Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/19/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	3	5	4	2	5	4	3	0	0	6	0	4	2	0	3	51

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.

2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.
3. Ein *lokales Minimum* einer Funktion

   $$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

   ($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) in einem Punkt $x \in D$.
4. Der *Grenzwert* zu einer auf $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion

   $$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Die *transponierte Matrix* zu einer $m \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$.

Lösung

1. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und n sind.
2. Die Konvergenz gegen x bedeutet, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

   $$\left|x - x_n\right| \leq \epsilon$$

   gilt.
3. Man sagt, dass f in $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $\left|x - x'\right| \leq \epsilon$ die Abschätzung

   $$f(x) \leq f(x')$$

   gilt.

4. Die reelle Zahl b heißt *Grenzwert* von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.
5. Die *Ableitungsfunktion* ist diejenige Funktion, die jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(a)$ zuordnet.
6. Man nennt die Matrix
$$M^{\text{tr}} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$
die *transponierte Matrix* zu M.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die Rechenregeln für stetige Funktionen
$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
2. Die *Taylor-Formel* für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion
$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für einen inneren Punkt $a \in I$.
3. Der Festlegungssatz für lineare Abbildungen.

Lösung

1. Unter der vorausgesetzten Stetigkeit sind auch die Funktionen
$$f + g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - g(x),$$
$$f \cdot g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g: U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

2. Zu jedem Punkt $x \in I$ gibt es ein $c \in I$ mit
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei v_i, $i \in I$, eine Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung
$$f: V \longrightarrow W$$
mit
$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I.$$

Aufgabe (2 Punkte)

E wurde ermordet. Es gelten folgende Sachverhalte.

1. Der Mörder ist A oder B oder C oder D.
2. Wenn C der Mörder ist, dann ist D nicht der Mörder oder A ist der Mörder.
3. A, B, C, D sind alle verschieden.

4. Es gibt genau einen Mörder.
5. Wenn A nicht der Mörder ist, dann ist D nicht der Mörder.
6. A ist genau dann der Mörder, wenn B der Mörder ist.

Wer ist der Mörder?

Lösung

Aus (6), (3) und (4) folgt, dass A und B beide nicht der Mörder sind, denn sonst wären beide der Mörder. Nach (5) ist somit auch D nicht der Mörder. Wegen (1) muss also C der Mörder sein. ((2) wird nicht verwendet)

Aufgabe (2 Punkte)

Heinz Ngolo und Mustafa Müller wollen wissen, wie viele Kaulquappen sich im Teich im Wald befinden. Der Teich ist einen Meter tief und ist quadratisch mit einer Seitenlänge von zehn Metern, die Kaulquappen sind darin gleichmäßig verteilt. Heinz hat eine Teekanne dabei, in die ein halber Liter Wasser hineinpasst. Sie trinken den Tee leer und füllen die Kanne mit Teichwasser. Sie zählen, dass in der Kanne genau 23 Kaulquappen sind und schütten alles zurück. Wie viele Kaulquappen befinden sich im Teich?

Lösung

Der Teich enthält 100 Kubikmeter Wasser. In einen Kubikmeter passen 1000 Liter und somit der Inhalt von 2000 Teekannen. In den Teich passen also

$$100 \cdot 1000 \cdot 2 = 200000$$

Teekannen. Somit befinden sich im Teich ca.

$$200000 \cdot 23 = 4600000$$

Kaulquappen.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon L \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung. Zeige, dass es eine Teilmenge $S \subseteq L$ derart gibt, dass man φ als Abbildung

$$\varphi' \colon S \longrightarrow M$$

auffassen kann (φ und φ' unterscheiden sich nur hinsichtlich des Definitionsbereiches) und dass φ' bijektiv ist.

Lösung

Wegen der Surjektivität von φ gibt es zu jedem $y \in M$ mindestens ein $x \in L$ mit $\varphi(x) = y$. Wir wählen nun zu jedem $y \in M$ ein solches zugehöriges x. Es sei S die Vereinigung all dieser gewählten x. Die auf S eingeschränkte Abbildung

$$\varphi' \colon S \longrightarrow M,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

ist nach wie vor surjektiv, da ja jedes $y \in M$ von einem (dem gewählten) $x \in S$ erreicht wird. Die Abbildung ist injektiv, da es zu jedem $y \in M$ in S nur das eine gewählte Urbild gibt. Insgesamt ist also φ' bijektiv.

Aufgabe (5 (3+2) Punkte)

Wir behaupten, dass die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch 8 teilbar ist.

1. Beweise diese Aussage mit vollständiger Induktion.
2. Beweise diese Aussage ohne vollständige Induktion.

Lösung

Eine ungerade natürliche Zahl besitzt die Form $2n+1$ mit einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$. Vier aufeinanderfolgende Zahlen sind damit $2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7$.

1. Induktionsbeweis: Für $n = 0$ geht es um

   $$1+3+5+7 = 16 = 2 \cdot 8\,,$$

   was durch 8 teilbar ist. Sei nun die Vierersumme der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen beginnend mit $2n+1$ ein Vielfaches der 8. Es ist zu zeigen, dass dies auch für die Vierersumme der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen beginnend mit $2(n+1)+1 = 2n+3$ gilt. Es ist

   $$\begin{aligned}(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)+(2n+9) &= (2n+3)+(2n+5)+(2n+7)+(2n+1)+8 \\ &= (2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)+8 \\ &= 8k+8 \\ &= 8(k+1),\end{aligned}$$

   so dass diese Zahl wieder ein Vielfaches der 8 ist.

2. Es ist

$$\begin{aligned}(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7) &= 2n+2n+2n+2n+1+3+5+7\\ &= 8n+16\\ &= 8(n+2),\end{aligned}$$

so dass ein Vielfaches der 8 vorliegt.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{Q}$ für die Ungleichung

$$|7x-5| > |6x-7|\,.$$

Lösung

Wir analysieren die Ungleichung

$$|7x-5| > |6x-7|$$

abhängig davon, ob die Beträge positiv oder negativ zu nehmen sind. Es ist

$$7x-5 \geq 0$$

genau dann, wenn $x \geq \frac{5}{7}$ ist, und es ist

$$6x-7 \geq 0$$

genau dann, wenn $x \geq \frac{7}{6}$ ist. Wegen $\frac{5}{7} < \frac{7}{6}$ führt dies auf die folgenden Fälle.

$$x < \frac{5}{7}\,.$$

1. Dann muss man die Bedingung

$$-\,(7x-5) > -(6x-7)$$

betrachten, also

$$7x-5 < 6x-7$$

bzw.

$$x < -2\,.$$

Daher gehört $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < -2\}$ zur Lösungsmenge.

$$\frac{5}{7} \leq x \leq \frac{7}{6}\,.$$

2. Dann muss man die Bedingung

$$7x-5 > -(6x-7)$$

betrachten, also

$$7x-5 > -6x+7$$

bzw.

$$13x > 12\,,$$

also

$$x > \frac{12}{13}\,.$$

Wegen

$$\frac{5}{7} < \frac{12}{13} < \frac{7}{6}$$

führt dies auf die Lösungen $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{12}{13} < x \leq \frac{7}{6} \right\}$.

$$x > \frac{7}{6}\,.$$

3. Dann muss man die Bedingung

$$7x - 5 > 6x - 7$$

betrachten, die auf

$$x > -2\,,$$

führt. Also in diesem Fall automatisch erfüllt ist. Daher gehört $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{7}{6} \right\}$ zur Lösungsmenge.

Die gesamte Lösungsmenge besteht daher aus allen $x \in \mathbb{Q}$ mit $x < -2$ oder $x > \frac{12}{13}$.

Aufgabe (2 Punkte)

Zeige, dass in einem Körper K zu jedem Element $x \neq 0$ das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt ist.

Lösung

Sei x mit $x \neq 0$ vorgegeben. Es seien z und z' Elemente mit $xz = 1 = xz'$. Dann ist

$$z = z1 = z(xz') = (zx)z' = 1z' = z' .$$

Also ist $z = z'$.

Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten die Folge, die durch die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

gegeben ist. Zeige, dass dies eine Nullfolge ist.

Lösung

Wir betrachten zusätzlich die Folge

$$y_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \frac{2n}{2n+1} .$$

Beide Folgen sind streng fallend, da sich jedes Glied aus dem Vorgängerglied durch einen Faktor <1 ergibt. Da sie positiv sind, müssen nach Korollar 8.8 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) die beiden Folgen konvergieren, sagen wir gegen x bzw. y. Die Produktfolge ist

$$\begin{aligned} x_n y_n &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Diese Folge konvergiert gegen 0, somit ist

$$xy = 0$$

nach Lemma 8.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (2). Ferner ist

$$y_n > x_n \,,$$

da man die beteiligten n Faktoren untereinander vergleichen kann. Somit ist

$$y \geq x$$

und daher ist

$$x = 0\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $I_n, n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Lösung

Es sei $x_n \in I_n = [a_n, b_n]$ beliebig gewählt. Wir behaupten, dass dies eine Cauchy-Folge ist. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei n_0 derart, dass

$$b_{n_0} - a_{n_0} \leq \epsilon .$$

Für $m \geq n \geq n_0$ ist dann

$$|x_m - x_n| \leq b_n - a_n \leq \epsilon ,$$

da ja $x_m, x_n \in I_n$ ist. Es sei x der Limes dieser Cauchy-Folge. Wäre $x \notin I_m$ für ein m, so wäre

$$x < a_m$$

(oder $x > b_m$), doch wegen der Konvergenz der Folge gegen x würden dann auch die Folgenglieder für n hinreichend groß echt unterhalb von a_m und damit von a_n liegen, im Widerspruch zu $x_n \in I_n$. Also ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Würden zwei Zahlen $x < y$ zum Durchschnitt aller Intervalle gehören, so wäre

$$y - x \leq b_n - a_n$$

für alle n im Widerspruch dazu, dass die Intervalllängen gegen 0 konvergieren.

Aufgabe (3 Punkte)

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir erweitern mit $n^{-\frac{5}{3}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{5n^{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}} + 4n^{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}} + n^{1-\frac{5}{3}}}{7n^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}} \\ &= \frac{5n^{-\frac{1}{6}} + 4n^{-\frac{1}{3}} + n^{-\frac{2}{3}}}{7 + 6n^{-\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

Folgen der Form n^{-q}, $q \in \mathbb{Q}_+$, konvergieren gegen 0, nach den Rechengesetzen für konvergente Folgen konvergiert diese Folge also gegen 0.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (6 Punkte)

Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Lösung

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k].$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert nach Aufgabe 8.18 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable z, indem wir die zweite und die dritte Gleichung übernehmen und $IV - 5I$ hinzunehmen. Dies führt auf

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ -14x & +3y & & -20w & = & -17\,. \end{array}$$

Nun eliminieren wir die Variable w, indem wir (bezogen auf das vorhergehende System) $II - I$ und $III + 20I$ ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{array}{rrcr} 2x & +4y & = & 2 \\ 26x & +43y & = & -17\,. \end{array}$$

Mit $13I - II$ ergibt sich

$$9y = 43$$

und

$$y = \frac{43}{9}\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$x = 1 - 2y = -\frac{77}{9}\,,$$
$$w = -2x - 2y = -2\left(-\frac{77}{9}\right) - 2\frac{43}{9} = \frac{68}{9}$$

und

$$z = 4 - 3x - 4w = 4 + 3\frac{77}{9} - \frac{272}{9} = -\frac{5}{9}\,.$$

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Lösung

Die beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gehören offenbar zu D. Ihre Summe ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für diese Summe ist der entscheidende Ausdruck gleich

$$1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0 \, .$$

Die Teilmenge D ist also nicht unter Addition abgeschlossen und kann daher kein Untervektorraum des Matrizenraums sein.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ -9 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar und ob sie diagonalisierbar ist.

Lösung

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned}\chi &= \det \begin{pmatrix} X-10 & -4 & 0 \\ 9 & X+2 & 0 \\ 0 & 0 & X-11 \end{pmatrix} \\ &= ((X-10)(X+2)+36)(X-11) \\ &= (X^2-8X+16)(X-11) \\ &= (X-4)^2(X-11).\end{aligned}$$

Damit ist die Matrix jedenfalls trigonalisierbar. Zur Frage die Diagonalisierbarkeit betrachten wir den Eigenwert 4. Der Rang von

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

ist offenbar 2 und somit ist der Eigenraum eindimensional. Daher ist die geometrische Vielfachheit echt kleiner als die algebraische Vielfachheit und die Matrix ist nach Satz 28.12 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) nicht diagonalisierbar.