Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/31/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	4	2	1	3	3	3	3	4	6	0	0	0	0	4	4	3	6	52

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Primzahl*.
2. Der *Betrag* einer reellen Zahl.

3. Die *eulersche Zahl* e.
4. Die *Taylor-Reihe* im Punkt a zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.
5. Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.
6. Ein *Eigenvektor* zu einer linearen Abbildung

   $$\varphi: V \longrightarrow V$$

   auf einem K-Vektorraum V.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das Induktionsprinzip für Aussagen.
2. Der *Zwischenwertsatz*.
3. Der Satz über die Ableitung einer reellen Potenzreihe.

Aufgabe * (4 (2+1+1) Punkte)

Lucy Sonnenschein und Heidi Gonzales haben jeweils eine zylinderförmige Laugenstange der Länge 20 cm und mit einem Durchmesser von 3 cm. Beide wollen daraus eine Butterlaugenstange machen. Lucy schneidet ihre Stange der Länge nach in der Mitte auf und bestreicht sie einseitig mit Butter der Dicke $0,5$ mm. Heidi zerlegt ihre Stange gleichmäßig in Stücke der Höhe $2,5$ cm, und bestreicht auf jedem Stück einseitig die runden Querschnitte mit Butter der Dicke $0,5$ mm.

1. Wer verwendet mehr Butter?
2. Wie viel Butter verwendet Lucy?
3. Wie viele Laugenstangen kann Lucy mit ihrer Methode bestreichen, wenn sie eine 250 Gramm Butterpackung zur Verfügung hat und wenn ein Kubikzentimeter Butter ein Gramm wiegt?

Aufgabe (2 Punkte)

In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe“. Analysiere diese Argumentation.

Aufgabe * (1 Punkt)

Drücke

$$\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K die invertierbaren Elemente, also Polynome P, für die es ein weiteres Polynom Q mit $PQ = 1$ gibt.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es gelte

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Folgt daraus, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?

Aufgabe * (3 Punkte)

Beweise den Satz über die Konvergenz der Exponentialreihe.

Aufgabe * (3 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2\,.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x+2| \leq \frac{1}{1000}\,,$$

dann ist

$$|f(x) - f(-2)| \leq \frac{1}{20}\,.$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise die *Produktregel* für differenzierbare Funktionen mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit.

Aufgabe * (6 (1+1+2+2) Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ und $g(y) = \frac{y^2}{y-1}$.

a) Bestimme die Ableitung von f und von g.

b) Berechne die Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$.

c) Bestimme die Ableitung von h direkt.

d) Bestimme die Ableitung von h mittels der Kettenregel.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 3x & -4y & +2z & +5w & = & 12 \\ x & +5y & -7z & +w & = & 1 \\ & +y & +z & +2w & = & 3 \\ & +3y & +2z & +w & = & 2\,. \end{array}$$

Aufgabe * (4 Punkte)

Es sei K der Körper mit zwei Elementen. Bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes des K^4.

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

für beliebiges $k \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Zuletzt bearbeitet vor einem Monat von Bocardodarapti

Wikiversity