Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/21/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	6	4	4	4	2	4	0	0	5	0	2	4	0	5	0	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Ein *Polynom* über einem Körper K in einer Variablen X.

3. Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
4. Der *Arkussinus*.
5. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
6. Der *Kern* einer linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Nullstellensatz*.
2. Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion*.
3. Der Satz über die Eigenschaft der Determinante, *alternierend* zu sein (mit Erläuterung).

Aufgabe * (2 Punkte)

Anna kann sich nicht zwischen Heinrich und Konrad entscheiden, deshalb lässt sie sich vom Zufall leiten. Sie wohnt an einer U-Bahn-Station der Linie 5, die von Heinsheim nach Konsau fährt. Heinrich wohnt in Heinsheim und Konrad in Konsau. Wenn Anna Lust auf ein Date hat, geht sie einfach zu ihrer Station und nimmt die erstbeste U-Bahn, die gerade kommt. Die U-Bahnen fahren in beide Richtungen im Zehn-Minuten-Takt und die U-Bahnen nach Heinsheim fahren $:01, :11, :21$ etc. Nach einiger Zeit stellt Anna fest, dass sie Konrad viermal so häufig besucht wie Heinrich. Wann fahren die U-Bahnen nach Konsau ab?

Aufgabe * (2 Punkte)

1. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in genau drei Punkten schneiden.
2. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in keinem Punkt schneiden.
3. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.
4. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in sechs Punkten schneiden.

Aufgabe * (6 (3+3) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine bijektive Abbildung mit der Umkehrfunktion f^{-1}. Zeige die folgenden Aussagen.

1. f ist genau dann streng wachsend, wenn f^{-1} streng wachsend ist.
2. f ist genau dann streng fallend, wenn f^{-1} streng fallend ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \, .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ gilt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2,3)$ und $(5,-7)$ verläuft.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $v_1, v_2, v_3, \ldots$ eine Aufzählung (ohne Wiederholung) der Elemente aus V. Nach wie vielen Elementen kann man sich sicher sein, dass diese ein Erzeugendensystem von V sind?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A, B, C und D schreiben kann. Zeige durch ein Beispiel, dass die Beziehung

$$\det M = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe (0 Punkte)