Traitements de l'information

Opérations logiques et décalages

- Les opérations logiques de base sont
  - Le complément, le produit logique, la somme logique, la somme exclusive
  - Elles peuvent porter sur
    - Des éléments unitaires (bits), des mots, des doubles mots
- Les opérations de décalages portent sur
  - Des mots ou des doubles mots
  - Elles sont utilisées dans les opérations de multiplication et de division
  - Certaines permettent de faire des multiplications ou des divisions par des puissances de la base

Opération logique monadique complément

- Cette opération porte sur un opérande logique et donne un résultat logique de même longueur. On la note $Y \leftarrow \overline{X}$
- Complément d'un bit
  - L'opération est définie par le tableau suivant

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

- Complément d'un mot de *n* bits

$$Y \leftarrow \overline{X} \Leftrightarrow \forall\, i \in \{0, \dots, n-1\},\, Y_i \leftarrow \overline{X}_i$$

Opérations logiques dyadiques

- Cette opération porte sur deux opérandes logiques de même longueur et donne un résultat logique de même longueur

- On la note $Z \leftarrow X \,\phi\, Y$

avec Φ = . pour le produit logique
Φ = + pour la somme logique
Φ = ⊕ pour la somme exclusive

Opérations logiques dyadiques

- Opérations sur deux bits

x	y	$x.y$	$x+y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

- Opérations sur deux mots

$$Z \leftarrow X \,\phi\, Y \Leftrightarrow$$
$$\forall\, i \in \{0, \dots, n-1\},\, Z_i \leftarrow X_i \,\phi\, Y_i$$

Opérations de décalages

- Il existe 3 sortes de décalages
  - les décalages logiques
    - Ils permettent de multiplier ou diviser les entiers naturels par les puissances de la base
  - les décalages cycliques
  - les décalages arithmétiques
    - Ils permettent de multiplier ou diviser les entiers relatifs par les puissances de la base
- Composition de décalages
  - On définit des décalages de *p* positions, qui peuvent s'effectuer comme la composition de *p* décalages d'une position

Décalage logique à droite

- On note cette opération

$$Y \leftarrow DLD(p, X) \quad avec \quad 1 \leq p < n$$

- Elle est définie par

$$\forall j \in \{n-p, \ldots, n-1\}, Y_j \leftarrow 0$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n-p-1\}, Y_i \leftarrow X_{i+p}$$

- Pour un entier naturel

$$DLD(p, X) \Leftrightarrow X \div 2^p$$

Décalage logique à gauche

- On note cette opération

$$Y \leftarrow DLG(p, X) \quad avec \quad 1 \leq p < n$$

- Elle est définie par

$$\forall j \in \{0, \ldots, p-1\}, Y_j \leftarrow 0$$
$$\forall i \in \{p, \ldots, n-1\}, Y_i \leftarrow X_{i-p}$$

- Pour un entier naturel

$$DLG(p, X) \Leftrightarrow (X \times 2^p) mod\ 2^n$$

Décalage cyclique à droite

- On note cette opération

$$Y \leftarrow DCD(p, X) \quad avec \quad 1 \leq p < n$$

- Elle est définie par

$$\forall j \in \{n-p, \ldots, n-1\}, Y_j \leftarrow X_{j+p-n}$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n-p-1\}, Y_i \leftarrow X_{i+p}$$
$$ou\, alors$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, Y_i \leftarrow X_{(i+p) mod\, n}$$

Décalage cyclique à gauche

- On note cette opération

$$Y \leftarrow DCG(p, X) \quad avec \quad 1 \leq p < n$$

- Elle est définie par

$$\forall j \in \{0, \ldots, p-1\}, Y_j \leftarrow X_{j-p+n}$$
$$\forall i \in \{p, \ldots, n-1\}, Y_i \leftarrow X_{i-p}$$
$$ou\, alors$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, Y_i \leftarrow X_{(i-p) mod\, n}$$

Décalages cycliques

- Propriété des décalages cycliques

$$DCG(p, X) \Leftrightarrow DCD(n-p, X)$$
$$DCD(p, X) \Leftrightarrow DCG(n-p, X)$$

- Intérêt de cette propriété
  - Sur les machines modernes, qui font tous les décalages en temps constant, elle permet de ne définir qu'une seule des 2 opérations
  - Sur des machines plus anciennes, où le temps est proportionnel à *p*, elle permet de choisir le sens le plus rapide

Décalages arithmétiques

- Ces décalages ont étés définis pour réaliser des multiplications et divisions par les puissances de 2 sur des entiers relatifs

- Leur définition dépend donc du mode de représentation des relatifs
  - Valeur absolue et signe (VA+S)
  - Complément vrai (CV)

Décalages arithmétiques à droite en VA+S

- On note cette opération

  $$Y \leftarrow DAD_{VA+S}(p, X) \quad avec \quad 1 \le p < n$$

- Le signe est inchangé et on fait un décalage logique de la valeur absolue

$$Y_n \leftarrow X_n$$
$$\forall\, j \in \{n-p, \dots, n-1\}, Y_j \leftarrow 0$$
$$\forall\, i \in \{0, \dots, n-p-1\}, Y_i \leftarrow X_{i+p}$$

Décalages arithmétiques à droite en VA+S

- Attention !!!
  - Cette opération n'est pas toujours équivalente à la division par une puissance de 2
    - Si RX est positif ou nul ou multiple de 2^p

      $$DAD_{VA+S}(p, X) \Leftrightarrow (X \div 2^p)$$

    - Si RX est négatif et n'est pas multiple de 2^p

      $$DAD_{VA+S}(p, X) \Leftrightarrow (X \div 2^p) + 1$$

Décalages arithmétiques à droite en CV

- On note cette opération

  $$Y \leftarrow DAD_{CV}(p, X) \quad avec \quad 1 \le p < n$$

- On effectue un décalage à droite en dupliquant le bit de position n

$$\forall\, j \in \{n-p, \dots, n\}, Y_j \leftarrow X_n$$
$$\forall\, i \in \{0, \dots, n-p-1\}, Y_i \leftarrow X_{i+p}$$

- Cette opération est équivalente à la division par une puissance de 2

$$DAD_{CV}(p, X) \Leftrightarrow X \div 2^p$$

Décalages arithmétiques à gauche en VA+S

- On note cette opération

  $$Y \leftarrow DAG_{VA+S}(p, X) \quad avec \quad 1 \le p < n$$

- Le signe est inchangé et on fait un décalage logique de la valeur absolue

$$Y_n \leftarrow X_n$$
$$\forall\, j \in \{0, \dots, p-1\}, Y_j \leftarrow 0$$
$$\forall\, i \in \{p, \dots, n-1\}, Y_i \leftarrow X_{i-p}$$

- Cette opération est équivalente à la multiplication par une puissance de 2

$$DAG_{VA+S}(p, X) \Leftrightarrow (X \times 2^p) \, mod \, 2^n$$

Décalages arithmétiques à gauche en CV

- On note cette opération

  $$Y \leftarrow DAG_{CV}(p, X) \quad avec \quad 1 \le p < n$$

- Ce décalage est équivalent à un décalage logique sur $n+1$ positions

$$\forall\, j \in \{0, \dots, p-1\}, Y_j \leftarrow 0$$
$$\forall\, i \in \{p, \dots, n\}, Y_i \leftarrow X_{i-p}$$

- Cette opération est équivalente à la multiplication par une puissance de 2 si les $p+1$ valeurs de poids fort de X sont égales

$$DAG_{CV}(X, p) \Leftrightarrow X \times 2^p$$

Addition et soustraction des naturels

- Dans $\mathbb{N}$
  - La loi d'addition est définie pour tout couple $(X,Y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
  - La loi de soustraction est définie pour tout couple $(X,Y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $X \ge Y$
  - On note ces opérations
    - $S = X + Y$
    - $D = X - Y$
- Dans $\mathbb{N}/B^n$, il faut définir des lois internes dans cet ensemble, on les note + et −

Définition de la loi $\oplus$

- Pour tout X et $Y \in \mathbb{N}/B^n$, on défini $S \in \mathbb{N}/B^n$

$$S = X \oplus Y = (X+Y) \bmod B^n = (X+Y) - kB^n$$

- On peut noter que $k \in \{0, 1\}$
  - $k = 0 \Leftrightarrow X \oplus Y = X+Y \Leftrightarrow$ résultat représentable
  - $k = 1 \Leftrightarrow X \oplus Y \neq X+Y \Leftrightarrow$ résultat déborde

Définition de la loi $\ominus$

- Pour tout X et $Y \in \mathbb{N}/B^n$, on défini $D \in \mathbb{N}/B^n$

$$D = X \ominus Y = (X-Y) \bmod B^n = (X-Y) + kB^n$$

- On peut noter que $k \in \{0, 1\}$
  - $Y \leq X \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow X \ominus Y = X-Y$
  - $Y > X \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ opération non définie

Addition de 2 naturels

- Soient X et $Y \in \mathbb{N}/B^n$, et $S = X \oplus Y$

$$P_X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^i \quad et \quad X^* = x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_1 x_0$$

$$P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i B^i \quad et \quad Y^* = y_{n-1} y_{n-2} \ldots y_1 y_0$$

$$P_S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i B^i \quad et \quad S^* = s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_1 s_0$$

- Pour calculer $X+Y$, on additionne les polynômes

$$P_X + P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i) B^i$$

Addition de 2 naturels

- $P_X + P_Y$ n'est pas toujours égal à P_S car $x_i + y_i$ peut être supérieur à B-1
- Par exemple avec B=10 et n=4

$$P_X = 7\mathrm{B}^3 + 4\mathrm{B}^2 + 8\mathrm{B} + 3 \quad et \quad X^* = 7483$$
$$P_Y = 0\mathrm{B}^3 + 5\mathrm{B}^2 + 4\mathrm{B} + 9 \quad et \quad Y^* = 0549$$
$$P_X + P_Y = (7+0) B^3 + (4+5) B^2 + (8+4) B + (3+9)$$
$$P_X + P_Y = 7\mathrm{B}^3 + 9\mathrm{B}^2 + 12\mathrm{B} + 12$$

Addition de 2 naturels

- On doit effectuer la transformation suivante

$$x_i + y_i = z_i + r1_i B \quad avec \quad z_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\} \quad et \quad r1_i \in \{0, 1\}$$

  - En effet

$$0 \leq x_i + y_i \leq B-1 = B-1+0\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad z_i \leq B-1 \quad et \quad r1_i = 0$$
$$B-1 < x_i + y_i \leq 2(B-1) = (B-2) + 1\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad z_i \leq B-2 \quad et \quad r1_i = 1$$

- On a donc

$$P_X + P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i) B^i = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i + r1_i B) B^i$$

Addition de 2 naturels

- Sur l'exemple précédent, ça donne

$$P_X + P_Y = 7\mathrm{B}^3 + 9\mathrm{B}^2 + 12\mathrm{B} + 12$$
$$P_X + P_Y = 7\mathrm{B}^3 + 9\mathrm{B}^2 + (2+1\mathrm{B}) B + (2+1\mathrm{B})$$

- Ce qui s'écrit

$$P_X + P_Y = 7\mathrm{B}^3 + (9+1) B^2 + (2+1) B + 2$$

- Plus généralement, l'expression devient

$$P_X + P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i + r1_i B) B^i = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i + r1_{i-1}) B^i + r1_{n-1} B^n$$

Addition de 2 naturels

- L'expression $(z_i + r1_{i-1})$ doit aussi être transformée car elle peut être supérieure à B-1
- La transformation est la suivante

$$z_i + r1_{i-1} = s_i + r2_i B \quad avec \quad s_i \in \{0,1,\dots,B-1\} \quad et \quad r2_i \in \{0,1\}$$

- En effet, il faut envisager 3 cas
  - Premier cas

$$\begin{array}{rcl} 0 \le x_i + y_i < B-1 & \Rightarrow & r1_i = 0 \ \ et \ \ z_i < B-1 \\ r1_{i-1} = 0 & \Rightarrow & r2_i = 0 \ \ et \ \ s_i < B-1 \\ r1_{i-1} = 1 & \Rightarrow & r2_i = 0 \ \ et \ \ s_i \le B-1 \end{array}$$

Addition de 2 naturels

- Deuxième cas

$$\begin{array}{rcl} x_i + y_i = B-1 & \Rightarrow & r1_i = 0 \ \ et \ \ z_i = B-1 \\ r1_{i-1} = 0 & \Rightarrow & r2_i = 0 \ \ et \ \ s_i = B-1 \\ r1_{i-1} = 1 & \Rightarrow & r2_i = 1 \ \ et \ \ s_i = 0 \end{array}$$

- Troisième cas

$$\begin{array}{rcl} B-1 < x_i + y_i \le B-2+B & \Rightarrow & r1_i = 1 \ \ et \ \ 0 < z_i \le B-2 \\ r1_{i-1} = 0 & \Rightarrow & r2_i = 0 \ \ et \ \ 0 < s_i \le B-2 \\ r1_{i-1} = 1 & \Rightarrow & r2_i = 0 \ \ et \ \ 1 < s_i \le B-1 \end{array}$$

Addition de 2 naturels

- Dans tous les cas on a

$s_i \le B-1 \quad et \quad ((r1_i = 0 \,\text{et}\, r2_i = 0)\, ou\, (r1_i = 0 \,\text{et}\, r2_i = 1)\, ou\, (r1_i = 1 \,\text{et}\, r2_i = 0))$

- Le processus de transformation s'arrête, car une retenue peut provenir
  - soit de l'addition de deux chiffres $(r1)$
  - soit de l'addition de ce résultat avec la retenue de l'étage précédent $(r2)$
- Sur l'exemple précédent, on a

$$P_X + P_Y = 7\text{B}^3 + (0+1\text{B})\,B^2 + 3\text{B} + 2$$

- Qui s'écrit

$$P_X + P_Y = 8\text{B}^3 + 0\text{B}^2 + 3\text{B} + 2 = P_S \quad et \quad S^* = 8032$$

Addition de 2 naturels

- On peut décrire ce processus par la formule de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i + y_i + r_{i-1} = s_i + r_i B \\ x_i, y_i, s_i \in \{0,1,\dots,B-1\} \\ r_i \in \{0,1\} \end{array} \right\} \quad 0 \le i \le n-1$$

- Avec la condition initiale

$$r_{-1} = 0$$

Addition de 2 naturels

- On en déduit la transformation générale

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i + r_{i-1})\, B^i = \sum_{i=0}^{n-1} (s_i + r_i B)\, B^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i B^i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i B^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_{i-1} B^i = \sum_{i=0}^{n-1} s_i B^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_i B^{i+1}$$

$$P_X + P_Y = P_S + \sum_{i=1}^{n} r_{i-1} B^i - \sum_{i=0}^{n-1} r_{i-1} B^i$$

$$P_X + P_Y = P_S + r_{n-1} B^n - r_{-1} B^0$$

$$P_X + P_Y = P_S + r_{n-1} B^n$$

$$P_S = P_X + P_Y - r_{n-1} B^n$$

Addition de 2 naturels

- Dans $\mathbb{N}/B^n$ on a

$$X \oplus Y = X + Y - r_{n-1} B^n$$

avec
  - si $r_{n-1} = 0$ alors $X+Y \in \mathbb{N}/B^n$
  - si $r_{n-1} = 1$ alors $X+Y \notin \mathbb{N}/B^n$ (débordement)
- Au niveau des représentations

$$S^* = (X+Y)^* = X^* \oplus Y^*$$

Soustraction de 2 naturels

- Soient X et $Y \in \mathbb{N}/B^n$, et D = X-Y

$$P_X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^i \quad et \quad X^* = x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_1 x_0$$
$$P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i B^i \quad et \quad Y^* = y_{n-1} y_{n-2} \ldots y_1 y_0$$
$$P_D = \sum_{i=0}^{n-1} d_i B^i \quad et \quad D^* = d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_1 d_0$$

- Par exemple avec B=10 et n=4

$$P_X = 7\mathrm{B}^3 + 4\mathrm{B}^2 + 4\mathrm{B} + 3 \quad et \quad X^* = 7443$$
$$P_Y = 0\mathrm{B}^3 + 5\mathrm{B}^2 + 4\mathrm{B} + 9 \quad et \quad Y^* = 0549$$

Soustraction de 2 naturels

- Pour calculer X-Y, on soustrait les polynômes

$$P_X - P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i) B^i$$

- x_i-y_i n'est pas calculable si x_i<y_i
- Sur l'exemple précédent, ça donne

$$P_X - P_Y = (7-0) B^3 + (4-5) B^2 + (4-4) B + (3-9)$$

Soustraction de 2 naturels

- On doit effectuer la transformation suivante

$$x_i - y_i = z_i - r1_i B \quad avec \quad z_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\} \quad et \quad r1_i \in \{0, 1\}$$

  - En effet

$$x_i \geq y_i \quad \Rightarrow \quad z_i = x_i - y_i \leq B-1 \quad et \quad r1_i = 0$$
$$x_i < y_i \quad \Rightarrow \quad z_i = x_i - y_i + B \leq B-1 \quad et \quad r1_i = 1$$

- On a donc

$$P_X - P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i) B^i = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - r1_i B) B^i$$

Soustraction de 2 naturels

- Sur l'exemple précédent, ça donne

$$P_X - P_Y = (7-0) B^3 + (4-5) B^2 + (4-4) B + (3-9)$$
$$P_X - P_Y = 7\mathrm{B}^3 + (9-1\mathrm{B}) B^2 + 0\mathrm{B} + (4-1\mathrm{B})$$

- Ce qui s'écrit

$$P_X + P_Y = (7-1) B^3 + 9\mathrm{B}^2 + (0-1) B + 4$$
$$P_X + P_Y = 6\mathrm{B}^3 + 9\mathrm{B}^2 + (0-1) B + 4$$

- Plus généralement, l'expression devient

$$P_X - P_Y = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - r1_i B) B^i = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - r1_{i-1}) B^i - r1_{n-1} B^n$$

Soustraction de 2 naturels

- L'expression $(z_i - r1_{i-1})$ doit également être transformée

- La transformation est la suivante

$$z_i - r1_{i-1} = d_i - r2_i B \quad avec \quad d_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\} \quad et \quad r2_i \in \{0, 1\}$$

- En effet, il faut envisager 3 cas
  - Premier cas

$$x_i > y_i \quad \Rightarrow \quad r1_i = 0 \quad et \quad 0 < d_i = z_i \leq B-1 \quad et \quad r2_i = 0$$

Soustraction de 2 naturels

  - Deuxième cas

$$x_i = y_i \quad \Rightarrow \quad r1_i = 0 \quad et \quad z_i = 0$$
$$r1_{i-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r2_i = 0 \quad et \quad d_i = 0$$
$$r1_{i-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad r2_i = 1 \quad et \quad d_i = B-1$$

  - Troisième cas

$$x_i < y_i \quad \Rightarrow \quad r1_i = 1 \quad et \quad z_i = x_i - y_i + B \leq B-1$$
$$r1_{i-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r2_i = 0 \quad et \quad 1 \leq d_i = z_i \leq B-1$$
$$r1_{i-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad r2_i = 0 \quad et \quad 0 \leq d_i = z_i - 1 \leq B-2$$

- Dans tous les cas on a

$$d_i \leq B-1 \quad et \quad ((r1_i = 0 \,\mathrm{et}\, r2_i = 0) \, ou \, (r1_i = 0 \,\mathrm{et}\, r2_i = 1) \, ou \, (r1_i = 1 \,\mathrm{et}\, r2_i = 0))$$

Soustraction de 2 naturels

- Le processus de transformation s'arrête, car une retenue peut provenir
  - soit de la soustraction de deux chiffres (*r1*)
  - soit de la soustraction de ce résultat avec la retenue de l'étage précédent (*r2*)
- Sur l'exemple précédent, on a

$$P_X - P_Y = 6\mathrm{B}^3 + 9\mathrm{B}^2 + (9-1\mathrm{B})B + 4$$
$$P_X - P_Y = 6\mathrm{B}^3 + (9-1)B^2 + 9\mathrm{B} + 4$$

- Qui s'écrit

$$P_X - P_Y = 6\mathrm{B}^3 + 8\mathrm{B}^2 + 9\mathrm{B} + 4 = P_D \quad et \quad D^* = 6894$$

Soustraction de 2 naturels

- On peut décrire ce processus par la formule de récurrence

$$\left\{\begin{array}{l} x_i - (y_i + r_{i-1}) = d_i - r_i B \\ x_i, y_i, d_i \in \{0, 1, \dots, B-1\} \\ r_i \in \{0, 1\} \end{array}\right\} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

- Avec la condition initiale

$$r_{-1} = 0$$

Soustraction de 2 naturels

- On en déduit la transformation générale

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - (y_i + r_{i-1})) B^i = \sum_{i=0}^{n-1} (d_i - r_i B) B^i$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i B^i - \sum_{i=0}^{n-1} y_i B^i - \sum_{i=0}^{n-1} r_{i-1} B^i = \sum_{i=0}^{n-1} s_i B^i - \sum_{i=0}^{n-1} r_i B^{i+1}$$
$$P_X - P_Y = P_D - \sum_{i=1}^{n} r_{i-1} B^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_{i-1} B^i$$
$$P_X - P_Y = P_D - r_{n-1} B^n + r_{-1} B^0$$
$$P_X - P_Y = P_D - r_{n-1} B^n$$
$$P_D = P_X - P_Y + r_{n-1} B^n$$

Soustraction de 2 naturels

- Dans $\mathbb{N}/B^n$ on a

$$X \ominus Y \; = \; X - Y + r_{n-1} B^n$$

avec
  - si $r_{n-1} = 0$ alors X-Y est définie
  - si $r_{n-1} = 1$ alors X-Y n'est pas définie
- Au niveau des représentations

$$D^* = (X\text{-}Y)^* = X^* \ominus Y^*$$

Opérations en machine sur les naturels

- Les opérations en machine dépendent de la base utilisée
  - En base 2, pas de difficulté, il suffit d'utiliser les définitions précédentes
  - En base 10, on utilise aussi les mêmes définitions, car les opérations se font sur des chiffres décimaux. Mais ces chiffres sont codés sur 4 positions en binaire et les opérations se font donc modulo 16 et non modulo 10, donc il faut apporter une correction
- Lors de chaque opération, on positionne 2 indicateurs
  - *C* : débordement des naturels
  - *Z* : 1 si le résultat est nul, 0 sinon

Additions et soustractions en base 2

- Exemples sur 4 positions

$$\begin{array}{llcccc} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & \\ X^* & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ Y^* & \oplus & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline S^* & & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad C{=}0 \;\; Z{=}0$$

$$\begin{array}{llcccc} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & \\ X^* & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ Y^* & \oplus & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline S^* & & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad C{=}1 \;\; Z{=}0$$

$$\begin{array}{llcccc} X^* & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ Y^* & \ominus & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & \\ \hline D^* & & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad C{=}0 \;\; Z{=}0$$

$$\begin{array}{llcccc} X^* & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ Y^* & \ominus & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & \\ \hline D^* & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad C{=}1 \;\; Z{=}0$$

Addition de 2 chiffres en BCD

- Soient X_B^* et Y_B^* les représentations des chiffres décimaux X et Y en BCD

$$X_B^* \boxplus Y_B^* = (X+Y) \, mod \, 16 = X+Y-k \times 16 \quad avec \ k \in \{0,1\}$$

- Il faut définir une opération notée $\oplus$ telle que

$$X_B^* \oplus Y_B^* = (X+Y) \, mod \, 10 = X+Y-k \times 10 \quad avec \ k \in \{0,1\}$$

- Il est clair que

$$X_B^* \oplus Y_B^* = X_B^* \boxplus Y_B^* \boxplus 6_B^* \quad si \ X+Y \geq 10$$
$$X_B^* \oplus Y_B^* = X_B^* \boxplus Y_B^* \quad si \ X+Y < 10$$

Addition de 2 chiffres en BCD

- En pratique, il est plus simple de détecter le débordement du modulo 16 que de savoir si $X+Y$ est inférieur à 10 ou pas
- On adopte donc la méthode suivante
  - On calcule $Z1^* = X_B^* \boxplus Y_B^*$
  - On calcule ensuite $Z2^* = Z1^* \boxplus 6^*$
  - Si un débordement apparaît lors d'une des deux additions, alors le résultat de l'addition est $Z2^*$, sinon c'est $Z1^*$

Exemples d'additions en BCD

- On considère des nombres $\in \mathbb{N}/10^4$
- Soit $S1=X1+Y1$ avec $X1=953$ et $Y1=1981$

	0	**0**001**1**	**1**001**1**	**0**000**0**	**0**011
$X1^*$		0000	1001	0101	0011
$Y1^*$	$\boxplus$	0001	1001	1000	0001
$Z1^*$		0010	0011	1101	0100
		0000	**0**110	**1**100	**0**100
$Z1^*$		**0010**	0011	1101	**0100**
6^*		$\boxplus$0110	$\boxplus$0110	$\boxplus$0110	$\boxplus$0110
$Z2^*$		0111	**1001**	**0011**	1010
$S1^*$		**0010**	**1001**	**0011**	**0100**

$C=0 \quad Z=0$

Exemples d'additions en BCD

- Soit $S2=X2+Y2$ avec $X2=1918$ et $Y2=8235$

	1	**0**001**1**	**0**000**0**	**0**011**1**	**0**000
$X2^*$		0001	1001	0001	1000
$Y2^*$	$\boxplus$	1000	0010	0011	0101
$Z1^*$		1010	1011	0101	1101
		1110	**1**110	**0**100	**1**100
$Z1^*$		1010	1011	**0101**	1101
6^*		$\boxplus$0110	$\boxplus$0110	$\boxplus$0110	$\boxplus$0110
$Z2^*$		**0000**	**0001**	1011	**0011**
$S2^*$		**0000**	**0001**	**0101**	**0011**

$C=1 \quad Z=0$

Soustraction de 2 chiffres en BCD

- Soient X_B^* et Y_B^* les représentations des chiffres décimaux X et Y en BCD

$$X_B^* \boxminus Y_B^* = (X-Y) \, mod \, 16 = X-Y+k \times 16 \quad avec \ k \in \{0,1\}$$

- Il faut définir une opération notée $\ominus$ telle que

$$X_B^* \ominus Y_B^* = (X-Y) \, mod \, 10 = X-Y+k \times 10 \quad avec \ k \in \{0,1\}$$

- Il est clair que

$$X_B^* \ominus Y_B^* = X_B^* \boxminus Y_B^* \boxminus 6_B^* \quad si \ X < Y$$
$$X_B^* \ominus Y_B^* = X_B^* \boxminus Y_B^* \quad si \ X \geq Y$$

Soustraction de 2 chiffres en BCD

- On en déduit la méthode suivante
  - On calcule $Z1^* = X_B^* \boxminus Y_B^*$
  - S'il n'y a pas de débordement, c'est que $X \geq Y$ et donc le résultat est $Z1^*$
  - S'il y a débordement, c'est que $X < Y$ et il faut calculer $Z2^* = Z1^* \boxminus 6^*$ qui est le résultat attendu

Exemples de soustractions en BCD

- On considère des nombres $\in \mathbb{N}/10^4$
- Soit $D1=X1-Y1$ avec $X1=1953$ et $Y1=981$

$X1^*$		0001	1001	0101	0011
$Y1^*$	-	0000	1001	1000	0001
	0	**0**000**1**	**1**111**1**	**1**000**0**	**0**000
$Z1^*$		**0000**	1111	1101	**0010**
6^*			- 0110	- 0110	
			0000	0110	
$Z2^*$			**1001**	**0111**	
$D1^*$		**0000**	**1001**	**0111**	**0010**

$C=0 \quad Z=0$

Exemples de soustractions en BCD

- Soit $D2=X2-Y2$ avec $X2=1953$ et $Y2=9885$

$X1^*$		0001	1001	0101	0011
$Y1^*$	-	1001	1000	1000	0101
	1	**1**000**0**	**0**000**1**	**1**000**1**	**1**100
$Z1^*$		1000	**0000**	1100	1110
6^*		- 0110		- 0110	- 0110
		0110		0110	0000
$Z2^*$		**0010**		**0110**	**1000**
$D1^*$		**0010**	**0000**	**0110**	**1000**

$C=1 \quad Z=0$

Addition et soustraction des relatifs en CV

- Les lois d'addition et de soustraction sont définies pour tout couple $(X,Y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
- On note les opérations
  - $S = X+Y$
  - $D = X-Y$
- Il faut définir des lois internes dans $\mathbb{Z}/B^n$

Opposé d'un nombre

- Appelons N' l'opposé de N dans $\mathbb{Z}$, on a $N+N' = 0$
- Si $N \in \mathbb{Z}/B^n$ alors par définition $N' \in \mathbb{Z}/B^n$
- Soient N^* et N'^* les représentations de N et N' dans L_B^{n+1}
- On appelle $CV(N^*)$ le complément vrai de N^* et on le définit par

$$CV(N^*) \oplus N^* = 0^*$$
$$CV(N^*) = 0^* \ominus N^*$$

- On peut monter que $CV(N^*)=N'^*$

Complément restreint

- On appelle $CR(N^*)$ le complément restreint de N^* définit par :

$$CR(N^*) = CV(N^*) \ominus 1^*$$
$$CV(N^*) = CR(N^*) \oplus 1^*$$

- Propriété :
  - Le complément restreint d'un nombre se calcule en prenant le complément restreint de chaque chiffre

$$N^*=a_n a_{n-1}\ldots a_0 \Rightarrow CR(N^*)=CR(a_n)CR(a_{n-1})\ldots CR(a_0)$$

Complément restreint

- Propriété :
  - Le complément restreint d'un chiffre, $CR(a_i) = (B\text{-}1\text{-}a_i)$ se calcule avec des soustractions sans retenue dans une base quelconque et par le complément logique en base 2
  - En effet, en base 2

$$CR(0)=2-1-0=1$$
$$CR(1)=2-1-1=0$$
$$CR(a_i)=\overline{a_i}$$

Addition de deux relatifs

- Soient X et Y deux entiers relatifs et $S=X+Y$
- Si X, Y et $S \in \mathbb{Z}/B^n$, leurs représentations sont X^*, Y^* et S^* dans L_B^{n+1}
- On peut montrer que

$$S^* = (X+Y)^* = X^* \oplus Y^*$$

- Où le signe $\oplus$ représente l'addition de naturels vue précédemment

Soustraction de deux relatifs

- Soient X et Y deux entiers relatifs et $D=X\text{-}Y$
- Si X, Y et $D \in \mathbb{Z}/B^n$, leurs représentations sont X^*, Y^* et D^* dans L_B^{n+1}
- On peut montrer que

$$\begin{aligned} D^* = (X\text{-}Y)^* &= X^* \ominus Y^* \\ &= X^* \oplus CV(Y)^* \\ &= X^* \oplus CR(Y)^* \oplus 1^* \end{aligned}$$

- Où les signes $\oplus$ et $\ominus$ représentent les opérations de naturels vues précédemment

Validité des résultats

- Pour déterminer la validité des résultats, on regarde les 2 dernières retenues r_n et r_{n-1}
  - Pour une addition

$$r_n = r_{n-1} \Rightarrow X + Y \in \mathbb{Z}/B^n$$

$$r_n \neq r_{n-1} \Rightarrow X + Y \notin \mathbb{Z}/B^n$$

  - Pour une soustraction

$$r_n = r_{n-1} \Rightarrow X - Y \in \mathbb{Z}/B^n$$

$$r_n \neq r_{n-1} \Rightarrow X - Y \notin \mathbb{Z}/B^n$$

Opérations en machine sur les relatifs

- Comme pour les naturels, on envisagera les bases 2 et 10
- L'opérateur est le même que celui des naturels
- Lors de chaque opération, on positionne 4 indicateurs
  - C : débordement des naturels
  - V : débordement des relatifs
  - N : 1 si le résultat est négatif, 0 sinon
  - Z : 1 si le résultat est nul, 0 sinon

Opérations en base 2

- Soient les opérations suivante sur 8 positions

		1	**1**	1	0	0	0	1	1	
$X1^*$			0	0	1	0	0	0	0	1
$Y1^*$	$\oplus$		1	1	1	0	0	0	1	1
$S1^*$			0	0	0	0	0	1	0	0

C=1 V=0 N=0 Z=0

		1	**0**	0	0	0	0	0	0	
$X2^*$			1	0	1	1	0	0	0	0
$Y2^*$	$\oplus$		1	1	0	0	1	0	0	1
$S2^*$			0	1	1	1	1	0	0	1

C=1 V=1 N=0 Z=0

- Si $X1$=+33, $Y1$=-29 , $X2$=-80 et $Y2$=-55 sont des relatifs, $S1$ est correct et $S2$ déborde
- Si $X1$=33, $Y1$=227 , $X2$=176 et $Y2$=201 sont des naturels, $S1$ et $S2$ débordent

Opérations en BCD

- Soient $X1$=+876 et $Y1$=+302

	0	0 000**1**	0 0000	0 0000	0 110
$X1^*$		0000	1000	0111	0110
$Y1^*$	$\oplus$	0000	0011	0000	0010
$Z1^*$		0001	1011	0111	1000
		0 000	1 110	0 110	0 000
$Z1^*$		**0001**	1011	**0111**	**1000**
6^*		$\oplus$0110	$\oplus$0110	$\oplus$0110	$\oplus$0110
$Z2^*$		0111	**0001**	1101	1110
$S1^*$		**0001**	**1001**	**0111**	**1000**

C=0 V=1 N=0 Z=0

Opérations en BCD

- Soient $X2$=-302 (9698) et $Y2$=-124 (9876)

	1	1001**1**	0 0001	1 1111	0 000
$X2^*$		1001	0110	1001	1000
$Y2^*$	+	1001	1000	0111	0110
$Z1^*$		0011	1111	0001	1110

	0110	1 110	0 000	1 110
$Z1^*$	0011	1111	0001	1110
6^*	+0110	+0110	+0110	+0110
$Z2^*$	**1001**	**0101**	**0111**	**0100**
$S2^*$	**1001**	**0101**	**0111**	**0100**

C=1 V=0 N=1 Z=0

Comparaisons

- On peut comparer
  - Des mots d'un langage avec l'ordre lexicographique
  - Des entiers
    - naturels avec l'ordre lexicographique ou en faisant une soustraction
    - relatifs en faisant une soustraction
- En effet, la représentation des naturels respecte l'ordre lexicographique, mais pas celle des relatifs

Comparaison de mots d'un langage

- Soient A et B deux mots d'un langage L_B^n

$$A = a_{n-1}a_{n-1}\ldots a_0$$
$$B = b_{n-1}b_{n-1}\ldots b_0$$

- A et B sont égaux, noté A=B

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\ a_i = b_i$$

- A est avant B, noté A<B

$$A < B \Leftrightarrow (a_{n-1} < b_{n-1})\, ou\, (a_{n-1} = b_{n-1}\, et\, a_{n-2} < b_{n-2})\, ou$$
$$\ldots ou\, (a_{n-1} = b_{n-1}\, et \ldots et\, a_1 = b_1\, et\, a_0 < b_0)$$

- A est après B, noté A>B

$$A > B \Leftrightarrow (a_{n-1} > b_{n-1})\, ou\, (a_{n-1} = b_{n-1}\, et\, a_{n-2} > b_{n-2})\, ou$$
$$\ldots ou\, (a_{n-1} = b_{n-1}\, et \ldots et\, a_1 = b_1\, et\, a_0 > b_0)$$

Comparaison de naturels

- On peut utiliser la comparaison de mots
- On peut aussi faire une soustraction
  - Soient X et Y deux naturels et C et Z les indicateurs positionnés par la soustraction

$$X = Y \Leftrightarrow Z = 1$$
$$X \neq Y \Leftrightarrow Z = 0$$
$$X < Y \Leftrightarrow C = 1$$
$$X \geq Y \Leftrightarrow C = 0$$
$$X \leq Y \Leftrightarrow C + Z = 1$$
$$X > Y \Leftrightarrow C + Z = 0$$

Exemple de comparaison de naturels

- Soient les comparaisons suivantes sur 4 positions avec $X1$=14, $Y1$=7, $X2$=5 et $Y2$=6

$X1^*$		1	1	1	0
$Y1^*$	-	0	1	1	1
	0	1	1	1	
		0	1	1	1

$C = 0 \Rightarrow X1 \geq Y1$

$X2^*$		0	1	0	1
$Y2^*$	-	0	1	1	0
	1	1	1	0	
		1	1	1	1

$C = 1 \Rightarrow X2 < Y2$

Comparaison de relatifs en CV

- On doit faire une soustraction
  - Soient X et Y deux relatifs et V, N et Z les indicateurs positionnés par la soustraction

$$X = Y \Leftrightarrow Z = 1$$
$$X \neq Y \Leftrightarrow Z = 0$$
$$X < Y \Leftrightarrow V \oplus N = 1$$
$$X \geq Y \Leftrightarrow V \oplus N = 0$$
$$X \leq Y \Leftrightarrow (V \oplus N) + Z = 1$$
$$X > Y \Leftrightarrow (V \oplus N) + Z = 0$$

Exemple de comparaison de relatifs en CV

- Soient les comparaisons suivantes sur 4 positions avec $X1$=-2, $Y1$=-1, $X2$=+6, $Y2$=+5, $X3$=+4, $Y3$=-6, $X4$=-5 et $Y4$=+6

$$
\begin{array}{lccccc}
X1^* & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
Y1^* & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & \\
\hline
 & & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccccc}
X2^* & & 0 & 1 & 1 & 0 \\
Y2^* & - & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & \\
\hline
 & & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$V=0$ *et* $N=1 \Rightarrow X1 < Y1$ $\qquad$ $V=0$ *et* $N=0 \Rightarrow X2 \geq Y2$

$$
\begin{array}{lccccc}
X3^* & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
Y3^* & - & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & \\
\hline
 & & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccccc}
X4^* & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
Y4^* & - & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \\
\hline
 & & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

$V=1$ *et* $N=1 \Rightarrow X3 \geq Y3$ $\qquad$ $V=1$ *et* $N=0 \Rightarrow X4 < Y4$