Université Paul Sabatier
I.U.T. Informatique
S1 - 6 Décembre 2007

Examen d'Algèbre linéaire

Durée 2h
Documents et calculatrices <u>non autorisés</u>.
Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

1. En développant par rapport à la première ligne.
2. En développant par rapport à la deuxième colonne.
3. En faisant apparaître des zéros.

Exercice 2 (8 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
   (b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A et de I_3. Ecrire explicitement A^{-1}.
2. On considère le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} & y & -z & = & 5 \\ -3x & +4y & -3z & = & -1 \\ -x & +y & & = & 2 \end{array} \right.$$

   (a) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, écrire le système sous forme matricielle.
   (b) Utiliser le résultat de la question 1.(b) pour résoudre matriciellement ce système.

Tournez s'il vous plaît

Exercice 3 (4 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+5y+7z=-1 \\ -2x-4y-5z=2 \end{cases}$$

1. Résoudre le système linéaire par la méthode de Cramer.
2. Résoudre le système linéaire par la méthode de Gauss.

Exercice 4 (4 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \theta \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de θ la matrice A n'est pas inversible ?
2. Déterminer le rang de matrice A dans le cas où $\theta = -3$.