Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/42/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	2	4	4	0	5	0	0	6	7	0	6	3	0	0	5	50

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen
$$F \colon L \longrightarrow M$$
und

$$G\colon M \longrightarrow N.$$

2. Ein *archimedisch* angeordneter Körper K.
3. Eine *stetig differenzierbare* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
5. Eine $m \times n$-*Matrix* über einem Körper K.
6. Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der Satz über Nullstellen und lineare Faktoren eines Polynoms $F \in K[X]$.
2. Der Satz über die Ableitung in einem Extremum.
3. Der Satz über den Rang von einer Matrix und einer linearen Abbildung.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Ersetze im Term $3x^2 + 5x + 6$ die Variable x durch den Term $4y^2 + 2y + 3$ und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

Aufgabe * (2 Punkte)

Skizziere sieben Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in acht Punkten schneiden.

Aufgabe * (4 Punkte)

Zeige für $n \in \mathbb{N}_+$ die Gleichung

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n-1} (k!) = (n-1)! \cdot (n-2)! \cdots 3! \cdot 2! \cdot 1! \, .$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms über einem Körper K.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Bestimme, für welche reellen Zahlen x die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

konvergiert.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (6 (4+2) Punkte)

a) Man gebe ein quadratisches Polynom an, dessen Graph die Diagonale und die Gegendiagonale bei $y = 1$ jeweils tangential schneidet.

b) Man zeige, dass der Graph des Lösungspolynoms aus Teil a) innerhalb des oberen, durch die Diagonale und die Gegendiagonale begrenzten Viertels der Ebene liegt.

Aufgabe * (7 Punkte)

Beweise den Satz über die Charakterisierung von Extrema mit höheren Ableitungen.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V, \ (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(7) \ \ r(u+v) = ru + rv$$

erfüllt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(0,1,0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(9,6,5),(2,2,5) \text{ und } (7,3,4)$$

aus.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (5 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige direkt (ohne charakteristisches Polynom), dass ein Diagonalelement von M ein Eigenwert zu M sein muss.