Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/33/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	2	2	4	1	4	0	4	4	6	0	0	4	4	3	5	54

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.
2. Die *Gaußklammer* einer reellen Zahl x.

3. Eine *streng fallende* Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
4. Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

   $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. *Äquivalente* (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge über einem Körper K.
6. Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix M.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Existenz der Primfaktorzerlegung.
2. Der Satz über die Ableitung von Potenzfunktionen $x \mapsto x^\alpha$.
3. Der *Determinantenmultiplikationssatz*.

Aufgabe (3 Punkte)

Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: „Das Prinzip „Beweis durch Widerspruch“ ist offenbar absurd. Wenn man alles annehmen darf, so kann man immer einen Widerspruch erzielen und somit alles beweisen“.

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne

$$0{,}00000029 \cdot 0{,}00000000037.$$

Das Ergebnis soll in einer entsprechenden Form angegeben werden.

Aufgabe * (2 Punkte)

Zeige

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Berechne

$$(x + \mathrm{i}y)^n.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme den Exponenten, die Potenz und die Basis im Ausdruck

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$$

ein Polynom vom Grad 2. Zeige, dass der Durchschnitt des Graphen der Funktion mit jeder Tangenten an den Graphen aus genau einem Punkt besteht.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die *Kettenregel* für differenzierbare Funktionen.

Aufgabe * (6 Punkte)

Für ein Mathematikbuch soll der Graph der Exponentialfunktion über dem Intervall $[-5, 3]$ maßstabsgetreu in cm gezeichnet werden, wobei der Fehler maximal $0,001$ cm sein darf. Es steht nur ein Zeichenprogramm zur Verfügung, das lediglich Polynom zeichnen kann. Welches Polynom kann man nehmen?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 5x & +2y & +z & -7w & = & 3 \\ 6x & +y & +2z & & = & 1 \\ x & +y & -z & & = & 0 \\ 3x & +5y & -7z & +14w & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit

$$M^2 + 3M - 4E_2 = 0\,.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zueinander ähnlich sind.

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, v \longmapsto Mv.$$