Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/14/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	3	2	4	5	3	2	2	4	6	4	4	2	3	4	4	62

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
3. Die *eulersche Zahl* e.
4. Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Ein *Erzeugendensystem* $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V.
6. Eine $m \times n$-*Matrix* über einem Körper K.

Lösung

1. Der Binomialkoeffizient ist durch
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
   definiert.
2. Die Menge
   $$\mathbb{R}^2$$
   mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch
   $$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$
   definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*.

3. Die eulersche Zahl ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

definiert.

4. Das Oberintegral ist definiert als das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f.

5. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ als Linearkombination der v_i darstellen kann.

6. Eine $m \times n$-*Matrix* über K ist ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei die a_{ij} aus K sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Quadratwurzel von 2.
2. Der Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.
3. Der Satz über den Rang von einer Matrix und einer linearen Abbildung.

Lösung

1. Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. D.h. die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.
2. Es sei I ein reelles Intervall,
   $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$
   eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte
   $$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$
   Dann gelten folgende Aussagen.
   1. Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein lokales Extremum.
   2. Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.
   3. Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.
3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei
   $\varphi: V \longrightarrow W$
   eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt
   $$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Anfang März beträgt die Zeitdifferenz zwischen Deutschland und Paraguay 4 Stunden (in Paraguay wurde es 4 Stunden später hell). Am 25. März 2018 wurde in Deutschland die Uhr von der Winterzeit auf die Sommerzeit umgestellt, die Uhr wurde also um eine Stunde nachts von 2 auf 3 vorgestellt. In der gleichen Nacht wurde die Uhr in Paraguay umgestellt. Wie groß war die Zeitdifferenz nach der Umstellung?

Lösung

Da Paraguay auf der Südhalbkugel liegt, wird dort Ende März von der dortigen Sommerzeit auf die dortige Winterzeit umgestellt, dort wird also die Uhr zurückgestellt. Daher beträgt die Zeitdifferenz zwischen Deutschland und Paraguay danach ganze 6 Stunden.

Aufgabe (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f \colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Lösung

Seien $x_1, x_2 \in L$ gegeben mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 = x_2$ ist. Es ist

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)\,.$$

Da nach Voraussetzung $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$, wie gewünscht.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung

Angenommen, die Menge aller Primzahlen sei endlich, sagen wir $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Man betrachtet die Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_r \, + 1\,.$$

Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da bei Division von N durch p_i immer ein Rest 1 verbleibt. Damit sind die Primfaktoren von N, die es nach Satz 2.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) geben muss, nicht in der Ausgangsmenge enthalten - Widerspruch.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme für das Polynom

$$P = 7X^{11} - 3X^8 + \frac{3}{2}X^6 - X + 5$$

den Grad, den Leitkoeffizienten, den Leitterm und den Koeffizienten zu X^5.

Lösung

Der Grad ist 11, der Leitkoeffizient ist 7, der Leitterm ist $7X^{11}$ und der Koeffizient zu X^5 ist 0.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz, dass der Limes einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist.

Lösung

Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x-y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0'.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x-y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei a_n die Summe der ungeraden Zahlen bis n und b_n die Summe der geraden Zahlen bis n. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir verwenden, dass die Summe der ersten ungeraden Zahlen gleich dem Quadrat der Anzahl der beteiligten Zahlen ist. Für n gerade ist

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1+3+\cdots+n-1}{2+4+\cdots+n} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{2+4+\cdots+n} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)+1}, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass im Nenner jeder Summand des Zählers um eins erhöht vorkommt, und für n ungerade ist

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1+3+\cdots+n}{2+4+\cdots+n-1} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{2+4+\cdots+n-1} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\frac{n+1}{2}-(n+1)} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)-1},
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass im Nenner jeder Summand des Zählers bis auf den letzten um eins erhöht vorkommt. Beide Teilfolgen (gerade bzw. ungerade Glieder) konvergieren gegen 1 und somit konvergiert die Gesamtfolge gegen 1.

Aufgabe (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 4x + 2.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[1,2]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Lösung

Es ist $f(1) = -1$ und $f(2) = 2$, es muss also nach Korollar 11.2 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) eine Nullstelle im Intervall $[1,2]$ geben. Wir berechnen den Funktionswert an der Intervallmitte $\frac{3}{2}$ und erhalten

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{27-48+16}{8} = \frac{-5}{8} < 0\,.$$

Wir müssen also mit dem rechten Teilintervall $[\frac{3}{2}, 2]$ weitermachen. Dessen Intervallmitte ist $\frac{7}{4}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 4 \cdot \frac{7}{4} + 2 = \frac{343}{64} - 5 = \frac{343-320}{64} = \frac{23}{64} > 0\,.$$

Jetzt müssen wir mit dem linken Teilintervall $[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ weitermachen, dessen Mitte ist $\frac{13}{8}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f\left(\frac{13}{8}\right) = \left(\frac{13}{8}\right)^3 - 4 \cdot \frac{13}{8} + 2 = \frac{2197}{512} - \frac{13}{2} + 2 = \frac{2197-3328+1024}{512} = \frac{-107}{512} < 0\,.$$

Somit wissen wir, dass es eine Nullstelle zwischen $\frac{13}{8}$ und $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ gibt.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

Lösung

Wir schreiben

$$x^u = \left(e^{\ln x}\right)^u = e^{u \ln x}.$$

Somit kann man f als die Hintereinanderschaltung der Funktionen $x \mapsto \ln x$, $y \mapsto uy$ und $z \mapsto e^z$ auffassen. Diese Funktionen sind jeweils nach Satz 11.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)), Beispiel ***** und Fakt ***** stetig. Aufgrund von Lemma 10.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist dann die Hintereinanderschaltung ebenfalls stetig.

Aufgabe (2 Punkte)

Beweise elementargeometrisch den *Sinussatz*, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

gelten, wobei a, b, c die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln α, β, γ sind.

Lösung

Es sei h die Länge der Höhe durch C. Es gilt dann

$$h = a \sin \beta = b \sin \alpha \, ,$$

da jeweils rechtwinklige Dreiecke vorliegen mit der Dreiecksseite als Hypotenuse und der Höhe als gegenüberliegender Kathete zum Winkel. Somit ist

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \, ,$$

und dies stimmt entsprechend auch mit $\frac{c}{\sin \gamma}$ überein.

Aufgabe (4 (1+3) Punkte)

1. Zeige, dass eine ungerade Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt ein globales Extremum haben kann.
2. Zeige, dass eine ungerade Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt kein isoliertes lokales Extremum haben kann.

Lösung

1. Die Nullfunktion ist ungerade und besitzt im Nullpunkt ein globales Maximum, das gleichzeitig globales Minimum ist.
2. Sei f ungerade, es gilt also $f(-x) = -f(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist insbesondere $f(0) = -f(0)$, also $f(0) = 0$. Nehmen wir an, dass f im Nullpunkt ein isoliertes lokales Maximum besitzt. Das bedeutet, dass es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) < f(0) = 0$$

für alle $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ gilt. Für diese x ist aber auch $-x \in [-\epsilon, \epsilon]$ und es ergibt sich direkt der Widerspruch

$$f(-x) = -f(x) > 0\,.$$

Aufgabe (6 (1+1+4) Punkte)

1. Es sei $a > 1$ und $g(x) = a^x$ die Exponentialfunktion zur Basis a. Zeige, dass es ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $g(x+w) = 2g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
2. Es sei $w > 0$ vorgeben. Zeige, dass es eine Exponentialfunktion b^x mit $b > 1$ und mit
   $$b^{x+w} = 2b^x$$
   für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
3. Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die keine Exponentialfunktion ist.

Lösung

1. Es sei $a > 1$ und $g(x) = a^x$ die Exponentialfunktion zur Basis a. Zeige, dass es ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $g(x+w) = 2g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt. Wir setzen
   $$w := \log_a 2\,.$$
   Dann ist
   $$a^{x+w} = a^x \cdot a^w = a^x \cdot a^{\log_a 2} = a^x \cdot 2 = 2a^x\,.$$

2. Aus der Bedingung $b^w = 2$ folgt

   $$b = 2^{\frac{1}{w}}\,.$$

   Damit ist in der Tat

   $$\left(2^{\frac{1}{w}}\right)^{x+w} = 2^{\frac{x+w}{w}} = 2^{\frac{x}{w}+1} = 2^{\frac{x}{w}} \cdot 2 = 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{w}}\right)^{x}.$$

3. Wir betrachten die Funktion

   $$h\colon [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

   mit $h(x) := 1 + x$. Jedes $x \in \mathbb{R}$ liegt in einem eindeutigen halboffenen Intervall $x \in [n, n+1[$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Wir setzen die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ durch die Festlegung

   $$f(x) := 2^n h(x-n)$$

   fort. Dies stimmt für $x \in [0,1[$ mit h überein, da dort $n = 0$ ist. Für $x \in [n, n+1[$ ist

   $$f(x+1) = 2^{n+1} h(x+1-n-1) = 2 \cdot 2^n h(x-n) = 2f(x)\,.$$

   Die Funktion ist stetig, was auf den ganzzahligen Intervallen klar ist und an den Intervallgrenzen wegen (der Funktionslimes ist für $x < n$)

   $$\lim_{x\to n} f(x) = \lim_{x\to n} 2^{n-1} h(x-n+1) = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n = f(n)$$

   gilt. Die Funktion ist auch streng monoton wachsend, was ebenfalls auf den ganzzahligen Intervallen klar ist und an den Übergängen wegen der Stetigkeit gilt. Die Funktion ist keine Exponentialfunktion, da sie auf $[0,1[$ linear ist.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Newton-Leibniz-Formel.

Lösung

Aufgrund von Fakt ***** existiert das Integral. Mit der Integralfunktion

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = G(b) - G(a)\,.$$

Aufgrund von Fakt ***** ist G differenzierbar mit

$$G'(x) = f(x)\,,$$

d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Fakt ***** ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rrrrcr}
x & +y & +z & -w & = & 3 \\
-2x & +5y & -3z & +w & = & 0 \\
x & -y & +2z & & = & 2 \\
5x & +2y & -z & & = & -1\,.
\end{array}
$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable w, indem wir die erste Gleichung mit der zweiten addieren. Dies führt auf

$$
\begin{array}{rrrcr}
-x & +6y & -2z & = & 3 \\
x & -y & +2z & = & 2 \\
5x & +2y & -z & = & -1\,.
\end{array}
$$

Nun addieren wir die erste Gleichung mit der zweiten Gleichung und es ergibt sich

$$5y = 45$$

und

$$y = 1\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$x = -\frac{5}{11}\,,$$
$$z = \frac{8}{11}$$

und

$$w = -\frac{29}{11}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Wir betrachten das kleine Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) als eine Familie von 9-Tupeln der Länge 9. Welche Dimension besitzt der durch diese Tupel aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^9$?

Lösung

Die Einerreihe ist das Tupel

$$(1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9)\,.$$

Jede weitere Reihe im kleinen Einmaleins ergibt sich durch Multiplikation dieser Reihe mit einer natürlichen Zahl $n \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, sie gehören also schon zu dem von der Einerreihe erzeugten Untervektorraum. Daher ist die Dimension gleich 1.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Lösung

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\Psi_{\mathfrak{v}}} & V \\ & & \downarrow \varphi \\ & \xrightarrow{\Psi_{\mathfrak{w}}} & W. \end{array}$$

Da die Koordinatenabbildungen biljektiv sind, ist φ genau dann surjektiv, wenn $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ surjektiv ist. Der Bildvektor des j-ten Standardvektors e_j unter M ist die j-te Spalte von M und der Bildraum zu M ist der von den Spalten erzeugte Untervektorraum. Somit ist die Surjektivität äquivalent dazu, dass die Spalten ein Erzeugendensystem des K^m bilden.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Lösung

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Wir müssen also die Nullstellen der Determinante bestimmen. Die Determinante ist (nach der Regel von Sarrus)

$$z^2 + 8z + 30z + 15 - 2z^2 - z - 20z - 6z = -z^2 + 11z + 15\,.$$

Dies ist gleich 0 genau dann, wenn

$$z^2 - 11z - 15 = 0$$

ist. Durch quadratisches Ergänzen führt diese Gleichung auf

$$\left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = 15 + \frac{121}{4} = \frac{181}{4}\,.$$

Daher sind

$$z_1 = \frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 + \sqrt{181}}{2} \text{ und } z_2 = -\frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 - \sqrt{181}}{2}$$

die beiden einzigen Lösungen der quadratischen Gleichung. Diese zwei reellen Zahlen sind also die einzigen (reellen oder komplexen) Zahlen, für die die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei M eine untere Dreiecksmatrix. Zeige, ausgehend von der Definition der Determinante, dass die Determinante von M das Produkt der Diagonaleinträge ist (es darf verwendet werden, dass die Determinante zu einer Matrix mit einer Nullzeile gleich 0 ist).

Lösung

Wie führen Induktion nach n, wobei M eine $n \times n$-Matrix sei. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist klar, sei die Aussage für alle unteren Dreiecksmatrizen der Länge $n - 1$ schon bewiesen. Die Determinantenformel sagt

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i \\ &= a_{11} \det M_1 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i .\end{aligned}$$

Für $i \geq 2$ ist die erste Zeile von M ohne den ersten Eintrag eine Zeile von M_i, und zwar ist dies eine Nullzeile, da ja M eine untere Dreiecksmatrix ist. Daher sind die Determinanten zu den M_i, $i \geq 2$, gleich 0 und die hintere Summe in der obigen Formel ist 0. Hingegen ist M_1 wieder eine untere Dreiecksmatrix und ihre Determinante ist nach Induktionsvoraussetzung gleich $a_{22} \cdots a_{nn}$. Also ist

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} .$$