Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/44/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	6	3	5	3	4	8	3	3	3	0	4	4	0	4	2	0	59

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Ein *Körper*.
2. Eine *wachsende* reelle Folge.

3. Der *Grenzwert* zu einer auf $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion

   $$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

4. Die *reelle Exponentialfunktion*.

5. Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion

   $$t: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$.

6. Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.

2. Die *Kreisgleichung* für die trigonometrischen Funktionen.

3. Der *Charakterisierungssatz* für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (1 Punkt)

Das Brötchen von vorvorgestern ist überüberübermorgen von ....?

Aufgabe * (6 (1+1+4) Punkte)

1. Skizziere vier Geraden im Raum mit der Eigenschaft, dass es insgesamt zwei Schnittpunkte gibt.
2. Skizziere vier Geraden in der Ebene mit der Eigenschaft, dass es insgesamt drei Schnittpunkte gibt.
3. Zeige, dass es in der Ebene nicht vier Geraden geben kann, die insgesamt zwei Schnittpunkte besitzen.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Wir betrachten die naürliche Additionstabelle bis zu einer bestimmten Zahl n, also

$$\begin{array}{ccccccc} + & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1+1 & 1+2 & 1+3 & \ldots 1+n-1 & & 1+n \\ 2 & 2+1 & 2+2 & 2+3 & \ldots 2+n-1 & & 2+n \\ 3 & 3+1 & 3+2 & 3+3 & \ldots 3+n-1 & & 3+n \end{array}$$

$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$n-1+1$	$n-1+2$	$n-1+3$	$\ldots$	$n-1+n-1$	$n-1+n$
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\ldots$	$n+n-1$	$n+n$

Zeige durch Induktion, dass die Gesamtsumme aller in der Tabelle auftretenden Summen gleich $(n+1)n^2$ ist, also

$$\sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq n} (i+j) = (n+1)n^2 \,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

In Beweisen findet man häufig die Formulierung „Wir nehmen (jetzt, also) an“. Welche Bedeutungen im Beweis kann diese Formulierung haben?

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Aufgabe * (8 (3+2+3) Punkte)

1. Bestimme ein Polynom P vom Grad ≤ 3 mit

$$P(-1) = -4\,,$$
$$P(0) = 2\,,$$
$$P(1) = 2$$

und

$$P(2) = 3$$

2. Bestimme ein normiertes Polynom Q vom Grad 3 mit
$$Q(0) = 1\,,$$
$$Q(2) = 3$$

und

$$Q(3) = 10\,.$$

3. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen zu P und zu Q.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme das Konvergenzverhalten der durch

$$x_n = (-1)^n \frac{7n^2 - 8n + 6}{4n^2 + 3n - 1}$$

gegebenen Folge.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der Exponentialreihe.

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne

$$5^{\frac{2}{3}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgabe * (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige gerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im Nullpunkt kein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

1. Die Abonnenten von A bleiben zu 90% bei A, 0% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
2. Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 15% wechseln zu C und 15% werden Nichtleser.
3. Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
4. Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (0 Punkte)