Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/22/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	3	4	0	4	5	3	4	5	3	4	2	3	3	4	57

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Durchschnitt* von Mengen L und M.

2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.
3. Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.

Lösung

1. Die Menge
$$L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}$$
heißt der *Durchschnitt* der beiden Mengen.

2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
$$|x - x_n| \leq \epsilon$$
gilt.

3. Der *Logarithmus zur Basis* b von $x \in \mathbb{R}_+$ ist durch
$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$
definiert.

4. Zu $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

5. Das nach Voraussetzung existierende Oberintegral zu f über $[a, b]$ heißt bestimmtes Integral.
6. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

   $$s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n \text{ mit } s_i \in K$$

   eine *Linearkombination* dieser Vektoren

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die stetige Umkehrfunktion*.
2. Die *Periodizätseigenschaften* für Sinus und Kosinus (ohne spezielle Werte).
3. Der Satz über lineare Abbildungen zwischen gleichdimensionalen Vektorräumen.

Lösung

1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   eine stetige,streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J := f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

2. Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in $\mathbb{R}$ folgende *Periodizitätseigenschaften*.
    1. Es ist $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
    2. Es ist $\cos(x + \pi) = -\cos x$ und $\sin(x + \pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
    3. Es ist $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ und $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei

    $$\varphi: V \longrightarrow W$$

    eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Aufgabe (2 Punkte)

Erläutere das Prinzip *Beweis durch Widerspruch*.

Lösung

Man möchte eine Aussage A beweisen. Man nimmt an, dass A nicht gilt. Daraus leitet man durch logisch korrektes Schließen einen Widerspruch her. Somit kann $\neg A$ nicht gelten und also muss A gelten.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl. Wann ist die Zahl $n^2 - 1$ eine Primzahl?

Lösung

Es gilt generell die Zerlegung

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)\,.$$

Bei $n \geq 3$ sind beide Faktoren ≥ 2 und daher kann $n^2 - 1$ nicht prim sein. Bei $n = 2$ ist

$$2^2 - 1 = 3$$

eine Primzahl. Bei $n = 0, 1$ liegt keine Primzahl vor.

Aufgabe (3 Punkte)

Heidi Gonzales beschließt, sich eine Woche lang ausschließlich von Heidelbeeren zu ernähren, und ihre Nahrungszufuhr gleichmäßig über ihre Wachzeit (16 Stunden pro Tag) zu verteilen. Ihr Kalorienbedarf liegt bei 2000 kcal und 100 Gramm Heidelbeeren enthalten 42 kcal. Eine mittlere Heidelbeere wiegt $1,5$ Gramm. In welchem Abstand muss sie sich eine Heidelbeere einwerfen?

Lösung

Heidi muss pro Tag $2000 : 42 \sim 47,6$ mal 100 Gramm Heidelbeeren essen, also $4,76$ Kilogramm. Wegen $4760 : 1,5 \sim 3173$ sind das 3173 Heidelbeeren pro Tag. Die 16 Stunden haben $16 \cdot 3600 = 57600$ Sekunden. Es ist $57600 : 3173 \sim 18,15$. Sie muss also alle $18,15$ Sekunden eine Heidelbeere essen.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für

$$n \geq 10$$

die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Lösung

Induktionsanfang für $n = 10$. Es ist

$$3^{10} = 9^5 = 81 \cdot 81 \cdot 9 \geq 6000 \cdot 9 \geq 10000 = n^4 \,.$$

Zum Induktionsschluss sei $n \geq 10$. Dann ist

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3 \cdot n^4 = n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 \,.$$

Andererseits ist nach der binomischen Formel

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \,.$$

Wir müssen

$$n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 \geq n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

nachweisen. Der erste Summand stimmt links und rechts überein, für die anderen Summanden zeigen wir, dass die linken, also jeweils $\frac{1}{2}n^4$, mindestens so groß wie die rechten sind. Dies folgt aber direkt aus $n^4 \geq 8n^3$ (da $n \geq 10$), aus $n^4 \geq 12n^2$, da ja $n^2 \geq 12$ ist, aus $n^4 \geq 8n$ und aus $n^4 \geq 2$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Lösung

Die Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k \,.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

Lösung

Sei zunächst $x = 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann kann man $\delta = \epsilon$ setzen, denn aus $|u| \leq \epsilon$ folgt wegen $f(x) = 0$ oder $f(x) = x$ auch $|f(u)| \leq \epsilon$. Sei nun $x \neq 0$. Wir zeigen, dass man für $\epsilon = \left|\frac{x}{2}\right| > 0$ kein $\delta > 0$ mit der Abschätzungseigenschaft für die Stetigkeit finden kann. Sei hierzu $\delta > 0$ vorgegeben und sei $c = \min(\delta, \epsilon)$. Wenn x rational ist, so wählen wir eine irrationale Zahl $u \in \left]x - c, x + c\right[$, wenn x irrational ist, so wählen wir eine rationale Zahl $q \in \left]x - c, x + c\right[$. Im ersten Fall gilt

$$|f(x) - f(u)| = |x| > \epsilon\,,$$

im zweiten Fall gilt

$$|f(x) - f(q)| = |q| > \epsilon\,,$$

so dass in beiden Fällen die δ-Umgebung von x nicht in die ϵ-Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird.

Aufgabe (3 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Lösung

Es geht um eine reelle Lösung für die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 2x^3 = -\sqrt{42}.$$

Für $x < 0$ und $x > 2$ ist $f(x) = x^3(x-2) > 0$, es kann also allenfalls in $[0,2]$ eine Lösung geben. Dazu bestimmen wir, wo die Funktion f ihr Minimum annimmt. Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)\,.$$

An den beiden Nullstellen 0 und $\frac{3}{2}$ sind die Werte

$$f(0) = 0$$

und

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}\left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{27}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16} > -2 > -\sqrt{42}\,.$$

Also ist das Minimum von f größer als $-\sqrt{42}$ und es gibt keine Lösung.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto f(z),$$

eine Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(z+w) = f(z) \cdot f(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{R}$ erfülle und die in 0 differenzierbar sei. Zeige, dass dann f in jedem Punkt differenzierbar ist und die Beziehung $f'(z) = \lambda f(z)$ mit einem festen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung

Bei $f(0) = 0$ ist $f(z) = f(z+0) = f(z)f(0) = 0$, so dass die Nullfunktion vorliegt, die die angegebene Ableitungseigenschaft (mit einem beliebigen λ) erfüllt. Sei also $f(0) \neq 0$. Dann ist $f(0) = 1$ wegen $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(z)f(h) - f(z)}{h} = f(z)\frac{f(h) - 1}{h} = f(z)\frac{f(h) - f(0)}{h} .$$

Der rechte Faktor ist der Differenzenquotient im Nullpunkt. Dieser konvergiert nach Voraussetzung für $h \rightarrow 0$ gegen $f'(0)$. Also konvergiert der Differenzenquotient gegen $f(z)f'(0)$ und die Ableitungseigenschaft ist mit $\lambda = f'(0)$ erfüllt.

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung in einem Extremum.

Lösung

Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in c besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $c-\epsilon \leq s_n < c$, die gegen c („von unten") konvergiere. Dann ist $s_n - c < 0$ und $f(s_n) - f(c) \leq 0$ und somit ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c} \geq 0\,,$$

was sich dann nach Lemma 7.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) auf den Limes, also den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(c) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c+\epsilon \geq t_n > c$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n)-f(c)}{t_n-c} \leq 0\,.$$

Daher ist auch $f'(c) \leq 0$ und somit ist insgesamt $f'(c) = 0$.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Stammfunktion der Umkehrfunktion.

Lösung

Ableiten unter Verwendung von Lemma 14.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Satz 14.8 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ergibt

$$\begin{aligned}\left(yf^{-1}(y) - F\left(f^{-1}(y)\right)\right)' &= f^{-1}(y) + y\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} - f\left(f^{-1}(y)\right)\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Durchschnittswert der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für $x \in [1,4]$. Vergleiche diesen Wert mit der Wurzel des arithmetischen Mittels von 1 und 4 und mit dem arithmetischen Mittel der Wurzel von 1 und der Wurzel von 4.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}dx &= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,|_1^4 \\ &= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{3}(8-1) \\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

Der Durchschnittswert ist also

$$\frac{14}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{9}.$$

Das arithmetische Mittel von 1 und 4 ist $\frac{5}{2}$, die Wurzel davon ist $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Wegen

$$\left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{196}{81} < \frac{200}{80} = \frac{5}{2}$$

ist

$$\frac{14}{9} < \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Die Quadratwurzeln von 1 bzw. 4 sind 1 bzw. 2 und das arithmetische Mittel davon ist $\frac{3}{2}$. Wegen

$$\frac{3}{2} = \frac{27}{18} < \frac{28}{18} = \frac{14}{9}$$

ist dies kleiner als $\frac{14}{9}$. Insgesamt gilt also

$$\frac{3}{2} < \frac{14}{9} < \sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$4x + 7y = 3$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Lösung

Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ eine Lösung der Gleichung, die wir als Aufpunkt nehmen können. Der Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$$

eine Beschreibung der Geraden in Punktrichtungsform.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Lösung Lineare Abbildung/Matrix bzgl. Basis/Rang/Fakt/Beweis/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Lösung Man beachte, dass der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ein affiner Unterraum der Form $x_0 + Kern(A)$ ist, wobei x_0 eine spezielle Lösung ist, also $Ax_0 = b$ gilt. Im Falle dieser Aufgabe sucht man eine Matrix $A \in K^{(n-1)\times n}$, sodass diese genau den durch den Vektor $a \in K^n \setminus \{0\}$ aufgespannten Unterraum (hier eine Gerade!) besitzt. Nach der Vorüberlegung kann x_0 wegen der hier speziellen Form der Lösungsmenge nur ein Element aus dem Kern von A sein und wir können ohne Einschränkung, $x_0 = 0 \in K^n$ wählen. Wählen wir $b = 0 \in K^{n-1}$, so ist die (eindimensionale) Lösungsmenge also genau der Kern von A. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$n = dim(K^n) = dim(Kern(A)) + dim(Bild(A)) = 1 + dim(Bild(A)),$$

da $A : K^n \to K^{n-1}, x \mapsto Ax$ linear ist. Aus Dimensionsgründen muss $Bild(A) = K^{n-1}$ gelten. Da die n Spalten von A nun $Bild(A) = K^{n-1}$ aufspannen, sind $(n-1)$-viele davon linear unabhängig. Daher genügt es, eine Matrix $A \in K^{(n-1)\times n}$ mit $Rang(A) = n - 1$ mit dem von a aufgespannten Unterraum als $Kern(A)$. Da der Vektor $a \in K^n$ nicht der Nullvektor ist, existieren $n - 1$ linear unabhängige zu a orthogonale Vektoren $z_1, \ldots, z_{n-1} \in K^n$ (siehe unten für Details!). Das bedeutet, dass $z_i^T \cdot a = 0$ für $i = 1, \ldots, n - 1$. Wählt man die z_i^T als i-te Zeile von A ($i = 1, \ldots, n - 1$), so gilt $A\lambda a = \lambda A \cdot a = 0$ für alle $\lambda \in K$, womit das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ den geforderten Lösungsraum besitzt.

Die Zeilen z_i^T von A können wir so wählen, dass für zwei aufeinanderfolgenden Einträge a_i und a_{i+1} von a für das Skalarprodukt stets $z_i^T \cdot a = d_i \cdot a_i + e_i \cdot a_{i+1} = 0$ für geeignete $d_i, e_i \in K$ gilt. Zur Konstruktion: Vorerst wählen wir $z_i = 0 \in K^n$ und anschließend den i-ten und den $i + 1$-ten Eintrag d_i und e_i von z_i geeignet; es sind drei mögliche Fälle für zwei aufeinanderfolgende Einträge von a möglich. Die Vektoren z_i für $i = 1, \ldots, n - 1$ können wie folgt gewählt werden:

1. Fall:

Sind a_i und a_{i+1} beide von Null verschieden, so wählt man d_i als a_{i+1} und e_i als $-a_i$.

2. Fall:

Sind a_i und a_{i+1} beide Null, so wählt man d_i und e_i beiden von Null verschieden, bspw. beide $d_i = e_i = 1$.

3. Fall:

Ist genau einer der beiden Einträge von a_i und a_{i+1} von Null verschieden, so wählt man, falls dies a_i ist, $d_i = 0$ und e_i von Null verschieden, bspw. $e_i = 1$. Falls aber $a_{i+1} \neq 0$ gilt, so wählt man den $e_i = 0$ und d_i von Null verschieden, bspw. $d_i = 1$.

Da alle anderen Einträge von z_i Null sind, erkennt man leicht die Gültigkeit von $z_i^T \cdot a = 0 \in K$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Die lineare Unabhängigkeit von $z_1, \ldots z_{n-1}$ liest man direkt der Matrix A mit den Zeilen ab, da diese (wenn man sich als $n-te$ Zeile eine Nullzeile hinzudenkt) eine obere Dreicksmatrix, keine der $n-1$ Zeilen ein Nullvektor ist und keine zwei aufeinanderfolgenden Zeilen z_i und z_{i+1} identisch bzw. vielfache voneinander sein können, wobei letzteres unter Beachtung der obigen drei Fälle leicht verifiziert werden kann.

Alternativ überlegt man sich unter Beachtung der drei Fälle, dass keine Spalte von A eine Nullspalte ist und jeder Vektor aus dem K^{n-1} als Linearkombination von den Spalten von A dargestellt werden kann, womit, wegen der Surjekivität von A aus der Dimensionsformel $dim(Kern(A)) = 1$ folgt. Nach Konstruktion ist $a \in Kern(A)$ und aus Dimensionsgründen ist der von a aufgespannte Unterraum genau $Kern(A)$, also die Lösungsmenge von $Ax = 0$.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V wohldefiniert ist, also unabhängig von der gewählten Basis.

Lösung

Es seien M und N die beschreibenden Matrizen von φ bezüglich zweier Basen. Dann besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$M = BNB^{-1}$$

mit der invertierbaren Basiswechselmatrix B. Es besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} B(xE_n - N)B^{-1} &= B(xE_n)B^{-1} - BNB^{-1} \\ &= xE_n - BNB^{-1} \\ &= xE_n - M, \end{aligned}$$

da die Streckungsmatrizen xE_n mit jeder Matrix vertauschbar sind. Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatz gilt daher

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det\left(xE_n - M\right) \\ &= \det\left(B(xE_n - N)B^{-1}\right) \\ &= \det\left(B\right)\det\left(xE_n - N\right)\det\left(B^{-1}\right) \\ &= \det\left(xE_n - N\right) \\ &= \chi_N. \end{aligned}$$