Mathématiques discrètes

Chapitre 5 : calcul booléen

---

1. L'algèbre de Boole $\mathbf{B}^n$

Définition On rappelle que $\mathbf{B} = \{0, 1\}$, et que $\mathbf{B}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, ..., a_n)$. C'est aussi l'ensemble des *mots binaires* de longueur n notés $a_1a_2......a_n$.

1.1 Opérations dans $\mathbf{B}^n$

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble $\mathbf{B}^n$:

- *complément* d'un élément : soit $x = a_1a_2......a_n$ un élément de $\mathbf{B}^n$. Son complément noté $\overline{x}$ est $\overline{x} = (1 - a_1, ..., 1 - a_n)$ - noté aussi $\overline{x} = \overline{a_1}\,\overline{a_2}......\overline{a_n}$. Autrement dit on prend le complément lettre à lettre, avec les conventions suivantes : $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$.
- *somme booléenne* : soient $x = a_1a_2......a_n$ et $y = b_1b_2......b_n$ deux éléments de $\mathbf{B}^n$. Leur somme booléenne est
$$x \dotplus y = z,$$
avec $z = c_1c_2......c_n$ défini pour chaque j par $c_j = max(a_j, b_j)$. Autrement dit on fait la somme lettre à lettre, avec les conventions suivantes : 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1.
- *produit booléen* : soient $x = a_1a_2......a_n$ et $y = b_1b_2......b_n$ deux éléments de $\mathbf{B}^n$. Leur produit booléen est
$$x \cdot y = z,$$
avec $z = c_1c_2......c_n$ défini pour chaque j par $c_j = min(a_j, b_j)$. Autrement dit on fait le produit lettre à lettre, avec les conventions suivantes : 0.0=0, 0.1=0, 1.0=0, 1.1=1.

On adoptera aussi la convention qui consiste à rendre l'opération $\cdot$ prioritaire par rapport à $\dotplus$, exemple : $x \cdot y \dotplus z = (x \cdot y) \dotplus z$

Exemples 1

Dans $\mathbf{B}^6$ *on calcule*

$\overline{011010} =$ $\qquad$ $010101 \dotplus 110101 =$ $\qquad$ $101001 \cdot 110110 =$

Exercice de cours 1. Dans $\mathbf{B}^8$ calculer

$\overline{01101001} =$ $\qquad$ $01010101 \dotplus 11001001 =$ $\qquad$ $00100011 \cdot 10110111 =$

Propriété

Pour tout $x \in \mathbf{B}^n$, on a
$$x \dotplus \overline{x} = 111..11 \qquad \text{et} \qquad x \cdot \overline{x} = 00..00$$

Exercice de cours 2. Dans $\mathbf{B}^8$ on considère $x = 00101110$. Calculer $\overline{x}$ puis $x \dotplus \overline{x}$ et $x \cdot \overline{x}$.

1.2 Relation d'ordre dans $\mathbf{B}^n$

Définition On définit la relation binaire suivante sur $\mathbf{B}^n$. Soient $x = a_1a_2......a_n$ et $y = b_1b_2......b_n$ deux éléments de $\mathbf{B}^n$, alors
$$x \preccurlyeq y \qquad \text{ssi} \qquad \forall i \in \{1 \ldots n\},\ a_i \leq b_i.$$

Proposition La relation binaire $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{B}^n$. C'est un ordre partiel lorsque $n \geq 2$.

Exemple 2

Dans $\mathbf{B}^4$ on considère les éléments suivants. Donner (si possible) les relations d'ordre qu'ils vérifient :

$$x = 0001, \quad y = 1010, \quad z = 0101, \quad t = 0111, \quad u = 1111.$$

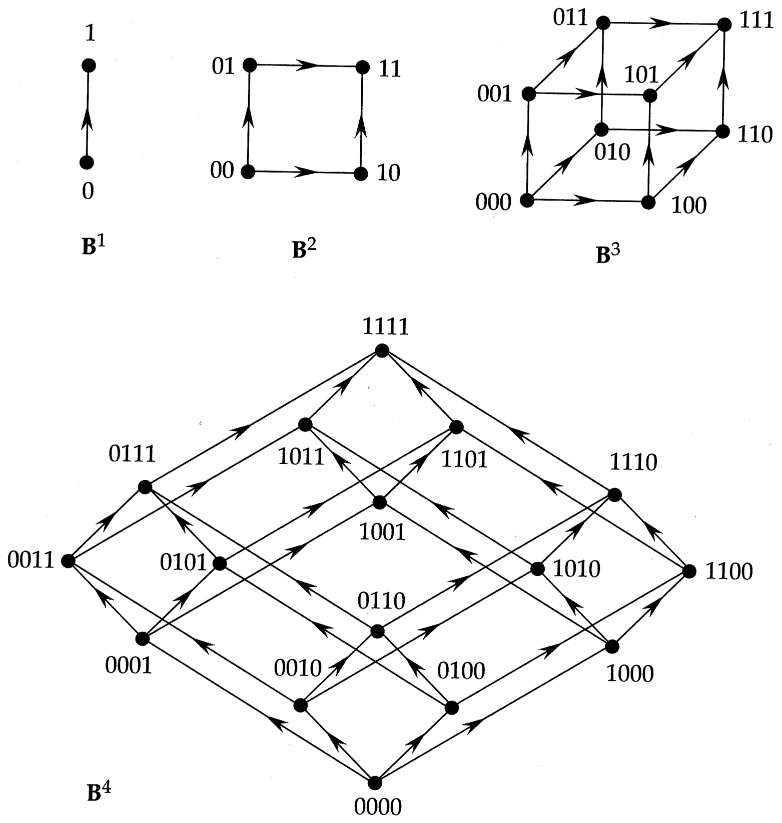
Proposition

Le plus grand élément de $\mathbf{B}^n$ pour la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est $\mathbf{1} = 11...1$ (le mot binaire de longueur n qui ne comporte que des 1).

Le plus petit élément de $\mathbf{B}^n$ pour la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est $\mathbf{0} = 00...0$ (le mot binaire de longueur n qui ne comporte que des 0).

Exemple 3

On peut établir les diagrammes de Hasse de $\mathbf{B}^1$,$\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$ et $\mathbf{B}^4$.



Remarque : on peut vérifier que $\mathbf{B}^n$ muni de cette relation d'ordre est un treillis. Comme c'est un treillis *complémenté* (chaque élément admet un complément) et *distributif* (cf ci-dessous), on dit que c'est une *algèbre de Boole.*

1.3 Règles de calcul

Pour tous $x, y, z \in \mathbf{B}^n$:

Propriétés de $\dotplus$

$$x \dotplus y = y \dotplus x,$$

$$x \dotplus (y \dotplus z) = (x \dotplus y) \dotplus z,$$

$$x \dotplus \mathbf{1} = \mathbf{1}, \qquad x \dotplus \mathbf{0} = x,$$

$$x \dotplus x = x.$$

Propriétés de $\cdot$

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$x \cdot \mathbf{1} = x, \qquad x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$x \cdot x = x.$$

Distributivités

$$x \cdot (y \dotplus z) = (x \cdot y) \dotplus (x \cdot z),$$

$$x \dotplus (y \cdot z) = (x \dotplus y) \cdot (x \dotplus z).$$

Lois d'absorption

$$x \dotplus (x \cdot y) = x,$$

$$x \cdot (x \dotplus y) = x.$$

Propriétés de la complémentation

$$x \dotplus \overline{x} = \mathbf{1}, \qquad x \cdot \overline{x} = \mathbf{0},$$

$$\overline{\overline{x}} = x,$$

$$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}, \qquad \overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}.$$

Lois de Morgan

$$\overline{x \dotplus y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \qquad \overline{x \cdot y} = \overline{x} \dotplus \overline{y}.$$

Définition Dans l'algèbre de Boole $\mathbf{B}^n$, un élément a est un *atome* si c'est un successeur immédiat du plus petit élément $\mathbf{0}$. C'est un mot binaire de longueur n qui comporte un seul 1.

Exemple 4

Dans $\mathbf{B}^3$ *les atomes sont* 100, 010, 001.

Remarque : Le produit de deux atomes est soit un atome (si les deux sont égaux), soit 0 (s'ils sont différents).

Exercice de cours 3. Dans $\mathbf{B}^5$, quel est le plus petit élément ? le plus grand élément ? quel est le complément de 01101 ? quels sont les atomes ?

Proposition Tout élément autre que $\mathbf{0}$ (ppe) de $\mathbf{B}^n$ s'écrit d'une manière unique comme somme booléenne des atomes qui le minorent.

Exemple 5

Dans $\mathbf{B}^4$*, les atomes sont* $0001, 0010, 0100$ *et* 1000*. L'élément* $a = 1101 \in \mathbf{B}^4$ *s'écrit*

$$a = 1000 \dotplus 0100 \dotplus 0001.$$

Exercice de cours 4. Dans $\mathbf{B}^6$, quels sont les atomes ? Ecrire les éléments suivants comme somme d'atomes :

$$a = 110101 \quad ; \quad b = 010110 \quad ; \quad c = 110110.$$

2. Fonctions Booléennes

Définition On appelle *fonction booléenne* de n variables (ou *fonction logique*) toute application de $\mathbf{B}^n$ dans $\mathbf{B}$.

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{B}^n & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ & a_1 ... a_n & \longmapsto & f(a_1 ... a_n). \end{array}$$

Exemple 6

f définie sur $\mathbf{B}^3$ par :

$f(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} \dotplus \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z \dotplus \overline{x}\cdot y\cdot z \dotplus x\cdot\overline{y}\cdot z \dotplus x\cdot y\cdot\overline{z} \dotplus x\cdot y\cdot z.$

On représente f par un tableau, qu'on appelle table de vérité *de f.*

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Exercice de cours 5. Donner la table de vérité de la fonction booléenne définie sur $\mathbf{B}^2$ par

$$g(x,y) = x\cdot y \dotplus \overline{x}\cdot\overline{y}.$$

Exemple 7

Les fonctions booléennes ***ET, OU, IMPLICATION LOGIQUE (notée*** $\longrightarrow$*),* ***OU EXCLUSIF (XOR), NON OU (NOR), NON ET (NAND)*** *définies sur $\mathbf{B}^2$ par*

$$\mathbf{OU}(a,b) = a \dotplus b$$

$$\mathbf{ET}(a,b) = a\cdot b$$

$$\longrightarrow(a,b) = \overline{a} \dotplus b$$

$$\mathbf{XOR}(a,b) = \overline{a}\cdot b \dotplus a\cdot\overline{b}$$

$$\mathbf{NOR}(a,b) = \overline{a \dotplus b} = \overline{a}\cdot\overline{b}$$

$$\mathbf{NAND}(a,b) = \overline{a\cdot b} = \overline{a} \dotplus \overline{b}$$

Exemple 8

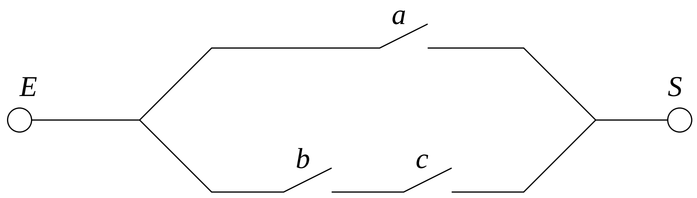
Les $2n$ fonctions booléennes

$$f_i : \begin{array}{ccc} \mathbf{B}^n & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ x_1...x_n & \longmapsto & f_i(x_1...x_n) = x_i, \end{array} \quad \text{et} \quad g_i : \begin{array}{ccc} \mathbf{B}^n & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ x_1...x_n & \longmapsto & f_i(x_1...x_n) = \overline{x_i} \end{array}$$

s'appellent des littéraux *- au singulier on dit un* littéral*. On constate que $g_i = \overline{f_i}$.*

Exemple 9

Les fonctions booléennes donnent une modélisation des circuits logiques, puisqu'à un ensemble de n valeurs booléennes, elles associent une nouvelle valeur booléenne. Elles décrivent donc des circuits logiques à n entrées et une sortie. Par exemple considérons le circuit :



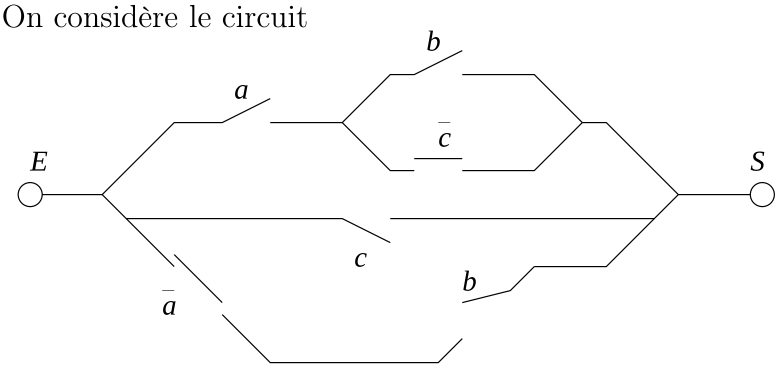
a, b, et c sont des interrupteurs.

On associe à chaque interrupteur une variable qui porte son nom et qui vaut 1 si l'interrupteur est fermé et 0 s'il est ouvert. On note par u la variable qui est égale à 1 si le courant passe entre E et S, et 0 dans le cas contraire. On a alors la table de valeurs :

a	b	c	u	$a \dotplus b \cdot c$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

On remarque que $u(a, b, c) = a \dotplus b \cdot c$.

Exercice de cours 6. On considère le circuit



Dans cette chaîne de contacts (circuits constitués uniquement d'interrupteurs à 2 positions actionnés par des relais qui servent à coupler certains interrupteurs) deux interrupteurs portent le même nom b car ils s'ouvrent et se ferment simultanément et 2 autres s'appellent a et $\overline{a}$ car ils s'ouvrent et se ferment simultanément, mais de façon contraire.
Vérifier que la fonction de transmission de cette chaîne est

$$f(a, b, c) = a \cdot (b \dotplus \overline{c}) \dotplus c \dotplus \overline{a} \cdot b.$$

Proposition Le nombre de fonctions booléennes de n variables est égal à $2^{(2^n)}$.

Preuve : $|\mathbf{B}^n| = 2^n$ on pose alors $\mathbf{B}^n = \{X_1, X_2, ..., X_{2^n}\}$. La donnée d'une fonction booléenne $f : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$ équivaut à la donnée de $f(X_1), f(X_2), ..., f(X_{2^n})$ éléments de $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. Il y a donc $2^{(2^n)}$ possibilités.

Définition Sur l'ensemble $\mathcal{J}_n$ des fonctions booléennes de n variables, on définit la relation d'ordre naturelle suivante :
Soient $(f,g) \in \mathcal{J}_n \times \mathcal{J}_n$. On dit que $f \preccurlyeq g$ si $\forall x \in \mathbf{B}^n, f(x) \leq g(x)$, où $\leq$ est l'ordre usuel sur $\mathbf{B} = \{0,1\}$.

Opérations sur les fonctions booléennes :
On définit le complément d'une fonction booléenne, ainsi que la somme et le produit de deux fonctions booléennes :

- $\overline{f}$ défini par : pour tout $x \in \mathbf{B}^n, \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$
- $f \dotplus g$ défini par : pour tout $x \in \mathbf{B}^n, (f \dotplus g)(x) = f(x) \dotplus g(x)$
- $f \cdot g$ défini par : pour tout $x \in \mathbf{B}^n, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exemple 10

Calcul dans $\mathcal{J}_2$: la table des valeurs de $f_3 \cdot f_9$ et de $f_3 \dotplus f_9$ est

$\mathbf{B}^2$	f_3	f_9	$f_3 \cdot f_9$	$f_3 \dotplus f_9$
00	0	1	0	1
01	0	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	1	1	1

on reconnaît que $f_3 \cdot f_9 = f_1$ et $f_3 \dotplus f_9 = f_{11}$.

3. Forme canonique disjonctive

Définition Les *mintermes* de $\mathcal{J}_n$ sont les fonctions booléennes qui ne prennent qu'une seule fois la valeur 1. Plus précisément :

m est un minterme ssi $\exists a = a_1...a_n \in \mathbf{B}^n$ tel que $m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$

Comment construire le minterme associé à un élément de $\mathbf{B}^n$? Cette interrogation trouve sa réponse dans le résultat suivant.

Proposition Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{B}^n$. Le minterme m associé à a c'est à dire m tel que

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases},$$

est donné par l'expression :

$$m(x_1, ..., x_n) = \widetilde{x_1} \cdot ... \cdot \widetilde{x_n} \quad \text{avec} \quad \widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i & \text{si } a_i = 1 \\ \overline{x_i} & \text{si } a_i = 0 \end{cases}$$

(démonstration admise)
Cette proposition fournit une méthode permettant d'écrire un minterme sous forme d'un produit de littéraux :
si le minterme m est tel que $m(a_1, ..., a_n) = 1$, on commence par écrire $m = x_1 \cdot ... \cdot x_n$. Puis surmonter d'une barre tous les x_i tels que i vérifie $a_i = 0$.

Exemple 11

Dans $\mathbf{B}^4$, le minterme m tel que $m(0110) = 1$ (et m(a)=0 pour les autres mots binaires!) est donné par la formule :

$m(x_1x_2x_3x_4) = \ldots$

Exercice de cours 7.
On considère dans $\mathbf{B}^5$ le minterme m tel que $m(11010) = 1$. Déterminer une formule pour m :

$$m(x_1x_2x_3x_4x_5) = \ldots$$

Exercice de cours 8.
On considère dans $\mathbf{B}^7$ le minterme m tel que $m(1100101) = 1$. Déterminer une formule pour m :

$$m(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7) = \ldots$$

Théorème. ***(forme disjonctive)***
Toute fonction booléenne non identiquement nulle s'écrit de manière unique comme somme booléenne des mintermes qui la minorent.
Autrement dit, si $m_1, ..., m_n$ sont tous les mintermes inférieurs ou égaux à une fonction booléenne f, alors $f = m_1 \dotplus ... \dotplus m_n$. On dit alors que f est mise sous forme disjonctive *(ou* forme canonique disjonctive*).*

Mise en garde Ce qu'on entend par inférieur ou égal, c'est l'inégalité induite par l'ordre qu'on a défini sur $\mathcal{J}_n$.

Algorithme de mise sous forme disjonctive non identiquement nulle.
1) Ecrire la table de vérité de la fonction f,
2) Chaque fois que $f(x_1...x_n) = 1$, écrire le minterme correspondant sous forme d'un produit de littéraux,
3) Ecrire que f est la somme booléenne de ces mintermes.

Exemple 12

Soit la fonction f définie par le tableau suivant :

$\mathbf{B}^3$	f	m_1	m_2	m_3	m_4
000	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0
011	1	1	0	0	0
100	0	0	0	0	0
101	1	0	1	0	0
110	1	0	0	1	0
111	1	0	0	0	1

$f = m_1 \dotplus m_2 \dotplus m_3 \dotplus m_4$ *avec* $m_1 = \ldots$, $m_2 = \ldots$, $m_3 = \ldots$ *et* $m_4 = \ldots$.

Ce qui s'écrit :

$$f = \ldots$$

Exercice de cours 9. On considère la fonction booléenne g sur $\mathbf{B}^3$ dont la table de vérité est :

$\mathbf{B}^3$	g
000	0
001	1
010	0
011	1
100	1
101	1
110	0
111	0

Ecrire g sous forme canonique disjonctive.

---

4. Représentation des fonctions booléenes

La table de vérité est une représentation graphique des fonctions booléennes de n variables. Une autre façon de décrire ces fonctions consiste à utiliser une représentation plane de l'hypercube de dimension n. Pour cela on trace une grille de 2^n cases appelée *tableau* ou *diagramme de Karnaugh*, et dans chaque case on indique la valeur prise par la fonction booléenne.
Diagramme de Karnaugh pour 1, 2, 3, et 4 variables

x	$\overline{x}$
$f(x)$	$f(\overline{x})$

1 variable

	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	$f(x_1 \cdot x_2)$	$f(\overline{x_1} \cdot x_2)$
$\overline{x_2}$	$f(x_1 \cdot \overline{x_2})$	$f(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2})$

2 variables

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2	$f(x_1 x_2 \overline{x_3})$	$f(x_1 x_2 x_3)$	$f(\overline{x_1} x_2 x_3)$	$f(\overline{x_1} x_2 \overline{x_3})$
$\overline{x_2}$	$f(x_1 \overline{x_2} \overline{x_3})$	$f(x_1 \overline{x_2} x_3)$	$f(\overline{x_1} \overline{x_2} x_3)$	$f(\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3})$
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

3 variables

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2	$f(x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$	$f(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$	$f(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$	$f(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$	$\overline{x_4}$
x_2	$f(x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$	$f(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$	$f(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$	$f(\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$	x_4
$\overline{x_2}$	$f(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$	$f(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4)$	$f(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4)$	$f(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$	x_4
$\overline{x_2}$	$f(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$	$f(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$	$f(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$	$f(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$	$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	

4 variables

Exemples 13

- *Représentation de* $f(x,y,z) = x \cdot y \dotplus z$

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
y	1	1	1	0
$\overline{y}$	0	1	1	0
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$

- *Diagrammes de Karnaugh des fonctions booléennes de base*

OU	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	1	1
$\overline{x_2}$	1	0

OU$(x_1,x_2)=x_1 \dotplus x_2$

ET	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	1	0
$\overline{x_2}$	0	0

ET$(x_1,x_2)=x_1 \cdot x_2$

IMPLIQUE	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	1	1
$\overline{x_2}$	0	1

$\longrightarrow(x_1,x_2)=\overline{x_1} \dotplus x_2$

XOR	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	0	1
$\overline{x_2}$	1	0

XOR$(x_1,x_2)=\overline{x_1} \cdot x_2 \dotplus x_1 \cdot \overline{x_2}$

NOR	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	0	0
$\overline{x_2}$	0	1

NOR$(x_1,x_2)=\overline{x_1 \dotplus x_2}=\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

NAND	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	0	1
$\overline{x_2}$	1	1

NAND$(x_1,x_2)=\overline{x_1 \cdot x_2}=\overline{x_1} \dotplus \overline{x_2}$

Comme on vient de le voir, le diagramme de Karnaugh d'une fonction de n variables comporte 2^n cases. On remarque que chaque <u>case</u> correspond à un <u>minterme</u> (qui est une fonction booléenne qui ne prend qu'une seule fois la valeur 1) et réciproquement tout minterme est une fonction booléenne dont le diagramme de Karnaugh a toutes ses cases qui sont nulles sauf une seule.
On constate aussi que dans l'expression d'un minterme, seule une variable (littéral) change d'état (*on la remplace par son complément*) en passant d'une case à une case voisine. D'où la définition suivante.

Définition Deux cases d'un diagramme de Karnaugh sont *adjacentes* si leurs mintermes respectifs ne diffèrent que par un seul littéral.

Exemple 14

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2					$\overline{x_4}$
x_2			A		x_4
$\overline{x_2}$			B		x_4
$\overline{x_2}$					$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	

A:$\overline{x_1}x_2x_3x_4$ B:$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2	C				$\overline{x_4}$
x_2					x_4
$\overline{x_2}$					x_4
$\overline{x_2}$	D				$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	

C:$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ D:$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

Cette notion d'adjacence se voit graphiquement avec un pavage de la totalité du plan par le diagramme de Karnaugh : 2 cases sont adjacentes si les répétées de la première ont un côté commun avec la seconde.

C				C				C			
		A				A				A	
		B				B				B	
D				D				D			
C				C				C			
		A				A				A	
		B				B				B	
D				D				D			
C				C				C			
		A				A				A	
		B				B				B	
D				D				D			
C				C				C			

Pour des raisons de simplicité, on appellera parfois diagramme de Karnaugh, non pas le diagramme lui-même, mais l'ensemble des cases qui valent 1.

Propriétés

- Le diagramme de Karnaugh de la fonction constamment nulle est vide (toutes les cases égales à 0), et celui de la fonction constante égale à 1 est plein (toutes les cases égales à 1).
- $f \preccurlyeq g$ si et seulement si le diagramme de g recouvre celui de f.
- Le diagramme de $f \cdot g$ est égal à l'intersection des diagrammes de f et de g, et celui de $f \dotplus g$ est la réunion de ceux de f et de g.
- Le diagramme de $\overline{f}$ est le complémentaire de celui de f.
- Le diagramme d'un littéral correspond à un rectangle fait de 2^{n-1} cases adjacentes. Ce type de rectangle est appelé *cellule*.
- Le diagramme du produit (booléen) de k littéraux (c.à.d d'un monôme produit de k facteurs) correspond à une cellule de 2^{n-k} cases et vice-versa. Cette propriété est *très importante* pour la simplification des formules car *moins un monôme contient de littéraux* (variables) càd plus il est simple, *plus sa cellule est grosse*

Définition On appelle *monôme* toute fonction booléenne identiquement égale à 1 ou produit de littéraux non égal à 0. Les littéraux composant ce produit sont appelés *facteurs* du monôme.

Exemple 15

Etablissons les diagrammes de Karnaugh des monômes suivants :

$$m\,(x_1x_2x_3) = x_2 \cdot \overline{x_3}\,, \qquad \textit{et} \qquad M\,(x_1x_2x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$$

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2				
$\overline{x_2}$				
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

diagramme de Karnaugh de m

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2				
$\overline{x_2}$				
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

diagramme de Karnaugh de M

Les facteurs de m sont x_2 et $\overline{x_3}$ et ceux de M sont x_1, x_2 et $\overline{x_3}$. Tout facteur d'un monôme est un majorant de ce monôme (on a bien $m \preccurlyeq x_2$ et $m \preccurlyeq \overline{x}_3$).

Proposition Dans l'ensemble $\mathcal{J}_n$ des fonctions booléennes de n variables, il y a 3^n monômes.
Preuve : A faire à titre d'exercice (par récurrence). Dans le cas $n = 2$, les monômes sont : 1, x_1, x_2, $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \cdot \overline{x_2}$, $\overline{x_1} \cdot x_2$, $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

Exemple 16
Le cas $n = 3$: diagrammes de Karnaugh de quelques monômes

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2				
$\overline{x_2}$				
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

1

x_1

$\overline{x_1}$

x_3

$x_1 \cdot x_2$

$x_1 \cdot \overline{x_2}$

$\overline{x_1} \cdot x_3$

$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$

$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$

$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$

$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$

---

5. Simplification des fonctions booléennes

Exercice de cours 10. Etablir le diagramme de Karnaugh des fonctions booléennes suivantes : $f(x, y, z) = x \cdot y \dotplus \overline{y} \cdot z \dotplus x \cdot \overline{z}$ et $g(x, y, z) = x \dotplus \overline{y} \cdot z$.

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
y				
$\overline{y}$				
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$

$x \cdot y \dotplus \overline{y} \cdot z \dotplus x \cdot \overline{z}$

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
y				
$\overline{y}$				
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$

$x \dotplus \overline{y} \cdot z$

On constate avec l'exercice précédent que $x \cdot y \dotplus \overline{y} \cdot z \dotplus x \cdot \overline{z} = x \dotplus \overline{y} \cdot z$. La deuxième formule est beaucoup plus simple que l'expression initiale. Lorsqu'on sait que les fonctions booléennes modélisent entre autre les circuits logiques, il est intéressant de pouvoir simplifier. Pour cela on est amené à répondre aux problèmes suivants :

1) *Comment dire de deux formules (qui représentent une même fonction) que l'une est plus simple que l'autre ?* En d'autres termes, il s'agit de créer une hiérarchie "plus simple que".

2) *Construire un algorithme permettant de trouver une formule simple.*

Définition On dit qu'un monôme m *divise* un autre monôme M lorsque tout facteur de m est un facteur de M.

Exemple 17

$m(x_1x_2x_3) = x_2 \cdot \overline{x_3}$ *divise* $M(x_1x_2x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$.

Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un monôme m divise un autre monôme M est :*

$$M \preccurlyeq m, \text{ au sens de l'ordre défini sur l'ensemble des fonctions booléennes } \mathcal{J}_n,$$

autrement dit lorsque le diagramme de Karnaugh de m recouvre celui de M.

Définition On appelle *polynôme* ou *formule polynomiale* toute fonction booléenne f écrite sous forme d'une somme (booléenne) de monômes

$$f = m_1 \dotplus ..... \dotplus m_k$$

où $m_1, ..., m_k$ sont des monômes.
On dit qu'une formule $f = m_1 \dotplus ..... \dotplus m_k$ est *réduite* s'il n'existe pas d'indices i et j avec $i \neq j$ tels que m_i divise m_j.
Remarque : Le nombre de formes réduites d'une fonction booléenne (qui en possède au moins une d'après le théorème de décomposition sous forme canonique disjonctive) est un nombre fini.

Précisons maintenant la notion d'une formule "plus simple" qu'une autre.

Définition Soient $f = m_1 \dotplus ..... \dotplus m_k$ et $f = M_1 \dotplus ..... \dotplus M_l$, deux (expressions) formules polynomiales réduites d'une même fonction booléennes f. On dit que la première formule est *plus simple* que la seconde si

$$k \leq l \qquad \text{et} \qquad \forall m_i \, , \exists M_j \quad \text{tq : } m_i \text{ divise } M_j$$

Exemple 18

Reprenons l'exemple $f(x,y,z) = \underbrace{x \cdot y}_{M_1} \dotplus \underbrace{\overline{y} \cdot z}_{M_2} \dotplus \underbrace{x \cdot \overline{z}}_{M_3}$ *et* $f(x,y,z) = \underbrace{x}_{m_1} \dotplus \underbrace{\overline{y} \cdot z}_{m_2}$.   *Les deux expressions de f sont bien des formules réduites. En plus la seconde forme est plus simple (au sens de la définition) que la première. On voit bien que cette définition exprime ce qu'on attend d'une forme polynomiale : générer un minimum de calculs.*

Proposition Sur l'ensemble des formes réduites d'une fonction booléenne, la relation "plus simple que" est une relation d'ordre.
Preuve : Les propriétés de réflexivité et de transitivité sont évidentes. Reste à démontrer l'antisymétrie. Soient $f = m_1 \dotplus ..... \dotplus m_k$ et $f = M_1 \dotplus ..... \dotplus M_{k'}$ deux formes <u>réduites</u> de f telles que chacune est plus simple que l'autre. Donc $k' = k$. Pour un m_i, il existe $M_{i'}$ tel que m_i divise $M_{i'}$ et pour ce $M_{i'}$ il existe un m_j que divise $M_{i'}$, car chacune des formes est plus simple que l'autre. Par transitivité m_i divise m_j. Comme la formule est réduite on a m_i=m_j. Donc $m_i = M_{i'}$. Par conséquent, les deux formules sont identiques.

Remarque : L'ordre "plus simple que" n'est pas total et l'ensemble des formes réduites d'une fonction booléenne muni de cet ordre n'est pas un treillis. Cet ensemble peut donc admettre plusieurs éléments minimaux (c.à.d formules simples). Ce n'est pas agréable, mais on ne sait pas faire mieux.

Algorithme de simplification par la méthode de Karnaugh
Il existe plusieurs méthodes permettant d'aboutir à une forme simple pour une fonction booléenne donnée. Elles peuvent se classer en trois catégories :
– Les méthodes algébriques

– Les méthodes graphiques (Karnaugh, consensus,...)
– Les méthodes dites numériques (Quine-Mc Cluskey,...)
Toutes ces méthodes ont pour but d'écrire une fonction booléenne comme somme booléenne de monômes, aussi peu nombreux et aussi simples (avec moins de littéraux) que possibles. Dans le diagramme de Karnaugh, ces monômes correspondent aux cellules. Simplifier une fonction revient donc à écrire son diagramme comme réunion (somme booléenne) de cellules aussi peu nombreuses et aussi grosses que possibles (ce qui correspond à "*avec moins de littéraux*" possibles). On va illustrer la méthode sur un exemple simple. Soit la fonction f de 4 variables dont la table de vérité est

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Etape 0 : Dessiner le diagramme de f ainsi qu'un diagramme auxiliaire.

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2	0	0	1	1	$\overline{x_4}$
x_2	0	1	1	1	x_4
$\overline{x_2}$	1	1	0	0	x_4
$\overline{x_2}$	1	0	0	0	$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	

diagramme de f

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2					$\overline{x_4}$
x_2					x_4
$\overline{x_2}$					x_4
$\overline{x_2}$					$\overline{x_4}$
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	

diagramme auxiliaire

Etape 1 : On repère les grosses cellules (rectangulaires) contenues dans le diagramme et qui ne sont pas elles-mêmes contenues dans plus gros qu'elles. Dans le cas de l'exemple, il y a 5 grosses cellules qui sont :

		1	1
		1	1

cellule 1

	1	1	

cellule 2

	1		
	1		

cellule 3

1	1		

cellule 4

1			
1			

cellule 5

Etape 2 : S'il existe une case du diagramme de Karnaugh contenue dans une seule grosse cellule, on noircit cette grosse cellule sur le diagramme auxiliaire. On le fait pour toutes les cases qui sont dans ce cas. Dans notre cas, il s'agit des cellules 5 et 1.

		1	1
		1	1
1			
1			

Etape 3 : Si le diagramme auxiliaire est identique à celui de f on passe à l'étape 5, sinon à l'étape 4.
Etape 4 : Parmi les grosses cellules qui ne figurent pas encore dans le diagramme auxiliaire on choisit celle qui contient le plus de cases du diagramme de Karnaugh qui ne sont pas encore noircies. Si plusieurs cellules sont en compétition, on choisit la plus grosse, et si il y en a plusieurs on en choisit une arbitrairement. Dans le diagramme auxiliaire on noircit la cellule. Ensuite on retourne à l'étape 3.

		1	1
	1	1	1
1	1		
1			

Etape 5 : Le diagramme de Karnaugh de f et le diagramme auxiliaire sont identiques. La fonction f est donc la somme des monômes correspondant aux cellules utilisées pour construire le diagramme auxiliaire.
Etape 6 : S'il n'y a pas de choix arbitraire dans l'étape 4, la formule ainsi obtenue est la plus simple (minimale). Sinon on compare les formules obtenues en effectuant tous les choix possibles de l'étape 4. Le choix comportant le moins d'opérations donne la formule la plus simple (il peut y en avoir plusieurs). D'où

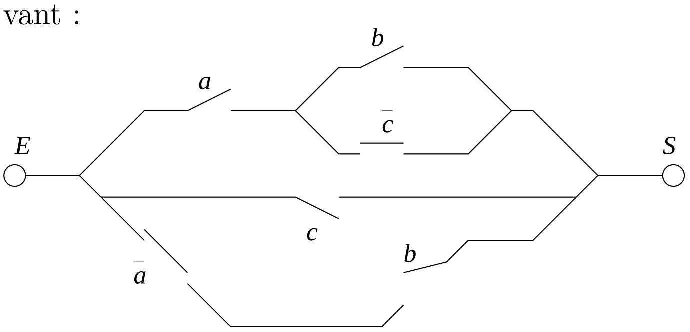
$$f = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2x_3} + x_1x_3x_4$$

l'unique formule minimale de f (car dans l'étape 4, on n'a pas eu à faire de choix).

Remarque : la disposition en diagramme de Karnaugh permet de reconnaître facilement les monômes (leur diagramme de Karnaugh est un rectangle). Cela explique l'intérêt du diagramme de Karnaugh par rapport à la table de vérité classique.

Travaux Dirigés

Exercice 1. On considère le circuit électrique suivant :



Vérifier que la fonction de transmission de ce circuit est

$$f(a, b, c) = a \cdot (b \dotplus \overline{c}) \dotplus c \dotplus \overline{a} \cdot b.$$

Exercice 2.
On se place dans l'algèbre de Boole $\mathbf{B}^n$.
a) Vérifier que pour tous x, y, z :

$$(x \dotplus y) \cdot (y \dotplus z) \cdot (z \dotplus x) = (x \cdot y) \dotplus (y \cdot z) \dotplus (z \dotplus x).$$

b) Développer puis réduire les expression suivantes :

$$(x \dotplus y) \cdot (x \dotplus z)$$

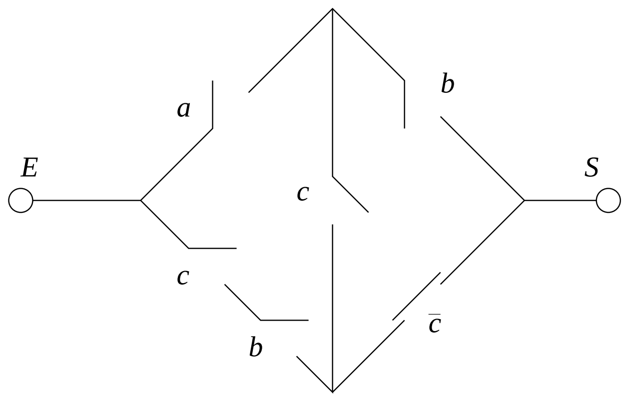
et

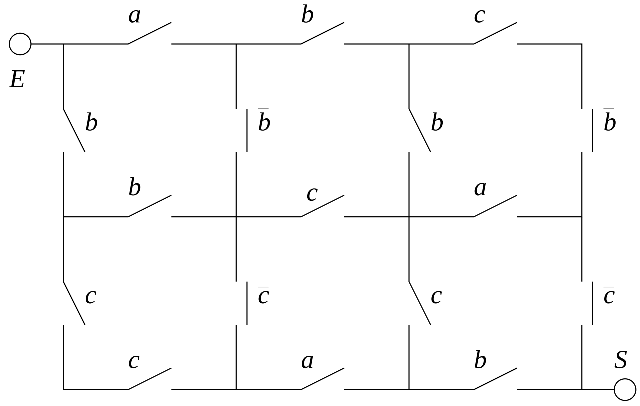
$$(x \dotplus y) \cdot (x \dotplus z) \dotplus (y \dotplus z) \cdot (y \dotplus x) \dotplus (z \dotplus x) \cdot (z \dotplus y).$$

c) Trouver les compléments des expressions suivantes :

$$a = x \dotplus y.z,$$
$$b = x.(y \dotplus z),$$
$$c = x.y.(x \dotplus y \dotplus z),$$
$$d = x.y \dotplus y.z \dotplus z.x,$$
$$e = x \dotplus y.(z \dotplus t).$$

Exercice 3. Pour chacun des circuits ci-dessous, on note f la fonction de transmission. On demande de
a) déterminer la table de vérité de f,
b) déterminer la forme canonique disjonctive de f,
c) déterminer une forme polynômiale simple pour f.





Exercice 4. Déterminer la forme canonique disjonctive et une forme simple de la fonction

$$f(x, y, z) = (x \dotplus y).z$$

- en dressant son diagramme de Karnaugh,
- algébriquement.

Exercice 5. Donner une forme polynomiale simple de la fonction f dont la table de vérité est ci-dessous.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Cette forme polynômiale simple est-elle unique ?

Exercice 6. On note $f(a,b,c,d)$ la fonction booléenne de 4 variables définie par :

$$f(a,b,c,d) = a(\overline{b}\,\overline{d} \dotplus b\overline{c}d \dotplus bd \dotplus \overline{b}\overline{c}\overline{d}) \dotplus \overline{c \dotplus \overline{a}(\overline{b} + d)(b \dotplus \overline{d})}.$$

a) déterminer son diagramme de Karnaugh.
b) trouver une formule polynomiale simple qui représente f.

Exercice 7.
On considère f et g définies par

$$f(a,b,c,d) = (a \dotplus d)(b \dotplus c)$$

et

$$g(a,b,c,d) = (a \dotplus c)(\overline{b} \dotplus d).$$

a) dessiner les diagrammes de Karnaugh de f et g.
b) En déduire le diagramme de Karnaugh de $h = fg \dotplus \overline{f}\overline{g}$.