Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/12/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	$\sum$
Punkte	3	3	1	4	3	6	4	3	2	2	4	4	7	6	2	3	3	4	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M.
2. Ein *Polynom* über einem Körper K in einer Variablen X.
3. Die *Sinusreihe* zu $x \in \mathbb{R}$.
4. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$.
5. Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).
6. Die *beschreibende Matrix* zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow W$$
   zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W bezüglich einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ von W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Division mit Rest* im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.
2. Der Satz über die lineare Approximierbarkeit.
3. Der Satz über die Charakterisierung von invertierbaren Matrizen.

Aufgabe * (1 Punkt)

Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor \frac{487}{23} \right\rfloor .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das das arithmetische Mittel aus zwei vorgegebenen nichtnegativen rationalen Zahlen berechnet.

- Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.
- Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.
- Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a,b,c,d,0,0,0,\ldots)$$

mit $b,d \neq 0$. Dabei sind a/b und c/d die rationalen Zahlen, von denen das arithmetische Mittel berechnet werden soll. Das Ergebnis soll ausgedruckt werden (in der Form Zähler Nenner) und anschließend soll das Programm anhalten.

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Konzept „Approximation“ anhand typischer Beispiele.

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Aufgabe * (4 (1+1+2) Punkte)

Wir betrachten das Polynom

$$P = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 \, .$$

1. Berechne die Werte von P an den Stellen $-2, -1, 0, 1, 2$.
2. Skizziere den Graphen von P oberhalb von $[-2, 2]$. Gibt es einen Bezug zur Exponentialfunktion e^x?
3. Bestimme eine Nullstelle von P innerhalb von $[-2, 2]$ mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{4}$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1},$$

streng wachsend ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige, dass die reelle Zahl $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^4 - 20X^2 + 16$ ist.

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass eine streng wachsende Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion $\frac{1}{\cos x}$ im Nullpunkt mit einem Potenzreihenansatz unter Verwendung von $\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i$

Aufgabe * (7 (1+1+2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 3 .$$

1. Bestimme die Ableitung von f.
2. Bestimme die Tangente t zu f im Punkt 2.
3. Bestimme die Schnittpunkte der Tangente t mit dem Funktionsgraphen zu f.
4. Die Tangente t und der Funktionsgraph zu f schließen eine endliche Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Aufgabe * (6 Punkte)

Es sei I ein beschränktes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das Supremum über alle Treppenintegrale zu äquidistanten unteren Treppenfunktionen existiert. Zeige, dass dann auch das Supremum zu allen Treppenintegralen zu unteren Treppenfunktionen (also das Unterintegral) existiert und mit dem zuerst genannten Supremum übereinstimmt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen $2{,}50$ € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen $2{,}30$ €. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Aufgabe * (3 (2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K, den wir als (unendlichdimensionalen) K-Vektorraum betrachten, und es sei $c \in K$, $c \neq 0$, ein fixiertes Element.

1. Ist die Abbildung
$$K[X] \longrightarrow K[X],\, P(X) \longmapsto P(X+c),$$
(es wird also überall die Variable X durch $X+c$ ersetzt) linear?

2. Ist die Abbildung
$$K[X] \longrightarrow K[X],\, P(X) \longmapsto P(X)+c,$$
(es wird also zu jedem Polynom c hinzuaddiert) linear?

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zur Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{t^2-1} & \frac{1}{t^3} \\ \frac{t^2-4}{t} & \frac{t-1}{t+1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3+2X^2-2.$$

Zeige, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{(1+\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert λ ist.