Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/3/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	2	5	2	4	4	3	4	2	4	3	5	3	1	7	3	6	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.
2. Die *Umkehrabbildung* zu einer bijektiven Abbildung $F\colon L \to M$.
3. Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n.
4. Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
5. Das *obere Treppenintegral* zu einer oberen Treppenfunktion t zu einer Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
6. Eine *diagonalisierbare* lineare Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
   auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und Beschränktheit von Folgen.
2. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*.
3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 7 und der andere ein Fassungsvermögen von 10 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe * (5 (1+1+1+2) Punkte)

Ein Zug ist 500 Meter lang (ohne Lokomotive) und bewegt sich mit 180 Stundenkilometer. Lucy Sonnenschein hat ihr Fahrrad mit in den Zug genommen und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 Metern pro Sekunde von ganz vorne nach ganz hinten.

1. Wie viele Sekunden benötigt Lucy für die gesamte Zuglänge?
2. Welche Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) hat Lucy bezogen auf die Umgebung?
3. Welche Entfernung (in Meter) legt der Zug während der Fahrradfahrt zurück?
4. Berechne auf zwei verschiedene Arten, welche Entfernung Lucy während ihrer Fahrradfahrt bezogen auf die Umgebung zurücklegt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \geq 0$. Zeige, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn $x^2 \geq y^2$ gilt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine nichtstetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche Hintereinanderschaltungen $f \circ f, f \circ f \circ f, \ldots$ unendlich oft differenzierbar sind.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x^3} = 1$$

eine reelle Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzt und bestimme diese bis auf einen Fehler von maximal ein Achtel.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt.}$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3x - 1\,.$$

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme die Umkehrfunktion zur linearen Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \mathrm{i}z.$$

Aufgabe * (7 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

derart gibt, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (6 (2+4) Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} T & T-1 \\ T+1 & \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

über dem Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{R}(T)$.

1. Bestimme das charakteristische Polynom von M.
2. Bestimme, ob M Eigenwerte besitzt.