Feuille Révisions Graphe

Chap 1:

Prop fondamentales:

R est réflexive ssi $\forall x \in E, (x,x) \in R$

R est irréflexive ssi $\forall x \in E, (x,x) \in R$

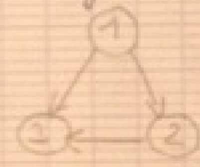
R est symétrique ssi $\forall x,y \in E, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

R est assymétrique ssi $\forall x,y \in E, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

R est antisymétrique ssi $\forall x,y \in E, (x,y) \in R$ et $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$

! assymétrique = antisymétrique + irréflexive !

R est transitive ssi $\forall x,y,z \in E, (x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$
$\Rightarrow (x,z) \in R$



relation transitive

Relation d'équivalence: réflexive, symétrique, transitive

Classe d'équivalence de x, notée $\bar{x}$, $\bar{x} = \{y \in E \mid (x,y) \in R\}$

Si R rel. d'équiv. sur E, l'ensemble des classes d'équiv $\{\bar{x}, x \in E\}$ est appelé quotient de E sur R noté E/R.

- Relation identité $= I_E$ est la relation tq. $\forall x \in E, (x,x) \in I_E$
- Relation réciproque de R, noté R^{-1} (inverse) est tq. $\forall x,y \in E, (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$
- Relation complémentaire de R, noté $\bar{R}$ (tout ce qui $\in$ à $\bar{R}$ n'appartient pas à R).

Relation d'ordre: antisym et tran

ordre large: réflexive, antisym, tran

— strict: irréflexive, antisym, tran

ordre total: si $(x,y) \in R$ alors $(y,x) \notin R$ $(x \neq y)$

pré-ordre: réflexive et tran

Diagramme de Hasse: on prend $\hat{R}$ (ordre strict de R) et on crée S, le squelette de R par:

$(x,y) \in S \Leftrightarrow (x,y) \in \hat{R}$ et $\nexists z \in E, (x,z) \in \hat{R}$ et $(z,y) \in \hat{R}$

Rep du diag de Hasse : $(a,b) \in S$

b
|
a

Chap 2 :

Un graphe G est un couple (X, U) où :
$X = \{x_i, i = 1..n\}$ (n fini, n = ordre du graphe)
U ensemble de couples de sommets $X \times X$ (a $\subset S$)
Soit $u(x,y) \in U$, x est appelée origine de u et si $x = y$ c'est une boucle.

Multigraphe :

Graphe partiel : $G(X,U)$, $G'(X,U')$, $U' \subset U$

Hypergraphe :

Sous-graphe : $G(X,U)$, $G_{X'}(X', U_{X'})$ avec $X' \subset X$ et $U_{X'} = \{(x_i, x_j) \in U \mid x_i, x_j \in X'\}$

Graphe simple :

Graphe complet

Dico d'un graphe :

ens des succ : $\Gamma^+(x)$ successeur d'un sommet x tout sommet y tq $(x,y) \in U$
ens des préd : $\Gamma^-(x)$ prédécesseur ——— tq $(y,x) \in U$
$\Gamma^+(x) + \Gamma^-(x) = \Gamma(x)$: voisins de x.
$d^+(x)$: nb d'arcs d'origine x, $d^-(x)$: nb d'arcs extrémité x, $d^+(x) + d^-(x) = d(x)$
Si $d^-(x) = 0$ alors x est une source, $d^+(x) = 0$ alors x est un puit.

Matrice d'incidence :

sommet-sommet Mat $n \times n$ (n = nb sommets) bool

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0
4	1	0	0	0

sommet arcs Mat $n \times m$ (n sommets m arcs)

$$b_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ origine de l'arc } u_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ extrémité de } u_j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Chemins – Circuits

$G=(X,U)$ Chemin : suite d'au moins deux sommets $(s_1, \dots, s_p)$ où $\forall i \in [1, p-1]$, (s_i, s_{i+1}) est un arc de U alors la seq est appelé chemin (graphe orienté).

Coût = nb arcs, ens des chemins x à y : $\mathcal{C}_G(x,y)$

Chemin simple si tous les arcs sont $\neq$.

Circuit chemin simple dont les deux extrémités sont =.

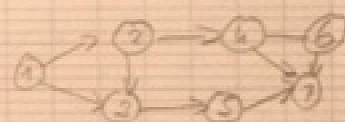
Chemin élem si tous les sommets sont distincts.

y est un descendant de x ssi il $\exists$ un chemin de x à y

——— ascendant ——— un chemin de y à x

Parcours en largeur

liste : 1 2 3 3 4 5 6 7 7 7



Parcours en prof :

liste : 1 2 4 6 7 7 3 5 7

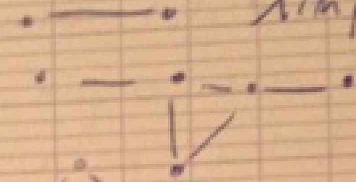
largeur

OUVERT	FERMÉ
1 →	1
2 (1) →	2
3 (1) →	3
4 (2) →	4
3 (2)	
5 (3) →	5
6 (4) →	6
7 (4) →	7
7 (5)	
7 (6)	

profondeur

OUVERT	FERMÉ
7 (6)	
6 (4) →	6
7 (4)	4
7 (6) →	7
5 (3) →	5
3 (2) →	3
4 (2)	
2 (1) →	2
3 (1)	
1 →	1

non orienté : chaine



simple

non simple

cycle

Graphe non orienté : $G = (X, U)$

X ensemble fini de sommets $X = \{x_i, i = 1..n\}$

U ensemble d'arêtes (x_i, x_j) (x_j, x_i) = même arête.

Graphe complet

Clique : sous graphe non orienté complet.

Stable : deux sommets distincts ne sont pas adj.

Connexité :

connexité entre x et y

Si le graphe est connexe, les sous graphes le sont aussi

forte connexité

chemin entre x et y et y e

graphe réduit → graphe f-connexe sans circuit [illegible] par [illegible]

Connexité :
connexité entre x et y   x — · — · — y
Si le graphe est connexe, les sous-graphes le sont aussi
forte connexité $x \rightleftarrows y$ chemin entre x et y et y et x
graphe réduit → graphe de sommets sans circuits

Cours 2 :
Partition de niveaux

$\Gamma^{-1}(x)$ – tracer le dictionnaire des sommets précédents du graphe
– On barre tous les sommets source (sans précédents) et partout où ils apparaissent → les sources sont donc le niveau 0.
– On réitère la procédure avec les sommets restants.
– Si tous les sommets ont été barrés alors le graphe est sans circuit et les parties (N_0, N_1, N... chaque niveau) constituent une partition de X appelée G. (partition de niveaux).

Suite feuille révision Graphes.

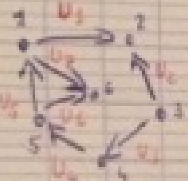
Nombre cyclomatique d'un graphe:

Un graphe orienté à m arcs et soit μ un cycle

Le vecteur cycle $\vec{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^m)$ associé à μ et à un sens de parcours de μ est un m-uplet de $\mathbb{R}^m$

$$\mu^i \begin{cases} 0 & \text{si l'arc } u^i \text{ n'apparait pas de le cycle} \\ 1 & \text{si l'arc } u^i \text{ est utilisé dans le sens de parcours} \\ -1 & \text{opposé} \end{cases}$$

Ex:



le cycle $123451 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
$= (1, -1, 1, 1, 1, 0, 0]$

$1234561 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7\}$
$= (1, -1, 1, 1, 0, 1, -1)$

Des cycles sont dits dépendants s'il est possible d'en exprimer un en fonction de l'autre.

Le nb max de cycles indep dans un cycle et de:

nb cyclomatique: $V(G) = m - n + p$: m = nb arcs, n = nb sommets, p = nb de comp connexes.

Si G sans cycles = $m \leq n-1$ } Arbre.
Si G connexe = $m \geq n-1$ }

Arbre H → connexe et sans cycles, $n-1$ arcs, si $+1$ arc on crée un cycle unique, si -1 arc on le rend non connexe, chaque sommet est relié par une chaîne unique

orienté	non orienté
"arc"	"arrête"

mais toujours "chaîne"

Arbre partiel, arbre partiel de l'arbre, sans cycle et connexe.

Arbre partiel de poid minimum: trouver un graphe partiel de G qui soit connexe et de poid $\sum_{u \in U'} p(u)$ minimum parmi tous les graphes partiels de G.

PRIM

- On se place sur un sommet quelconque de X.
- On sélectione l'arc de poid minimume ne créant pas de cycle
- fin lorsque chaque arc sélectionné -> cycle

KRUSKAL (croissant)

- On classe préalablement tous les arcs par leur poid dans l'ordre croissant.
- On ajoute chaque arc ne créant pas de cycle
- fin lorsque nb arcs = n - 1.

Ex PRIM:

t	arc sélectionné	X_k	U_k	P(G)
0	/	{sommet}	$\emptyset$	0
1	(sommet, sommet)	{sommet, sommet, ...}	{(.., ..), (.., ..)}	⋮
⋮	·			⋮
n-1	(sommet, sommet)	{sommet ... ... sommet}	{(.., ..), (.., ..) ... (.., ..) ...}	P

t = temps, X_k = ensemble sommets, U_k = ensemble d'arcs, P(G) = poid courant.

Ex KRUSKAL croissant:

(sommet, sommet) ≤ (sommet, sommet) ≤ (. . . . . . . ≤ (sommet, sommet)
poid ≤ poid ≤ poid . . . ≤ poid.

Un sommet pendant est un sommet n'étant attaché uniquement par un seul arc