

Übungsblatt 2 zur Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 30. April 2020

Kreuzerl-Deadline: 10. Mai 2020

Die Aufgaben auf diesem Blatt beziehen sich auf den Vorlesungsstoff bis inklusive Kapitel 4.2.

SOLO

Im Stud.IP gibt es auf der Seite unserer Veranstaltung den Punkt „Vips“.
Dort finden Sie Aufgaben aus Svens Online Lern-Oase.

Aufgabe 2.1 Mengenoperationen auf Sprachen

Eine natürlichsprachige Beschreibung von Sprachen ist oft umständlich und nicht ganz eindeutig. Mithilfe der Sprache der Mathematik kann man präzisere und oft sogar kürzere Beschreibungen geben. Wir nennen diese Schreibweise im folgenden „Mengenschreibweise“.

Für die Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, in der jedes Symbol mindestens einmal enthalten ist gibt es u. a. folgende äquivalente Mengenschreibweisen:

- $\{w_1 a w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*\} \cap \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*\} \cap \{w_1 c w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*\}$
- $\bigcap_{x \in \Sigma} \{w_1 x w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*\}$
- $\{w_1 x w_2 y w_3 z w_4 \mid x, y, z \in \Sigma \wedge |\{x, y, z\}| = 3 \wedge w_1, w_2, w_3, w_4 \in \Sigma^*\}$
- $\{x_1 x_2 \dots x_n \in \Sigma^n \mid n \geq 0 \wedge \exists i, j, k \in \{1, \dots, n\}: x_i \neq x_j \neq x_k \neq x_i\}$

Jegliche Sprachoperationen – sowie Rechen- und Logikoperationen innerhalb der Mengen – sind also erlaubt.

Seien L_{\min} und L_{\max} diejenigen Sprachen mit Wörtern der Länge 2 über dem Alphabet $\Sigma = \{3, 5, 7\}$, die *mindestens* bzw. *maximal* einmal das Symbol „5“ enthalten.

- Geben Sie L_{\min} , L_{\max} , $L_{\min} \cap L_{\max}$, $L_{\min} \cup L_{\max}$, $L_{\min} \setminus L_{\max}$ explizit an (d. h. zählen Sie die Elemente in Mengenklammern auf).
- Mit $\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$ bezeichnet man das *Komplement* einer Sprache L (mit Alphabet Σ). Geben Sie \bar{L}_{\min} in Mengenschreibweise (ggf. unter Zuhilfenahme von „ \cup “) an.
- Geben Sie $(L_{\min} \setminus L_{\max})^*$ in Mengenschreibweise an.

Aufgabe 2.2 Unendliche Mengen zu regulären Sprachen

Gegeben eine unendliche Sprache in nicht geschlossener Mengenschreibweise über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Die enthaltenen Wörter sind der Länge nach sortiert angegeben. Geben Sie die Sprache in Mengenschreibweise an (ggf. unter Zuhilfenahme von „ \cup “)!

Beispiel: $\{a, bab, bbabb, bbbabbb, \dots\} \Rightarrow \text{Lösung: } \{b^i a b^i \mid i \geq 0\}$

- $\{a, bb, aaa, bbbb, aaaaa, bbbbbb, aaaaaaa, bbbbbbbb, \dots\}$
- $\{a, b, aca, bca, acaca, bcaca, acacaca, bcacaca, \dots\}$
- $\{aba, bab, abb, abaaba, bababa, abbaba, ababab, babbab, abbbab, \\ abaabb, bababb, abbabb, abaabaaba, \dots\}$

Aufgabe 2.3 Von der Sprachbeschreibung zur (regulären) Grammatik

Schreiben Sie die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\circ, \triangle, \square\}$ jeweils als *reguläre Grammatik*.

- (a) Alle Wörter, die mit $\circ\circ$ beginnen und auf $\square\square$ enden.
- (b) Alle Wörter, die *mindestens* drei Mal die Zeichenfolge $\triangle\triangle$ enthalten.
Anmerkung: Die Zeichenfolge $\triangle\triangle\triangle\triangle$ (auch wenn man sie als drei *überlappende* $\triangle\triangle$ -Folgen interpretieren könnte) zählt *nicht* als drei Zeichenfolgen $\triangle\triangle$.
- (c) Alle Wörter, die *genau* zwei Mal die Zeichenfolge $\circ\circ$, aber kein $\circ\circ\circ$, enthalten.

Aufgabe 2.4 Reguläre Ausdrücke

Geben Sie für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ jeweils einen zugehörigen *regulären Ausdruck* an.

- (a) Alle Wörter, die jedes Symbol aus Σ mindestens einmal enthalten.
- (b) Alle Wörter, die genau ein Mal die Zeichenfolge aa enthalten.
Anmerkung: Hierbei zählt die Zeichenfolge aaa nicht als zwei überlappende aa -Folgen; die Zeichenfolge $aaaa$ sind aber zwei aneinander grenzende aa -Folgen.
- (c) Alle Wörter, in denen das Symbol b genau zwei oder drei Mal und das Symbol c eine ungerade Anzahl oft vorkommt.

Hinweis: Um sich Schreibarbeit zu sparen, dürfen Sie sich reguläre Teilausdrücke definieren. Beispielsweise definieren Sie $r := (c|\varepsilon)^+$ und Ihre Lösung $a^*r \mid r(a^+|r)r$ benutzt r .

Aufgabe 2.5 Endliche Automaten

Geben Sie für alle drei Sprachen aus Aufgabe 2.4 jeweils einen zugehörigen *endlichen Automaten* an. Es spielt keine Rolle, ob ihr Automat deterministisch ist oder nicht.

Aufgabe 2.6 Kreuzworträtsel

Lösen Sie das folgende Kreuzworträtsel. Jedes gesuchte Wort ist Element der gegebenen Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Die Sprachen sind als Mengen oder als Grammatik gegeben.

	1		2		3	
4	→					
5	→					
				6	→	
7	→					

1	$\{ab, cb\}^2\{aaa\}^*\{c, ba, bb, bc\}$
2	$S \rightarrow aAa \mid bBb \qquad B \rightarrow CAb \mid C$ $A \rightarrow aBc \mid ba \qquad C \rightarrow c$
3	$\{a\}^* \cup \{\gamma^i \mid \gamma \in \Sigma \setminus \{a\}, i \geq 2\}$
4	$\{a^ib^jb^ia^j \mid j > i \geq 1\} \cup \{c, bb\}^+$
5	$S \rightarrow Bb \mid Aa \mid Cc \qquad B \rightarrow Ac \mid a$ $A \rightarrow Cb \mid Aa \mid Bc \mid b \qquad C \rightarrow Ba \mid Ab$
6	$\{a, b\} \cup \{c^i \mid i \bmod 2 = 0\}$
7	$S \rightarrow bAb \mid cAc \mid aS \qquad B \rightarrow c \mid C \mid S$ $A \rightarrow BaB \mid CbC \mid A \qquad C \rightarrow a \mid C \mid S$

Ni deziras al vi sukceson.