Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/51/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	5	3	4	4	5	10	3	1	5	5	3	6	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.
2. Eine reelle *Intervallschachtelung*.
3. Ein *isoliertes* lokales Maximum einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

5. Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Der von einer Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, aus einem K-Vektorraum V *aufgespannte Untervektorraum*.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über hintereinandergeschaltete stetige Funktionen.
2. Der Satz über die Monotonieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.
3. Die *Dimensionsformel* für eine lineare Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow W.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Begründe das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei M eine Menge und $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente. Definiere durch eine Fallunterscheidung eine Bijektion von M nach M, die a und b vertauscht, und sonst alle Elemente unverändert lässt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise die allgemeine binomische Formel.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 4, \ f(1) = 0, \ f(2) = -7.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Betrachte die Folge $x_n = (-1)^n$ und $x = -1$. Welche der Pseudokonvergenzbegriffe (siehe Angeordneter Körper/Folge/Pseudokonvergenz/Pseudo/Definition) treffen zu?

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe * (5 (1+3+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

auf $\mathbb{R}_+$.

1. Bestimme die erste und die zweite Ableitung von f.
2. Bestimme die lokalen Extrema von f.
3. Bestimme das Monotonieverhalten von f.

Aufgabe * (10 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$s_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diejenige untere Treppenfunktion zu f zur äquidistanten Unterteilung in n gleichlange Intervalle, die auf dem Teilintervall

$$I_j = [a + \frac{(j-1)(b-a)}{n}, a + \frac{j(b-a)}{n}[,\ j = 1, \ldots, n,$$

(für $j = n$ sei das Intervall rechtsseitig abgeschlossen) das Infimum von $f(x)$, $x \in I_j$, annimmt. Zeige, dass die Folge der Treppenintegrale zu s_n gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 - 1$$

und

$$g(x) = -x^2 + 1\,.$$

1. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f und g
2. Die beiden Graphen schließen eine endliche Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Aufgabe * (1 Punkt)

Beschreibe die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2,3)$ und $(5,-7)$ verläuft, in Punktvektorform.

Aufgabe * (5 (3+1+1) Punkte)

In der großen Pause fährt das Süßwarenmobil von Raul Zucchero auf den Schulhof. Gabi kauft einen Schokoriegel, zwei Packungen Brausepulver und drei saure Zungen und zahlt dafür $1,30$ €. Lucy kauft zwei Schokoriegel, eine Packung Brausepulver und zwei saure Zungen und zahlt dafür $1,60$ €. Veronika kauft drei Packungen Brausepulver und vier saure Zungen und zahlt dafür einen Euro.

1. Kann man daraus die Preise rekonstruieren?
2. Wie sieht es aus, wenn man weiß, dass die Preise volle positive Centbeträge sind?
3. Wie sieht es aus, wenn man weiß, dass die Preise positive Vielfache von Zehn-Cent-Beträgen sind?

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \rightarrow V$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe * (6 (1+1+1+1+2) Punkte)

Wir betrachten Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}.$$

1. Berechne
$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & 0 & g \\ 0 & h & 0 \\ i & 0 & j \end{pmatrix}.$$
2. Ist die Matrizenmultiplikation für solche Matrizen kommutativ?
3. Bestimme die Determinante von $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$.
4. Man gebe eine Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
an, die nicht invertierbar ist.

5. Sei
$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$$
invertierbar. Ist die Inverse der Matrix ebenfalls von diesem Typ?

Anhang

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

1. Man sagt, dass die Folge gegen x *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon \, .$$
2. Man sagt, dass die Folge gegen x *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.
3. Man sagt, dass die Folge gegen x *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.

4. Man sagt, dass die Folge gegen x *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K, \epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.

5. Man sagt, dass die Folge gegen x *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K, \epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.

6. Man sagt, dass die Folge gegen x *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es gibt ein $\epsilon \in K, \epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.

7. Man sagt, dass die Folge gegen x *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es gibt ein $\epsilon \in K, \epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.

8. Man sagt, dass die Folge gegen x *deuterovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K, \epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$x_n - x \leq \epsilon$$
gilt.