Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/22/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	3	4	0	4	5	3	4	5	3	4	2	3	3	4	57

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Durchschnitt* von Mengen L und M.
2. Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.

3. Der *Logarithmus zur Basis* $b \in \mathbb{R}_+$ einer positiven reellen Zahl x.
4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
5. Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
   $$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
6. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die stetige Umkehrfunktion*.
2. Die *Periodizätseigenschaften* für Sinus und Kosinus (ohne spezielle Werte).
3. Der Satz über lineare Abbildungen zwischen gleichdimensionalen Vektorräumen.

Aufgabe * (2 Punkte)

Erläutere das Prinzip *Beweis durch Widerspruch*.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl. Wann ist die Zahl $n^2 - 1$ eine Primzahl?

Aufgabe * (3 Punkte)

Heidi Gonzales beschließt, sich eine Woche lang ausschließlich von Heidelbeeren zu ernähren, und ihre Nahrungszufuhr gleichmäßig über ihre Wachzeit (16 Stunden pro Tag) zu verteilen. Ihr Kalorienbedarf liegt bei 2000 kcal und 100 Gramm Heidelbeeren enthalten 42 kcal. Eine mittlere Heidelbeere wiegt $1,5$ Gramm. In welchem Abstand muss sie sich eine Heidelbeere einwerfen?

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für

$$n \geq 10$$

die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Aufgabe * (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto f(z),$$

eine Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(z+w) = f(z) \cdot f(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{R}$ erfülle und die in 0 differenzierbar sei. Zeige, dass dann f in jedem Punkt differenzierbar ist und die Beziehung $f'(z) = \lambda f(z)$ mit einem festen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung in einem Extremum.

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Stammfunktion der Umkehrfunktion.

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme den Durchschnittswert der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für $x \in [1,4]$. Vergleiche diesen Wert mit der Wurzel des arithmetischen Mittels von 1 und 4 und mit dem arithmetischen Mittel der Wurzel von 1 und der Wurzel von 4.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$4x + 7y = 3$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom zu einer linearen Abbildung $\varphi \colon V \rightarrow V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V wohldefiniert ist, also unabhängig von der gewählten Basis.