Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/39/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	3	5	1	4	2	4	0	4	3	0	4	0	4	5	1	4	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *surjektive* Abbildung

$$f: L \longrightarrow M.$$

2. Eine *Folge* reeller Zahlen.

3. Das *Cauchy-Produkt* zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen.

4. Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

5. Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

6. Ein *Eigenwert* zu einer linearen Abbildung
$$\varphi: V \longrightarrow V$$
auf einem K-Vektorraum V.

Lösung

1. Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit $f(x) = y$ gibt.

2. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung
$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\, n \longmapsto x_n.$$

3. Das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

4. Zu $x \in \mathbb{R}, x \neq a$, heißt die Zahl
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

5. Die Funktion
$$I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt,$$
heißt die Integralfunktion zu f zum Startpunkt a.

6. Ein Element $\lambda \in K$ heißt ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit
$$\varphi(v) = \lambda v$$
gibt.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *Produktregel* für reelle Folgen.
2. Der *zweite Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.
3. Der Satz über Zeilenrang und Spaltenrang.

Lösung

1. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$
2. Es sei $b > a$ und seien
$$f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen mit
$$g'(x) \neq 0$$
für alle $x \in \,]a,b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in \,]a,b[$ mit
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein.

Aufgabe (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	r	?
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f

f w w f

f w f w

f f w f

f f f w

Lösung

$$p \leftrightarrow r.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Erläutere das Prinzip *Beweis durch Fallunterscheidung*.

Lösung Beweis durch Fallunterscheidung/Erläuterung/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 (3+2) Punkte)

Es seien $M_1, \ldots, M_k$ und $N_1, \ldots, N_k$ nichtleere Mengen und

$$\varphi_i \colon M_i \longrightarrow N_i$$

Abbildungen für $i = 1, \ldots, k$. Es sei $M = M_1 \times \cdots \times M_k$, $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, und φ die Produktabbildung, also

$$\varphi\colon M \longrightarrow N,\ (x_1, \ldots, x_k) \longmapsto (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_k(x_k)).$$

a) Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn alle φ_i surjektiv sind.

b) Zeige, dass a) nicht gelten muss, wenn die beteiligten Mengen leer sein dürfen.

Lösung

a) Seien alle φ_i surjektiv und sei $y = (y_1, \ldots, y_k) \in N$. Zu jedem i gibt es ein $x_i \in M_i$ mit $\varphi(x_i) = y_i$. Daher ist $x = (x_1, \ldots, x_k)$ ein Urbild von y unter φ.

Sei umgekehrt φ surjektiv, und sei $y_i \in N_i$ gegeben. Da die N_j alle nicht leer sind, gibt es jeweils ein $a_j \in N_j$. Wir setzen

$$y = (a_1, \ldots, a_{i-1}, y_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in N.$$

Dafür gibt es nach Voraussetzung ein Urbild $x \in M$. Für die i-te Komponente davon muss $\varphi_i(x_i) = y_i$ gelten.

b) Sei $M_1 = N_1 = \emptyset$, sei φ_1 die leere Abbildung und seien M_2 und N_2 irgendwelche (nichtleere) Mengen und sei $\varphi_2\colon M_2 \to N_2$ eine beliebige nicht surjektive Abbildung. Dann ist $M = \emptyset \times M_2 = \emptyset$ und $N = \emptyset \times N_2 = \emptyset$ und daher ist die Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ ebenfalls die leere Abbildung, also surjektiv, obwohl nicht alle φ_i surjektiv sind.

Aufgabe (1 Punkt)

Finde eine natürliche Zahl n derart, dass

$$\left(\frac{8}{7}\right)^n \geq 1000$$

ist.

Lösung

Man kann $n = 7000$ nehmen. Es ist nämlich

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{7000} = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^{7000} \geq 1 + 7000 \cdot \frac{1}{7} = 1 + 1000 \geq 1000\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die ganzzahligen Lösungen $x \neq 0$ der Ungleichung

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{-7}{4}} > -1\,.$$

Lösung

Es ist

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{-7}{4}} = \frac{12}{-7x} = \frac{-12}{7x}\,.$$

Bei positivem x führt die Bedingung

$$\frac{-12}{7x} > -1$$

auf

$$-12 > -7x$$

bzw.

$$12 < 7x\,.$$

Dies ist für

$$x \geq 2$$

erfüllt. Für negatives x schreiben wir

$$x = -y$$

mit y positiv. Die Bedingung

$$\frac{-12}{7(-y)} > -1$$

bedeutet dann

$$\frac{12}{7y} > -1$$

und ist für jedes (positive) y erfüllt, da links eine positive rationale Zahl steht. Insgesamt ist die Ungleichung also für alle ganzen Zahlen $\neq 0, 1$ erfüllt.

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{7}\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right).$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{7}\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) &= \frac{1}{10}-\frac{4}{15}\sqrt{3}-\frac{3}{28}\sqrt{3}+\frac{2}{7}\cdot\sqrt{3}^2\\ &= \frac{1}{10}+\frac{6}{7}-\left(\frac{4}{15}+\frac{3}{28}\right)\sqrt{3}\\ &= \frac{7+60}{70}-\frac{112+45}{420}\sqrt{3}\\ &= \frac{67}{70}-\frac{157}{420}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz, dass der Limes einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist.

Lösung

Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$,

gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0'.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Die beiden lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

definieren ein achsenparalleles Rechteck, das vom Funktionsgraphen in zwei Bereiche zerlegt wird. Bestimme deren Flächeninhalte.

Lösung

Es ist

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3((x-2)^2 - 1) = 3(x-1)(x-3)\,.$$

Die Ableitung hat also bei $x = 1$ und bei $x = 3$ eine Nullstelle. Wegen $f''(x) = 6x - 12$ liegt bei $x = 1$ ein lokales Maximum mit dem Wert $f(1) = 5$ und bei $x = 3$ ein lokales Minimum mit dem Wert $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$ vor. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist 8. Der Flächeninhalt des Teilbereichs des Rechteckes unterhalb des Graphen ist

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^3 - 6x^2 + 9x + 1 dx - 2 &= [\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 + x]_1^3 - 2 \\ &= \frac{1}{4}81 - 2 \cdot 27 + \frac{81}{2} + 3 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{2} - 1 - 2 \\ &= \frac{3}{4}81 - 54 + 3 - \frac{19}{4} + 1 - 2 \\ &= \frac{243 - 19}{4} - 50 - 2 \\ &= 4.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Teilbereichs des Rechteckes oberhalb des Graphen ist ebenfalls 4.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020))).

Lösung

Nach Satz 16.1 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n) \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= (-1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= -\sin x,
\end{aligned}
$$

wobei wir im vorletzten Schritt $k = n - 1$ gesetzt haben.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, die Gleichheit

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

gilt.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^2 + 1}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1 + 1}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Wir wenden die Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh} x$ auf diese Gleichung an und erhalten

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \operatorname{arcosh} x\ .$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Eliminationslemma für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in n Variablen über einem Körper K.

Lösung

Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i = d\,.$$

Dann hat die Gleichung

$$H' = H - \frac{c}{a} G$$

die Gestalt

$$\sum_{i=2}^{n} \left(c_i - \frac{c}{a} a_i \right) x_i = d - \frac{c}{a} b ,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a} G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent.

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig in K^m sind.

Lösung

Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spaltenvektoren von M. Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i \, ,$$

wobei s_{ij} der i-te Eintrag des j-ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}\right) w_i \, .$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ für alle i ist, und dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0 \, .$$

Dafür gibt es ein nichttriviales (Lösungs-)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist.

Aufgabe (1 Punkt)

Es seien A und B quadratische Matrizen über einem Körper K. Zeige

$$\det{(A \circ B)} = \det{(B \circ A)} \, .$$

Lösung

Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist

$$\det (A \circ B) = \det A \det B = \det B \det A = \det (B \circ A) \, .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Beziehung zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit.

Lösung

Sei $m = \dim(\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi))$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher nach Aufgabe 26.9 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) gleich $(X - \lambda)^m \cdot \chi_C$, so dass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist.