Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/28/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	1	1	9	3	6	4	3	4	3	2	2	3	4	2	2	0	4	59

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Der *Betrag* einer reellen Zahl.
2. Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.

3. Die *reelle Exponentialfunktion*.
4. Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$.
5. Die *Matrizenmultiplikation*.
6. Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
2. Der Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produktes.
3. Der Satz über die Beziehung von Stetigkeit und Riemann-Integrierbarkeit.

Aufgabe * (1 Punkt)

Man finde eine äquivalente Formulierung für die Aussage „Frau Maier-Sengupta hat nicht alle Tassen im Schrank" mit Hilfe einer Existenzaussage.

Aufgabe * (1 Punkt)

Es seien L, M, N und P Mengen und es seien

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$
$$G\colon M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H\colon N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Zeige, dass dann

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$$

gilt.

Aufgabe * (9 (2+1+2+2+2) Punkte)

Zwei Schwimmer, A und B, schwimmen auf einer 50-Meter-Bahn einen Kilometer lang. Schwimmer A schwimmt $3m/s$ (das ist besser als der Weltrekord) und Schwimmer B schwimmt $2m/s$.

1. Erstelle in einem Diagramm für beide Schwimmer den Graphen der jeweiligen Abbildung, die für die Zeit zwischen 0 und 100 Sekunden angibt, wie weit der Schwimmer von der Startlinie zu diesem Zeitpunkt (wirklich, also unter Berücksichtigung der Wenden) entfernt ist.
2. Wie weit von der Startlinie entfernt befindet sich Schwimmer A (und Schwimmer B) nach 30 Sekunden?
3. Nach wie vielen Sekunden begegnen sich die beiden Schwimmer zum ersten Mal?
4. Wie oft begegnen sich die beiden Schwimmer (Start mitzählen)?

5. Wie oft überrundet Schwimmer A den Schwimmer B?

Aufgabe * (3 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 2, für welches

$$f(1) = 10,\ f(-2) = 1,\ f(3) = 16$$

gilt.

Aufgabe * (6 (2+4) Punkte)

Zeige, dass in einem archimedisch angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

1. Zu jedem $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.
2. Zu zwei Elementen $x < y$ gibt es eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_+$) mit
$$x < \frac{n}{k} < y\,.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die keine Nullfolge sei. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass entweder alle x_n, $n \geq N$, positiv oder negativ sind.

Aufgabe * (3 Punkte)

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 5 .$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x-3| \leq \frac{1}{800},$$

dann ist

$$|f(x) - f(3)| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe * (2 Punkte)

Beweise den Satz über die Ableitung von Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\alpha}$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (es muss nicht gezeigt werden, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Innern des Intervalls angenommen wird).

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Zeige, dass f zwischen 1 und 2 eine Nullstelle besitzt, und bestimme diese bis auf einen Fehler von $\frac{1}{4}$.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die Substitutionsregel zur Integration von stetigen Funktionen.

Aufgabe * (2 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei B eine $n \times p$-Matrix und A eine $m \times n$-Matrix und es seien

$$K^p \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

die zugehörigen linearen Abbildungen. Zeige, dass das Matrixprodukt $A \circ B$ die Hintereinanderschaltung der beiden linearen Abbildungen beschreibt.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit Vielfachheiten und die Eigenräume zur reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$