# Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/13/Klausur mit Lösungen

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 1 | 2 | 5 | 3 | 6 | 3 | 7 | 3 | 3 | 5 | 3 | 4 | 9 | 4 | 64 |



## Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen $L$ und $M$.
2. Eine *rationale Funktion* (in einer Variablen über $\mathbb{R}$).

3. Die reelle *Exponentialfunktion* zu einer Basis $b > 0$.
4. Eine *obere Treppenfunktion* zu einer Funktion

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *Basis* eines $K$-Vektorraums $V$.
6. *Ähnliche* Matrizen $M, N \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Lösung

1. Die Menge

   $$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$

   heißt die *Vereinigung* der beiden Mengen.
2. Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion $f$, die man als Quotient aus zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ mit $Q \neq 0$ darstellen kann, also $f = P/Q$ (sie ist außerhalb der Nullstellen von $Q$ definiert).
3. Die *Exponentialfunktion zur Basis* $b$ ist als

   $$b^x := \exp(x \ln b)$$

   definiert.
4. Eine Treppenfunktion

   $$t: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   heißt eine obere Treppenfunktion zu $f$, wenn $t(x) \geq f(x)$ für alle $x \in I$ ist.

5. Eine Familie $v_i, i \in I$, von Vektoren in $V$ heißt Basis, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden.
6. Die Matrizen $M, N$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $B$ mit $M = BNB^{-1}$ gibt.

## Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Regel für die inverse Folge* einer reellen Folge.
2. Das *Cauchykriterium für Reihen*.
3. Die Ableitung des Sinus und des Kosinus.

Lösung

1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$
2. Es sei
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0$ derart, dass für alle

$$n \geq m \geq n_0$$

die Abschätzung

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \epsilon$$

gilt.

3. Die Sinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(x) = \cos x$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos x,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(x) = -\sin x\,.$$

## Aufgabe (1 Punkt)

Negiere die Aussage „Martina findet alle Jungs im Kurs außer Markus zuckersüß“ durch eine Aussage, in der eine Existenzaussage und eine Oder-Verknüpfung vorkommen.

Lösung

Martina findet Markus zuckersüß oder es gibt im Kurs einen von Markus verschiedenen Jungen, den sie nicht zuckersüß findet.

## Aufgabe (2 Punkte)

1. Wie viele Minuten sind ein Fünftel einer Stunde?
2. Wie viel Prozent von einer Stunde sind $45$ Minuten?
3. Wie viele Minuten sind $90\%$ einer Stunde?
4. Wie viel Prozent von einer Stunde ist ein Tag?

Lösung

1. $\frac{60}{12} = 5$, also $12$ Minuten.
2. $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$, also $75\%$.

$$\frac{90}{100} \cdot 60 = 54\,,$$

3. also $54$ Minuten.

4. $2400\%$.

## Aufgabe (5 (1+3+1) Punkte)

Zu je zwei Punkten in der Produktmenge $\mathbb{Q}^2$ gibt es eine Verbindungsgerade und einen Mittelpunkt, der die Verbindungsstrecke halbiert.

1. Man gebe zu zwei Punkten $(a_1, a_2)$ und $(b_1, b_2)$ die Koordinaten des Mittelpunktes an.
2. Es seien in der Produktmenge $\mathbb{Z}^2$ fünf Punkte gegeben (jeder Punkt habe also ganzzahlige Koordinaten). Zeige, dass mindestens einer der Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten haben muss.
3. Gilt die Eigenschaft aus (2) auch bei vier Punkten?

### Lösung

1. Der Mittelpunkt von $(a_1, a_2)$ und $(b_1, b_2)$ besitzt die Koordinaten $\left( \frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2} \right)$.
2. Wir betrachten für jeden Punkt, ob die Koordinaten gerade oder ungerade sind. Dafür gibt es vier Möglichkeiten ( $(g,g)$, $(g,u)$, $(u,g)$ $(u,u)$). Da es $5$ Punkte gibt, kommt eine dieser Möglichkeiten zumindest zweimal vor. Seien $P$ und $Q$ zwei Punkte, die hinsichtlich dieser Eigenschaft übereinstimmen. Da das arithmetische Mittel von zwei geraden Zahlen und von zwei ungeraden Zahlen ganzzahlig ist, besitzt der Mittelpunkt von $P$ und $Q$ ganzzahlige Koordinaten.
3. Die vier Punkte
$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0)\,,(1,1)$$
zeigen, dass dies nicht gelten muss.

## Aufgabe (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5.$$

Lösung

Die Bedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$a - b + c = 2\,,$$
$$a + b + c = 0\,,$$
$$a + 3b + 9c = 5\,.$$

$I - II$ führt auf

$$b = -1$$

und $I - III$ führt auf

$$-4b - 8c = -3\,,$$

also

$$c = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}b = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

und somit

$$a = \frac{1}{8}.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$\frac{1}{8} - X + \frac{7}{8}X^2.$$

## Aufgabe (6 Punkte)

Beweise die folgende Aussage: Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstraß).

### Lösung

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das $k$-te Intervall $I_k$ bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k].$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall $I_{k+1}$ eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert nach Aufgabe 8.18 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl $x$.

## Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

konvergiert.

Lösung

Wir verwenden das Quotientenkriterium. Der Quotient von aufeinander folgenden Reihengliedern ist

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}} = \frac{(n+1)^2 e^n}{n^2 e^{n+1}}$$
$$= \frac{(n+1)^2}{n^2 e}$$
$$= \frac{n^2+2n+1}{n^2 e}$$
$$= \frac{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}{e}$$
$$= \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{e}.$$

Der Zähler konvergiert gegen $1$, deshalb konvergiert der Gesamtausdruck gegen $\frac{1}{e} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.

## Aufgabe (7 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass $f$ eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Lösung

Sei $f(u) \neq 0$. Dann ist wegen

$$f(u) = f(u+0) = f(u)f(0)$$

auch $f(0) \neq 0$. Wegen

$$f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$$

ist $f(0) = 1$. Wegen

$$1 = f(0) = f(1-1) = f(1) \cdot f(-1)$$

ist

$$b := f(1)$$

von $0$ verschieden. Wegen

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

ist $b$ positiv. Wir vergleichen $f(x)$ mit $b^x$. Für $x = 0, 1$ stimmen die beiden Funktionen überein. Für $x = n \in \mathbb{N}$ ist aufgrund der Funktionalgleichung

$$f(n) = f(1)^n = b^n \,.$$

Für $n \in \mathbb{Z}_-$ ist wegen $1 = f(0) = f(n-n) = f(n)f(-n)$

$$f(n) = f(-n)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-n} = b^n\,,$$

also gilt die Gleichheit für $n \in \mathbb{Z}$. Für $n = p/q \in \mathbb{Q}_+$ mit $p, q \in \mathbb{N}_+$ gilt wegen

$$f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q$$

und der eindeutigen Existenz von $q$-ten Wurzeln

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(p)} = \sqrt[q]{b^p} = b^{\frac{p}{q}}\,.$$

Daraus folgt über die Beziehung

$$1 = f(r - r) = f(r) \cdot f(-r)$$

auch die Übereinstimmung für negative rationale Argumente. Da $f$ nach Voraussetzung stetig ist und da $b^x$ stetig ist, und da es zu jeder reellen Zahl $x$ eine Folge rationaler Zahlen gibt, die gegen $x$ konvergiert, müssen die beiden Funktionen nach dem Folgenkriterium für die Stetigkeit übereinstimmen.

## Aufgabe (3 Punkte)

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \quad \text{und} \quad \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Lösung

Wegen

$$9^2 = 81 > 80 = 5 \cdot 16$$

ist

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2 > 5\,,$$

also ist

$$\frac{9}{4} > \sqrt{5}\,.$$

Somit ist

$$-\frac{9}{4} < -\sqrt{5}$$

und wegen des strengen Wachstums der Exponentialfunktion für eine Basis größer als $1$ ist daher

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} < \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}\,.$$

## Aufgabe (3 Punkte)

Man erläutere die Begriffe *hinreichende* und *notwendige Bedingung* anhand typischer Beispiele.

Lösung Bedingung/Hinreichend und notwendig/Erläuterung/Aufgabe/Lösung

## Aufgabe (5 (1+1+3) Punkte)

Wir betrachten die Standardparabel, also den Graphen zur Funktion

$$f(x) = x^2 \,.$$

1. Bestimme die Ableitung und die Tangente $t_a$ von $f$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
2. Bestimme den Schnittpunkt einer jeden Tangenten $t_a$ mit der $x$-Achse in Abhängigkeit von $a$. Skizziere die Situation.
3. Die Parabel, die Tangente $t_a$ und die $x$-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne deren Flächeninhalt in Abhängigkeit von $a$.

### Lösung

1. Die Ableitung im Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist $2a$. Dies ist die Steigung der Tangente $t_a$, die durch den Punkt $(a, a^2)$ verläuft. Für die Tangentengleichung gilt
   $$t_a(x) = 2ax + c$$
   und aus
   $$t_a(a) = 2a^2 + c = a^2$$
   folgt
   $$t_a(x) = 2ax - a^2 \,.$$
2. Der Ansatz
   $$t_a(x) = 2ax - a^2 = 0$$
   führt auf

$$a = \frac{a}{2}\,,$$

wobei bei $a = 0$ die gesamte $x$-Achse die Tangente ist.

3. Aus Symmetriegründen sei $a \geq 0$. Der Flächeninhalt der in Frage stehender Fläche ergibt sich, wenn man vom Flächeninhalt unterhalb des Graphen zwischen $0$ und $a$ den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $(\frac{a}{2}, 0)$, $(a, 0)$, $(a, a^2)$ abzieht. Es ist

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_0^a = \frac{1}{3}a^3$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{4}\,.$$

Der gefragte Flächeninhalt ist also gleich

$$\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{12}a^3\,.$$

Für beliebiges (auch negatives) $a$ ist die Antwort $\frac{1}{12}|a|^3$.

## Aufgabe (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - 5y + 7z &= -3\,, \\ -2x + 4y + 3z &= 9\,, \end{aligned}$$

$$x = -2\,.$$

Lösung

Wir setzen die dritte Gleichung in die beiden ersten Gleichungen ein und erhalten

$$-5y + 7z = 5$$

und

$$4y + 3z = 5\,.$$

Wir addieren das Vierfache der ersten mit dem Fünffachen der zweiten Gleichung und erhalten

$$43z = 45\,.$$

Somit ist

$$z = \frac{45}{43}$$

und

$$y = \frac{5 - 3z}{4} = \frac{215 - 135}{172} = \frac{80}{172} = \frac{20}{43}\,.$$

Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist somit

$$\left(-2, \frac{20}{43}, \frac{45}{43}\right).$$

## Aufgabe (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper $K$, eine kommutative Gruppe $(V,+,0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(6)\ \ r(su) = (rs)u$$

erfüllt.

Lösung

Es sei $K = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{R}$. Wir betrachten die „Skalarmultiplikation"

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$(a + b\mathrm{i}) \bullet u := au$$

definiert ist. Um zu zeigen, dass das Assoziativitätsaxiom nicht erfüllt ist, betrachten wir

$$r = s = \mathrm{i}$$

und ein beliebiges $u \neq 0$. Einerseits ist

$$(\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}) \bullet u = (-1) \bullet u = u$$

und andererseits ist

$$\mathrm{i} \bullet (\mathrm{i} \bullet u) = \mathrm{i} \bullet (0) = 0\,.$$

Die anderen multiplikativen Axiome sind hingegen erfüllt. Es ist

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i}) \bullet (u+v) &= a(u+v)\\ &= au+av\\ &= (a+b\mathrm{i}) \bullet u + (a+b\mathrm{i}) \bullet v\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}) \bullet u &= ((a+c)+(b+d)\mathrm{i}) \bullet u\\ &= (a+c)u\\ &= au+cu\\ &= (a+b\mathrm{i}) \bullet u + (c+d\mathrm{i}) \bullet u.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$1 \bullet u = u$$

für alle $u \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe (9 (1+1+7) Punkte)

Aus den Rohstoffen $R_1, R_2$ und $R_3$ werden verschiedene Produkte $P_1, P_2, P_3, P_4$ hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 6 | 2 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P_2$ | 4 | 1 | 2 |
| $P_3$ | 0 | 5 | 2 |
| $P_4$ | 2 | 1 | 5 |

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 7 | 5 |

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

| $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|
| 12 | 9 | 13 |

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Lösung

a) Die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

da in der $i$-ten Spalte die für das $i$-te Produkt benötigte Rohstoffmenge stehen muss.

b) Die benötigte Rohstoffmenge ist

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 + 16 + 10 \\ 12 + 4 + 35 + 5 \\ 18 + 8 + 14 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 56 \\ 65 \end{pmatrix}.$$

c) Es geht um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 4y + 2w \\ 2x + y + 5z + w \\ 3x + 2y + 2z + 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix},$$

das wir zunächst ohne Berücksichtigung der Tatsache lösen, dass nur nichtnegative Tupel sinnvoll interpretiert werden können. Wir ziehen vom $5$-fachen der dritten Zeile das Doppelte der zweiten Zeile ab und erhalten

$$\begin{pmatrix} 6x + 4y + 2w \\ 2x + y + 5z + w \\ 11x + 8y + 23w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 47 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ziehen wir von der dritten Zeile das Doppelte der ersten Zeile ab und erhalten

$$\begin{pmatrix} 6x + 4y + 2w \\ 2x + y + 5z + w \\ -x + 19w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$w = 0$$

erhalten wir die eindeutige Lösung

$$x = -23\,,$$
$$y = 3 + \frac{69}{2} = \frac{75}{2}$$

und

$$z = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{75}{2} + \frac{46}{5} = \frac{18 - 75 + 92}{10} = \frac{7}{2}\,.$$

Mit

$$x = 0$$

erhalten wir die eindeutige Lösung

$$w = \frac{23}{19}\,,$$
$$y = 3 - \frac{23}{38} = \frac{91}{38}$$

und

$$z = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{91}{38} - \frac{1}{5}\frac{23}{19} = \frac{342 - 91 - 46}{190} = \frac{205}{190} = \frac{41}{38}\,.$$

Alle Lösungen des linearen Gleichungssystems haben somit die Form

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{91}{38} \\ \frac{41}{38} \\ \frac{23}{19} \end{pmatrix} + s\left(\begin{pmatrix} -23 \\ \frac{75}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{91}{38} \\ \frac{41}{38} \\ -\frac{23}{19} \end{pmatrix}\right)$$

mit $s \in \mathbb{R}$. Wegen der ersten Zeile muss $s \leq 0$ sein und damit ist auch die vierte Zeile erfüllt. Die zweite Zeile führt auf die Bedingung

$$\frac{91}{38} + s\left(\frac{75}{2} - \frac{91}{38}\right) = \frac{91}{38} + s\left(\frac{1334}{38}\right) \geq 0\,,$$

also

$$s \geq -\frac{91}{1334}\,.$$

Die dritte Zeile führt auf die Bedingung

$$\frac{41}{38} + s\left(\frac{7}{2} - \frac{41}{38}\right) = \frac{41}{38} + s\left(\frac{92}{38}\right) \geq 0\,,$$

also

$$s \geq -\frac{41}{92}\,.$$

Damit alle Einträge nichtnegativ sind, muss der Parameter aus

$$0 \geq s \geq -\frac{91}{1334}$$

gewählt werden.

## Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und es sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von $\varphi$ ist, wenn $\lambda$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_\varphi$ ist.

Lösung

Es sei $M$ eine beschreibende Matrix für $\varphi$, und sei $\lambda \in K$ $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M) = 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 26.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Lemma 25.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))). Dies ist nach Lemma 27.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Lemma 24.14 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \neq 0\,,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu $\lambda$ nicht der Nullraum ist, also $\lambda$ ein Eigenwert zu $\varphi$ ist.