Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/32/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	1	7	0	4	3	1	5	4	0	4	2	2	4	3	3	53

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.

2. Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n.
3. Eine *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von reellen Zahlen a_k.
4. Der *Arkuskosinus*.
5. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.
6. Die *transponierte Matrix* zu einer $m \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$.

Lösung

1. Unter der *leeren Menge* versteht man diejenige Menge, die kein Element besitzt.
2. Unter der Fakultät von n versteht man die Zahl
$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\,.$$
3. Unter der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,.$$
4. Der *Arkuskosinus*
$$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi],\; x \longmapsto \arccos x,$$
ist die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion.
5. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor
$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren

6. Man nennt die Matrix

$$M^{\text{tr}} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Quadratwurzel von 2.
2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus.
3. Der allgemeine Entwicklungssatz für die Determinante.

Lösung

1. Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. D.h. die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.
2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

3. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} \, .$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestätige die folgende Identität.

$$3^5 + 11^4 = 122^2 \, .$$

Lösung

Es ist

$$3^5 = 243$$

und

$$11^4 = 121^2 = 14641 \, .$$

Somit ist

$$3^5 + 11^4 = 243 + 14641 = 14884 \, .$$

Andererseits ist auch

$$122^2 = 14884 \, .$$

Aufgabe (2 Punkte)

Eine leere Flasche stand über Nacht draußen und es hat dann angefangen zu regnen. Am Morgen steht in der Flasche Wasser in einer Höhe von $\frac{1}{2}$ cm. Die Flaschenöffnung hat einen (inneren) Durchmesser von 2 cm und die Flasche hat einen Durchmesser von 6 cm. Wie viel Regen fiel in der Nacht (gemessen in Zentimetern)?

Lösung

Der Wasserinhalt in der Flasche ist

$$\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Diese Menge muss durch die Flaschenöffnung eingegangen sein, so dass sich die Bedingung

$$\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot 1^2 \cdot h$$

ergibt, wobei h die Regenmengenhöhe ist. Daher ist

$$h = 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Zeige, dass zwischen den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k+1}$ der Zusammenhang

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

besteht.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1} \cdot \frac{n-k}{k+1} \\ &= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise die Division mit Rest im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

Lösung

Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q=0$ und $R=P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P)=0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(TP)=0$, also ist T ein konstantes Polynom, und damit ist (da $T\neq 0$ und K ein Körper ist) $Q=P/T$ und $R=0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P)=n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P=a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0$ und $T=b_kX^k+\cdots+b_1X+b_0$ mit $a_n,b_k\neq 0,\ k\leq n$. Dann gilt mit $H=\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P-TH \\ &= 0X^n+\left(a_{n-1}-\frac{a_n}{b_k}b_{k-1}\right)X^{n-1}+\cdots+\left(a_{n-k}-\frac{a_n}{b_k}b_0\right)X^{n-k}+a_{n-k-1}X^{n-k-1}+\cdots+a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P'=TQ'+R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R')<\operatorname{grad}(T) \text{ oder } R'=0.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P=P'+TH=TQ'+TH+R'=T(Q'+H)+R',$$

so dass also $Q=Q'+H$ und $R=R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P=TQ+R=TQ'+R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q-Q')=R'-R$. Da die Differenz $R'-R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R=R'$ und $Q=Q'$ lösbar.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz.

Lösung

Wir behaupten, dass die Folge gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert. Zunächst haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}-n &= \sqrt{n(n+1)}-n\\ &= \sqrt{n^2+n}-n\\ &\leq \sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}-n\\ &= \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}-n\\ &= n+\frac{1}{2}-n\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sei nun $\alpha < \frac{1}{2}$ fixiert. Wir zeigen, dass die Folgenglieder für n hinreichend groß oberhalb von α liegen. Es ist

$$(1-2\alpha) > 0$$

und somit gilt für n hinreichend groß die Abschätzung

$$(1-2\alpha)n \geq \alpha^2 .$$

Für solche n ist dann auch

$$n^2+n \geq n^2+2\alpha n+\alpha^2 = (n+\alpha)^2 .$$

Also hat man für diese Folgenglieder die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}-n &= \sqrt{n^2+n}-n \\
&\geq \sqrt{(n+\alpha)^2}-n \\
&= n+\alpha-n \\
&= \alpha.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die harmonische Reihe divergiert.

Lösung

Für die 2^n Zahlen $k = 2^n+1,\ldots,2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1)\frac{1}{2}\,.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 7.10 (Mathematik_für_Anwender_(Osnabrück_2019-2020)) nicht konvergent sein.

Aufgabe (1 Punkt)

Skizziere den Graphen der Kosinusfunktion.

Lösung Reelle Kosinusfunktion/Skizziere/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die lineare Approximierbarkeit.

Lösung

Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} r(x) = \lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist.
Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x).$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren.

Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right) e^{3x}$$

ist.

Lösung

Die Ableitung von f ist nach der Produktregel

$$f'(x) = 2e^{3x} + 2x \cdot 3e^{3x} = \left(3^1 \cdot 2x + 2\right) e^{3x} = \left(3^1 \cdot 2x + 3^0 \cdot 2 \cdot 1\right) e^{3x}.$$

Dadurch ist die Gleichung für $n=1$ richtig und der Induktionsanfang ist gesichert. Sei die Gleichung nun für die n-te Ableitung schon bewiesen. Wegen $f^{(n+1)} = (f^n)'$ gilt somit

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n \right) e^{3x} \right)' \\ &= 3^n \cdot 2e^{3x} + 3 \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n \right) e^{3x} \\ &= \left(3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2 + 3^n \cdot 2n \right) e^{3x} \\ &= \left(3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2(n+1) \right) e^{3x} . \end{aligned}$$

Daher ist die Gleichung auch für die $(n+1)$-te Ableitung richtig.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1+\sin x)) \cdot \sin x .$$

Lösung

Wir verwenden partielle Integration und leiten den linken Faktor ab, das ergibt $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ und nehmen für den rechten Faktor die Stammfunktion $-\cos x$. Das ergibt

$$\int \ln(1+\sin x)\sin x dx = -\ln(1+\sin x)\cos x + \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\cos x dx\,.$$

Das rechte Integral ist

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\cos x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int 1-\sin x dx \\ &= x+\cos x.\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist somit

$$-\ln(1+\sin x)\cos x + x + \cos x,$$

was man durch ableiten bestätigt (deshalb mussten wir uns oben keine Gedanken über die Integrationsgrenzen machen).

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 7 & 3 & 0 & -7 \\ 6 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 7 & 3 & 0 & -7 \\ 6 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 & -23 \\ -1 & 25 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(5)\ \ 1u = u$$

erfüllt.

Lösung

Es sei $K = V$ ein beliebiger Körper. Wir betrachten die „Skalarmultiplikation"

$$K \times K \longrightarrow K,\ (r, u) \longmapsto r \bullet u,$$

die jedes Paar (r, u) auf 0 abbildet. Dann ist

$$1 \bullet u = 0 \neq u$$

und somit ist das letzte Vektorraumaxiom nicht erfüllt. Alle anderen Vektorraumaxiome sind hingegen erfüllt, da jeweils auf beiden Seiten stets 0 steht.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme, ob die drei Funktionen

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ und $h(x) = \cos x$ linear abhängig sind.

Lösung

Die Funktionen sind linear unabhängig. Wenn nämlich eine lineare Abhängigkeit vorliegen würde, so gelte

$$af + bg + ch = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, nicht alle 0. Dies gilt dann auch an jeder Stelle $P \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Stellen

$$P = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \, .$$

Die Werte der drei Funktionen an diesen Stellen sind

P	$f(P)$	$g(P)$	$h(P)$
0	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	π	0	-1

Die angenommene lineare Abhängigkeit bedeutet somit, dass die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2} & 1 & 0 \\ \pi & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind und ihre Determinante 0 sein muss. Die Entwicklung nach der ersten Zeile zeigt aber, dass die Determinante den Wert $-\pi$ hat.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Determinantenmultiplikationssatz für den Spezialfall, wo die linke der beteiligten Matrizen eine Diagonalmatrix ist.

Lösung Determinantenmultiplikationssatz/Diagonalmatrix/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Lösung

Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 bzw. -1. Somit bilden sie eine Basis aus Eigenvektoren und daher ist φ diagonalisierbar.