

Ch. 5 : Echantillonnage, estimation

1 Echantillonnage et suites de variables aléatoires.

Un **échantillon** de taille n est une partie de n éléments choisis aléatoirement dans une population \mathcal{P} . On dit qu'il est **non exhaustif** lorsque le tirage se fait avec remise, **exhaustif** dans le cas contraire. Des tirages avec remise forment des événements indépendants : l'urne n'est pas modifiée par le tirage. Si la population est très grande ou infinie, on pourra toujours considérer que le tirage est non exhaustif : le fait de remettre ou non l'élément tiré devient sans importance.

On suppose maintenant qu'on étudie un caractère statistique quantitatif C sur \mathcal{P} . On considère l'ensemble Ω_n des événements : "tirage d'un échantillon de taille n ". On obtient une suite de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , où X_i est la valeur du caractère C sur le i -ème élément de l'échantillon tiré.

Si le tirage est avec remise (ou si la population est très grande par rapport à l'échantillon) ces variables X_i sont indépendantes et suivent toutes la même loi de probabilité, d'espérance la moyenne de C et d'écart-type celui de C .

A partir des n variables aléatoires X_i , on en construit de nouvelles, appelées "**estimateurs**". Par exemple, si X_i ne prend que deux valeurs (pile/face, oui/non) codées par 1, 0, on peut compter le nombre de "pile" ou de "oui" dans l'échantillon à l'aide de la variable aléatoire "somme sur l'échantillon" :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

On peut aussi, pour "estimer" la moyenne du caractère statistique C , considérer la variable aléatoire "moyenne sur l'échantillon" :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Pour estimer l'écart-type du caractère statistique C on considère la variable aléatoire :

$$\Sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2}.$$

Remarquer la présence de $n-1$ au lieu de n : cet estimateur est "meilleur" que Σ_n (écart-type de l'échantillon) pour estimer l'écart-type σ de la population (voir le §3). Noter qu'on a : $\Sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \Sigma_n$.

Comment évoluent ces variables lorsqu'on augmente la taille de l'échantillon ($n \rightarrow \infty$) ?

2 Les "théorèmes limites".

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire continue d'espérance μ et d'écart-type σ . On veut mesurer la probabilité que les valeurs de X s'écartent de la valeur moyenne μ de plus qu'un intervalle donné par un paramètre positif λ . Pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$p(|\frac{X - \mu}{\sigma}| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve - On pose $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. On a : $E(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$ d'où,

$$\begin{aligned} 1 = \sigma^2(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy \\ &\geq \int_{|y| \geq \lambda} y^2 f_Y(y) dy \\ &\geq \lambda^2 \int_{|y| \geq \lambda} f_Y(y) dy = \lambda^2 p(|Y| \geq \lambda), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité en divisant par λ^2 . Pour une variable aléatoire à valeurs discrètes, la preuve est similaire : remplacer $\int y^2 f_Y(y) dy$ par $\sum_i y_i^2 p_i$.

Exercice 1. On lance 100 fois de suite une pièce. La variable aléatoire X : nombre de "pile" obtenus suit $\mathcal{B}(100, \frac{1}{2})$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité $p(40 < X < 60)$ et comparer avec la valeur exacte donnée par la loi binomiale.

Loi (faible) des grands nombres. On se place dans la situation d'un échantillonnage de taille n , et donc d'une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes, de même loi, même espérance μ et même écart-type σ . Soit $M_n = \frac{1}{n} \sum_i X_i$ la variable aléatoire "moyenne d'un échantillon". On a, pour tout $\varepsilon > 0$ donné,

$$p(|M_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \text{ et en particulier } \lim_{n \rightarrow \infty} p(\mu - \varepsilon < M_n < \mu + \varepsilon) = 1.$$

c'est-à-dire : M_n prendra une valeur aussi proche qu'on veut de μ , avec une probabilité aussi proche qu'on veut de 1, à condition de prendre la taille n de l'échantillon suffisamment grande.

Preuve - Puisque les variables X_i suivent la même loi de paramètres μ et σ et sont indépendantes, on a

$$E(M_n) = \frac{n\mu}{n} = \mu \text{ et } \sigma(M_n) = \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n on a :

$$p(\frac{|M_n - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

ou encore :
$$p(|M_n - \mu| > \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Choisissons λ tel que $\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ c'est-à-dire, $\lambda = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$. On a :

$$p(|M_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

On passe à l'évènement contraire pour obtenir l'énoncé de la loi.

Théorème de la limite centrée. A partir de la variable M_n précédente on construit la variable centrée réduite :

$$Z_n = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Rappelons que la loi de probabilité de chaque X_i et donc de M_n et de Z_n est inconnue. Néanmoins on a (preuve admise) :

La loi de probabilité de Z_n tend vers celle de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini. C'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(Z_n < a) = \Pi(a).$$

avec $\Pi(a) = p(Z < a)$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

Rappelons $\Pi(a)$ est le nombre donné par la table de la loi normale centrée réduite (à nouveau disponible en dernière page de ce document).

Cas particulier : approximation d'une loi binomiale par une loi normale. Si le caractère C ne prend que deux valeurs 1 et 0 (ou blanc/noir) en proportion p et $q = 1 - p$, on a vu que $B_n = X_1 + \cdots + X_n$ (le nombre de "blanc" sur un échantillon de n éléments) suivait la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, d'espérance $\mu = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{npq}$.

D'après le théorème précédent, pour n grand (dans la pratique, $np > 15$ et $nq > 15$), $Z_n = \frac{B_n - \mu}{\sigma}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Utilisation pratique : correction de continuité. La loi binomiale étant discrète et la loi normale étant continue, on ne peut approximer $p(Z_n = k)$ par $p(Z = k)$ où Z suit la loi normale centrée réduite : en effet, $p(Z = k)$ est toujours nul. On doit remplacer k par l'intervalle $[k - 1/2, k + 1/2[$ (On fait une "correction de continuité"). Exemple :

Exercice 2. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50, 0.5)$. Calculer $p(X = 24)$, en l'approximant par $p(23.5 \leq Y \leq 24.5)$ où Y suit une loi normale de mêmes espérance et écart-type que X .

3 Estimation.

On veut étudier les propriétés d'un caractère C d'une population à partir de ses valeurs sur un ou plusieurs échantillons.

Estimation ponctuelle. Pour estimer un paramètre de C (par exemple la moyenne μ ou l'écart-type σ), on choisit un échantillon particulier e_n (d'où l'appellation "ponctuelle"), et on calcule la valeur de l'estimateur $(M_n, \Sigma_{n-1}, \dots)$ sur cet échantillon : $m_n = M_n(e_n)$, $\sigma_{n-1} = \Sigma_{n-1}(e_n)$.

Le choix de l'estimateur en fonction du paramètre à approcher est un problème difficile : par exemple pourquoi choisir Σ_{n-1} plutôt que Σ_n pour estimer l'écart-type ? Nous admettons ici que dans le cas des paramètres μ ou σ , les estimateurs M_n ou Σ_{n-1} proposés ici sont "les meilleurs possibles", ce qui signifie :

- étant donné une suite d'estimations ponctuelles sur des échantillons e_n de taille n , on a : $\lim_n M_n(e_n) = \mu$, $\lim_n \Sigma_{n-1}(e_n) = \sigma$ (l'estimation se rapproche du paramètre cherché lorsque la taille de l'échantillon augmente) ;
- $E(M_n) = \mu$ et $E(\Sigma_{n-1}) = \sigma$. (Si on moyennise les estimations sur tous les échantillons de taille n on trouve le paramètre. L'estimateur est dit "sans biais") ;
- L'écart-type de M_n et Σ_{n-1} est minimal (l'estimation ponctuelle varie le moins possible d'un échantillon à un autre).

Estimation par intervalle de confiance. On ne cherche plus à donner une valeur estimée la meilleure possible du paramètre x (moyenne, proportion, écart-type...) mais un intervalle de valeurs dans lequel la vraie valeur se trouve avec une probabilité donnée (le coefficient de confiance ; dans la pratique, 95%, 99%...). Si on écrit le coefficient de confiance sous la forme $1 - \alpha$, α est appelé le "risque" (5%, 1%,...). On cherche donc $[a, b]$ tel que

$$p(x \in [a, b]) = 1 - \alpha.$$

Estimation d'une moyenne μ par intervalle de confiance.

On peut obtenir un "intervalle de confiance" $[a, b]$ dans lequel une moyenne μ se trouve avec un risque donné sous l'une des deux hypothèses suivantes :

- i- le caractère statistique suit une distribution quelconque d'écart-type connu σ , et l'échantillon est grand ($n \geq 30$) ; ou*
- ii- le caractère statistique suit une distribution normale d'écart-type connu σ ; la taille de l'échantillon est alors sans importance.*

Soit M_n l'estimateur : "moyenne d'un échantillon de taille n ." Nous savons que son espérance est μ et son écart-type est σ/\sqrt{n} . On sait d'après le théorème de la limite centrée :

$$T = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ suit approximativement la loi normale centrée réduite.}$$

Sous l'hypothèse (ii-), on peut même enlever le mot "approximativement". On peut donc trouver à l'aide de la table de $\mathcal{N}(0, 1)$ le nombre t_α tel que

$$p(|T| < t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Exemples classiques, à vérifier sur la table de $\mathcal{N}(0, 1)$ à l'aide de la formule $p(|T| < t_\alpha) = 2\Pi(t_\alpha) - 1$:

- si $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1,96$;
- si $\alpha = 1\%$, $t_\alpha = 2,576$;
- si $\alpha = 0,1\%$, $t_\alpha = 3,29$.

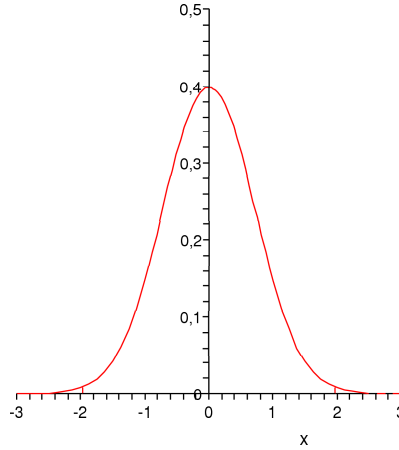


FIG. 1 – Limites du seuil à 5% sur la loi normale centrée réduite

On a :

$$p(|T| < t_\alpha) = p(-t_\alpha < \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < t_\alpha) = p(M_n - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < M_n + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Si on fait une évaluation ponctuelle m_n de M_n sur un échantillon e_n , on obtient l'intervalle de confiance dans lequel μ se trouve avec un risque d'erreur α :

$$[a, b] = [m_n - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m_n + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Exercice 3. Le caractère X d'une grande population suit une loi de variance $\sigma^2 = 6.25$ mais de moyenne μ inconnue. On considère un échantillon de 100 individus, sur lequel la moyenne des valeurs de X est $m_n = 4.3$. Donner un intervalle de confiance pour μ avec un coefficient de confiance de 0.95 (ou risque d'erreur de 0.05 = 5%).

Si l'écart-type σ est inconnu, on peut le remplacer par l'écart-type σ_{n-1} estimé ponctuellement sur un échantillon.

- si l'échantillon est grand, on montre que T suit encore $\mathcal{N}(0, 1)$ et donc t_α est identique.
- s'il est petit, T ne suit plus la loi normale mais une loi de Student à $\nu = n - 1$ degré de liberté. On trouve t_α à l'aide des tables de cette loi. Par exemple, si $n = 10$, ($\nu = 9$), on obtient pour $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 2,262$, pour $\alpha = 1\%$, $t_\alpha = 3,25$, et pour $\alpha = 0,1\%$, $t_\alpha = 4,781$. L'intervalle de confiance est ensuite donné par le même raisonnement et donc par la même formule.

Estimation d'une proportion par intervalle de confiance. Dans une population \mathcal{P} , un caractère C ne peut prendre que deux valeurs (1,0) et la proportion (inconnue) de la population vérifiant $C = 1$ est p . Celle de l'évènement contraire est $q = 1 - p$. On veut donner un intervalle de confiance pour p à partir de son calcul p_n sur un échantillon de n individus. La méthode est identique. On considère la variable aléatoire P_n définie sur l'ensemble des échantillons de taille n . Son espérance est p et son écart-type $\sqrt{pq/n}$. On utilise à nouveau le théorème de la limite centrée :

Si n est suffisamment grand (dans la pratique $n \geq 3/p_nq_n$), alors la variable aléatoire $T = (P_n - p)/\sqrt{\frac{pq}{n}}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

On en déduit a et b comme précédemment : à partir du nombre t_α tel que $p(|T| < t_\alpha) = 1 - \alpha$ obtenu sur la table de $\mathcal{N}(0, 1)$, et une estimation ponctuelle p_n de P_n sur un échantillon e_n , on obtient l'intervalle de confiance

$$[a, b] = [p_n - t_\alpha \sqrt{\frac{pq}{n}}, p_n + t_\alpha \sqrt{\frac{pq}{n}}].$$

Cependant, dans cette formule p et q restent inconnus. On s'en sort de deux manières :

- par approximation ponctuelle : on remplace p et q par p_n et q_n connus sur un échantillon.

On prend donc :

$$[a, b] = [p_n - t_\alpha \sqrt{\frac{p_nq_n}{n}}, p_n + t_\alpha \sqrt{\frac{p_nq_n}{n}}].$$

- par majoration : lorsque p est compris entre 0 et 1, le produit $p(1 - p)$ est plus petit que $1/4$ (Exercice : le vérifier avec l'étude de la fonction $p \mapsto p(1 - p)$.) On majore donc l'intervalle de confiance par :

$$[a, b] = [p_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, p_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}].$$

Exercice 4. Lors d'un second tour à une élection présidentielle, on veut faire un sondage sur 800 personnes pour connaître la proportion p d'électeurs votants pour le candidat A et $q = 1 - p$ votants pour B. Le sondage donne A à 48% et B à 52%.

1- Quelle est l'intervalle de confiance (avec un risque d'erreur de 5%) autour de ces valeurs données par le sondage ?

2- Afin de pouvoir les départager, on souhaite obtenir un intervalle de confiance de longueur $\pm 1\%$, toujours avec un risque d'erreur de 5%. Quelle doit être la taille n de l'échantillon ?

Test sur le chapitre 5

1. Enoncer la loi faible des grands nombres.
2. Enoncer le théorème de la limite centrée.
3. Etant donnée l'estimation m_n d'une moyenne μ sur un échantillon, donner la formule de l'intervalle de confiance dans lequel se trouve μ avec un risque de 1%.

Chapitre 5 : Travaux dirigés

1. Une entreprise commercialise du sel fluoré en sachets, avec la mention : "Poids net : 1 kg, fluorure de potassium : 250 mg/kg".
 - (a) La machine de conditionnement est réglable avec un paramètre m (en grammes) de sorte que le poids moyen de produit emballé soit de m grammes. La variable aléatoire X , qui à tout sachet associe le poids de son contenu suit alors une loi normale $\mathcal{N}(m, 8)$ d'espérance m et d'écart-type $\sigma = 8$ grammes. On veut que la probabilité que la quantité emballée dépasse 1kg soit de 95%. Sur quelle valeur doit-on régler le paramètre m ?
 - (b) Une association de consommateurs veut vérifier la teneur en fluorure de potassium. Elle se procure un échantillon de 100 sachets et confie à un laboratoire la mesure du taux de fluorure de potassium sur cet échantillon. Les conclusions du laboratoire sont :

Moyenne de l'échantillon : 254 mg/kg, écart-type de l'échantillon : 20 mg/kg.

 - i. On suppose qu'une variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite. Détaillez le calcul montrant que le seuil t_α tel que $p(-t_\alpha < Z < t_\alpha) = 1 - \alpha$ vaut $t_\alpha = 2.575$.
 - ii. déterminer un intervalle de confiance autour de la moyenne observée dans lequel la vraie moyenne se trouve avec un risque d'erreur de 1%.
 - iii. Peut-on considérer que l'étiquetage des sachets concernant cette teneur est correct ? (Justifiez votre réponse).
2. Un quotidien publie la cote de popularité d'un chef de gouvernement :

Avril : 36 % d'opinions favorables ;
Mai : 38% d'opinions favorables.

Le journaliste conclut : "la cote de popularité a augmentée de 2%". Sachant que ces proportions ont été établies sur un échantillon de 1000 personnes donner un intervalle de confiance de ces valeurs au niveau de confiance 95%. Quelle est votre conclusion ?

Travail personnel :

Une entreprise de camions dispose de 100 véhicules. Sur un échantillon de 30 jours, elle note le nombre de camions en panne :

5,5,6,4,6,6,8,3,5,5,5,4,3,6,5,6,4,7,6,6,5,4,3,6,5,4,5,4,5,5.

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon.
2. En déduire une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart-type σ du nombre de pannes sur l'ensemble des journées de l'année. (On utilisera les estimateurs M_n et Σ_{n-1} du cours : ch 5, §1).
3. Déterminer un intervalle de confiance pour cette moyenne μ avec un coefficient de confiance de 95%.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000