Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/21/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	6	4	4	4	2	4	0	0	5	0	2	4	0	5	0	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.

2. Ein *Polynom* über einem Körper K in einer Variablen X.
3. Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
4. Der *Arkussinus*.
5. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Der *Kern* einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.
2. Ein Ausdruck der Form

   $$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

   mit $a_i \in K \text{ und } n \in \mathbb{N}$

   heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

3. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in x.

4. Der *Arkussinus*
$$[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\, x \longmapsto \arcsin x,$$
ist die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion.

5. Die Funktion
$$I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$
heißt die Integralfunktion zu f zum Startpunkt a.

6. Man nennt
$$\operatorname{kern} \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$
den *Kern* von φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Nullstellensatz*.
2. Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion*.
3. Der Satz über die Eigenschaft der Determinante, *alternierend* zu sein (mit Erläuterung).

Lösung

1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$.
2. Es sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$
eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.
3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante
$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$
alternierend. D.h. wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist
$$\det M = 0.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Anna kann sich nicht zwischen Heinrich und Konrad entscheiden, deshalb lässt sie sich vom Zufall leiten. Sie wohnt an einer U-Bahn-Station der Linie 5, die von Heinsheim nach Konsau fährt. Heinrich wohnt in Heinsheim und Konrad in Konsau. Wenn Anna Lust auf ein Date hat, geht sie einfach zu ihrer Station und nimmt die erstbeste U-Bahn, die gerade kommt. Die U-Bahnen fahren in beide Richtungen im Zehn-Minuten-Takt und die U-Bahnen nach Heinsheim fahren $:01, :11, :21$ etc. Nach einiger Zeit stellt Anna fest, dass sie Konrad viermal so häufig besucht wie Heinrich. Wann fahren die U-Bahnen nach Konsau ab?

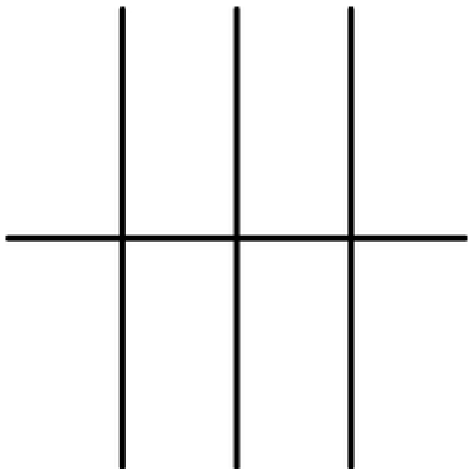
Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, dass als erstes eine U-Bahn nach Konsau kommt, muss viermal so groß sein wie die Wahrscheinlichkeit, dass zuerst eine U-Bahn nach Heinsheim kommt. Deshalb muss in einem Zehn-Minuten-Intervall acht Minuten lang eine U-Bahn nach Konsau die nächste sein (und zwei Minuten lang eine U-Bahn nach Heinsheim). Die U-Bahnen nach Konsau fahren also $:09, :19, :29$ etc. ab.

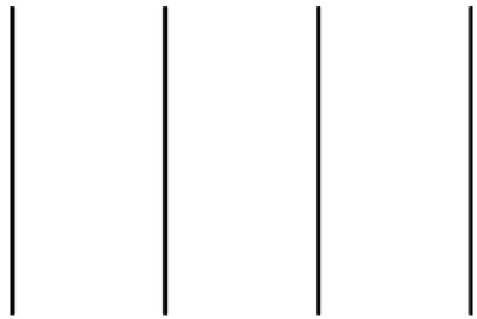
Aufgabe (2 Punkte)

1. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in genau drei Punkten schneiden.
2. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in keinem Punkt schneiden.
3. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.
4. Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in sechs Punkten schneiden.

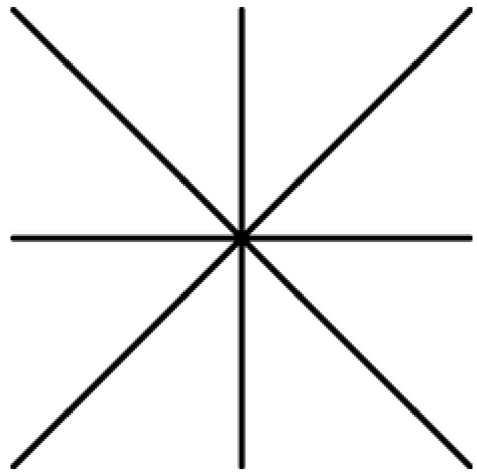
Lösung

1. 

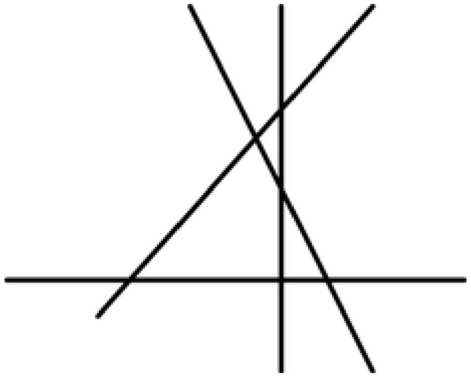
2.



3.



4.



Aufgabe (6 (3+3) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine bijektive Abbildung mit der Umkehrfunktion f^{-1}. Zeige die folgenden Aussagen.

1. f ist genau dann streng wachsend, wenn f^{-1} streng wachsend ist.

2. f ist genau dann streng fallend, wenn f^{-1} streng fallend ist.

Lösung

Wegen der Symmetrie der Situation muss man für beide Aussagen nur die Hinrichtung zeigen.

1. Sei f streng wachsend und $u > v$ aus K. Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x, y \in K$ mit $f(x) = u$ und $f(y) = v$. Für diese gilt
   $x > y$,
   da sich andernfalls direkt ein Widerspruch zum strengen Wachstum von f ergibt. Somit ist
   $$f^{-1}(u) = x > y = f^{-1}(v)$$
   und f^{-1} ist ebenfalls streng wachsend.

2. Sei f streng fallend und $u > v$ aus K. Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x, y \in K$ mit $f(x) = u$ und $f(y) = v$. Für diese gilt
   $x < y$,
   da sich andernfalls, aus $x \geq y$ wegen der Voraussetzung an f, streng fallend zu sein, direkt der Widerspruch $u = f(x) \leq f(y) = v$ ergibt. Somit ist
   $$f^{-1}(u) = x < y = f^{-1}(v)$$
   und f^{-1} ist ebenfalls streng fallend.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \, .$$

Lösung

Der Induktionsanfang für $n = 2$ ist durch

$$f_3 \cdot f_1 - f_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$$

gesichert. Sei also die Aussage für ein n schon bewiesen und betrachten wir die Aussage für $n+1$. Es ist

$$\begin{aligned} f_{n+2} f_n - f_{n+1}^2 &= (f_n + f_{n+1}) f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_n^2 + f_{n+1} f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_n^2 + f_{n+1}(f_n - f_{n+1}) \\ &= f_n^2 + f_{n+1}(f_n - f_n - f_{n-1}) \\ &= f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1} \\ &= (-1)\left(f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2\right) \\ &= (-1)(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P.

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n$ gilt.

Lösung

Es seien x und y die Grenzwerte der beiden Folgen. Sei

$$x < y$$

angenommen. Wir setzen

$$\delta := y - x$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{3} \cdot \delta > 0\,.$$

Dann sind die ϵ-Umgebungen $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ und $[y-\epsilon, y+\epsilon]$ disjunkt. Zu diesem ϵ gibt es ein (gemeinsames) n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder $x_n \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$ und die Folgenglieder $y_n \in [y-\epsilon, y+\epsilon]$ liegen. Somit ergibt sich

$$x_n \leq x+\epsilon < y-\epsilon \leq y_n\,,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe (2 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k .$$

Lösung

Nach Satz 9.13 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\,.$$

Angewendet auf $x = -z$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}\,.$$

Es folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k = \frac{1}{1+z}\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Lösung

Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 12.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = c_n \, ,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Lösung

Es sei

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Da f selbst stetig ist, gilt diese Beziehung insbesondere für $g = f$, es ist also

$$\int_a^b f(x)^2 dx = 0\,.$$

Nehmen wir an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Sei $c \in [a,b]$ mit $f(c) \neq 0$. Dann ist $f(c)^2 = \epsilon > 0$ und da f^2 stetig ist, gibt es ein Teilintervall $c \in [s,t] \subseteq [a,b]$, worauf die Werte der Funktion f^2 mindestens so groß wie $\epsilon/2$ sind. Wegen $f^2 \geq 0$ ist daher

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)dx &= \int_a^s f^2(x)dx + \int_s^t f^2(x)dx + \int_t^b f^2(x)dx \\ &\geq \int_s^t f^2(x)dx \\ &\geq (t-s)\frac{\epsilon}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Lösung

Die Gerade wird in Punktvektorform durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \mid t \in \mathbb{Q} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$$

beschrieben. Die Gleichungsform hat somit die Gestalt

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 10x + 3y = c \right\}$$

mit einem zu bestimmenden c. Einsetzen des Punktes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt $c = 29$, also ist

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 10x + 3y = 29 \right\}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $v_1, v_2, v_3, \ldots$ eine Aufzählung (ohne Wiederholung) der Elemente aus V. Nach wie vielen Elementen kann man sich sicher sein, dass diese ein Erzeugendensystem von V sind?

Lösung

Wegen der Isomorphie

$$V \cong K^n$$

besitzt V genau q^n Elemente. Der „schlechteste“ Fall ist, dass die Elemente $v_1, v_2, \ldots$ zuerst alle Elemente eines $n-1$-dimensionalen Untervektorraumes durchlaufen. Ein solcher hat q^{n-1} Elemente. Da es in der Tat möglich ist, dass die ersten q^{n-1} Elemente in einem echten Untervektorraum liegen, muss man einen Schritt weiter gehen. Die ersten $q^{n-1}+1$-te Elemente können allerdings nicht mehr in einem niedrigerdimensionalen Untervektorraum liegen, sondern erzeugen den vollen Raum.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A, B, C und D schreiben kann. Zeige durch ein Beispiel, dass die Beziehung

$$\det M = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Lösung

Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit den 2×2-Untermatrizen A, B, C, D wie in der Aufgabenstellung. Dann ist

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Um die wahre Determinante auszurechnen, führen wir Zeilenoperationen durch. Wir ersetzen die dritte Zeile durch $III - I$ und die vierte Zeile durch $IV - II$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren zur vierten Zeile die dritte Zeile hinzu und erhalten die obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

bei der alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sind. Daher ist diese Matrix und damit auch die Ausgangsmatrix invertierbar und die Determinante ist nach Satz 26.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) nicht 0.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung