

S2 : Analyse

CH. 3 : RÉOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS.

1 Séparation des racines d'une équation.

On considère une équation $f(x) = 0$. Une solution est un nombre réel α tel que si on donne à la variable x cette valeur α on annule f . On parle aussi de "zéros" de f .

Pour discuter de l'existence et de l'unicité d'une solution, nous utiliserons les résultats des chapitres précédents, notamment :

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f s'annule une fois et une seule dans cet intervalle.

Séparer les zéros d'une fonction consiste à partager son domaine de définition en des intervalles sur lesquels ce résultat s'applique. Pour cela on étudie ses variations :

Exercice 1. On considère l'équation $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$. Etudier les variations de f et en déduire le nombre de solutions de cette équation et leur localisations dans des intervalles ouverts bornés.

Nous nous intéressons maintenant au calcul de ces solutions.

2 Résolution algébrique exacte.

Dans des cas très particuliers, on peut résoudre l'équation par des formules générales. Ces cas sont ceux où l'équation se ramène à $f(x) = 0$ avec f polynomiale de degré ≤ 4 . Exemples :

- Degré 1 : $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$ a une solution unique : $x = -b/a$.
- Degré 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant de l'équation).
 - si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans \mathbb{R} : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - si $\Delta = 0$, ces deux solutions sont confondues en une seule $\frac{-b}{2a}$.
 - si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions dans \mathbb{R} (mais il y en a deux dans \mathbb{C} , corps dans lequel il existe des racines carrées de tout nombre et donc de $\Delta < 0$).

- Degré 3 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a \neq 0$. Formules de Tartaglia-Cardan :

On commence par faire une translation $y = x + k$ de sorte que le terme de degré 2 disparaisse. On obtient une équation de la forme $y^3 + py + q = 0$. On calcule le déterminant : $\Delta = q^2 - \frac{27}{4}p^3$.

- si $\Delta > 0$, l'équation a une solution dans \mathbb{R} : $\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$.
- si $\Delta = 0$, l'équation a deux solutions dans \mathbb{R} : $3q/p$ et $-3q/2p$.
- si $\Delta < 0$, l'équation a trois solutions dans \mathbb{R} , dont les formules nécessitent de passer par le corps \mathbb{C} .

Ces formules proviennent d'une méthode de Cardan que nous verrons en T.D. (exercice 2).

• Degré 4 : Il y a aussi une méthode conduisant à des formules : méthode de Ferrari. (voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/equation_polynomiale)

Certaines équations plus compliquées peuvent se ramener par changement de variable à ces équations "explicitement résolubles" :

Exercice 2. Résoudre les équations :

$$7x^6 + 4x^3 - 3 = 0.$$

$$x - 4\sqrt{x} - 5 = 0.$$

Du point de vue théorique ces formules ont une importance primordiale : elles ont conduit les mathématiciens à introduire le corps des nombres complexes, à concevoir de nouvelles fonctions (racines carrées, cubiques etc...) et à développer toute une "théorie de l'intégrabilité", encore en construction aujourd'hui pour les équations différentielles.

Du point de vue numérique, elles nécessitent d'évaluer ces nouvelles fonctions, ce qu'on peut faire avec les méthodes du chapitre 2, mais qui en général est moins d'efficace que les méthodes de résolutions numériques directes.

Enfin, bien que l'on sache que toute équation polynomiale de degré n a exactement n solutions dans \mathbb{C} et donc au plus n solutions dans \mathbb{R} (théorème de D'Alembert), on sait aussi (d'après la théorie d'Evariste Galois), qu'à partir du degré 5, il n'existe plus de formule générale de résolution (et encore moins si l'équation n'est plus polynomiale).

Pour ces raisons, il est indispensable de connaître les méthodes numériques de résolution :

3 Première méthode numérique : la dichotomie.

Nous avons déjà rencontré cette méthode au chapitre 2 (théorème des valeurs intermédiaires).

Son avantage : elle ne demande que peu d'hypothèse sur f (seulement la continuité).

Son inconvénient : elle n'est pas très rapide. D'autre part elle nécessite de déterminer le signe des $f(a_n)$ et $f(b_n)$ et donc de calculer une valeur approchée de ces valeurs proches de 0 suffisamment précise.

Exercice 3. Rechercher par dichotomie la solution de l'équation de l'exercice 1 située dans l'intervalle $]0, 1[$ à $1/2^4$ près. (Remarque : il suffit de 3 itérations, puis de prendre le milieu du dernier intervalle obtenu.)

4 La méthode de Newton.

Son avantage : elle converge très rapidement : approximativement, le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

Son inconvénient : elle demande plus d'hypothèses sur f : Nous allons demander que f soit de classe C^2 sur un intervalle $I = [a, b]$ et que f' et f'' gardent un signe constant sur cet intervalle. On demande de plus que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires.

Commentaires sur les hypothèses.

- l'hypothèse f' garde un signe constant nous assure que f est *strictement monotone* sur I . Cette hypothèse nous donne donc l'unicité d'une solution α de $f(x) = 0$ dans l'intervalle I . Son existence vient du théorème des valeurs intermédiaires.

- plaçons-nous dans le cas $f'' > 0$ sur I : cette hypothèse nous dit que f est *convexe* sur I , c'est-à-dire qu'au voisinage de tout point x de I , le graphe de f est au-dessus de la tangente en x . En effet, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (utilisable puisque f est 2 fois dérivable sur I) :

$$f(x) - [(f(a) + f'(a)(x - a))] = \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2 \geq 0.$$

Dans le cas contraire ($f'' < 0$ sur I), on dit que f est *concave* (son graphe est sous ses tangentes). Bien sûr, en général, une fonction n'est ni convexe ni concave (le signe de f'' n'est pas constant sur I)

Le principe de la méthode de Newton.

Nous allons le décrire dans le cas : $f' > 0$ sur I (f est strictement croissante sur I) et $f'' > 0$ sur I (f est convexe sur I). Elle consiste à prendre un point du graphe d'abscisse x_0 à l'intérieur de I à droite de la solution cherchée : $f(x_0) > 0$, et à remplacer le graphe de f par celui de sa tangente en ce point : on approxime la solution par l'intersection x_1 de cette tangente avec l'axe des x . Puis on itère (voir la figure 2) :

Exercice 4. La figure suivante a été obtenue à partir de la fonction f définie par $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1$ sur l'intervalle $[0.6, 1.1]$.

1. Vérifiez que les hypothèses de la méthode de Newton sont satisfaites sur cet intervalle.
2. On pose $x_0 = 1$. Calculer l'équation de la tangente au point M_0 du graphe de f , d'abscisse x_0 . Puis calculer l'intersection x_1 de cette tangente avec l'axe des x .
3. Itérez une seconde fois à partir du point M_1 du graphe de f d'abscisse x_1 , pour obtenir l'approximation x_2 de la solution α .

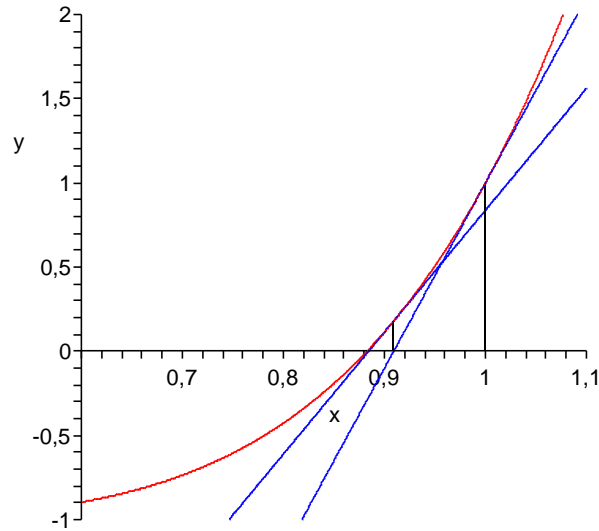


FIGURE 1 – La méthode de Newton : $x_0 = 1$, $x_1 \simeq 0,91$, $x_2 \simeq 0,88$.

Pourquoi la méthode fonctionne-t-elle ?

La tangente en M_n a pour équation : $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Elle coupe donc l'axe ($y = 0$) en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La suite (x_n) est visiblement décroissante (à cause de la pente positive des tangentes : voir la figure 1) et est minorée par la solution cherchée α (dans le cas contraire on contredirait la convexité : essayer sur la figure 1). Elle est donc convergente. Puisque f et f' sont continues, sa limite l vérifie : $l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$, ce qui prouve $f(l) = 0$: l est la solution α cherchée.

Quelle erreur commet-on si on approxime α par x_n ?

La première erreur $|x_0 - \alpha|$ est majorée par la longueur $|b - a|$ de l'intervalle choisi. Nous allons établir une formule de récurrence qui permette de majorer l'erreur $|x_{n+1} - \alpha|$ en fonction de l'erreur précédente $|x_n - \alpha|$:

D'après la formule de Taylor-Lagrange écrite au point x_n on a :

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2}f''(c), \text{ avec } \alpha < c < x_n.$$

On pose $x = \alpha$. Puisque $f(\alpha) = 0$ et $f' \neq 0$, en divisant par $f'(x_n)$, on a :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} = 0$$

d'où d'après la formule de récurrence définissant la suite (x_n) ,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)}.$$

Soit M'' est un majorant des $f''(x_n)$ et m' un minorant des $f'(x_n)$. Ils existent car f' et f'' sont continues sur un intervalle fermé borné contenant cette suite. On a donc :

$$x_{n+1} - \alpha \leq (\alpha - x_n)^2 \frac{M''}{2m'}.$$

Conclusion : on voit donc que, à une constante multiplicative près, la nouvelle erreur est le carré de l'ancienne. Supposons par exemple que cette constante soit 1 et que la première erreur soit majorée par 10^{-1} . Les erreurs suivantes sont alors majorées par : 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-8} , 10^{-16} etc... : à la 5ème itération, on obtient déjà 16 décimales exactes !

Exercice 5. On reprend l'équation de l'exercice 4. Nous allons utiliser le fait que 0.8 est un minorant de la suite (x_n) .

1. f' étant croissante, calculer un minorant m' des $f'(x_n)$.
2. Montrer que f'' est décroissante sur l'intervalle considéré ici, et en déduire un majorant M'' des $f''(x_n)$.
3. Calculer à l'aide de la formule de récurrence sur les x_n les deux termes suivants x_3 et x_4 avec 7 décimales.
4. Donner une majoration des erreurs $|x_n - \alpha|$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4. Combien de décimales de x_4 sont exactes ?

Que faire dans les autres cas ?

Nous avons supposé $f' > 0$ sur I et $f'' > 0$ sur I . La méthode est identique dans le cas : $f' < 0$ sur I et $f'' < 0$ sur I . Dans les deux derniers cas (f' et f'' ont des signes contraires), il faut initialiser la suite à partir de l'extrémité *gauche* de l'intervalle I :

Exercice 6. Faire trois dessins similaires à la figure 1 dans ces 3 nouveaux cas pour se convaincre de la nécessité d'initialiser par le bon côté.

5 La méthode du point fixe.

Si une équation $f(x) = 0$ est équivalente à une autre équation de la forme $g(x) = x$, alors la recherche des zéros de f se ramène à celle des points fixes de g : $g(\alpha) = \alpha$.

Géométriquement, on cherche alors l'intersection du graphe de g avec celui de $x \mapsto x$ c'est-à-dire avec la 1ère bissectrice $y = x$.

Remarque. Etant donnée f , il y a plusieurs choix possibles pour g . Exemple :

$$\begin{aligned} x^2 - a = 0 &\Leftrightarrow x^2 + x - a = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x \end{aligned}$$

Quel est le bon choix pour g ? Il sera nécessaire de demander que g soit "contractante" :

Applications contractantes. Une application g est k -contractante sur un intervalle I lorsque :

- 1- $g(I) \subset I$; (indispensable pour itérer g)
- 2- il existe une constante k vérifiant $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout x et y dans I ,

$$|g(y) - g(x)| \leq k|y - x|.$$

Remarques :

- une application qui vérifie la condition (2-) est continue en tout point a de I . Pour le vérifier, d'après le ch 1 (p.7), pour tout $\varepsilon > 0$ on cherche un $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Si on a la propriété (2), $\eta = \varepsilon/k$ convient.
- si g est dérivable sur I et $|g'|$ est majorée par k , alors, d'après la formule des accroissements finis, g vérifie (2-).

Exercice 7. Vérifiez que $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ est contractante sur l'intervalle $[1, a]$.

Le théorème du point fixe.

- Si g est k -contractante sur un intervalle I alors elle admet un unique point fixe α dans I .
- Pour tout x_0 dans I , la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente et sa limite est le point fixe α .
- L'erreur d'approximation de α par x_n est majorée par : $|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

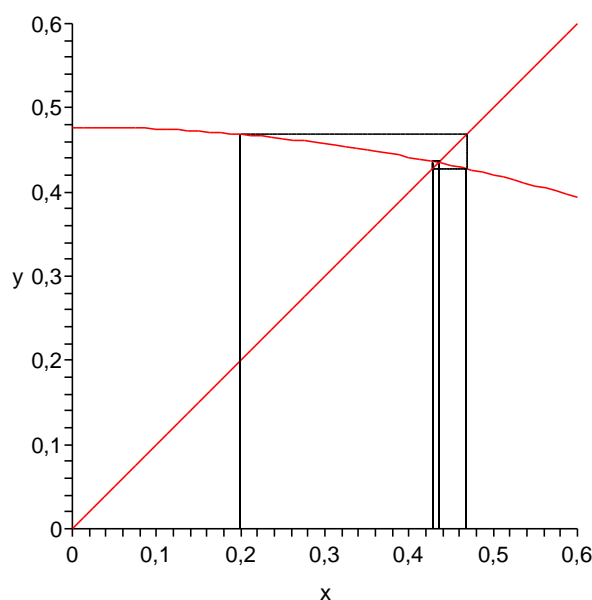


FIGURE 2 – La méthode du point fixe : $x_0 = 0,2$, $x_1 = g(x_0) \simeq 0,468$ est l'ordonnée du premier point M_0 du graphe. Pour le replacer sur l'axe des abscisses, on le projette sur la bissectrice $y = x$ puis sur l'axe des x , ce qui permet d'itérer : $x_2 \simeq 0,427$, $x_3 \simeq 0,436$.

Avantage de la méthode du point fixe : C'est une méthode beaucoup plus générale que la méthode de Newton puisqu'on demande très peu sur la fonction g (on demande seulement qu'elle soit contractante, elle peut n'être même pas dérivable.)

Inconvénient de la méthode du point fixe : Elle est en général moins rapide (surtout lorsque k est proche de 1) puisque l'erreur évolue "linéairement" et non "quadratiquement".

Pourquoi a-t-on l'existence d'un point fixe ? On pose $I = [a, b]$. Puisque $g(a)$ et $g(b)$ sont dans I , on a $g(a) \geq a$ et $g(b) \leq b$. On a donc $g(a) - a \geq 0$, $g(b) - b \leq 0$, et $g(x) - x$ continue puisque g est contractante. On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires à $g(x) - x$.

Pourquoi est-il unique ? Si on en avait deux α et β , on aurait :

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$$

ce qui est impossible avec $k < 1$ sauf si $\alpha - \beta = 0$.

Pourquoi la suite (x_n) est-elle convergente ? C'est moins facile à voir que dans la méthode de Newton car elle n'est pas toujours monotone. Néanmoins on a :

$$\begin{aligned} |x_{p+1} - x_p| &= |g(x_p) - g(x_{p-1})| \leq k|x_p - x_{p-1}| \leq \dots \leq k^p|x_1 - x_0| \\ |x_{p+2} - x_p| &= |x_{p+2} - x_{p+1} + x_{p+1} - x_p| \leq |x_{p+2} - x_{p+1}| + |x_{p+1} - x_p| \leq (k^{p+1} + k^p)|x_1 - x_0| \\ &\dots \\ |x_q - x_p| &\leq (k^{p+q-1} + \dots + k^{p+1} + k^p)|x_1 - x_0| \leq \frac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0| \text{ pour } q > p. \end{aligned}$$

On en déduit que $|x_q - x_p|$ (avec $q > p$) tend vers 0 quand p tend vers l'infini. Une suite qui vérifie cette propriété de "resserrement" de ses termes est dite "de Cauchy" et dans \mathbb{R} les suites de Cauchy convergent (cela se montre à l'aide de la propriété des intervalles emboîtés.)

Pourquoi la limite l est-elle le point fixe cherché ? Puisque g est continue, en passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = g(x_n)$, on obtient : $l = g(l)$.

D'où vient la majoration de l'erreur ? Si on laisse fixe p et si on fait tendre q vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, on obtient la majoration annoncée.

Exercice 8. (La figure 2 a été obtenue sur cet exemple). On considère l'équation :

$$3 \cos x = 10^x.$$

1. En appliquant la fonction \log (décimal) de chaque côté, écrire cette équation sous la forme $g(x) = x$.
2. Vérifier que g est contractante sur l'intervalle $[0, \pi/6]$, de rapport $k = \log(e)/\sqrt{3}$.
3. Calculer les 3 premières itérées de $x_0 = 0.2$, en précisant à chaque étape une majoration de l'erreur commise.

Test d'auto-évaluation sur le chapitre 3

1. Décrire la méthode de dichotomie pour résoudre $f(x) = 0$, et donner une majoration de l'erreur commise après n itérations.
 2. Expliquer sur un dessin la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$. Quelles sont les hypothèses nécessaires ? Quelle formule donne la suite des approximations ?
 3. On suppose f de classe C^2 sur un intervalle I de longueur 0,1. On suppose de plus que f' est minorée sur I par 1 et f'' est majorée sur I par 3. Dans la méthode de Newton, donner une majoration des erreurs : $|x_0 - \alpha|$, $|x_1 - \alpha|$, $|x_2 - \alpha|$ et $|x_3 - \alpha|$.
 4. Qu'est-ce qu'une fonction contractante ? Énoncez le théorème du point fixe.
-

Chapitre 3 : Travaux dirigés

1. *Séparation des racines d'une équation.* On considère l'équation $f(x) = 0$ avec

$$f(x) = (x + 1) \arctan x - \frac{\pi}{2}.$$

- (a) Calculer les dérivées première et seconde de f .
- (b) Etudier le signe de f'' et en déduire les variations de f' puis son signe f' et enfin les variations de f .
- (c) Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ? Donner la valeur exacte de l'une d'entre elles et la localisation des autres dans un intervalle de longueur 1.
- (d) Donner une valeur approchée de cette ou ces solutions inconnues à $1/8$ près.

2. *Résolution algébrique d'une équation du 3ème degré.* On considère l'équation

$$x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = 0.$$

- (a) Rechercher la valeur de k telle que si on pose $y = x + k$, l'équation obtenue en y n'aie plus de terme en y^2 , et écrire cette nouvelle équation en y .
- (b) On pose $y = u + v$ dans cette nouvelle équation. Ecrire cette équation sous la forme :
 $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$
- (c) Chercher u et v vérifiant cette équation et la condition $3uv + p = 0$ (on rappelle que pour trouver deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P , on doit résoudre l'équation $X^2 - SX + P = 0$.)
- (d) En déduire une solution en y de l'équation de la question (1), puis une solution en x de l'équation de départ.

Question facultative (pour ceux qui connaissent le corps \mathbb{C}) : déterminer les deux autres solutions complexes.

3. *Un cas particulier de la méthode de Newton.* On cherche à calculer une racine carrée d'un a positif, et donc à résoudre numériquement $x^2 - a = 0$. Vérifiez que la suite donnée par la récurrence de Newton est bien celle utilisée par Hénou (TD1, ex. 7).

4. *Une résolution numérique par la méthode de Newton.*

On considère l'équation : $x - \sin x - 1/4 = 0$.

- (a) Démontrez que cette équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $I =]0, \pi/2[$.
- (b) Vérifiez que f satisfait les hypothèses nécessaires à l'application de la méthode Newton.
- (c) Donnez un minorant m' de f' et un majorant M'' de f'' sur $[0, \pi/2]$.

- (d) Calculer les premiers termes de la suite (x_n) approximant la solution, pour $n = 0, \dots, 4$. Précisez à chaque étape un majorant de l'erreur $|x_n - \alpha|$.
5. *Une résolution numérique par la méthode du point fixe.* On écrit l'équation de l'exercice précédent sous la forme $\sin x - 1/4 = x$.
- (a) Choisir un intervalle sur lequel $g(x) = \sin x - 1/4 = x$ est k -contractante. (On a intérêt à chercher un k le plus petit possible).
- (b) Appliquer la méthode, en majorant à chaque étape l'erreur commise. Comparer la vitesse de convergence avec la méthode de Newton.
-