Examen de logique. L2 Informatique. Janvier 2008
Le seul document autorisé est le formulaire distribué en TD

Pour chaque couple d'entiers i,j on considère la proposition notée « Inf(i,j) », et soit PROP l'ensemble de toutes les propositions Inf(i,j), donc

$$PROP=\{Inf(0,0),Inf(0,1),Inf(0,2),...,Inf(1,0),Inf(1,1),Inf(1,2),...\}.$$

Soit maintenant H l'ensemble infini de formules défini par :

$$H = \{Inf(i,i+1) \ / \ i \text{ entier}\} \cup \{ (Inf(i,j) \wedge Inf(j,k))\rightarrow Inf(i,k) \ / \ i, j, k \text{ entiers}\}$$

Ainsi dans H on trouve les formules : Inf(0,1), Inf(1,2),... mais pas Inf(0,3), aussi dans H il y a la formule $(Inf(1,2)\wedge Inf(2,3))\rightarrow Inf(1,3)$ et aussi $(Inf(2,1)\wedge Inf(1,3))\rightarrow Inf(2,3)$.

A. Induction

Q1. Donnez une preuve en déduction naturelle que Inf(0,3) est déductible de H (c'est-à-dire que H |-- Inf(0,3)).

Q2. On va montrer par induction (ou ici récurrence) que pour tout entier n non nul on a : H |-- Inf(0,n).

a. Initialisation : n=1. Montrez que H |-- Inf(0,1).
b. Etape de récurrence : Quelle est votre hypothèse d'induction/récurrence ? Que faut-il démontrer ? Démontrez-le et concluez.

B. Théorie des modèles

Soit v la valuation définie par v(Inf(i,j)) = 1 si i<j et 0 sinon, c'est-à-dire que v(Inf(i,j)) vaut 1 si et seulement si i est effectivement strictement plus petit que j.

Q3. Vérifiez que v est un modèle de H.

Q4. Vérifiez que le tableau de $H\cup\{\neg Inf(0,2)\}$ est fermé.

C. Théorie de la preuve (déduction naturelle)

Q5. Donnez une preuve en déduction naturelle des affirmations a. à e. en précisant bien les règles et les hypothèses que vous utilisez :

a. $r\rightarrow(p\rightarrow q) \quad |\text{--}\ (r\wedge p)\rightarrow q$
b. $(a\vee b)\leftrightarrow c \quad |\text{--}\ a\rightarrow c$
c. $p\rightarrow(q\rightarrow r) \quad |\text{--}\ (p\wedge\neg r)\rightarrow\neg q$
d. $p\rightarrow(q\vee(r\rightarrow s)) \quad |\text{--}\ (p\wedge r)\rightarrow(q\vee s)$
e. (question plus difficile) : $\neg(p\vee(q\rightarrow r))\ |\text{--}\ q$

D. Logique des prédicats

Dans une réunion mondaine on remarque les faits suivants :

a. Ana est impresario et apprécie Bob
b. Ana apprécie au moins un musicien.
c. Bob n'apprécie aucun musicien mais s'apprécie lui-même.
d. Tous les invités sont impresarios et/ou musiciens.
e. Tout musicien apprécie au moins un impresario autre que lui-même.
f. Au moins un impresario apprécie tous les musiciens.
g. Tout impresario appréciant un musicien est lui-même musicien.
h. Tout musicien qui apprécie un musicien appréciant un impresario apprécie les impresarios.
i. Les impresarios sont tous radins et les musiciens tous généreux.

Q6. Formalisez les énoncés a. à i. ci-dessus en utilisant exclusivement : les constantes Ana et Bob, et les prédicats: I(x) : « x est impresario », M(x) : « x est musicien », A(x,y) : « x apprécie y », R(x) : « x est radin » (on suppose que généreux est la négation de radin), et le prédicat « = » dans son sens habituel.

Q7. (Question supplémentaire) L'énoncé « Il n'y a aucun invité qui soit à la fois musicien et impresario » peut se formaliser par la formule $\neg\exists x\ (M(x) \wedge I(x))$, donnez une preuve en déduction naturelle que cette formule est déductible de l'ensemble des formules formalisant les énoncés a. à i.