Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/35/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	5	2	2	6	5	5	0	3	0	5	0	0	4	4	3	3	0	53

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Vereinigung* der Mengen L und M.

2. Eine *streng wachsende* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.

4. Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

5. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$.

6. Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.

Lösung

1. Die Menge
$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
heißt die *Vereinigung* der beiden Mengen.

2. Die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt *streng wachsend*, wenn
$$f(x') > f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt.}$$

3. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$
gilt.

4. Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes
$$\lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existiert.

5. Eine Funktion $F\colon]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf $]a,b[$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a,b[$ gilt.
6. Eine Familie v_i, $i \in I$, von Vektoren in V heißt Basis, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Konvergenz und Beschränktheit von Folgen.
2. Das Ableitungskriterium für konstante Funktionen.
3. Der Satz über die Eigenschaft der Determinante, *alternierend* zu sein (mit Erläuterung).

Lösung

1. Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.
2. Sei
$$f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \,]a, b[$.

Dann ist f konstant.

3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante
$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K, \, M \longmapsto \det M,$$
alternierend. D.h. wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist
$$\det M = 0.$$

Aufgabe (5 (1+1+3) Punkte)

1. Löse das folgende Minisudoku
$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Begründe, dass das Minisudoku aus (1) nur eine Lösung besitzt.
3. Welche mathematischen Beweisverfahren finden sich als typische Argumentationsschemata beim Lösen eines Sudokus wieder?

Lösung

1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Wir gehen von

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}$$

aus. In der dritten Stelle der zweiten Zeile muss eine 1 sein und somit muss rechts oben eine 3 stehen. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & 3 \\ 3 & - & 1 & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$

An der vierten Stelle der dritten Zeile muss eine 2 stehen. In der vierten Zeile muss an der dritten Stelle eine 3 und somit in der vierten Zeile an der ersten Stelle eine 2 stehen. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & 3 \\ 3 & - & 1 & 4 \\ - & - & - & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies erzwingt

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ - & - & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

An der zweiten Stelle der ersten Zeile muss eine 1 stehen, dies ergibt dann die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.
1. Direkter Beweis: Durch Betrachten der schon gefundenen Zahlen erschließt man, welche Zahl in ein bestimmtes Feld gesetzt werden muss.
2. Beweis durch Fallunterscheidung: Man weiß, dass in einem gewissen Feld nur noch zwei Zahlen, sagen wir a oder b möglich sind. Wenn man nun in beiden Fällen, dass es sich um a oder um b handelt, jeweils erschließen kann, dass in einem bestimmten anderen Feld die Zahl c stehen muss, so steht diese Zahl fest.
3. Beweis durch Widerspruch: Man weiß, dass in einem gewissen Feld nur noch zwei Zahlen, sagen wir a oder b möglich sind. Man nimmt nun an, dass es sich um a handelt. Wenn man nun erschließen kann, dass sich daraus an irgendeiner Stelle ein Widerspruch ergibt, so kann die Belegung durch a nicht gelten und b ist richtig.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$\binom{49}{6}.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5 \cdot 3} \\ &= 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 47.\end{aligned}$$

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne

$$\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5}\right).$$

Lösung

Es ist

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{3}\sqrt{5}\right) &= \frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot 5+\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)\sqrt{5}\\
&= \frac{28}{15}-\frac{75}{6}+\left(\frac{35}{9}-\frac{6}{5}\right)\sqrt{5}\\
&= \frac{56-375}{30}+\frac{175-54}{45}\cdot\sqrt{5}\\
&= -\frac{319}{30}+\frac{121}{45}\cdot\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Aufgabe (6 (3+3) Punkte)

Wir betrachten eine Rekursionsvorschrift, die zu einen Zahlendreieck (analog zum Pascalschen Dreieck) führt. In der ersten Zeile steht zentral die 256, links und rechts davon stehen unendlich viele 1 (die nicht aufgeführt werden müssen). Die jeweils nächste Zeile entsteht, indem man von zwei benachbarten Zahlen der Vorgängerzeile das geometrische Mittel nimmt und das Ergebnis darunter in der neuen Zeile platziert.

1. Bestimme die ersten Zeilen dieses Zahlendreiecks, bis sämtliche Einträge kleiner als 6 sind.
2. Welche Eigenschaft gilt in jeder Zeile? Warum?

Lösung

1. Es ergibt sich das folgende Schema.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 256 & & & & & \\
 & & & & 16 & & 16 & & & & \\
 & & & 4 & & 16 & & 4 & & & \\
 & & 2 & & 8 & & 8 & & 2 & & \\
 & \sqrt{2} & & 4 & & 8 & & 4 & & \sqrt{2} & \\
2^{1/4} & & 2 \cdot 2^{1/4} & & 4\sqrt{2} & & 4\sqrt{2} & & 2 \cdot 2^{1/4} & & 2^{1/4}
\end{array}$$

Wegen

$$(4\sqrt{2})^2 = 32 \leq 6^2$$

sind wir fertig.

2. In jeder Zeile ist das Produkt über alle Zahlen gleich 256. Dies beweist man durch Induktion über den Zeilenindex. In der Startzeile ist das richtig (die nicht hingeschriebenen Zahlen sind 1). Sei also das Produkt der Zahlen in einer Zeile gleich 256. Jede Zahl dieser Zeile geht zweifach in die folgende Zeile ein, einmal als Beitrag zum geometrischen Mittel mit der linken Zahl und einmal als Beitrag zum geometrischen Mittel mit der rechten Zahl. Dabei geht wegen $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ jeweils die Quadratwurzel ein. Das Gesamtprodukt bleibt dabei erhalten.

Aufgabe (5 (1+2+2) Punkte)

1. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom über einem Körper K der Form
$$F = aX^n$$
mit $n \in \mathbb{N}_+$ und $a \neq 0$. Zeige, dass F die 0 als einzige Nullstelle besitzt.

2. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit der Eigenschaft, dass 0 die einzige komplexe Nullstelle von F ist. Zeige, dass F die Form

$$F = aX^n$$

mit $n \in \mathbb{N}_+$ und $a \neq 0$ hat.

3. Man gebe ein Beispiel für ein reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X]$ mit der Eigenschaft, dass 0 die einzige reelle Nullstelle von F ist, dass F aber nicht die Gestalt aus Teil (1) besitzt.

Lösung

1. Die angegebenen Polynome haben die gewünschte Eigenschaft über jedem Körper nach Lemma 4.4 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)). Aus $ax^n = 0$ folgt zunächst $x^n = 0$ und daraus $x = 0$.
2. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit der angegebenen Nullstelleneigenschaft. Wenn F konstant ist, so besitzt F bei $F = 0$ jedes Element als Nullstelle und bei $F = c \neq 0$ überhaupt keine Nullstelle. Der Grad von F muss also zumindest 1 sein. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt F eine Faktorzerlegung
$$F = a(X - b_1) \cdots (X - b_n)$$
mit $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Die b_i sind die Nullstellen von F. Da diese alle 0 sein sollen, ist
$$F = aX^n .$$
3. Wir betrachten
$$F = X^3 + X = X\left(X^2 + 1\right),$$
das nicht die Form aus Teil (1) besitzt. Eine Nullstelle dieses Polynoms ist die Nullstelle eines Faktors. Das Polynom $X^2 + 1$ ist reell immer positiv und somit nullstellenfrei, also ist 0 die einzige Nullstelle von F.

Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Element mit $0 \leq a < 1$. Es gebe ein N derart, dass

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$$

gelte für alle $n \geq N$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Lösung

Die Eigenschaft, eine Cauchy-Folge zu sein, ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder der Folge abändert. Wir können also annehmen, dass

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$$

für alle n gilt. Für $m \geq n$ gilt

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{m-1} - x_{m-2}| + |x_m - x_{m-1}| \\ &\leq a^n + a^{n+1} + \cdots + a^{m-2} + a^{m-1} \\ &= a^n \left(1 + a + \cdots + a^{m-n-2} + a^{m-n-1}\right). \end{aligned}$$

Der rechte Faktor ist dabei (endliche geometrische Reihe) gleich $\frac{1-a^{m-n}}{1-a}$. Wegen $0 \leq a < 1$ ist der Nenner wohldefiniert und a^{m-n} ist ≥ 0, also kann man diesen Faktor nach oben durch $\frac{1}{1-a}$ abschätzen. Insgesamt haben wir also

$$|x_m - x_n| \leq a^n \cdot \frac{1}{1-a}.$$

Nach Aufgabe 8.22 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) ist a^n eine Nullfolge und dies gilt auch für $a^n \cdot \frac{1}{1-a}$, da man ja mit einer festen Zahl multipliziert. Zum Nachweis, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein

n_0 mit $a^n \cdot \frac{1}{1-a} \leq \epsilon$ für $n \geq n_0$ und somit gilt für alle $m \geq n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \leq a^n \cdot \frac{1}{1-a} \leq \epsilon\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = xe^x\,.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

ist.

Lösung

Die Aussage ist für $n = 0$ richtig. Als Induktionsvoraussetzung können wir

$$f^{(n)} = (x+n)e^x$$

annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= (f^{(n)})' \\ &= ((x+n)e^x)' \\ &= (x+n)(e^x)' + 1e^x \\ &= (x+n)e^x + 1e^x \\ &= (x+n+1)e^x, \end{aligned}$$

was die Aussage für $n+1$ bedeutet.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (5 Punkte)

Ein Dreieck soll die Grundseite $[0, s]$ und die Höhe h besitzen ($s, h > 0$). Für welchen Höhenfußpunkt x besitzt das Dreieck einen minimalen Umfang, und wie lange ist dieser?

Lösung

Wenn (x,h) der (neben $(0,0)$ und $(s,0)$) dritte Eckpunkt des Dreieckes ist, so ist der Umfang gleich

$$s+\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-s)^2+h^2}.$$

Wir müssen also die Funktion

$$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-s)^2+h^2}$$

minimieren. Da h positiv ist, ist diese Funktion differenzierbar, und zwar ist

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{x-s}{\sqrt{(x-s)^2+h^2}}\,.$$

Die Bedingung $f'(x)=0$ führt auf

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{s-x}{\sqrt{(x-s)^2+h^2}}$$

bzw. auf

$$x\sqrt{(x-s)^2+h^2}=(s-x)\sqrt{x^2+h^2}\,.$$

Quadrieren führt auf

$$x^2\left((x-s)^2+h^2\right)=(s-x)^2\left(x^2+h^2\right)$$

und dies auf

$$x^2h^2 = (s-x)^2h^2$$

und somit ist

$$x^2 = (s-x)^2$$

und daher (der Fall $x = x - s$ ist ausgeschlossen)

$$x = s - x$$

und somit

$$x = \frac{s}{2}\,.$$

Dies muss ein Minimum sein, da für $x \rightarrow \pm\infty$ der Umfang gegen $+\infty$ strebt. Der minimale Umfang ist daher

$$s + 2\sqrt{\frac{s^2}{4} + h^2} = s + \sqrt{s^2 + 4h^2}\,.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Lösung

Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}0 = 0$$

für alle $i = 1, \ldots, m$ ist das Nulltupel $(0, \ldots, 0)$ eine Lösung. Es seien $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ Lösungen des linearen Gleichungssystems. Zu $s \in K$ ist dann für jedes i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(sx_j) = s \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) = s \cdot 0 = 0\,.$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j + a_{ij}y_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle i. Somit ist der Lösungsraum unter Multiplikation mit einem Skalar und unter Addition abgeschlossen und bildet demnach einen Untervektorraum.

Der Gesamtlösungsraum ist der Durchschnitt der Lösungsräume zu den einzelnen Gleichungen.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ -2 & 7 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Lösung Lineare Abbildung/Kern/4 nach 3/2/Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -22 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{1}{44} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{3}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{1}{44} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0$$

ist.

Lösung

Sei $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi)$. Dann ist

$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v .$$

Also ist

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0\,,$$

woraus wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ direkt $v = 0$ folgt.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung