Kurs:Mathematik für Anwender/Teil I/53/Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
Punkte	3	3	2	2	2	4	2	3	3	3	5	4	0	2	5	3	4	1	3	54

Aufgabe * (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

1. Eine *wachsende* Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.

3. Ein *lokales Maximum* einer Funktion

   $$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

   ($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) in einem Punkt $x \in D$.

4. Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

   $$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

5. Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.

6. Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix M.

Aufgabe * (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

1. Der *Satz über die stetige Umkehrfunktion*.

2. Die *Taylor-Abschätzung*.

3. Der Satz über die Existenz von Basen in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V.

Aufgabe * (2 Punkte)

Die Absetzmulde ist voll mit Schutt und soll durch eine leere Mulde ersetzt werden, die das Absetzkipperfahrzeug bringt, das auch die volle Mulde mitnehmen soll. Auf dem Fahrzeug und auf dem Garagenvorplatz, wo die volle Mulde steht, ist nur Platz für eine Mulde. Dafür kann die Straße als Zwischenablage genutzt werden. Wie viele Ladevorgänge sind vor Ort nötig, bis der Gesamtaustausch vollständig abgeschlossen ist?

Aufgabe * (2 (1+1) Punkte)

Ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

1. injektiv?
2. surjektiv?

Aufgabe * (2 Punkte)

Lucy Sonnenschein befindet sich in Position $(-2, 3) \in \mathbb{Z}^2$ (die Koordinaten seien mit x und y bezeichnet) und schaut in die positive x-Richtung. Alle folgenden Angaben beziehen sich auf ihre jeweilige Position und ihre Ausrichtung, der Uhrzeigersinn bezieht sich auf die Draufsicht. Lucy führt hintereinander folgende Bewegungen aus. Sie macht einen Schritt nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, sie dreht sich um 180 Grad, macht drei Schritte nach links, macht eine Vierteldrehung im Uhrzeigersinn, macht vier Schritte nach rechts und zwei Schritte nach hinten, dreht sich um 360 Grad und macht einen Schritt nach links.

Wo befindet sie sich nach der Gesamtbewegung und in welche Richtung schaut sie?

Aufgabe * (4 Punkte)

Bestimme die Lösungsintervalle für die Ungleichung

$$|2x-3| \geq |5x-7|$$

in einem angeordneten Körper. Skizziere die Graphen der Funktionen $|2x-3|$ und $|5x-7|$.

Aufgabe * (2 Punkte)

Es sei

$$\varphi(x) = 3x^2 - 7x + 5\,.$$

Bestimme $\varphi\left(u^2 - 2v\right)$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-2) = 3,\ f(0) = 2,\ f(1) = 4.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Vergleiche

$$\sqrt{3} + \sqrt{7} \ \text{ und } \ \sqrt{4} + \sqrt{6}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Summenfolge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \to \infty} y_n \right)$$

ist.

Aufgabe * (5 Punkte)

Man gebe explizit ein m mit der Eigenschaft an, dass für alle $n \geq m$ die Abschätzung

$$1,03^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise den Satz von Rolle.

Aufgabe (0 Punkte)

Aufgabe * (2 Punkte)

Finde den oder die Fehler im folgenden „Beweis“ für die Aussage, dass man zu zwei stetigen Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine Stammfunktion zu fg finden kann, indem man (geeignete) Stammfunktionen zu f und zu g miteinander multipliziert.

„Es sei F eine Stammfunktion zu f und G eine Stammfunktion zu g, die wir beide positiv wählen, was wegen der Positivität von f und g möglich ist. Für positive Zahlen ist der natürliche Logarithmus definiert, so dass man diese Funktionen mit dem Logarithmus verknüpfen kann. Dann ist $\ln F$ eine Stammfunktion von $\ln f$ und $\ln G$ eine Stammfunktion von $\ln g$. Nach der Additionsregel für Stammfunktionen ist somit $\ln F + \ln G$ eine Stammfunktion von $\ln f + \ln g$. Wir wenden auf diese Situation die Umkehrfunktion des Logarithmus, also die Exponentialfunktion an, und erhalten mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass

$$\exp(\ln F + \ln G) = \exp(\ln F) \cdot \exp(\ln G) = F \cdot G$$

eine Stammfunktion von

$$\exp(\ln f + \ln g) = \exp(\ln f) \cdot \exp(\ln g) = f \cdot g$$

ist."

Aufgabe * (5 Punkte)

Wir betrachten die drei Ebenen E, F, G im $\mathbb{Q}^3$, die durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden.

1.
$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - 4y + 3z = 2 \right\},$$

2.
$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 7x - 5y + 6z = 3 \right\},$$

3.
$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x - y + 4z = 5 \right\}.$$

Bestimme sämtliche Punkte $E \cap F \setminus E \cap F \cap G$.

Aufgabe * (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(8)\quad (r+s)u = ru + su$$

erfüllt.

Aufgabe * (4 Punkte)

Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe * (1 Punkt)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3-\pi & 2-3\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} & 4\pi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe * (3 Punkte)

Bestimme, welche der folgenden elementargeormetrischen Abbildungen linear, welche trigonalisierbar und welche diagonalisierbar sind.

1. Die Achsenspiegelung durch die durch $4x - 7y = 5$ gegebene Achse.

2. Die Scherung, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

3. Die Punktspiegelung mit dem Ursprung als Zentrum.

4. Die Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.