Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/27/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	0	3	2	1	4	3	2	4	5	3	0	4	2	4	4	3	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.
2. Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$.

3. Eine reelle *Potenzreihe*.

4. Die *Stetigkeit* einer Funktion

   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

5. Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

6. Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

2. Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion

   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

3. Der Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Aufgabe * (2 Punkte)

Wenn Karl an Susanne denkt, bekommt er feuchte Hände, einen Kloß im Hals und einen roten Kopf. Einen roten Kopf bekommt er genau dann, wenn er an Susanne denkt oder wenn er das leere Tor nicht trifft. Wenn Karl das leere Tor trifft, bekommt er feuchte Hände. Karl bekommt den Ball vor dem leeren Tor. Kurz darauf bekommt er feuchte Hände, einen roten Kopf, aber keinen Kloß im Hals. Hat er an Susanne gedacht? Hat er das leere Tor getroffen?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Die Biologin Sandra O'Neil ist eine renommierte Forscherin über Bakterien. Ihr Institut hat ein hochauflösendes Mikroskop erworben, das auf dem Bildschirm die Wirklichkeit im Verhältnis $3:10^{10}$ wiedergibt. Auf dem Bildschirm ist die Geißel des Bakteriums 21 cm lang und dreimal so lang wie das Bakterium selbst. Auf den Bakterien befindet sich ein roter Punkt, dessen Flächeninhalt auf dem Bildschirm 2 Quadratzentimeter einnimmt.

1. Wie lang ist das Bakterium in Wirklichkeit?
2. Welchen Flächeninhalt hat der rote Punkt in Wirklichkeit?

Aufgabe * (1 Punkt)

Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper gegen x konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K, b > 1$. Zeige, dass es dann Elemente $c, d > 1$ mit $b = cd$ gibt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktion.

Aufgabe * (2 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe * (4 (1+3) Punkte)

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)).$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe * (5 Punkte)

Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Begründe den Zusammenhang

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^{a} \frac{1}{x} dx + \int_1^{b} \frac{1}{x} dx$$

für $a, b \in \mathbb{R}_+$ allein mit der Hilfe von Integrationsregeln.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} -x & +2y & +z & +3w & = & -1 \\ x & +3y & -2z & & = & 3 \\ 3x & -5y & +z & & = & 2 \\ 2x & +y & -z & +3w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der Diagonalmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Es sei

$$NM = 0$$

für jede $n \times n$-Matrix N vom Rang 1. Zeige

$$M = 0\,.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Beschreibung eines Eigenraums als Kern.