Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/7/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	$\sum$
Punkte	3	3	1	3	3	4	4	4	2	3	5	5	12	2	4	2	4	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung
   $$f\colon L \longrightarrow M.$$
2. Die *komplexe Konjugation*.
3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
4. Eine reelle *Potenzreihe*.
5. Die *Matrizenmultiplikation*.
6. Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

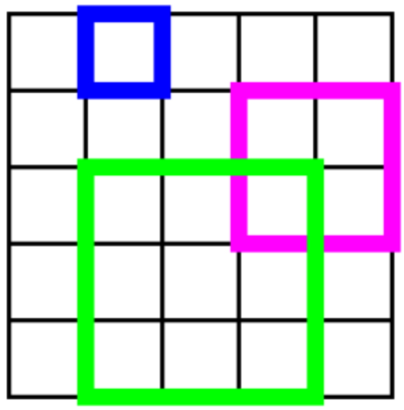
1. Der Satz über Konvergenz und absolute Konvergenz von reellen Reihen.
2. Die *Quotientenregel* für differenzierbare Funktionen
   $$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
3. Der Satz über n Vektoren in einem n-dimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe * (1 Punkt)

Wir betrachten den Satz „Diese Vorlesung versteht keine Sau“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

Aufgabe * (3 Punkte)

Wie viele Teilquadrate mit positiver Seitenlänge gibt es in einem Quadrat der Seitenlänge 5? Die Seiten der Teilquadrate sollen wie im Bild auf dem „Gitter“ liegen, ein einzelner Punkt gelte nicht als Quadrat.



Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Aufgabe * (4 (1+1+1+1) Punkte)

Bestimme, welche der folgenden Wertetabellen Abbildungen $\varphi \colon L \to M$ zwischen den angegebenen Mengen festlegen. Welche sind injektiv, welche surjektiv, welche bijektiv?

1. $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	b	e	f	h	e	g	c	d

2. $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	c	e		d	e	a	b	a

3. $L = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(x)$	c	f	d	e	h	b	a

4. $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

x	3	7	1	4	6	8	5	2
$\varphi(x)$	c	d	f	a	e	h	b	g

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Finde alle Lösungen $(a,b,c) \in K^3$, die das Gleichungssystem

$$a \cdot b = c\,,$$
$$b \cdot c = a\,,$$
$$a \cdot c = b$$

erfüllen.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente reelle Folge beschränkt ist.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

1. Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2\,.$$
2. Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2{,}5\,.$$

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

Für die Eulersche Zahl e seien die Abschätzungen

$$2,71 \leq e \leq 2,72$$

bekannt.

1. Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^2 sagen?
2. Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^{-1} sagen?

Aufgabe * (5 Punkte)

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise K_1 und K_2, wobei K_1 den Mittelpunkt $(3,4)$ und den Radius 6 und K_2 den Mittelpunkt $(-8,1)$ und den Radius 7 besitzt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise die *Quotientenregel* für differenzierbare Funktionen.

Aufgabe * (12 (1+3+1+1+1+2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1\,.$$

1. Bestimme die erste und die zweite Ableitung von f.
2. Bestimme die lokalen Extrema von f.
3. Wie viele reelle Nullstellen hat f?
4. Wie viele komplexe Nullstellen hat f?
5. Bestimme eine Gleichung für die Tangente durch das lokale Maximum der Funktion.
6. Bestimme die Schnittpunkte der Tangente mit dem Funktionsgraphen.
7. Die Tangente und der Funktionsgraph beschränken ein endliches Gebiet. Berechne dessen Flächeninhalt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme für die Teilmenge

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11} \leq a_{22} \right\} \subseteq \operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \, ,$$

welche der Untervektorraumaxiome erfüllt sind und welche nicht.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$