Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/10/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
Punkte	3	3	1	3	3	3	7	8	6	2	2	2	4	5	4	4	4	64

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Durchschnitt* von Mengen L und M.
2. Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.

3. Eine *beschränkte* Teilmenge von reellen Zahlen.

4. Der *Tangens*.

5. Das *Unterintegral* einer nach unten beschränkten Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

6. Der *Kern* einer linearen Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Die Menge
$$L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}$$
heißt der *Durchschnitt* der beiden Mengen.

2. Zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ nennt man a den Realteil und b den Imaginärteil von z.

3. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen heißt *beschränkt*, wenn es reelle Zahlen $s \leq S$ mit $M \subseteq [s, S]$ gibt.

4. Die Funktion
$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
heißt *Tangens*.

5. Das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f heißt das *Unterintegral* von f.

6. Man nennt

$$\operatorname{kern}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms* über einem Körper K.
2. Die Ableitung der reellen Exponentialfunktion.
3. Der Satz über Zeilenrang und Spaltenrang.

Lösung

1. Ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ vom Grad d besitzt maximal d Nullstellen.
2. Die Exponentialfunktion
   $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$
   ist differenzierbar mit
   $$\exp'(x) = \exp x\,.$$
3. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein.

Aufgabe (1 Punkt)

Die Weihnachtsferien begannen am 22.12.2015 (erster Ferientag) und endeten am 6.1.2016 (letzter Ferientag). Wie lange dauerten die Ferien?

Lösung

16 Tage.

Aufgabe (3 Punkte)

Illustriere die dritte binomische Formel durch eine geeignete geometrische Figur.

Lösung Dritte binomische Formel/Illustriere geometrisch/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Lösung

Eine ungerade Zahl hat die Form $2k-1$, die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist also gleich

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Wir behaupten, dass dies gleich n^2 ist. Für $n=1$ ist die Aussage richtig, da die Summe gleich $1=1^2$ ist. Sei die Aussage nun für ein n schon bewiesen. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2 .$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, ausgehend von den Axiomen für einen angeordneten Körper, dass $1>0$ gilt.

Lösung

Es gibt nur die drei sich ausschließenden Möglichkeiten

$$1>0 \text{ oder } 1=0 \text{ oder } 1<0.$$

Aufgrund der Körperaxiome ist $1\neq 0$. Wir müssen also nur noch die Möglichkeit $1<0$ zum Widerspruch führen. Nehmen wir $1<0$ an. Aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition kann man beidseitig -1 addieren und erhält

$$0<-1.$$

Aufgrund der Verträglichkeit mit der Multiplikation mit positiven Elementen kann man diese Abschätzung quadrieren und erhält

$$0<(-1)(-1)=1 ,$$

also ist zugleich $1 > 0$, ein Widerspruch.

Aufgabe (7 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich bei jedem Starttupel (a, b, c, d) nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Lösung

Es sei m das Maximum der beteiligten vier Zahlen a, b, c, d. Wir zeigen, dass dieses Maximum nach endlich vielen Iterationen kleiner wird. Da wir uns innerhalb der natürlichen Zahlen befinden, folgt daraus, dass das Maximum irgendwann 0 wird, was bedeutet, dass dann alle vier Zahlen 0 sind. Da alle Zahlen aus $\mathbb{N}$ sind und die nichtnegative Differenz genommen wird, wird das Maximum definitiv nicht größer bei einer Iteration. Allerdings kann das Maximum gleich bleiben. Dies kann aber nur dann sein, wenn ein Nachbar (zyklisch gedacht, die vierte Zahl ist also auch ein Nachbar der ersten Zahl) des Maximums gleich 0 ist. Wir müssen (durch zyklisches Vertauschen und Spiegeln) nur noch die Situation anschauen, wo das Tupel die Form

$$(m, 0, x, y)$$

mit $x, y \leq m$ hat. Wenn $x = y = 0$ ist, so liefert die Abbildung

$$(m, 0, 0, m).$$

Wir müssen also nur noch die Situation anschauen, wo es höchstens zwei Nullen gibt. Bei

$$(m, 0, x, 0)$$

mit $x \neq 0$ ergibt sich im nächsten Schritt

$$(m, x, x, m),$$

was keine Nullen mehr hat. Bei

$$(m, 0, 0, y)$$

mit $y \neq 0$ ergibt sich im nächsten Schritt

$$(m, 0, y, m - y).$$

Bei $y < m$ besitzt dies nur eine Null, bei $y = m$ sind wir in einem schon behandelten Fall. Sei das Tupel jetzt

$$(m, 0, x, y)$$

mit

$$0 < x, y \leq m\,.$$

Das Ergebnis ist

$$(m, x, |x - y|, m - y).$$

Bei $x = m$ ist dies

$$(m, m, m - y, m - y)$$

mit dem Folgetupel

$$(0, y, 0, y).$$

Bei $y < m$ besitzt dies ein kleineres Maximum, bei $y = m$ ist das Folgetupel gleich

$$(m, m, m, m),$$

und davon ist das Folgetupel

$$(0, 0, 0, 0).$$

Sei also $x < m$. Das Folgetupel ist bei $y = m$ gleich

$$(m, x, |x - y|, m - y) = (m, x, m - x, 0)\,,$$

und dessen Folgetupel ist

$$(m - x, |m - 2x|, m - x, m).$$

Allenfalls in der dritten Position könnte eine 0 stehen, doch diese ist nicht benachbart zum einzigen Vorkommen von m, so dass das Folgetupel keine Null besitzt.

Das Folgetupel ist bei $y < m$ gleich

$$(m, x, |x - y|, m - y),$$

und dabei ist wieder allenfalls in der dritten Position eine 0, stehen, doch diese ist nicht benachbart zum einzigen Vorkommen von m, so dass das Folgetupel keine Null besitzt.

Aufgabe (8 (2+1+2+1+2) Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

Lösung

(a) Die Eigenschaft $x_n > a$ folgt durch Induktion, wobei die Voraussetzung $x_0 > a$ unmittelbar den Induktionsanfang ergibt. Der Induktionsschluss ergibt sich mittels

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} > \frac{a + a}{2} = a\,.$$

Das strenge Fallen ergibt sich daraus durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} < \frac{x_n + x_n}{2} = x_n\,.$$

(b) Die Konstanz ergibt sich durch Induktion, wobei die Voraussetzung $x_0 = a$ den Induktionsanfang sichert und der Induktionsschluss aus

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} = \frac{a + a}{2} = a$$

folgt.

(c) Die Eigenschaft $x_n < a$ folgt durch Induktion, wobei die Voraussetzung $x_0 < a$ unmittelbar den Induktionsanfang ergibt. Der Induktionsschluss ergibt sich mittels

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} < \frac{a + a}{2} = a\,.$$

Das strenge Wachstum ergibt sich daraus durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} > \frac{x_n + x_n}{2} = x_n\,.$$

(d) Nach (a), (b), (c) ist die Folge in jedem Fall monoton und beschränkt, daher konvergiert sie in $\mathbb{R}$.

(e) Der Grenzwert sei x. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x = \lim_{n \to \infty} x_{n+1}\,.$$

Wir wenden die Rechenregeln für Limiten auf die Rekursionsvorschrift an und erhalten

$$x = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n + a}{2} = \frac{x + a}{2}\,.$$

Daraus ergibt sich $x = a$.

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Lösung

Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$. Dann ist

$$(X-a_1) \cdots (X-a_{i-1})(X-a_{i+1}) \cdots (X-a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i-a_1) \cdots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \cdots (a_i-a_n)}(X-a_1) \cdots (X-a_{i-1})(X-a_{i+1}) \cdots (X-a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i. Nennen wir dieses Polynom P_i. Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 6.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)).

Aufgabe (2 Punkte)

Fridolin sagt:

„Irgendwas kann am Zwischenwertsatz nicht stimmen. Für die stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

gilt $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz müsste es also eine Nullstelle zwischen -1 und 1 geben, also eine Zahl $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$. Es ist doch aber stets $\frac{1}{x} \neq 0$.“

Wo liegt der Fehler in dieser Argumentation?

Lösung

Die Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht definiert, den Zwischenwertsatz kann man nur für stetige Funktionen anwenden, die auf einem abgeschlossenen Intervall definiert sind.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion, die mit der Diagonalen zwei Schnittpunkte $P \neq Q$ besitze. Zeige, dass der Graph der Ableitung f' einen Schnittpunkt mit der durch $y = 1$ definierten Geraden besitzt.

Lösung

Die beiden Schnittpunkte seien $P=(a,a)$ und $Q=(b,b)$ mit $b>a$. Es ist also $f(a)=a$ und $f(b)=b$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $c\in[a,b]$ mit

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1\,.$$

Der Graph der Ableitung f' schneidet also im Punkt $(c,1)$ die beschriebene Gerade.

Aufgabe (2 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a>0$.

Lösung

Nach Definition . ist

$$a^x=\exp(x\,\ln a)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 16.3 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) unter Verwendung der Kettenregel gleich

$$(a^x)'=(\exp(x\,\ln a))'=(\ln a)\exp'(x\,\ln a)=(\ln a)\exp(x\,\ln a)=(\ln a)a^x\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es seien

$$f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Lösung Periodische Funktionen/Rationales Verhältnis der Längen/Summe ist periodisch/Abstand/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}.$$

Lösung

Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
3x^2+5x-4 &= \left(\sqrt{3}x+\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{25}{12}-4\\
&= \left(\sqrt{3}x+\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{73}{12}\\
&= \frac{73}{12}\left((\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}}{\sqrt{73}}x+\frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}\sqrt{73}})^2-1\right)\\
&= \frac{73}{12}\left(\left(\frac{6}{\sqrt{73}}x+\frac{5}{\sqrt{73}}\right)^2-1\right).
\end{aligned}
$$

Daher ist mit der Substitution

$$
u=\frac{6}{\sqrt{73}}x+\frac{5}{\sqrt{73}}
$$

bzw.

$$
x=\frac{\sqrt{73}}{6}u-\frac{5}{6}
$$

$$
\int\sqrt{3x^2+5x-4}\,dx=\int\sqrt{\frac{73}{12}(u^2-1)}\cdot\frac{\sqrt{73}}{6}\,du=\frac{73}{12\sqrt{3}}\int\sqrt{u^2-1}\,du\,.
$$

Eine Stammfunktion hiervon ist

$$
\frac{73}{12\sqrt{3}}\,\frac{1}{2}(u\sqrt{u^2-1}-\operatorname{arcosh}u)
$$

und damit ist

$$\frac{73}{24\sqrt{3}}\left(\left(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}\right)\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}\right)^2 - 1} - \operatorname{arcosh}\left(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}\right) \right)$$

eine Stammfunktion von

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Lösung

Wir bestimmen den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ll} I & 2x + 3y - w = 0 \\ II & 4x + 2y + 2z + 5w = 0. \end{array}$$

Es ist

$$III = II - 2 \cdot I \quad -4y + 2z + 7w = 0.$$

Damit haben wir Stufengestalt erreicht.

Wir wählen $w = 0$ und $z = 2$. Dann ist $y = 1$ nach III und nach I ist $x = -\frac{3}{2}$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung.

Wir wählen jetzt $w = 1$ und $z = 0$. Dann ist $y = \frac{7}{4}$ nach III und nach I ist $x = -\frac{17}{8}$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung, die von der ersten Lösung linear unabhängig ist. Da die Matrix den Rang 2 besitzt (was aus der Stufengestalt ablesbar ist), ist der Kern zweidimensional, also ist der Kern gleich

$$\left\{ a \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe (4 (2+2) Punkte)

1. Bestimme die invertierbaren 2×2-Matrizen über dem Körper mit zwei Elementen.
2. Welche davon sind zu sich selbst invers?

Lösung

1. Die matrizeneinträge sind 0 oder 1. Wenn die 1 kein- oder einmal vorkommt, so kommt eine Nullzeile vor und die Matrix ist nicht invertierbar. Wenn die 1 zweimal vorkommt, so darf die 1 nicht in der gleichen Zeile stehen. Dies ergibt die invertierbaren Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Wenn dreimal die 1 vorkommen soll, so erhält man die invertierbaren Matrizen
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bei vier Einsen liegt eine nichtinvertierbare Matrix vor.

2. Die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Vertauschungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind selbstinvers. Wir rechnen
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind auch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ selbstinvers.

Aufgabe (4 (1+1+2) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimme das charakteristische Polynom zu M.
2. Bestimme die Eigenwerte mit Vielfachheiten von M über $\mathbb{R}$.
3. Bestimme die Eigenräume von M über $\mathbb{R}$.

Lösung

1. Das charakteristische Polynom ist

$$\det\begin{pmatrix} x-3 & 1 & -5 \\ 0 & x+4 & -2 \\ 0 & -1 & x+3 \end{pmatrix} = (x-3)((x+4)(x+3)-2)$$
$$= (x-3)\left(x^2+7x+10\right)$$
$$= x^3+4x^2-11x-30.$$

2. Die Nullstellenbestimmung von $x^2+7x+10$ führt auf

   $$x_1, x_2 = \frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{-7\pm 3}{2} = -2, -5\,,$$

   das charakteristische Polynom hat also die Faktorzerlegung

   $$(x-3)(x+2)(x+5).$$

   Die Eigenwerte sind also $3, -2, -5$, jeweils mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1.

3. Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ist $\mathbb{R}e_1$. Der Eigenraum zum Eigenwert -2 ist der Kern von $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, dieser ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zum Eigenwert -5 ist der Kern von $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, dieser ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Anhang

Eine Stammfunktion von $\sqrt{u^2-1}$ ist

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2-1}\cdot u - \operatorname{arcosh} u\right).$$