Prof. Dr. M. Chimani
L. Enz, J. Kirstein, T. Oelschlägel, F. Stutzenstein, N. Troost
https://kreuzerl.tcs.uos.de

Universität Osnabrück
Theoretische Informatik
Sommersemester 2020

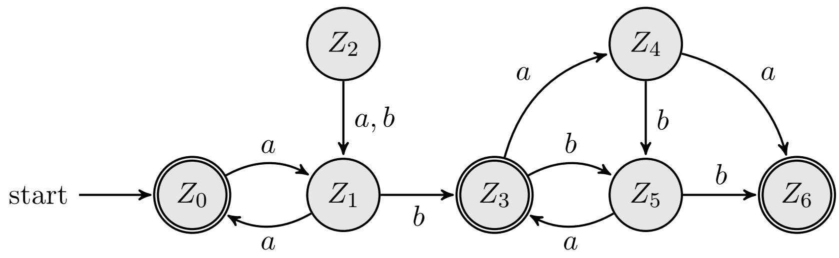
Übungsblatt 4 zur Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 15. Mai 2020 Kreuzerl-Deadline: 24. Mai 2020

Die Aufgaben auf diesem Blatt beziehen sich auf den Vorlesungsstoff bis inklusive Kapitel 4.4.

Aufgabe 4.1 DEA → RegEx

Gegeben der folgende DEA. Wandeln Sie ihn – gemäß dem Vorgehen aus der Vorlesung! – in einen regulären Ausdruck um.



Aufgabe 4.2 Pumping Lemma: Wortmindestlänge

Sie kennen den Text „Es gibt eine Zahl $n := n(L)$ ...“ vom Pumping Lemma für reguläre Sprachen. Die folgenden Sprachen L_i sind regulär. Geben Sie für jede Sprache die *minimale* Wortmindestlänge $n(L_i)$ an, sodass die Aussage des Pumping Lemmas für diese Wortmindestlänge erfüllt ist. Begründen Sie Ihre Wahl der Wortmindestlänge und argumentieren Sie, warum das Pumping Lemma dafür erfüllt ist.

(a) $L_1 :=$ {Bletschn, Breslfetzn, Bunki, Dschumpas, Giggölar, Grifflbüx, Gstaudach, Harpfm, Hodach, Legwa, Lodiridari, Oahandl, Reibn, Schochn, Strankalan, Tschinelle, Tschocherl, Tschuppar, Woinba}.

(b) $L_2 := \Sigma^* \setminus \{x\triangle^{17}y \mid x, y \in \Sigma^*\}$ wobei $\Sigma := \{\bigcirc, \square, \triangle\}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass z. B. $\triangle^{16}\bigcirc\triangle^{16} \in L_2$.

Aufgabe 4.3 Pumping Lemma

Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

(a) $L_1 = \{♪^i 𝅗𝅥^{2i} \mid i \geq 0\}$ **(b)** $L_2 = \{♪^i 𝅗𝅥^j \mid 0 \leq i \leq j\}$ **(c)** $L_3 = \{♩^{(k^2)} \mid k \geq 0\}$

Aufgabe 4.4 Endlicher Automat mit Ausgabe, Ternäre Summe

Seien $x = (x_{n-1}x_{n-2}\dots x_2x_1x_0)_3$ und $y = (y_{n-1}y_{n-2}\dots y_2x_1y_0)_3$ ternär kodierte Zahlen, d. h. $x_i \in \{0,1,2\}$ und $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 3^i$ (y ebenso). Beispiel: $(112)_3 = 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 = 14$.

Wir erweitern DEAs so, dass bei jedem Übergang ein Zeichen oder ε ausgegeben wird. Geben Sie einen solchen endlichen Automaten an, der eine Eingabe

$$w = x_0y_0x_1y_1x_2y_2\dots x_{n-1}y_{n-1}\#$$

akzeptiert. Dabei soll die Ausgabe die ternär kodierte Zahl $x + y$ in der gleichen Darstellung (d. h. Least Significant Trit zuerst) sein. Wenn der Automat nicht akzeptiert, ist die Ausgabe beliebig.

Beispiel: Der DEA soll für Eingabe $w =$ `1220211120`$\#$ die Ausgabe `001001` erzeugen.

Anmerkung zur Notation: Schreiben Sie das auszugebende Zeichen an die Kante neben das zu lesende Symbol. Soll bei einem Übergang kein Zeichen ausgegeben werden, geben Sie das Leerwort ε aus. Das Bild unterhalb bezeichnet also einen Übergang von Zustand Z_1 zu Zustand Z_2, der ausgeführt wird, wenn das Symbol a gelesen wird. Beim Benutzen dieses Übergangs wird b als nächstes Zeichen der Ausgabe (das ist nicht die Eingabe!) geschrieben.

$$Z_1 \xrightarrow{a/b} Z_2$$

Aufgabe 4.5 Nicht-Regularität durch Abschlusseigenschaften

Das folgende Theorem definiert eine weitere Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen.

Theorem (Substitution): Seien $L_0, L_1, L_2, \ldots$ Sprachen. Sei Σ_0 das Alphabet von L_0 und $h\colon \Sigma_0 \to \{L_1, L_2, \ldots\}$ eine Funktion. Wir bezeichnen mit $h(L_0)$ die Sprache, die aus Wörtern $w \in L_0$ entsteht, wenn jedes Symbol a in w durch ein beliebiges Wort aus $h(a)$ ersetzt wird. Wenn $L_0, L_1, L_2, \ldots$ reguläre Sprachen sind, ist auch $h(L_0)$ regulär.

Beispiel: Seien $L_0 \coloneqq \mathcal{L}(aba^*)$, $L_1 \coloneqq \mathcal{L}(cc^+|d)$ und $L_2 \coloneqq \mathcal{L}(ab)$. Auch sei $h\colon \{a,b\} \to \{L_1, L_2\}$ gegeben durch $h(a) = L_1, h(b) = L_2$. Damit ist z.B. das Wort $ccccc\,ab\,cc\,d\,ccc\,d \in h(L_0)$, da $abaaaa \in L_0$. Das Theorem besagt, dass $h(L_0)$ regulär ist.
Bonusfrage: Welcher reguläre Ausdruck beschreibt $h(L_0)$?

Aufgabe: Betrachten Sie die Sprache $L = \{c^ja^ib^i \mid i,j \geq 0\} \cup \{a^jb^i \mid i,j \geq 0\}$.

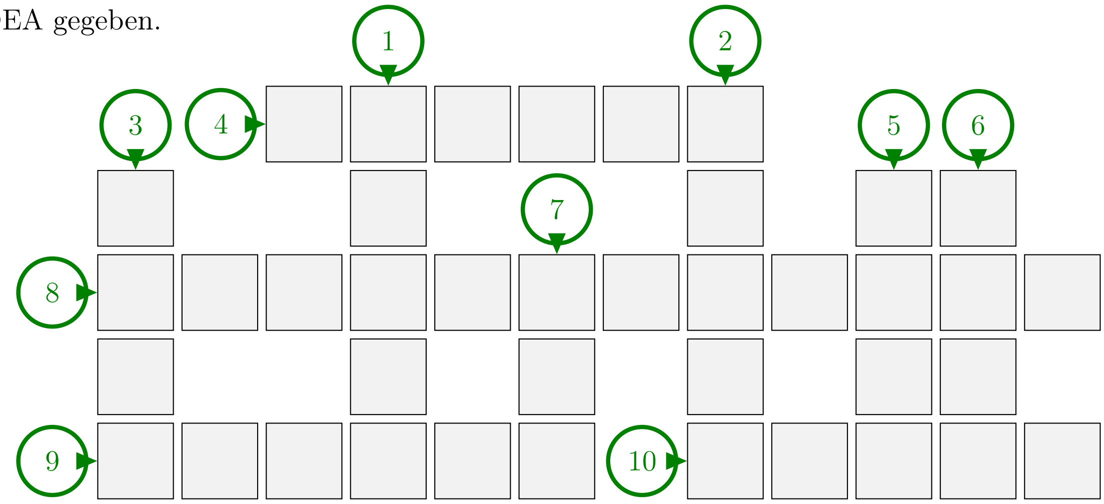
Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass das Pumping Lemma nicht stark genug ist, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist. Die Tatsache, *dass* L nicht regulär ist, haben wir allerdings nur grob argumentiert (weil die nicht-reguläre Sprache a^ib^i mit c^*-Präfixen enthalten ist).

Benutzen Sie Ihr Wissen um die *Abschlusseigenschaften* der regulären Sprachen, um formal die Nicht-Regularität von L zu beweisen. Benutzen Sie dabei *nicht* das Pumping Lemma, sondern nur das Wissen, dass $\{a^ib^i \mid i \geq 0\}$ nicht regulär ist.

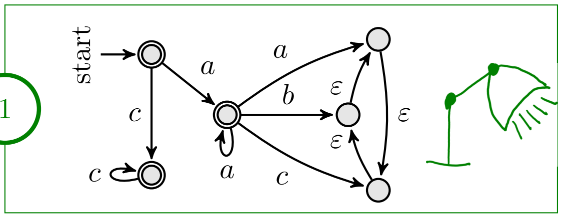
Hinweis: Nehmen Sie in dem Beweis zunächst an, dass L regulär wäre. Wenden Sie dann Abschlusseigenschaften aus der Vorlesung an, um zu einem Widerspruch zu gelangen.

Aufgabe 4.6 Kreuzworträtsel, Endliche Automaten

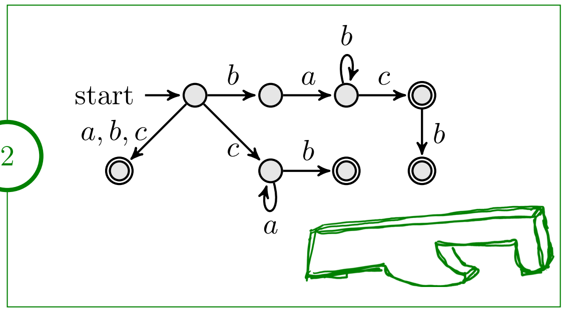
Lösen Sie das folgende Kreuzworträtsel. Jedes Wort ist durch seinen akzeptierenden DEA oder NDEA gegeben.



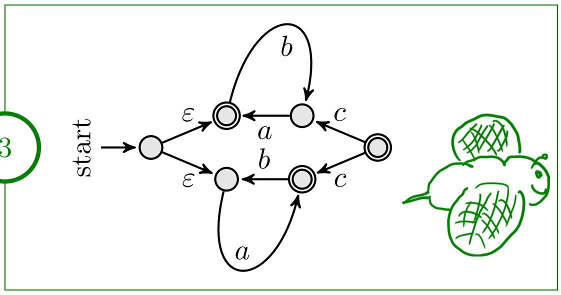
1



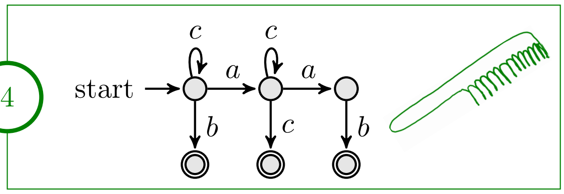
2



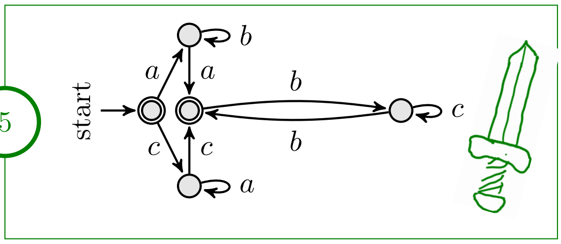
3



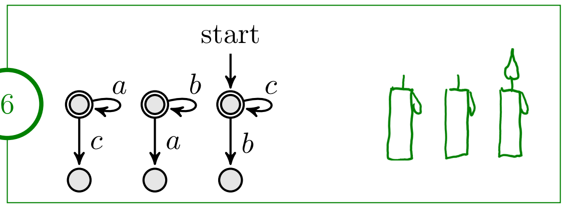
4



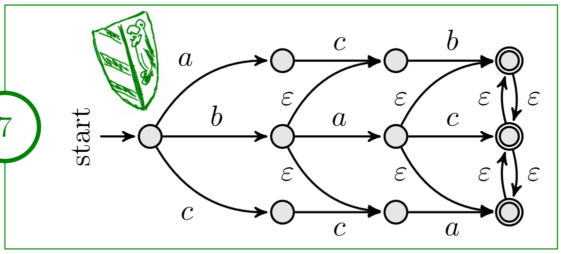
5



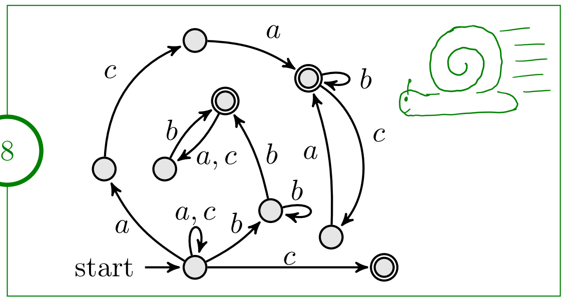
6



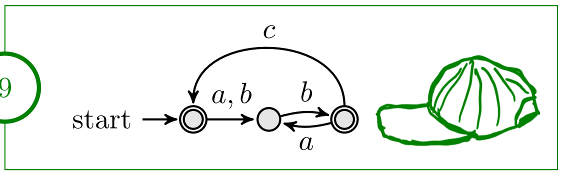
7



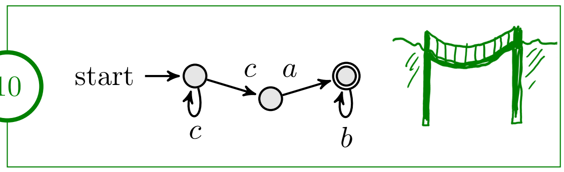
8



9



10



Emek olmadan yemek olmaz.