Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/11/Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	2	4	2	3	4	3	4	5	5	3	3	3	5	4	4	1	3	64

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
3. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *lineare* Abbildung
   $$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
   zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
6. Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix M über einem Körper K.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die Interpolation durch Polynome*.
2. Der *Zwischenwertsatz*.

3. Das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Im Pokal spielt Bayern München gegen den TSV Wildberg. Der Trainer vom TSV Wildberg, Herr Tor Acker, sagt „Wir haben in dem Spiel nichts zu verlieren". Die Logiklehrerin von Wildberg, Frau Loki Schummele, sagt „Wenn die Wildberger in dem Spiel nichts zu verlieren haben, dann haben auch die Münchner in dem Spiel nichts zu gewinnen". Der Trainer von Bayern München, Herr Roland Rollrasen, sagt „Wir haben in dem Spiel etwas zu gewinnen".

1. Ist die Aussage von Frau Schummele logisch korrekt?
2. Es sei vorausgesetzt, dass die Aussage des Bayerntrainers wahr ist. Welche Folgerung kann man dann für die Aussage von Herrn Acker ziehen?

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe * (2 Punkte)

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5\mathrm{i})z = (3-7\mathrm{i})$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Aufgabe * (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe * (4 (2+2) Punkte)

Es seien die beiden Polynome

$$P = X^2 + 3X - 5 \text{ und } Q = X^2 - 4X + 7$$

gegeben.

a) Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

b) Berechne die Ableitung von $P(Q)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1\,.$$

Skizziere die Situation.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n} \right).$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(x) = x + \sin x$ streng wachsend ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 2 zur Funktion $f(x) = e^{x^3}$ im Nullpunkt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei W ein n-dimensionaler K-Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{matrix} 4x & +2y & -z & +2w & = & 3 \\ x & +y & +2z & -w & = & 1 \\ -x & & -z & +3w & = & 2 \\ 3x & & +3z & -2w & = & 0\,. \end{matrix}$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (1 Punkt)

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Zu zwei quadratischen $n \times n$-Matrizen M,N gilt für die charakteristischen Polynome die Beziehung

$$\chi_{M \circ N} = \chi_M \chi_N \,.$$

Nach Definition ist nämlich

$$\chi_{M \circ N} = \det \left(XE_n - M \circ N \right) = \det \left(XE_n - M \right) \det \left(XE_n - N \right) = \chi_M \cdot \chi_N \,,$$

wobei die mittlere Gleichung auf dem Determinantenmultiplikationssatz beruht“.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0$$

ist.