Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/47/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	2	2	1	1	6	4	0	2	5	5	2	1	6	0	4	51

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
2. Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.

3. Die *bestimmte Divergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $-\infty$.
4. Die reelle *Exponentialfunktion* zu einer Basis $b > 0$.
5. Der *Kosinus hyperbolicus*.
6. *Ähnliche* Matrizen $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Die *allgemeine binomische Formel* für $(a+b)^n$.
2. Die *Produktregel* für reelle Folgen.
3. Der *Basisaustauschsatz*.

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten auf der Menge

$$M = \{a, b, c, d\}$$

die durch die Tabelle

$\star\, a\, b\, c\, d$

$a\, c\, a\, a\, a$

$$
\begin{array}{ccccc}
b & d & d & b & b \\
c & a & b & c & c \\
d & b & a & d & d
\end{array}
$$

gegebene Verknüpfung $\star$.

1. Berechne
$$b \star (c \star (d \star a)).$$
2. Besitzt die Verknüpfung $\star$ ein neutrales Element?

Aufgabe * (2 Punkte)

Erstelle das Pascalsche Dreieck bis $n = 6$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Schreibe die Menge

$$]-3,-2[\cup \{7\} \cup \left([-\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}] \setminus]-\frac{4}{3}, -1] \right) \cup [1, \frac{7}{3}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{6}{5}[\cup ( ]-7,-6] \cap \mathbb{R}_+)$$

als eine Vereinigung von möglichst wenigen disjunkten Intervallen.

Aufgabe * (2 Punkte)

Setze in das Polynom $-5X^3 - X^2 + \sqrt{2}X + \sqrt{5}$ die Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ein.

Aufgabe * (1 Punkt)

Bestimme, ob die reelle Zahl

$$\sqrt{10000000000000000000000000000}$$

rational ist oder nicht.

Aufgabe (1 Punkt)

Erläutere die geometrische Relevanz des geometrischen Mittels.

Aufgabe * (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Aufgabe * (4 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Produktfolge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

ist.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion ohne Nullstelle. Bestimme die Ableitung von $g(x) = \frac{(f(x))^n}{f(x^n)}$ für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe * (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + \sin x,$$

genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe * (5 Punkte)

Es seien a, b, x, y positive reelle Zahlen und es gelte

$$a^x < b^y \,.$$

Zeige, dass es positive rationale Zahlen c, z mit

$$a^x < c^z < b^y$$

gibt.

Aufgabe * (2 Punkte)

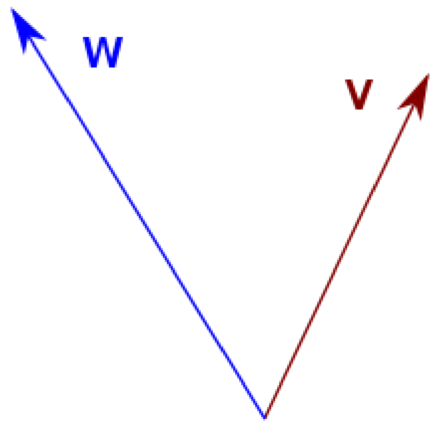
Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe (1 Punkt)

Addiere die beiden folgenden Vektoren graphisch.


w
v

Aufgabe * (6 Punkte)

Wir betrachten die letzte Ziffer im kleinen Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) als eine Familie von 9 Tupeln der Länge 9, also die Zeilenvektoren in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 6 & 0 & 4 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 0 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt der durch diese Tupel aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^9$?

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis aus Eigenvektoren.