Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/24/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	5	3	3	4	3	0	6	5	0	2	4	0	3	3	52

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *leere* Menge.

2. Eine *Folge* reeller Zahlen.

3. Das *Minimum* der Funktion

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.

4. Der *Sinus hyperbolicus*.

5. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Ein *Eigenwert* zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Unter der *leeren Menge* versteht man diejenige Menge, die kein Element besitzt.

2. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\, n \longmapsto x_n.$$

3. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt.}$$

4. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\sinh x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

5. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf I, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.
6. Ein Element $\lambda \in K$ heißt ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit
$$\varphi(v) = \lambda v$$
gibt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *allgemeine binomische Formel* für $(a+b)^n$.
2. Die Beziehung zwischen differenzierbar und stetig.
3. Der Satz über *partielle Integration*.

Lösung

1. Für a, b in einem Körper K gilt
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} .$$
2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

3. Es seien
   $$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
   stetig differenzierbare Funktionen.

   Dann gilt

   $$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Aufgabe (3 Punkte)

In einem Hörsaal befindet sich ein Tafelgestell mit drei hintereinander liegenden, vertikal verschiebbaren Tafeln. Diese seien mit V (vordere Tafel), M (mittlere Tafel) und H (hintere Tafel) bezeichnet. Aufgrund der Höhe des Gestells sind nur (maximal) zwei Tafeln gleichzeitig einsehbar. Die Lehrperson schreibt in der Vorlesung jede Tafel genau einmal voll. In welcher Reihenfolge (alle Möglichkeiten!) muss sie die Tafeln einsetzen, wenn beim Beschreiben einer Tafel stets die zuletzt beschriebene Tafel sichtbar sein soll.

Lösung

Die Tafeln M und H sind nicht gleichzeitig sichtbar, da (mindestens) eine davon durch V verdeckt wird. Dagegen sind sowohl V und H (M wird hinter V geschoben) als auch V und M gleichzeitig einsehbar. Eine Beschreibungsreihenfolge erfüllt also genau dann die angegebene Bedingung, wenn M und H nicht direkt hintereinander beschrieben werden. Dies wird genau dann erreicht, wenn V als zweite Tafel beschrieben wird. Erlaubt sind also die beiden Reihenfolgen $M - V - H$ und $H - V - M$.

Aufgabe (2 Punkte)

Die Biologin Hertha McGillen ist eine renommierte Forscherin über fliegende Fische. Zur Beobachtung hat ihr Team eine Drohne entwickelt, die sowohl oberhalb als auch unterhalb des Meeresspiegels fliegen kann. Bei einem Einsatz startet die Drohne vom Ausgangspunkt auf dem Schiff, der vier Meter oberhalb des Meeresspiegels liegt. Sie steigt zunächst drei Meter in die Höhe, fliegt dann elf Meter nach unten, dann einen Meter nach oben, dann zwei Meter nach unten, dann sechs Meter nach oben, dann fünf Meter nach unten, dann drei Meter nach oben, dann vier Meter nach unten, dann reißt der Funkkontakt ab.

Wie hoch bzw. tief ist die Drohne insgesamt von ihrem Ausgangspunkt aus geflogen und auf welcher Höhe unter- oder oberhalb des Meeresspiegels brach der Kontakt ab? Wie oft ist die Drohne ein- und wie oft aufgetaucht?

Lösung

Die Höhenpositionen der Drohne sind bezogen auf den Meeresspiegel der Reihe nach

$$\begin{aligned}&4,\ 4+3=7,\ 7-11=-4,\ -4+1=-3,\ -3-2=-5,\\&-5+6=1,\ 1-5=-4,\ -4+3=-1,\ -1-4=-5.\end{aligned}$$

Der Kontakt brach also 5 Meter unterhalb des Meeresspiegels ab und insgesamt ist die Drohne 9 Meter tief geflogen. Sie ist zweimal eingetaucht und einmal aufgetaucht.

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Lösung

Bei $n = 1$ besteht die Summe links aus dem einzigen Summanden $(-1)^1 1 = -1$, die Summe ist also -1. Da 1 ungerade ist, steht rechts $-\frac{2}{2} = -1$, der Induktionsanfang ist also gesichert.

Sei die Aussage nun für n bewiesen, und es ist die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ zu zeigen. Die Summe links ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\right) + (-1)^{n+1}(n+1).$$

Bei n gerade (also $n+1$ ungerade) ist dies nach Induktionsvoraussetzung gleich

$$\frac{n}{2} + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{n}{2} - (n+1) = \frac{n-2n-2}{2} = \frac{-n-2}{2} = -\frac{n+2}{2},$$

was mit der rechten Seite übereinstimmt. Bei n ungerade (also $n+1$ gerade) ist die Summe nach Induktionsvoraussetzung gleich

$$-\frac{n+1}{2} + (-1)^{n+1}(n+1) = -\frac{n+1}{2} + (n+1) = \frac{-n-1+2n+2}{2} = \frac{n+1}{2},$$

was ebenfalls mit der rechten Seite übereinstimmt.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\
&= \frac{(n+1-k)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{(n+1-k+k)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei z eine rationale Zahl. Zeige, dass z genau dann ganzzahlig ist, wenn

$$\lfloor -z \rfloor = - \lfloor z \rfloor$$

gilt.

Lösung

Wenn z ganzzahlig ist, so ist auch das Negative davon ganzzahlig und die Gaußklammer gibt einfach die Zahl aus. Wenn umgekehrt z nicht ganzzahlig ist, so ist

$$z = n + u$$

mit einer ganzen Zahl $n = \lfloor z \rfloor$ und

$$0 < u < 1\,.$$

Dann ist

$$\lfloor -z \rfloor = \lfloor -n - u \rfloor = \lfloor -n - 1 + 1 - u \rfloor = \lfloor -(n+1) + (1-u) \rfloor = -(n+1) \neq -n\,,$$

da $1 - u$ echt zwischen 0 und 1 liegt.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Bernoulli-Ungleichung für einen angeordneten Körper.

Lösung

Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

da Quadrate (und positive Vielfache davon) in einem angeordneten Körper nichtnegativ sind.

Aufgabe (3 Punkte)

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Lösung

Ein Schnittpunkt liegt vor, wenn

$$P(x) = Q(x)$$

ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn x eine Nullstelle von $P - Q$ ist. Da beide Polynome normiert sind und den gleichen Grad d besitzen, hebt sich bei der Subtraktion der Leitterm weg und es ergibt sich ein Polynom vom Grad maximal $d - 1$. Da $P \neq Q$ ist, ist die Differenz nicht das Nullpolynom. Nach Korollar 6.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) besitzt somit $P - Q$ maximal $d - 1$ Nullstellen, und daher gibt es maximal $d - 1$ Schnittpunkte.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Lösung

Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0).$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \quad \text{und} \quad b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0 .$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$.

Aufgabe (5 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f \colon [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Lösung

Die Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 .$$

Man sieht direkt, dass 1 eine Nullstelle der Ableitung ist, und es ergibt sich die Faktorzerlegung

$$6x^2 - 10x + 4 = (x-1)(6x-4) ,$$

weshalb bei $\frac{2}{3}$ eine weitere Nullstelle vorliegt. Die zweite Ableitung ist

$$f'' = 12x - 10\,.$$

Diese hat bei $x = 1$ einen positiven Wert, so dass dort ein lokales isoliertes Minimum mit dem Wert

$$f(1) = 2 - 5 + 4 - 1 = 0$$

vorliegt. Wegen

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 12 \cdot \frac{2}{3} - 10 = -2$$

liegt in $\frac{2}{3}$ ein isoliertes lokales Maximum mit dem Wert

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{2 \cdot 8 - 5 \cdot 12 + 4 \cdot 18 - 27}{27} = \frac{1}{27}\,.$$

An den Intervallgrenzen hat die Funktion die Werte

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 4(-2) - 1 = -45$$

bzw.

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - 1 = 144\,.$$

Daher liegt am linken Rand das absolute Minimum und am rechten Rand das absolute Maximum vor.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & 1+3\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 1 & 2+3\mathrm{i} \\ -1 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Lösung

Man multipliziert die erste Zeile links mit der ersten Spalte rechts und erhält

$$(2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}) + 1 \cdot 1 - (1+3\mathrm{i}) = -2+4\mathrm{i}+1-1-3\mathrm{i} = -2+\mathrm{i}\,.$$

Die zweite Zeile links multipliziert mit der ersten Spalte rechts ergibt

$$-4-4\mathrm{i}.$$

Die erste Zeile links multipliziert mit der zweiten Spalte rechts ergibt

$$(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) + 1 \cdot (2+3\mathrm{i}) + (1+3\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i}) = 3\mathrm{i}+2+3\mathrm{i}-7-\mathrm{i} = -2+5\mathrm{i}\,.$$

Die zweite Zeile links multipliziert mit der zweiten Spalte rechts ergibt

$$2\mathrm{i}(1+2\mathrm{i}) + 4\mathrm{i}(-1+2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}-4-4\mathrm{i}-8 = -12-2\mathrm{i}\,.$$

Das Ergebnis ist also die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2+\mathrm{i} & -2+5\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -12-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Lösung

Es sei $v_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 23.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (2) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also $v_i, i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren.
Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass $v_i, i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -33 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{33} & -\frac{1}{33} & -\frac{2}{33} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{33} & \frac{5}{33} & \frac{10}{33} \\ \frac{7}{33} & -\frac{1}{33} & -\frac{2}{33} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, welche der folgenden elementargeormetrischen Abbildungen linear, welche diagonalisierbar und welche trigonalisierbar sind.

1. Die Achsenspiegelung durch die durch $4x - 7y = 0$ gegebene Achse.
2. Die Verschiebung um den Vektor $(5, -3)$.
3. Die Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.
4. Die Punktspiegelung mit dem Punkt $(1, 0)$ als Zentrum.

Lösung

1. Da die Gerade durch den Nullpunkt geht, ist diese Achsenspiegelung linear. Die Achse ist der Eigenraum zum Eigenwert 1, die dazu senkrechte Gerade durch den Nullpunkt ist der Eigenraum zum Eigenwert -1, mit zwei Eigenwerten ist die Abbildung diagonalisierbar und insbesondere trigonalisierbar.
2. Bei dieser Verschiebung wird der Nullpunkt bewegt, somit ist die Abbildung nicht linear.
3. Eine Drehung um den Ursprung ist stets linear. Da um 30 Grad gedreht wird, wird keine Gerade auf sich selbst abgebildet. Somit gibt es keine Eigenwerte und die Abbildung ist nicht trigonalisierbar und schon gar nicht diagonalisierbar.

4. Da der Nullpunkt bewegt wird, ist die Abbildung nicht linear.