Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/30/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	4	5	6	3	2	0	3	5	4	0	0	0	1	2	1	4	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.

2. Eine *beschränkte* Teilmenge von reellen Zahlen.

3. Eine *fallende* reelle Folge.

4. Die *eulersche Zahl* e.

5. Der *Spaltenrang* einer $m \times n$-Matrix M über einem Körper K.

6. Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einem Endomorphismus
$$\varphi: V \longrightarrow V$$
auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Die Menge
$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
heißt die *Vereinigung* der beiden Mengen.

2. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen heißt *beschränkt*, wenn es reelle Zahlen $s \leq S$ mit $M \subseteq [s, S]$ gibt.

3. Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

4. Die eulersche Zahl ist durch
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
definiert.

5. Man nennt die Dimension des von den Spalten erzeugten Untervektorraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix M.

6. Man nennt
$$\operatorname{Eig}_{\lambda}\left(\varphi\right) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$
den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Zwischenwertsatz*.
2. Die *Funktionalgleichung* der Exponentialfunktion.
3. Der Satz über die Transformation eines linearen Gleichungssystems in Dreiecksgestalt.

Lösung

1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $y \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.
2. Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y\,.$$
3. Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch elementare Umformungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform

$$\begin{array}{ccccccccccc}
b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\
0 & \ldots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \ldots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\
(0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & = & d_{m+1})
\end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \ldots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind.

Aufgabe (2 Punkte)

Negiere den Satz „Kein Schwein ruft mich an und keine Sau interessiert sich für mich“ durch (eine) geeignete Existenzaussage(n).

Lösung

Es gibt ein Schwein, das mich anruft, oder es gibt eine Sau, die sich für mich interessiert.

Aufgabe (2 Punkte)

Es seien A, B und C Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Lösung

Sei $x \in A \setminus (B \cap C)$. Dann ist $x \in A$ und $x \notin B \cap C$. Letzteres bedeutet $x \notin B$ oder $x \notin C$. Im ersten Fall ist $x \in A \setminus B$, im zweiten Fall $x \in A \setminus C$, in beiden Fällen also $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Wenn umgekehrt $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ gilt, so bedeutet dies $x \in A \setminus B$ oder $x \in A \setminus C$. Im ersten Fall ist $x \in A$ und $x \notin B$, im zweiten Fall $x \in A$ und $x \notin C$. Also ist $x \in A$ und $x \notin B \cap C$ und somit ist $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Aufgabe (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\, n \longmapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Ist f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

Lösung Abbildung/N und Z/Injektiv und surjektiv/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Lösung

Die Körpereigenschaften für die komponentenweise definierte Addition sind klar, da die entsprechenden Eigenschaften für $\mathbb{R}$ gelten. Es ist

$$1 \cdot (a + b\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i}\,,$$

somit ist die 1 das neutrale Element der Multiplikation. Die Kommutativität der Multiplikation ist ebenfalls von der Formel her klar. Zum Nachweis der Assoziativität der Multiplikation berechnen wir

$$\begin{aligned} ((a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}))(e+f\mathrm{i}) &= (ac-bd+(bc+ad)\mathrm{i})(e+f\mathrm{i}) \\ &= (ac-bd)e-(bc+ad)f+((ac-bd)f+(bc+ad)e)\mathrm{i} \\ &= ace-bde-bcf-adf+(acf-bdf+bce+ade)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} (a+b\mathrm{i})((c+d\mathrm{i})(e+f\mathrm{i})) &= (a+b\mathrm{i})(ce-df+(cf+de)\mathrm{i}) \\ &= a(ce-df)-b(cf+de)+(b(ce-df)+a(cf+de))\mathrm{i} \\ &= ace-adf-bcf+-bde+(bce-bdf+acf+ade)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Wenn

$$a + b\mathrm{i} \neq 0$$

ist, so ist mindestens eine der Zahlen a oder b von 0 verschieden und damit ist $a^2 + b^2 > 0$. Somit ist $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl und es gilt

$$(a+b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}) = \frac{1}{a^2+b^2}(a^2+b^2) = 1\,,$$

also besitzt jedes Element $\neq 0$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation. Das Distributivgesetz folgt aus

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}+e+f\mathrm{i}) &= (a+b\mathrm{i})((c+e)+(d+f)\mathrm{i}) \\ &= a(c+e)-b(d+f)+(a(d+f)+b(c+e))\mathrm{i} \\ &= ac+ae-bd-bf+(ad+af+bc+be)\mathrm{i} \\ &= ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}+ae-bf+(af+be)\mathrm{i} \\ &= (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})+(a+b\mathrm{i})(e+f\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Aufgabe (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Lösung

Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$. Dann ist

$$(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i. Nennen wir dieses Polynom P_i. Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 6.6 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)).

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 3$.

Lösung

Das Heron-Verfahren ergibt der Reihe nach

$$x_1 := \frac{3 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{7}{3},$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &:= \frac{\frac{7}{3} + \frac{5}{\frac{7}{3}}}{2} \\
&= \frac{\frac{7}{3} + \frac{15}{7}}{2} \\
&= \frac{\frac{49+45}{21}}{2} \\
&= \frac{47}{21}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
x_3 &:= \frac{\frac{47}{21} + \frac{5}{\frac{47}{21}}}{2} \\
&= \frac{\frac{47}{21} + \frac{105}{47}}{2} \\
&= \frac{\frac{2209+2205}{987}}{2} \\
&= \frac{2207}{987}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

derart an, dass $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$ aus einem einzigen Punkt besteht, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Lösung

Für n gerade sei

$$[a_n, b_n] = [0, \frac{1}{n}]$$

und für n ungerade sei

$$[a_n, b_n] = [-\frac{1}{n}, 0] \,.$$

Die Intervalllänge ist stets $\frac{1}{n}$, also bilden diese eine Nullfolge. Es ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} [a_n, b_n] = \{0\} \,.$$

Es handelt sich aber nicht um eine Intervallschachtelung, da das folgende Intervall nicht im Vorgängerintervall enthalten ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (3 Punkte)

Es stehen zwei Gläser auf einem Tisch, wobei das eine mit Rotwein und das andere mit Weißwein gefüllt ist, und zwar gleichermaßen. Nun wird ein kleineres leeres Glas (ein Fingerhut oder ein Schnapsglas) in das Rotweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Weißweinglas überführt und dort gleichmäßig vermischt (insbesondere gibt es Platz für diese Hinzugabe). Danach wird das kleinere Glas in das Weißweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Rotweinglas überführt. Befindet sich zum Schluss im Rotweinglas mehr Rotwein als im Weißweinglas Weißwein?

Lösung

Die Anteile stimmen überein. Die Weinmenge sei jeweils zu 1 normiert und die Größe des kleineren Glases sei x. Nach dem ersten Umfüllen befindet sich im Rotweinglas $1-x$ Rotwein (und kein Weißwein) und im Weißweinglas 1 Weißwein und x Rotwein. Im Weißweinglas beträgt der Weißweinanteil $\frac{1}{1+x}$ und der Rotweinanteil $\frac{x}{1+x}$. Daher wird beim zweiten Umfüllen $\frac{1}{1+x}x$ Weißwein und $\frac{x}{1+x}x$ Rotwein transportiert. Der Weißweinanteil im Weißweinglas ist somit zum Schluss

$$1-\frac{1}{1+x}x=\frac{1+x-x}{1+x}=\frac{1}{1+x}$$

und der Rotweinanteil im Rotweinglas ist

$$1 - x + \frac{x}{1+x} x = \frac{(1-x)(1+x) + x^2}{1+x} = \frac{1 - x^2 + x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}\,.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\,.$$

a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

Lösung

a) Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}\,.$$

Dies ist stets positiv, so dass die Funktion auf den beiden Teilintervallen $\mathbb{R}_-$ und $\mathbb{R}_+$ jeweils streng wachsend ist. Insgesamt ist die Funktion aber nicht wachsend, da die Werte zu negativem x stets größer als die Werte zu positivem x sind.

b) Für $x < 0$ ist $e^{-\frac{1}{x}} > 1$, da der Exponent positiv ist. Für $x > 0$ ist $e^{-\frac{1}{x}} < 1$, da der Exponent negativ ist. Daher haben insbesondere negative und positive reellen Zahlen unter f unterschiedliche Werte. Da im negativen Bereich als auch im positiven Bereich strenges Wachstum vorliegt, ist die Abbildung insgesamt injektiv.

c) Für negatives x durchläuft $-\frac{1}{x}$ sämtliche positiven Zahlen, so dass $e^{-\frac{1}{x}}$ das offene Intervall $]1, \infty[$ durchläuft. Für positives x durchläuft $-\frac{1}{x}$ sämtliche negativen Zahlen, so dass $e^{-\frac{1}{x}}$ das offene Intervall $]0, 1[$ durchläuft. Das Bild ist also $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

d) Aus $y = e^{-\frac{1}{x}}$ folgt durch Äquivalenzumformungen $\ln y = -\frac{1}{x}$ und damit $x = -\frac{1}{\ln y}$, die Umkehrabbildung ist also

$$\mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},\, y \longmapsto -\frac{1}{\ln y}.$$

e)

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Regel von l'Hospital.

Lösung

Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 15.9 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)), angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} .$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert.

Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a)=g(a)=0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (1 Punkt)

Bei einem linearen Gleichungssystem führe das Eliminationsverfahren auf die Gleichung

$$0 = 1\,.$$

Welche Folgerung kann man daraus schließen?

Lösung

Das bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Aufgabe (2 Punkte)

Gilt für quadratische Matrizen die erste binomische Formel?

Lösung

Die erste binomische Formel gilt nicht, da beispielsweise

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe (1 Punkt)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2+6\mathrm{i} & 8-3\mathrm{i} \\ 5-\mathrm{i} & 3+7\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 2+6\mathrm{i} & 8-3\mathrm{i} \\ 5-\mathrm{i} & 3+7\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned}(2+6\mathrm{i})(3+7\mathrm{i})-(5-\mathrm{i})(8-3\mathrm{i}) &= -36+32\mathrm{i}-37+23\mathrm{i} \\ &= -73+55\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

Lösung

Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M) = 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 26.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Lemma 25.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))). Dies ist nach Lemma 27.11 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) und Lemma 24.14 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \neq 0 \, ,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist.