Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/25/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	2	1	1	4	5	4	0	0	0	4	0	5	0	5	0	0	6	53

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *bijektive* Abbildung
   $$f\colon M \longrightarrow N.$$
2. Ein *lokales Maximum* einer Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) in einem Punkt $x \in D$.

3. Die reelle *Exponentialfunktion* zu einer Basis $b > 0$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
5. Die durch eine Matrix *festgelegte* lineare Abbildung.
6. Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einem Endomorphismus
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quotientenkriterium* für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
2. Die *Kettenregel* für differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Der *Charakterisierungssatz* für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (1 Punkt)

Beurteile die Snookerweisheit „Ein Snookerspiel kann man in der ersten Session nicht gewinnen, aber verlieren“ vom logischen Standpunkt aus.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 5 und der andere ein Fassungsvermögen von 8 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe * (11 (5+4+2) Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus $\mathbb{N}$ sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von u^k gleich $\left(u^{-1}\right)^k$ ist, verwenden.

1. $$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \, .$$

2. $$(a^m)^n = a^{mn} \, .$$

3.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x ,$$

stetig ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1, 1)$ und $(4, -2)$ verläuft.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (6 (2+3+1) Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.