Université Toulouse III – Paul sabatier
L2 Informatique

Architecture des systèmes Informatiques — TD

Semestre 3

Toulouse, le 28 novembre 2012

Table des matières

Chapitre 1

Numérotation et codage TD optionnel

1.1 Numérotation

1.1.1 Réaliser l'opération suivante en binaire : $(1101011 - 10110) \times 11001$

$$
\begin{array}{rcl}
(110\ 1011)_2 & = & (107)_{10} \\
(1\ 0110)_2 & = & (22)_{10} \\
(1\ 1001)_2 & = & (22)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
- & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
\text{ Ou }
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$(1010101)_2 = (85)_{10}$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & \times & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

1.1.2 Réaliser les opérations suivantes en hexadécimal : $(389A+7293)-EB2$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 3 & 8 & 9 & \mathrm{A} \\
+ & 7 & 2 & 9 & 3 \\
\hline
 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & 2 & \mathrm{B} \\
- & \mathrm{E} & \mathrm{B} & 2 & \mathrm{B} \\
\hline
 & 9 & \mathrm{C} & 7 & \mathrm{B}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(389A)_{16} & = & (0011\ 1000\ 1001\ 1010)_2 \\
(7293)_{16} & = & (0111\ 0010\ 1001\ 0011)_2 \\
(AB2B)_{16} & = & (1010\ 1011\ 0010\ 1101)_2 \\
(EB2B)_{16} & = & (0000\ 1110\ 1011\ 0010)_2 \\
(9C7B)_{16} & = & (1001\ 1100\ 0111\ 1011)_2
\end{array}
$$

1.1.3 Effectuer les conversions ci-dessous

1.1.3.1 $(1447.140625)_{10} = (??)_2 = (??)_{16}$

$$\begin{aligned}
1447 \div 16 &= 90\ R = 7 \\
90 \div 16 &= 5\ R = A \\
5 \div 16 &= 0\ R = 5 \\
(1447)_{10} &= (5A7)_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0.140625 \times 16 &= 2.25 \\
0.25 \times 16 &= 4.00 \\
(0.140625)_{10} &= (0.24)_{16}
\end{aligned}$$

$$(1447.140625)_{10} = (5A7.24)_{16} = (0101\ 1010\ 0111.0010\ 0100)_2$$

1.1.3.2 $(1111100101.01011)_2 = (??)_{10} = (??)_{16}$

$$\begin{aligned}
(11\ 1110\ 0101.0\ 1011)_2 &= (3E5; 58)_{16} \\
3E5 &= (3 \times 16^2 + 14 * 16 + 5 + 5 \times 16^{-1} + 8 \times 16^{-2} \\
&= (997, 34375)_{10}
\end{aligned}$$

1.2 Codage

1.2.1 Codage de nombres entiers relatifs

On veut coder des entiers relatifs sur 16 chifffres binaires (deux octets).

	Valeur absolue		Valeur relative	
Base 10	**Base 2**	**Base 16**	**Valeur absolue + signe**	**Complément à 2**
35671	10000 010 0101 0111	75B8	Hors intervalle	Hors intervalle
−32768	1000 0000 0000 0000	8000	Hors intervalle	1000 0000 0000
46443	1011 0101 0110 1011	B56B	Hors intervalle	Hors intervalle
−19536	0100 1100 0110 0100	4C64	1100 1100 0110 0100	1011 0011 1001 1100
−19040	0100 1010 0110 0000	4A60	1100 1010 0110 0000	1011 0101 1010 0000

1.2.1.1 Calcul de la valeur absolue en base 2

$$
\begin{aligned}
3567 \div 16 &= 229 \text{ et reste } 7 \\
2229 \div 16 &= 139 \text{ et reste } 5 \\
139 \div 16 &= 8 \text{ et reste B} \\
8 \div 16 &= 0 \text{ et reste } 8
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (35671)_{10} = (8B57)_{16} = (1000\ 1010\ 0101\ 0111)_2$$

R Afin de pouvoir représenter un nombre celui-ci ne doit pas dépasser un certain intervalle :

Entier naturel $[0; 2^{16-1}] = [0; 65535]$

Valeur absolue + signe $[-2^{15-1}; 2^{15-1}] = [-16384; 16384]$

Complément à deux $[-2^{15}; 2^{15}] = [-32768; 32768]$

1.2.2 Convertir un nombre flottant en décimal

0	1000 0001	1110 0000 0000 0000 0000 0000

$$C = E + biais$$

En simple précision biais = 127.

$$
\begin{aligned}
S &= 0 \rightarrow \text{ positif} \\
C &= 129 \\
E &= C - 127 = 2 \\
1.M &= 1.111 \Rightarrow 1.111 \times 2^2 = 111.1 \times 2^0 = (7.5)_{10}
\end{aligned}
$$

1.2.3 Convertir un nombre décimal en flottant

$$\begin{aligned}
(35.5)_{10} &= ? \\
100011.1 &= 10000111 \times 2^5 \\
\text{Nombre positif donc } S &= 0 \\
E &= 5 \\
C &= E + 127 = 132 = 128 + 4 = (10000100)_2 \\
1.M &= 1.00011 \\
M &= 0011
\end{aligned}$$

0	1000 0001	0100 0011 0000 0000 0000 0000

Chapitre **2**

Algèbre de Bool

2.1 Table de vérité des opérateurs classiques

2.1.1 Exercice 1

2.1.1.1 A – Démontrer que les opérateurs NAND et NOR sont des opérateurs complets

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= A|A \\
A.B &= \overline{\overline{A.B}} = \overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{A/B} = (A|B)|(A|B) \\
A+B &= \overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A}+\overline{B}} = (A|B)|(B|B)
\end{aligned}
$$

$$
\overline{A} = \overline{A+A} = A \downarrow A
$$
$$
A.B = \overline{\overline{A.B}} = \overline{\overline{A}+\overline{B}} = A \downarrow B \downarrow (\downarrow B \downarrow B)
$$

2.1.1.2 B –

1. $f(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{D} + B\overline{C} + A\overline{C}D = \overline{\overline{\overline{A}B\overline{D} + B\overline{C} + A\overline{C}D}} = \overline{(\overline{\overline{\overline{BD}).(\overline{A\overline{C}D}}})} =$ $((A|A)|B((D|D)))|(B|(C|C))|(A|(C|C)|D)$
2. $f(A,B,C,D) = (A+B)(\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) = \overline{\overline{(A+B)(\overline{C}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})}} =$ $\overline{\overline{AB}) + CD + ABC} = \overline{\overline{AB}}.\overline{CD}.\overline{ABC} =$ $((A|A)(B|B)|(C|D)|(A|B|C))|((A|A)(B|B)|(C|D)|(A|B|C)) =$ $((A \downarrow B) \downarrow (C \downarrow C) \downarrow (D \downarrow D) \downarrow (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) \downarrow (C \downarrow C))$

2.1.2 Exercice 3

2.1.2.1 1

$f(w,x,y,z) = \sum n(1,3,4,7,9,11,12,15) = yz + \overline{x}z + x\overline{yz}$

	00	01	11	10
00		1	1	
01	1		1	
11	1		1	
10		1	1	

2.1.2.2 2

$f(w,x,y,z) = \sum m(0,1,3,6,9,13,15) = \overline{wxy} + \overline{wx}z + wxz + w\overline{y}z + w\overline{x}y\overline{z}$

	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				1
11		1	1	
10		1		

2.1.2.3 3

$f(w,x,y,z) = \sum m(0,1,5,7,8,10,14,15) = \overline{wxy} + \overline{w}xz + wxy + w\overline{xz}$

	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11			1	1
10	1			1

2.1.3 4

	00	01	11	10

2.1.4 5

	00	01	11	10

2.1.5 9

$f(w,x,y,z) = \Pi M(1,3,4,9,11,14)CI(w,x,y,z) = (x+\overline{z})(\overline{x}+z)$

	00	01	11	10
00		0	0	
01	0			*
11	*	*		0
10		0	0	

2.1.6 11

$f(w,x,y,z) = \sum m(0,1,3,5,6,7,11,13,14,15)CI(w,x,y,z) = 4$
$f(w,x,y,z) = \overline{yw} + yz + xy + xz$

	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	*	1	1	1
11		1	1	1
10			1	

Fonctions logiques

3.1 Exercice 1 : Simplifications algébriques

3.1.1

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned}
F_1 &= (x+y+z).(\overline{x}+\overline{y}+z+xy+\overline{xy}) \\
&= (x+y+z).(\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}}+z+xy+\overline{\overline{xy}}) \\
&= (x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}(1+\overline{x})+z+xy) \\
&= (x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z+xy) \\
&= (x+y+z)(\overline{xy}+xy+z) \\
&= (x+y+z)(1+z) \\
F_1 &= x+y+z
\end{aligned}$$

3.1.2

$$\begin{aligned}
F_2 &= \sum m(0,4,6,7,14,15) \\
&= \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{w}+\overline{x}y\overline{z}\overline{w}+\overline{x}yz\overline{w}+\overline{x}yzw+xyz\overline{w}+xyzw \\
&= \overline{x}\overline{z}\overline{w}(y+\overline{y})+\overline{x}yz(w+\overline{w})+xyz(w+\overline{w}) \\
&= \overline{x}\overline{z}\overline{w}+\overline{x}yz+xyz \\
&= \overline{x}\overline{z}\overline{w}+xy(x+\overline{x}) \\
F_2 &= \overline{x}\overline{z}\overline{w}+xy
\end{aligned}$$

3.2 Exercice 2 : Formes canoniques

3.2.1

$G_1 = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \sum m(0,4,6)$ et $I_2 = \Pi M(1,4,5)$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \sum m(0,4,6) + \Pi M(1,4,5) \\
&= \sum m(0,4,6) + \sum m(0,2,3,6,7) \\
G_1 &= \sum m(0,2,3,4,6,7) \Rightarrow \text{ Forme canonique Disjonctive} \\
G_1 &= \Pi M(1,5) \Rightarrow \text{ Forme Canonique Conjonctive}
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Les circuits combinatoires

4.1 Exercice 1

4.1.1 Encodeur de priorité

E_3	E_2	E_1	E_0	S_1	S_0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	*	0	1
0	1	*	*	0	1
1	*	*	*	1	1

$$\begin{aligned} S_1 &= E_3E_2 + E_3 = E_3 + E_2 \\ S_0 &= E_3E_2E_1 + E_3 = E_3 + \overline{E_2}E_1 \end{aligned}$$

R Théorème d'absorption

4.1.2 Comparateur 4 bits

4.1.2.1 Comparateur 1 bit

A	B	S	I	E
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

$$\begin{aligned} S &= a\overline{b} \\ I &= \overline{a}b \\ E &= \overline{a}\overline{b} + ab = a \odot b \end{aligned}$$

R

$$a\overline{\oplus}b \Leftrightarrow a \odot b$$

4.1.2.2 Comparateur 2 bits

$$\underbrace{a_1 a_0}_{A} + \underbrace{b_1 b_0}_{B}$$

$$\begin{aligned}
E &= (a_1 \odot b_1)(a_0 \odot b_O) \\
S &= a_1\overline{b_1} + a_0\overline{b_0}(a_1 \odot b_1) \\
I &= \overline{a_1}b_1 + \overline{a_0}b_0(a_1 \odot b_1)
\end{aligned}$$

4.1.2.3 Comparateur 4 bits – Généralisation

$$\begin{aligned}
E &= (a_3 \odot b_3)(a_2 \odot b_2)(a_1 \odot b_1)(a_0 \odot b_0) \\
S &= a_3\overline{b_3} + a_2\overline{b_2}(a_3 \odot b_3) + a_1\overline{b_1}(a_3 \odot b_3)(a_2 \odot b_2) + a_0\overline{b_0}(a_3 \odot b_3)(a_2 \odot b_2)(a_1 \odot b_1) \\
I &= \overline{a_3}b_3 + \overline{a_2}b_2(a_3 \odot b_3) + \overline{a_1}b_1(a_3 \odot b_3)(a_2 \odot b_3) + \overline{a_1}b_1(a_3 \odot b_3)(a_2 \odot b_2) + \\
&\quad \overline{a_0}b_0(a_3 \odot b_3)(a_2 \odot b_2)(a_1 \odot b_1)
\end{aligned}$$

4.2 Exercice 2

C_1	C_0	S_3	S_2	S_1	S_0
0	0	E_3	E_2	E_1	E_0
0	1	0	E_3	E_2	E_1
1	0	0	0	E_3	E_2
1	1	0	0	0	E_3

$$\begin{aligned}
S_3 &= \overline{C_1C_0}E_3 \\
S_2 &= \overline{C}_1\overline{C}_0E_2 + \overline{C_1}C_0E_3 \\
S_1 &= \overline{C_1C_0}E_2 + C_1\overline{C_0}E_3 \\
S_0 &= \overline{C_1C_0}E_0 + C_1\overline{C_0}E_1 + C_1\overline{C_0}E_2 + C_1C_0E_3
\end{aligned}$$