Devoir Maison — Probabilités

Antoine de Roquemaurel (Groupe 1.1)

Exercice 1

1 — Ensemble Ω et tribu à laquelle appartiennent M, D et F

A est une tribu si les propriétés suivantes sont vérifiées :
- $\varnothing \in A$ et $\Omega \in A$
- A est stable par passage au complémentaire : $A \in A \Rightarrow \overline{A} \in A$
- A est stable par réunion et interesection dénombrable : si $(A_n)_n$ est une suite dénobmrable d'éléments de A alors $\bigcup_{n\in N} A_n$ et $\bigcap_{n\in A} A_n$ sont des éléments de A

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(\overline{M},\overline{D},\overline{F}),(\overline{M},\overline{D},F),(\overline{M},D,\overline{F}),(\overline{M},D,F),(M,\overline{D},\overline{F}),(M,\overline{D},F),(M,D,\overline{F}),(M,D,F)\}\\
A &= \{\varnothing,\Omega\}
\end{aligned}$$

2 — Calculs de probabilités

$$\begin{array}{lll}
 & P(F/M) = \frac{1}{5} & P(\overline{M}) = \frac{1}{3} & P(\overline{D}/\overline{M}) = \frac{4}{5}\\
P(M) = \frac{2}{3} & P(D/\overline{M}) = \frac{1}{5} & P(\overline{D}/M) = \frac{3}{10} & P(\overline{F}/\overline{M}) = \frac{1}{10}\\
P(D/M) = \frac{7}{10} & P(F/\overline{M}) = \frac{9}{10} & P(\overline{F}/M) = \frac{4}{5} &
\end{array}$$

3 — Probabilité que l'étudiant e aime les maths

$$\begin{aligned}
P(M/D\cap F) &= \frac{P(D\cap F/M)P(M)}{P(D\cap F)} = \frac{P(D/M)P(F/M)P(M)}{P(D\cap F)}\\
&= \frac{P(D/M)P(F/M)P(M)}{P(D\cap F\cap M)+P(D\cap F\cap\overline{M})}\\
&= \frac{P(D/M)P(F/M)P(M)}{P(D\cap F/M)P(M)+P(D\cap F/\overline{M})P(\overline{M})}\\
&= \frac{P(D/M)P(F/M)P(M)}{P(D/M)P(F/M)P(M)+P(D/\overline{M})+P(F/\overline{M})P(\overline{M})}\\
&= \frac{P(D/M)P(F/M)P(M)}{\frac{7}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{3}}\\
P(M/D\cap F) &= \frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{23}{150}} = \frac{14}{23}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1 — Probabilités $P(B_1)$ et (P_B2)

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{k}{k+m}\\
P(R_1) &= \frac{m}{k+m}
\end{aligned}$$

2 — Calcul de probabilités

$$\begin{aligned}
P(B_2/B_1) &= \frac{k+1}{k+m+1} \\
P(R_2/B_1) &= \frac{m}{k+m+1} \\
P(B_1 \cap B_2) &= P(B_2/B_1)P(B_1) = \frac{k(k+1)}{(k+m+1)(k+m)} = \frac{k^2+k}{k(k+2m+1)+m+m^2} \\
P(B_1 \cap R_2) &= P(R_2/B_1)P(B_1) = \frac{m}{k+m+1} \times \frac{k}{k+m} = \frac{km}{2k+2m}
\end{aligned}$$

3 — Indépendance

P(A) et P(A) sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Je pense que B_1 et B_2 sont dépendants, en effet, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

4

5 — Probabilités conditionnelles

$$\begin{aligned}
P(B_2/R_1) &= \frac{k}{k+m} \\
P(R_2/R_1) &= \frac{m}{k+m} \\
P(B_2) &= (P(B_1) \times p(B_2/B_1)) + (P(R_1) \times p(B_2/R_1)) = \frac{k \times (k+1)}{(k+m) \times (k+m+1)} + \frac{m^2}{(k+m)^2} \\
&= \frac{k^2+k}{k^2+2mk+k+m^2+m} + \frac{m^2}{k^2+2km+m^2} \\
&= \frac{k^2+k+mk(1+\frac{1}{k+m})}{(k+m)^2+k+m} \\
P(B_1) \times P(B_2) &= \frac{k}{k+m} \times \frac{k^2+k+mk(1+\frac{1}{k+m})}{(k+m)^2+k+m} \neq P(B_1/B_2)
\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
P(R_1/B_2) &= \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(B_2} = \\
P(B_1/B_2) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2} = \frac{\frac{k^2+k}{k(k+2m+1)+m+m^2}}{P(B_2)}
\end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} \\
P(B_2) &= \frac{11}{25} \\
P(B_1/B_2)
\end{aligned}$$

Exercice 3

1

$$\begin{aligned} \Omega &= \{00, 01, 10, 11\} \\ \text{espaceArrive} &= \{00, 01, 10, 11, 21, 12\} \end{aligned}$$

2

3-4 — Loi conjointe et marginales

X/Y	0	1	2	p(X=xj)
0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{2}{4}$
2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
P(y=yj)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	

5 — Esperance et variance

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1 \\ E(Y) &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1 \\ \text{var}(X) &= E(X)^2 - E(X^2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ \text{var}(Y) &= E(Y)^2 - E(Y^2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6 — Corrélation

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \times \text{var}(Y)}} = \frac{E(X, Y) - E(X) \times E(Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \times \text{var}(Y)}} = \frac{\frac{3}{2} - 1 \times 1}{\frac{1}{4}} = 1$$