Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/6/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	$\sum$
Punkte	3	3	1	3	5	5	4	7	7	4	4	3	4	2	2	7	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen
   $$F\colon L \longrightarrow M$$
   und
   $$G\colon M \longrightarrow N.$$
2. Eine *wachsende* reelle Folge.
3. Der *Arkuskosinus*.
4. Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Variablen über einem Körper K.
6. Die *inverse Matrix* zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Interpolation durch Polynome*.
2. Der *Satz von Rolle*.

3. Der Satz über die Monotonieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe * (1 Punkt)

Petra fliegt zu ihrer ersten internationalen Konferenz. Als sie auf dem Weg zum Flughafen ihre Wohnung (sie wohnt allein) verlässt und gerade die Wohnungstür zugemacht hat, merkt sie

1. Sie hat ihr Flugticket auf dem Schreibtisch vergessen.
2. Sie hat ihre Schlüssel auf dem Schreibtisch vergessen.
3. Sie hat ihren Reisepass auf dem Schreibtisch vergessen.

Was ist am schlimmsten?

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$(r \rightarrow (p \wedge \neg q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg r \vee q))$$

allgemeingültig ist

Aufgabe * (5 (2+3) Punkte)

Es seien

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f) \,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise die allgemeine binomische Formel.

Aufgabe * (4 Punkte)

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe * (7 (3+1+3) Punkte)

Sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

($n \in \mathbb{N}_+$).

1. Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
2. Zeige, dass sämtliche Folgenglieder ≥ 1 sind.
3. Zeige, dass die Folge gegen 1 konvergiert ist.

Aufgabe * (7 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

eine Bijektion. Es sei vorausgesetzt, dass die Folge $f(g(n))$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert. Zeige, dass f

konstant ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe * (4 (1+1+1+1) Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

1. Bestimme die erste Ableitung von f.
2. Bestimme die zweite Ableitung von f.
3. Bestimme das Monotonieverhalten von f.
4. Ist f injektiv?

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 2 zur Funktion $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ im Nullpunkt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Der Graph des quadratischen Polynoms

$$f(x) = x^2 - x - 3$$

und die x-Achse schließen eine Fläche ein. Bestimme deren Flächeninhalt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & -1-3\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ 2+5\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien U,V,W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi: U \to V \text{ und } \psi: V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi: U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe * (7 (3+4) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über einem Körper K.

a) Zeige, dass es eine zu M ähnliche Matrix gibt, in der mindestens ein Eintrag gleich 0 ist.

b) Zeige, dass es nicht unbedingt eine zu M ähnliche Matrix geben muss, in der mindestens zwei Einträge gleich 0 sind.