TP3 : Algèbre linéaire

Aide mémoire

Toutes les fonctions d'algèbre linéaire (définition de matrice, définition de matrice, déterminant, trace, etc...) appartiennent à la librairie `linalg` (*linear algebra*). On suppose donc que la librairie est chargée par `with(linalg)`.

i)<u>Matrices et vecteurs</u>

`matrix`	Définition d'une matrice (par lignes)	`>A:=matrix([1,2],[5,4]);` `>B:=matrix(2,2,[1,2,5,4]);`
`matrix`	Matrice définie à partir d'une fonction f	`>A:=matrix(n,m,f);`
`diag`	Matrice diagonale	>Δ:=diag(a$_1$,...,a$_n$); >I $_n$:=diag (1$ n);
`band`	Matrice tridiagonale	`>band([a,b,c],15);`
`vandermonde`	Matrice de Vandermonde	>vandermonde([a$_1$,...,a$_n$]);
`vector`	Définiton d'un vecteur	> v:=vector([a$_1$,...,a$_n$]);
`vector`	Vecteur défini à partir d'une fonction f	`>v:=vector(n,f);`
`transpose`	Transpose une matrice	`> transpose(A);` `>evalm(transpose(A));`
`inverse`	Inverse une matrice	`> inverse(A);` `>evalm(inverse(A));`
`rank`	Rang d'une matrice	`>rank(A);`
`det, trace`	Déterminant et trace d'une matrice carrée	`>det(A);` , `>trace(A);`
`equal`	Egalité de matrices	`> equal(M,N);`
`add`	Somme matricielle	`>add(A,B);` `>evalm(A+B);`
`multiply`	Produit matriciel	`>multiply(A,B);` `>evalm(A&*B);`
`multiply`	Désigne aussi le produit d'une matrice et d'un vecteur	`>multiply(A,v);`
`scalarmul`	Produit d'une matrice par un scalaire	>scalarmul(A,α)
`dotprod`	Produit scalaire de 2 vecteurs	`>dotprod(u,v);`
`crossprod`	Produit vectoriel	`>crossprod(u,v);`
`norm`	Norme euclidienne d'un vecteur	`>norm(u,2);`
`charmat`	Matrice caractéristique : $A-\lambda I_n$	>charmat(A,λ)
`charpoly`	Polynôme caractéristique : $det\,(A-\lambda I_n)$	>charpoly(A,λ)
`eigenvals`	Valeurs propres	`>eigenvals(A)`
`eigenvects`	Vecteurs propres	`>eigenvects(A)`
`concat`	Retourne la matrice bloc (A,B)	`>concat (A,B);`
`stackmatrix`	Retourne la matrice bloc $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$	`>stackmatrix(A,B);`
`submatrix`	Permet d'extraire une sous-matrice	>submatrix(A,i$_1$..i$_2$,j$_1$..j$_2$);
`delrows`	Retourne A privée des lignes i_1 à i_2	>delrows(A,i$_1$..i$_2$);
`delcols`	Retourne A privée des colonnes i_1 à i_2	>delcols(A,i$_1$..i$_2$);
`col`	Retourne la i^{eme} colonne de A sous forme de vecteur (Maple)	`>col(A,i);`
`row`	Retourne la i^{eme} ligne de A sous forme de vecteur (Maple)	`>row(A,i);`

Les commandes `concat` et `stackmatrix` s'utilisent aussi avec les vecteurs. Le résultat est une matrice. Avec `concat`, les vecteurs donnés deviennent les "vecteurs" colonnes de la matrice obtenue et avec `stackmatrix` ils deviennent les "vecteurs" lignes.
Les vecteurs et les matrices unilignes sont tous les deux de type **array** mais de natures différentes. Pour s'en convaincre on peut tester les produits

$$\texttt{multiply}(A,u) \text{ et } \texttt{multiply}(A,B)$$

avec `v:=vector([1,2,3])=` $\left[\begin{array}{ll} 1, & 2,3 \end{array}\right]$, `B:=matrix(1,3,[1,2,3])=` $\left[\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$ et
`A:=matrix(3,3,[3,2,1,4,5,6,9,8,7])=` $\left[\begin{array}{lll} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{array}\right]$.
Ou en calculant `transpose(B)` et `transpose(v)`.
Un vecteur est affiché horizontalement. Il ne possède ni notion de ligne ni celle de la colonne. Quand Maple le convertit en matrice, il crée une matrice colonne. Exemple :

```
>b:=vector([x,y]);
>B:=evalm(convert(b,matrix));
>coldim(B);
>rowdim(B);
```

ii)<u>Systèmes linéaires</u>

`solve`	Résolution des systèmes linéaires	`>solve({`$a_{11}x+a_{12}y=b_1,\ a_{21}x+a_{22}y=b_2$ `},{x,y})`
`genmatrix`	Donne la matrice du système	`>genmatrix({`$a_{11}x+a_{12}y=b_1,\ a_{21}x+a_{22}y=b_2$ `},[x,y])`
`genmatrix`	Génère aussi la matrice augmentée	`>genmatrix(Le système,[x,y],Le vecteur second_membre)`
`geneqns`	Retourne le système d'équations	`>geneqns(A,x)`
`linsolve`	Résout le système `A.x=b`	`>linsolve(A,b);`
`gausselim`	La matrice réduite de Gauss	`>gausselim(A);`
`swapcol`	Permute les colonnes	`>swapcol(A,i,j);`
`swaprow`	Permute les lignes	`>swaprow(A,i,j);`
`mulcol`	$C_j \longleftarrow xC_j$	`>mulcol(A,j,x);`
`mulrow`	$L_i \longleftarrow xL_i$	`>mulrow(A,i,x);`
`addcol`	$C_j \longleftarrow C_j + xC_i$	`>addcol(A,i,j,x);`
`addrow`	$L_j \longleftarrow L_j + xL_i$	`>addrow(A,i,j,x);`

Exercice 1

1. Ecrire les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & 11 & -8 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$E=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};\ O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Même question pour :
   (a) La matrice carrée identiquement nulle d'ordre 15.
   (b) La matrice carrée $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq 10}$ d'ordre 10 définie par :

$$m_{ij}=\begin{cases} i+j & \text{si} \quad i\neq j \\ 0 & \text{si} \quad i=j \end{cases}.$$

(c) La matrice identité I_{20}.

(d) La matrice carrée $N = \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \\ x & xy & xy^2 \\ x^2 & x^2y & x^2y^2 \end{pmatrix}$, (*indication : utiliser la fonction* $f(i,j) = x^{i-1}y^{j-1}$).
Evaluer la matrice N pour $x = 1$.

(e) La matrice tridiagonale $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Calculer $5C$, $\sqrt{2}A + 3N$ et $C \cdot D$.

Exercice 2

1. Ecrire les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 1, & 3 & ,5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2, & 3, & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0, & -3, & 6 \end{pmatrix} \text{ et le vecteur colonne } n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le produit vectoriel de u par v, $u \wedge v$, puis le produit scalaire du résultat par w, $(u \wedge v) \cdot w$. Calculer le produit vectoriel de v par w puis le produit scalaire du résultat par u.
3. Calculer $\|u \wedge v\|$ (l'aire du parallélogramme engendré par u et v).
4. Soient U , V et W trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer le produit vectoriel de U par V puis le produit scalaire du résultat par W. Calculer le produit vectoriel de V par W puis le produit scalaire du résultat par U. Concluez.
5. Ecrire la matrice A qui pour vecteurs lignes U, V et W. Calculer $detA$ et concluez.

Exercice 3

Soit la matrice de Vandermonde $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$.

1. Extraire de A le coefficient de la 2° ligne et la 3° colonne.
2. Extraire de A les sous matrices $\begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x & x^2 \\ y & y^2 \end{pmatrix}$.
3. Extraire de A le 2^{eme} vecteur ligne et le 3^{eme} vecteur colonne.

Exercice 4

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Construire les matrices écrites par blocs suivantes : $\begin{pmatrix} A \\ B^T \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit la matrice A obtenue en effaçant la cinquième colonne de M.

1. Calculer le rang de A.
2. Montrer que la matrice A^TA est inversible (A^T est la transposée de A).
3. Calculer A^{-1}.

Exercice 6

1. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 4}}$ une matrice (3,4). Donner la transposée A^T de A. Calculer $A.A^T$ et vérifier que c'est une matrice carrée symétrique.
2. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^n.

Exercice 7

1. Expliquer la suite de commandes :

```
>S:=matrix(5,5);

 >seq(row(S,i),i=1..5);

 >T:=augment (%);
```

2. Idem pour

```
>S:=matrix(5,5);

 >seq(col(S,i),i=1..5);

 >T:=augment (%);
```

Exercice 8

1. Ecrire une procédure retournant la fonction $f_{in}(x) = \begin{cases} n\left(x - \frac{i-1}{n}\right) & \text{si} \quad \frac{i-1}{n} \le x \le \frac{i}{n} \\ n\left(\frac{i+1}{n} - x\right) & \text{si} \quad \frac{i}{n} \le x \le \frac{i+1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Ecrire une procédure retournant la matrice unité d'odre n.
3. Même question pour les matrices :
   $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$
   $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $b_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$
   $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $\begin{cases} c_{ii} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} & \text{si} \quad i < n \\ c_{ii} = 1 & \text{si} \quad i = n \\ c_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} & \text{si} \quad i = j+1 \\ c_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 9

1. Un théorème affirme que la matrice B obtenue en interchangeant deux lignes (ou deux colonnes) d'une matrice carrée A a un déterminant égal à $-det(A)$. Vérifiez ceci sur une matrice quelconque $(4, 4)$.
2. Soit C une matrice $(3, 3)$ quelconque. Vérifier que le déterminant de C reste inchangé si on ajoute à un vecteur ligne respectivement colonne une combinaison linéaire des autres vecteurs lignes respectivement colonnes.

Exercice 10

Reprendre les exercices 6, 7 et 8 du TD1 (matrices) de l'algèbre linéaire