Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/36/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	3	4	6	3	4	2	6	0	0	3	0	3	5	0	2	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.
2. Die *komplexe Konjugation*.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

3. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
4. Ein *isoliertes* lokales Minimum einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
5. Der *Arkussinus*.
6. Ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Variablen über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms* über einem Körper K.
2. Die *Regel von l'Hospital*.
3. Der Satz über die Multilinearität der Determinante (mit Erläuterung).

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Konzept der *Wohldefiniertheit* anhand eines typischen Beispiels.

Aufgabe * (2 (0.5+0.5+0.5+0.5) Punkte)

Wir betrachten die Wertetabelle

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2	5	4	-1	3	5	-2	2

1. Berechne $a_2 + a_5$.
2. Berechne $\sum_{k=3}^{6} a_k$.
3. Berechne $\prod_{i=0}^{3} a_{2i+1}$.
4. Berechne $\sum_{i=4}^{5} a_i^2$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 2^i = (-1)^n .$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe * (6 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X-a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a > b > 0$ Elemente aus K. Zeige

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{a}.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x \neq 0$. Zeige, dass $\left(\frac{1}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Hans will sich ein Frühstücksei kochen. Im Moment, als er das Ei in das kochende Wasser eintaucht, zeigt seine Uhr $7:21$ (die Uhr läuft genau und hat keine Sekundenangabe). Als er das nächste Mal auf die Uhr schaut, zeigt sie $7:26$ an. Bestimme das Infimum, Minimum, Supremum, Maximum der Zeit, die das Ei zwischen den beiden Momenten im Wasser ist.

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}} dx.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen über $\mathbb{Q}$ gegeben. Die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen seien Geraden. Skizziere die drei Möglichkeiten, wie die Lösungsmenge des Systems aussehen kann.

Aufgabe * (5 (2+3) Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

1. Zeige, dass die Polynomfunktionen

   $$\varphi_d \colon K \longrightarrow K, \, x \longmapsto x^d,$$

   mit $0 \leq d < q$ linear unabhängig sind.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

2. Zeige, dass die Exponentialfunktionen

$$\psi_b \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto b^x,$$

mit $0 \leq b < q$ linear unabhängig sind.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Aussage: Es sei λ ein Eigenwert zur oberen Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\lambda = d_n \,.$$

Beweis: Es sei

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix zum Eigenwert λ. Dies bedeutet die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichheit bedeutet die entsprechende Gleichheit in jeder Zeile. Speziell ergibt sich für die letzte Zeile die Bedingung

$$d_n x_n = \lambda x_n \, .$$

Da x als Eigenvektor von 0 verschiedenen sein muss, kann man durch x_n dividieren und erhält $d_n = \lambda$. “

Zuletzt bearbeitet vor einem Monat von Bocardodarapti

Wikiversity

Der Inhalt ist verfügbar unter CC BY-SA 3.0, sofern nicht anders angegeben.

Datenschutz • Klassische Ansicht

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD