L2 Mention Informatique

UE Probabilités

« Si, en ouvrant un dictionnaire au hasard, on tombait sur le mot « hasard », ce serait un miracle, alors que si on tombait sur le mot « miracle », ce serait un hasard »
(tiré de Les amnésiques n'ont rien vécu d'inoubliable de H. Le Tellier)

Notes de cours rédigées

par

Régine André-Obrecht, Julien Pinquier, Sergei Soloviev

Année universitaire 2011-2012

à partir des documents suivants :

- Jean Pierre Ramis, André Warusfel, « Mathématiques, tout-en-un pour la Licence » niveau L2, Dunod, 2007
- André Arnold, Irèen Guessarian, « Mathématiques pour l'informatique », Masson 1997.
- Pierre Brémaud, « An introduction to probabilistic modeling » Springer 1997.
- Sylvie Méléard, « Alétoire », Cours de l'Ecole Polytechnique 1ère année, 2006.

Chapitre 1 : Concepts et Bases élémentaires des Probabilités

I. Pourquoi les probabilités ?

Probabilité : outil mathématique qui permet de quantifier le hasard, de modéliser les situations où le hasard intervient → le hasard ?

Définition d'un phénomène aléatoire : un phénomène est dit aléatoire si, reproduit maintes fois dans des *conditions identiques*, il se déroule chaque fois différemment de telle sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois sur l'autre de manière imprévisible.

Domaines : économie (trader , gestion de stocks), assurances (contrat) , pharmacologie (mise sur le marché d'un médicament), physique (durée de vie d'un atome radioactif, d'une ampoule électrique), informatique (gestion de flux d'un réseau), files d'attente….

Trois idées majeures :
- La loi des grands nombres → lois
- Le conditionnement et l'indépendance → prise en compte de l'information a priori
- Les variables aléatoires → fonctions élaborées à partir de phénomènes aléatoires

Des grands noms : Pascal (1623-1662), Bernouilli (1654-1705), Bayes (1667-1754), Gauss (1777-1855), Einstein (1879-1955)…

II. Le langage des probabilités

II.1 Quelques définitions :

Expérience aléatoire : expérience qui reproduite dans des conditions identiques peut conduire à des résultats différents et dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance
Ensemble fondamental (d'états, de réalisations, ou d'observations) lié à une expérience : ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience, noté **Ω** , une réalisation est notée ω.
Evénement aléatoire associé à une expérience : sous ensemble ou partie **A** de **Ω,** qui, au vu du résultat de l'expérience, peut être réalisé ou non.

II.2 Exemples :
- Jeu de pile ou face, jeux de dés
- Lancer de fléchettes sur une cible de 30cm de diamètre
  $\Omega = \left\{(x,y) / \sqrt{x^2+y^2} \le 15\right\} \cup \{\infty\}$
  $A = \left\{(x,y) / 10 \prec \sqrt{x^2+y^2} \le 15\right\}$
- Durée de vie d'une ampoule électrique
  $\Omega = R^+$
  A= [a,b], a et b éléments de R^+
- Prix d'un actif financier sur un intervalle de temps [t_1, t_2]
  Ω = C([t_1, t_2], R^+)
  A={le prix est inférieur à α}= $\left\{\omega \in C([t_1,t_2],R^+) / \sup_{t\in[t_1,t_2]} |\omega(t)| \le \alpha\right\}$

Un événement est toujours une partie, un sous-ensemble de Ω.
$\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements d'une expérience.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, avec $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensembles des parties de Ω.
Le langage des probabilités est lié au langage ensembliste.

III. Evénements et Probabilités

Dans tout ce chapitre, **Ω est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire** ; cet ensemble peut être fini, dénombrable ou ayant la puissance du continu comme R.

III.1 Définition d'un espace probabilisé *:*

Définition d'une tribu : soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.
$\mathcal{A}$ est une tribu si les propriétés suivantes sont vérifiées :
1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection dénombrable : si $(A_n)_n$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in N} A_n$ *et* $\bigcap_{n\in N} A_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.

Définition d'une probabilité P sur (Ω, $\mathcal{A}$) où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω : P est une application de $\mathcal{A}$ dans [0,1] qui vérifie :
1. $P(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_n$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, on a
   $P(\bigcup_{n\in N} A_n) = \sum_{n\in N} P(A_n)$

(Ω, $\mathcal{A}$, P) est un espace de probabilité.

III.2 Propriétés

Définition d'une tribu engendrée par un ensemble C de parties de Ω : plus petite tribu contenant C, notée $\mathcal{T}$(C)

Exemple fondamental : Tribu borélienne sur R = $\mathcal{T}$(]a,b[, $a \in R$ *et* $b \in R$)

Propriété : $\mathcal{T}$(]a,b[, $a \in R$ *et* $b \in R$) = $\mathcal{T}$(]-∞,q] , $q \in Q$)

Propriétés immédiates (à démontrer en exercice)**:**

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),\quad si\ les\ A_i\ sont\ deux\ à\ deux\ disjo\text{int}\,s$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B = P(A) + P(B)$
- $P(A) \le P(B) \quad si \quad A \subseteq B$
- Si $(A_n)_n$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, $P(\bigcup_{n\in N} A_n) \le \sum_{n\in N} P(A_n)$
- Si $(B_n)_n$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, tels que $B_n \subseteq B_{n+1}$,
  $P(\bigcup_{n\in N} B_n) = \lim_{n\uparrow\infty} \uparrow P(\mathbf{B}_n)$

- Si $(C_n)_n$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, tels que $C_{n+1} \subseteq C_n$,
  $P(\bigcap_n C_n) = \lim_{n \downarrow \infty} \downarrow P(C_n)$

Cas où $\Omega = \{\omega_n, n \in N\}$, ensemble infini mais dénombrable :

1. Une probabilité définie sur Ω est entièrement caractérisée par sa valeur sur les singletons $P(\omega_n)$
2. Etant donnée une suite $(p_n)_n$ de réels tels que :
   $0 \le p_n \le 1$, $\sum_n p_n = 1$, il lui correspond une unique probabilité P telle que
   pour tout A de W, $P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n$

III.3 Exemples

a. Loi de Bernouilli de paramètre p, $0 \prec p \prec 1$: Jeu de pile ou face

b. Loi uniforme discrète : Jeu de trois dés « distinguables »
   $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$
   $P(A) = \frac{|A|}{6^3}$, |A| désigne le cardinal de A, A partie de Ω .

c. Loi uniforme réelle : Choix aléatoire d'un point dans le carré de coté unitaire
   Ω =[0,1] x [0,1]
   $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties A du carré dont on peut calculer l'aire notée S(A)
   P : A→ S(A) est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, la loi uniforme sur le carré unité

d. Loi de Poisson de paramètre θ sur N, (θ>0) :
   Ω = N, P({n}) est noté P(n) par abus d'écriture et $P(n) = e^{-\theta} \frac{\theta^n}{n!}$.

IV. Variables aléatoires et distributions

IV.1 Définition générale

Proposition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une application de Ω dans E.

a. La famille $\mathcal{B}$ des parties B de E telles que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, est une tribu de E.
b. L'application P_X définie pour tout B de $\mathcal{B}$ par $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ définit une probabilité sur $(E, \mathcal{B})$.

Sous ces conditions **X est appelée variable aléatoire, et P_X est la loi de X**.

Notations :
$$X^{-1}(B) = \{\omega / X(\omega) \in B\} = \{X \in B\}$$
$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) = P(X \in B)$$

IV.2 Exemples :

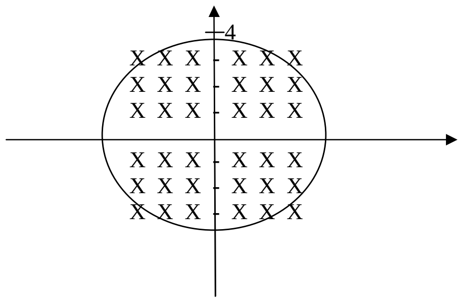
a) Jeu des 3 dés (reprise exemple III.3 b))

Soit $\mathbf{X_1}$: $\omega = (i,j,k)$ → i, 1ère coordonnée de $\omega = (i,j,k)$.

$\mathbf{X_1}$ est une variable aléatoire et $P_{X_1}(\{i\}) = P(\{(i,j,k), j = 1,...6; k = 1,...6\}) = \frac{6^2}{6^3}$

b) Choix aléatoire d'un point dans le carré de coté unitaire Ω =[0,1] x [0,1] (reprise exemple III c).
   Soient les deux applications « coordonnées » réelles à valeur dans [0,1] :
   X (x,y) → x
   Y (x,y) → y
   (à montrer en exercice) Les deux applications sont des variables aléatoires
   $Si \quad a \prec 0, \{X \le a\} = \emptyset, \quad P_X(a) = P(\{X \le a\}) = 0$
   $Si \quad a \in [0,1], \{X \le a\} = [0,a]x[0,1], \quad P_X(a) = P(\{X \le a\}) = a$
   $Si \quad a \ge 1, \{X \le a\} = [0,1]x[0,1], \quad P_X(a) = P(\{X \le a\}) = 1$

c) Un sac contient 3 jetons numérotés 1,2 et 3 et 3 jetons numérotés -1, -2 et -3, indiscernables. On tire au hasard 1 jeton, on note x son numéro et on replace le jeton dans le sac. On retire un jeton et on note y son numéro. L'espace probabilisé est :
   $\Omega = \{(x,y), x \in \{1,2,3,-1,-2,-3\}, y \in \{1,2,3,-1,-2,-3\}\}$
   $P(\omega) = 1/36.$
   Soit l'application $X : \Omega \to R^+$, $X(\omega) = X((x,y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   Les valeurs possibles de X appartiennent à $\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{18}\}$
   $P(X \le 1) = 0, \quad P(X \le 2) = P(X = \sqrt{2}) = 1/9,$
   $P(X \le 3) = P(\{X = \sqrt{2}\} \cup \{X = \sqrt{5}\} \cup \{X = \sqrt{8}\}) = 1/3$
   $P(X \le 4) = \quad 1 - P(X = \sqrt{18}) = 1/9$



IV.3 Cas le plus important = cas réel : **E = R**

Soit X : Ω → R. X est une variable aléatoire réelle si $\forall I$, intervalle de R, $\{X \in I\} \in \mathcal{A}$.

Proposition : Cette condition est vérifiée dès que $\{X \le x\} \in \mathcal{A}$, pour tout x de R.

Elle entraîne que $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$, pour tout borélien B de la tribu borélienne $\mathcal{B}$(R) et que la loi de X est définie par $P_x(B) = P(\{X \in B\})$, pour tout B de $\mathcal{B}$(R).

Fonction de répartition On appelle Fonction de répartition de la variable aléatoire X, la fonction F : R →[0,1] définie par :
$$F(x) = P(X \le x)$$
La fonction de répartition **caractérise** la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

V. Conditionnement et Indépendance

V.1 Conditionnement

Soit (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace de probabilité

Définition : Soit A et B deux événements, tels que P(B) > 0. **La probabilité conditionnelle de A sachant B** est le nombre $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Propriété :

a. Soit B un événement fixe tel que P(B) > 0, l'application P_B de $\mathcal{A}$ dans [0,1] définie par $P_B(A)=P(A/B)$ est une probabilité sur (Ω, $\mathcal{A}$).
b. Si P(A)>0 et P(B)>0, alors $P(A/B)P(B)=P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$

Formule des probabilités composées

Si A_1, A_2, …, A_n sont des événements de Ω tels que $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)\succ 0$, alors

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i\in N}$, une partition finie ou dénombrable d'événements de Ω, tels que $P(B_i)>0$, pour tout i.

Pour tout A de $\mathcal{A}$, on a : $P(A)=\sum_i P(A\cap B_i)=\sum_i P(A/B_i)P(B_i)$.

Théorème (Formule de Bayes) Sous les mêmes hypothèses et si P(A)>0,

$$\forall i\in N,\ P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A/B_j)P(B_j)}$$

« Interprétation d'un événement par ses causes »

V.2 Indépendance

Soit (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace de probabilité

Définition Deux événements A et B de probabilité strictement positive sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Proposition Si deux événements A et B sont indépendants, il en est de même A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Définition Une suite infinie d'événements (A_n) de probabilité strictement positive sont indépendants si et seulement si , pour toute suite finie $(i_1,\ldots,i_n)$ 2 à 2 disjoints, $P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_n})=P(A_{i_1})\ldots P(A_{i_n})$

Lien entre Conditionnement et Indépendance

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ P(A/B) = P(A) $\Leftrightarrow P(B/A)=P(B)$