Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/48/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	4	1	7	3	7	6	0	0	4	0	0	4	0	0	4	51

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.

2. Eine *Teilfolge* einer Folge reeller Zahlen.
3. Eine *gerade* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
5. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.

Lösung

1. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und n sind.
2. Zu einer streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, i \longmapsto n_i$, heißt die Folge
$$i \mapsto x_{n_i}$$
eine *Teilfolge* der Folge.
3. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(x) = f(-x)$$
gilt.
4. Der *Logarithmus zur Basis* b von $x \in \mathbb{R}_+$ ist durch
$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$
definiert.
5. Das nach Voraussetzung existierende Oberintegral zu f über $[a,b]$ heißt bestimmtes Integral.

6. Eine Familie $v_i, i \in I$, von Vektoren in V heißt Basis, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produktes.
2. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*.
3. Der Satz über die Beziehung zwischen Eigenschaften von linearen Abbildungen und Matrizen.

Lösung

1. Es seien
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$
zwei absolut konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und für die Summe gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$
2. Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)\,.$$

3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

    1. φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.
    2. φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.
    3. Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.

Aufgabe (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	r	?
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	f

w f f f

f w w f

f w f f

f f w f

f f f w

Lösung

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow r).$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

eine injektive Abbildung. Zeige, dass es eine Teilmenge $T \subseteq M$ derart gibt, dass man φ als Abbildung

$$\varphi': L \longrightarrow T$$

auffassen kann (φ und φ' unterscheiden sich nur hinsichtlich des Wertebereichs) und dass φ' bijektiv ist.

Lösung

Es sei

$$T = \{ y \in M \mid \text{ es gibt } x \in L \text{ mit } y = \varphi(x) \} \, .$$

Da T sämtliche Elemente aus M enthält, die überhaupt unter φ getroffen werden, kann man φ als eine Abbildung

$$\varphi' \colon L \longrightarrow T, \, x \longmapsto \varphi(x),$$

auffassen. Diese Abbildung ist surjektiv, da ja jedes Element aus T nach Definition getroffen wird. Die Injektivität überträgt sich direkt von φ auf φ', da die Gleichheit von Elementen in einer Teilmenge mit der Gleichheit in der Menge übereinstimmt. Daher ist φ' bijektiv.

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien x, y rationale Zahlen. Zeige, dass

$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Lösung

Es sei $x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$. Da $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor y \rfloor$ ganze Zahlen sind, ist $n = \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor$ ganzzahlig. Damit gilt

$$\begin{aligned} y &= \lfloor y \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor) \\ &= \lfloor y \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) \\ &= x + \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor \\ &= x + n. \end{aligned}$$

Sei nun $y = x + n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Aus der definierenden Beziehung

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

folgt

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1\,,$$

daher muss

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

sein. Somit ist

$$\begin{aligned} y - \lfloor y \rfloor &= x + n - \lfloor x + n \rfloor \\ &= x + n - (\lfloor x \rfloor + n) \\ &= x - \lfloor x \rfloor\,. \end{aligned}$$

Aufgabe (1 Punkt)

Schreibe das Polynom

$$X^4 - 1$$

als Produkt von Linearfaktoren in $\mathbb{C}[X]$.

Lösung

Es ist

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i)\,.$$

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise die Division mit Rest im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

Lösung

Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(TP) = 0$, also ist T ein konstantes Polynom, und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ und $T = b_k X^k + \cdots + b_1 X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0,\ k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k} X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P - TH \\ &= 0X^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k} b_{k-1}\right) X^{n-1} + \cdots + \left(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k} b_0\right) X^{n-k} + a_{n-k-1} X^{n-k-1} + \cdots + a_0 . \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P = P' + TH = TQ' + TH + R' = T(Q' + H) + R' ,$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar.

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Lösung

Es ist

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}\,, \\
x_2 &= \frac{\frac{9}{4} + \frac{5}{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{20}{9}}{2} = \frac{81 + 80}{72} = \frac{161}{72}\,, \\
x_3 &= \frac{\frac{161}{72} + \frac{5}{\frac{161}{72}}}{2} = \frac{\frac{161}{72} + \frac{360}{161}}{2} = \frac{25921 + 25920}{23184} = \frac{51841}{23184}\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (7 (2+2+3) Punkte)

1. Man gebe ein Beispiel für reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \neq 0$, derart, dass $\frac{x_n}{y_n}$ gegen 1 konvergiert, aber $x_n - y_n$ nicht konvergiert.
2. Man gebe ein Beispiel für reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \neq 0$, derart, dass $x_n - y_n$ gegen 0 konvergiert, aber $\frac{x_n}{y_n}$ nicht konvergiert.
3. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen derart, dass $x_n - y_n$ gegen 0 konvergiert. Es gebe ein $a > 0$ mit
$$y_n \geq a$$
für alle n. Zeige, dass $\frac{x_n}{y_n}$ gegen 1 konvergiert.

Lösung

1. Es sei
$$x_n = n^2 + n$$
und
$$y_n = n^2$$
für $n \geq 1$. Dann ist
$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.$$
Dies konvergiert gegen 1. Die Differenzfolge
$$x_n - y_n = n^2 + n - n^2 = n$$

konvergiert nicht.

2. Es sei

$$x_n = \frac{1}{n}$$

und

$$y_n = \frac{1}{n^2}.$$

Dann ist

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = n.$$

Dies konvergiert nicht. Die Differenzfolge

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

konvergiert gegen 0, da beide Folgen Nullfolgen sind.

3. Wir schreiben

$$x_n = y_n + z_n,$$

wobei z_n nach Voraussetzung eine Nullfolge ist. Damit ist

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{y_n} &= \frac{y_n + z_n}{y_n} \\ &= 1 + \frac{z_n}{y_n}.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$|\frac{z_n}{y_n}| = |z_n| \cdot |\frac{1}{y_n}| \leq |z_n| \cdot |\frac{1}{a}|$$

eine Nullfolge. Somit konvergiert die Quotientenfolge gegen 1.

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Lösung

Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0).$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Funktion $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ für $x \to 0$ ($x > 0$).

Lösung

Es ist

$$f(x) = (\cos x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right)$$

und somit ist

$$\lim_{x\to 0}\ \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right)$$

zu bestimmen. Da die Exponentialfunktion stetig ist, müssen wir

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\ln(\cos x)}{x}$$

bestimmen. Sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion besitzen den Grenzwert 0. Wir können die Regel von Hospital anwenden und betrachten

$$\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}.$$

Dies konvergiert für $x \rightarrow$ gegen 0. Somit ist auch

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\ln(\cos x)}{x} = 0$$

und damit ist

$$\lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\cos x)\right) = \exp 0 = 1\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Quadratabbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto x^2,$$

für verschiedene Körper K.

1. Ist φ linear für

$$K = \mathbb{Q}\,?$$

2. Ist φ linear für

$$K = \mathbb{Z}/(2)\,,$$

dem Körper mit zwei Elementen.

3. Es sei nun K ein Körper, in dem $2 = 1 + 1 = 0$ gelte, der mehr als zwei Elemente enthalte. Ist φ linear? Ist φ verträglich mit der Addition?

Lösung

1. Es ist

$$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 4 \neq 1 + 1 = \varphi(1) + \varphi(1)\,,$$

somit ist φ auf $\mathbb{Q}$ nicht linear.

2. Für den Körper mit zwei Elementen $\mathbb{Z}/(2) = \{0, 1\}$ ist $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Also ist φ die Identität und somit linear.

3. Es ist

$$\varphi(u+v) = (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2 + v^2 = \varphi(u) + \varphi(v)\,,$$

daher erfüllt φ die Additivität. Sie ist aber nicht mit der Skalierung verträglich und somit nicht linear. Nehmen wir an, dass φ mit der Skalierung verträglich wäre. Dann ist für jedes $s \in K$

$$s^2 = \varphi(s) = \varphi(s1) = s\varphi(1) = s1 = s\,.$$

In einem Körper gibt es aber nur zwei Elemente, die die Gleichung

$$s^2 = s$$

erfüllen.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen, von denen die charakteristischen Polynome bekannt seien. Kann man daraus das charakteristische Polynom von $\varphi + \psi$ bestimmen?

Lösung

Das kann man nicht. Wir betrachten die beiden nilpotenten 2×2-Matrizen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist jeweils X^2. Ihre Summe ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom davon ist $X^2 - 1$. Wenn man dagegen φ zweimal nimmt, also $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so ist dies ebenfalls nilpotent, und das charakteristische Polynom ist X^2.