Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/46/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	3	3	1	2	3	3	5	3	5	3	0	2	4	1	9	55

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *angeordneter* Körper.

2. Die *absolute Konvergenz* einer reellen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

3. Eine *ungerade* Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Ein *Erzeugendensystem* $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V.

6. Der *Kern* einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow W$$

   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Regel für die inverse Folge* einer reellen Folge.

2. Die *Periodizätseigenschaften* für Sinus und Kosinus (ohne spezielle Werte).

3. Der Festlegungssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe * (1 Punkt)

In einer psychologischen Längsschnittstudie wird die Entwicklung von Einstellungen und Verhaltensweisen von Personen untersucht. Ein Fallbeispiel: Im Alter von 20 Jahren geht Linda regelmäßig auf Demonstrationen, sie hilft im Eine-Welt-Laden mit, braut ökologisches Bier, kocht Bio-Gemüse und studiert manchmal Soziologie.

Welcher der folgenden Befunde ist nach 10 Jahren am unwahrscheinlichsten?

1. Linda arbeitet für eine Versicherungsagentur.
2. Linda engagiert sich bei Attac und arbeitet für eine Versicherungsagentur.
3. Linda engagiert sich bei Attac.

Aufgabe * (1 Punkt)

Winnetou und Old Shatterhand liegen nachts am Strand des Rio Pecos und halten ihre vom harten Tagesritt müden Füße in den Fluss. Dabei schauen sie in den Himmel und zählen Sternschnuppen. Winnetou sieht 117 und Old Shatterhand sieht 94 Sternschnuppen. Old Shatterhand sieht von den von Winnetou gesichteten Sternschnuppen 39 nicht. Wie viele der Sternschnuppen, die von Old Shatterhand gesichtet wurden, sieht Winnetou nicht?

Aufgabe * (3 Punkte)

Wir fassen die Lösung eines Sudokus (unabhängig von Zahlenvorgaben) als eine Abbildung

$$\{1,2,\ldots,9\} \times \{1,2,\ldots,9\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,9\},\ (i,j) \longmapsto a_{i,j},$$

auf. Charakterisiere mit dem Begriff der Bijektivität, dass eine korrekte Lösung vorliegt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe (1 Punkt)

Skizziere die Funktion

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto -\lfloor -x \rfloor .$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme eine Symmetrieachse für den Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 - 7x + 5.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Konzept „Approximation“ anhand typischer Beispiele.

Aufgabe * (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{7n^4 - 2n^2 + 5}{4n^4 - 5n^3 + n - 6}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

1. f ist stetig im Punkt x.
2. Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen unter Verwendung der Regel

$$\left(f^2\right)' = 2f \cdot f'$$

mit Hilfe von

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad n und $a \in \mathbb{R}$. Zeige unter Verwendung der Taylor-Formel, dass das Taylor-Polynom vom Grad n zu f im Entwicklungspunkt a mit f übereinstimmt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in K$. Zeige durch Induktion, dass

$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimme die Anzahl der nicht invertierbaren 2×2-Matrizen über K.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Determinante zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (9 (2+3+4) Punkte)

Wir betrachten die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Sei

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erstelle eine Beziehung zwischen den Folgen x_n und y_n und Rekursionsformeln für diese Folgen.

c) Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren zu M.