Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/34/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	3	3	2	4	3	4	4	3	2	0	3	3	5	3	3	53

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Durchschnitt* von Mengen L und M.
2. Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.

3. Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).
4. Das *obere Treppenintegral* zu einer oberen Treppenfunktion t zu einer Funktion

   $$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

   auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Der i-te *Standardvektor* im K^n.
6. Ein *Eigenvektor* zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

   auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz von Euklid* über Primzahlen.
2. Der Satz über Ableitung und Wachstumsverhalten einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Der Satz über die Charakterisierung von invertierbaren Matrizen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (2 Punkte)

Ersetze im Term $4x^2 + 3x + 7$ die Variable x durch den Term $y^3 + 5$ und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

Aufgabe * (3 (1+2) Punkte)

Lucy Sonnenschein unternimmt eine Zeitreise. Sie reist zuerst 16 Stunden nach vorne, dann (immer vom jeweiligen erreichten Zeitpunkt aus) 5 Stunden nach vorne, dann 26 Stunden zurück, dann 4 Stunden zurück, dann 8 Stunden nach vorne und dann 12 Stunden zurück.

1. Wo befindet sie sich am Ende dieser Zeitreise, wenn die Reise selbst keine Zeit verbraucht?
2. Wo befindet sie sich am Ende dieser Zeitreise, wenn eine Zeitreise um eine Stunde, egal ob in die Zukunft oder in die Vergangenheit, immer eine Minute verbraucht?

Aufgabe * (3 Punkte)

Man gebe ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ an, das nicht zu $\mathbb{Z}[X]$ gehört, aber die Eigenschaft besitzt, dass für jede ganze Zahl n gilt: $P(n) \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen" Strecken vorkommen.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

für jedes $z \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng wachsende Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Folgt daraus $f = g$?

Aufgabe * (4 Punkte)

Wir betrachten Rechtecke mit dem konstanten Flächeninhalt c. Zeige, dass unter diesen Rechtecken das Quadrat den minimalen Umfang besitzt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Wir betrachten die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ mit den Verknüpfungen

$$x \oplus y := x \cdot y$$

als neuer Addition und

$$x \otimes y := e^{(\ln x)(\ln y)}$$

als neuer Multiplikation. Ist $\mathbb{R}_+$ mit diesen Verknüpfungen (und mit welchen neutralen Elementen) ein Körper?

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Zeige durch Induktion, dass für die n-fache Hintereinanderschaltung $(n \geq 1)$

$$f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f \ \ (n \text{ mal})$$

die Beziehung

$$(f^{\circ n})' = f' \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (f' \circ f^{\circ i})$$

gilt.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (3 Punkte)

Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - 7y - 4z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ 7x + 6y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ besitzt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ quadratische Matrizen der Länge n. Es gelte $a_{ij}=0$ für $j\leq i+d$ und $b_{ij}=0$ für $j\leq i+e$ für gewisse $d,e\in\mathbb{Z}$. Zeige, dass die Einträge c_{ij} des Produktes AB die Bedingung $c_{ij}=0$ für $j\leq i+d+e+1$ erfüllen.

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\text{ und }v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V\to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu einer ebenen Drehung $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, über $\mathbb{C}$.