Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/27/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	0	3	2	1	4	3	2	4	5	3	0	4	2	4	4	3	52

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.

2. Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.

3. Eine reelle *Potenzreihe*.

4. Die *Stetigkeit* einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

5. Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

6. Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).

Lösung

1. Man sagt, dass die Menge T eine *Teilmenge* von M ist, wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist.

2. Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ist durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

   definiert.

3. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist,wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt.
5. Das Polynom
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f in a.
6. Unter der Dimension eines Vektorraums V versteht man die Anzahl der Elemente in einer Basis von V.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.
2. Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
3. Der Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Lösung

1. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.
2. Satzantwort Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

differenzierbar

und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

3. Unter den gegebenen Bedingungen besitzt V eine endliche Basis.

Aufgabe (2 Punkte)

Wenn Karl an Susanne denkt, bekommt er feuchte Hände, einen Kloß im Hals und einen roten Kopf. Einen roten Kopf bekommt er genau dann, wenn er an Susanne denkt oder wenn er das leere Tor nicht trifft. Wenn Karl das leere Tor trifft, bekommt er feuchte Hände. Karl bekommt den Ball vor dem leeren Tor. Kurz darauf bekommt er feuchte Hände, einen roten Kopf, aber keinen Kloß im Hals. Hat er an Susanne gedacht? Hat er das leere Tor getroffen?

Lösung

Karl hat nicht an Susanne gedacht, da er sonst einen Kloß im Hals bekommen hätte, was er nicht hat. Andererseits bekommt er einen roten Kopf, was bedeutet, dass er das leere Tor nicht getroffen hat oder an Susanne gedacht hat. Da letzteres nicht der Fall ist, hat er das leere Tor nicht getroffen.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

Aufgabe (2 Punkte)

Die Biologin Sandra O'Neil ist eine renommierte Forscherin über Bakterien. Ihr Institut hat ein hochauflösendes Mikroskop erworben, das auf dem Bildschirm die Wirklichkeit im Verhältnis $3 : 10^{10}$ wiedergibt. Auf dem Bildschirm ist die Geißel des Bakteriums 21 cm lang und dreimal so lang wie das Bakterium selbst. Auf den Bakterien befindet sich ein roter Punkt, dessen Flächeninhalt auf dem Bildschirm 2 Quadratzentimeter einnimmt.

1. Wie lang ist das Bakterium in Wirklichkeit?
2. Welchen Flächeninhalt hat der rote Punkt in Wirklichkeit?

Lösung Mikroskop/Vergrößerung/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (1 Punkt)

Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper gegen x konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

Lösung

Es gibt ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $m \in \mathbb{N}$ ein

$$n \geq m$$

derart gibt, dass

$$\vert x_n - x \vert > \epsilon$$

ist.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K, b > 1$. Zeige, dass es dann Elemente $c, d > 1$ mit $b = cd$ gibt.

Lösung

Wir setzen

$$c = \frac{b+1}{2}.$$

Da $b > 1$ ist, ist auch

$$b+1 > 2$$

und damit ist

$$c > 1\,.$$

Wir setzen sodann

$$d = b \cdot c^{-1} = \frac{2b}{b+1}\,,$$

so dass die geforderte Gleichheit

$$b = c \cdot d$$

gilt. Wegen $b > 1$ ist

$$2b = b+b > b+1\,,$$

also ist auch

$$d > 1\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktion.

Lösung

Aufgrund von Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \exp x.\end{aligned}$$

Aufgabe (2 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Lösung

Es geht um eine reelle Lösung für die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 = \sqrt{42}\,.$$

Es ist $f(0) = 0$ und $f(5) = 25$ und $0 \leq \sqrt{42} \leq 25$. Da f als Polynomfunktion stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{42}$.

Aufgabe (4 (1+3) Punkte)

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)).$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Lösung

a) Nach der Produkt- und Kettenregel ist

$$h'(x) = (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x)).$$

b) Wir berechnen zuerst $h(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2+1)^2 \cdot ((x+2)^2 - 1) \\ &= (x^4+2x^2+1)(x^2+4x+3) \\ &= x^6+4x^5+5x^4+8x^3+7x^2+4x+3. \end{aligned}$$

Die Ableitung ist daher

$$h'(x) = 6x^5+20x^4+20x^3+24x^2+14x+4.$$

Andererseits ist

$$f'(x) = 2x \text{ und } g'(x) = 1$$

und daher nach Teil a)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x)) \\ &= (x^4+2x^2+1)2(x+2) + 2(x^2+1)(2x)(x^2+4x+3) \\ &= 2(x^5+2x^3+x+2x^4+4x^2+2) + 4x(x^4+4x^3+3x^2+x^2+4x+3) \\ &= 2(x^5+2x^4+2x^3+4x^2+x+2) + 4x(x^4+4x^3+4x^2+4x+3) \\ &= 6x^5+20x^4+20x^3+24x^2+14x+4. \end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Lösung

Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \rightarrow 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem h ein $c_h \in [x, x+h]$ mit

$$f(c_h)\cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

und damit ist

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}\,.$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert c_h gegen x und wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(c_h)$ gegen $f(x)$.

Aufgabe (3 Punkte)

Begründe den Zusammenhang

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

für $a, b \in \mathbb{R}_+$ allein mit der Hilfe von Integrationsregeln.

Lösung

Wir betrachten die Substitution

$$y = bx$$

bzw.

$$x = \frac{1}{b} y$$

Aus den Grenzen 1 und a werden dabei die Grenzen b und ab und es gilt

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_b^{ab} \frac{b}{y} d\frac{1}{b} y = \int_b^{ab} \frac{1}{y} dy \, .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_1^{ab} \frac{1}{x} dx &= \int_b^{ab} \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} -x & +2y & +z & +3w & = & -1 \\ x & +3y & -2z & & = & 3 \\ 3x & -5y & +z & & = & 2 \\ 2x & +y & -z & +3w & = & 0\,. \end{array}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable w, indem wir die erste Gleichung von der vierten Gleichung abziehen. Dies führt auf

$$\begin{array}{rrrcr} x & +3y & -2z & = & 3 \\ 3x & -5y & +z & = & 2 \\ 3x & -y & -2z & = & 1\,. \end{array}$$

Nun eliminieren wir die Variable z, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $2II + I$ und $III + 2II$ ausrechnen. Dies führt, nachdem wir die neue erste Gleichung durch sieben teilen, auf

$$\begin{array}{rrcl} x & -y & = & 1 \\ 9x & -11y & = & 5\,. \end{array}$$

Mit $-9I+II$ ergibt sich

$$-2y=-4$$

und

$$y=2\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$x=3\,,$$
$$z=3$$

und

$$w=-\frac{5}{3}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der Diagonalmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Lösung

Zu zwei Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

und Skalare $s, t \in K$ ist auch

$$s \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 + tb_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & sa_2 + tb_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & sa_{n-1} + tb_{n-} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Diagonalmatrix, daher liegt ein Untervektorraum vor. Die Diagonalmatrizen $D_i, 1 \leq i \leq n$, deren i-ter Diagonaleintrag eine 1 ist und die sonst überall Nulleinträge haben, bilden offenbar eine Basis des Raumes der Diagonalmatrizen. Daher ist die Dimension gleich n.

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Es sei

$$NM = 0$$

für jede $n \times n$-Matrix N vom Rang 1. Zeige

$$M = 0\,.$$

Lösung

Es sei

$$M \neq 0$$

angenommen. Dann gibt es einen Vektor $v \in K^n$ mit

$$Mv = w \neq 0\,.$$

Wir ergänzen w zu einer Basis

$$w = w_1\,, w_2\,, \ldots\,, w_n$$

von K^n. Es sei N die Matrix bezüglich der Standardbasis, die die durch $w \mapsto w$ und $w_i \mapsto 0$ für $i \geq 2$ festgelegte lineare Abbildung beschreibt. Der Rang von N ist 1, da ja das Bild gerade Kw ist, und es ist

$$NMv = Nw = w \neq 0\,,$$

also ist

$$NM \neq 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$.
Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 .$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Beschreibung eines Eigenraums als Kern.

Lösung

Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi)(v) = 0$ schreiben kann.

Zuletzt bearbeitet vor 2 Monaten von Marymay0609