Mathématiques discrètes

Chapitre 3 : Logique, prédicats

1. Propositions, Connecteurs

Propositions

Définition On appelle *proposition* un énoncé ayant un sens et dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

Exemples 1

"3 est un entier pair"

"7 est un nombre premier"

"Toulouse est une ville d'Espagne"

Attention :
"$n \in \mathbf{N}$ et n est pair" n'est pas une proposition, parce que cet énoncé n'est pas vrai ou faux : sa valeur de vérité dépend de n.
"la présente affirmation est fausse" n'est pas une proposition (il y a des règles précises de construction des propositions, nous ne rentrons pas dans ces détails ici).

Usuellement, on désigne les propositions par des lettres : $A, B, C \ldots, p, q, r, \ldots$ et on leur attribue une *valeur de vérité* : vrai (V,1) ou faux (F,0).

Connecteurs

En calcul arithmétique, les nombres s'ajoutent, se retranchent, se multiplient,... de façon analogue, le *calcul propositionnel* permet de combiner les propositions entre elles au moyen de *connecteurs logiques*, ce procédé permet de construire d'autres propositions.
Si p est une proposition (un énoncé sans ambiguïté) on lui associe sa *table de vérité* (toutes les éventualités).

p
0
1

1) Négation
La *négation* de p est la proposition qui est fausse lorsque p est vraie, et vraie lorsque p est fausse. On la note non(p), ou $\neg p$ ou $\overline{p}$.

p	$\neg p$
0	1
1	0

2) Conjonction
Soient p et q deux propositions. Leur *conjonction* est vraie lorsque toutes les deux sont vraies, on l'obtient en liant p et q par le mot "et" : p et q, noté aussi $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples 2

- *p : "3 est un entier pair" ;* *q : "4 est un entier impair"*
- *p : "6 est un multiple de 2" ;* *q : "6 est un multiple de 3"*

3) Disjonction
Soient p et q deux propositions. Leur *disjonction* est vraie lorsque l'une au moins est vraie, on l'obtient en liant p et q par le mot "ou" : p ou q, noté aussi $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemples 3

- *p : "9 est un multiple de 2" ;* *q : "9 est un multiple de 3"*
- *p : "12 est un multiple de 5" ;* *q : "12 est un multiple de 7"*

Remarque : dans le langage courant, le <u>ou</u> français a une connotation d'exclusivité (les deux propositions ne peuvent être vraies simultanément, par exemple : "fromage ou dessert" ; "une porte est ouverte ou fermée"), alors que le <u>ou</u> logique admet cette éventualité. Pour éviter cette confusion, on définit le *ou exclusif*, noté w.

p	q	p w q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercice de cours 1.
Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?
On commencera par les écrire à l'aide de connecteurs logiques et de propositions plus simples.
P="il n'est pas vrai que 23 n'est pas divisible par 7"
Q="π vaut 4 et la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés"
R="π vaut 4 ou la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés"

Exemple 4

Dressons la table de vérité de la proposition

$$A = (p \wedge q) \vee \neg p.$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	A
0	*0*			
0	*1*			
1	*0*			
1	*1*			

Exercice de cours 2. Dresser la table de vérité de la proposition suivante :

$$B = (\neg p \vee \neg q) \wedge p.$$

4) Implication
Soient p et q deux propositions. La proposition "*p implique q*", appelée aussi "p entraîne q", "si p alors q", notée $p \to q$ est définie par le tableau de vérité suivant :

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemples 5

- *p : "3 est plus grand que 4" ;* *q : "6 est plus grand que 7"*
- *p : "Noël est en mars" ;* *q : "il neige tous les jours de juillet"*

Exercice de cours 3. On considère la proposition suivante, dont on considère qu'elle est vraie :
P="Si j'ai 1000 euros dans la poche, alors je peux acheter un café".
a) écrire P à l'aide de 2 propositions plus simples et du connecteur logique $\to$.
b) que peut-on dire si j'ai 1000 euros dans la poche ?
c) que peut-on dire si je n'ai pas 1000 euros dans la poche ?
d) que peut-on dire si je peux m'acheter un café ?
e) que peut-on dire si je ne peux pas m'acheter un café ?

5) Equivalence
Soient p et q deux propositions. La proposition "*p est équivalent à q*" est notée $p \leftrightarrow q$. C'est la conjonction de $p \to q$ et $q \to p$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice de cours 4. Donner les tables de vérité des propositions suivantes :

$$C = (p \to q) \wedge q; \qquad D = q \leftrightarrow \neg p.$$

Exercice de cours 5. Soient les propositions :
p="Jean est fort en mathématiques",
q="Jean est fort en informatique", r="Jean est fort en anglais".
Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique à l'aide des propositions p, q et r :
P_1="Jean est fort en mathématiques mais faible en anglais",
P_2="Jean n'est ni fort en mathématiques ni fort en informatique",
P_3="Jean est fort en informatique ou il est à la fois faible en anglais et fort en mathématiques",

P_4="Jean est fort en informatique s'il est fort en mathématiques",
P_5="Jean ne peut être fort en informatique sans être fort en anglais".

Définition On appelle *tautologie* une proposition toujours vraie, notée $\top$, et on appelle *contradiction* (ou antilogie) une proposition toujours fausse, notée $\perp$.

Définition On dit que q est une *conséquence logique* de p si $p \to q$ est une tautologie. On écrit alors $p \Rightarrow q$. On dit que p et q sont *logiquement équivalentes* si $p \leftrightarrow q$ est une tautologie (autrement dit, p et q ont la même table de vérité). On note alors $p \Leftrightarrow q$ ou $p \equiv q$.

Propriétés :

- double négation : $\neg(\neg p) \equiv p$,
- idempotence : $p \wedge p \equiv p \quad ; \quad p \vee p \equiv p$,
- commutativité : $p \wedge q \equiv q \wedge p \quad ; \quad p \vee q \equiv q \vee p \quad ; \quad p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
  mais attention : $p \to q \not\equiv q \to p$.
- associativité : $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad ; \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
- distributivité : $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad ; \quad (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
- absorption : $p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad ; \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$.
- lois de Morgan : $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad ; \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.
- implication : $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$.
- exportabilité : $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$.
- contraposition : $p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$.

Exemples 6

Vérifions les propriétés suivantes : idempotence, distributivité.

Exercice de cours 6.
Vérifier en dressant leur table de vérité les propriétés suivantes :
• absorption

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

• contraposition

$$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$$

Exercice de cours 7.
Vérifier que l'on a

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

mais que

$$(p \to q) \to r \not\equiv p \to (q \to r).$$

---

2. Formes propositionnelles

A partir de l'ensemble des nombres réels, on ajoute des variables et on combine le tout pour former des polynômes. De la même façon, à partir des propositions on ajoute des variables $p, q, r \ldots$ appelées *variables propositionnelles*. En les combinant à l'aide de connecteurs logiques on obtient les *formes propositionnelles*, ou *formules*. C'est ce que nous avons déjà commencé à faire précédemment.

Définition Soit P_A un ensemble de lettres, appelées *variables propositionnelles*. L'ensemble des *formes propositionnelles* (ou *formules*) sur P_A se définit comme suit :

- une proposition est une forme propositionnelle,
- si p est une variable propositionnelle, alors p écrit tout seul est une forme propositionnelle,
- si P est une forme propositionnelle, alors $\neg P$ l'est aussi,
- si P et Q sont deux formes propositionnelles, alors $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \to Q$ et $P \leftrightarrow Q$ le sont aussi.

Dans une forme propositionnelle, quand on remplace les variables par des propositions, on obtient une proposition à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité. On peut également dresser la table de vérité d'une formule, en fonction des valeurs de vérité des variables qui la composent.

Exemples 7

- $f(p,q) = p \wedge q$,
- $g(p,q) = p \vee q$,
- $P(p) = \overline{p} \vee p$, *c'est une tautologie,*
- $Q(p) = \overline{p} \wedge p$, *c'est une contradiction.*

Il y a 16 formes propositionnelles fonctions de 2 variables :

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

on reconnaît :

$f_1 = \bot$	$f_2 = p \downarrow q$	f_3	f_4	$f_5 = p \wedge q$	f_6	f_7	$f_8 = p \leftrightarrow q$
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	$f_{13} = p \to q$	f_{14}	$f_{15} = p \vee q$	$f_{16} = \top$

La forme propositionnelle f_2 est notée $\downarrow$ “pierce”.
On peut exprimer $p \downarrow q$ en français en disant “ni p, ni q”.

Définition Une *fonction d'interprétation* (ou *interprétation*) est une application

$$\begin{array}{rccc} I: & P_A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & p & \longmapsto & I(p) \end{array}$$

cette application attribue à chaque variable propositionnelle une valeur logique, et permet donc d'évaluer la valeur de vérité d'une forme propositionnelle sur P_A. Une forme propositionnelle possédant n variables admet 2^n interprétations différentes.

Définition Soit P une forme propositionnelle. On appelle *modèle* de P toute interprétation qui rend P vraie.

Exemples 8

- $P = \overline{p} \wedge q$ *alors* I *définie par* $I(p) = 0$ *et* $I(q) = 1$ *est un modèle de* P
- $Q = \overline{p} \vee (q \wedge r)$ *: alors* I *définie par* $I(p) = I(q) = I(r) = 0$ *est un modèle de* Q
- *toute interprétation est modèle d'une tautologie, et une contradiction n'admet pas de modèle.*

Exercice de cours 8. Déterminer (si possible) un modèle des formes propositionnelles suivantes ;

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (q \to p); \qquad B = (p \to q) \wedge (p \to \neg q) \qquad C = ((p \to q) \vee (r \to p)) \to \overline{p}.$$

Définition Soit $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble de formules, et P une autre formule (n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{F}$). On dit que P est une *conséquence logique* de $\mathcal{F}$, et on écrit $\mathcal{F} \Rightarrow P$, si tout modèle commun aux éléments de $\mathcal{F}$ est un modèle de P, ce qui revient à dire que $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \to P$ est une tautologie.
Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les *prémisses*.

Exemple 9

- *Transitivité (règle du syllogisme) :* $\{p \to q, q \to r\} \Rightarrow p \to r$.

Exercice de cours 9. Vérifier les deux conséquences logiques suivantes :
- Modus-Ponens : $\{p, p \to q\} \Rightarrow q$.
- Modus-Tollens : $\{\overline{q}, p \to q\} \Rightarrow \overline{p}$.

Définition Soit $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble de formules. On dit que $\mathcal{F}$ est *cohérent*, ou que les formules de $\mathcal{F}$ sont *compatibles* si elles ont au moins un modèle en commun, ce qui revient à dire que $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ admet au moins un modèle.
Dans le cas contraire, les formules sont *incompatibles*, ou *contradictoires*.

Exemples 10

- $\{p, \overline{p} \vee q\}$ *sont compatibles*
- $\{p \wedge q, \overline{p} \vee \overline{q}\}$ *sont incompatibles*

Exercice de cours 10. Les formules suivantes sont-elles compatibles ?

$$\{\ p \to q, q \to p\},$$

$$\{\ p \to q, q \to \neg p\}.$$

---

3. Prédicats, quantificateurs

Prédicats

$$\left.\begin{array}{l} P_1 : \text{“2 est un entier pair“} \\ P_2 : \text{“3 est un entier pair“} \end{array}\right\} \text{sont des propositions.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(n) : \text{“}n\text{ est un entier impair“} \\ Q(x) : \text{“}x\text{ est un réel positif“} \\ R(m,n) : \text{“}n+m\text{ est pair“} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{sont des énoncés qui dépendent de quantités } : n, x, (n,m), \\ \text{donc ce ne sont pas des propositions.} \end{array}$$

Mais si on fixe la variable n, $P(n)$ devient une proposition ; si on fixe la variable x, $Q(x)$ devient une proposition.

Définitions
Un *prédicat* est un énoncé dépendant d'une ou plusieurs variables et dont on pourra dire s'il est vrai ou faux suivant le choix de la variable (ou des variables). L'ensemble dans lequel on choisit la variable est l'*univers*. Le nombre de variables intervenant dans le prédicat est le *poids* du prédicat.

Exemples 11

- $P(x)$: *"x est un entier pair"*

  univers de P : $\mathbf{N}$; poids de P : 1

- $Q(T)$: *"le triangle T est isocèle"*

  univers de Q : l'ensemble des triangles du plan ; poids de Q : 1

- $R(m, n)$: *"le couple d'entiers relatifs (n, m) est tel que $n + m = 15$"*

  univers de R : $\mathbf{Z}$; poids de R : 2

Remarque : dans un prédicat de poids p, si l'on assigne une valeur à l'une des variables on obtient un prédicat de poids $p - 1$.

Exemple 12

$P(m, n)$: "le couple d'entiers (n, m) est tel que $n + m > 12$" : P est un prédicat de poids 2

$Q(m) = P(3, m)$: "l'entier m est tel que $3 + m > 12$" : Q est un prédicat de poids 1.

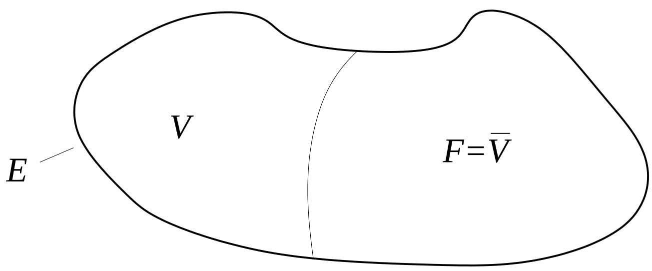
Si l'on remplace m par 2 on obtient la proposition $Q(2)$ dont la valeur de vérité est ...

Convention : une proposition est un prédicat de poids 0.

Quantificateurs

Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers E. P associe à $x \in E$ la proposition $P(x)$.
On pose :

$$V = \{x \in E \mid P(x) \text{ est vraie}\},$$
$$F = \{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\}.$$



Si $V = E$, cela signifie que pour tout $x \in E, P(x)$ est vraie. On notera alors

$$\forall x \in E, P(x).$$

Si $V = \emptyset$, cela signifie que pour tout $x \in E, P(x)$ est fausse. Cela se note

$$\forall x \in E, \neg P(x).$$

Si $V \neq \emptyset$, cela signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie. On notera alors

$$\exists x \in E, P(x).$$

Exemples 13

A partir du prédicat $P(n)$: "l'entier naturel n est pair", on construit

la proposition : $\forall n \in \mathbf{N},\ P(n)$ (qui a la valeur logique ...), et

la proposition : $\exists n \in \mathbf{N},\ P(n)$ (qui a la valeur logique ...).

On peut généraliser au cas des prédicats de poids supérieur, et utiliser des quantificateurs différents pour chaque variable.

Attention : lorsque deux quantificateurs sont différents, l'ordre dans lequel ils sont a une importance.

Exemple 14

Soit $E = \mathbf{R}$, et le prédicat de poids 2 suivant $P(x, y) : x \geq y$

on peut construire les propositions suivantes (dont on indiquera la valeur logique) :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ \ x \geq y,$$
$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ \ x \geq y,$$
$$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ \ x \geq y,$$
$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ \ x \geq y.$$

Prédicats et opérateurs logiques

Exemple 15

Considérons les deux prédicats suivants :

$P(n)$: "l'entier naturel n est impair" ; $Q(m)$: "l'entier naturel m est un nombre premier"

On peut définir des prédicats à l'aide des opérateurs logiques $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \ldots$, par exemple :

$$P \wedge Q(n) = P(n) \wedge Q(n) : \text{“}n \text{ est un entier impair et premier“}.$$

Attention : *ne pas confondre avec $P(n) \wedge Q(m)$: "n est impair et m est premier" qui est un prédicat de poids 2*

Propriétés : soient P et Q deux prédicats de même univers E.

- $(\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x))$ et $(\forall x \in E,\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x))$ ont les mêmes valeurs de vérité.
- $(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x))$ entraîne $(\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x))$ mais la réciproque n'est pas vraie.
- $(\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x))$ et $(\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x))$ ont les mêmes valeurs de vérité.
- $(\forall x \in E,\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x))$ entraîne $(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x))$ mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 16

contre-exemple pour la dernière :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (x \geq 0 \vee x \leq 0),$$
$$(\forall x \in \mathbf{R},\ x \geq 0) \vee (\forall x \in \mathbf{R},\ x \leq 0).$$

Exercice de cours 11. Donner un contre-exemple à la réciproque de la deuxième.

Propriétés : soit P un prédicat d'univers E.

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in E,\ (\neg P(x)),$$

et

$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in E,\ (\neg P(x)).$$

Exemples 17

- *A : "tout entier naturel est pair"*

non A :

- *B : "il existe une montagne sur la Terre qui mesure plus de 10km de haut"*

non B :

Exercice de cours 12. Donner la valeur de vérité et écrire la négation des propositions suivantes :

$$\exists x \in \mathbf{R}, |x| < 0 \qquad ; \qquad \forall y \in \mathbf{R}, y^2 \geq 0$$

$$\exists z \in \mathbf{R}, z^2 - 4 < 0 \qquad ; \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^2 + y < 0$$

---

4. Principe d'induction, démonstration par récurrence

Théorème : principe d'induction faible (récurrence)

Soit $P(n)$ un prédicat d'univers $\mathbf{N}$, c'est-à-dire $n \in \mathbf{N}$.

$$\text{Si} \qquad \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbf{N}\ P(n) \rightarrow P(n+1) \end{cases}$$

alors $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ est vraie.

Variante : on peut démarrer une récurrence à partir d'un $n_0 \in \mathbf{N}$, on montre alors que $\forall n \geq n_0, P(n)$.

Applications : à l'aide de ce principe on effectue des démonstrations par récurrence.

Exemple 18

Considérons le prédicat suivant

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$n = 1$ *:*

supposons

conclusion :

Attention : ne pas oublier de vérifier $P(0)$ ou $P(n_0)$.

Exemple 19

Considérons le prédicat suivant

Si E est un ensemble de cardinal n, alors $Card\mathcal{P}(E) = 2^n$.

$n = 0$ *:*

supposons

conclusion :

Récursivité
Dans l'ensemble $\mathbf{N}$ on définit l'application "successeur" par

$$\begin{array}{rrcl} s: & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ & n & \longmapsto & s(n) = n+1 \end{array}$$

Le principe d'induction exprime le fait que si une partie A de $\mathbf{N}$ vérifie

$$\begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A, s(n) \in A \end{cases}$$

alors $A = \mathbf{N}$.
Une généralisation de ce principe est la définition d'ensembles de façon *récursive* : illustrons d'abord ceci par un exemple.

Exemple 20

On définit un sous-ensemble A de $\mathbf{N}$ en déclarant :

$$\begin{cases} (i)\ 1 \in A \\ \text{et} \\ (ii)\ \text{si } a \in A,\ \text{alors } 7a \in A \end{cases}$$

En partant de (i) et en appliquant de façon répétée la règle (ii), on voit que A est formé des puissances de 7.

Définition D'une façon générale, pour définir un sous-ensemble A de l'ensemble E de façon récursive, on se donne

- une partie B de E appelée la *base*,
- des fonctions $f : E^n \to E$ appelées *règles d'induction*,

et on déclare que A est la plus petite partie de E qui vérifie

- $B \subset A$,
- $f(A^n) \subset A$ pour chaque règle d'induction.

Travaux Dirigés

Exercice 1.
Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ? *On commencera par les écrire à l'aide de connecteurs logiques et de propositions plus simples.*
A="si 5 est plus grand que 9 alors l'eau bout à 100 degrés"
B="si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6"
C="si 7 est plus petit que 6 alors 6 est plus petit que 7"

Exercice 2.
Vérifier en dressant leur table de vérité les propriétés suivantes vues en cours :

- lois de Morgan

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$$

- exportabilité

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Exercice 3.
Construire les tables de vérité des propositions suivantes :

$$Q = (q \leftrightarrow r) \wedge p,$$

$$R = (p \vee r) \rightarrow (q \wedge \neg p).$$

Exercice 4.
Démontrer que les propositions $\neg(p \rightarrow q), p \wedge \overline{q}$ et $\neg(\overline{p} \vee q)$ sont logiquement équivalentes.
Même question pour $\neg(p \,\mathsf{w}\, q)$ et $p \leftrightarrow q$.

Exercice 5.
a) Donner une formule propositionnelle P ayant la table de vérité suivante :

p	q	$P(p,q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

b) Même question avec

p	q	r	$Q(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 6.
Parmi les formules suivantes, y a-t-il des tautologies ? Des contradictions ? Si oui, lesquelles ?

$$(\overline{p} \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \overline{q}),$$

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p),$$

Exercice 7.
Un système d'opérateurs est *primitif* (ou complet) s'il est possible d'exprimer tous les opérateurs logiques d'ordre 2 à partir des opérateurs de ce système.
1) Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ est primitif.
2a) Montrer que $p \downarrow p$ et $\overline{p}$ sont logiquement équivalents,
2b) montrer que $p \downarrow q \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$,
2c) en déduire que $p \wedge q$ et $p \vee q$ peuvent s'écrire uniquement avec le connecteur $\downarrow$,
2d) conclure que le système $\{\downarrow\}$ est primitif.

Exercice 8. On considère les propositions
p_1="s'il fait chaud et humide, alors il pleut",
p_2="s'il fait humide, alors il fait chaud",
p_3="maintenant il fait humide",
p="il pleut".
Exprimer p_1, p_2 et p_3 à l'aide de proposition simples (atomes).
Montrer que p est une conséquence logique de $\{p_1, p_2, p_3\}$.

Exercice 9. Les formules suivantes sont-elles compatibles ?

$$\{\ (p \vee q) \rightarrow r\ ,\ (p \wedge q) \vee r\ ,\ (r \wedge p) \vee (\neg r \wedge q)\ \}.$$

Exercice 10.
On considère trois personnes Pierre, Jacques et André à propos desquels on sait les faits suivants :
(F_1) l'un des trois au moins est blond,
(F_2) si Pierre est blond mais pas Jacques, alors André est blond,
(F_3) si Jacques est blond alors Pierre ne l'est pas,
(F_4) soit André et Jacques sont tous les deux blonds, soit ils ne le sont ni l'un ni l'autre.
a) représenter ces faits en calcul propositionnel.
b) l'ensemble des faits $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ est-il cohérent (consistant) ?
c) peut-on répondre à la question suivante : quel(s) est(sont) la(les) personnes blondes ?

Mise en œuvre de schémas de raisonnements

Exercice 11.
On considère la proposition suivante, dont on suppose qu'elle est vraie :
Q="Si je ne sais pas additionner 2 et 2, alors je ne suis pas mathématicien".
a) écrire Q à l'aide de 2 propositions plus simples et du connecteur logique $\rightarrow$.
b) écrire Q sous forme contraposée.
c) que peut-on dire si je suis mathématicien ?
d) que peut-on dire si je ne suis pas mathématicien ?
e) que peut-on dire si je sais additionner 2 et 2 ?
f) que peut-on dire si je ne sais pas additionner 2 et 2 ?

Quantificateurs

Exercice 12.
Donner une expression des affirmations suivantes au moyen de prédicats et de quantificateurs :
"tout nombre pair plus grand que 2 est somme de 2 nombres premiers"
"un polynôme de degré n ne peut pas s'annuler plus de n fois"
"un nombre complexe égal à son conjugué est un réel"

Exercice 13.
Soit V l'ensemble des vaches, B l'ensemble des vaches brunes, T l'ensemble des vaches qui possèdent une ou des taches blanches et $f : V \rightarrow \mathbf{N}$ l'application qui à une vache associe son âge.
Ecrire les propositions suivantes sous forme symbolique (avec des quantificateurs) :
1. Il existe une vache brune.
2. Toutes les vaches sont agées de 4 ans.
3. Il y a au moins une vache qui est brune et qui possède des taches blanches.
4. Toutes les vaches agées de 4 ans sont brunes.
5. Il existe une vache telle que si elle est agée de 4 ans, alors elle ne possède pas de taches blanches.
6. Une vache est brune si et seulement si elle est agée de 4 ans.
7. Il n'y a pas de vache brune.
8. Si une vache est agée de 4 ans, alors toutes les vaches sont agées de 4 ans.
9. Une vache ne possédant pas de taches blanches est nécessairement brune.
10. S'il existe une vache brune, alors soit elle n'est pas agée de 4 ans soit elle possède des taches blanches.

Exercice 14. Ecrire les négations des propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 2 = 0$$

$$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$\forall n \in \mathbf{N}, ((n \text{ premier}) \wedge (\text{n} > 2)) \rightarrow \text{n impair}$$

Exercice 15. Donner la valeur de vérité et écrire la négation des propositions suivantes :

$$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + y < 0,$$

$$\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + y < 0.$$

Récurrence, récursivité

Exercice 16. Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 17. On veut vérifier que

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

a) montrer cette formule par récurrence.
b) vérifier que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

puis montrer $(\star)$ directement.

Exercice 18.
On définit une partie A de $\mathbf{N}$ en déclarant :

$0 \in A$,

si $x \in A$ alors $x + 5 \in A$.

Reconnaître A.

Exercice 19.
On définit une fonction φ sur l'ensemble $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \text{si } n \in \mathbf{N}, \text{ on pose } \varphi(n+1) = (n+1)\varphi(n). \end{cases}$$

Reconnaître φ.