Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/23/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	6	1	5	3	4	2	5	5	3	8	0	0	0	0	0	0	4	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *Körper*.

2. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $+\infty$.

3. Der *Kosinus hyperbolicus*.

4. Eine *obere Treppenfunktion* zu einer Funktion

   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

5. Eine $m \times n$-*Matrix* über einem Körper K.

6. Die *geometrische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow V$$

   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Lösung

1. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

   $$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

   und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

   1. Axiome der Addition
      1. Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
      2. Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
      3. 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
      4. Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

2. Axiome der Multiplikation
    1. Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
    2. Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
    3. 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
    4. Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
3. Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

2. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

   $$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N$$

   gibt.

3. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

   $$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

   definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

4. Eine Treppenfunktion

   $$t \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   heißt eine obere Treppenfunktion zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$ für alle $x \in I$ ist.

5. Eine $m \times n$-*Matrix* über K ist ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei die a_{ij} aus K sind.

6. Man nennt

$$\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$$

die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über wachsende, nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.
2. Die *Additionstheoreme* für die trigonometrischen Funktionen.
3. Der Satz über die Ableitung einer reellen Potenzreihe.

Lösung

1. Eine nach oben beschränkte, wachsende Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.
2. Für die trigonometrischen Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos x,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x,$$

gelten die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\,.$$

3. Es sei

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe, die auf dem offenen Intervall $]-r, r[$ konvergiere und dort die Funktion $f\colon]-r, r[\to \mathbb{R}$ darstellt. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

auf $]-r, r[$ konvergent. Die Funktion f ist in jedem Punkt dieses Intervalls differenzierbar mit

$$f'(x) = \tilde{g}(x)\,.$$

Aufgabe (6 (2+1+3) Punkte)

Professor Knopfloch kommt gelegentlich mit verschiedenen Socken und/oder mit verschiedenen Schuhen in die Universität. Er legt folgende Definitionen fest.

1. Ein Tag heißt *sockenzerstreut*, wenn er verschiedene Socken anhat.
2. Ein Tag heißt *schuhzerstreut*, wenn er verschiedene Schuhe anhat.
3. Ein Tag heißt *zerstreut*, wenn er sockenzerstreut oder schuhzerstreut ist.
4. Ein Tag heißt *total zerstreut*, wenn er sowohl sockenzerstreut als auch schuhzerstreut ist.

a) Vom Jahr 2015 weiß man, dass 17 Tage sockenzerstreut und 11 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal zerstreut? Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal total zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

b) Vom Jahr 2013 weiß man, dass 270 Tage sockenzerstreut und 120 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

c) Erstelle eine Formel, die die Anzahl der sockenzerstreuten, der schuhzerstreuten, der zerstreuten und der total zerstreuten Tage in einem Jahr miteinander in Verbindung bringt.

Lösung

a) Zerstreutheit: Die sockenzerstreuten Tage sind jedenfalls zerstreut. Das Minimum ergibt sich, wenn alle schuhzerstreuten Tage auch sockenzerstreut waren, das sind 17. Das Maximum ergibt sich, wenn kein Tag gleichzeitig sockenzerstreut und schuhzerstreut war, das ergibt 28 Tage.

Totale Zerstreutheit: Die total zerstreuten Tage sind insbesondere schuhzerstreut. Das Maximum ergibt sich, wenn alle schuhzerstreuten Tage auch sockenzerstreut waren, das sind 11 Tage. Das Minimum ergibt sich, wenn kein Tag gleichzeitig schuhund sockenzerstreut war, also 0.

b) Wegen

$$270 + 120 = 390 \geq 365$$

können alle Jahre des Tages zerstreut gewesen sein, also 365. Minimal waren 25 Tage total zerstreut.

c) Sei s die Anzahl der sockenzerstreuten Tage, x die Anzahl der schuhzerstreuten Tage, z die Anzahl der zerstreuten Tage und t die Anzahl der total zerstreuten Tage. Dann gilt die Formel

$$s + x = z + t\,.$$

Beide Seiten der Formel sind additiv in den Tagen, sie muss also nur für einen Tag nachgewiesen werden. Wenn der Tag nicht zerstreut ist, steht beidseitig 0. Wenn der Tag sockenzerstreut ist, aber nicht schuhzerstreut (oder umgekehrt), so ist der Tag zerstreut, aber nicht total zerstreut, und beidseitig steht 1. Wenn der Tag total zerstreut ist, so steht beidseitig 2.

Aufgabe (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	f
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Lösung

$\neg q$.

Aufgabe (5 (1+1+1+2) Punkte)

Ein Zug ist 500 Meter lang (ohne Lokomotive) und bewegt sich mit 180 Stundenkilometer. Lucy Sonnenschein hat ihr Fahrrad mit in den Zug genommen und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 Metern pro Sekunde von ganz hinten nach ganz vorne.

1. Wie viele Sekunden benötigt Lucy für die gesamte Zuglänge?
2. Welche Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) hat Lucy bezogen auf die Umgebung?
3. Welche Entfernung (in Meter) legt der Zug während der Fahrradfahrt zurück?
4. Berechne auf zwei verschiedene Arten, welche Entfernung Lucy während ihrer Fahrradfahrt bezogen auf die Umgebung zurücklegt.

Lösung

1. Lucy benötigt 25 Sekunden für den 500 Meter langen Zug.
2. In Meter pro Sekunde hat der Zug eine Geschwindigkeit von
$$\frac{180000}{3600} = \frac{1800}{36} = 50\,.$$
Da die beiden Bewegungen sich überlagern, ist die Gesamtgeschwindigkeit von Lucy gleich 70 Meter pro Sekunde.

3. In den 25 Sekunden legt der Zug

   $$25 \cdot 50 = 1250$$

   Meter zurück.

4. Man kann die vom Zug und die von Lucy im Zug zurückgelegte Strecke addieren, dies ergibt

   $$1250 + 500 = 1750$$

   Meter. Ebenso kann man mit ihrer Geschwindigkeit bezogen auf die Umgebung rechnen, und erhält ebenfalls

   $$25 \cdot 70 = 1750$$

   Meter.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise die *Nichtnullteilereigenschaft* für einen Körper K.

Lösung

Nehmen wir an, dass a und b beide von 0 verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 1$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach Fakt ***** (1)

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 0\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 0\,,$$

so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt.

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösung

Wir machen die Annahme, dass es eine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, und führen das zu einem Widerspruch. Sei also angenommen, dass

$$x \in \mathbb{Q}$$

die Eigenschaft besitzt, dass

$$x^2 = 2$$

ist. Eine rationale Zahl hat die Beschreibung als ein Bruch, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Die rationale Zahl x können wir somit als

$$x = \frac{a}{b}$$

ansetzen. Ferner können wir annehmen (dieses Annehmen ist eine Vereinfachung der Situation und hat nichts mit der zum Widerspruch zu führenden Annahme zu tun), dass dieser Bruch gekürzt ist, dass also a und b keinen echten gemeinsamen Teiler haben. In der Tat brauchen wir lediglich, dass wir annehmen dürfen, dass zumindest eine Zahl, a oder b ungerade ist (wenn beide gerade sind, so können wir mit 2 kürzen, u.s.w.) Die Eigenschaft

$$x^2 = 2$$

bedeutet ausgeschrieben

$$x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2\,.$$

Multiplikation mit b^2 ergibt die Gleichung

$$2b^2 = a^2$$

(dies ist eine Gleichung in $\mathbb{Z}$ bzw. sogar in $\mathbb{N}$). Diese Gleichung besagt, dass a^2 gerade ist, da ja a^2 ein Vielfaches der 2 ist. Daraus ergibt sich aber auch, dass a selbst gerade ist, da ja das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist. Deshalb können wir den Ansatz

$$a = 2c$$

mit einer ganzen Zahl c machen. Dies setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten

$$2b^2 = (2c)^2 = 2^2c^2\,.$$

Wir können mit 2 kürzen und erhalten

$$b^2 = 2c^2\,.$$

Also ist auch b^2 und damit b selbst gerade. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass nicht sowohl a als auch b gerade sind.

Aufgabe (2 Punkte)

Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\,.$$

Lösung Wir müssen durch vollständige Induktion zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Aussage gilt:

$$\phi(n) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Induktionsanfang: $\phi(0) \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x^0 = 1 = \dfrac{x^{0+1} - 1}{x - 1}$

Induktionsschritt: Hier ist $\phi(n) \implies \phi(n+1)$ zu zeigen.

$$\phi(n+1) \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : [\sum_{k=0}^{n+1} x^k = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{x^{n+1+1} - 1}{x - 1}$$

$$\iff x - 1 + x^2 - x + x^3 - x^2 + \ldots + x^{n+1} - x^n + x^{n+1+1} - x^{n+1} = x^{n+1+1} - 1 \iff -1 + x^{n+1+1} = x^{n+1+1} - 1]$$

Dies schließt die Induktion ohne die Voraussetzung verwendet zu haben.

Q.E.D.

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. Es gibt ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $P(z) = 0$.
2. Es gibt ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $Q \neq 0$, mit $Q(z) = 0$.

3. Es gibt ein normiertes Polynom $R \in \mathbb{Q}[X]$ mit $R(z) = 0$.

Lösung

Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) ist unmittelbar klar, da ganze Zahlen rational sind und man somit $Q = P$ nehmen kann.

Sei (2) erfüllt und sei

$$Q = s_n X^n + s_{n-1} X^{n-1} + \cdots + s_2 X^2 + s_1 X + s_0$$

mit $s_i \in \mathbb{Q}$, $s_n \neq 0$ und $Q(z) = 0$. Wegen $s_n \neq 0$ ist auch s_n^{-1} eine rationale Zahl. Wir multiplizieren Q mit s_n^{-1} und erhalten

$$\begin{aligned} R &:= s_n^{-1} Q \\ &= s_n^{-1} \left(s_n X^n + s_{n-1} X^{n-1} + \cdots + s_2 X^2 + s_1 X + s_0 \right) \\ &= X^n + s_n^{-1} \cdot s_{n-1} X^{n-1} + \cdots + s_n^{-1} \cdot s_2 X^2 + s_n^{-1} \cdot s_1 X + s_n^{-1} \cdot s_0 . \end{aligned}$$

Dies ist ein normiertes Polynom, die Koeffizienten sind nach wie vor rational und es ist auch

$$R(z) = (s_n^{-1} Q)(z) = s_n^{-1} \cdot Q(z) = 0 \,.$$

Sei nun (3) erfüllt, und

$$R = X^n + t_{n-1} X^{n-1} + \cdots + t_2 X^2 + t_1 X + t_0$$

mit $t_i \in \mathbb{Q}$ und $R(z) = 0$. Es ist

$$t_i = \frac{a_i}{b_i}$$

mit $a_i , b_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \neq 0$. Wir setzen

$$\begin{aligned} P &= b_0 b_1 \cdots b_{n-1} R \\ &= b_0 b_1 \cdots b_{n-1} \left(X^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} X^{n-1} + \cdots + \frac{a_2}{b_2} X^2 + \frac{a_1}{b_1} X + \frac{a_0}{b_0} \right) \\ &= b_0 b_1 \cdots b_{n-1} X^n + b_0 b_1 \cdots b_{n-2} a_{n-1} b_n X^{n-1} + \cdots + b_0 b_1 a_2 b_3 \cdots b_{n-1} X^2 + b_0 a_1 b_2 \cdots b_{n-1} X + a_0 b_1 \cdots b_{n-1} \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat ganzzahlige Koeffizienten, ist nicht das Nullpolynom und es ist nach wie vor

$$P(z) = 0 .$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im reellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Lösung

a) Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$, daher besitzt die stetige Funktion aufgrund des Zwischenwertsatzes mindestens eine Nullstelle in $[0, 1]$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 + 1$ und dies ist in diesem Intervall positiv, so dass die Funktion f dort streng wachsend ist. Also kann sie nicht mehr als eine Nullstelle besitzen.

b) Für $x = 1/2 = 0{,}5$ ist

$$f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 < 0,$$

die Nullstelle muss also in der rechten Intervallhälfte liegen. Für $x = 0{,}8$ ergibt sich

$$f(0{,}8) = 0{,}8^3 + 0{,}8 - 1 = 0{,}512 + 0{,}8 - 1 = 0{,}312 > 0,$$

so dass dieser Wert zu groß ist. Für $x = 0{,}7$ ergibt sich

$$f(0{,}7) = 0{,}7^3 + 0{,}7 - 1 = 0{,}343 + 0{,}7 - 1 = 0{,}043 > 0,$$

was immer noch zu groß ist. Für $x = 0{,}6$ ergibt sich

$$f(0{,}6) = 0{,}6^3 + 0{,}6 - 1 = 0{,}216 + 0{,}6 - 1 = -0{,}184 < 0.$$

Die Nullstelle liegt also im offenen Intervall zwischen $0{,}6$ und $0{,}7$ und die erste Nachkommastelle ist 6.

c) Wie unter b) berechnet ist $f(0{,}7) = 0{,}043 < 0{,}1$, so dass man $q = 0{,}7$ nehmen kann.

Aufgabe (3 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Summenfolge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) + \left(\lim_{n \to \infty} y_n\right)$$

ist.

Lösung

Es seien x bzw. y die Grenzwerte der beiden Folgen. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der ersten Folge gibt es zu

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$$

ein n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon'$$

gilt. Ebenso gibt es wegen der Konvergenz der zweiten Folge zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ ein n_0' derart, dass für alle $n \geq n_0'$ die Abschätzung

$$|y_n - y| \leq \epsilon'$$

gilt. Sei

$$N = \max\left(n_0, n_0'\right).$$

Dann gilt für alle $n \geq N$ (unter Verwendung der Dreiecksungleichung) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (x + y)| &= |x_n + y_n - x - y| \\ &= |x_n - x + y_n - y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \epsilon' + \epsilon' \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe (8 (1+4+3) Punkte)

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Lösung

a) Die Sinusfunktion hat an den angegebenen Stellen den Wert 0, daher ist

$$P = x(x+\pi)(x-\pi) = x(x^2-\pi^2) = x^3 - \pi^2 x\,.$$

b) Es ist

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f(\pi) = 0 \text{ und } f'(\pi) = -1.$$

Das gesuchte Polynom

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

besitzt die Ableitung

$$Q'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\,.$$

Somit müssen die Koeffizienten von Q die Bedingungen $d = 0$,

$$Q'(0) = c = 1\,,$$
$$a\pi^3 + b\pi^2 + \pi = 0\,,$$

also

$$a\pi^2 + b\pi + 1 = 0$$

und

$$3a\pi^2 + 2b\pi + 1 = -1$$

erfüllen. Die beiden zuletzt genannten Gleichungen liefern

$$b\pi + 2 = 1\,,$$

also

$$b = -\frac{1}{\pi}$$

und damit ist

$$a = 0\,.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$Q = -\frac{1}{\pi}x^2 + x\,.$$

c) Das gesuchte Polynom R ist das Taylor-Polynom der Ordnung 3 zu f an der Stelle $\pi/2$. Die Ableitungen an dieser Stelle sind

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ und } f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Das Taylor-Polynom der Ordnung 3 ist daher

$$1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $\varphi, \psi \colon V \to V$ lineare Abbildungen, von denen die charakteristischen Polynome bekannt seien. Kann man daraus das charakteristische Polynom von $\varphi \circ \psi$ bestimmen?

Lösung

Das kann man nicht. Wir betrachten die beiden nilpotenten 2×2-Matrizen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist jeweils X^2. Ihr Produkt ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom davon ist $(X-1)X = X^2 - X$. Wenn man dagegen φ zweimal nimmt, also $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so ist das charakteristische Polynom X^2.