Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/47/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	2	2	1	1	6	4	0	2	5	5	2	1	6	0	4	51

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).

2. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
3. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $-\infty$.
4. Die reelle *Exponentialfunktion* zu einer Basis $b > 0$.
5. Der *Kosinus hyperbolicus*.
6. *Ähnliche* Matrizen $M, N \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Lösung

1. Die Menge
$$\mathbb{R}^2$$
mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch
$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$
definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*.

2. Der Grad eines von 0 verschiedenen Polynoms
$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$
mit $a_n \neq 0$ ist n.

3. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit
$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N$$
gibt.

4. Die *Exponentialfunktion zur Basis* b ist als

$$b^x := \exp(x \ln b)$$

definiert.

5. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

6. Die Matrizen M, N heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix B mit $M = BNB^{-1}$ gibt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *allgemeine binomische Formel* für $(a+b)^n$.
2. Die *Produktregel* für reelle Folgen.
3. Der *Basisaustauschsatz*.

Lösung

1. Für a, b in einem Körper K gilt

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} .$$

2. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis

   $b_1, \ldots, b_n$.

   Ferner sei

   $$u_1, \ldots, u_k$$

   eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V. Dann gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = I$ derart, dass die Familie

   $$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J,$$

   eine Basis von V ist.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten auf der Menge

$$M = \{a, b, c, d\}$$

die durch die Tabelle

$\star$	a	b	c	d
a	c	a	a	a
b	d	d	b	b
c	a	b	c	c
d	b	a	d	d

gegebene Verknüpfung $\star$.

1. Berechne
$$b \star (c \star (d \star a)).$$
2. Besitzt die Verknüpfung $\star$ ein neutrales Element?

Lösung

1. Es ist
$$b \star (c \star (d \star a)) = b \star (c \star b) = b \star b = d$$
2. Die Verknüpfung besitzt kein neutrales Element, da die Leitzeile in der Verknüpfungstabelle nicht als Ergebniszeile wiederkehrt.

Aufgabe (2 Punkte)

Erstelle das Pascalsche Dreieck bis $n = 6$.

Lösung

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5     10    10    5     1
1     6     15    20    15    6     1
```

Aufgabe (2 Punkte)

Schreibe die Menge

$$]{-3},-2[\cup\{7\}\cup\left([-\frac{5}{2},-\frac{1}{3}]\setminus]-\frac{4}{3},-1]\right)\cup[1,\frac{7}{3}]\cup[-\frac{1}{2},\frac{6}{5}[\cup(]{-7},-6]\cap\mathbb{R}_+)$$

als eine Vereinigung von möglichst wenigen disjunkten Intervallen.

Lösung

Der rechte Klammerausdruck ist leer und der linke Klammerausdruck ist

$$[-\frac{5}{2},-\frac{1}{3}]\setminus]-\frac{4}{3},-1]=[-\frac{5}{2},-\frac{4}{3}]\cup]-1,-\frac{1}{3}].$$

Somit ist die Gesamtmenge gleich

$$]{-3},-\frac{4}{3}]\cup[-\frac{1}{2},\frac{7}{3}]\cup[7,7].$$

Aufgabe (2 Punkte)

Setze in das Polynom $-5X^3 - X^2 + \sqrt{2}X + \sqrt{5}$ die Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ein.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}(-5X^3 - X^2 + \sqrt{2}X + \sqrt{5})\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= -5\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^3 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{5} \\ &= -5\left(\sqrt{2}^3 + 3\sqrt{2}^2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^3\right) - \left(\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \right. \\ &= -5\left(2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right) - \left(2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\right) + 2 + \sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= -5\left(11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}\right) - 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{5} \\ &= -55\sqrt{2} - 45\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{3} - 3 + \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme, ob die reelle Zahl

$$\sqrt{1000000000000000000000000000000}$$

rational ist oder nicht.

Lösung

Es ist

$$\sqrt{10000000000000000000000000000} = \sqrt{10^{28}} = 10^{14}$$

eine rationale Zahl.

Aufgabe (1 Punkt)

Erläutere die geometrische Relevanz des geometrischen Mittels.

Lösung Geometrisches Mittel/Geometrische Relevanz/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Lösung

Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$. Dann ist

$$(X-a_1) \cdots (X-a_{i-1})(X-a_{i+1}) \cdots (X-a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i. Nennen wir dieses Polynom P_i. Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 6.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)).

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Produktfolge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\rightarrow\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\rightarrow\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\rightarrow\infty} y_n\right)$$

ist.

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 7.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C := \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion ohne Nullstelle. Bestimme die Ableitung von $g(x) = \frac{(f(x))^n}{f(x^n)}$ für $n \in \mathbb{N}_+$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x) \cdot f(x^n) - (f(x))^n \cdot f'(x^n) \cdot nx^{n-1}}{(f(x^n))^2} \\ &= n(f(x))^{n-1} \cdot \frac{f'(x) \cdot f(x^n) - f(x) f'(x^n) x^{n-1}}{(f(x^n))^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + \sin x,$$

genau zwei Nullstellen besitzt.

Lösung

Bei $x = 0$ liegt eine Nullstelle vor. Auf $]0, \pi[$ sind beide Summanden positiv, und für $x \geq \pi$ ist $x^2 \geq 9$, so dass, da $\sin x$ zwischen -1 und 1 liegt, jenseits von 0 keine Nullstelle liegen kann. Für $x < -1$ ist wiederum $x^2 > 1$, so dass unterhalb von -1 auch keine Nullstelle liegen kann. Für das Intervall $[-1, 0]$ ziehen wir die Ableitung heran. Es ist

$$f'(x) = 2x + \cos x \,.$$

Beide Funktion sind in diesem Intervall streng wachsend, daher ist die Ableitung streng wachsend und besitzt auf $]-1, 0[$ höchstens eine Nullstelle. Es ist $f'(0) = 1 > 0$, so dass im Nullpunkt kein lokales Extremum vorliegen kann. Daher muss die Funktion auf $]-1, 0[$ auch negative Werte annehmen. Wegen $f(-1) = 1 + \sin(-1) > 0$ muss f nach dem Zwischenwertsatz in $]-1, 0[$ mindestens eine weitere Nullstelle besitzen. Wenn es zwei Nullstellen $-1 < c < d < 0$ geben würde, so hätte nach dem Satz von Rolle die Ableitung sowohl auf $]c, d[$ als auch auf $]d, 0[$ eine Nullstelle, was wir schon ausgeschlossen haben.

Aufgabe (5 Punkte)

Es seien a, b, x, y positive reelle Zahlen und es gelte

$$a^x < b^y \,.$$

Zeige, dass es positive rationale Zahlen c, z mit

$$a^x < c^z < b^y$$

gibt.

Lösung

Es sei x_n eine rationale echt fallende Folge (bei $a \geq 1$; bei $a < 1$ wählen wir eine rationale echt wachsende positive Folge), die gegen x konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion zur Basis a konvergiert auch a^{x_n} gegen a^x. In jedem Fall ist dies eine (bei $a \neq 1$) echt fallende Folge. Wegen der Konvergenz gibt es ein rationales $z = x_n$ mit

$$a^x \leq a^z < b^y .$$

Die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \, a \longmapsto a^z,$$

ist als Hintereinanderschaltung einer Potenz und einer Wurzel nach Korollar 10.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Satz 11.8 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ebenfalls stetig. Somit gilt für eine rationale Folge a_n, die gegen a konvergiert, dass auch a_n^z gegen a^z konvergiert. Wir wählen die Folge a_n echt fallend, so dass auch a_n^z echt fallend ist. Für n hinreichend groß ist dann

$$a^x \leq a^z < a_n^z < b^y ,$$

und wir können $c = a_n$ wählen.

Aufgabe (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion

$$f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nicht Riemann-integrierbar ist.

Lösung

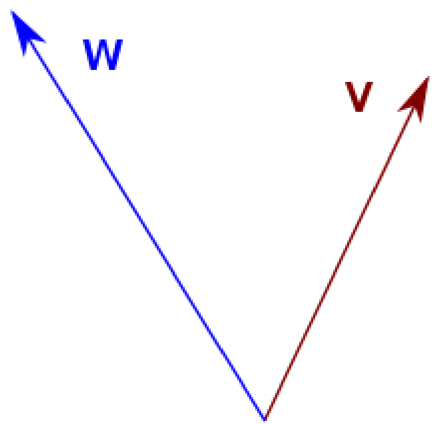
Es sei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Da es in jedem Intervall positiver Länge sowohl rationale als auch irrationale Zahlen gibt, besitzt eine untere Treppenfunktion zu f maximal den Wert 0 und eine obere Treppenfunktion zu f besitzt minimal den Wert 1. Daher ist das Unterintegral gleich 0 und das Oberintegral gleich 1. Daher existiert das bestimmte Integral nicht.

Aufgabe (1 Punkt)

Addiere die beiden folgenden Vektoren graphisch.


w
v

Lösung Vektor/Graphisch/Addition/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 Punkte)

Wir betrachten die letzte Ziffer im kleinen Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) als eine Familie von 9 Tupeln der Länge 9, also die Zeilenvektoren in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 6 & 0 & 4 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 0 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt der durch diese Tupel aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^9$?

Lösung

Die Zeilen der Matrix seien mit $I - IX$ bezeichnet. Es ist

$$I + IX = III + VII = (10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10)$$

und

$$II + VIII = IV + VI = (10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 0,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10)\ .$$

Somit tragen die achte und die neunte Zeile nichts zur Vektorraumdimension bei, da sie in dem von den ersten sieben Zeilen erzeugten Untervektorraum liegen. Ferner zeigen diese Gleichungen, dass man die siebte Zeile durch die Zeile

$$VII' = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

und die sechste Zeile (durch $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ und damit) durch

$$VI' = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

ersetzen kann. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
II - 2I &= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -10,\ -10,\ -10,\ -10,\ -10)\ , \\
III - 3I &= (0,\ 0,\ 0,\ -10,\ -10,\ -10,\ -20,\ -20,\ -20)\ , \\
IV - 4I &= (0,\ 0,\ -10,\ -10,\ -20,\ -20,\ -20,\ -30,\ -30)\ , \\
V - 5I &= (0,\ -10,\ -10,\ -20,\ -20,\ -30,\ -30,\ -40,\ -40)
\end{aligned}$$

und bezeichnen hinfort die mit $-\frac{1}{10}$ multiplizierten Vektoren mit II', III', IV', V'. Es ist

$$\begin{aligned} VII'' &:= VII' - I + V' + IV' \\ &= (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \\ &- (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9) \\ &+ (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4) \\ &+ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3) \\ &= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1)\,. \end{aligned}$$

In der Reihenfolge

$$I, V', IV', III', VI', II' - VI', VII''$$

sind diese Vektoren in oberer Dreiecksgestalt und somit ist die Dimension gleich 7.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis aus Eigenvektoren.

Lösung

Das charakteristische Polynom zu

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ist

$$(X-6)(X-2)(X-7).$$

Es zerfällt also in Linearfaktoren mit verschiedenen Nullstellen und daher ist die Matrix diagonalisierbar. Die Eigenwerte sind $2, 6, 7$. Es ist

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ferner ist

$$6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 6 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Schließlich ist

$$7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 6 ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Eine Basis aus Eigenvektoren ist also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$