Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/54/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	6	2	3	3	0	0	1	7	0	5	3	2	0	3	6	52

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Teilmenge* T einer Menge M.
2. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
3. Die *Stetigkeit* einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
4. Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion
   $$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem Intervall $I = [a,b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$.
5. Eine *lineare* Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
6. Der *Spaltenrang* einer $m \times n$-Matrix M über einem Körper K.

Lösung

1. Man sagt, dass die Menge T eine *Teilmenge* von M ist, wenn jedes Element von T auch

ein Element von M ist.

2. Der Grad eines von 0 verschiedenen Polynoms
   $$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$
   mit $a_n \neq 0$ ist n.

3. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist,wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt.

4. Das Treppenintegral von t ist durch
   $$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$
   definiert.

5. Eine Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow W$$
   heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

   1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   2. $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

6. Man nennt die Dimension des von den Spalten erzeugten Untervektorraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix M.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe von reellen Zahlen.
2. Der Satz über die Taylorreihe einer Potenzreihe.
3. Der Satz über n Vektoren in einem n-dimensionalen K-Vektorraum V.

Lösung

1. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_k| \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

2. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe, die auf dem Intervall $]-r,r[$ konvergiere, und es sei

$$f\colon]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}$$

die dadurch definierte

Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0 stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Für n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V sind folgende Eigenschaften äquivalent.
   1. $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
   2. $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
   3. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe (2 Punkte)

Erläutere das Prinzip *Beweis durch Widerspruch*.

Lösung

Man möchte eine Aussage A beweisen. Man nimmt an, dass A nicht gilt. Daraus leitet man durch logisch korrektes Schließen einen Widerspruch her. Somit kann $\neg A$ nicht gelten und also muss A gelten.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei M eine endliche Menge und $\varphi\colon M \to M$ eine Abbildung. Es sei φ^n die n-fache Hintereinanderschaltung von φ mit sich selbst. Zeige, dass es natürliche Zahlen $m > n \geq 1$ mit $\varphi^n = \varphi^m$ gibt.

Lösung

Da M endlich ist, ist auch die Abbildungsmenge $\operatorname{Abb}\left(M,M\right)$ endlich, da es für jedes Element nur $\#\left(M\right)$ viele Möglichkeiten gibt, wohin es abgebildet werden kann. Die Hintereinanderschaltungen φ^n, $n \in \mathbb{N}$, gehören alle zu dieser Abbildungsmenge. Da es keine injektive Abbildung von $\mathbb{N}_+$ in eine endliche Menge gibt, gibt es Zahlen $m \neq n$ mit

$$\varphi^m = \varphi^n \,.$$

Aufgabe (6 (1+4+1) Punkte)

Es sei

$$P = X^3 - X^2 - 5X + 6 \,.$$

1. Finde eine ganzzahlige Nullstelle von P.
2. Finde sämtliche reellen Nullstellen von P.
3. Bestimme eine Zerlegung von P in Linearfaktoren.

Lösung

1. Es ist
   $$P(2) = 8 - 4 - 10 + 6 = 0 \,,$$
   somit ist 2 eine Nullstelle von P.
2. Mit einer Division mit Rest ergibt sich
   $$X^3 - X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X^2 + X - 3) \,.$$
   Es geht also noch um die Nullstellen von $X^2 + X - 3$. Diese sind
   $$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{1+12} - 1}{2} = \frac{\pm\sqrt{13} - 1}{2} \,.$$
3. Es ist
   $$P = (X-2)\left(X - \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right) .$$

Aufgabe (2 Punkte)

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Lösung

Es sei x der Gesamtnormalpreis. Mit BC25 hat man die Kosten

$$y = 62 + \frac{3}{4}x$$

und mit BC50 hat man die Kosten

$$z = 255 + \frac{1}{2}x.$$

Die Bedingung

$$x \leq 62 + \frac{3}{4}x$$

führt auf

$$x \leq 248.$$

Die Bedingung

$$x \leq 255 + \frac{1}{2}x$$

führt auf

$$x \leq 510.$$

Die Bedingung

$$62 + \frac{3}{4}x \leq 255 + \frac{1}{2}x$$

führt auf

$$\frac{1}{4}x \leq 255 - 62 = 193,$$

also

$$x \leq 772.$$

Also ist für $x \leq 248$ keine Bahncard die günstigste Option, für $248 \leq x \leq 772$ ist die BC25 die günstigste Option und für $x \geq 772$ ist die BC50 die günstigste Option.

Aufgabe (3 Punkte)

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz. Verwende, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ gegen 0 konvergiert.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 &= \sqrt{n+1}^2 + \sqrt{n}^2 - 2\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} \\ &= 2n+1 - 2\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Da $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ und somit auch das Quadrat davon gegen 0 konvergiert, konvergiert die Folge gegen $\frac{1}{2}$.

Aufgabe (3 Punkte)

Zeige, dass die harmonische Reihe divergiert.

Lösung

Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 7.10

(Mathematik_für_Anwender_(Osnabrück_2019-2020)) nicht konvergent sein.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (1 Punkt)

Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(2, 7)$, der durch den Punkt $(4, -3)$ läuft.

Lösung

Der Abstand der beiden Punkte ist

$$r = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104}\,.$$

Die Kreisgleichung ist somit

$$(X-2)^2 + (Y-7)^2 = 104.$$

Aufgabe (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung und das Wachstumsverhalten einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung

(1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x+h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$.
Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I mit $f(x) > f(x')$ gibt. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

(2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Lösung

Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \rightarrow 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem h ein $c_h \in [x, x+h]$ mit

$$f(c_h)\cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

und damit ist

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}\,.$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert c_h gegen x und wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(c_h)$ gegen $f(x)$.

Aufgabe (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(0,0,1)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(2,3,0),\,(4,-1,2) \text{ und } (1,2,1)$$

aus.

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{matrix} 2x+4y+z & = & 0 \\ 3x \quad -y+2z & = & 0 \\ +2y+z & = & 1 \end{matrix}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der zweiten Gleichung die Variable y aus der ersten und dritten Gleichung. Das resultierende System ist

$$\begin{matrix} 14x & & +9z & = & 0 \\ 3x & -y & +2z & = & 0 \\ 6x & & +5z & = & 1\,. \end{matrix}$$

Wir eliminieren nun die Variable x, aus der dritten Gleichung

$$\begin{matrix} 42x & & 27z & = & 0 \\ 3x & -y & +2z & = & 0 \\ 6x & & +5z & = & 7\,. \end{matrix}$$

Wir können jetzt dieses System lösen. Es ist

$$z = \frac{7}{8},$$

$$x = -\frac{9}{16}$$

und

$$y = \frac{1}{16}\,.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{9}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ Basen von V und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ und $\mathfrak{z} = z_1, \ldots, z_m$ Basen von W. Es seien $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}}$ die Übergangsmatrizen. Durch welche Übergangsmatrix wird der Basiswechsel von der Basis $(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)$ zur Basis $(u_1, 0), \ldots, (u_n, 0), (0, z_1), \ldots, (0, z_m)$ vom Produktraum $V \times W$ beschrieben?

Lösung

Die Übergangsmatrix ist die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} & 0 \\ 0 & M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}} \end{pmatrix},$$

da die Koordinaten von $(u_j, 0)$ (und entsprechend $(0, z_k)$) bezüglich $(v_i, 0)$ und $(0, w_\ell)$ unmittelbar und nur von den Koordinaten von u_j bezüglich v_i abhängen.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe (6 (2+3+1) Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2\mathrm{i} \\ 0 & 3\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1-2\mathrm{i} \\ 0 & x-3\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & x-1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= (x-1)(x-3\mathrm{i})(x-1+\mathrm{i}) \\ &= x^3-(2+2\mathrm{i})x^2+(4+5\mathrm{i})x+-3-3\mathrm{i} \end{aligned}$$

und die Eigenwerte von A sind $1, 3\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}$.

b) Wir bestimmen für jeden Eigenwert einen Eigenvektor.

$x=1$:

Wir müssen ein nichttriviales Element im Kern von

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1-2\mathrm{i} \\ 0 & 1-3\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dazu.

$x = 3\mathrm{i}$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} & -2 & -1-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1-4\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $c = 0$ und $a = 2$ und erhalten $b = -1 + 3\mathrm{i}$, also ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1+3\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $3\mathrm{i}$.

$x = 1 - \mathrm{i}$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2 & -1-2\mathrm{i} \\ 0 & 1-2\mathrm{i} & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $c = 1 - 2\mathrm{i}$ und $b = \mathrm{i}$ ist die mittlere Zeile erfüllt. Die erste Zeile wird dann zu

$$(\mathrm{i})a - 2\mathrm{i} + (-1-2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 0$$

und daher ist

$$a = 2 - 5\mathrm{i}\,.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} 2-5\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $1 - \mathrm{i}$.

c) Bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren besitzt die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$