Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/38/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	3	1	2	4	7	2	4	1	4	6	0	0	4	4	6	5	59

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *injektive* Abbildung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$f\colon L \longrightarrow M.$$

2. Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$.
3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
4. Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
5. Die *Matrizenmultiplikation*.
6. Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix M über einem Körper K.

Lösung

1. Die Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M$$
ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in L$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.
2. Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ist durch
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
definiert.
3. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist,wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt.
4. Die *Ableitungsfunktion* ist diejenige Funktion, die jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(a)$ zuordnet.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

5. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Dann ist das *Matrixprodukt*
$$AB$$
diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$
gegeben sind.

6. Die Matrix M heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit
$$A \circ M = E_n = M \circ A$$
gibt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Division mit Rest* im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.
2. Die Ableitung des Sinus und des Kosinus.
3. Der Satz über die Beschreibung einer linearen Abbildung bei einem Basiswechsel.

Lösung

1. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0.$$

2. Die Sinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(x) = \cos x$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos x,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(x) = -\sin x\,.$$

3. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$

beschreiben.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 (1+2) Punkte)

1. Finde eine ganzzahlige Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ für die Gleichung
$$x^2 - y^3 + 2 = 0 \,.$$
2. Zeige, dass
$$\left(\frac{383}{1000}, \frac{129}{100} \right)$$
eine Lösung für die Gleichung
$$x^2 - y^3 + 2 = 0$$
ist.

Lösung

1. $(5, 3)$ ist eine ganzzahlige Lösung.
2. Es ist

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$\begin{aligned}\left(\frac{383}{1000}\right)^2-\left(\frac{129}{100}\right)^3+2&=\left(\frac{146689}{1000000}\right)-\left(\frac{2146689}{1000000}\right)+2\\&=\left(\frac{146689-2146689}{1000000}\right)+2\\&=\left(\frac{-2000000}{1000000}\right)+2\\&=-2+2\\&=0.\end{aligned}$$

Aufgabe (1 Punkt)

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{33}$.

Lösung

Es ist

$$-4=-\frac{132}{33}$$

und

$$-5=-\frac{165}{33},$$

daher ist

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$-5 \leq -\frac{133}{33} < -4\,,$$

also ist

$$\left\lfloor -\frac{133}{33} \right\rfloor = -5\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme für das Polynom

$$P = -6X^9 - 5X^8 - 4X^7 + \frac{1}{9}X^6 + X^2 + X$$

den Grad, den Leitkoeffizienten, den Leitterm und den Koeffizienten zu X^6.

Lösung

Der Grad ist 9, der Leitkoeffizient ist -6, der Leitterm ist $-6X^9$ und der Koeffizient zu X^6 ist $\frac{1}{9}$.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente reelle Folge beschränkt ist.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Lösung

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in \mathbb{R}$ und es sei ein $\epsilon > 0$ gewählt. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \le \epsilon \text{ für alle } n \ge n_0.$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \le |x| + |x - x_n| \le |x| + \epsilon \text{ für alle } n \ge n_0.$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n<n_0}\{|x_n|,\ |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Daher ist B eine obere Schranke und $-B$ eine untere Schranke für $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit der angegebenen Abschätzungseigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.
Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}_+$. D.h. für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}.$$

Lösung

Wir verwenden die Regel von Hospital. Die Ableitung der Zählerfunktion ist

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$$

mit dem Wert 1 für $x = 0$ und die Ableitung der Nennerfunktion ist

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$$

mit dem Wert 2 für $x = 0$. Daher ist Hospital anwendbar und es ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto e^x,$$

keine rationale Funktion ist.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Lösung

Nehmen wir an, es gelte

$$e^x = \frac{P}{Q}$$

mit Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X], Q \neq 0$. Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion. Es muss also

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} = \frac{P}{Q}$$

gelten. Damit ist auch

$$P'Q - PQ' = PQ$$

Es sei $d = \operatorname{grad}(P)$ ($P = 0$ ist nicht möglich) und $e = \operatorname{grad}(Q)$. Beim Ableiten reduziert sich der Grad eines Polynoms um 1. Der Grad rechts ist somit $d + e$ und links $\leq d + e - 1$, es liegt also ein Widerspruch vor.

Aufgabe (1 Punkt)

Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(-5, 5)$, der durch den Punkt $(-4, -1)$ läuft.

Lösung

Der Abstand der beiden Punkte ist

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$r = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}\,.$$

Die Kreisgleichung ist somit

$$(X+5)^2 + (Y-5)^2 = 37.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

die Extrema.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + 3^{-x} \\ &= e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 3}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Extrema betrachten wir die Ableitung, diese ist

$$f'(x) = (\ln 2) e^{x \ln 2} - (\ln 3) e^{-x \ln 3}\,.$$

Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt durch Multiplikation mit $e^{x \ln 3}$ auf

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$0 = (\ln 2)e^{x(\ln 2+\ln 3)} - \ln 3\,.$$

Daher muss

$$e^{x\ln 6} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

sein, woraus sich

$$x\ln 6 = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right),$$

also

$$x = \frac{\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}{\ln 6}$$

ergibt. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = (\ln 2)^2 e^{x\ln 2} + (\ln 3)^2 e^{-x\ln 3}$$

und somit positiv, also liegt im angegebenen Punkt ein isoliertes lokales Minimum vor.

Aufgabe (6 Punkte)

Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion g: $[a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige $f = 0$.

Lösung

Nehmen wir an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Dann gibt es einen Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) \neq 0$. Sagen wir $f(c) > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein Teilintervall $J = [d,e] \subseteq [a,b]$ mit $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ für alle $x \in J$. Die Funktion g sei außerhalb von J die Nullfunktion und auf J durch

$$g(x) = -(x-d)(x-e)$$

definiert. Die Funktion g ist stetig auf $[a,b]$ und im Innern von $[d,e]$ positiv, also insgesamt nichtnegativ. Daher gibt es ein weiteres Teilintervall $J' = [s,t] \subseteq J$ derart, dass $g(x) \geq \frac{g(\frac{d+e}{2})}{2}$ für alle $x \in J'$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_d^e f(x)g(x)dx \\
&\geq \int_s^t f(x)g(x)dx \\
&\geq (t-s)\frac{f(c)}{2}\frac{g(\frac{d+e}{2})}{2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&x \geq 0\,,\\
&y + x \geq 0\,,\\
&-1 - y \leq -x\,,\\
&5y - 2x \leq 3\,,
\end{aligned}$$

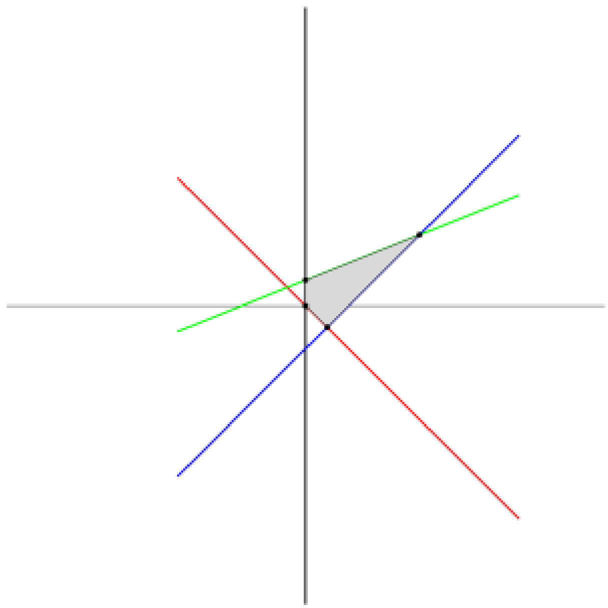
gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

Lösung



a) Wir lösen jeweils nach y auf und erhalten die vier Ungleichungen

$$\begin{aligned} & x \geq 0\,, \\ & y \geq -x\,, \\ & y \geq x-1\,, \\ & y \leq \frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\,. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Geraden begrenzen dann die Lösungsmenge.

b) Die Eckpunkte sind Schnittpunkte der eingrenzenden Geraden, die durch die Gleichungen (die zu den Ungleichungen gehören) gegeben sind. Diese sind

$$(0,0),\ \left(0,\frac{3}{5}\right),\ \left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right),\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Aufgabe (4 Punkte)

Sei V der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 4 mit der Basis

$$x^i, 0 \leq i \leq 4.$$

Erstelle für die Ableitungsabbildung

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$\varphi: V \longrightarrow V,\, P \longmapsto P',$$

die beschreibende Matrix bezüglich dieser Basis.

Bestimme den Kern und das Bild dieser Abbildung sowie deren Dimensionen.

Lösung

Die Ableitung schickt die Basiselemente auf

$$x^0 = 1 \mapsto 0,\, x^1 \mapsto 1,\, x^2 \mapsto 2x,\, x^3 \mapsto 3x^2,\, x^4 \mapsto 4x^3.$$

Daraus sind direkt die Koeffizienten der Bildvektoren bezüglich der Basis abzulesen. In der beschreibenden Matrix stehen in den Spalten die Koeffizienten der Bildvektoren. Daher lautet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen Polynomen vom Grad ≤ 3. Dieser Untervektorraum besitzt die Basis x^0, x^1, x^2, x^3 und hat demnach die Dimension 4.

Der Kern besteht aus den konstanten Polynomen mit der Basis x^0, dieser Unterraum ist also eindimensional.

Aufgabe (6 Punkte)

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Es seien $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ Matrizen über einem Körper K mit

$$A \circ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass dann auch

$$M \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Lösung

Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bedeutet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} xa + yc &= 1\,, \\ xb + yd &= 0\,, \\ za + wc &= 0\,, \\ zb + wd &= 1\,. \end{aligned}$$

Wegen der ersten und der vierten Gleichung sind $(a, c) \neq (0, 0)$ und $(b, d) \neq (0, 0)$. Aus der zweiten Gleichung folgt nach Fakt *****, dass es ein $s \in K$ gibt mit

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$x = sd$$

und

$$y = -sb\,.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$1 = sda - sbc = s(da - bc)$$

und somit

$$s = \frac{1}{da - bc}$$

und

$$x = \frac{d}{da - bc}$$

und

$$y = -\frac{b}{da - bc}\,.$$

Aus der dritten Gleichung folgt, dass es ein $t \in K$ gibt mit

$$z = tc$$

und

$$w = -ta\,.$$

Aus der vierten Gleichung ergibt sich

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$1 = tcb - tad = -t(da - bc)$$

und somit

$$t = -\frac{1}{da - bc}$$

und

$$z = -\frac{c}{da - bc}$$

und

$$w = \frac{a}{da - bc} \, .$$

Somit ist

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

$$
\begin{aligned}
M \circ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{d}{da-bc} & -\frac{b}{da-bc} \\ -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{da-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{da-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -cb+da \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{da-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+da \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als n Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD

Wir wenden darauf φ an und erhalten einerseits

$$a_1\varphi(v_1)+\cdots+a_n\varphi(v_n)=\lambda_1a_1v_1+\cdots+\lambda_na_nv_n=0\,.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_na_1v_1+\cdots+\lambda_na_nv_n=0\,.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n-\lambda_1)a_1v_1+\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1})a_{n-1}v_{n-1}=0\,.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n-\lambda_i)a_i=0$, $i=1,\ldots,n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n-\lambda_i\neq 0$ folgt $a_i=0$ für $i=1,\ldots,n-1$ und wegen $v_n\neq 0$ ist dann auch $a_n=0$.

Zuletzt bearbeitet vor 2 Monaten von Marymay0609

Wikiversity

Der Inhalt ist verfügbar unter CC BY-SA 3.0, sofern nicht anders angegeben.

Datenschutz • Klassische Ansicht

Create PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API PDFCROWD