Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/15/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	$\sum$
Punkte	3	3	4	5	2	3	3	3	0	3	5	7	0	4	0	0	6	51

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Ein *angeordneter* Körper.
3. Die *reelle Exponentialfunktion*.
4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Eine *stetig differenzierbare* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz von Euklid* über Primzahlen.
2. Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
3. Der Satz über Basiswechsel bei einem Endomorphismus.

Aufgabe * (4 (2+1+1) Punkte)

Folgende Aussagen seien bekannt.

1. Der frühe Vogel fängt den Wurm.

2. Doro wird nicht von Lilly gefangen.
3. Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
4. Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
5. Doro ist ein Wurm.
6. Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
7. Lilly schläft bis 5 Uhr am Morgen und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

1. Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
2. Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
3. Fängt der späte Igel den Wurm?

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien zwei rationale Zahlen $x < y$ gegeben. Zeige, dass für jede positive natürliche Zahl n die rationale Zahl

$$z_n := \frac{x+ny}{1+n}$$

echt zwischen x und y liegt. In welcher Relation stehen die Zahlen z_n zueinander?

Aufgabe * (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

mit Hilfe des allgemeinen binomischen Lehrsatzes.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der durch

$$y = 3x - 2$$

gegebenen Geraden.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen über die Funktionslimiten für die Differenzenquotienten.

Aufgabe * (7 (1+1+3+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (6 (2+3+1) Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.