Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/56/Klausur mit Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	0	2	5	1	2	3	3	10	4	2	3	0	3	4	3	0	3	54

Aufgabe (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
2. Ein *Polynom* über einem Körper K in einer Variablen X.
3. Das *Maximum* der Funktion
   $$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$
   wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.
4. Eine *Treppenfunktion*
   $$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Eine *Linearkombination* in einem K-Vektorraum.
6. Die *geometrische Vielfachheit* von einem Eigenwert λ zu einer linearen Abbildung
   $$\varphi: V \longrightarrow V$$
   auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Lösung

1. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge

L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.

2. Ein Ausdruck der Form
$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$
mit $a_i \in K \text{ und } n \in \mathbb{N}$

heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

3. Man sagt, dass f in $x \in M$ das Maximum annimmt, wenn
$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt.}$$

4. Eine Funktion
$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$
von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

5. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor
$$s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n \text{ mit } s_i \in K$$
eine *Linearkombination* dieser Vektoren

6. Man nennt
$$\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$$
die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts.

Aufgabe (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Abbildung
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt

$x \in D$.

2. Die wichtigsten Eigenschaften des natürlichen Logarithmus.

3. Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion*.

Lösung

1. Für $f\colon D \rightarrow \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.
    1. f ist stetig im Punkt x.
    2. Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.
2. Der natürliche Logarithmus
$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$
ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ stiftet. Dabei gilt
$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.
3. Es sei $f\colon [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$
eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist.

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

Lösung

Multiplikation liefert

$$573 \cdot 4322 = 2476506 \text{ und } 1234 \cdot 2007 = 2476638.$$

Daher ist

$$\frac{573}{1234} \leq \frac{2007}{4322}$$

und damit ist

$$p = \frac{573}{-1234} = \frac{-573}{1234} \geq \frac{-2007}{4322} = q.$$

Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Lösung

Die Körpereigenschaften für die komponentenweise definierte Addition sind klar, da die entsprechenden Eigenschaften für $\mathbb{R}$ gelten. Es ist

$$1 \cdot (a + b\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i}\,,$$

somit ist die 1 das neutrale Element der Multiplikation. Die Kommutativität der Multiplikation ist ebenfalls von der Formel her klar. Zum Nachweis der Assoziativität der Multiplikation berechnen wir

$$\begin{aligned} ((a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}))(e+f\mathrm{i}) &= (ac-bd+(bc+ad)\mathrm{i})(e+f\mathrm{i}) \\ &= (ac-bd)e-(bc+ad)f+((ac-bd)f+(bc+ad)e)\mathrm{i} \\ &= ace-bde-bcf-adf+(acf-bdf+bce+ade)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} (a+b\mathrm{i})((c+d\mathrm{i})(e+f\mathrm{i})) &= (a+b\mathrm{i})(ce-df+(cf+de)\mathrm{i}) \\ &= a(ce-df)-b(cf+de)+(b(ce-df)+a(cf+de))\mathrm{i} \\ &= ace-adf-bcf+-bde+(bce-bdf+acf+ade)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Wenn

$$a + b\mathrm{i} \neq 0$$

ist, so ist mindestens eine der Zahlen a oder b von 0 verschieden und damit ist $a^2 + b^2 > 0$. Somit ist $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl und es gilt

$$(a+b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a^2+b^2\right) = 1\,,$$

also besitzt jedes Element $\neq 0$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation. Das Distributivgesetz folgt aus

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}+e+f\mathrm{i}) &= (a+b\mathrm{i})((c+e)+(d+f)\mathrm{i}) \\ &= a(c+e)-b(d+f)+(a(d+f)+b(c+e))\mathrm{i} \\ &= ac+ae-bd-bf+(ad+af+bc+be)\mathrm{i} \\ &= ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}+ae-bf+(af+be)\mathrm{i} \\ &= (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})+(a+b\mathrm{i})(e+f\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Aufgabe (1 Punkt)

Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$3x \geq -8$$

und

$$7x \leq 10$$

über $\mathbb{Q}$.

Lösung

Die Bedingungen bedeuten

$$x \geq -\frac{8}{3}$$

und

$$x \leq \frac{10}{7},$$

die Lösungsmenge ist also das Intervall $[-\frac{8}{3}, \frac{10}{7}]$.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + \frac{4}{3} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{3} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{-27+16}{12} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Da der quadratische Term links stets ≥ 0 ist, ist $-\frac{11}{12}$ der minimale Wert der Funktion.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in K_+$. Sei $u \in K_+$, $d = c \cdot u^2$, $y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0. Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n, wobei die Induktionsvoraussetzung direkt durch die Wahl des Startwerts gesichert ist. Es gelte also

$$y_n = ux_n \, .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{y_n + \frac{d}{y_n}}{2} \\ &= \frac{ux_n + \frac{u^2c}{ux_n}}{2} \\ &= \frac{ux_n + u \cdot \frac{c}{x_n}}{2} \\ &= u \cdot \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2} \\ &= u \cdot x_{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Standardparabel.

Lösung

Die Standardparabel ist durch die Gleichung

$$y = x^2$$

und der Einheitskreis ist durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

gegeben. Die Schnittpunkte müssen beide Gleichungen simultan erfüllen. Wir ersetzen mit der ersten Gleichung x^2 in der zweiten Gleichung und erhalten

$$y^2 + y - 1 = 0\,.$$

Also ist

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Für das negative Vorzeichen ergibt sich keine Quadratwurzel, also ist

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

und

$$x = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\,.$$

Die beiden Schnittpunkte sind also $\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Aufgabe weiter

Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1},$$

die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ falls } x \leq 2, \\ \frac{x}{2}, \text{ falls } x > 2, \end{cases}$$

definiert ist.

1. Skizziere den Graphen der Funktion.
2. Zeige, dass f wohldefiniert ist.
3. Bestimme die Fixpunkte von f.
4. Bestimme die Fixpunkte von der Hintereinanderschaltung $f \circ f$.
5. Zeige, dass f stetig ist.
6. Was hat die Abbildung mit der Halbierung eines Blatt Papieres zu tun?

Lösung

1.
2. Es ist lediglich zu zeigen, dass die Werte der Funktion wieder ≥ 1 sind. Bei

$$1 \leq x \leq 2$$

ist

$$1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$$

und damit

$$f(x) = \frac{2}{x} \geq 1 \, ,$$

bei

$$x \geq 2$$

ist ebenfalls

$$f(x) = \frac{x}{2} \geq 1 \, .$$

3. Bei $x \leq 2$ lautet die Bedingung für einen Fixpunkt $\frac{2}{x} = x$, was in diesem Abschnitt zur einzigen Lösung $x = \sqrt{2}$ führt. Im anderen Bereich gibt es keine Lösung.
4. Für x zwischen 1 und $\sqrt{2}$ ist auch

$$f(x) = \frac{2}{x} \leq 2$$

und damit ist in diesem Bereich

$$f(f(x)) = \frac{2}{\frac{2}{x}} = x \, ,$$

diese Zahlen sind somit allesamt Fixpunkte der Hintereinanderschaltung. Bei x mit

$$2 < x \geq 4$$

ist

$$f(x) = \frac{x}{2} \geq 2$$

und somit

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\frac{x}{2}} = \frac{4}{x} < 2 \, ,$$

in diesem Bereich besitzt die Hintereinanderschaltung also keinen Fixpunkt. Bei

$$x > 4$$

ist

$$f(f(x)) = \frac{x}{4}$$

und es gibt keinen Fixpunkt.

5. Auf den beiden Abschnitten handelt es sich um rationale Funktionen, die stetig sind, und bei $x = 2$ haben beide Ausdrücke den Wert 1.

6. Zu einem Blatt Papier sei das Verhältnis der längeren Seite zur kürzeren (eventuell gleichlangen) Seite mit x bezeichnet. Es liegt also das Verhältnis x zu 1 vor. Wenn das Blatt an der langen Seite halbiert wird, so sid die neuen Seitenlängen $\frac{x}{2}$ und 1. Wenn

$$\frac{x}{2} \geq 1$$

ist, was genau bei

$$x \geq 2$$

der Fall ist, so ist das Verhältnis lange Seite zu kurzer Seite des halbierten Blattes gleich $\frac{x}{2}$.

Aufgabe (4 Punkte)

Von einem Rechteck sind der Umfang U und die Fläche A bekannt. Bestimme die Längen der Seiten des Rechtecks.

Lösung

Zwei Seiten haben die Länge a, zwei andere Seiten die Länge b; gegebenenfalls ist $a = b$. Es gilt $U = 2a + 2b$ und $A = ab$.

Auflösen der ersten Gleichung nach b ergibt $b = \frac{U}{2} - a$. Einsetzen in die zweite Gleichung: $A = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = a\frac{U}{2} - a^2$. Umstellen in die Normalform einer quadratischen Gleichung: $a^2 - \frac{U}{2}a + A = 0$.

Man beachte, dass der Wert unter der Wurzel nie negativ wird und nur für den Spezialfall eines Quadrats null wird: Alle allgemeinen Rechtecke haben im Verhältnis zum Quadrat bei gleicher Fläche einen größeren Umfang.

Also hat diese Gleichung typischerweise zwei Lösungen für a, nämlich $\frac{U}{4} \pm \sqrt{\frac{U^2}{16} - A}$. Eine der beiden Lösungen ist dann a, die andere ist b. Wenn unter der Wurzel der Wert null steht, hat man ein Quadrat und es gibt nur eine Lösung $a = b = U/4$.

Aufgabe (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Regel von Hospital. Die Ableitung der Zählerfunktion ist

$$(x-1)' = 1$$

und die Ableitung der Nennerfunktion ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Die Funktion $\frac{1}{x}$ hat keine Nullstelle in einer offenen Ungebung von 1. Daher ist Hospital anwendbar und es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1.$$

Aufgabe (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr.$$

Lösung

Mit der Substitution $r = \sin s$ ist

$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin s}{\cos s} \cos s ds = \int_0^{\pi/2} \sin s ds = (-\cos s)|_0^{\pi/2} = 1.$$

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Lösung

Die Hintereinanderschaltung der Drehung um den Winkel x und der Drehung um den Winkel y ist die Drehung um den Winkel $x+y$. Nach Lemma 25.5 (Mathematik für Anwender (Osnabrück 2019-2020)) wird diese Hintereinanderschaltung durch das Matrixprodukt der beiden Drehmatrizen beschrieben. Somit ist aufgrund einer einfachen Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y & -\cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y \\ \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y & \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Betrachten der Komponenten in der ersten Spalte ergibt die Behauptung.

Aufgabe (4 Punkte)

Beweise das Eliminationslemma für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in n Variablen über einem Körper K.

Lösung

Durch Umnummerieren kann man $x=x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i = d\,.$$

Dann hat die Gleichung

$$H' = H - \frac{c}{a} G$$

die Gestalt

$$\sum_{i=2}^{n} \left(c_i - \frac{c}{a} a_i \right) x_i = d - \frac{c}{a} b\,,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a} G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent.

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
2. $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
3. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Lösung Vektorraum/Dimension n und n Vektoren/Begriffsgleichheit/Fakt/Beweis/Aufgabe /Lösung

Aufgabe (0 Punkte)

Lösung /Aufgabe/Lösung

Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung auf dem K-Vektorraum V, es seien $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ und es sei $a \operatorname{Id}_V$ die Streckung zu a. Zeige, dass b genau dann ein Eigenwert zu φ ist, wenn ab ein Eigenwert zur Hintereinanderschaltung $a \operatorname{Id}_V \circ \varphi$ ist.

Lösung

Sei b ein Eigenwert zu φ. Dann gibt es einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, mit

$$\varphi(v) = bv\,.$$

Dann ist

$$(a \operatorname{Id}_V \circ \varphi)(v) = a\varphi(v) = abv\,.$$

Dies bedeutet, dass ab Eigenwert zu $a \operatorname{Id}_V \circ \varphi$ ist. Wegen

$$a^{-1} \operatorname{Id}_V \circ a \operatorname{Id}_V \circ \varphi = \varphi$$

gilt auch die andere Implikation.