Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/40/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	4	2	3	1	3	0	5	0	0	0	0	4	3	4	9	7	1	52

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *bijektive* Abbildung

$$f: M \longrightarrow N.$$

2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
3. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
4. Der *Kotangens*.
5. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K.
6. Der *Kern* einer linearen Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Die Abbildung f heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
   $$|x - x_n| \leq \epsilon$$
   gilt.
3. Die Reihe
   $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$
   heißt die *geometrische Reihe* in x.
4. Die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

heißt *Kotangens*.

5. Unter einem *Vektorraum* V über K versteht man eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V,\ (u,v) \longmapsto u+v,$$

und

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv = s \cdot v,$$

derart, dass die folgenden Axiome erfüllt sind (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig):

   1. $u + v = v + u$,
   2. $(u + v) + w = u + (v + w)$,
   3. $v + 0 = v$,
   4. Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$,
   5. $r(su) = (rs)u$,
   6. $r(u + v) = ru + rv$,
   7. $(r + s)u = ru + su$,
   8. $1 \cdot u = u$.

6. Man nennt

$$\operatorname{kern} \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Cauchykriterium für Reihen*.
2. Der *Satz von Rolle*.
3. Der Satz über Basiswechsel bei einem Endomorphismus.

Lösung

1. Es sei

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

   eine Reihe von reellen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle

   $$n \geq m \geq n_0$$

   die Abschätzung

   $$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \epsilon$$

   gilt.

2. Sei $a < b$ und sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in \,]a,b[$ mit

$$f'(c) = 0 \, .$$

3. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1} .$$

Aufgabe (4 (2+2) Punkte)

Es sei $T_n, n \in \mathbb{N}_+$, eine Familie von Mengen. Wir setzen

$$S_n = T_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} T_i \right) .$$

a) Zeige

$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \, .$$

b) Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ disjunkt ist, dass also

$$S_n \cap S_k = \emptyset$$

für $n \neq k$ ist.

Lösung

a) Wegen $S_n \subseteq T_n$ gilt $\supseteq$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $x \in \bigcup_{i=1}^{n} T_i$. Dann gibt es ein i zwischen 1 und n mit $x \in T_i$ und damit auch ein minimales k mit dieser Eigenschaft. Es ist also $x \in T_k$, aber $x \notin T_i$ für $i < k$. Damit ist $x \in T_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i = S_k$ und insbesondere $x \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i$.

b) Sei $k \neq n$ und sagen wir $k < n$. Sei $x \in S_n = T_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} T_i$. Dann ist $x \in T_n$ und $x \notin T_i$ für $i < n$. Also ist insbesondere $x \notin T_k$ und damit auch $x \notin S_k$. Also sind S_n und S_k disjunkt.

Aufgabe (2 Punkte)

Erläutere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Lösung

Mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion werden Aussagen $A(n)$ bewiesen, die von den natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Man beweist zuerst die Aussage $A(0)$. Ferner zeigt man, dass man für alle n aus der Gültigkeit von $A(n)$ auf die Gültigkeit von $A(n+1)$ schließen kann. Daraus folgt die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige durch Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Zerlegung in Primzahlen besitzt.

Lösung

Wir beweisen die Existenz durch Induktion über n. Für $n = 2$ liegt eine Primzahl vor. Bei $n \geq 3$ ist entweder n eine Primzahl, und diese bildet die Primfaktorzerlegung, oder aber n ist keine Primzahl. In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Zerlegung $n = ab$ mit kleineren Zahlen $a, b < n$. Für diese Zahlen gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Zerlegung in Primfaktoren, und diese setzen sich zu einer Primfaktorzerlegung für n zusammen.

Aufgabe (1 Punkt)

Eine Termitenkönigin legt 36000 Eier pro Tag und lebt zwanzig Jahre lang. Wie viele Eier legt sie in ihrem Leben?

Lösung

Es sind

$$36000 \cdot 365 \cdot 20 = 720000 \cdot 365 = 262800000$$

Eier.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei

$$x^2 + px + q = 0$$

eine quadratische Gleichung über einem Körper K, und es sei $r \neq 0$ eine Lösung davon. Zeige, dass auch $\frac{q}{r}$ eine Lösung der Gleichung ist.

Lösung

Wir behaupten, dass das Polynom $X^2 + pX + q$ die Faktorzerlegung

$$X^2 + pX + q = (X - r)\left(X - \frac{q}{r}\right)$$

besitzt. Wenn man die rechte Seite ausmultipliziert, so stimmt der konstante Koeffizient und der Leitkoeffizient mit den Koeffizienten der linken Seite überein. Der lineare Koeffizient ist

$$-r-\frac{q}{r}=\frac{-r^2-q}{r}=\frac{-(-pr-q)-q}{r}=\frac{pr+q-q}{r}=p\,,$$

so dass hier auch Überstimmung vorliegt. Wenn man nun rechts $\frac{q}{r}$ einsetzt, kommt offenbar 0 raus, es liegt also eine Lösung vor.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 (2+3) Punkte)

1. Bestimme die Glieder x_1, x_2 der Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startglied
   $$x_0=1\,.$$
2. Finde ganze Zahlen
   $$a,b\neq 0$$
   mit
   $$|a+b\sqrt{3}|\leq \frac{1}{10}\,.$$

Lösung

1. Es ist
$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$
und
$$x_2 = \frac{2+\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}\,.$$
2. Von der Approximation
$$\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$$
her betrachten wir $7 - 4\sqrt{3}$. Wegen
$$49 = 7^2 > (4\sqrt{3})^2 = 48$$
ist diese Zahl positiv. Wir behaupten
$$7 - 4\sqrt{3} \leq 0,1\,.$$
Dies ist äquivalent zu
$$6,9 \leq 4\sqrt{3}\,.$$
Wegen
$$(6,9)^2 = 47,61 \leq 48$$
ist dies richtig.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Regel von l'Hospital.

Lösung

Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 15.9 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)), angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} .$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sinh t}$$

für $t > 0$.

Lösung

Es ist

$$\frac{1}{\sinh t} = \frac{2}{e^t - e^{-t}}.$$

Mit der Substitution $t = \ln s$ müssen wir eine Stammfunktion für

$$\frac{2}{s - s^{-1}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s^2 - 1} = \frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

finden. Eine solche ist

$$\ln(s-1) - \ln(s+1).$$

Daher ist

$$\ln(e^t - 1) - \ln(e^t + 1)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sinh t}$.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Lösung

Es sei $v_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 23.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (2) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also $v_i, i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren.
Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass $v_i, i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist.

Aufgabe (9 (1+1+6+1) Punkte)

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	11	5	3
P_2	8	4	6
P_3	7	30	1
P_4	12	0	15

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

P_1	P_2	P_3	P_4
8	5	7	4

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

R_1	R_2	R_3
8	15	7

Zeige, dass man daraus kein Produkttupel ohne Abfall produzieren kann.

d) Wie viel vom Produkt P_2 kann man mit den unter c) gelieferten Rohstoffen produzieren, wie viel vom Produkt P_3?

Lösung

a) Die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 30 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix},$$

da in der i-ten Spalte die für das i-te Produkt benötigte Rohstoffmenge stehen muss.

b) Die benötigte Rohstoffmenge ist

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 30 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88+40+49+48 \\ 40+20+210 \\ 24+30+7+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 270 \\ 121 \end{pmatrix}.$$

c) Es geht um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 30 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x+8y+7z+12w \\ 5x+4y+30z \\ 3x+6y+z+15w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix},$$

das wir zunächst ohne Berücksichtigung der Tatsache, dass nur nichtnegative Tupel sinnvoll interpretiert werden können. Wir ziehen vom 4-fachen der dritten Zeile das 5-fache der ersten Zeile ab und erhalten

$$\begin{pmatrix} 11x+8y+7z+12w \\ 5x+4y+30z \\ -43x-16y-31z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir zur dritten Zeile das 4-fache der zweiten Zeile hinzu und erhalten

$$\begin{pmatrix} 11x+8y+7z+12w \\ 5x+4y+30z \\ -23x+89z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$z = 0$$

erhalten wir die eindeutige Lösung

$$x = -\frac{48}{23},$$
$$y = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{48}{23} = \frac{585}{92}$$

und

$$w=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{585}{92}+\frac{11}{12}\cdot\frac{48}{23}=\frac{184-1170+528}{276}=-\frac{458}{276}=-\frac{229}{138}\,.$$

Mit

$$x=0$$

erhalten wir die eindeutige Lösung

$$z=\frac{48}{89}\,,$$
$$y=\frac{15}{4}-\frac{30}{4}\cdot\frac{48}{89}=-\frac{105}{356}$$

und

$$w=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{105}{356}-\frac{7}{12}\cdot\frac{48}{89}=\frac{712+210-336}{1068}=\frac{586}{1068}=\frac{291}{534}\,.$$

Alle Lösungen haben somit die Form

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{105}{356} \\ \frac{48}{89} \\ \frac{291}{534} \end{pmatrix}+s\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{105}{356} \\ \frac{48}{89} \\ \frac{291}{534} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\frac{48}{23} \\ \frac{585}{92} \\ 0 \\ -\frac{229}{138} \end{pmatrix}\right)$$

mit $s\in\mathbb{R}$. Wegen der ersten Zeile muss $s\geq 0$ sein. Dann ergibt die zweite Zeile aber einen negativen Wert und daher gibt es keine Lösung.

d) Vom Produkt P_2 kann man maximal eine Einheit produzieren, vom Produkt P_3 maximal eine halbe Einheit.

Aufgabe (7 (5+2) Punkte)

Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit dem Rang r.

1. Zeige, dass es eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B, beide mit dem Rang r, mit $M = B \circ A$ gibt.
2. Sei $s < r$. Zeige, dass es nicht möglich ist, $M = B \circ A$ mit einer $s \times n$-Matrix A und einer $m \times s$-Matrix B zu schreiben.

Lösung

1. Wir fassen die Matrix als lineare Abbildung
   $$K^n \longrightarrow K^m.$$
   Nach Lemma 26.2 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist der Rang dieser Abbildung gleich r, d.h. das Bild $V \subseteq K^m$ besitzt die Dimension r. Es gibt also eine Faktorisierung
   $$K^n \longrightarrow V \longrightarrow K^m,$$
   wobei die erste Abbildung die durch M gegebene Abbildung mit dem Bild V ist und die zweite Abbildung die Inklusion $V \subseteq K^m$. Mit einer Basis $v_1, \ldots, v_r$ von V und den Standardbasen links und rechts werden diese beiden linearen Abbildungen durch eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B beschrieben. Somit gilt
   $$M = B \circ A.$$
   Da die durch A beschriebene lineare Abbildung surjektiv auf V abbildet, ist ihr Rang gleich r. Da das Bild der durch B beschriebenen linearen Abbildung wegen der Injektivität ebenfalls die Dimension r besitzt, ist ihr Rang auch r.
2. Wir nehmen an, dass es eine Darstellung
   $$M = B \circ A$$
   mit einer $s \times n$-Matrix A und einer $m \times s$-Matrix B gibt. Dann ergibt sich eine Faktorisierung

$$K^n \xrightarrow{A} K^s \xrightarrow{B} K^m.$$

Das Bild der Gesamtabbildung ist im Bild der hinteren Abbildung enthalten, und ist somit höchstens s-dimensional. Da r die Dimension des Bildes der Gesamtabbildung ist, ergibt sich aus $s < r$ ein Widerspruch.

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Eigenvektoren der Funktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto \mathrm{i}x$.

Lösung

Jede komplexe Zahl $x \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert i.