end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1\,.$$

Skizziere die Situation.

Lösung

Aufgrund des Strahlensatzes muss die Beziehung

$$\frac{f(x)}{x - s(x)} = \frac{f(x+1)}{x+1-s(x)}$$

gelten. Wegen

$$f(x+1) = f(x)f(1)$$

folgt daraus

$$\frac{1}{x - s(x)} = \frac{f(1)}{x+1-s(x)}\,.$$

Umstellen ergibt

$$f(1)(x-s(x)) = x+1-s(x)$$

und

$$x(f(1)-1) = s(x)(f(1)-1)$$

und schließlich

$$s(x) = x - \frac{1}{f(1)-1}\,.$$

Somit ist auch

$$s(x+1) = x+1-\frac{1}{f(1)-1}$$

und daher ist

$$s(x+1)-s(x) = x+1-\frac{1}{f(1)-1}-\left(x-\frac{1}{f(1)-1}\right) = 1\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right).$$

Lösung

Für $n = 1$ ist nach der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{g_1}\right)' = -\frac{g_1'}{g_1^2} = -\frac{1}{g_1} \cdot \frac{g_1'}{g_1}.$$

Zum Induktionsschluss sei die Aussage für n Funktionen schon bewiesen, und seien $n+1$ Funktionen gegeben. Dann ist aufgrund der Produktregel und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}}\right)' &= \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \frac{1}{g_{n+1}}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' \cdot \frac{1}{g_{n+1}} + \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{1}{g_{n+1}}\right)' \\
&= -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right) \cdot \frac{1}{g_{n+1}} + \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(-\frac{1}{g_{n+1}} \cdot \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}}\right) \\
&= -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right) - \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}} \\
&= -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n} + \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(x) = x + \sin x$ streng wachsend ist.

Lösung

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 1 + \cos x \, .$$

Wegen

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

ist $f'(x) \geq 0$, und da der Kosinus nur bei reellen Zahlen der Form $\pi + n2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ den Wert -1 besitzt, besitzt f' nur dort eine Nullstelle. Nach Satz 15.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (2) (angewendet auf ein beliebiges beschränktes Teilintervall) ist die Funktion streng wachsend.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 2 zur Funktion $f(x) = e^{x^3}$ im Nullpunkt.

Lösung

Die relevanten Ableitungen sind

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

und

$$f''(x) = 6xe^{x^3} + 9x^4e^{x^3}.$$

Daher ist $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$. Das Taylor-Polynom zu dieser Funktion im Nullpunkt ist daher das konstante Polynom 1.

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Lösung

Für x zwischen 0 und 1 ist $0 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$ und für $x \geq 1$ ist $x^2 \geq \sqrt{x}$. Die eingeschlossene Fläche liegt also innerhalb des Einheitsquadrates. Daher ist der Flächeninhalt gleich dem bestimmten Integral der Wurzelfunktion von 0 bis 1 minus dem bestimmten Integral (in den gleichen Grenzen) zur Parabel. Daher ist der Flächeninhalt gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_0^1 - \frac{1}{3}x^3|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei W ein n-dimensionaler K-Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

Lösung

Es sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U und $v_1, \ldots, v_s$ eine Basis von V. Wir betrachten die Familie der Vektoren

$$u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s.$$

Wegen $r + s > n$ kann diese Familie nicht linear unabhängig sein, da es sonst einen $(r + s)$-dimensionalen Untervektorraum von W geben würde. Also gibt es Koeffizienten $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, die nicht alle 0 sind, mit

$$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r = b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s.$$

Dieser Vektor gehört zu $U \cap V$. Er ist nicht 0, da andernfalls beidseitig alle Koeffizienten 0 sein müssten.

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 4x & +2y & -z & +2w & = & 3 \\ x & +y & +2z & -w & = & 1 \\ -x & & -z & +3w & = & 2 \\ 3x & & +3z & -2w & = & 0\,. \end{array}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable y, indem wir die zweite Gleichung zweimal von der ersten Gleichung abziehen . Dies führt auf

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x & & -5z & +4w & = & 1 \\ -x & & -z & +3w & = & 2 \\ 3x & & +3z & -2w & = & 0\,. \end{array}$$

Nun eliminieren wir die Variable x, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $2II+I$ und $3II+III$ ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{array}{rrcr} -7z & +10w & = & 5 \\ & +7w & = & 6\,. \end{array}$$

Es ergibt sich

$$7w=6$$

und

$$w=\frac{6}{7}\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$z=\frac{25}{49}\,,$$
$$x=\frac{3}{49}$$

und

$$y = -\frac{38}{49}\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (1 Punkt)

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Zu zwei quadratischen $n \times n$-Matrizen M, N gilt für die charakteristischen Polynome die Beziehung

$$\chi_{M \circ N} = \chi_M \chi_N \, .$$

Nach Definition ist nämlich

$$\chi_{M \circ N} = \det \left(X E_n - M \circ N \right) = \det \left(X E_n - M \right) \det \left(X E_n - N \right) = \chi_M \cdot \chi_N \, ,$$

wobei die mittlere Gleichung auf dem Determinantenmultiplikationssatz beruht“.

Lösung

Es ist

$$XE_n - M \circ N \neq (XE_n - M) \circ (XE_n - N)\,,$$

daher ist der Determinantenmultiplikationssatz nicht anwendbar.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0$$

ist.

Lösung

Sei $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi)$. Dann ist

$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v\,.$$

Also ist

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0\,,$$

woraus wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ direkt $v = 0$ folgt.