Lineare Algebra

Die Lösungen eines LGS bestimmen

Überführe das LGS durch Verrechnen von Zeilen in die untere Dreiecksform.

Die Lösungen lassen sich dann ablesen. Bereits berechnete Variablen müssen eingesetzt werden.

$$\begin{array}{cccc} x & +0y & +z & =0 \\ 2x & +y & -z & =1 \\ -x & +2y & -2z & =0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 2x & +y & -z & =1 \\ & 5y & -5z & =1 \\ & & -5z & =2 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile lässt sich ablesen:

$z = -\frac{2}{5}$

Einsetzen von z in die zweite Zeile ergibt:

$5y - 5 \cdot (-\frac{2}{5}) = 1$

$y = -\frac{1}{5}$

Einsetzen von y und z in die erste Zeile ergibt:

$2x - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1$

$x = \frac{2}{5}$

Alle α bestimmen, für die das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt

Überführe das LGS mit allenαin die untere Dreiecksform.

$$\begin{array}{cccc} 2x_1 & +\alpha x_2 & +0x_3 & =2 \\ \alpha x_1 & +0x_2 & +1x_3 & =3 \\ 2x_1 & -1x_2 & +1x_3 & =3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 2x_1 & -1x_2 & +1x_3 & = & 3 \\ 0 & +(2\alpha+3)x_2 & -3x_3 & = & -3 \\ 0 & +0 & +(3\alpha^2-6\alpha-9)x_3 & = & 7\alpha^2-2\alpha-27 \end{array}$$

1.) Für $3\alpha^2 - 6\alpha - 9 = 0$ ergibt sich ein Widerspruch, es gibt also keine Lösung.

2.) Für $(3\alpha^2 - 6\alpha - 9)\, x_3 - (7\alpha^2 - 2\alpha - 27) = 0$ ergibt sich eine Nullzeile, es gibt also unendlich viele Lösungen.

3.) Für $x_3 = \frac{7\alpha^2-2\alpha-27}{3\alpha^2-6\alpha-9}$ gibt es genau eine Lösung.

Bestimmung von Nullstellen

1.) Bei Polynomen vom Grad 2 forme das Polynom in Normalform um und benutze die p-q-Formel:

p-q-Formel: Für ein Polynom des Grades 2 in der Form $x^2 + px + q = 0$ lassen sich die Nullstellen folgendermassen berechnen:

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(-\frac{p}{2})^2 - q}$

2.) Bei höheren Polynomen wende Polynomdivision an.

Matrizen, Vektoren, Vektorräume

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen A und B können multipliziert werden, wenn sie die Formate A: m x n und B: n x p haben. Das Ergebnis ist dann vom Format m x p.

Berechne für jede Stelle in der Ergebnismatrix das Skalarprodukt des Zeilenvektors von A und des Spaltenvektors von B, die sich and dieser Stelle kreuzen würden:

Inverse Matrix bestimmen

Stelle die zu invertierende Matrix A der Einheitsmatrix I_n gegenüber und forme A in die Einheitsmatrix um. An der Stelle von I_n steht nun die Inverse Matrix:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Handelt es sich bei U_1 um einen Untervektorraum von U_2?

Bsp.: $U_1 := \{(x,y) :\ x = y,\ x, y \epsilon \mathbb{R}\} \quad U_2 = \mathbb{R}^2$

Das Folgende muss gezeigt werden:

1.) $\underline{U_1}$ist eine Teilmenge von U_2 und U_1ist nicht leer: $U_1 \neq \emptyset$

Es gibt unendlich viele $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$mit $x = y$ bspw. $(1,1)$, daher gilt $U_1 \neq \emptyset$.

2.) Die Vektoraddition ist in U_1definiert: Die Addition zweier Vektoren aus U_1ergibt stets einen Vektor, der auch in U_1liegt.

$(x,x)+(y,y)=(x+y,\ x+y)\epsilon U_1$
3.) Die Skalarmultiplikation ist in U_2definiert: Die Multiplikation eines Vektoren aus U_1 mit einem Skalar ergibt stets einen Vektor, der auch in U_1liegt.
$\alpha \cdot (x,x)=(\alpha x,\ \alpha x)\epsilon\mathbb{R}^2$

Vektoren auf lineare Unabhängigkeit prüfen

Nehmen wir an, die drei Vektoren $u_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}3\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ sollen geprüft werden.

Stelle ein LGS mit den gegebenen Vektoren als Zeilen auf:

I	0	-1	0	1	0	
II	3	2	3	4	0	
III	1	1	1	1	0	
I	1	1	1	1	0	(III)
II	0	-1	0	1	0	(I)
III	0	-1	0	1	0	$II-3\cdot III$
I	1	1	1	1	0	(I)
II	0	-1	0	1	0	(II)
III	0	0	0	0	0	$(III-II)$

Es ergibt sich, dass ein Vektor von den anderen linear abhängig war (Nullzeile). Die anderen verbliebenen Vektoren sind linear unabhängig.

Basis eines Vektorraums bestimmen

Nehmen wir an, wir sollten die Basis des Vektorraums bestimmen, der von den drei genannten Vektoren u_1, u_2, u_3 aufgespannt wird. Die Basis besteht dann aus denjenigen Vektoren, die linear unabhängig sind.
Basis des genannten Vektorraums wäre also bspw. ((1,1,1,1),(0,-1,0,1)).

Dimension eines Vektorraums bestimmen

Die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl der Vektoren in seiner Basis. Die Dimension des oben besprochenen Vektorraums ist also 2.

Rang einer Matrix bestimmen

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl ihrer voneinander linear unabhängigen Zeilenvektoren.

Prüfen, ob ein Vektor in einem gegebenen Vektorraum liegt

Wenn ein Vektor in einem gegebenen Vektorraum liegt, dann ist er von den Vektoren der Basis des Vektorraums linear abhängig.
Bsp.: Liegt der Vektor $u=1,2,3,4$ im von den oben genannten Vektoren aufgespannten Vektorraum?
LGS mit den Basisvektoren und dem zu testenden Vektor aufstellen und so in Dreiecksform bringen:

I	1	1	1	1	0	
II	0	-1	0	1	0	
III	1	2	3	4	0	
I	1	1	1	1	0	(I)
II	0	-1	-2	-3	0	(I-III)
III	0	-1	0	1	0	(II)
I	1	1	1	1	0	(I)
II	0	-1	-2	-3	0	(II)
III	0	0	2	4	0	(III-II)

Das Umformen ergibt keine Nullzeile, das heisst alle drei Vektoren sind voneinander linear unabhängig. Der Vektor u liegt daher nicht im genannten Vektorraum.

Abbildungen

Zeigen, dass eine Abbildung linear ist

Für lineare Abbildungen muss gelten:

1.) $f(\lambda c) = \lambda f(c)$
2.) $f(a+b) = f(a) + f(b)$
Beispiel: Zeigen Sie, dass die Abbildung $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ mit $f(z_1,\, z_2,\, z_3) = (z_1 + iz_2 - z_3,\; iz_1 - z_2 + (1+i)z_3)$ linear ist.
Zeige, dass Bedingung 1 gilt:
$f(\lambda \cdot z_1,\; \lambda \cdot z_2,\; \lambda \cdot z_3)$
$= (\lambda z_1 + i\lambda z_2 - \lambda z_3, \quad i\lambda z_1 - \lambda z_2 + (1+i)\lambda z_3)$
$= (\lambda(z_1 + iz_2 - z_3),\; \lambda(iz_1 - z_2 + (1+i)z_3))$
$= \lambda(z_1 + iz_2 - z_3),\; iz_1 - z_2 + (1+i))$
$= \lambda \cdot f(z_1,\; z_2,\; z_3)$
Zeige, dass auch Bedingung 2 gilt:
$f(z_1 + a_1,\; z_2 + a_2,\; z_3 + a_3)$
$= ((z_1 + a_1) + i \cdot (z_2 + a_2) - (z_3 + a_3), \quad i \cdot (z_1 + a_1) - (z_2 + a_2) + (1+i) \cdot (z_3 + a_3))$
$= (z_1 + a_1 + iz_2 + ia_2 - z_3 + a_3, \quad iz_1 + ia_1 - z_2 + a_2 - (1+i) \cdot z_3 + (1+i) \cdot a_3)$
$= ((z_1 + iz_2 - z_3) + (a_1 + ia_2 - a_3),\; (iz_1 - z_2 + (1+i)z_3) + (ia_1 + a_2 + (1+i)a_3))$
$= f(z_1,\; z_2\; z_3) + f(a_1,\; a_2\; a_3)$

Abbildungsmatrix bestimmen
Die Variablen müssen "ausgeklammert" werden, denn es gilt (für das obige Beispiel der Abbildung):

$$A \cdot z = \begin{pmatrix} z_1 & +iz_2 & -z_3 \\ iz_1 & -z_2 & +(1+i)z_3 \end{pmatrix}$$

Bestimme A:

$$\begin{pmatrix} 1 & +i & -1 \\ i & -1 & (1+i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & +iz_2 & -z_3 \\ iz_1 & -z_2 & +(1+i)z_3 \end{pmatrix}$$

Entsprechend ist die Matrix der Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +i & -1 \\ i & -1 & (1+i) \end{pmatrix}.$$

Kern einer Abbildung bestimmen
Bestimme, falls nicht gegeben, die Abbildungsmatrix A.
Stelle ein LGS mit A und b = 0 auf (für das obige Beispiel der Abbildung).
Die Lösung beschreibt den Kern der Abbildung.

I	1	i	-1	0	
II	i	-1	(1+i)	0	
I	0	0	(1+2i)	0	$(II - 2 \cdot I)$
II	1	i	-1	0	(I)

Aus I ergibt sich $z_3 = 0$, eine Variable $z_2 = a$ kann frei gewählt werden, dann folgt aus II $z_1 = -i \cdot a$

Daher ist $z \,\epsilon\, Kern\, f$ mit $z = \begin{pmatrix} -ia \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ist die Funktion surjektiv, injektiv oder bijektiv?
1.) Eine Funktion $f: X \to Y$ ist surjektiv, wenn es für jedes $y \epsilon Y$ ein $x \epsilon X$ gibt, die die Gleichung erfüllen.
Bsp.: Die Funktion $f: \; N \to N, \; f(x) = 2x$ ist nicht surjektiv, zum Beispiel kein $x \epsilon \mathbb{N}$ gibt, dass die Formel $f(x) = 2x = 3$ erfüllt.
2.) Eine Funktion $f: X \to Y$ ist injektiv, wenn keine zwei Funktionswerte auf den gleichen Wert zeigen, also gilt $f(x) \neq f(y)\; if\; x \neq y$.
Bsp.: Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f((x,y)) = x + y$ ist nicht injektiv, weil bspw. $f((1,5)) = f((2,4)) = 6$ gilt.
3.) Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

Funktionen an Vektoren

Determinante einer Matrix bestimmen
Hier bietet es sich sehr an, die Rechenwege für 2x2, 3x3 und 4x4-Matrizen auf seinem Cheatsheet zu haben. Ansonsten ist das Gauß-Verfahren gut:

Forme die Matrix in die untere Dreiecksform um. Das Produkt der resultierenden Diagonalen ist dann die Determinante.
Es ist dabei erlaubt, das Vielfache einer Zeile auf eine andere Zeile zu addieren. Wenn wir eine Zeile selbst mit einer Zahl multiplizieren, müssen wir diesen Faktor wieder aus der Determinante herausrechnen. Wenn wir zwei Zeilen vertauschen, müssen wir die resultierende Determinante für jedes mal tauschen mit (-1) multiplizieren. Es ist also am einfachsten, jede Zeile an ihrem Platz zu lassen und sie mithilfe von Vielfachen anderer Zeilen auf die passende Form zu bringen und die anderen Techniken nur anzuwenden, wenn es unbedingt nötig oder praktisch ist.

Beispiel: Berechne die Determinante der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

I	1	3	4	0	
II	2	5	7	1	
III	-1	2	-3	0	
IV	0	0	1	4	
I	1	3	4	0	I
II	0	-1	-1	1	$II - 2 \cdot I$
III	0	5	1	0	$III + I$
IV	0	0	1	4	IV
I	1	3	4	0	I
II	0	5	1	0	II
III	0	0	-4	5	$III + 5 \cdot II$
IV	0	0	1	4	IV
I	1	3	4	0	I
II	0	5	1	0	II
III	0	0	-4	5	III
IV	0	0	0	5,25	$IV + \frac{1}{4} \cdot III$

Dann berechnet sich die Determinante aus $1 \cdot 5 \cdot (-4) \cdot 5,25 = 21$

Skalarprodukt zweier Vektoren
Das Skalarprodukt berechnet sich folgendermassen:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad < u, v >= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Norm eines Vektors
Die Norm eines Vektors $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ wird ||v|| geschrieben und berechnet sich aus:
$||v|| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$

Winkel zwischen zwei Vektoren
Wenn zwei Vektoren v,w gegeben sind, lässt sich der Winkel aus der folgenden Formel bestimmen:
$\cos\gamma = \frac{<v,w>}{||v|| \cdot ||w||}$, und entsprechend: $\gamma = \arccos(\frac{<v,w>}{||v|| \cdot ||w||})$.

Orthonormalbasis aus gegebenen Vektoren bestimmen
Das Bestimmen der Vektoren einer Orthonormalbasis erfolgt in jeweils zwei Schritten: Einem Orthogonalisierungs- und einem Normierungsschritt.
Am besten schreibt man diese Schritte auf sein Cheatsheet.
Wir gehen von der folgenden Situation aus: Es sind drei Vektoren $w_1,\ w_2,\ w_3$ gegeben. Aus ihnen soll eine Orthonormalbasis, bestehend aus den Vektoren$v_1,\ v_2,\ v_3$ bestimmt werden.
$v_1 = \frac{w_1}{||w_1||}$ (Normalisieren von v_1)
$v_2' = w_2 - < w_2, v_1 > \cdot v_1$ (Orthogonalisieren des zweiten Vektors)
$v_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||}$ (Normalisieren von v_2')
$v_3' = w_3 - < w_3, v_1 > \cdot v_1 - < w_3, v_2 > \cdot v_2$ (Orthogonalisieren des dritten Vektors)

$v_3 = \frac{v_3'}{||v_3'||}$ (Normalisieren des dritten Vektors)

Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements
Setze die bestimmten Vektoren der Orthonormalbasis als Zeilen eines LGS ein. Die Lösungsvektoren beschreiben dann die Basis des orthogonalen Komplements.

Bsp.: Die Orthonormalbasis ist gegeben durch (v_1, v_2) mit $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Stelle das LGS auf:

I	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0
II	0	1	0	0

Das LGS ist bereits in Dreiecksform. Zum Auflösen setzen wir bspw.: $x_3 = t$, dann ergibt sich aus II: $x_2 + 0t = 0$, $x_2 = 0$; und aus III: $\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2} \cdot t = 0$, $x_1 = -t$. Als Lösungsvektor ergibt sich also: $w_1 = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$. Setze für t einen Wert ein und normiere den Vektor: $t = 1$, $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w_{1norm} = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Eigenwerte einer Matrix bestimmen
Für alle Eigenwerte λ gilt: $det(\lambda I_n - A) = 0$

Bsp.: Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Bestimme zunächst $\lambda I_n - A$:

$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 & -2 \\ 3 & -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$, und daraufhin die Determinante dieser Matrix mithilfe des Cheatsheets.

Das sich ergebende Polynom kann wie gehabt auf Nullstellen untersucht werden.

Eigenräume zu bestimmten Eigenwerten bestimmen
Der Eigenraum ist definiert durch $E_\lambda(A) = Kern(\lambda I_n - A)$, setze daher einen berechneten Eigenwert für λ ein und füge die resultierende Matrix in ein LGS ein:
Bsp.: Im oben genannten Beispiel ergibt sich $\lambda = 1$, deswegen ergibt sich das LGS:

I	-2	2	-2	0	
II	2	2	-2	0	
III	-3	-2	2	0	
I	0	2	-2	0	$II \cdot 3 - III \cdot 2$
II	-2	2	-2	0	I
III	0	0	0	0	$I - III$

Entsprechend ist eine Variable frei wählbar: $x_3 = t$.
Damit ergibt sich aus I: $2x_2 - 2t = 0,\ x_2 = t$
Und dann aus II: $-2x_1 + 2t - 2t = 0,\ x_1 = 0$
Setze einen konkreten Wert für t ein: $bspw.\ t = 1$.
Der durch $L(0, 1, 1)$ gegebene Vektorraum ist der Eigenraum der Matrix A zum Eigenwert λ.

Analysis

Konvergenz einer Folge nachweisen
Die Folge (a_n) konvergiert gegen die Zahl $b \epsilon \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon \epsilon \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Grenzwert einer Folge bestimmen
Setze eine große Zahl für n ein, um eine Approximation zu bekommen.

Konvergenz oder Divergenz einer Reihe nachweisen
Hier gibt es eine Menge mehr Konvergenzkriterien als bei Folgen.

Quotientenkriterium: Gibt es bei einer Reihe $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ einen Index n_0 und ein $q < 1$ so, dass für alle $n > n_0$ gilt: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$, so ist die Reihe konvergent. Gibt es aber einen Index n_0, so dass für alle $n > n_0$ gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, so ist die Reihe divergent.

Bsp.: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5k+3}$; Für das Kriterium gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{5k+3}{5(k+1)+3}| = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{5+\frac{3}{k}}{5+\frac{8}{k}}| = 1$. Laut dem Quotientenkriterium ist die Reihe divergent.
Ähnliche Aufgabenstellung: Bestimmen sie alle x, für die die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\frac{x}{2})^k$ konvergiert. Bestimme $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$: $\frac{\frac{1}{(k+1)}(\frac{x}{2})^{k+1}}{\frac{1}{k}(\frac{x}{2})^k} = \frac{\frac{1}{(k+1)}(\frac{x}{2})}{\frac{1}{k}} = (\frac{k}{k+1}) \cdot \frac{x}{2}$. Der von k abhängige Teil wird sich für größere n an 1 annähern, aber sie nie ganz erreichen. Entsprechend bleibt die gesamte Formel unter 1 für $0 \leq |x| \leq 2$, das bedeutet für diese Werte konvergiert die Reihe. Für alle anderen divergiert sie.

Cauchy-Kriterium: Wenn zu der unendlichen Reihe $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, so das für alle m,n mit $m > n > N$ gilt:
$|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$, dann konvergiert die Reihe. Ansonsten divergiert sie.

Leibnitz-Kriterium: Wenn (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$. Der Grenzwert liegt immer zwischen zwei aufeinander folgenden Partialsummen.

Majoranten- und Minorantenkriterium: Wenn eine unendliche Reihe $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und eine weitere unendliche und konvergente(!) Reihe $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ mit nichtnegativen Summanden b_n gegeben ist und für fast alle n gilt: $|a_n| \leq b_n$, dann ist die Reihe S absolut konvergent (Majorantenkriterium). Der Umkehrschluss liefert das Minorantenkriterium: Gilt für die Summanden der Reihen $a_n \leq b_n$ für fast alle n, dann folgt sobald S divergent ist: T ist auch divergent.

Ableitungen
Die Ableitung einer Funktion gibt ihre Steigungsfunktion wieder, f'(x) ordnet also jedem x die Steigung der Funktion an der Stelle x zu.
Intuitiv lässt sich die Ableitung folgendermassen berechnen: Setze den Exponenten eines jeden Summanden als Faktor vor den Koeffizienten und verringere den Exponenten um 1, also:
$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + cx^1 + d \to f'(x) = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + ... + cx + 0$
Allerdings müssen in speziellen Fällen weitere Rechenregeln beachtet werden:

Produktregel: $f(x) = u \cdot v \to f'(x) = u'v + uv'$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u}{v} \to f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \to f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Kurvendiskussion
Auf Differenzierbarkeit untersuchen: Tipps: Gleichung anschauen. Tritt irgendwo eine Stelle auf, in der die Funktion nicht definiert ist oder einen Sprung macht? Gibt es Stellen, an denen die Funktion nicht stetig ist (an solchen Stellen kann, muss aber nicht keine Differenzierbarkeit vorliegen).

Bsp.: $f(x) = |x| + x^2$. Die Funktion $|x|$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick. An dieser Stelle ist die Funktion also nicht differenzierbar, also auch die gesamte Funktion $|x| + x^2$ nicht.

Definitionsbereich untersuchen: Tipps: Gibt es bestimmte x, bei denen die Formel eine Null im Nenner hätte?
Bsp.: $f(x) = \frac{x^2+1}{2-x^2}$. Die Funktion definiert auf $\mathbb{R} \backslash \pm\sqrt{2}$.

Extrema bestimmen: Extrema sind dadurch charakterisiert, dass dort $f'(x) = 0$ gilt (Notwendiges Kriterium):
Bsp.: Untersuche $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ im Intervall [-2,2]
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0$
$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$
Einsetzen in die p-q-Formel ergibt:
$x_1,\, x_2 = \frac{2}{6} \pm \sqrt{(\frac{2}{6})^2 + \frac{8}{3}}$
$x_1 = 2,\; x_2 = -\frac{4}{3}$

Hinreichendes Kriterium ist $f''(x) \neq 0$, also $6x - 2 \neq 0$. Bei $f''(x) < 0$ handelt es sich um ein Maximum, bei $f''(x) > 0$ handelt es sich um ein Minimum.
Für x_1 ergibt das $f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 \neq 0 \;\rightarrow Minimum$ mit $f(x_1) = -11$
Für x_2 ergibt das $f''(-\frac{4}{3}) = 6 \cdot (-\frac{4}{3}) - 2 = -10 \neq 0 \rightarrow Maximum$ mit $f(x_2) = 7\frac{14}{21}$.

Nun müssen wir nur noch sichergehen, dass die errechneten Werte im Intervall liegen und an den Intervallgrenzen nicht ein höherer Wert erreicht wird.
x_1 liegt direkt auf der Intervallgrenze 2. Für $x = -2$ gilt: $f(-2) = 5$, daher wird dort kein höherer Wert als im berechneten Maximum erreicht.

Unsere globalen Extrema liegen daher an den Punkten (2,-11) und$(-\frac{4}{3}, 7\frac{14}{21})$ vor.