# Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/26/Klausur mit Lösungen

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0 | 4 | 3 | 0 | 6 | 3 | 4 | 1 | 3 | 50 |



## Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung

$$f: L \longrightarrow M.$$

2. Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
3. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper $K$.
4. Die *Stetigkeit* einer Funktion
   $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
5. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
6. Die *Determinante* eines Endomorphismus
   $$\varphi: V \longrightarrow V$$
   auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $V$.

Lösung

1. Die Abbildung $f$ heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit $f(x) = y$ gibt.
2. Die Menge
   $$\mathbb{R}^2$$
   mit $0 := (0, 0)$ und $1 := (1, 0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch
   $$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$
   definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*.

3. Der Grad eines von $0$ verschiedenen Polynoms
$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$
mit $a_n \neq 0$ ist $n$.

4. Man sagt, dass $f$ *stetig* im Punkt $x$ ist,wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle $x'$ mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt.

5. Die Funktion $f$ heißt *differenzierbar* in $a$, wenn der Limes
$$\lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existiert.

6. Die Abbildung $\varphi$ werde bezüglich einer Basis durch die Matrix $M$ beschrieben. Dann nennt man
$$\det \varphi := \det M$$
die *Determinante* der linearen Abbildung $\varphi$.

## Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über die algebraische Struktur der komplexen Zahlen.
2. Die wichtigsten Eigenschaften des natürlichen Logarithmus.
3. Der Satz über die mathematische Struktur der Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems.

Lösung

1. Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.
2. Der natürliche Logarithmus
$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$
ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ stiftet. Dabei gilt
$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.
3. Die Menge aller Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$
über einem Körper $K$ ist ein Untervektorraum des $K^n$

(mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

## Aufgabe (4 (1+3) Punkte)

In einer Höhle befinden sich im Innern am Ende des Ganges vier Personen. Sie haben eine Taschenlampe bei sich und der Gang ins Freie kann nur mit der Taschenlampe begangen werden. Dabei können höchstens zwei Leute gemeinsam durch den Gang gehen. Die

Personen sind unterschiedlich geschickt, die erste Person benötigt eine Stunde, die zweite Person benötigt zwei Stunden, die dritte Person benötigt vier Stunden und die vierte Person benötigt fünf Stunden, um den Gang zu durchlaufen. Wenn zwei Personen gleichzeitig gehen, entscheidet die langsamere Person über die Geschwindigkeit.

1. Die Batterie für die Taschenlampe reicht für genau $13$ Stunden. Können alle vier die Höhle verlassen?
2. Die Batterie für die Taschenlampe reicht für genau $12$ Stunden. Können alle vier die Höhle verlassen?

Lösung Höhle/Taschenlampe/Aufgabe/Lösung

## Aufgabe (1 Punkt)

Professor Knopfloch ist soeben aufgestanden und noch etwas schläfrig. Er setzt sich seine zwei Kontaklinsen in seine Augen. Beim Frühstück stellt er fest, dass in seinem linken Auge keine Kontaktlinse ist. Er ist sich sicher, dass keine Kontaktlinse verloren ging, jede Kontaklinse landete in einem seiner Augen. Ist die Abbildung, die die Zuordnung an diesem Morgen der Kontaktlinsen zu den Augen beschreibt, surjektiv, injektiv, bijektiv?

Lösung

Die einzige Möglichkeit ist, dass beide Kontaklinsen im rechten Auge gelandet sind. Somit ist die Abbildung nicht injektiv ($2$ Elemente haben den gleichen Wert), und auch nicht surjektiv, da das linke Auge nicht getroffen wird. Insbesondere ist die Abbildung nicht bijektiv.

## Aufgabe (2 Punkte)

Ein Apfelverkäufer verkauft $2893$ Äpfel für $3127$ Euro. Ein zweiter Apfelverkäufer verkauft $3417$ Äpfel für $3693$ Euro. Welches Angebot ist günstiger?

Lösung

Wir bestimmen, wie viel die gleiche Menge an Äpfeln bei den beiden Verkäufern kostet. Um die beiden Angebote vergleichen zu können, berechnen wir den jeweiligen Preis für

$$2893 \cdot 3417 = 9885381$$

Äpfel. Beim ersten Verkäufer muss man dafür

$$3127 \cdot 3417 = 10684959$$

Euro bezahlen. Beim zweiten Verkäufer muss man dafür

$$3693 \cdot 2893 = 10683849$$

Euro bezahlen. Das zweite Angebot ist also günstiger.

## Aufgabe (5 (1+1+1+1+1) Punkte)

Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

1. $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)\mathrm{i}$.

2. $\mathbf{Re}\ (z+w) = \mathbf{Re}\ (z) + \mathbf{Re}\ (w)$.
3. $\mathbf{Im}\ (z+w) = \mathbf{Im}\ (z) + \mathbf{Im}\ (w)$.
4. Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{Re}\ (rz) = r\,\mathbf{Re}\ (z) \text{ und } \mathbf{Im}\ (rz) = r\,\mathbf{Im}\ (z).$$

5. $z = \mathbf{Re}\ (z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{Im}\ (z) = 0$ ist.

Lösung Es seien im folgendem jeweils z = a + b·i, w = c + d·i mit a,b,c,d aus den komplexen Zahlen. Dann gilt:

1. z = a + bi = Re(z) + Im(z)*i.
2. Re(z + w) = Re(a + bi + c + di) = Re((a + c) + i(b + d)) = a + c = Re(a + bi) + Re(c + di) = Re(z) + Re(w).
3. Im(z + w) = Im(a + bi + c + di) = Im((a + c) + i(b + d)) = b + d = Im(a + bi) + Im(c + di) = Im(z) + Im(w).
4. Sei r aus den reellen Zahlen, dann gilt

```
Re(rz) = Re(r(a + bi)) = Re(ra + rbi) = ra = rRe(z) und

Im(rz) = Im(r(a + bi)) = Im(ra + rbi) = rb = rIm(z)
```

5. Seien A,B,C die drei Aussagen.

```
 [A => B] Es gelte z = Re(z) => z = Re(a + bi) = a, also z ist reell.

 [B => C] Es sei z reell. Dann gilt Im(z) = Im(z + 0·i) = 0.

 [C => A] Es sei Im(z) = 0. Dann gilt b = 0 also z = a = Re(z).
```

## Aufgabe (4 Punkte)

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

Lösung

Induktionsanfang. Für $n = 1$ kommt links nur der Summand zu $k = 1$ vor, und dieser ist

$$(-1)^0 1^2 = 1 \, .$$

Rechts steht ebenfalls

$$(-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Induktionsschluss. Die Aussage sei für $n$ bewiesen, wir erschließen daraus auf die Gültigkeit für $n + 1$. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 + (-1)^n(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)(n+1) \\ &= (-1)^{n+2}\frac{-n(n+1)}{2} + \frac{(-1)^{n+2}2(n+1)(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{n+2}\frac{-n(n+1)+2(n+1)(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{n+2}\frac{(n+1)(-n+2n+2)}{2} \\ &= (-1)^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für alle $n$.

## Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

## Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

## Aufgabe (4 (1+3) Punkte)

1. Skizziere die Graphen der Funktionen
   $$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x-1,$$
   und
   $$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x},$$
2. Bestimme die Schnittpunkte der beiden Graphen.

Lösung

1.

2. Die Schnittbedingung führt auf
   $$\frac{1}{x} = x-1$$
   bzw. auf
   $$1 = x^2 - x\,.$$
   Quadratisches Ergänzen führt auf

$$1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

also

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Somit ist

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

die $x$-Koordinate des einzigen Schnittpunktes (die negative Wurzel führt zu einem Punkt außerhalb des Definitionsbereiches). Der einzige Schnittpunkt ist

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

## Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

## Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz von Rolle.

Lösung

Wenn $f$ konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also $f$ nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in ]a, b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 11.13 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gibt es ein $c \in [a, b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses $c$ ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 15.3 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)).

## Aufgabe (3 Punkte)

Finde die Punkte (bzw. den Punkt) $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ derart, dass die Steigung der Sinusfunktion $\sin$ in $a$ gleich der Gesamtsteigung von $\sin$ zwischen $0$ und $\frac{\pi}{2}$ ist.

Lösung

Die Gesamtsteigung ist

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} .$$

Die Ableitung des Sinus ist der Kosinus, es geht also um die Lösungen der Gleichung

$$\cos a = \frac{2}{\pi}$$

mit $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Auf diesem Intervall ist die Kosinusfunktion streng fallend und somit gibt es wegen $\frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{2}$ genau eine Lösung, nämlich bei

$$a = \arccos \frac{2}{\pi} \, .$$

## Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

## Aufgabe (6 Punkte)

Bestimme explizit die reellen $2 \times 2$-Matrizen der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit

$$M^2 = 0 \, .$$

Lösung

Die Bedingung bedeutet

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$b(a+d) = 0$$

folgt $b = 0$ oder $a + d = 0$. Bei $a + d \neq 0$ folgt aus den Einträgen rechts oben und links unten direkt

$$b = c = 0\,.$$

Daraus ergibt sich aus links oben und rechts unten ebenfalls

$$a = d = 0\,,$$

was der Annahme widerspricht. Es muss also

$$a + d = 0$$

sein, also

$$d = -a\,.$$

Damit sind die Bedingungen rechts oben und links unten erfüllt und die beiden anderen Bedingungen sind äquivalent und bedeuten einfach

$$a^2 + bc = 0\,.$$

Wenn $b=0$ (bzw. $c=0$) ist, so ist

$$a=d=0$$

und $c$ (bzw. $b$) beliebig. Dies führt zu den Lösungen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Seien nun

$$b,c \neq 0\,.$$

Wenn $b, c$ beide positiv oder beide negativ sind, so gibt es keine Lösung für $a$. Also müssen die Vorzeichen von $b$ und $c$ verschieden sein. In diesem Fall ist

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

eine Lösung.

## Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

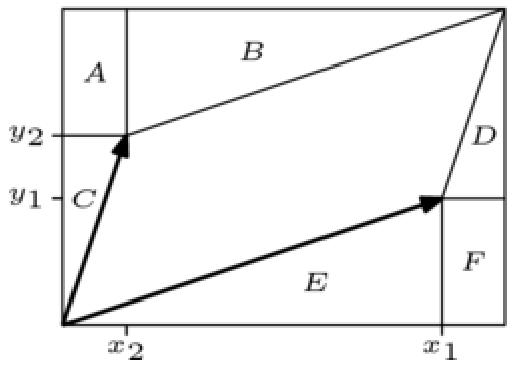
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{7} \\ -2 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

## Aufgabe (4 Punkte)

Man begründe anhand des Bildes, dass zu zwei Vektoren $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ die Determinante der durch die Vektoren definierten $2 \times 2$-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.




Lösung Zunächst wird der Flächeninhalt des äußeren Rechtecks bestimmt:

$$U := (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Als nächstes werden die Flächeninhalte der Flächen *A* bis *F* aufgestellt:

$$A = F = y_1 x_2$$

$$B = E = \frac{1}{2} y_1 x_1$$

$$C = D = \frac{1}{2} y_2 x_2$$

Die Summe dieser Flächen ist:

$$V := A + B + C + D + E + F = 2y_1x_2 + y_1x_1 + y_2x_2$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist somit:

$$\begin{aligned} P := U - V &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_2 \\ &= y_2x_1 - x_2y_1 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung des Ergebnisses berechnen wir die Determinante der durch die Vektoren $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ definierten $2 \times 2$-Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2 = P$$

Man sieht schnell, dass die Determinante dem Flächeninhalt des Parallelogramms entspricht. ■

Das Vorzeichen der Determinante dreht sich um, wenn man die beiden Spaltenvektoren vertauscht.

## Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme, abhängig von $a, b, c, d$, den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 4b & a-c & d \\ 0 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 0 & c^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Lösung

Da eine obere Dreiecksmatrix vorliegt, ist der Rang der Matrix gleich der Anzahl der von $0$ verschiedenen Elemente in der Hauptdiagonalen. Dies ist einfach die Anzahl der $a, b, c, d$, die von $0$ verschieden sind.

## Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar und ob sie diagonalisierbar ist.

Lösung

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned}\chi &= \det\begin{pmatrix} X-9 & -3 & 0 \\ 5 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X-13 \end{pmatrix} \\ &= ((X-9)(X+1)+15)(X-13) \\ &= (X^2-8X+6)(X-13).\end{aligned}$$

Den vorderen Faktor schreiben wir als

$$X^2-8X+6=(X-4)^2-10\,.$$

Somit besitzt dieses Polynom die beiden Nullstellen

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{10}+4\,.$$

Daher besitzt das charakteristische Polynom drei verschiedene Nullstellen und ist somit nach Korollar 28.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) diagonalisierbar und erst recht trigonalisierbar.