Mathématiques discrètes

Chapitre 4 : relations binaires

---

1. Généralités

Définition Soient $E_1, E_2, \ldots E_n$ des ensembles. Une *relation n-aire* est la donnée d'un sous-ensemble de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Autrement dit, c'est la donnée d'un ensemble de n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Une manière de représenter une relation n-aire est de donner la liste des n-uplets dans un tableau ayant n colonnes. Cette notion est utilisée en informatique pour les bases de données relationnelles.

Exemple 1

Spectacle	*Genre*	*Lieu*
West Side Story	*Musique*	*Zénith*
Carmen	*Musique*	*Capitole*
Don Juan	*Théâtre*	*Capitole*
Julio Iglesias	*Musique*	*Zénith*

Ici $n = \ldots$.

Les ensembles considérés sont

Dans ce cours, nous allons nous intéresser au cas $n = 2$, et lorsque les deux ensembles sont identiques.

Définition Soit E un ensemble. On appelle *relation binaire* sur l'ensemble E une proposition qui est vraie pour certains couples $(x, y) \in E \times E$ et fausse pour les autres. Le *graphe* de la relation binaire $\mathcal{R}$ est l'ensemble $G_\mathcal{R}$ des couples $(x, y) \in E \times E$ tels que $x\mathcal{R}y$:

$$G_\mathcal{R} = \{(x, y) \in E \times E \,|\, x\mathcal{R}y\}.$$

La donnée du graphe d'une relation binaire est équivalente à la donnée de la relation binaire.

Notation : Si $\mathcal{R}$ est la relation, $x \in E$ et $y \in E$, on écrit $x\mathcal{R}y$ si x est en relation avec y.

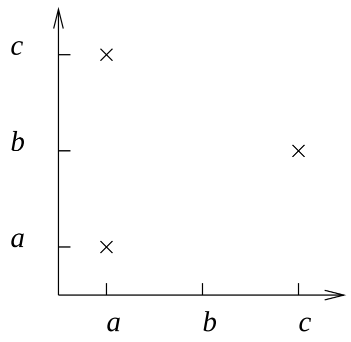
Exemples 2

- $E = \mathbf{R}$, *et* $x\mathcal{R}y$ *ssi* $x \leq y$.
- $E = \mathbf{N}$, *et* $x\mathcal{R}y$ *ssi* $y = 2x$.
- $E = \mathbf{N}$, *et* $n\mathcal{R}m$ *ssi* n *divise* m.
- $E = \mathbf{Z}$, *et* $a \equiv b\,[5]$ *ssi* $b - a$ *est un multiple de* 5.

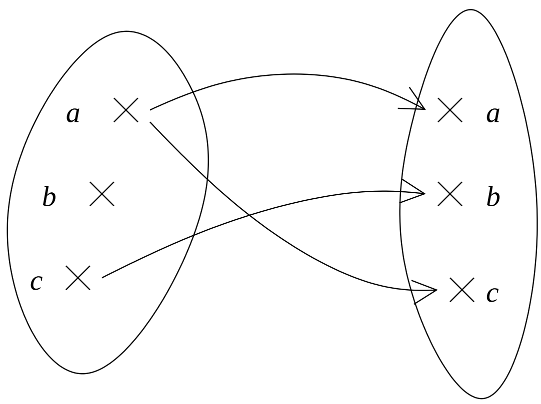
Représentations (lorsque l'ensemble E est fini)
Illustrons par l'exemple simple suivant, avec $E = \{a, b, c\}$ et $G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, c), (c, b)\}$.
• liste dans un tableau (comme ci-dessus dans l'exemple 1, utilisé en informatique mais rarement en mathématiques)

E	E
a	a
a	c
c	b

• diagramme cartésien :



• diagramme sagittal :



• matrice d'incidence :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice de cours 1.
On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et la relation binaire $\mathcal{R}$ donnée par son graphe

$$G_{\mathcal{R}} = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 3)\}.$$

Donner la représentation de $\mathcal{R}$ sous forme de liste, de diagramme sagittal et de matrice d'incidence.

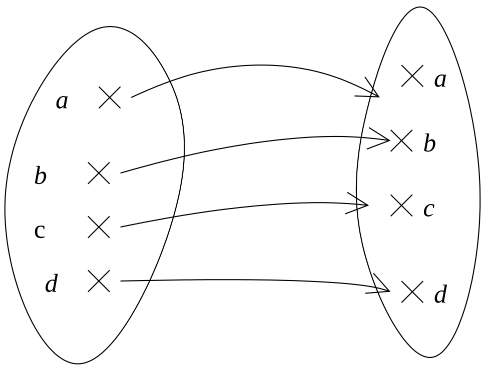
Propriétés des relations binaires
Définition Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E.

- $\mathcal{R}$ est *réflexive* si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est *symétrique* si $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x\mathcal{R}y \to y\mathcal{R}x)$.
- $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* si $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \to x = y$.
- $\mathcal{R}$ est *transitive* si $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \to x\mathcal{R}z$.

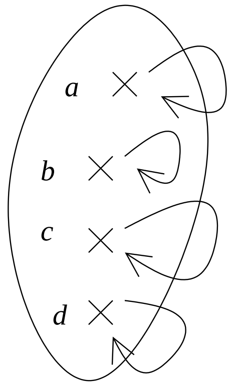
Exemples 3

$E = \{a, b, c, d\}$.

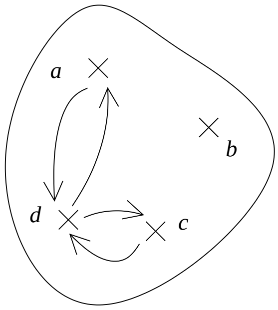
Convention : pour simplifier on ne représente qu'une fois E sur le diagramme sagittal.



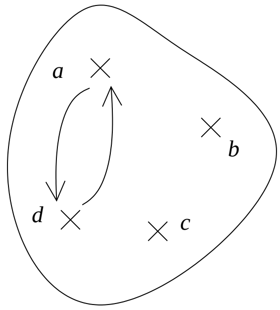
simplifié en



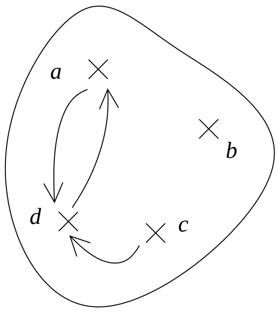
- réflexive.



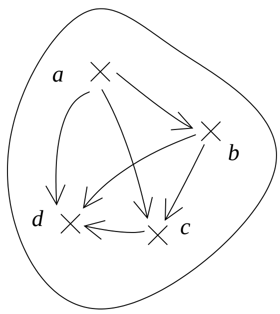
symétrique.



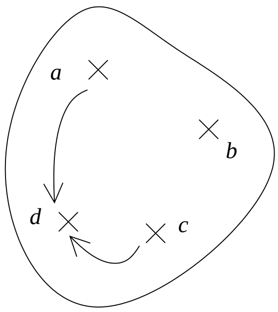
non antisymétrique car $a\mathcal{R}d$ et $d\mathcal{R}a$ et $a \neq d$.



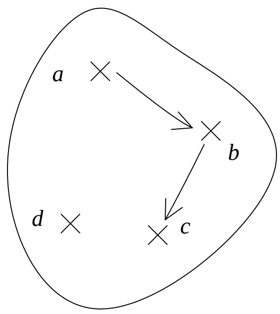
non symétrique car $c\mathcal{R}d$ mais $d \not\mathcal{R} c$.



transitive.

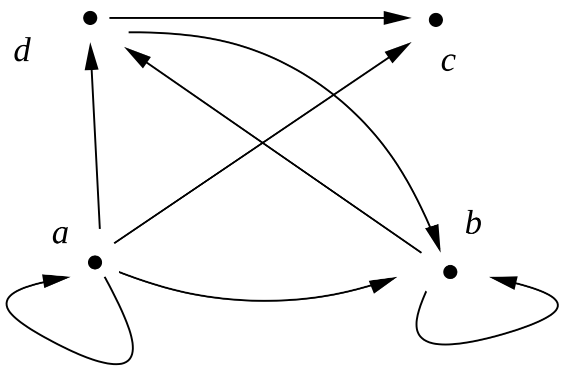


antisymétrique : si $x \neq y$ alors on n'a pas simultanément $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.



non transitive car $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$ mais $a \not\mathcal{R} c$.

Exercice de cours 2.
On considère la relation binaire donnée par le diagramme sagittal suivant. Déterminer sa matrice d'incidence et ses propriétés.



Exercice de cours 3.
Soit $E = \{0, 1, 4, 7, 8, 11\}$.
a) Représenter le diagramme sagittal de la relation binaire définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x + y \text{ est pair.}$$

b) Etudier les propriétés de $\mathcal{R}$.

---

2. Relation d'équivalence

Définition Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples 4

- *$E =$ l'ensemble des étudiants de première année.*

$x \sim y$ ssi x et y sont nés la même année. C'est une relation d'équivalence.

- *$E = \mathbf{Z}$, soit m un entier positif non nul. La* congruence modulo *m est définie par :*

$x \equiv y\,[m]$ ssi $y - x$ est un multiple de m. C'est une relation d'équivalence.

Définition Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Si $a \in E$, on appelle *classe d'équivalence* de a l'ensemble de tous les éléments de E qui sont équivalents (par $\mathcal{R}$) à a. On la note $\overline{a}$ ou $\dot{a}$:

$$\overline{a} = \{x \in E \,|\, x\mathcal{R}a\}.$$

Remarque : si $a\mathcal{R}b$ alors $\overline{a} = \overline{b}$.

Définition L'ensemble des classes d'équivalence est appelé *ensemble quotient*, noté parfois $E/\mathcal{R}$.

Ces notions sont utiles en arithmétique et en cryptographie.

Exemples 5

- *dans* $\mathbf{Z}$, *pour la congruence modulo* 3 :

$\overline{0} = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6 \cdots\}$ $\qquad \overline{0} = \overline{3} = \overline{6} \ldots$

$\overline{1} = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7 \cdots\}$ $\qquad \overline{1} = \overline{4} = \overline{7} \ldots$

$\overline{2} = \{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8 \cdots\}$ $\qquad \overline{2} = \overline{5} = \overline{8} \ldots$

l'ensemble quotient est noté $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

- *modulo* 2 :

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$.

$\overline{0}$=*ensemble des entiers pairs,*

$\overline{1}$=*ensemble des entiers impairs.*

Exercice de cours 4.
Soit $E = \{3, 4, 9, 10\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ est pair.}$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

---

3. Relations d'ordre

Définition Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples 6

- E = *l'ensemble des capitales européennes.*

$x\mathcal{R}y$ *ssi* x *est avant* y *dans l'ordre alphabétique.*

- $E = \mathbf{R}$, $x \leq y$ *la relation d'ordre usuel.*

Exercice de cours 5. On considère l'ensemble $E = \mathbf{N}$ des entiers naturels, et on le munit de la relation binaire $n|m$: "n divise m" ssi m est un multiple de n.
Vérifier que c'est une relation d'ordre sur E.

Exercice de cours 6. On considère un ensemble E, on munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation binaire $\subset$.
Vérifier que c'est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.
Deux éléments x et y de E sont *comparables* si $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.
On dit que la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est un *ordre total* si deux éléments quelconques sont comparables. Dans le cas contraire on dit que $\preccurlyeq$ est un *ordre partiel.*

Exemples 7

- $E = \mathbf{R}$, $\leq$ *ordre usuel. Deux réels sont toujours comparables. C'est donc un ordre total.*

- $E = \mathbf{N}^*$, *ordre de la divisibilité.* $2 \nmid 5$ *et* $5 \nmid 2$: *2 et 5 ne sont pas comparables. C'est un ordre partiel.*

Définitions Soit E un ensemble, $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E.

- on dit que $x \in E$ *majore* A, ou que x est un *majorant* de A si $\forall y \in A,\ y \preccurlyeq x$.
- on dit que $x \in E$ *minore* A, ou que x est un *minorant* de A si $\forall y \in A,\ x \preccurlyeq y$.
- le *plus petit élément* de A est (s'il existe) un $x \in A$ tel que $\forall y \in A,\ x \preccurlyeq y$. C'est un minorant de A qui appartient à A. On le note p.p.e ou $\min A$.
- le *plus grand élément* de A est (s'il existe) un $x \in A$ tel que $\forall y \in A,\ y \preccurlyeq x$. C'est un majorant de A qui appartient à A. On le note p.g.e ou $\max A$.
- la *borne inférieure* de A est (s'il existe) le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A. On le note $\inf A$.
- la *borne supérieure* de A est (s'il existe) le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. On le note $\sup A$.

Exemple 8

$E = \mathbf{R}$, $\leq$ ordre usuel. $A = [1, 2[$.

L'ensemble des majorants de A est :

L'ensemble des minorants de A est :

$\inf A$ ..., $\min A$ ....

$\sup A$ ... , *et* $\max A$ ...

NB : $\sup A$ et $\inf A$ ne sont pas nécessairement des élements de A.

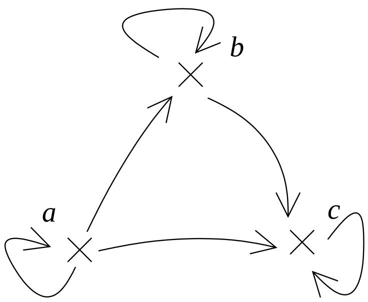
Exercice de cours 7. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ des diviseurs de 36 muni de la relation $|$.
Prenons $A = \{4, 6\}$.
Déterminer si la partie A admet un max, un min. Quels sont les majorants de A ? En déduire $\sup A$.
Quels sont les minorants de A ? En déduire $\inf A$.

Proposition :
Soit E un ensemble, $\leq$ une relation d'ordre sur E et x, y deux éléments de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

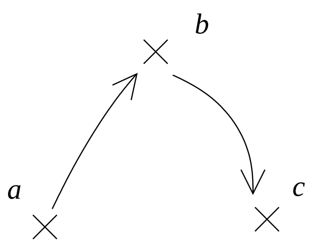
i) $x \leq y$,
ii) $\inf(x, y) = x$,
iii) $\sup(x, y) = y$.

Diagramme de Hasse
Afin de mettre en évidence la hiérarchie, on peut représenter une relation d'ordre sur un ensemble fini par une version simplifiée de son diagramme sagittal que l'on appelle *diagramme de Hasse* : on ôte du diagramme sagittal les boucles (réflexivité) et toutes les flèches qui peuvent se retrouver par transitivité.

Exemples 9

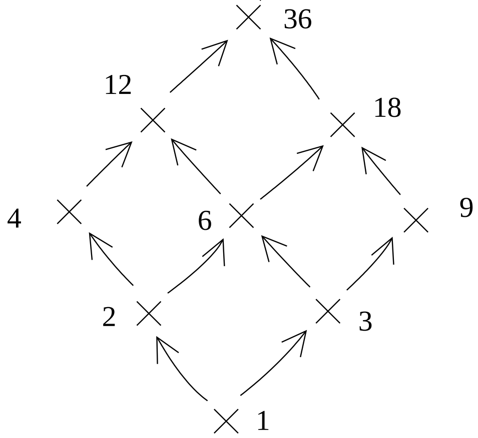
- 

est remplacé par

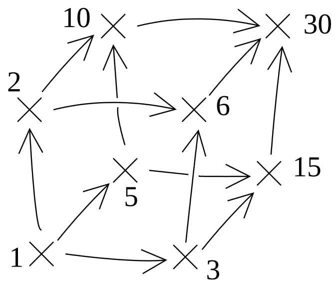


"on va du plus petit au plus grand, et on met une flèche entre deux élements s'il n'y a pas d'élément intercalé entre les deux."

- $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ muni de la relation $|$.



Exercice de cours 8. On considère $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ l'ensemble des diviseurs de 30, muni de la relation $|$.
Vérifier que son diagramme de Hasse est



Définition Un ensemble E muni d'une relation d'ordre est un *treillis* si :
$\forall (x, y) \in E^2$, $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ existent et sont dans E,
où $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ représentent respectivement les bornes supérieure et inférieure de $\{x, y\}$.
On note aussi :

$$\inf(x, y) = x \wedge y \quad \text{et} \quad \sup(x, y) = x \vee y.$$

Exemples 10

- $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis,

car si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \wedge B = A \cap B \in \mathcal{P}(E)$ et $A \vee B = A \cup B \in \mathcal{P}(E)$

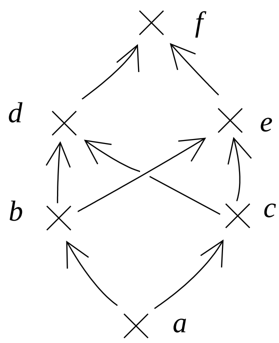
- On prend $E = \mathbf{N}^*$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x \mid y$ $\quad$ (x divise y). $(\mathbf{N}^*, |)$ est un treillis.

$x \wedge y = PGCD(x, y)$ "le plus grand commun diviseur".

$x \vee y = PPCM(x, y)$ "le plus petit commun multiple".

- $E = \{a, b, c, d, e, f\}$

On définit la relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E par le diagramme de Hasse suivant :

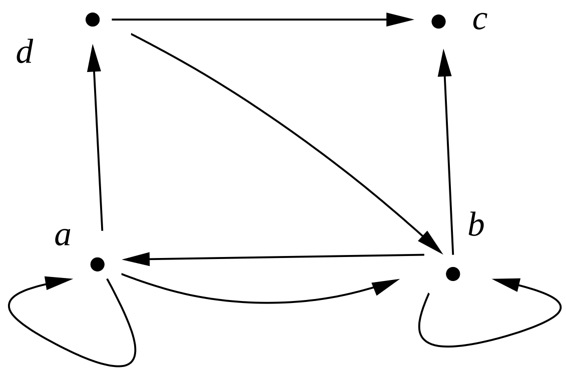


E n'est *pas* un treillis car $b \vee c$ n'existe pas. En effet d et e sont des majorants de $\{b, c\}$ mais ne sont pas comparables.

Travaux Dirigés

Relations binaires

Exercice 1. On considère la relation $\mathcal{R}$ dont le diagramme sagittal est le suivant :



Déterminer la matrice d'incidence de $\mathcal{R}$, ainsi que ses propriétés.

Exercice 2.
Soit $E = \{2, 5, 7, 10\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ est pair.}$$

a) Tracer le diagramme sagittal de cette relation binaire.
b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
c) Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Relations d'ordre

Exercice 3.
On considère un ensemble E de fiches de paye comportant deux champs : le salaire S et le montant P des primes reçues. On représente ces fiches de paye par des couples de réels (S, P). On rappelle que deux couples de réels (S, P) et (S', P') sont égaux si et seulement si $S = S'$ et $P = P'$ ("les deux champs sont égaux").
Les relations suivantes sur E sont considérées :

$(S, P)\mathcal{R}_1(S', P')$ ssi $S \leq S'$ ou $P \leq P'$,
$(S, P)\mathcal{R}_2(S', P')$ ssi $S \leq S'$ et $P \leq P'$,
$(S, P)\mathcal{R}_3(S', P')$ ssi $S < S'$ ou ($S = S'$ et $P \leq P'$).

Lesquelles sont des relations d'ordre ?

Exercice 4.
On considère $E = \mathbf{N}^*_{12}$ l'ensemble des entiers non nuls inférieurs ou égaux à 12, muni de la relation de divisibilité (c'est une relation d'ordre sur E).
a) Tracer le diagramme de Hasse de cette relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?
b) Pour chaque ensemble suivant, déterminer s'il admet des majorants, minorants, un élément maximal, élément minimal, borne supérieure, borne inférieure :

$$A = \{1, 2, 4, 8\} \quad ; \quad B = \{4, 6\}$$

$$C = \{2, 3, 6, 9\} \quad ; \quad D = \{1, 12\}.$$

Exercice 5.
a) trouver le plus petit et le plus grand élément dans $\mathcal{P}(E)$ pour $\subset$.
b) Soit E un ensemble. On considère la relation binaire d'inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$: $A \subset B$. Rappeler pourquoi c'est une relation d'ordre.
c) cas particulier : $E = \{a, b, c\}$. Tracer le diagramme de Hasse de $\subset$.

Treillis

Exercice 6.
On considère la relation d'ordre $|$ (divisibilité) sur les entiers. Pour chacun des ensembles suivants muni de $|$:

$$E = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}, \quad F = \{1, 2, 3, 9, 18\},$$

$$G = \{1, 2, 5, 8, 20, 40\},$$

a) tracer le diagramme de Hasse,
b) est-ce un treillis ?

Exercice 7.
On considère E l'ensemble à 11 éléments formé des chiffres 0 à 9 d'un affichage à cristaux liquides, auxquels on ajoute le chiffre vide (aucune barre allumée) noté ϵ.

On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y$ ssi ($x = y$ ou (y est obtenu à partir de x en allumant au moins une barre supplémentaire)).
a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?
b) Tracer le diagramme de Hasse.
c) Vérifier que $(E, \mathcal{R})$ est un treillis.