Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/42/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	2	4	4	0	5	0	0	6	7	0	6	3	0	0	5	50

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen

$$F: L \longrightarrow M$$

und

$$G: M \longrightarrow N.$$

2. Ein *archimedisch* angeordneter Körper K.
3. Eine *stetig differenzierbare* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
5. Eine $m \times n$*-Matrix* über einem Körper K.
6. Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).

Lösung

1. Die Abbildung
$$G \circ F: L \longrightarrow N,\ x \longmapsto G(F(x)),$$
heißt die Hintereinanderschaltung der Abbildungen F und G.

2. Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit
$$n \geq x$$
gibt.

3. Man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

4. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

5. Eine $m \times n$-*Matrix* über K ist ein Schema der Form
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
wobei die a_{ij} aus K sind.

6. Unter der Dimension eines Vektorraums V versteht man die Anzahl der Elemente in einer Basis von V.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Nullstellen und lineare Faktoren eines Polynoms $F \in K[X]$.

2. Der Satz über die Ableitung in einem Extremum.

3. Der Satz über den Rang von einer Matrix und einer linearen Abbildung.

Lösung

1. Ein Element $a \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von F, wenn F ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

2. Es sei
$$f \colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion, die in $c \in]a,b[$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist

$f'(c) = 0.$

3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei
   $$\varphi : V \longrightarrow W$$
   eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt
   $$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M .$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Ersetze im Term $3x^2 + 5x + 6$ die Variable x durch den Term $4y^2 + 2y + 3$ und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

Lösung

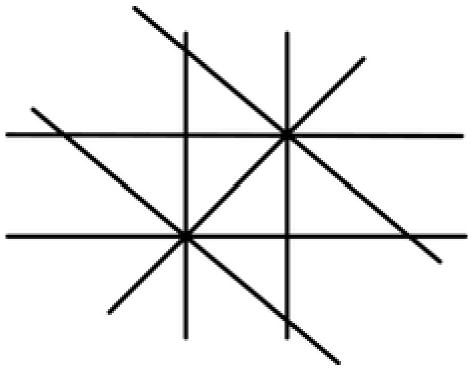
Es ist

$$
\begin{aligned}
3\left(4y^2+2y+3\right)^2+5\left(4y^2+2y+3\right)+6 &= 3\left(16y^4+4y^2+9+16y^3+24y^2+12y\right)+20y^2+10y+15+6 \\
&= 48y^4+12y^2+27+48y^3+72y^2+36y+20y^2+10y+15+6 \\
&= 48y^4+48y^3+104y^2+46y+48.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (2 Punkte)

Skizziere sieben Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in acht Punkten schneiden.

Lösung



Aufgabe (4 Punkte)

Zeige für $n \in \mathbb{N}_+$ die Gleichung

$$
\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n-1} (k!) = (n-1)! \cdot (n-2)! \cdots 3! \cdot 2! \cdot 1!\,.
$$

Lösung

Bei $n=1$ steht links und rechts das leere Produkt, dessen Wert gleich 1 ist. Bei $n=2$ steht links allein $2-1$ und rechts einfach $1!$. Wir führen Induktion nach $n \geq 2$, sei die Aussage also für n schon bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}\prod_{1\le i<j\le n+1}(j-i) &= \prod_{1\le i<j\le n}(j-i)\cdot\prod_{1\le i<j=n+1}(j-i)\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(k!)\cdot\prod_{1\le i\le n}(n+1-i)\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(k!)\cdot n!\\ &= \prod_{k=1}^{n}(k!).\end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X-a)$ nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Q hat den Grad $d-1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d-1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b-a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Bestimme, für welche reellen Zahlen x die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

konvergiert.

Lösung

Es handelt sich um eine Potenzreihe mit den Koeffizienten n^n. Sie konvergiert für $x = 0$, da dann nur ein Glied von 0 verschieden ist. Wir behaupten, dass die Reihe für keine weitere reelle Zahl konvergiert. Da es sich um eine Potenzreihe handelt, genügt es, für jede reelle positive Zahl x nachzuweisen, dass die Reihe divergiert. Zu $x > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kx \geq 1$. Es gilt dann auch $nx \geq 1$ für alle $n \geq k$. Wegen

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^n x^n \geq \sum_{n=k}^{\infty} 1$$

erfüllt die Reihe nicht das Cauchy-Kriterium und kann daher nicht konvergieren.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 (4+2) Punkte)

a) Man gebe ein quadratisches Polynom an, dessen Graph die Diagonale und die Gegendiagonale bei $y = 1$ jeweils tangential schneidet.

b) Man zeige, dass der Graph des Lösungspolynoms aus Teil a) innerhalb des oberen, durch die Diagonale und die Gegendiagonale begrenzten Viertels der Ebene liegt.

Lösung

a) Das gesuchte Polynom sei

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

Dann ist

$$f'(x) = 2ax + b\,.$$

Die Bedingung, dass der Graph zu f die Diagonale und die Gegendiagonale bei $y = 1$ schneidet, bedeutet

$$a + b + c = 1 \;\text{ und }\; a - b + c = 1.$$

Die Steigung der Diagonale ist 1. Da der Schnitt tangential sein soll, bedeutet dies

$$2a + b = 1\,.$$

Die Steigung der Gegendiagonale ist -1. Dies bedeutet somit

$$-2a + b = -1\,.$$

Die Summe der beiden letzten Gleichungen ergibt direkt

$$b = 0$$

und somit

$$a = \frac{1}{2}\,.$$

Daraus ergibt sich mit der ersten (oder der zweiten) Gleichung

$$c = \frac{1}{2}\,.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\,.$$

b) Für $x \geq 0$ ist zu zeigen, dass $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \geq x$ und für $x \leq 0$ ist zu zeigen, dass $P(x) \geq -x$ ist. Im ersten Fall ist

$$P(x) - x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 1\right) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$$

und im zweiten Fall ist

$$P(x) - x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 1\right) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \geq 0\,.$$

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.

Lösung

Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c (abhängig von x) zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$

abhängt.
Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen bei $x=a$ (abhängig von $x>a$ oder $x<a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x)-f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann.
Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1}>0$ für alle $x \neq a$ in der Umgebung ist. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a)>0$, dass $f(x)>f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a)<0$, dass $f(x)<f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V,+,0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(7)\ \ r(u+v)=ru+rv$$

erfüllt.

Lösung

Wir betrachten den Körper $\mathbb{C}$ und die additive Gruppe $\mathbb{C}^2$. Als „Skalarmultiplikation“

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

betrachten wir die durch

$$r \bullet (x, y) := \begin{cases} (rx, ry)\,, \text{ falls } x \neq 0\,, \\ (0, \overline{r}y)\,, \text{ falls } x = 0\,, \end{cases}$$

gegebene Abbildung, wobei $\overline{r}$ die komplexe Konjugation von r bezeichnet (wir schreiben $\bullet$ um zu betonen, dass es sich um eine untypische Operation handelt).

Zum Nachweis der Assoziativität der Multiplikation sei $u = (x, y)$ und $r, s \in \mathbb{C}$. Bei

$$x \neq 0$$

ist

$$\begin{aligned} (rs) \bullet u &= (rs) \bullet (x, y) \\ &= (rsx, rsy) \\ &= r \bullet (sx, sy) \\ &= r \bullet (s \bullet (x, y)) \\ &= r \bullet (s \bullet u), \end{aligned}$$

wobei die mittlere Gleichung sowohl bei $s = 0$ als auch bei $s \neq 0$ gilt. Bei

$$x = 0$$

ist

$$\begin{aligned}(rs)\bullet u &= (rs)\bullet(0,\,y)\\ &= (0,\,\overline{rs}y)\\ &= (0,\,\overline{r}\cdot\overline{s}y)\\ &= r\bullet(0,\,\overline{s}y)\\ &= r\bullet(s\bullet(0,\,y))\\ &= r\bullet(s\bullet u).\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Distributivität in den Skalaren ist bei

$$x\neq 0$$

$$\begin{aligned}(r+s)\bullet(x,\,y) &= ((r+s)x,\,(r+s)y)\\ &= (rx+sx,\,ry+sy)\\ &= (rx,\,ry)+(sx,\,sy)\\ &= r\bullet(x,\,y)+s\bullet(x,\,y)\,,\end{aligned}$$

und bei

$$x=0$$

ist

$$\begin{aligned}(r+s)\bullet(0,\,y) &= \left(0,\,\overline{(r+s)}y\right)\\ &= (0,\,(\overline{r}+\overline{s})y)\\ &= (0,\,\overline{r}y+\overline{s}y)\\ &= r\bullet(0,\,y)+s\bullet(0,\,y)\,.\end{aligned}$$

Sei nun

$$u = (1,\ \mathrm{i})$$

und

$$v = (-1,\ \mathrm{i})\ .$$

Dann ist

$$u + v = (0,\ 2\mathrm{i})$$

und somit ist einerseits

$$\begin{aligned} \mathrm{i} \bullet (u + v) &= \mathrm{i} \bullet (0,\ 2\mathrm{i}) \\ &= \left(0,\ \overline{\mathrm{i}}2\mathrm{i}\right) \\ &= (0,\ 2) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \mathrm{i} \bullet u + \mathrm{i} \bullet v &= \mathrm{i} \bullet (1,\ \mathrm{i}) + \mathrm{i} \bullet (-1,\ \mathrm{i}) \\ &= (\mathrm{i},\ -1) + (-\mathrm{i},\ -1) \\ &= (0,\ -2)\,. \end{aligned}$$

Somit ist diese Multiplikation nicht distributiv in den Vektoren.

Ferner ist wegen

$$1 = \overline{1}$$

stets

$$1 \bullet u = u\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(0,1,0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(9,6,5), (2,2,5) \text{ und } (7,3,4)$$

aus.

Lösung

Es geht um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 9a+2b+7c &= 0\,, \\ 6a+2b+3c &= 1\,, \\ 5a+5b+4c &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir ersetzen die zweite Zeile durch $II-I$ und die dritte durch $2III-5I$ und erhalten

$$\begin{aligned} 9a+2b+7c &= 0\,, \\ -3a-4c &= 1\,, \\ -35a-27c &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir ersetzen III durch $4III-27II$ und erhalten

$$\begin{aligned} 9a+2b+7c &= 0\,, \\ -3a-4c &= 1\,, \end{aligned}$$

$$59a = 27\,.$$

Somit ist

$$a = \frac{27}{59}\,,$$
$$c = \frac{-3a-1}{4} = \frac{-3\cdot\frac{27}{59}-1}{4} = -\frac{35}{59}$$

und

$$b = \frac{1}{2}(-9a-7c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{59}(-9\cdot 27+7\cdot 35) = \frac{1}{59}\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige direkt (ohne charakteristisches Polynom), dass ein Diagonalelement von M ein Eigenwert zu M sein muss.

Lösung

Es sei a ein Diagonalelement und es sei k der kleinste Index mit

$$d_k = a\,.$$

Wir müssen zeigen, dass es einen Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

mit

$$Mx = ax$$

gibt. Wir zeigen die Existenz eines solchen Vektors mit

$$x_k = 1$$

und

$$x_i = 0$$

für $i > k$. Damit sind die i-ten Zeilen zu $Mx = ax$ für $i > k$ erfüllt. Die unteren Zeilen werden (wir schreiben

$$M = (d_{ij}$$

und $d_{ii} = d_i$) zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&d_1 x_1 + \cdots + d_{1k} x_k = d_k x_1 \, , \\
&d_2 x_2 + \cdots + d_{2k} x_k = d_k x_2 \, , \\
&\vdots \\
&d_{k-1} x_{k-1} + d_{k-1\,k} x_k = d_k x_{k-1} \, , \\
&d_k x_k = d_k x_k
\end{aligned}$$

bzw. zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&(d_1 x_1 - d_k) + \cdots + d_{1k} x_k = 0 \, , \\
&(d_2 x_2 - d_k) + \cdots + d_{2k} x_k = 0 \, , \\
&\vdots \\
&(d_{k-1} - d_k) x_{k-1} + d_{k-1\,k} x_k = 0 \, , \\
&(d_k - d_k) x_k = 0 \, .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist stets, also insbesondere mit $x_k = 1$ erfüllt. Da

$$d_i \neq d_k$$

ist für $i < k$, ist in diesem Gleichungssystem in Dreiecksgestalt der Anfangsterm

$$d_i - d_k \neq 0$$

für $i < k$ von 0 verschieden. Nach Lemma 21.10 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) kann man also $x_k = 1$ zu einer Lösung ergänzen.