Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/18/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	3	2	7	4	3	4	2	1	5	0	4	0	3	5	0	5	55

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Gaußklammer* einer reellen Zahl x.
2. Eine *streng fallende* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Eine *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von reellen Zahlen a_k.
4. Die *höheren Ableitungen* zu einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   (rekursive Definition).
5. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
6. Eine *lineare* Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Summenregel* für reelle Folgen.
2. Die *Produktregel* für differenzierbare Funktionen
   $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$
3. Der Satz über den Zusammenhang zwischen der Verknüpfung linearer Abbildungen und der Matrizenmultiplikation (genaue Formulierung mit Basen).

Aufgabe * (1 Punkt)

Wir betrachten den Satz „Lucy Sonnenschein tanzt auf allen Hochzeiten“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

Aufgabe * (3 Punkte)

Die Zahlen

$$n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$$

werden abwechselnd mit einem oder keinem Minuszeichen versehen, wobei n kein Minuszeichen bekommt. Was ist die Summe dieser Zahlen?

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

1. Zeige, dass für positve reelle Zahlen a, b die Abschätzung
   $$\frac{1}{\vert a+b \vert} \leq \max\left(\frac{1}{\vert a \vert}, \frac{1}{\vert b \vert}\right)$$
   gilt.
2. Zeige, dass es reelle Zahlen a, b mit $a, b, a+b \neq 0$ und mit
   $$\frac{1}{\vert a+b \vert} > \max\left(\frac{1}{\vert a \vert}, \frac{1}{\vert b \vert}\right)$$
   gibt.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise die Division mit Rest im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

wachsend ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x \neq 0$. Zeige, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$$

ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises E mit dem Kreis K, der den Mittelpunkt $(1,0)$ und den Radius 2 besitzt.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \, x \longmapsto f(x) = \pi^x + x^e.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Wir betrachten eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = g(x) \sin x + h(x) \cos x \,,$$

wobei g und h lineare Polynome seien. Zeige durch Induktion, dass für die Ableitungen ($n \geq 0$) die Beziehung

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}((g(x) + nh'(x)) \sin x + (-ng'(x) + h(x)) \cos x) \text{ für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{(n-1)/2}((ng'(x) - h(x)) \sin x + (g(x) + nh'(x)) \cos x) \text{ für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gilt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $L_a \subseteq \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssystems

$$5x + ay + (1-a)z = 0 \,,$$
$$2ax + a^2 y + 3z = 0 \,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 (1+1+1) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige

$$M^2 = E_2 .$$

b) Bestimme die inverse Matrix zu M.

c) Löse die Gleichung

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Es seien v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 Vektoren in V, die jeweils paarweise linear unabhängig seien. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ derart gibt, dass

$$\varphi(v_i) \in Kw_i$$

für $i = 1, 2, 3$ gilt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, v \longmapsto Mv.$$