Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/13/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	$\sum$
Punkte	3	3	1	2	5	3	6	3	7	3	3	5	3	4	9	4	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.
2. Eine *rationale Funktion* (in einer Variablen über $\mathbb{R}$).
3. Die reelle *Exponentialfunktion* zu einer Basis $b > 0$.
4. Eine *obere Treppenfunktion* zu einer Funktion
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.
6. *Ähnliche* Matrizen $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Regel für die inverse Folge* einer reellen Folge.
2. Das *Cauchykriterium für Reihen.*
3. Die Ableitung des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe * (1 Punkt)

Negiere die Aussage „Martina findet alle Jungs im Kurs außer Markus zuckersüß“ durch eine Aussage, in der eine Existenzaussage und eine Oder-Verknüpfung vorkommen.

Aufgabe * (2 Punkte)

1. Wie viele Minuten sind ein Fünftel einer Stunde?
2. Wie viel Prozent von einer Stunde sind 45 Minuten?
3. Wie viele Minuten sind 90% einer Stunde?
4. Wie viel Prozent von einer Stunde ist ein Tag?

Aufgabe * (5 (1+3+1) Punkte)

Zu je zwei Punkten in der Produktmenge $\mathbb{Q}^2$ gibt es eine Verbindungsgerade und einen Mittelpunkt, der die Verbindungsstrecke halbiert.

1. Man gebe zu zwei Punkten (a_1, a_2) und (b_1, b_2) die Koordinaten des Mittelpunktes an.
2. Es seien in der Produktmenge $\mathbb{Z}^2$ fünf Punkte gegeben (jeder Punkt habe also ganzzahlige Koordinaten). Zeige, dass mindestens einer der Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten haben muss.
3. Gilt die Eigenschaft aus (2) auch bei vier Punkten?

Aufgabe * (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5.$$

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise die folgende Aussage: Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

konvergiert.

Aufgabe * (7 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Man erläutere die Begriffe *hinreichende* und *notwendige Bedingung* anhand typischer Beispiele.

Aufgabe * (5 (1+1+3) Punkte)

Wir betrachten die Standardparabel, also den Graphen zur Funktion

$$f(x) = x^2 .$$

1. Bestimme die Ableitung und die Tangente t_a von f in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
2. Bestimme den Schnittpunkt einer jeden Tangenten t_a mit der x-Achse in Abhängigkeit von a. Skizziere die Situation.
3. Die Parabel, die Tangente t_a und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne deren Flächeninhalt in Abhängigkeit von a.

Aufgabe * (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$4x - 5y + 7z = -3 \, ,$$
$$-2x + 4y + 3z = 9 \, ,$$
$$x = -2 \, .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V, \, (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(6) \;\; r(su) = (rs)u$$

erfüllt.

Aufgabe * (9 (1+1+7) Punkte)

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

P_1	P_2	P_3	P_4
6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

R_1	R_2	R_3
12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.