Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/53/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	2	4	2	3	3	3	5	4	0	2	5	3	4	1	3	54

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *wachsende* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
3. Ein *lokales Maximum* einer Funktion
   $$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
   ($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) in einem Punkt $x \in D$.
4. Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.
6. Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix M.

Lösung

1. Die Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   heißt *wachsend*, wenn

$$f(x') \geq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt.}$$

2. Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$
heißt die *geometrische Reihe* in x.

3. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung
$$f(x) \geq f(x')$$
gilt.

4. Das Polynom
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f in a.

5. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung
$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$
nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.

6. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch
$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die stetige Umkehrfunktion*.

2. Die *Taylor-Abschätzung*.

3. Der Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Lösung

1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine stetige,streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J := f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung
   $$f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$
   ist ebenfalls stetig.
2. Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(|f^{(n+1)}(c)|,\, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung
   $$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k| \leq \frac{B}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\,.$$
3. Unter den gegebenen Bedingungen besitzt V eine endliche Basis.

Aufgabe (2 Punkte)

Die Absetzmulde ist voll mit Schutt und soll durch eine leere Mulde ersetzt werden, die das Absetzkipperfahrzeug bringt, das auch die volle Mulde mitnehmen soll. Auf dem Fahrzeug und auf dem Garagenvorplatz, wo die volle Mulde steht, ist nur Platz für eine Mulde. Dafür kann die Straße als Zwischenablage genutzt werden. Wie viele Ladevorgänge sind vor Ort nötig, bis der Gesamtaustausch vollständig abgeschlossen ist?

Lösung

1. Leere Mulde auf dem Straßenplatz A abladen.
2. Volle Mulde auf Fahrzeug hochladen.
3. Volle Mulde auf dem Straßenplatz B abladen.
4. Leere Mulde auf Fahrzeug hochladen.
5. Leere Mulde auf den Garagenvorplatz abladen.

6. Volle Mulde auf Fahrzeug hochladen.

Es sind also sechs Ladevorgänge nötig.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

1. injektiv?
2. surjektiv?

Lösung

1. Wegen
$$1^2 = (-1)^2$$
ist die Abbildung nicht injektiv.
2. Da alle Quadrate ≥ 0 sind, werden negative Zahlen durch die Abbildung nicht erreicht. Die Abbildung ist also nicht surjektiv.

Aufgabe (2 Punkte)

Lucy Sonnenschein befindet sich in Position $(-2,3) \in \mathbb{Z}^2$ (die Koordinaten seien mit x und y bezeichnet) und schaut in die positive x-Richtung. Alle folgenden Angaben beziehen sich auf ihre jeweilige Position und ihre Ausrichtung, der Uhrzeigersinn bezieht sich auf die Draufsicht. Lucy führt hintereinander folgende Bewegungen aus. Sie macht einen Schritt nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, sie dreht sich um 180 Grad, macht drei Schritte nach links, macht eine Vierteldrehung im Uhrzeigersinn, macht vier Schritte nach rechts und zwei Schritte nach hinten, dreht sich um 360 Grad und macht einen Schritt nach links.

Wo befindet sie sich nach der Gesamtbewegung und in welche Richtung schaut sie?

Lösung

Sie befindet sich in Position $(-1,-3)$ und schaut in die positive y-Richtung.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Lösungsintervalle für die Ungleichung

$$|2x-3| \geq |5x-7|$$

in einem angeordneten Körper. Skizziere die Graphen der Funktionen $|2x-3|$ und $|5x-7|$.

Lösung

Entscheidend sind die beiden Grenzen $\frac{3}{2}$ und $\frac{7}{5}$ mit

$$\frac{7}{5} < \frac{3}{2}.$$

Wenn

$$x \leq \frac{7}{5}$$

ist, so muss man für beide Beträge das Negative nehmen. Dies führt zur Bedingung

$$-(2x-3) \geq -(5x-7)$$

und damit zu

$$2x-3 \leq 5x-7$$

und zu

$$4 \leq 3x,$$

also

$$x \geq \frac{4}{3}.$$

Das Intervall $[\frac{4}{3}, \frac{7}{5}]$ gehört also zur Lösungsmenge. Sei nun

$$\frac{7}{5} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Dann ist der linke Betrag negativ und der rechte positiv zu nehmen. Dies führt zur Bedingung

$$-(2x-3) \geq 5x-7$$

und damit zu

$$-2x+3 \geq 5x-7$$

und zu

$$10 \geq 7x\,,$$

also

$$x \leq \frac{10}{7}\,.$$

Es ist

$$\frac{7}{5} \leq \frac{10}{7} \leq \frac{3}{2}$$

und somit gehört das Intervall $[\frac{7}{5}, \frac{10}{7}]$ zur Lösungsmenge. Sei nun

$$x \geq \frac{3}{2}\,.$$

Dann sind beide Beträge positiv zu nehmen. Die Bedingung

$$2x-3 \geq 5x-7$$

führt auf

$$x \leq \frac{4}{3}\,,$$

was in diesem Fall nicht erfüllbar ist. Die gesamte Lösungsmenge ist also das Intervall

$$[\frac{4}{3}, \frac{10}{7}].$$

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei

$$\varphi(x) = 3x^2 - 7x + 5\,.$$

Bestimme $\varphi(u^2 - 2v)$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\varphi\left(u^2-2v\right) &= 3\left(u^2-2v\right)^2-7\left(u^2-2v\right)+5\\ &= 3\left(u^4-4u^2v+4v^2\right)-7\left(u^2-2v\right)+5\\ &= 3u^4-12u^2v+12v^2-7u^2+14v+5.\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f=a+bX+cX^2$$

mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-2)=3,\ f(0)=2,\ f(1)=4.$$

Lösung

Die Bedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}&a-2b+4c=3\,,\\ &a=2\,,\\ &a+b+c=4\,.\end{aligned}$$

$2III+I$ führt auf

$$3a+6c=11\,,$$

also

$$c=\frac{5}{6}\,.$$

In III eingesetzt ergibt sich

$$b=4-2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}\,.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$2+\frac{7}{6}X+\frac{5}{6}X^2.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Vergleiche

$$\sqrt{3}+\sqrt{7} \text{ und } \sqrt{4}+\sqrt{6}.$$

Lösung

Wir fragen uns, ob

$$\sqrt{3}+\sqrt{7} < 2+\sqrt{6}$$

ist. Dies ist, da das Quadrieren von positiven Zahlen eine Äquivalenzumformung für die Größenbeziehung ist, äquivalent zu

$$3+7+2\sqrt{21} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 < \left(2+\sqrt{6}\right)^2 = 4+6+4\sqrt{6}\,.$$

Dies ist durch Subtraktion mit 10 äquivalent zu

$$2\sqrt{21} < 4\sqrt{6}$$

bzw. zu

$$\sqrt{21} < 2\sqrt{6}\,.$$

Mit erneutem Quadrieren ist dies äquivalent zu

$$21 < 4 \cdot 6 = 24\,,$$

was stimmt. Also ist

$$\sqrt{3}+\sqrt{7} < 2+\sqrt{6}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Summenfolge $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

ist.

Lösung

Es seien x bzw. y die Grenzwerte der beiden Folgen. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der ersten Folge gibt es zu

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$$

ein n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon'$$

gilt. Ebenso gibt es wegen der Konvergenz der zweiten Folge zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ ein n_0' derart, dass für alle $n \geq n_0'$ die Abschätzung

$$|y_n - y| \leq \epsilon'$$

gilt. Sei

$$N = \max\left(n_0, n_0'\right).$$

Dann gilt für alle $n \geq N$ (unter Verwendung der Dreiecksungleichung) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (x+y)| &= |x_n + y_n - x - y| \\ &= |x_n - x + y_n - y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \epsilon' + \epsilon' \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Man gebe explizit ein m mit der Eigenschaft an, dass für alle $n \geq m$ die Abschätzung

$$1,03^n \geq n^2$$

gilt.

Lösung

Mit dem allgemeinen binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{aligned} 1{,}03^n &= (1+0{,}03)^n \\ &= 1 + n \cdot 0{,}03 + \binom{n}{2} 0{,}03^2 + \binom{n}{3} 0{,}03^3 + \ldots \\ &\geq \binom{n}{3} 0{,}03^3 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{27}{1000000} \\ &= n^2 \cdot \left(\frac{(n-1)(n-2)}{6n} \cdot \frac{27}{1000000} \right). \end{aligned}$$

Dies soll $\geq n^2$ werden, was man dadurch erreichen kann, dass der Klammerausdruck rechts ≥ 1 wird. Dieser Ausdruck ist

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(n-2)}{6n} \cdot \frac{27}{1000000} &= \frac{n^2-3n+2}{n} \cdot \frac{9}{2000000} \\ &= \left(n - 3 + \frac{2}{n} \right) \cdot \frac{9}{2000000} \\ &\geq (n-3) \cdot \frac{9}{2000000}. \end{aligned}$$

Die Bedingung

$$(n-3) \cdot \frac{9}{2000000} \geq 1$$

wird zu

$$n \geq \frac{2000000}{9} + 3\,,$$

was jedenfalls bei

$$n \geq 300000$$

erfüllt ist. Man kann also beispielsweise

$$m = 300000$$

nehmen.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz von Rolle.

Lösung

Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in \,]a,b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 11.13 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gibt es ein $c \in [a,b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 15.3 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)).

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Finde den oder die Fehler im folgenden „Beweis" für die Aussage, dass man zu zwei stetigen Funktionen

$$f,g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine Stammfunktion zu fg finden kann, indem man (geeignete) Stammfunktionen zu f und zu g miteinander multipliziert.

„Es sei F eine Stammfunktion zu f und G eine Stammfunktion zu g, die wir beide positiv wählen, was wegen der Positivität von f und g möglich ist. Für positive Zahlen ist der natürliche Logarithmus definiert, so dass man diese Funktionen mit dem Logarithmus verknüpfen kann. Dann ist $\ln F$ eine Stammfunktion von $\ln f$ und $\ln G$ eine Stammfunktion von $\ln g$. Nach der Additionsregel für Stammfunktionen ist somit $\ln F + \ln G$ eine Stammfunktion von $\ln f + \ln g$. Wir wenden auf diese Situation die Umkehrfunktion des Logarithmus, also die Exponentialfunktion an, und erhalten mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass

$$\exp(\ln F + \ln G) = \exp(\ln F) \cdot \exp(\ln G) = F \cdot G$$

eine Stammfunktion von

$$\exp(\ln f + \ln g) = \exp(\ln f) \cdot \exp(\ln g) = f \cdot g$$

ist."

Lösung

Es gibt zwei Fehler: Wenn F eine Stammfunktion zu f ist, so muss $\ln F$ keine Stammfunktion zu $\ln f$ sein (dies wird für f und für g verwendet), und wenn H eine Stammfunktion zu h ist, so muss $\exp H$ keine Stammfunktion zu $\exp h$ sein (im falschen Beweis ist $h = \ln f + \ln g$).

Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die drei Ebenen E, F, G im $\mathbb{Q}^3$, die durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden.

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - 4y + 3z = 2\}$,
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 7x - 5y + 6z = 3\}$,
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x - y + 4z = 5\}$.

Bestimme sämtliche Punkte $E \cap F \setminus E \cap F \cap G$.

Lösung

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$5x - 4y + 3z = 2\,,$$
$$7x - 5y + 6z = 3\,,$$
$$2x - y + 4z = 5\,.$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ist $E \cap F \cap G$. Es ist $-7I + 5II$ gleich

$$3y + 9z = 1$$

und $-2I + 5III$ gleich

$$3y + 14z = 21\,.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt

$$5z = 20\,,$$

also

$$z = 4\,.$$

Somit ist

$$y = -\frac{35}{3}$$

und

$$x = \frac{1}{5}(2 + 4y - 3z) = \frac{1}{5}\left(-10 - 4 \cdot \frac{35}{3}\right) = -2 - 4 \cdot \frac{7}{3} = -\frac{34}{3}.$$

Es ist also

$$E \cap F \cap G = \left\{ \left(-\frac{34}{3}, -\frac{35}{3}, 4\right) \right\}.$$

Der Durchschnitt $E \cap F$ wird durch das lineare Gleichungssystem

$$5x - 4y + 3z = 2\,,$$
$$3y + 9z = 1$$

beschrieben. Die Lösungsmenge ist

$$L = E \cap F = \left\{ \left(\frac{2}{3} - 3z,\, \frac{1}{3} - 3z,\, z\right) \mid z \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Für

$$z = 4$$

ergibt sich dabei der einzige Punkt aus $E \cap F \cap G$. Somit ist insgesamt

$$E \cap F \setminus E \cap F \cap G = \left\{ \left(\frac{2}{3} - 3z,\, \frac{1}{3} - 3z,\, z\right) \mid z \in \mathbb{Q},\, z \neq 4 \right\}.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\, (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(8)\ \ (r + s)u = ru + su$$

erfüllt.

Lösung

Es sei $K = V = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Wir betrachten die „Skalarmultiplikation"

$$K \times K \longrightarrow K,\, (r,u) \longmapsto r \bullet u,$$

die jedes Paar (r,u) auf u abbildet, also

$$r \bullet u = u\,.$$

Dann ist (für $u \neq 0$)

$$(1+1) \bullet u = 2 \bullet u = u \neq 2u = 1 \bullet u + 1 \bullet u$$

und somit ist diese Skalarmultiplikation nicht distributiv in den Skalaren. Alle anderen Vektorraumaxiome sind hingegen erfüllt. Es ist ja

$$\begin{aligned} r \bullet (s \bullet u) &= r \bullet u \\ &= u \\ &= (r \cdot s)u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r \bullet (u+v) &= u+v \\ &= r \bullet u + r \bullet v. \end{aligned}$$

Ferner ist natürlich auch

$$1 \bullet u = u\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$.
Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0\,.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe (1 Punkt)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3-\pi & 2-3\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} & 4\pi \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3-\pi & 2-3\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} & 4\pi \end{pmatrix} &= (3-\pi)4\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)\left(2-3\sqrt{5}\right) \\ &= 12\pi - 4\pi^2 - 6 + 15 + 2\sqrt{5} + 9\sqrt{5} \\ &= 12\pi - 4\pi^2 + 9 + 11\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, welche der folgenden elementargeormetrischen Abbildungen linear, welche trigonalisierbar und welche diagonalisierbar sind.

1. Die Achsenspiegelung durch die durch $4x - 7y = 5$ gegebene Achse.
2. Die Scherung, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.
3. Die Punktspiegelung mit dem Ursprung als Zentrum.
4. Die Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

Lösung

1. Da die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht, wird dieser bei dieser Achsenspiegelung bewegt, daher ist die Abbildung nicht linear.
2. Eine solche Scherung ist linear und trigonalisierbar, da sie bereits in oberer Dreiecksform vorliegt. Sie ist nicht diagonalisierbar, da der einzige Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 1 besitzt.

3. Die Punktspiegelung am Ursprung ist die Abbildung $v \mapsto -v$, sie ist also linear und diagonalisierbar und insbesondere trigonalisierbar.
4. Jede Streckung ist linear und diagonalisierbar.