Corrigé de l'examen d'Algèbre linéaire du 19/11/09.

Ex1

1) $P^2 = 2I_2 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $B = P^{-1}AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & b+a \\ a-b & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(a+b) & 0 \\ 0 & 2(a-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

3) $B^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} (a+b)^3 & 0 \\ 0 & (a-b)^3 \end{pmatrix}$

et par récurrence $B^n = \begin{pmatrix} (a+b)^n & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$

4) $B = P^{-1}AP \iff PB = AP \iff A = PBP^{-1}$

$A^2 = PB\cancel{P^{-1}}.\cancel{P}BP^{-1} = PB^2P^{-1}$ et par récurrence

$A^n = PB^nP^{-1}$

5) $A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$

Ex2 1) On cherche une matrice échelonnée qui à le m̂ rang que A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ qui est échelonnée $\Rightarrow$ rang $A = 2$ (nb de lignes non nulles).

2) voir le cours (p 17) sur les déterminants et systèmes linéaires.

Ex3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -13 & -26 \end{array}\right) \Rightarrow -13z = -26 \Rightarrow z = 2$$

$\Rightarrow -y - 3z = -5$ càd $y = -1$

et $x = 1$.

Ex4 :

1) $\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ libres (fait en TD)

2) $\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} 1+\theta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\theta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+\theta & 4+\theta & 4+\theta & 4+\theta \\ 1 & 1+\theta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\theta \end{vmatrix}$

$= (4+\theta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\theta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\theta \end{vmatrix} = (4+\theta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{vmatrix} = \theta^3 (4+\theta)$

u_1, u_2, u_3 et u_4 sont liés ssi $\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$

ssi $\theta = -4$ ou $\theta = 0$

3) fait en cours et en TD.