Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/57/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\sum$
Punkte	3	3	3	2	2	4	3	4	0	4	4	4	0	0	4	3	3	4	3	53

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M.
2. Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.
3. Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
4. Die *eulersche Zahl e*.
5. Das *untere Treppenintegral* zu einer unteren Treppenfunktion s zu einer Funktion
$$f{:}\,I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
6. Der *Rang* einer linearen Abbildung
$$\varphi{:}\,V \longrightarrow W$$
zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.

Lösung

1. Man nennt die Menge
$$L \times M = \{(x,y) \mid x \in L,\, y \in M\}$$
die *Produktmenge* der Mengen L und M.

2. Zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ nennt man a den Realteil und b den Imaginärteil von z.
3. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung
   $$\vert x_n - x_m \vert \leq \epsilon$$
   gilt.
4. Die eulersche Zahl ist durch
   $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
   definiert.
5. Zur unteren Treppenfunktion
   $$s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt
   $$S := \sum_{i=1}^{n} s_i (a_i - a_{i-1})$$
   ein *unteres Treppenintegral* von f auf I.
6. Unter dem *Rang* einer linearen Abbildung φ versteht man
   $$\operatorname{rang} \varphi = \dim (\operatorname{bild} \varphi) .$$

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
2. Der Satz über die lineare Approximierbarkeit.
3. Der Satz über die Lösungsmenge zu einem linearen Gleichungssystem in Dreiecksgestalt über einem Körper K.

Lösung

1. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gelte
   $$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$r \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s \cdot (x - a) + r(x)(x - a).$$

3. Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m & \ldots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mm}x_m & \ldots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{matrix}$$

gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in K^{n-m}$.

Aufgabe (3 Punkte)

Karl trinkt eine Flasche Bier ($0{,}5$ Liter) mit einem Alkoholgehalt von 5 Prozent. 10 Prozent des getrunkenen Alkohols werden von seinem Blut aufgenommen, wobei er fünf Liter Blut hat (diese Gesamtmenge wird durch die Aufnahme nicht verändert). Wie viel Promille hat Karl, wenn er zuvor nüchtern war?

Lösung

In der Flasche befindet sich

$$0{,}5\,\mathrm{L} \cdot 0{,}05 = 0{,}025\,\mathrm{L}$$

Alkohol. Somit gehen

$$0{,}025\,\mathrm{L} \cdot 0{,}1 = 0{,}0025\,\mathrm{L}$$

in sein Blut. Der Anteil ist daher

$$\frac{0{,}0025}{5} = 0{,}0005\,.$$

Das sind $0{,}05$ Prozent bzw. $0{,}5$ Promille.

Aufgabe (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine natürliche Zahl, die man als Summe von vier Quadraten darstellen kann, aber nicht als Summe von drei Quadraten.

Lösung

Es ist

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$

darstellbar mit vier Quadraten. Die einzigen Quadrate unterhalb von 7 sind $0, 1, 4$. Die 0 trägt nicht zu einer minimalen Darstellung bei. Zweimal die 4 ist schon zu groß, daher gibt es keine Darstellung als Summe von drei Quadraten.

Aufgabe (2 Punkte)

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{3}$.

Lösung

Es ist

$$-44 = -\frac{132}{3}$$

und

$$-45 = -\frac{135}{3},$$

daher ist

$$-45 \leq -\frac{133}{3} < -44\,,$$

also ist

$$\left\lfloor -\frac{133}{3} \right\rfloor = -45\,.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass für positive natürliche Zahlen a,n,k die Beziehung

$$a^{(n^k)} = \underbrace{((\ldots((a^n)^n)^n \ldots)^n)^n}_{k \text{ Potenzierungen}}.$$

Lösung

Wir führen Induktion nach k (für beliebiges a,n). Bei

$$k=1$$

steht links

$$a^{(n^1)} = a^n$$

und rechts steht die einfache Potenzierung a^n, das stimmt also überein. Zum Induktionsschluss nehmen wir an, dass die Aussage für ein bestimmtes k schon bewiesen sei und wir müssen die entsprechende Aussage für $k+1$ zeigen. Unter Verwendung von Fakt ***** und der Induktionsvorausetzung ist

$$a^{(n^{k+1})} = a^{(n^k \cdot n)} = \left(a^{(n^k)}\right)^n = \left(\underbrace{((\ldots((a^n)^n)^n \ldots)^n)^n}_{k \text{ Potenzierungen}}\right)^n = \underbrace{(((\ldots((a^n)^n)^n \ldots)^n)^n)^n}_{k+1 \text{ Potenzierungen}},$$

was den Induktionsschritt beweist. Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage allgemein bewiesen.

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3\,.$$

Lösung

Ein Schnittpunkt liegt genau dann an den Stellen x vor, die eine Nullstelle von $P - Q$ sind. Es ist

$$P - Q = X^3 + 4X^2 - 7X + 1 - \left(X^3 - 2X^2 + 5X + 3\right) = 6X^2 - 12X - 2\,.$$

Wir normieren dieses quadratische Polynom und erhalten die Bedingung

$$X^2 - 2X - \frac{1}{3} = 0\,.$$

Die Lösungen dafür sind

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{3}}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{\frac{16}{3}}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4\sqrt{\frac{1}{3}}}{2} \\ &= 1 \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Dies sind die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

Lösung

Wir setzen $x_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Die Konvergenz der Reihe bedeutet die Konvergenz dieser Folge der Partialsummen. Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn es sich um eine Cauchyfolge handelt. Eine solche liegt vor, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 derart gibt, dass zu jedem

$$n \geq m \geq n_0$$

die Abschätzung

$$\vert x_n - x_m \vert \leq \epsilon$$

gilt. Im Reihenfall bedeutet dies einfach

$$\vert x_n - x_m \vert = \vert \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k \vert = \vert \sum_{k=m+1}^{n} a_k \vert \leq \epsilon$$

(die Verschiebung um 1 in der Indexmenge macht keinen Unterschied).

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 (3+1) Punkte)

Es sei

$$P = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + 1 \, .$$

1. Bestimme die kleinste positive Nullstelle von P.
2. Besteht ein Zusammenhang zwischen dieser Nullstelle und $\frac{\pi}{2}$?

Lösung

1. Wir lösen die biquadratische Gleichung, indem wir mit 24 multiplizieren und $y = x^2$ setzen. Es ist
   $$y^2 - 12y + 24 = (y-6)^2 - 36 + 24 = (y-6)^2 - 12 = 0$$
   zu lösen, also ist

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{12} + 6\,.$$

Dies ist in jedem Fall positiv und die kleinere Lösung ist

$$y = 6 - \sqrt{12}\,.$$

Somit ist

$$x = \sqrt{6 - \sqrt{12}}$$

die kleinste Nullstelle des Ausgangspolynoms.

2. Da die Kosinusreihe gleich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ist, handelt es sich bei dem angegebenen Polynom um eine polynomiale Approximation der Kosinusfunktion. Da $\pi/2$ die kleinste positive Nullstelle des Kosinus ist, besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen den beiden Zahlen.

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $y - 3x + 1 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(-2, 3)$ und den Radius 4 gegeben ist.

Lösung

Die Kreisgleichung ist

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16\,.$$

Wir lösen die Geradengleichung nach y auf und erhalten

$$y = 3x - 1\,.$$

Dies setzen wir in die Kreisgleichung ein und erhalten

$$(x+2)^2 + (3x-4)^2 = x^2 + 4x + 4 + 9x^2 - 24x + 16 = 16\,,$$

also

$$10x^2 - 20x + 4 = 0$$

bzw.

$$x^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0 \, .$$

Somit ist

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{2}{5}}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{12}{5}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \, .$$

Bei

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ist

$$y_1 = 3\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right) - 1 = 2 + 3\sqrt{\frac{3}{5}} \, ,$$

der erste Schnittpunkt ist also

$$P_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}, 2 + 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \, .$$

Bei

$$x_2 = 1 - \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ist

$$y_2 = 3\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) - 1 = 2 - 3\sqrt{\frac{3}{5}} \, ,$$

der zweite Schnittpunkt ist also

$$P_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}, 2 - 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \, .$$

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise die *Produktregel* für differenzierbare Funktionen mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit.

Lösung

Wir gehen von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus, wobei die Bedingungen aus der linearen Approximierbarkeit erfüllt sein sollen, und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad + (f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) + s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 10.10 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{matrix} 2x & +3y & -z & +w & = & 2 \\ 2x & -y & -2z & +w & = & 0 \\ -x & +y & +z & & = & -2 \\ x & +2y & +5z & & = & 3\,. \end{matrix}$$

Lösung

Wir eliminieren zuerst die Variable w, indem wir die zweite von der ersten Gleichung subtrahieren. Dies führt auf

$$\begin{matrix} & +4y & +z & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & -2 \\ x & +2y & +5z & = & 3\,. \end{matrix}$$

Nun eliminieren wir die Variable x, indem wir die zweite Gleichung mit der dritten Gleichung addieren. Dies führt auf

$$\begin{matrix} +4y & +z & = & 2 \\ +3y & +6z & = & 1\,. \end{matrix}$$

Mit $-6I+II$ ergibt sich

$$-21y=-11$$

und

$$y=\frac{11}{21}\,.$$

Rückwärts gelesen ergibt sich

$$z=-\frac{2}{21}\,,$$
$$x=\frac{17}{7}$$

und

$$z=-\frac{95}{21}\,.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes des $\mathbb{R}^4$.

Lösung

Die Summe der vier Vektoren ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daher gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu dem von den Vektoren erzeugten Untervektorraum. Daher gehören auch die Differenzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also die Standardvektoren, zu dem erzeugten Untervektorraum. Daher wird der ganze $\mathbb{R}^4$ erzeugt und die Dimension ist 4.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien

n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
2. $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
3. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Lösung Vektorraum/Dimension n und n Vektoren/Begriffsgleichheit/Fakt/Beweis/Aufgabe /Lösung

Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die Determinante von

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2-5}{x+3} & \frac{x^3-7}{2x} \\ \frac{x^2+1}{x^2-4x} & \frac{3x^2-x}{x^2-3} \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{R}(X)$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \frac{x^2-5}{x+3} & \frac{x^3-7}{2x} \\ \frac{x^2+1}{x^2-4x} & \frac{3x^2-x}{x^2-3} \end{pmatrix} &= \frac{x^2-5}{x+3} \cdot \frac{3x^2-x}{x^2-3} - \frac{x^3-7}{2x} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-4x} \\ &= \frac{x\left(3x^3-x^2-15x+5\right)}{x^3+3x^2-3x-9} - \frac{x^5+x^3-7x^2-7}{2x^2(x-4)} \\ &= \frac{x^3(2x-8)\left(3x^3-x^2-15x+5\right) - \left(x^5+x^3-7x^2-7\right)\left(x^3+3x^2-3x-9\right)}{2x^2(x-4)(x^3+3x^2-3x-9)} \\ &= \frac{2x^3\left(3x^4-13x^3-11x^2+65x-20\right) - \left(x^8+3x^7-2x^6-13x^5-24x^4+5x^3+42x^2+21x+63\right)}{2x^2(x^4-x^3-15x^2+3x+36)} \\ &= \frac{-x^8+3x^7-24x^6-9x^5+154x^4-45x^3-42x^2-21x-63}{2x^6-2x^5-30x^4+6x^3+72x^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es dann nur endlich viele Eigenwerte zu φ gibt.

Lösung

Es sei

$$n = \dim(V) \, .$$

Wir nehmen an, dass es unendlich viele Eigenwerte gibt. Dann gibt es insbesondere $n+1$ Eigenwerte

$$a_1 , \ldots , a_{n+1}$$

und zugehörige Eigenvektoren

$$v_1 , \ldots , v_{n+1} .$$

Nach Lemma 27.14 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) sind diese linear unabhängig, das widerspricht aber dem Basisaustauschsatz.