Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/43/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	4	10	3	3	6	0	0	4	2	3	4	0	4	0	0	3	54

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M.
2. Eine reelle *Potenzreihe*.

3. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

4. Der *Sinus hyperbolicus*.

5. Das *untere Treppenintegral* zu einer unteren Treppenfunktion s zu einer Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über wachsende, nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

2. Die Rechenregeln für stetige Funktionen

$$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

3. Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bei der Onlinepartnervermittlung „e-Tarzan meets e-Jane“ verliebt sich alle elf Minuten ein Single. Wie lange (in gerundeten Jahren) dauert es, bis sich alle erwachsenen Menschen in Deutschland (ca. 65000000) verliebt haben, wenn ihnen allein dieser Weg zur

Verfügung steht.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe (10 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie Ihren Lieblingssatz der Vorlesung.

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

1. $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
2. $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Wir betrachten Rechtecke mit dem konstanten Umfang d. Zeige, dass unter diesen Rechtecken das Quadrat den maximalen Flächeninhalt besitzt.

Aufgabe * (6 Punkte)

Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (4 (1+1+1+1) Punkte)

Die Süddeutsche Zeitung schrieb am 10.3.2020 unter dem Titel „Die Wucht der großen Zahl“ (von Christian Endt, Michael Mainka und Sören Müller-Hansen):

„Um zu verstehen, warum das neue Coronavirus so gefährlich ist, muss man sich klarmachen, was exponentielles Wachstum bedeutet. Der Begriff ist etwas sperrig, das Konzept dahinter aber einfach. Es geht um eine Vermehrung, die sich ständig selbst beschleunigt. Und dieses Muster lässt sich auch beim Coronavirus erkennen. Das ist der Hintergrund, warum nun immer strengere Auflagen verhängt werden, Fußballspiele ohne Publikum ausgetragen, Feste und Kongresse abgesagt werden. Und warum Gesundheitsminister Jens Spahn, Kanzlerin Angela Merkel und andere davon sprechen, man müsse die Ausbreitung des Virus verlangsamen. Sprich: Verhindern, dass es sich exponentiell verbreitet.“

1. Beschleunigt sich lineares Wachstum „ständig selbst“?
2. Beschleunigt sich quadratisches Wachstum wie bei der Funktion $f(x) = x^2$ „ständig selbst“?
3. Wie kann man exponentielles Wachstum charakterisieren?
4. Wenn man exponentielles Wachstum wie bei einer Virusausbreitung „verlangsamen“ möchte, verhindert man dann exponentielles Wachstum oder ändert man Parameter (welche?) für exponentielles Wachstum?

Aufgabe * (2 Punkte)

Ergänze die folgende Tabelle, in der Winkel in verschiedenen Maßeinheiten miteinander in Bezug gesetzt werden. Die Prozentangabe bezieht sich auf den Vollkreis.

Grad	Bogenmaß	Prozent
		$100\,\%$
270°		
	$\frac{\pi}{10}$	
60°		
	π	
		$1\,\%$

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

Bestimme die Ableitung (auf den jeweiligen Definitionsbereichen) der folgenden Funktionen:

a) $\tan x$,

b) $\arctan x$.

Aufgabe * (4 (2+2) Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Es sei f differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls periodisch mit der Periode L ist.

b) Man gebe ein Beispiel einer nichtkonstanten, periodischen, stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Stammfunktion nicht periodisch ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 3x & & +z & +4w & = & -2 \\ 2x & +2y & & +w & = & 7 \\ 4x & +6y & & +w & = & 3 \\ x & +3y & +5z & & = & -1\,. \end{array}$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$