Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/55/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	4	5	3	2	2	2	0	3	5	0	4	5	4	1	3	51

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $+\infty$.

3. Der *Tangens*.
4. Die *Taylor-Reihe* im Punkt a zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.
5. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Die *Matrizenmultiplikation*.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quotientenkriterium* für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
2. Die Beziehung zwischen differenzierbar und stetig.
3. Der Satz über die Anzahl von Basiselementen.

Aufgabe * (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	w

w f w

f w w

f f f

Aufgabe * (1 Punkt)

Berechne

$$(-1)^{73420504063658}.$$

Aufgabe * (4 (2+2) Punkte)

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & B \\ \downarrow & & \downarrow h \\ C & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

von Mengen und Abbildungen, d.h. es gilt

$$h \circ \varphi = \psi \circ g \, .$$

Es seien g und h bijektiv.

1. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ injektiv ist.
2. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn ψ surjektiv ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Zeige, dass für $n \geq 3$ die Abschätzung

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n$$

gilt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und man gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}\,.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gelte $x \leq \epsilon$. Zeige $x = 0$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Drücke

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{7}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r und ein $s > r$ gegeben. Für welches $x \in \mathbb{R}$ verläuft die Tangente zu x an den oberen Kreisbogen durch den Punkt $(s,0)$?

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise die *Quotientenregel* für differenzierbare Funktionen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{matrix} x & +7y & -z & -3w & = & 0 \\ x & +y & +2z & -w & = & 1 \\ & +2y & -3z & +2w & = & 3 \\ & -y & -5z & +4w & = & -2\,. \end{matrix}$$

Aufgabe * (5 (1+1+1+1+1) Punkte)

Es sei $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ eine Basis eines K-Vektorraumes V. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ von 0 verschiedene Elemente.

a) Zeige, dass $\mathfrak{w} = a_1 v_1, a_2 v_2, a_3 v_3, \ldots, a_n w_n$ ebenfalls eine Basis von V ist.

b) Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}}$.

c) Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$.

d) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ besitzt.

e) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix}$

besitzt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Determinante zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.