Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/59/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	1	2	2	3	4	8	0	5	0	5	0	0	4	1	2	2	5	50

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.
2. Das *abgeschlossene Intervall* $[a,b]$.
3. Die *absolute Konvergenz* einer reellen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
5. Die *inverse Matrix* zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ über einem Körper K.
6. Das *charakteristische Polynom* zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K.

Lösung

1. Die Menge
   $$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
   heißt die *Vereinigung* der beiden Mengen.
2. Das *abgeschlossene Intervall* ist $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$.
3. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

4. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

5. Die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit
$$A \circ M = E_n = M \circ A$$
heißt die *inverse Matrix* von M.

6. Das Polynom
$$\chi_M := \det(X \cdot E_n - M)$$
heißt *charakteristisches Polynom* von M.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Fundamentalsatz der Algebra*.
2. Der Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.
3. Die *Substitutionsregel* zur Integration von stetigen Funktionen (erste Version).

Lösung

1. Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.

2. Es sei I ein reelles Intervall,
$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

1. Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein lokales Extremum.
2. Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.
3. Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.

3. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g : [a, b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, ds\,.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Lösung

$\neg p \wedge q$.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten auf der Menge

$$M = \{a,b,c,d\}$$

die durch die Tabelle

$\star$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	d	a	a	a
c	d	b	b	a
d	b	d	d	c

gegebene Verknüpfung $\star$.

1. Berechne
   $$a \star (b \star (c \star d)).$$
2. Besitzt die Verknüpfung $\star$ ein neutrales Element?

Lösung

1. Es ist
   $$a \star (b \star (c \star d)) = a \star (b \star a) = a \star d = d\,.$$
2. Es gibt kein neutrales Element, da dann eine Zeile eine Wiederholung der Leitzeile sein müsste, was nicht der Fall ist.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestätige die folgende Identität.

$$2^7 + 17^3 = 71^2\,.$$

Lösung

Es ist

$$2^7 = 128$$

und

$$17^3 = 289 \cdot 17 = 4913$$

und somit

$$2^7 + 17^3 = 128 + 4913 = 5041 .$$

Andererseits ist

$$71 \cdot 71 = 5041 .$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die reellen Intervalle, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung sind.

$$|2x - 5| < |3x - 4| .$$

Lösung

Für $x < \frac{4}{3} \leq \frac{5}{2}$ sind sowohl $3x - 4$ als auch $2x - 5$ negativ. In diesem Bereich ist die Betragsungleichung daher äquivalent zu

$$-2x + 5 < -3x + 4 .$$

Dies ist äquivalent zu $x < -1$.

Für $\frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{2}$ ist $3x - 4$ nichtnegativ und $2x - 5$ negativ. In diesem Bereich ist die Betragsungleichung daher äquivalent zu

$$-2x + 5 < 3x - 4 .$$

Dies ist äquivalent zu $5x > 9$ und zu $x > \frac{9}{5}$.

Für $x \geq \frac{5}{2}$ sind sowohl $3x - 4$ als auch $2x - 5$ nichtnegativ. In diesem Bereich ist die Betragsungleichung daher äquivalent zu

$$2x - 5 < 3x - 4$$

und dies ist äquivalent zu $x > -1$.

Als Lösungsmenge ergeben sich also die beiden offenen Intervalle $]-\infty, -1[$ und $]\frac{9}{5}, \infty[$.

Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P = X^n \in K[X]$ mit $n \geq 1$. Zeige, dass sämtliche normierten Teiler von P die Form X^k, $1 \leq k \leq n$, besitzen.

Lösung

Die angegeben Potenzen sind offenbar Teiler von X^n. Die Umkehrung beweisen wir durch Induktion über n. Als Teiler kommen nur Polynome in Frage, deren Grad kleiner/gleich n ist. Sei $n = 1$. Eine Faktorzerlegung in normierte Polynome muss die Form

$$X = (X + a) \cdot 1$$

haben, was $a = 0$ erzwingt. Sei nun n beliebig und eine Faktorzerlegung

$$X^n = P \cdot Q$$

in normierte Polynome P, Q vorgegeben. Da 0 eine Nullstelle links ist, muss $P(0) = 0$ oder $Q(0) = 0$ sein. Sagen wir der erste Fall liegt vor. Nach Lemma 6.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist X ein Teiler von P und somit ist

$$X^n = (\tilde{P}X) \cdot Q \, .$$

Da $K[X]$ nullteilerfrei ist, folgt

$$X^{n-1} = \tilde{P} \cdot Q$$

und die Aussage folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe (8 (2+3+3) Punkte)

1. Zeige die Abschätzungen
$$\frac{5}{2} \leq \sqrt{7} \leq \frac{8}{3} \, .$$
2. Zeige die Abschätzungen
$$15 \leq 3^{\sqrt{7}} \leq 19 \, .$$
3. Zeige die Abschätzung
$$17 \leq 3^{\sqrt{7}} \, .$$

Lösung

1. Die angegebenen Abschätzungen kann man durch Quadrieren überprüfen. Wegen
$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \leq \frac{28}{4} = 7 = \frac{63}{9} \leq \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$
ist dies richtig.

2. Nach Teil (1) ist
$$\frac{5}{2} \leq \sqrt{7}$$
und damit ist
$$3^{\frac{5}{2}} \leq 3^{\sqrt{7}}.$$
Wegen
$$15^2 = 225 \leq 243 = 3^5$$
ist
$$15 \leq 3^{\frac{5}{2}}$$
und damit
$$15 \leq 3^{\sqrt{7}}.$$
Nach Teil (1) ist
$$\sqrt{7} \leq \frac{8}{3}$$
und damit ist
$$3^{\sqrt{7}} \leq 3^{\frac{8}{3}}.$$
Wegen
$$3^8 = 6561 \leq 6859 = 19^3$$
ist
$$3^{\frac{8}{3}} \leq 19$$
und damit
$$3^{\sqrt{7}} \leq 19.$$

3. Zunächst ist
$$\frac{13}{5} \leq \sqrt{7},$$

da

$$\left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} \leq \frac{175}{25} = 7$$

ist. Somit gilt

$$3^{\frac{13}{5}} \leq 3^{\sqrt{7}}.$$

Wegen

$$17^5 = 1419857 \leq 1594323 = 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 3 = 3^{13}$$

ist

$$17 \leq 3^{\frac{5}{13}}$$

und damit auch

$$17 \leq 3^{\sqrt{7}}.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei x_n eine gegen x konvergente reelle Folge. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine bijektive Abbildung. Zeige, dass auch die durch

$$y_n := x_{\varphi(n)}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Ausgangsfolge gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt. Das Urbild von $\{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$ unter der bijektiven Abbildung φ ist endlich. Es sei $m \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die größer als all diese Zahlen ist. Dann gilt für $n \geq m$ die Beziehung $\varphi(n) \geq n_0$, und somit ist für diese n auch

$$|y_n - x| = |x_{\varphi(n)} - x| \leq \epsilon .$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösung

Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \rightarrow b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Nach Satz 11.7 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist f^{-1} stetig. Daher konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert und die zweite Gleichheit auf Lemma 8.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) (5) beruht.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die Substitutionsregel zur Integration von stetigen Funktionen.

Lösung

Wegen der Stetigkeit von f und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von g existieren beide Integrale. Es sei F eine Stammfunktion von f, die aufgrund von Korollar 19.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion

$$t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$$

die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds\,.$$

Aufgabe (1 Punkt)

Bei einem linearen Gleichungssystem führe das Eliminationsverfahren auf die Gleichung

$$0 = 0\,.$$

Welche Folgerung kann man daraus schließen?

Lösung

Daraus kann man nichts schließen.

Aufgabe (2 (1+1) Punkte)

Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Untervektorräume $U,V \subseteq \operatorname{Mat}_3(K)$, die durch

$$U = \{M = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_3(K) \mid a_{31} = 0\}$$

bzw.

$$V = \{M = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_3(K) \mid a_{21} = 0 \text{ und } a_{31} = 0\}$$

gegeben sind.

1. Ist U abgeschlossen unter der Matrizenmultiplikation?
2. Ist V abgeschlossen unter der Matrizenmultiplikation?

Lösung

1. U ist nicht abgeschlossen unter der Matrizenmultiplikation, da beispielsweise
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$$
ist.

2. V ist abgeschlossen unter der Matrizenmultiplikation. Es ist ja
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$
ist, da, wenn man die zweite oder dritte Zeile links mit der ersten Spalte rechts multipliziert, in jedem Summanden eine Null beteiligt ist.

Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $\varphi \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Berechne $\varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &= \varphi(3e_1 - 4e_2 + 2e_3) \\ &= 3\varphi(e_1) - 4\varphi(e_2) + 2\varphi(e_3) \\ &= 3\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right) - 4\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right) + 2\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-11) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[X]$ das charakteristische Polynom zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem reellen Vektorraum V endlicher Dimension. Kann man daraus das charakteristische Polynom zu den Hintereinanderschaltungen φ^n bestimmen?

Lösung

Es sei M eine beschreibende Matrix. Diese können wir auch über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen, dadurch ändert sich weder das charakteristische Polynom noch die Matrizenmultiplikation. Wir können also über $\mathbb{C}$ arbeiten. Über $\mathbb{C}$ ist die Matrix trigonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis, bezüglich der die beschreibende Matrix obere Dreiecksgestalt hat, sagen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{d-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom hat somit die Form

$$(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_d).$$

Die n-te Potenz dieser Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^n & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{d-1}^n & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_d^n \end{pmatrix}.$$

Daher ist deren charakteristisches Polynom gleich

$$(X-\lambda_1^n)\cdots\left(X-\lambda_d^n\right).$$

Das charakteristische Polynom der Potenzen hängt also nur vom charakteristischen Polynom der Ausgangsmatrix ab.