Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/60/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	6	4	3	4	12	4	3	2	4	4	6	3	5	3	6	1	79

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *angeordneter* Körper.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
3. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix M über einem Körper K.
6. Die *algebraische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow V$$
   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Lösung

1. Ein Körper K heißt *angeordneter Körper*, wenn es zwischen den Elementen von K eine Beziehung $>$ („größer als“) gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt ($a \geq b$ bedeutet

$a > b$ oder $a = b$).
   1. Für je zwei Elemente $a, b \in K$ gilt entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
   2. Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
   3. Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
   4. Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$).
2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
$$|x - x_n| \leq \epsilon$$
gilt.
3. Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes
$$\lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existiert.
4. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf I, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.
5. Die Matrix M heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit
$$A \circ M = E_n = M \circ A$$
gibt.
6. Den Exponenten des linearen Polynoms $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ nennt man die *algebraische Vielfachheit* von λ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Nullstellensatz*.
2. Der Satz über die Beziehung von Stetigkeit und Riemann-Integrierbarkeit.
3. Der Satz über *partielle Integration*.

Lösung

1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f \colon [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und

$f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$.

2. Sei I ein reelles Intervall und sei

   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

3. Es seien

   $$f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

   stetig differenzierbare Funktionen.

   Dann gilt

   $$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Aufgabe (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(x)$	4	7	4	5	1	1	2

gegebene Abbildung

$$\varphi\colon \{1,2,3,4,5,6,7\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

a) Bestimme das Bild von $\{1,2,3\}$ unter φ.

b) Bestimme das Urbild von $\{4,5,6,7\}$ unter φ.

c) Erstelle eine Wertetabelle für

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi .$$

Lösung

a) Das Bild von $\{1,2,3\}$ ist $\{4,7\}$.

b) Das Urbild von $\{4,5,6,7\}$ ist $\{1,2,3,4\}$.

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(x)$	1	7	1	4	5	5	2

Aufgabe (6 (2+4) Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung.

a) Zeige, dass es eine Menge N gibt und eine surjektive Abbildung

$$F\colon L \longrightarrow N$$

und eine injektive Abbildung

$$G\colon N \longrightarrow M$$

mit

$$\varphi = G \circ F\,.$$

b) Zeige, dass es eine Menge P gibt und eine injektive Abbildung

$$H\colon L \longrightarrow P$$

und eine surjektive Abbildung

$$I\colon P \longrightarrow M$$

mit

$$\varphi = I \circ H\,.$$

Lösung

a) Es sei $N = \varphi(L)$ das Bild von L unter der Abbildung φ. Wegen

$$N = \varphi(L) \subseteq M$$

ist N eine Teilmenge von M. Die Abbildung, die ein Element $y \in N$ auf sich selbst aber als Element in M auffasst, nennen wir G. Diese Abbildung ist injektiv. Die Abbildung

$$F\colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

ist wohldefiniert, da $\varphi(x)$ zu N gehört, und surjektiv, da N genau aus den Elementen besteht, die im Bild liegen. Dabei ist offenbar

$$\varphi = G \circ F .$$

b) Es sei

$$P = L \times M .$$

Wir betrachten die Abbildung

$$H: L \longrightarrow P = L \times M, \, x \longmapsto (x, \varphi(x)).$$

Diese ist injektiv, da aus

$$x \neq x'$$

folgt, dass

$$(x, \varphi(x)) \neq (x', \varphi(x'))$$

ist. Die Abbildung I sei durch

$$I: L \times M \longrightarrow M, \, (u, v) \longmapsto v,$$

gegeben. Diese ist surjektiv unter der Bedingung, dass L nicht leer ist. Insgesamt ist

$$(I \circ H)(x) = I(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$$

und somit

$$\varphi = I \circ H .$$

Falls L leer ist, so ist φ die sogenannte leere Abbildung und man kann $P = M$, $H = \varphi$ und $I = \mathrm{Id}_M$ nehmen.

Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, wir betrachten die Betragsabbildung

$$K \longrightarrow K, \, x \longmapsto |x|.$$

1. Ist diese Abbildung injektiv?
2. Ist diese Abbildung surjektiv?
3. Wir nennen die Betragsabbildung kurz φ. Was kann man über die Hintereinanderschaltungen $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \ldots$ in Bezug auf φ sagen?

4. Wir schränken die Betragsabbildung auf $K_{\leq 0}$ ein. Bestimme die Monotonieeigenschaft von
$$K_{\leq 0} \longrightarrow K,\, x \longmapsto |x|.$$

Lösung

1. Die Abbildung ist nicht injektiv, da
$$|-1| = |1| = 1$$
ist.
2. Die Abbildung ist nicht surjektiv, da negative Zahlen nicht als Betrag einer Zahl auftreten.
3. Alle Hintereinanderschaltungen stimmen mit der Betragsabbildung selbst überein, da sie einmal angewendet nur nichtnegative Zahlen ergibt und sie auf diesem Bereich identisch wirkt.
4. Im Bereich $K_{\leq 0}$ stimmt die Betragsabbildung mit der Negation überein und ist daher dort streng fallend.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K. Beschreibe die Menge
$$M = \{x \in K \mid -x \in [a, b]\}$$
als ein Intervall.

Lösung

Wir behaupten
$$M = [-b, -a]\,.$$
Die Negationsabbildung $x \mapsto -x$ ist streng fallend. Somit ist
$$\begin{aligned} M &= \{x \in K \mid -x \in [a, b]\} \\ &= \{x \in K \mid a \leq -x \leq b\} \\ &= \{x \in K \mid -a \geq -(-x) \geq -b\} \\ &= \{x \in K \mid -a \geq x \geq -b\} \\ &= [-b, -a]. \end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a < b$ rationale Zahlen. Zeige, dass es eine bijektive streng wachsende Abbildung

$$[0,1] \longrightarrow [a,b]$$

gibt, die rationale Zahlen in rationale Zahlen überführt.

Lösung

Wir definieren die Abbildung $\varphi: K \to K$ durch

$$\varphi(x) := (b-a)x + a\,.$$

Da es sich bis auf die Verschiebung um a um eine lineare Funktion mit einem positiven Proportionalitätsfaktor handelt, ist sie nach Fakt ***** (1) streng wachsend und auch bijektiv. Es ist offenbar $\varphi(0) = a$ und $\varphi(1) = b$. Somit ist

$$\varphi([0,1]) \subseteq [a,b]$$

und die Abbildung lässt sich auf die Intervalle zu einer bijektiven Abbildung einschränken. Für eine rationale Zahl $x = \frac{r}{s} \in [0,1]$ ist

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{r}{s}\right) = (b-a)\frac{r}{s} + a$$

wegen der Rationalität von a und b wieder rational.

Aufgabe weiter

Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0,1]$ aus. Das Intervall wird in drei gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das dritte (Regel 1). Das entstehende Intervall teilen wir in fünf gleichlange Teilintervalle ein und davon nehmen wir das vierte (Regel 2). Jetzt wenden wir abwechselnd Regel 1 und Regel 2 an, immer bezogen auf das zuvor konstruierte Intervall. Dabei entsteht eine Folge von Intervallen I_n, $n \in \mathbb{N}$ (I_0 ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

1. Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im zweiten Schritt konstruiert wird (also von I_2, nachdem einmal die Regel 1 und einmal die Regel 2 angewendet wurde).
2. Wie kann man den Konstruktionsschritt, der durch die einmalige

Hintereinanderausführung von Regel 1 und von Regel 2 gegeben ist, mit einer einzigen Regel ausdrücken?

3. Bestimme ein Intervall der Form $[\frac{a}{100}, \frac{a}{100}+\frac{1}{100}]$ mit $a \in \mathbb{N}$, das ganz in I_2 enthalten ist.
4. Erstelle eine Formel, die die untere Intervallgrenze des Intervalls I_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
5. Es gibt genau eine rationale Zahl c, die in jedem Intervall I_n enthalten ist. Bestimme c als Bruch.
6. Gibt es ein Ziffernsystem, in dem die rationale Zahl c aus (5) eine Ziffernentwicklung mit Periodenlänge 1 besitzt?

Lösung

1. Das im ersten Schritt konstruierte Intervall ist $[\frac{2}{3}, 1]$ (mit der Länge $\frac{1}{3}$). Dessen Unterteilung in fünf gleichlange Teile ist durch
$$[\frac{2}{3}+\frac{i}{15}, \frac{2}{3}+\frac{i+1}{15}],\ i=0,1,2,3,4,$$
gegeben. Das vierte Teilintervall davon ist
$$[\frac{2}{3}+\frac{3}{15}, \frac{2}{3}+\frac{4}{15}] = [\frac{10}{15}+\frac{3}{15}, \frac{10}{15}+\frac{4}{15}] = [\frac{13}{15}, \frac{14}{15}].$$
2. Teile das Vorgängerintervall in 15 gleichlange Teile und nehme davon das $14.$-te Teilintervall.
3. Bei der schriftlichen Division $13:15$ ergeben sich die Anfangsziffern $0,86$, bei der schriftlichen Division $14:15$ ergeben sich die Anfangsziffern $0,93$. Daher ist das Intervall $[0,87\,,\ 0,88]$ in I_2 enthalten (also $a=87$).
4. Die Länge des Intervalls I_{2k} ist $\left(\frac{1}{15}\right)^k$, da ja in jedem Doppelschritt das Vorgängerintervall in 15 Teile zerlegt wird und eins davon genommen wird. Es sei a_{2k} die untere Intervallgrenze von I_{2k}. Dann besteht der rekursive Zusammenhang
$$a_{2(k+1)} = a_{2k} + 13 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{k+1}.$$
Somit ist
$$a_{2k} = 13 \cdot \left(\frac{1}{15} + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{15}\right)^k\right) = 13 \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{15}\right)^i\right).$$

5. (und gleichzeitig (6)) Es handelt sich um $\frac{13}{14}$. Wenn man nämlich im 15-er System die Division $13:14$ durchführt, so erhält man zuerst eine 0. Die Division mit Rest zur Berechnung der nächsten Ziffer ergibt

   $$15 \cdot 13 = 13 \cdot 14 + 13 \,.$$

   Die erste Nachkommaziffer ist also 13 und der Rest ist ebenfalls 13. Damit wiederholt sich in der schriftlichen Division alles und es ergibt sich diejenige Zahl, bei der in der Ziffernentwicklung zur Basis 15 (die Vorkammaziffern 0 sind und) an jeder Nachkommastelle die Ziffer für 13 steht. Insbesondere ist die Periodenlänge gleich 1. Nach (dem analogen Resultat zur Basis 15 zu) Fakt ***** ist somit

   $$a_{2k} = \sum_{i=1}^{k} 13 \cdot 15^{-i} \leq \frac{13}{14} < \sum_{i=1}^{k} 13 \cdot 15^{-i} + 15^{-k} = a_{2k} + 15^{-k} \,,$$

   was die Grenzen des Intervalls I_{2k} sind.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $I = [a,b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K mit $0 \notin I$. Beschreibe die Menge

$$M = \left\{ x \in K \mid x^{-1} \in [a,b] \right\}$$

als ein Intervall.

Lösung

Wir behaupten

$$M = [b^{-1}, a^{-1}] \,.$$

Wegen $0 \notin I$ ist entweder $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$ oder $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_-$. Auf $\mathbb{R}_+$ und auf $\mathbb{R}_-$ ist die inverse Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ streng fallend. Somit ist

$$\begin{aligned} M &= \left\{ x \in K \mid x^{-1} \in [a,b] \right\} \\ &= \left\{ x \in K \mid a \leq x^{-1} \leq b \right\} \\ &= \left\{ x \in K \mid a^{-1} \geq \left(x^{-1}\right)^{-1} \geq b^{-1} \right\} \\ &= \left\{ x \in K \mid a^{-1} \geq x \geq b^{-1} \right\} \\ &= [b^{-1}, a^{-1}]. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $[a,b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K und es seien $x,y \in [a,b]$. Zeige

$$|y-x| \leq b-a\,.$$

Lösung

Es ist

$$x,y \leq b$$

und wegen $x,y \geq a$ ist

$$-x,-y \leq -a\,.$$

Bei $y \geq x$ ist somit

$$|y-x| = y-x \leq b+(-a) = b-a\,,$$

bei $y < x$ ist ebenfalls

$$|y-x| = -(y-x) = x-y \leq b+(-a) = b-a\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = X^3+4X^2+3X+4$ und $T = 3X^2+2X+1$ durch.

Lösung

Es ist

$$X^3+4X^2+3X+4 = \left(3X^2+2X+1\right)2X+X+4\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Lösung

Wir machen den Ansatz $x = y + c$. Einsetzen ergibt

$$(y+c)^5 + 10(y+c)^4 + y + c - 5 = 0,$$

wobei der Koeffizient zu y^4 gleich 0 werden soll. Dieser Koeffizient ist $5c + 10$, also muss man

$$c = -2$$

wählen. Damit wird das Polynom zu

$$\begin{aligned}
&= (y+c)^5 + 10(y+c)^4 + y + c - 5 \\
&= (y-2)^5 + 10(y-2)^4 + y - 2 - 5 \\
&= y^5 - 5 \cdot 2y^4 + 10(-2)^2 y^3 + 10(-2)^3 y^2 + 5(-2)^4 y - 2^5 \\
&\quad + 10(y^4 + 4(-2)y^3 + 6(-2)^2 y^2 + 4(-2)^3 y + 16) + y - 7 \\
&= y^5 + 40y^3 - 80y^2 + 80y - 32 - 80y^3 + 240y^2 - 320y + 160 + y - 7 \\
&= y^5 - 40y^3 + 160y^2 - 239y + 121
\end{aligned}$$

und die äquivalente Gleichung ist

$$y^5 - 40y^3 + 160y^2 - 239y + 121 = 0\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^4 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Lösung

Wir setzen $x = y - \frac{3}{4}$ an und drücken das Polynom bzw. die Gleichung in y aus. Es ist

$$\begin{aligned}
x^4 &= \left(y - \frac{3}{4}\right)^4 \\
&= y^4 - 4\frac{3}{4}y^3 + 6\frac{9}{16}y^2 - 4\frac{27}{64}y + \frac{81}{256} \\
&= y^4 - 3y^3 + \frac{27}{8}y^2 - \frac{27}{16}y + \frac{81}{256}, \\
3x^3 &= 3\left(y - \frac{3}{4}\right)^3 \\
&= 3\left(y^3 - 3\frac{3}{4}y^2 + 3\frac{9}{16}y - \frac{27}{64}\right) \\
&= 3y^3 - \frac{27}{4}y^2 + \frac{81}{16}y - \frac{81}{64}, \\
-5x^2 &= -5\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = -5\left(y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}\right) = -5y^2 + \frac{15}{2}y - \frac{45}{16}
\end{aligned}$$

und

$$2x = 2\left(y - \frac{3}{4}\right) = 2y - \frac{3}{2}.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}
x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 &= y^4 + \left(\frac{27}{8} - \frac{27}{4} - 5\right)y^2 + \left(-\frac{27}{16} + \frac{81}{16} + \frac{15}{2} + 2\right)y + \left(\frac{81}{256} - \frac{81}{64} - \frac{45}{16} - \frac{3}{2} - 7\right) \\
&= y^4 - \frac{67}{8}y^2 + \frac{103}{8}y - \frac{3139}{256}.
\end{aligned}$$

Eine äquivalente Gleichung ist also

$$y^4 - \frac{67}{8}y^2 + \frac{103}{8}y - \frac{3139}{256} = 0.$$

Aufgabe (6 (3+1+2) Punkte)

1. Bestimme diejenigen reellen Polynomfunktionen, die bijektiv sind und für die die Umkehrfunktion ebenfalls polynomial ist.
2. Man gebe ein Beispiel für eine bijektive reelle Polynomfunktion, für die die Umkehrfunktion kein Polynom ist.
3. Zeige, dass durch das Polynom X^5 eine bijektive Abbildung

   $$\mathbb{Z}/(7) \longrightarrow \mathbb{Z}/(7),\, x \longmapsto x^5,$$

   gegeben ist. Ist die Umkehrabbildung polynomial?

Lösung

1. Die einzigen reellen Polynome mit polynomialer Umkehrfunktion sind die Polynome der Form $aX+b$ mit
$$a \neq 0\,.$$
Für diese ist $\frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$ die Umkehrfunktion, da ja wegen
$$\frac{1}{a}(aX+b) - \frac{b}{a} = X + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = X$$
und
$$a\left(\frac{1}{a}X - \frac{b}{a}\right) + b = X - b + b = X$$
diese Funktionen invers zueinander sind. Wir zeigen, dass es darüberhinaus keine weiteren Polynome mit polynomialer Umkehrfunktion gibt. Ein konstantes Polynom ist nicht bijektiv. Sei also P ein Polynom, das zumindest einen Grad ≥ 2 besitzt. Wenn man darin ein weiteres nichtkonstantes Polynom einsetzt, ergibt sich aber ebenfalls ein Polynom vom Grad ≥ 2 und nicht X. D.h., dass P keine polynomiale Umkehrfunktion besitzen kann.

2. Die Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3,$$
ist bijektiv nach Fakt *****, nach Teil (1) kann aber die Umkehrfunktion nicht polynomial sein.

3. Die vollständige Wertetabelle zu dieser Funktion ist

x	0	1	2	3	4	5	6
x^5	0	1	4	5	2	3	6

also ist die Funktion bijektiv. Diese Funktion ist offenbar zu sich selbst invers, also ist die Umkehrfunktion polynomial.

Aufgabe (3 Punkte)

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K_+$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = (x_n)^{-1}$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Lösung

Bei $x_0 = 1$ ist die Folge konstant gleich 1, da ja 1 das inverse Element zu 1 ist. Diese Folge konvergiert. Für jeden anderen Startwert $x_0 \in K_+$, $x_0 \neq 1$, konvergiert die Folge nicht. Wegen

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

wechseln sich in der Folge x_0 und $(x_0)^{-1}$ ab, und bei positivem $x_0 \neq 1$ sind dies verschiedene Werte. Eine solche Folge kann aber nicht konvergieren.

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\epsilon' := \epsilon^2$ gibt es wegen der Nullkonvergenz von $x_n^2 - y_n^2$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left|x_n^2 - y_n^2\right| \leq \epsilon^2$$

für alle $n \geq n_0$ ist. Für diese n zeigen wir

$$|x_n - y_n| \leq \epsilon$$

durch eine Fallunterscheidung. Wenn

$$x_n, y_n \leq \epsilon$$

ist, so ist wegen der Positivität direkt $|x_n - y_n| \leq \epsilon$. Sei also umgekehrt $x_n \geq \epsilon$ oder $y_n \geq \epsilon$. Dann ist jedenfalls $x_n + y_n \geq \epsilon$ und somit $\frac{1}{x_n + y_n} \leq \frac{1}{\epsilon}$. Damit ist unter Verwendung der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} \vert x_n - y_n \vert &= \frac{\vert x_n^2 - y_n^2 \vert}{x_n + y_n} \\ &= \vert x_n^2 - y_n^2 \vert \cdot \frac{1}{x_n + y_n} \\ &\leq \epsilon^2 \cdot \frac{1}{\epsilon} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Lösung

Sei $B > 0$ eine Schranke für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu $\frac{\epsilon}{B}$ ein n_0 derart, dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $\vert x_n \vert \leq \frac{\epsilon}{B}$ gilt. Für diese Indizes ist dann auch

$$\vert x_n y_n \vert \leq \vert x_n \vert \cdot \vert y_n \vert \leq \frac{\epsilon}{B} \cdot B = \epsilon \, .$$

Aufgabe (6 (1+1+1+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \frac{1}{\ln x}.$$

a) Skizziere f.

b) Bestimme die Ableitung von f.

c) Bestimme die zweite Ableitung von f.

d) Untersuche f auf Extrema, Monotonieverhalten und Wendepunkte.

Lösung

a) Skizze.

b) Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}\,.$$

c) Es ist

$$f''(x) = \frac{(\ln x)^2 + x2(\ln x)\frac{1}{x}}{x^2(\ln x)^4} = \frac{(\ln x) + 2}{x^2(\ln x)^3}\,.$$

d) Wegen $0 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$ und daher ist die Funktion streng fallend und besitzt im offenen Einheitsintervall keine Extrema. Der Nenner von f'' ist stets negativ. Für den Zähler gilt

$$(\ln x) + 2 = 0$$

genau dann, wenn

$$x = e^{-2}\,.$$

Für $x < e^{-2}$ ist die zweite Ableitung negativ und für

$x > e^{-2}$ ist die zweite Ableitung positiv. Daher liegt bei $x = e^{-2}$ ein Wendepunkt vor.

Aufgabe (1 Punkt)

Es sei

$$\varphi\colon K^m \longrightarrow K^n$$

eine lineare Abbildung. Es sei $v \in K^m$. Zeige $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Lösung

Es ist

$$\varphi(v) + \varphi(-v) = \varphi(v - v) = \varphi(0) = 0\,.$$

Daher sind $\varphi(v)$ und $\varphi(-v)$ zueinander invers, und wegen der Eindeutigkeit des Negativen folgt

$$\varphi(-v) = -\varphi(v)\,.$$