

MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Chapitre 2 : Théorie des ensembles

1. Définitions

Définition On appelle *ensemble* toute collection d'objets caractérisés par une propriété commune.

Exemples 1

Les ensembles usuels :

N :

Z :

Q :

R :

C :

Définition Les objets qui constituent un ensemble s'appellent les *éléments* de cet ensemble. Notation :

x est un élément de l'ensemble E se note $x \in E$.

x n'est pas élément de l'ensemble E se note $x \notin E$.

Attention : le langage courant donne parfois des "définitions" qui ne sont pas précises et ne sont pas permises mathématiquement.

Exemple 2

Le paradoxe de Russell :

Soit E l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes. On se demande si E s'appartient à lui-même ? Si c'est le cas c'est qu'il ne s'appartient pas à lui-même donc il y a une contradiction. Si ce n'est pas le cas, alors il appartient à E donc il y a également une contradiction.

En fait en théorie des ensembles on doit définir des objets en se pliant à des règles très strictes [qui sont au-delà du contenu de ce cours], ce qui interdit de considérer un ensemble tel que E .

Définition : Soit E un ensemble et A un autre ensemble. On dit que A est un *sous-ensemble* de E , ou une *partie* de E si tout élément de A est aussi élément de E . On note alors

$$A \subset E, \quad A \text{ est inclus dans } E.$$

Exemples 3

$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

Propriétés :

- i) réflexivité : $A \subset A$ (tout ensemble est inclus dans lui-même),
- ii) antisymétrie : si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$,
- iii) transitivité : si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Définitions

- on appelle *ensemble vide*, et on note \emptyset , l'ensemble qui ne contient aucun élément. Par convention, \emptyset

est donc un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

- un ensemble ayant un seul élément est un *singleton*. Si cet élément s'appelle a , on le notera

$$\{a\} \quad \text{“singleton } a\text{”}.$$

- un ensemble ayant deux éléments s'appelle une *paire*. Si ces éléments sont a et b , on notera

$$\{a, b\} \quad \text{“paire } a, b\text{”}.$$

Définition

Si un ensemble E a un nombre fini d'éléments, on dit que c'est un *ensemble fini* et on peut donner la liste de ses éléments entre accolades : $\{\dots\}$, l'ordre n'ayant pas d'importance. C'est la notation *en extension*. Le nombre d'éléments de E s'appelle le *cardinal* de E , noté $\text{Card}E$ ou $\#E$.

Exemples 4

$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$F = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$G = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Exercice de cours 1.

- Déterminer (en extension) l'ensemble X des entiers compris entre 6 et 21 (au sens large). Quel est son cardinal ?
- Déterminer l'ensemble Y des entiers compris entre 6 et 21 (au sens strict). Quel est son cardinal ?
- Déterminer l'ensemble Z des entiers plus petits que 10 dont le carré se termine par 6. Quel est son cardinal ?

Notation par sélection : on note

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

l'ensemble des éléments x de E qui vérifient la propriété $P(x)$.

Exemples 5

$$\{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ est pair}\},$$

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ est un carré}\}.$$

Notation : \mathbf{N}_k est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$\mathbf{N}_k = \{n \in \mathbf{N} \mid n \leq k\}.$$

Exercice de cours 2.

On note $A = \mathbf{N}_{30} = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$ l'ensemble des entiers entre 0 et 30.

Pour chacun des ensembles suivants, donner la liste de ses éléments et son cardinal :

$$B = \{x \in A \mid x \text{ est un carré}\},$$

$$C = \{n \in A \mid n \text{ est la somme de deux carrés}\},$$

$$D = \{n \in A \mid n \text{ est un multiple de 7}\}.$$

Remarque : un ensemble peut être élément d'un autre ensemble.

Exemple 6

Soit A l'ensemble des joueurs de l'équipe de rugby de Toulouse, et B l'ensemble des équipes françaises de rugby. Alors $A \in B$.

Définition

Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties* de E , noté $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E .

Exemples 7

- $E = \{a, b\}$ ($\text{Card}E = 2$), alors $\mathcal{P}(E) =$
- $E = \{a\}$ ($\text{Card}E = 1$), alors $\mathcal{P}(E) =$
- $E = \emptyset$ ($\text{Card}E = 0$), alors $\mathcal{P}(E) =$

Proposition

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors $\mathcal{P}(E)$ est aussi un ensemble fini, et $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

preuve : nous démontrerons ce résultat plus tard.

Exercice de cours 3.

On considère $E = \{a, b, c\}$. Quel est le cardinal de E ? Donner l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E . Vérifier que la formule de la proposition ci-dessus est valable.

2. Opérations sur les ensembles

2.1 Complémentaire

Définition Soit E un ensemble, et $A \subset E$. On appelle *complémentaire* de A dans E l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

Notation :

$$\overline{A} = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

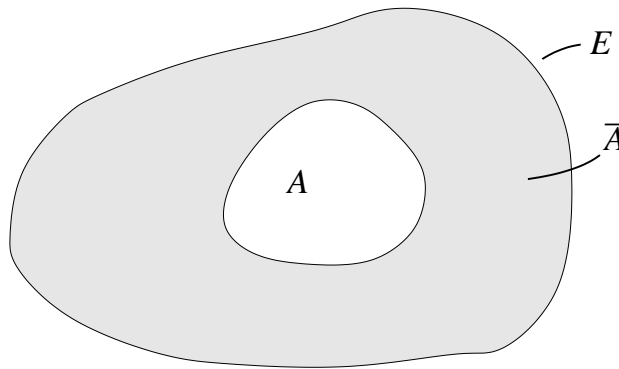


FIGURE 1 – Diagramme sagittal représentant une partie A et son complémentaire

Propriétés :

- $\overline{\emptyset} = E$,
- $\overline{E} = \emptyset$,
- si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$,
- $\overline{\overline{A}} = A$.

2.2 Intersection

Définition Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On appelle *intersection* de A et B l'ensemble de tous les éléments de E communs à A et B , c'est-à-dire qui appartiennent simultanément à A et à B .

Notation :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

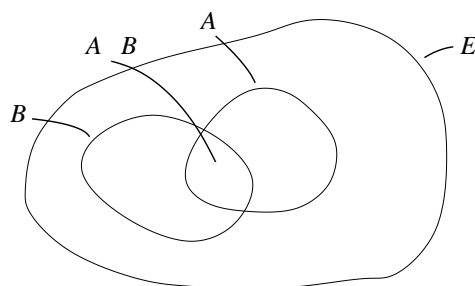


FIGURE 2 – Diagramme sagittal représentant deux parties A et B de E , ainsi que leur intersection

2.3 Réunion

Définition Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On appelle *réunion* de A et B l'ensemble de tous les éléments de E qui appartiennent à A ou à B (ou bien aux deux...)

Notation :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

NB : le “ou” dans la formule ci-dessus est inclusif : $x \in A$, ou $x \in B$, ou les deux à la fois !

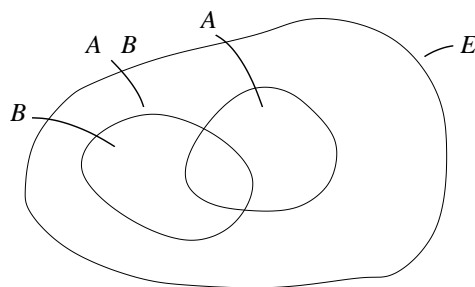


FIGURE 3 – Diagramme sagittal représentant deux parties A et B de E , ainsi que leur réunion

Exemples 8

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un multiple de } 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

Alors $A \cap B$ est

- $A = [-1, 1]$ et $B = [0, +\infty[$. Alors

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

Exercice de cours 4.

On considère $A = \{1, 2, \dots, 20\}$, et les sous-ensembles suivants :

$$B = \{n \in A \mid n \text{ est impair}\}, \quad C = \{n \in A \mid n \text{ est un multiple de } 3\}.$$

Déterminer B et C (en extension). Déterminer $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \cup C$, $B \cap C$. on donnera ces ensembles par la liste de leurs éléments

2.4 Propriétés de \cup et \cap

Soit E un ensemble, et A, B, C trois parties de E .

1) $A \cup E =$	2) $A \cap E =$
3) $A \cup \emptyset =$	4) $A \cap \emptyset =$
5) $A \cup A =$	6) $A \cap A =$
7) $A \cup \overline{A} =$	8) $A \cap \overline{A} =$
9) $A \cup B =$	10) $A \cap B =$
11) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$	
12) $A \cup (B \cap C) =$	13) $A \cap (B \cup C) =$
14) $A \cap (B \cup C) =$	15) $A \cup (B \cap C) =$

preuve par exemple de 14)

Proposition : Caractérisation du complémentaire

Soit $A \subset E$. Alors l'unique ensemble B qui vérifie

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup B = E$$

est le complémentaire \overline{A} de A .

preuve

- $B \subset \overline{A}$: prenons $x \in B$
- $\overline{A} \subset B$: prenons $x \in \overline{A}$

En pratique, lorsque l'on veut montrer qu'un ensemble B est le complémentaire d'un ensemble A , il est parfois plus facile de vérifier que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

Théorème : lois de Morgan

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . Alors

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

preuve :

- pour la première :

$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

Exercice de cours 5. Montrer la deuxième loi de Morgan.

2.5 Différence

Définition : Soient A et B deux parties de l'ensemble E . On appelle *différence* de A et de B l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B . Notation :

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

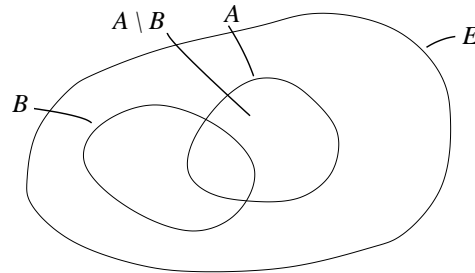


FIGURE 4 – Diagramme sagittal représentant deux parties A et B de E , ainsi que leur différence.

Propriétés :

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

preuve :

-
-
-

3. Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. On appelle *produit cartésien* de E et F , noté $E \times F$, l'ensemble des *couples* où le premier élément appartient à E et le deuxième à F :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Attention : dans un couple, l'ordre est important. Si $(a, b) \in E \times F$ alors $(b, a) \in F \times E$.

Exemple 9

$E = F = \mathbf{R} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ aussi noté \mathbf{R}^2 est l'ensemble des couples de réels. Si on se donne un repère du plan, alors \mathbf{R}^2 permet de repérer les points de ce plan par leurs coordonnées dans le repère.

Définition :

Soient E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles. On note

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \dots x_n \in E_n\},$$

on dit que (x_1, x_2, \dots, x_n) est un n -uplet. Cas particulier : si tous les E_i sont identiques, on note E^n .

Exemples : $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{C}^2$, etc...

4. Applications et fonctions

Définitions : Soient E et F deux ensembles. Une *application* $f : E \rightarrow F$ est la donnée d'une partie G_f de $E \times F$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G_f$.

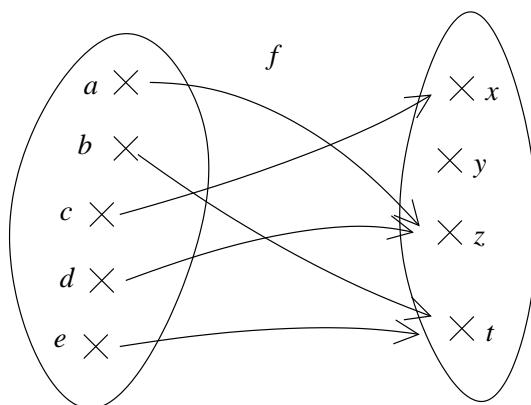
On dit que y est l'*image* de x par l'application f , et on note $y = f(x)$.

G_f est le *graphe* de l'application f .

Si $y = f(x)$, on dit que x est un *antécédent* de y par f .

E est l'*ensemble de départ* et F l'*ensemble d'arrivée* de l'application f .

Lorsque les ensembles E et F sont des ensembles finis, on peut représenter une application $f : E \rightarrow F$ par un *diagramme sagittal* comme sur la figure ci-dessous :



Exemple 10

On a ici

$E =$

$F =$

$f(a) =$

$f(b) =$

antécédent(s) de x :

antécédent(s) de y :

antécédent(s) de z :

antécédent(s) de t :

Remarques très importantes :

- 1) Tout élément x de l'ensemble de départ admet une unique image par l'application f ,
- 2) Un élément de l'ensemble d'arrivée peut admettre un, plusieurs ou aucun antécédent par f .

Exercice de cours 6. On considère l'application g donnée par le diagramme sagittal ci-dessous. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivées de g ?

Déterminer les images par g de a , de b , de c .

Déterminer les antécédents par g de x , de y , de z , de t .

Exercice de cours 7. On considère l'application h donnée par le diagramme sagittal ci-dessous. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivées de h ?

Déterminer les images par h de 1, de 2, de 3.

Déterminer les antécédents par h de x , de y , de z , de t .

Définition : une *fonction* de E dans F est une application d'une sous-ensemble $D(f) \subset E$ dans F . On dit que $D(f)$ est le *domaine de définition* de la fonction f .

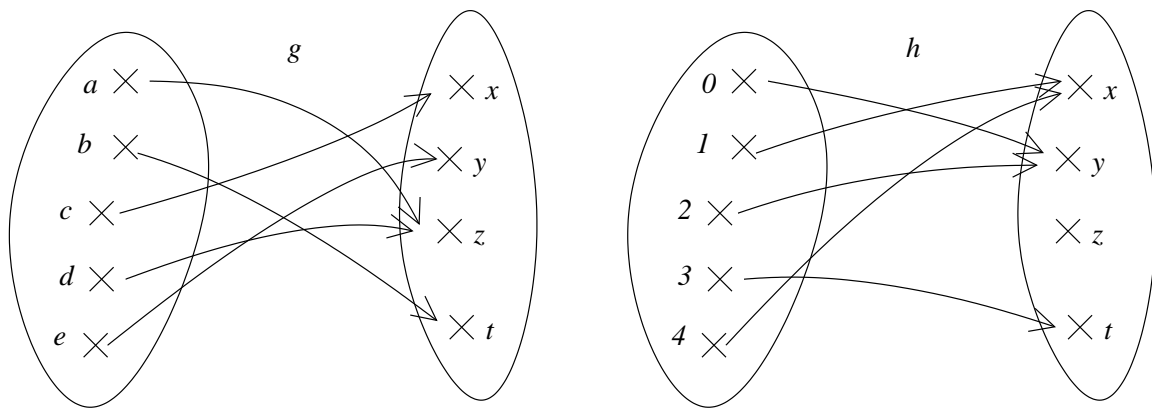


Image directe et réciproque d'une partie

Définition : Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- si $A \subset E$, on appelle *image* de la partie A par f l'ensemble des images par f des éléments de A , noté $f(A)$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

$f(A)$ est un sous-ensemble de F .

- si $B \subset F$, on appelle *image réciproque* de la partie B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B , noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

$f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E .

Exemple 11

Reprenons l'application $f : E \rightarrow F$ donnée par le diagramme sagittal ci-dessus. Nous avons donc

$E =$

et $F =$

$$f(\{a, b\}) =$$

$$f(\{b, c, d, e\}) =$$

$$f^{-1}(\{x, y\}) =$$

$$f^{-1}(\{x, y, z\}) =$$

$$f^{-1}(\{y\}) =$$

Exercice de cours 8. Reprenons l'application $g : E \rightarrow F$ donnée par le diagramme sagittal ci-dessus. Nous avons donc

$E =$

et $F =$

Déterminer les ensembles suivants :

$$g(\{a, b\}) =$$

$$g(\{b, c, d, e\}) =$$

$$g^{-1}(\{x, y\}) =$$

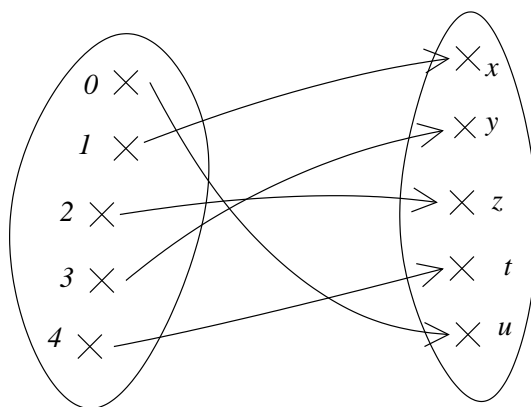
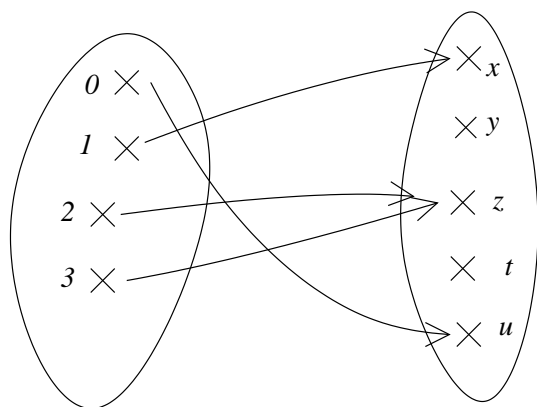
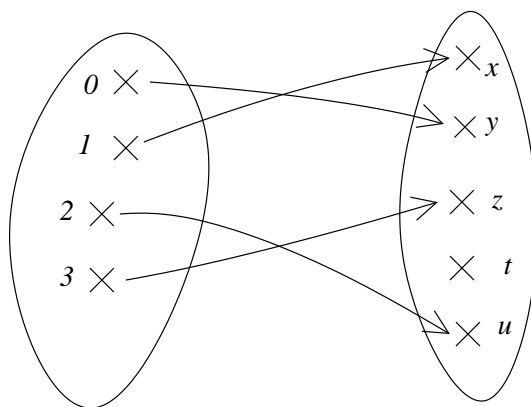
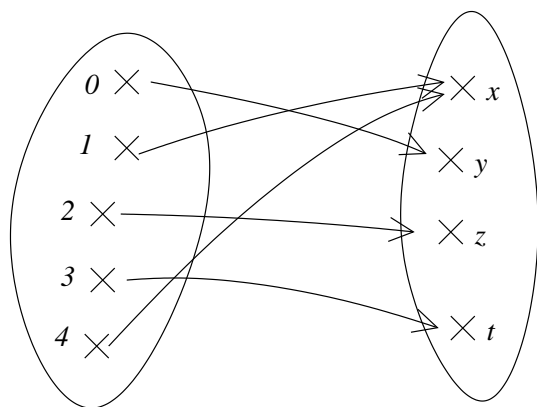
$$g^{-1}(\{x, y, z\}) =$$

$$g^{-1}(\{y\}) =$$

Définitions : Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- f est une *injection* si tout élément y de F admet au plus un antécédent par f . On dira aussi “ f est injective”.
- f est une *surjection* si tout élément y de F admet au moins un antécédent par f . On dira aussi “ f est surjective”.
- f est une *bijection* si tout élément y de F admet exactement un antécédent par f , autrement dit si c'est à la fois une injection et une surjection. On dira aussi “ f est bijective”.

Exercice de cours 9. Pour chaque diagramme sagittal suivant, préciser si l'application définie par ce diagramme est injective/surjective/bijective/ni injective ni surjective :



Cas des ensembles finis :

Soient E et F deux ensembles finis, $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = m$.

- s'il existe une injection $f : E \rightarrow F$ alors $n \leq m$,
- s'il existe une surjection $f : E \rightarrow F$ alors $n \geq m$,
- s'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$ alors $n = m$.

Travaux Dirigés

Ensembles

Exercice 1.

a) Définir les ensembles suivants en extension (liste de leurs éléments) :

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x(x+5) = 14\},$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x(2x+5) = 18\},$$

b) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et les points ont pour coordonnées (x, y) . Dessiner les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y-1| \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$C = [0, 3] \times [-1, 2]$$

ainsi que $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \setminus C$.

Exercice 2.

A, B et C sont des parties d'un ensemble E .

a) Déterminer les complémentaires des ensembles suivants :

$$A \cap (B \cup \overline{C}),$$

$$(\overline{A} \cup B) \cap (C \cup B).$$

b) Simplifier les écritures de :

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}),$$

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$A \cup (B \cap \overline{A}).$$

Exercice 3.

Soit E l'ensemble des étudiants de l'IUT. On note A le sous-ensemble de E formé par les étudiants qui ont un abonnement de métro, B le sous-ensemble de ceux dont les parents habitent à Toulouse, C le sous-ensemble des filles et D celui des garçons.

- a) quel est le lien ensembliste entre C et D ?
- b) écrire l'ensemble A en utilisant la notation par sélection.
- c) traduire par une phrase en langage "courant" les relations suivantes :

$$C \subset B, A \subset D, A \cap C \neq \emptyset, B \cup D = E, A \cap B \subset C.$$

Exercice 4.

Montrer par des contre-exemples que

$A \cap B = A \cap C$ n'entraîne pas forcément que $B = C$.

$A \cup B = A \cup C$ n'entraîne pas forcément que $B = C$.

Exercice 5.

A, B et C sont des parties d'un ensemble E . Montrer les égalités suivantes :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 6. Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E . Quel est son cardinal?

Remplacer ci-dessous les pointillés par l'un des symboles \in, \notin, \subset :

$$a \dots E \quad ; \quad a \dots \mathcal{P}(E)$$

$$\{a\} \dots E \quad ; \quad \{a\} \dots \mathcal{P}(E)$$

$$\{a, b\} \dots E \quad ; \quad \{a, b\} \dots \mathcal{P}(E)$$

Exercice 7.

Soit $E = \{x, y\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Déterminer $E \times E$.

Exercice 8.

Dans un supermarché, trois employés ont les attributions suivantes :

André s'occupe des légumes surgelés et de la viande d'importation fraîche,

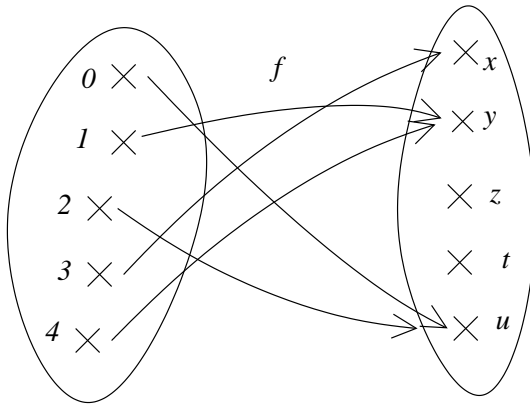
Albert s'occupe des légumes surgelés d'importation et des produits français sauf ceux qui sont surgelés,

Amélie s'occupe des légumes d'importation et des produits surgelés français.

Quels sont les produits qui sont de la compétence des trois employés? D'aucun? De 2 exactement?

Applications

Exercice 9. On considère l'application f donnée par le diagramme sagittal suivant



a) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f ?

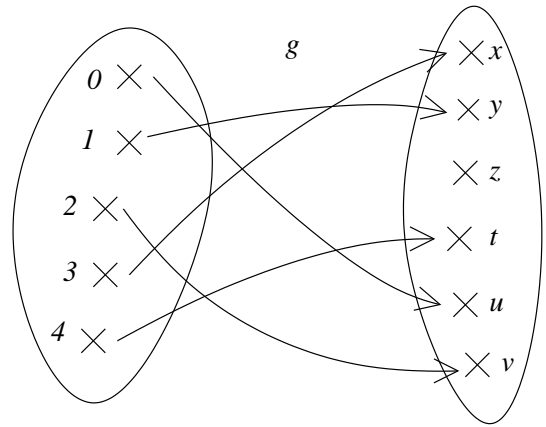
b) Déterminer les images par l'application f des éléments suivants : 0, 1, 2, 3.

c) Déterminer les antécédents par l'application f des éléments suivants : x, y, z, t, u, v .

d) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

e) Déterminer $f(\{0, 1\})$, $f^{-1}(\{x, y\})$, $f^{-1}(\{x, u\})$ et $f^{-1}(\{x, y, z, t\})$.

e) Mêmes questions avec l'application g donnée par le diagramme sagittal suivant :



Exercice 10. On considère les applications suivantes :

$$g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$$

$$n \longmapsto n + 1$$

et

$$h : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$$

$$m \longmapsto 0 \quad \text{si } m = 0$$

$$m - 1 \quad \text{sinon}$$

L'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ? Mêmes questions pour h .