# Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/6/Klausur mit Lösungen

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 1 | 3 | 5 | 5 | 4 | 7 | 7 | 4 | 4 | 3 | 4 | 2 | 2 | 7 | 64 |



## Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen
$$F\colon L \longrightarrow M$$
und

$$G\colon M \longrightarrow N.$$

2. Eine *wachsende* reelle Folge.
3. Der *Arkuskosinus*.
4. Das *Taylor-Polynom vom Grad* $n$ zu einer $n$-mal differenzierbaren Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit $m$ Gleichungen in $n$ Variablen über einem Körper $K$.
6. Die *inverse Matrix* zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ über einem Körper $K$.

Lösung

1. Die Abbildung
$$G \circ F\colon L \longrightarrow N,\ x \longmapsto G(F(x)),$$
heißt die Hintereinanderschaltung der Abbildungen $F$ und $G$.
2. Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
3. Der *Arkuskosinus*
$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],\ x \longmapsto \arccos x,$$
ist die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion.
4. Das Polynom
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* $n$ zu $f$ in $a$.

5. Das System
$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$
heißt ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem*, wobei die $a_{ij}$ und die $c_i$ aus $K$ sind.

6. Die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit
$$A \circ M = E_n = M \circ A$$
heißt die *inverse Matrix* von $M$.

## Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Interpolation durch Polynome*.
2. Der *Satz von Rolle*.
3. Der Satz über die Monotonieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Lösung

1. Es sei $K$ ein Körper und es seien $n$ verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $n$ Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle $i$ ist.

2. Sei $a < b$ und sei
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in ]a,b[$ mit
$$f'(c) = 0\,.$$

3. Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion
$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1],$$
und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion
$$[0,\pi] \longrightarrow [-1,1].$$

## Aufgabe (1 Punkt)

Petra fliegt zu ihrer ersten internationalen Konferenz. Als sie auf dem Weg zum Flughafen ihre Wohnung (sie wohnt allein) verlässt und gerade die Wohnungstür zugemacht hat, merkt sie

1. Sie hat ihr Flugticket auf dem Schreibtisch vergessen.
2. Sie hat ihre Schlüssel auf dem Schreibtisch vergessen.
3. Sie hat ihren Reisepass auf dem Schreibtisch vergessen.

Was ist am schlimmsten?

Lösung

(1) und (3) sind jedenfalls nicht schlimm, da Petra die Schlüssel hat und daher direkt die vergessenen Sachen holen kann. Bei (2) hat sie dagegen ein Problem, wenn sie zurückkommt.

## Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$(r \rightarrow (p \wedge \neg q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg r \vee q))$$

allgemeingültig ist

Lösung

Wir müssen zeigen, dass für jede Wahrheitsbelegung $\lambda$ der Variablen $r, p, q$ der Wahrheitswert der Gesamtaussage gleich $1$ ist. Bei $\lambda(p) = 1$ ist $\lambda(\neg p) = 0$ und damit ist der Nachsatz und die Gesamtaussage wahr. Sei also im Folgenden $\lambda(p) = 0$. Dann ist $\lambda(p \wedge \neg q) = 0$. Bei $\lambda(r) = 1$ ist der Vordersatz falsch und somit die Gesamtaussage wahr. Sei also $\lambda(r) = 0$. Dann ist der Vordersatz wahr und wir müssen zeigen, dass auch der Nachsatz wahr ist. Es ist dann $\lambda(\neg r) = 1$ und $\lambda(\neg r \vee q) = 1$, also ist auch in diesem Fall der Nachsatz und die Gesamtaussage wahr.

## Aufgabe (5 (2+3) Punkte)

Es seien

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f)\,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Lösung

a) Die Gleichheit von Funktionen bedeutet die Gleichheit für jedes Argument. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} ((h \cdot g) \circ f)(x) &= (h \cdot g)(f(x)) \\ &= h(f(x)) \cdot g(f(x)) \\ &= (h \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(x) \\ &= ((h \circ f) \cdot (g \circ f))(x), \end{aligned}$$

was die Aussage beweist.

b) Wir nehmen für $f, g, h$ jeweils die Identität, also die Abbildung $x \mapsto x$. Die Verknüpfung der Identität mit sich selbst ist wieder die Identität. Das Produkt der Identität mit sich selbst ist das Quadrieren $x \mapsto x^2$. Daher ist in diesem Beispiel die Funktion

$$(h \circ g) \cdot f$$

gleich der Quadrierungsfunktion. Die Funktion

$$(h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

hingegen ist die Hintereinanderschaltung des Quadrierens mit dem Quadrieren, und das ist die Abbildung $x \mapsto \left(x^2\right)^2 = x^4$.

## Aufgabe (5 Punkte)

Beweise die allgemeine binomische Formel.

### Lösung

Wir führen Induktion nach $n$. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für $n$ bewiesen. Dann ist

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

## Aufgabe (4 Punkte)

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Lösung

Wir behaupten die Abschätzungen

$$1{,}8 \le 2^{\frac{9}{10}} \le 1{,}9\,.$$

Um dies zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Abschätzungen

$$1{,}8^{10} \le 2^9 = 512 \le 1{,}9^{10}\,.$$

nach. Diese gelten wegen

$$\begin{aligned} 1{,}8^{10} &= 3{,}24^5 \\ &= (3{,}24^2)^2 \cdot 3{,}24 \\ &= 10{,}4976^2 \cdot 3{,}24 \\ &\le 121 \cdot 4 \\ &= 484 \\ &< 512 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1{,}9^{10} &= 3{,}61^5 \\ &= (3{,}61^2)^2 \cdot 3{,}61 \\ &= 13{,}0321^2 \cdot 3{,}61 \\ &> 169 \cdot 3{,}6 \\ &= 608{,}4 \\ &> 512. \end{aligned}$$

## Aufgabe (7 (3+1+3) Punkte)

Sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

($n \in \mathbb{N}_+$).

1. Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
2. Zeige, dass sämtliche Folgenglieder $\geq 1$ sind.
3. Zeige, dass die Folge gegen $1$ konvergiert ist.

Lösung

1. Es ist

$$\sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n+1]{b}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ zu zeigen. Aufgrund des strengen Wachstums des Potenzierens können wir die $n(n+1)$-te Potenz der beiden Zahlen vergleichen. Wegen

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n(n+1)} &= \left(\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n}\right)^{(n+1)} \\ &= b^{(n+1)} \\ &= b^{n} \cdot b \\ &\geq b^{n} \\ &= \left(\left(\sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}\right)^{(n)} \\ &= \left(\sqrt[n+1]{b}\right)^{n(n+1)}\end{aligned}$$

ist dies richtig.

2. Dies ergibt sich aus dem strengen Wachstum des $n$-ten Wurzelziehens (siehe Satz 11.8 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))).

3. Wenn die Folge nicht gegen $1$ konvergieren würde, so würde es, da die Folge streng fallend ist, ein
$$\epsilon > 0$$
mit
$$\sqrt[n]{b} \geq 1 + \epsilon$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ geben. Das bedeutet
$$b = \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n} \geq (1+\epsilon)^{n} \geq 1 + n\epsilon \, .$$
Da $b$ eine feste Zahl ist und $n$ beliebig groß wird, widerspricht das dem Archimedesprinzip in der Form Lemma 5.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)).

## Aufgabe (7 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

eine Bijektion. Es sei vorausgesetzt, dass die Folge $f(g(n))$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert. Zeige, dass $f$ konstant ist.

### Lösung

Nehmen wir an, dass $f$ stetig, aber nicht konstant ist. Dann gibt es zwei Punkte $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq f(x')$. Sei $a = |f(x) - f(x')| > 0$ der Betrag der Differenz der Funktionswerte. Wir setzen $\epsilon = a/5$. Wegen der Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\delta' > 0$ derart, dass $f([x-\delta, x+\delta]) \subseteq [f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon]$ und $f([x'-\delta', x'+\delta']) \subseteq [f(x')-\epsilon, f(x')+\epsilon]$ ist. Da es in der $\delta$-Umgebung von $x$ und der $\delta'$-Umgebung von $x'$ unendlich viele rationale Zahlen gibt, gibt es auch unendlich viele Indizes der Folge mit $f(g(n)) \in [f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon]$ und unendlich viele Indizes mit $f(g(n)) \in [f(x')-\epsilon, f(x')+\epsilon]$.

Es sei $y$ der Grenzwert der Folge $f(g(n))$. Aufgrund der Konvergenz der Folge gibt es ein $n_0$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ alle Folgenglieder $f(g(n))$ in der $\epsilon$-Umgebung von $y$ liegen. Diese Umgebung ist aber zu mindestens einer der $\epsilon$-Umgebungen von $f(x)$ oder $f(x')$ disjunkt, so dass ein Widerspruch vorliegt.

## Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

### Lösung

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)\,.$$

Daher erfüllt $g$ die Voraussetzungen von Satz 15.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und somit gibt es ein $c \in\, ]a,b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

## Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

1. Bestimme die erste Ableitung von $f$.
2. Bestimme die zweite Ableitung von $f$.
3. Bestimme das Monotonieverhalten von $f$.
4. Ist $f$ injektiv?

Lösung

1. Es ist
$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$
2. Es ist
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)' \\ &= \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(1+e^x) - 2e^x e^x}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}. \end{aligned}$$
3. Die erste Ableitung ist stets positiv, daher ist die Funktion streng monoton wachsend.
4. Als streng wachsende Funktion ist die Funktion auch injektiv.

## Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad $\leq 2$ zur Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ im Nullpunkt.

Lösung

Die relevanten Ableitungen sind

$$f'(x) = 2x\cos(x^2)$$

und

$$f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)\,.$$

Daher ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2$. Das Taylor-Polynom zu dieser Funktion im Nullpunkt ist daher $x^2$.

## Aufgabe (4 Punkte)

Der Graph des quadratischen Polynoms

$$f(x) = x^2 - x - 3$$

und die $x$-Achse schließen eine Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Lösung

Die Nullstellen des Polynoms $x^2 - x - 3$ sind

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Die Fläche ist achsensymmetrisch zur $y$-Achse, deshalb ist der Flächeninhalt das Doppelte des Betrages von

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} x^2 - x - 3dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big|_0^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+3\sqrt{13}+3\cdot 13+13\sqrt{13}}{8}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{14+2\sqrt{13}}{4}\right) - 3 \cdot \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\
&= \frac{40+16\sqrt{13}-42-6\sqrt{13}-36-36\sqrt{13}}{24} \\
&= \frac{-38-28\sqrt{13}}{24} \\
&= \frac{-19-14\sqrt{13}}{12}.
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt ist also

$$\frac{19+14\sqrt{13}}{6}.$$

## Aufgabe (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & -1-3\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ 2+5\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Lösung

Man multipliziert die erste Zeile mit der Spalte rechts und erhält

$$(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+(-1-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})-(2+5\mathrm{i}) = 2+2\mathrm{i}-\mathrm{i}+1-1+\mathrm{i}-3\mathrm{i}-3-2-5\mathrm{i} = -3-6\mathrm{i}\,.$$

Die zweite Zeile multipliziert mit der Spalte rechts ergibt

$$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})+(4-2\mathrm{i})(2+5\mathrm{i}) = \mathrm{i}-1+8+20\mathrm{i}-4\mathrm{i}+10 = 17+17\mathrm{i}\,.$$

Das Ergebnis ist also der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} -3-6\mathrm{i} \\ 17+17\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und seien $U, V, W$ Vektorräume über $K$. Es seien

$$\varphi\colon U \to V \text{ und } \psi\colon V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Lösung

Für $u_1, u_2 \in U$ ist

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) &= \psi(\varphi(u_1 + u_2)) \\ &= \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \\ &= \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)\end{aligned}$$

und für $u \in U, s \in K$ ist

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(su) &= \psi(\varphi(su)) \\ &= \psi(s\varphi(u)) \\ &= s\psi(\varphi(u)) \\ &= s(\psi \circ \varphi)(u),\end{aligned}$$

was insgesamt die Linearität der Hintereinanderschaltung bedeutet.

## Aufgabe (7 (3+4) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über einem Körper $K$.

a) Zeige, dass es eine zu $M$ ähnliche Matrix gibt, in der mindestens ein Eintrag gleich $0$ ist.

b) Zeige, dass es nicht unbedingt eine zu $M$ ähnliche Matrix geben muss, in der mindestens zwei Einträge gleich $0$ sind.

Lösung

a) Es sei $v \in K^2, v \neq 0$. Wenn $v$ ein Eigenvektor zu $M$ zum Eigenwert $\lambda$ ist, so ergänzen wir $v$ durch einen Vektor $w \in K^2$ zu einer Basis. Bezüglich dieser Basis wird die durch $M$ gegebene lineare Abbildung durch eine zu $M$ ähnliche Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & r \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

beschrieben, es gibt also darin mindestens eine $0$. Wenn hingegen $v$ kein Eigenvektor ist, so sind $v$ und $w := \varphi(v)$ linear unabhängig und bilden eine Basis des $K^2$. Bezüglich dieser Basis wird die Abbildung durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

beschrieben.

b) Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ und behaupten, dass die dadurch gegebene lineare Abbildung die Eigenschaft hat, dass in jeder beschreibenden Matrix höchstens eine $0$ vorkommt. Es sei $N$ eine beschreibende Matrix. Jede beschreibende Matrix besitzt die gleiche Spur, die gleiche Determinante und das gleiche charakteristische Polynom wie $M$. Da die Determinante von $M$ gleich $1$ ist, können weder in einer Zeile noch in einer Spalte von $N$ zweimal eine $0$ stehen. In der Hauptdiagonalen können nicht zwei Nullen stehen, da dann die Spur $0$ sein müsste, diese ist aber $2$. Wenn in der Nebendiagonalen zwei Nullen stünden, so wäre $N$ eine Diagonalmatrix und $M$ wäre diagonalisierbar. Dies ist aber nach Beispiel 28.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) nicht der Fall.