Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/14/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	3	2	4	5	3	2	2	4	6	4	4	2	3	4	4	62

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$.
2. Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
3. Die *eulersche Zahl e*.
4. Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Ein *Erzeugendensystem* $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V.
6. Eine $m \times n$-*Matrix* über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Quadratwurzel von 2.
2. Der Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.
3. Der Satz über den Rang von einer Matrix und einer linearen Abbildung.

Aufgabe * (2 Punkte)

Anfang März beträgt die Zeitdifferenz zwischen Deutschland und Paraguay 4 Stunden (in Paraguay wurde es 4 Stunden später hell). Am 25. März 2018 wurde in Deutschland die Uhr von der Winterzeit auf die Sommerzeit umgestellt, die Uhr wurde also um eine Stunde nachts von 2 auf 3 vorgestellt. In der gleichen Nacht wurde die Uhr in Paraguay umgestellt. Wie groß war die Zeitdifferenz nach der Umstellung?

Aufgabe * (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f \colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme für das Polynom

$$P = 7X^{11} - 3X^8 + \frac{3}{2}X^6 - X + 5$$

den Grad, den Leitkoeffizienten, den Leitterm und den Koeffizienten zu X^5.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz, dass der Limes einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei a_n die Summe der ungeraden Zahlen bis n und b_n die Summe der geraden Zahlen bis n. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe * (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 4x + 2.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[1, 2]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Beweise elementargeometrisch den *Sinussatz*, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

gelten, wobei a, b, c die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln α, β, γ sind.

Aufgabe * (4 (1+3) Punkte)

1. Zeige, dass eine ungerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt ein globales Extremum haben kann.
2. Zeige, dass eine ungerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt kein isoliertes lokales Extremum haben kann.

Aufgabe * (6 (1+1+4) Punkte)

1. Es sei $a > 1$ und $g(x) = a^x$ die Exponentialfunktion zur Basis a. Zeige, dass es ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $g(x+w) = 2g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
2. Es sei $w > 0$ vorgeben. Zeige, dass es eine Exponentialfunktion b^x mit $b > 1$ und mit
$$b^{x+w} = 2b^x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
3. Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die keine Exponentialfunktion ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Newton-Leibniz-Formel.

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & -w & = & 3 \\ -2x & +5y & -3z & +w & = & 0 \\ x & -y & +2z & & = & 2 \\ 5x & +2y & -z & & = & -1\,. \end{array}$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Wir betrachten das kleine Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) als eine Familie von 9-Tupeln der Länge 9. Welche Dimension besitzt der durch diese Tupel aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^9$?

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei M eine untere Dreiecksmatrix. Zeige, ausgehend von der Definition der Determinante, dass die Determinante von M das Produkt der Diagonaleinträge ist (es darf verwendet werden, dass die Determinante zu einer Matrix mit einer Nullzeile gleich 0 ist).