

Exercice 3

(2)

- $(1000, 2000) R_1 (2000, 1000)$
et $(2000, 1000) R_1 (1000, 2000)$
mais $(2000, 1000) \neq (1000, 2000)$ donc R_1 n'est pas antisymétrique. Ce n'est donc pas une relation d'ordre.

- - $S \leq S$ et $P \leq P$ donc $(S, P) R_2 (S, P)$: R_2 est réflexive
- supposons $(S, P) R_2 (S', P')$ et $(S', P') R_2 (S, P)$
alors $S \leq S'$ et $P \leq P'$ et $S' \leq S$ et $P' \leq P$

donc $S = S'$ et $P = P'$, c'est à dire $(S, P) = (S', P')$

R_2 est antisymétrique

- supposons $(S, P) R_2 (S', P')$ et $(S', P') R_2 (S'', P'')$
alors $S \leq S'$ et $P \leq P'$ et $S' \leq S''$ et $P' \leq P''$

donc $S \leq S''$ et $P \leq P''$, ce qui donne $(S, P) R_2 (S'', P'')$

R_2 est transitive.

conclusion : R_2 est une relation d'ordre.

- - $(S, P) R_3 (S, P)$ donc R_3 est réflexive
- supposons $(S, P) R_3 (S', P')$ et $(S', P') R_3 (S, P)$
alors $(S < S' \text{ ou } (S = S' \text{ et } P < P')) \text{ et } (S' < S \text{ ou } (S' = S \text{ et } P' < P))$
les éventualités $S < S'$ et $S' < S$ sont incompatibles, donc
 $S = S'$ et $P < P'$ et $P' < P$, donc finalement $(S, P) = (S', P')$

R_3 est antisymétrique

- supposons $(S, P) R_3 (S', P')$ et $(S', P') R_3 (S'', P'')$
alors $(S < S' \text{ ou } (S = S' \text{ et } P < P')) \text{ et } (S' < S'' \text{ ou } (S' = S'' \text{ et } P' < P''))$

1^{er} cas : $S < S'$ alors comme $S' \leq S''$ on a $(S, P) R_3 (S'', P'')$

2^e cas : $S = S'$ * si $S' < S''$ on a $(S, P) R_3 (S'', P'')$

* si $S' = S''$ alors, comme $P \leq P'$ et $P' < P''$ on a $P \leq P''$ et $(S, P) R_3 (S'', P'')$

dans tous les cas $(S, P) R_3 (S'', P'')$: R_3 est transitive

conclusion : R_3 est une relation d'ordre. On l'appelle ordre lexicographique (cf dictionnaire)