Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/8/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	2	5	3	3	3	3	4	2	3	9	5	4	3	4	3	64

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung

$$f: L \longrightarrow M.$$

2. Ein *Körper*.

3. Der *Tangens hyperbolicus*.

4. Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).

5. Eine *lineare* Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

6. Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einem Endomorphismus

   $$\varphi: V \longrightarrow V$$

   auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Die Abbildung

   $$f: L \longrightarrow M$$

   ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in L$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.

2. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

   $$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

   und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

   1. Axiome der Addition
      1. Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

      2. Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
      3. 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
      4. Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
   2. Axiome der Multiplikation
      1. Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
      2. Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
      3. 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
      4. Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
   3. Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
3. Die durch
   $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
   definierte Funktion heißt *Tangens hyperbolicus*.
4. Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch
   $$\pi := 2s\,.$$
5. Eine Abbildung
   $$\varphi : V \longrightarrow W$$
   heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   2. $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

6. Man nennt
$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$
den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
2. Die *Regel von l'Hospital*.
3. Der *Determinantenmultiplikationssatz*.

Lösung

1. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gelte
$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

   konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.
2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien
$$f, g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung
   $$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B\,.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	$?$
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f

Lösung

p.

Aufgabe (1 Punkt)

Ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+,\, (a,b) \longmapsto (a+b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

Lösung

Die Abbildung ist nicht injektiv, da wegen

$$2^4 = 16 = 4^2$$

die beiden Paare $(2,4)$ und $(4,2)$ unter φ auf das gleiche Element abgebildet werden.

Aufgabe (2 Punkte)

Im Wald lebt ein Riese, der 8 Meter und 37 cm groß ist, sowie eine Kolonie von Zwergen, die eine Schulterhöhe von 3 cm haben und mit dem Kopf insgesamt 4 cm groß sind. Hals und Kopf des Riesen sind $1,23$ Meter hoch. Auf der Schulter des Riesen steht ein Zwerg. Wie viele Zwerge müssen aufeinander (auf den Schultern) stehen, damit der oberste Zwerg mit dem Zwerg auf dem Riesen zumindest gleichauf ist?

Lösung

Die Schulterhöhe des Riesen befindet sich (alle Angaben in Meter) auf

$$8{,}37 - 1{,}23 = 7{,}14$$

Höhe. Mit dem einen Zwerg darauf sind das $7{,}18$. Es ist

$$238 \cdot 0{,}03 + 0{,}04 = 7{,}14 + 0{,}04 = 7{,}18\,,$$

daher braucht man 239 Zwerge.

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise die allgemeine binomische Formel.

Lösung

Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Lösung

Wir rechnen die beiden Seiten aus, die zu zeigende Abschätzung bedeutet dann

$$2x^2 + 2x + 1 \geq x^2 + 4x + 4.$$

In einem angeordneten Körper erhalten sich bei beidseitiger Addition die Abschätzungen, so dass die Abschätzung äquivalent zu

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

ist. Wir schreiben die linke Seite als

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4\,.$$

Bei $x \geq 3$ ist $x - 1 \geq 2$ und daher

$$(x-1)^2 \geq 2(x-1) \geq 2^2 = 4\,,$$

also gilt für $x \geq 3$ die Abschätzung $(x-1)^2 - 4 \geq 0$ und damit die ursprüngliche Abschätzung.

Aufgabe (3 Punkte)

Vergleiche

$$\sqrt{3} + \sqrt{10} \text{ und } \sqrt{5} + \sqrt{6}.$$

Lösung

Wir fragen uns, ob

$$\sqrt{3} + \sqrt{10} > \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

ist. Dies ist, da das Quadrieren von positiven Zahlen eine Äquivalenzumformung für die Größenbeziehung ist, äquivalent zu

$$3 + 10 + 2\sqrt{30} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{10}\right)^2 > \left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2 = 5 + 6 + 2\sqrt{30}\,.$$

Dies ist durch Subtraktion mit 11 äquivalent zu

$$2 + 2\sqrt{30} > 2\sqrt{30}\,,$$

was stimmt. Also ist

$$\sqrt{3} + \sqrt{10} > \sqrt{5} + \sqrt{6}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 6X^3 + X + 1$ und $T = 3X^2 + 2X - 4$ durch.

Lösung

Es ist insgesamt

$$6X^3 + X + 1 = (3X^2 + 2X - 4)\left(2X - \frac{4}{3}\right) + \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Lösung

Mit der Formel für die geometrische Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3}\,.$$

Ferner ist

$$\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25+10+4}{25} = \frac{39}{25}\,.$$

Also ist insgesamt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{3} - \frac{39}{25} = \frac{125-117}{75} = \frac{8}{75}\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Lösung

Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^3 + 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 3 - (a^3 + 2a^2 - 5a + 3)}{h} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 3 - a^3 - 2a^2 + 5a - 3}{h} \\ &= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 4ah + 2h^2 - 5h}{h} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2 + 4a + 2h - 5 \\ &= 3a^2 + 4a - 5 + 3ah + h^2 + 2h. \end{aligned}$$

Die Ableitung ist der Limes von diesem Ausdruck für h gegen 0, und dieser ist

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} (3a^2 + 4a - 5 + 3ah + h^2 + 2h) &= 3a^2 + 4a - 5 + \lim_{h\to 0}\ h(3a + h + 2) \\ &= 3a^2 + 4a - 5. \end{aligned}$$

Die Ableitung ist also $3a^2 + 4a - 5$.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme den folgenden Funktionslimes

$$\lim_{x\to 1}\ \frac{\sin(x-1)}{\ln x}.$$

Lösung

Mit der Regel von Hospital ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\ \frac{\sin(x-1)}{\ln x} &= \lim_{x\to 1}\ \frac{\cos(x-1)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\ x\cos(x-1)\\ &= 1\cdot\cos(0)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-6}$$

im Punkt $a = -1$ bis zum Grad ≤ 2.

Lösung

Die ersten beiden Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x-6)-(x^2-4x+5)}{(x-6)^2} \\ &= \frac{x^2-12x+19}{(x-6)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2-12x+19}{(x-6)^2}\right)' \\ &= \frac{(2x-12)(x-6)^2-2(x^2-12x+19)(x-6)}{(x-6)^4} \\ &= 2\frac{(x-6)^2-(x^2-12x+19)}{(x-6)^3} \\ &= 2\frac{17}{(x-6)^3} \\ &= \frac{34}{(x-6)^3}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$f(-1) = \frac{1+4+5}{-9} = -\frac{10}{9}\,,$$
$$f'(-1) = \frac{49+84+19}{(-7)^2} = \frac{152}{49}\,,$$
$$f''(-1) = \frac{34}{(-7)^3} = -\frac{34}{343}\,.$$

Somit ist die Taylorentwicklung in $a=-1$ bis zum Grad 2 gleich

$$-\frac{10}{9} + \frac{152}{49}(x+1) - \frac{17}{343}(x+1)^2.$$

Aufgabe (9 (1+1+2+5) Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

und

$$g(x) = 2x + 1\,.$$

1. Bestimme die Nullstellen von f.
2. Bestimme das globale Minimum von f.
3. Finde mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{8}$ ein $x \in [0,1]$ mit
$$f(x) = 1\,.$$

4. Die Graphen zu f und zu g begrenzen eine endliche Fläche. Skizziere die Situation und berechne den Flächeninhalt der eingegrenzten Fläche.

Lösung

1. Es sind 1 und 2 die Nullstellen von f.
2. Es ist
   $$f'(x) = 2x - 3$$
   mit der einzigen Nullstelle bei
   $$x = \frac{3}{2}\,.$$
   Dort liegt das globale isolierte Minimum mit dem Wert
   $$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4}$$
   vor.
3. Es ist
   $$f(0) = 2 > 1$$
   und
   $$f(1) = 0 < 0\,,$$
   deshalb muss es nach dem Zwischenwertsatz eine Stelle geben, wo f den Wert 1 annimmt. Es ist

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+2=\frac{3}{4}<1\,.$$

Deshalb liegt die gesuchte Stelle in $[0,\frac{1}{2}]$. Es ist

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2-3\cdot\frac{1}{4}+2=\frac{21}{16}>1\,.$$

Deshalb liegt die gesuchte Stelle in $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$. Es ist

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{3}{8}\right)^2-3\cdot\frac{3}{8}+2=\frac{65}{64}>1\,.$$

Deshalb liegt die gesuchte Stelle in $[\frac{3}{8},\frac{1}{2}]$.

4. Die Gleichsetzung der beiden Funktionen führt auf

$$x^2-5x+1=0\,,$$

was auf

$$x_1,x_2=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$$

für die x-Koordinate der beiden Schnittpunkte führt. Im Folgenden sei x_1 der kleinere Wert. Der in Frage stehende Flächeninhalt ergibt sich, indem man von dem Flächeninhalt des durch g, der x-Achse und die vertikalen Achsen durch x_1 und x_2 begrenzten Vierecks V die Flächeninhalte unterhalb von f zwischen x_1 und 1 und zwischen 2 und x_2 abzieht und den Flächeninhalt der Fläche oberhalb von f zwischen 1 und 2 dazuaddiert. Der Flächeninhalt des Vierecks ist

$$(x_2 - x_1)\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} = \frac{5 + \sqrt{21} - 5 + \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{12}{2} = 6\sqrt{21}\,.$$

Eine Stammfunktion zu f ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\,.$$

die relevanten Werte sind

$$\begin{aligned}
F(1) &= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}\,,\\
F(2) &= \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{2}{3}\,,\\
F(x_1) &= \frac{1}{3}\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{125 - 75\sqrt{21} + 15 \cdot 21 - 21\sqrt{21}}{8}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{25 - 10\sqrt{21} + 21}{4}\right) + 5 - \sqrt{21}\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{440 - 96\sqrt{21}}{8}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{46 - 10\sqrt{21}}{4}\right) + 5 - \sqrt{21}\\
&= \frac{1}{3}(55 - 12\sqrt{21}) - 3\left(\frac{23 - 5\sqrt{21}}{4}\right) + 5 - \sqrt{21}\\
&= \frac{55}{3} - \frac{69}{4} + 5 + \left(-4 + \frac{15}{4} - 1\right)\sqrt{21}\\
&= \frac{73}{12} - \frac{5}{4}\sqrt{21},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x_2) &= \frac{1}{3}\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{125+75\sqrt{21}+15\cdot 21+21\sqrt{21}}{8}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{25+10\sqrt{21}+21}{4}\right) + 5 + \sqrt{21} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{440+96\sqrt{21}}{8}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{46+10\sqrt{21}}{4}\right) + 5 + \sqrt{21} \\
&= \frac{1}{3}(55+12\sqrt{21}) - 3\left(\frac{23+5\sqrt{21}}{4}\right) + 5 + \sqrt{21} \\
&= \frac{55}{3} - \frac{69}{4} + 5 + \left(4 - \frac{15}{4} + 1\right)\sqrt{21} \\
&= \frac{73}{12} + \frac{5}{4}\sqrt{21}.
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$
\begin{aligned}
A &= 6\sqrt{21} - (F(1) - F(x_1)) + |F(2) - F(1)| - (F(x_2) - F(2)) \\
&= 6\sqrt{21} - F(1) + F(x_1) + F(1) - F(2) - F(x_2) + F(2) \\
&= 6\sqrt{21} + F(x_1) - F(x_2) \\
&= 6\sqrt{21} + \frac{73}{12} - \frac{5}{4}\sqrt{21} - \frac{73}{12} - \frac{5}{4}\sqrt{21} \\
&= \frac{7}{2}\sqrt{21}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x \, dx = e - 1 \, .$$

Lösung

Wir betrachten die äquidistante Unterteilung $\frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n-1$, und die untere Treppenfunktion t, die durch $t(x) = e^{i/n}$ auf dem $i+1$-ten Teilintervall festgelegt ist. Das zugehörige Treppenintegral ist (unter Verwendung der endlichen geometrischen Reihe)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{(n-1)/n}\right) &= \frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + \left(e^{1/n}\right)^2 + \cdots + \left(e^{1/n}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(e^{1/n}\right)^n}{1 - e^{1/n}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{1/n}} \\ &= (1 - e) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{1/n}} . \end{aligned}$$

Hier ist der linke Faktor konstant. Für den rechten Faktor betrachten wir den Funktionslimes

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{1 - e^u} .$$

Dieser existiert nach der Regel von Hospital und sein Wert ist -1, also gilt dies auch für den rechten Faktor.

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien 2×2-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ gegeben. Das Produkt $A \cdot B$ ergibt sich mit der üblichen Multiplikationsregel „Zeile x Spalte", bei der man insgesamt 8 Multiplikationen im Körper K ausführen muss. Wir beschreiben, wie man diese Matrixmultiplikation mit nur 7 Multiplikationen (aber mit mehr Additionen) durchführen kann. Wir setzen

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \, , \\ m_2 &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \, , \\ m_3 &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \, , \\ m_4 &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \, , \\ m_5 &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \, , \\ m_6 &= (a_{21} - a_{11}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \, , \\ m_7 &= (a_{12} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \, . \end{aligned}$$

Zeige, dass für die Koeffizienten der Produktmatrix

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{11} &= m_1 + m_4 - m_5 + m_7 \, , \\ c_{12} &= m_3 + m_5 \, , \\ c_{21} &= m_2 + m_4 \, , \\ c_{22} &= m_1 - m_2 + m_3 + m_6 \, , \end{aligned}$$

gelten.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} m_1 + m_4 - m_5 + m_7 &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) + a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) - (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} + (a_{12} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ &= a_{11}b_{11} + a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{22} + a_{22}b_{21} - a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22} - a_{12}b_{22} + a_{12}b_{21} - a_{22}b_{21} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ &= c_{11}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 + m_5 &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) + (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ &= a_{11}b_{12} - a_{11}b_{22} + a_{11}b_{22} + a_{12}b_{22} \\ &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ &= c_{12}\,, \\ m_2 + m_4 &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} + a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{21} - a_{22}b_{11} \\ &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ &= c_{21}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 + m_3 + m_6 &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) - (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} + a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) + (a_{21} - a_{11}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ &= a_{11}b_{11} + a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{22} - a_{21}b_{11} - a_{22}b_{11} + a_{11}b_{12} - a_{11}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{21}b_{12} \\ &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ &= c_{22}\,, \end{aligned}$$

gelten.

Aufgabe (3 (2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i

geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Lösung

a) Es sei $v \in V$ beliebig. Da ein Erzeugendensystem vorliegt, gibt es eine Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, .$$

Da eine lineare Abbildung Linearkombinationen erhält, muss für eine lineare Abbildung φ mit $\varphi(v_i) = w_i$ gelten

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \, .$$

Es gibt also für $\varphi(v)$ nur diese eine Möglichkeit und daher gibt es maximal ein φ.

b) Sei $V = W = K$ und sei $v_1 = 1$,$v_2 = 0$, $w_1 = w_2 = 1$. Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind ein Erzeugendensystem von K, da dies für v_1 allein schon gilt. Es gibt aber keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_2) = \varphi(0) = 1$, da eine lineare Abbildung 0 auf 0 schickt.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$.
Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 .$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe (3 (1+1+1) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Bestimme das charakteristische Polynom von M.

2. Bestimme eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von M und klammere den entsprechenden Linearfaktor aus.
3. Begründe, dass das charakteristische Polynom von M zumindest zwei reellen Nullstellen hat.

Lösung

1. Es ist
$$\begin{aligned}\chi_M &= \det \begin{pmatrix} X+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \\ &= (X+1)^3(X-1)+1 \\ &= (X^2+2X+1)(X^2-1)+1 \\ &= X^4+2X^3+X^2-X^2-2X-1+1 \\ &= X^4+2X^3-2X. \end{aligned}$$
2. Es ist 0 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms und es ist
$$X^4+2X^3-2X = X(X^3+2X^2-2)\,.$$
3. Die Nullstelle 0 haben wir bereits gefunden. Wir betrachten den zweiten Faktor X^3+2X^2-2. Da es sich um ein Polynom ungeraden Grades handelt, muss es eine reelle Nullstelle besitzen. Da 0 keine Nullstelle davon ist, gibt es also eine weitere reelle Nullstelle.