Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/36/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	3	4	6	3	4	2	6	0	0	3	0	3	5	0	2	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.

2. Die *komplexe Konjugation*.
3. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
4. Ein *isoliertes* lokales Minimum einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
5. Der *Arkussinus*.
6. Ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Variablen über einem Körper K.

Lösung

1. Man nennt die Menge
   $$L \times M = \{(x, y) \mid x \in L,\, y \in M\}$$
   die *Produktmenge* der Mengen L und M.

2. Die Abbildung
   $$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + b\mathrm{i} \longmapsto \overline{z} = a - b\mathrm{i},$$
   heißt komplexe Konjugation.

3. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
   $$|x - x_n| \leq \epsilon$$
   gilt.

4. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein *isoliertes lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in \mathbb{R}$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ und $x' \neq x$ die Abschätzung
   $$f(x) < f(x')$$

gilt.

5. Der *Arkussinus*

$$[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ x \longmapsto \arcsin x,$$

ist die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion.

6. Das System

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

heißt ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem*, wobei die a_{ij} und die c_i aus K sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms* über einem Körper K.
2. Die *Regel von l'Hospital*.
3. Der Satz über die Multilinearität der Determinante (mit Erläuterung).

Lösung

1. Ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ vom Grad d besitzt maximal d Nullstellen.

2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien

   $$f, g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

   $$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

   $$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

   und sein Wert ist ebenfalls w.

3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante

   $$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

   multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für je $n - 1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Konzept der *Wohldefiniertheit* anhand eines typischen Beispiels.

Lösung Wohldefiniertheit/Typisches Beispiel/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 (0.5+0.5+0.5+0.5) Punkte)

Wir betrachten die Wertetabelle

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2	5	4	-1	3	5	-2	2

1. Berechne $a_2 + a_5$.
2. Berechne $\sum_{k=3}^{6} a_k$.
3. Berechne $\prod_{i=0}^{3} a_{2i+1}$.
4. Berechne $\sum_{i=4}^{5} a_i^2$.

Lösung

Es ist

1.

$$a_2 + a_5 = 5 + 3 = 8\,.$$

2.

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 4 - 1 + 3 + 5 = 11\,.$$

3.

$$\prod_{i=0}^{3} a_{2i+1} = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot a_7 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2) = -48\,.$$

4.

$$\sum_{i=4}^{5} a_i^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Lösung

Wir beweisen die Existenz durch Induktion über n. Für $n = 2$ liegt eine Primzahl vor. Bei $n \geq 3$ ist entweder n eine Primzahl, und diese bildet die Primfaktorzerlegung, oder aber n ist keine Primzahl. In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Zerlegung $n = ab$ mit kleineren Zahlen $a, b < n$. Für diese Zahlen gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Zerlegung in Primfaktoren, und diese setzen sich zu einer Primfaktorzerlegung für n zusammen.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}2^i=(-1)^n\,.$$

Lösung

Der Induktionsanfang bei $n=1$ ist klar. Unter Verwendung der Pascalschen Rekursionsformel und der Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}2^i &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)2^i\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}2^i+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\binom{n}{i-1}2^i\\ &= (-1)^n-2\cdot\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{n}{i-1}2^{i-1}\\ &= (-1)^n-2\cdot\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}2^j\\ &= (-1)^n-2(-1)^n\\ &= (-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe (6 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X-a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Lösung

Wir arbeiten mit normierten Polynomen und schreiben

$$P = (X-a_1)^{n_1}(X-a_2)^{n_2}\cdots(X-a_r)^{n_r}$$

mit verschiedenen a_i und führen Induktion über den Grad $d = \sum_{j=1}^{r} n_j$ von P. Die Teilbarkeitsbeziehung bedeutet die Existenz eines Polynoms Q mit

$$P = QT\,.$$

Damit ist

$$T(a_1)\cdot Q(a_1) = P(a_1) = 0\,.$$

Aufgrund der Nichtnullteilereigenschaft in einem Körper gilt $T(a_1)=0$ oder $Q(a_1)=0$. Nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) bedeutet dies, dass T oder Q von $X-a_1$ geteilt wird. Im zweiten Fall schreiben wir

$$\begin{aligned}(X-a_1)^{n_1}(X-a_2)^{n_2}\cdots(X-a_r)^{n_r} &= (X-a_1)(X-a_1)^{n_1-1}(X-a_2)^{n_2}\cdots(X-a_r)^{n_r}\\ &= TQ'(X-a_1).\end{aligned}$$

Aufgrund der Nichtnullteilereigenschaft im Polynomring folgt daraus

$$P' = (X - a_1)^{n_1 - 1}(X - a_2)^{n_2} \cdots (X - a_r)^{n_r} = TQ'$$

und wir können auf P' die Induktionsvoraussetzung anwenden. Im ersten Fall ist

$$T = T'(X - a_1)\,,$$

woraus sich

$$(X - a_1)(X - a_1)^{n_1 - 1}(X - a_2)^{n_2} \cdots (X - a_r)^{n_r} = (X - a_1)T'Q$$

und somit

$$P' = (X - a_1)^{n_1 - 1}(X - a_2)^{n_2} \cdots (X - a_r)^{n_r} = T'Q$$

ergibt. Die Induktionsvoraussetzung angewendet auf P' bedeutet, dass T' in Linearfaktoren zerfällt und dass nur Linearfaktoren aus P' mit einer Vielfachheit vorkommen, die durch die Vielfachheit von P' beschränkt ist. Da die Vielfachheiten zu $X - a_j$ in P und in P' für $j \geq 2$ übereinstimmen und die Vielfachheit von $X - a_1$ sich um 1 reduziert, dies aber auch beim Übergang von T nach T' zutrifft, folgt die Aussage.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a > b > 0$ Elemente aus K. Zeige

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{a}\,.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b} &= \frac{a+b}{(a-b)(a+b)}+\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\\ &= \frac{2a}{(a-b)(a+b)}\\ &= \frac{2a}{a^2-b^2}\\ &\geq \frac{2a}{a^2}\\ &= \frac{2}{a},\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass Quadrate positiv und daher $a^2-b^2 \leq a^2$ ist.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$. Zeige, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x}$$

ist.

Lösung

Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht 0 ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon |x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2 .$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}| = |\frac{x_n - x}{x x_n}| = \frac{1}{|x||x_n|}|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon |x|^2}{2} = \epsilon .$$

Aufgabe (2 Punkte)

Hans will sich ein Frühstücksei kochen. Im Moment, als er das Ei in das kochende Wasser eintaucht, zeigt seine Uhr $7:21$ (die Uhr läuft genau und hat keine Sekundenangabe). Als er das nächste Mal auf die Uhr schaut, zeigt sie $7:26$ an. Bestimme das Infimum, Minimum, Supremum, Maximum der Zeit, die das Ei zwischen den beiden Momenten im Wasser ist.

Lösung

Wir messen die Zeit in Minuten nach 7 Uhr. Der Eintauchzeitpunkt ist eine Zahl $a \in [21, 22[$, der rechte Rand ist nicht möglich, da die Uhr dann schon $7:22$ anzeigen würde. Der zweite Moment wird durch $b \in [26, 27[$ beschrieben. Es ist also

$$21 \leq a < 22$$

und

$$26 \leq b < 27\,,$$

wobei die Abschätzungen optimal sind. Die Differenz ist nach unten durch

$$b - a > 26 - 22 = 4$$

beschränkt. Da diese Abschätzung optimal ist, folgt, dass das Infimum gleich 4 ist und dass das Minimum nicht existiert. Die Differenz ist nach oben durch

$$b - a < 27 - 21 = 6$$

beschränkt. Das Supremum ist also 6 und das Maximum existiert nicht.

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Lösung

Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0).$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \quad \text{und} \quad b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \quad \text{und} \quad b_1 := c_0 \, .$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}}dx.$$

Lösung

Wir arbeiten mit der bijektiven Substitution

$$y = \sqrt[3]{5x+1}$$

mit der Umkehrfunktion

$$x = \frac{y^3 - 1}{5}$$

und

$$dx = \frac{3y^2}{5}dy\,.$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}}dx &= \int_1^{\sqrt[3]{6}} \frac{\frac{y^3-1}{5}}{y} \cdot \frac{3y^2}{5}dy \\
&= \frac{3}{25}\int_1^{\sqrt[3]{6}} y^4 - ydy \\
&= \frac{3}{25}[\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{2}y^2]_1^{\sqrt[3]{6}} \\
&= \frac{3}{25}\left(\frac{1}{5}\sqrt[3]{6}^5 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{125}6^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{50}6^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{250}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen über $\mathbb{Q}$ gegeben. Die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen seien Geraden. Skizziere die drei Möglichkeiten, wie die Lösungsmenge des Systems aussehen kann.

Aufgabe (5 (2+3) Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

1. Zeige, dass die Polynomfunktionen
$$\varphi_d \colon K \longrightarrow K, \, x \longmapsto x^d,$$
mit $0 \leq d < q$ linear unabhängig sind.

2. Zeige, dass die Exponentialfunktionen
$$\psi_b \colon K \longrightarrow K, \, x \longmapsto b^x,$$
mit $0 \leq b < q$ linear unabhängig sind.

Lösung

1. Nach dem Interpolationssatz kann man jede Abbildung
$$f \colon K \longrightarrow K$$
eindeutig als ein Polynom vom Grad $< q$ schreiben. Wegen der Eindeutigkeit sind die Potenzfunktionen $x \mapsto x^d$ linear unabhängig.

2. Wir betrachten die $q \times q$-Matrix
$$(b^d)_{0 \leq b,d \leq q-1} .$$

In der d-ten Spalte stehen alle Werte (eine vollständige Wertetabelle) von x^d (an den Stellen b). Diese Tupel sind nach Teil (1) linear unabhängig. In der b-ten Zeile stehen alle Werte der Exponentialfunktion zur Basis b (an den Stellen d). Nach Korollar 26.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) sind mit den Spalten auch die Zeilen linear unabhängig. Somit sind die Exponentialfunktionen linear unabhängig.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Aussage: Es sei λ ein Eigenwert zur oberen Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\lambda = d_n \,.$$

Beweis: Es sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix zum Eigenwert λ. Dies bedeutet die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Diese Gleichheit bedeutet die entsprechende Gleichheit in jeder Zeile. Speziell ergibt sich für die letzte Zeile die Bedingung

$$d_n x_n = \lambda x_n \,.$$

Da x als Eigenvektor von 0 verschiedenen sein muss, kann man durch x_n dividieren und erhält $d_n = \lambda$. “

Lösung

Es ist zwar

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

dies bedeutet aber nur, dass mindestens eine Komponente nicht 0 ist. Der letzte Eintrag kann 0 sein, und dann kann man die behauptete Division nicht durchführen.