Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/60/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	6	4	3	4	12	4	3	2	4	4	6	3	5	3	6	1	79

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *angeordneter* Körper.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.

3. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix M über einem Körper K.

6. Die *algebraische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Nullstellensatz*.

2. Der Satz über die Beziehung von Stetigkeit und Riemann-Integrierbarkeit.

3. Der Satz über *partielle Integration*.

Aufgabe * (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die durch die Wertetabelle

x	$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7$
$\varphi(x)$	$4\,7\,4\,5\,1\,1\,2$

gegebene Abbildung

$$\varphi\colon \{1,2,3,4,5,6,7\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

a) Bestimme das Bild von $\{1,2,3\}$ unter φ.

b) Bestimme das Urbild von $\{4,5,6,7\}$ unter φ.

c) Erstelle eine Wertetabelle für

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi\,.$$

Aufgabe * (6 (2+4) Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung.

a) Zeige, dass es eine Menge N gibt und eine surjektive Abbildung

$$F\colon L \longrightarrow N$$

und eine injektive Abbildung

$$G: N \longrightarrow M$$

mit

$$\varphi = G \circ F.$$

b) Zeige, dass es eine Menge P gibt und eine injektive Abbildung

$$H: L \longrightarrow P$$

und eine surjektive Abbildung

$$I: P \longrightarrow M$$

mit

$$\varphi = I \circ H.$$

Aufgabe * (4 (1+1+1+1) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, wir betrachten die Betragsabbildung

$$K \longrightarrow K, \, x \longmapsto |x|.$$

1. Ist diese Abbildung injektiv?
2. Ist diese Abbildung surjektiv?

3. Wir nennen die Betragsabbildung kurz φ. Was kann man über die Hintereinanderschaltungen $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \ldots$ in Bezug auf φ sagen?

4. Wir schränken die Betragsabbildung auf $K_{\leq 0}$ ein. Bestimme die Monotonieeigenschaft von
$$K_{\leq 0} \longrightarrow K,\, x \longmapsto |x|.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K. Beschreibe die Menge

$$M = \{x \in K \mid -x \in [a, b]\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a < b$ rationale Zahlen. Zeige, dass es eine bijektive streng wachsende Abbildung

$$[0, 1] \longrightarrow [a, b]$$

gibt, die rationale Zahlen in rationale Zahlen überführt.

Aufgabe * (12 (2+1+2+3+2+2) Punkte)

Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0,1]$ aus. Das Intervall wird in drei gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das dritte (Regel 1). Das entstehende Intervall teilen wir in fünf gleichlange Teilintervalle ein und davon nehmen wir das vierte (Regel 2). Jetzt wenden wir abwechselnd Regel 1 und Regel 2 an, immer bezogen auf das zuvor konstruierte Intervall. Dabei entsteht eine Folge von Intervallen $I_n, n \in \mathbb{N}$ (I_0 ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

1. Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im zweiten Schritt konstruiert wird (also von I_2, nachdem einmal die Regel 1 und einmal die Regel 2 angewendet wurde).
2. Wie kann man den Konstruktionsschritt, der durch die einmalige Hintereinanderausführung von Regel 1 und von Regel 2 gegeben ist, mit einer einzigen Regel ausdrücken?
3. Bestimme ein Intervall der Form $[\frac{a}{100}, \frac{a}{100} + \frac{1}{100}]$ mit $a \in \mathbb{N}$, das ganz in I_2 enthalten ist.
4. Erstelle eine Formel, die die untere Intervallgrenze des Intervalls $I_{2k}, k \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
5. Es gibt genau eine rationale Zahl c, die in jedem Intervall I_n enthalten ist. Bestimme c als Bruch.
6. Gibt es ein Ziffernsystem, in dem die rationale Zahl c aus (5) eine Ziffernentwicklung mit Periodenlänge 1 besitzt?

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei $I = [a,b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K mit $0 \notin I$. Beschreibe die Menge

$$M = \{x \in K \mid x^{-1} \in [a,b]\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $[a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K und es seien $x, y \in [a, b]$. Zeige

$$|y - x| \leq b - a\,.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = X^3 + 4X^2 + 3X + 4$ und $T = 3X^2 + 2X + 1$ durch.

Aufgabe * (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe * (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^4 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe * (6 (3+1+2) Punkte)

1. Bestimme diejenigen reellen Polynomfunktionen, die bijektiv sind und für die die Umkehrfunktion ebenfalls polynomial ist.
2. Man gebe ein Beispiel für eine bijektive reelle Polynomfunktion, für die die Umkehrfunktion kein Polynom ist.
3. Zeige, dass durch das Polynom X^5 eine bijektive Abbildung
   $$\mathbb{Z}/(7) \longrightarrow \mathbb{Z}/(7),\, x \longmapsto x^5,$$
   gegeben ist. Ist die Umkehrabbildung polynomial?

Aufgabe * (3 Punkte)

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K_+$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = (x_n)^{-1}$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe * (6 (1+1+1+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{\ln x}.$$

a) Skizziere f.

b) Bestimme die Ableitung von f.

c) Bestimme die zweite Ableitung von f.

d) Untersuche f auf Extrema, Monotonieverhalten und Wendepunkte.

Aufgabe * (1 Punkt)

Es sei

$$\varphi: K^m \longrightarrow K^n$$

eine lineare Abbildung. Es sei $v \in K^m$. Zeige $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.