TD 1 : Formalisation

Objectif : Formalisation d'énoncés naturels dans le langage de la logique des propositions. L'objectif n'est pas de tout traiter en séance de TD, vous devez faire les exercices non faits en TD chez vous. A part la section « En vrac », les énoncés sont extraits de sujets d'examen ayant été posés.

Formalisez chacun des raisonnements suivants à l'aide d'une seule formule ou sous la forme « hypothèses entraînent conclusion » : (repérez d'abord les propositions, associez à chacune une lettre propositionnelle, séparez les hypothèses des conclusions, puis organisez-les à l'aide des connecteurs).

En vrac :

a. Quand j'ai de la fièvre je suis malade, or j'ai de la fièvre donc je suis malade.

b. Si Bâ est un oiseau il a des plumes, or il n'a pas de plumes, donc ce n'est pas un oiseau.

c. Si Bâ est un oiseau il a des plumes, donc s'il n'a pas de plumes ce n'est pas un oiseau.

d. Si les poules ont des dents alors ce sont des mammifères, or elles n'ont pas de dents, donc ce ne sont pas des mammifères.

e. Si les poules ont des mamelles alors ce sont des mammifères, or elles n'ont pas de mamelles, donc ce ne sont pas des mammifères.

f. Si les archéoptérix ont des mamelles ce sont des mammifères et sinon, ce sont des oiseaux; donc ce sont des mammifères ou des oiseaux.

g. Les poules sont poïkilothermes ou ce sont des mammifères, or ce ne sont pas des mammifères, donc elles sont poïkilothermes.

h. Quand j'ai de la fièvre je suis malade, quand j'ai des rougeurs je suis malade aussi, donc si je ne suis pas malade je n'ai ni fièvre, ni rougeurs.

i. Quand j'ai de la fièvre je suis malade, quand j'ai des rougeurs je suis malade aussi, donc si je suis malade mais que je n'ai pas de fièvre je n'ai pas de rougeurs.

j. Quand il neige il fait froid, quand il y a du verglas il fait froid, or il y a du verglas ou de la neige donc on n'est pas en été, car en été il ne fait pas froid.

k. J'aime Domi ou Camille, et si j'aime Domi, j'aime Camille aussi ; donc j'aime Camille.

l. Un vol a été commis, on a relevé des traces de chaussures taille 40 et le voleur a été aperçu : il est petit. Parmi les 3 suspects (A, B et C), A est grand et chausse du 40, B est petit et chausse du 43, enfin C est petit et chausse du 40. Le voleur est l'un des trois suspects. Bien entendu, quand on chausse du 43, on ne porte pas du 40… Donc C est le voleur.
Indice : ce qui nous intéresse ici c'est le voleur, pas A (ni B ni C)… donc dire que A chausse du 40 ne nous intéresse que parce que <u>si c'est A le voleur cela entraîne que le voleur chausse du 40</u>, et à part ça, on s'en fiche que A chausse du 40... Autre chose, ne confondez pas « chausser » et « porter ».

m. Un vol a été commis, on a relevé des traces de chaussures taille 43 et le voleur a été aperçu : il est petit. Parmi les 3 seuls suspects possibles A, B, C, A est grand et chausse du 43, B est petit et chausse du 40, enfin C est petit et chausse du 43. Donc C est le voleur.

n. Après une course hippique entre chevaux noir et blanc, le cheval gagnant fut celui qui avait une robe noire et une crinière blanche. Il s'agissait de PetitGris, de Qristal ou de Rikita. Or PetitGris a une crinière noire et une queue blanche, Qristal a une robe noire et une queue blanche, et enfin Rikita a une robe noire. Enfin le gagnant avait sa crinière et sa queue de couleur opposées. C'est donc Rikita le gagnant.

o. Au Parlement d'un pays imaginaire, il y a deux sortes d'individus : les Parle qui ne disent que des vérités et les Ment qui ne disent que des mensonges. Un voyageur X rencontre trois parlementaires A, B et C. X demande à A ce qu'il est mais ne comprend pas sa réponse, B intervient et dit « A dit qu'il est un Ment » à quoi C ajoute « B ment ». X en conclut que B est un Ment et C un Parle. (Indice : Comment traduire l'énoncé : « A dit que φ » ?)

p. Considérons le raisonnement suivant :

1. Si les charges patronales sont lourdes, les entreprises n'investissent pas et embauchent peu.
2. Or, quand les entreprises n'investissent pas, la croissance stagne, ce qui entraîne un taux de chômage élevé.
3. Egalement, quand les entreprises embauchent peu, le taux de chômage est élevé.
4. Donc si les charges patronales ne sont pas lourdes, le taux de chômage n'est pas élevé.

Précisez les propositions que vous repérez dans cet énoncé, et associez une lettre à chacune d'elle. **Formalisez** l'ensemble de ce raisonnement (fallacieux d'ailleurs…).

q. Les ensembles

Formalisez chacun des énoncés **a.** à **h.** ci-dessous dans le langage de la logique des propositions. Les **seules** propositions que vous utiliserez seront « x appartient à E » et « x appartient à F », elles seront représentées par les lettres **e** et **f** respectivement. Par exemple, les phrases du type « Ens1 est inclus dans Ens2 » seront tout d'abord transformée en : « si x appartient à Ens1 alors x appartient à Ens2 ».

[Le complémentaire de E, noté C(E), est l'ensemble des éléments n'appartenant pas à E]

1. « x appartient à E et à F »
2. « x appartient à E et pas à F»
3. « x appartient à C(F) et à E »
4. « x appartient à $E \cup F$ »
5. « x appartient au complémentaire de l'union de E et de C(F) »
6. « L'intersection de E et de F est incluse dans le complémentaire de l'union des complémentaires de E et de F »
7. « E est inclus dans F si et seulement si le complémentaire de F est inclus dans le complémentaire de E »
8. « L'intersection de E et de l'union de E et de F, est égale à E »
9. Peut-on écrire des formules parlant d'un autre élément que x (disons y) telle que « si x appartient à E et y appartient à F alors tout deux appartiennent à l'intersection de E et de F » ?

r. Le problème de Max

1. Si Max craint les gros poissons, alors il tombera à l'eau s'il pêche un gros poisson.
2. Si Max utilise un gros appât et qu'il est un bon pêcheur, alors il pêchera un gros poisson.
3. Si les gros appâts dégoûtent Max, alors il n'en utilise pas.
4. Max n'est pas dégoûté par les gros appâts ou ne craint pas les gros poissons.
5. Si Max n'est pas dégoûté par les gros appâts et qu'il craint les gros poissons, alors il tombera à l'eau.
6. Si Max est un bon pêcheur et qu'il craint les gros poissons, alors il tombera à l'eau s'il utilise de gros appâts.
7. Si Max ne pêche pas un gros poisson et qu'il utilise de gros appâts, alors il n'est pas un bon pêcheur et il n'est pas dégoûté par les gros appâts.

Formalisez les sept affirmations précédentes en utilisant uniquement les propositions suivantes (et pensez à mettre des parenthèses !) :

P pour « Max **P**êche un gros poisson » **A** pour « Max utilise un gros **A**ppât »
C pour « Max **C**raint des gros poissons » **T** pour « Max **T**ombe à l'eau »
B pour « Max est un **B**on pêcheur » **D** pour « Les gros appâts **D**égoûtent Max »

s. Zoé, les aubergines et la moussaka

1. Si Zoé déteste les aubergines, alors elle n'en mange pas.
2. Zoé ne déteste pas les aubergines ou ne prend pas de moussaka.
3. Si Zoé prend de la moussaka, alors elle sera rassasiée si elle finit son plat.
4. Si Zoé mange de l'aubergine et qu'elle mange vite, alors elle finira son plat.

5. Si Zoé ne déteste pas les aubergines et qu'elle prend de la moussaka, alors elle sera rassasiée.
6. Si Zoé mange vite et prend de la moussaka, alors elle sera rassasiée si elle mange de l'aubergine.
7. Si Zoé ne finit pas son plat et qu'elle mange de l'aubergine, alors elle ne mange pas vite et elle ne déteste pas les aubergines.

Formalisez les sept affirmations précédentes en choisissant vos propositions (pensez encore à mettre des parenthèses !) :

t. <u>Les cubes</u>

On a trois cubes nommés 1, 2 et 3, et trois couleurs bleu (B), jaune (J) et vert (V). Chaque cube peut être d'une ou plusieurs couleurs. On se donne les propositions suivantes : B1 : « le cube 1 est bleu », V1 : « le cube 1 est vert », J1 : « le cube 1 est jaune », B2 : « le cube 2 est bleu », etc ainsi que AC12 : « le cube 1 est à côté du 2 », AC13 : « le cube 1 est à côté du 3 », et ainsi de suite. **Formalisez** les énoncés suivants (vous pourrez utiliser un nouveau connecteur noté !(A,B,C) qui exprime qu'une seule des formules A, B et C est vraie) :

1. la couleur du cube 1 est une seule des trois couleurs possibles
2. le cube 2 est de deux couleurs exactement
3. la couleur du cube 1 se retrouve sur le 3 mais pas sur le 2
4. les cubes 2 et 3 ont exactement une couleur en commun
5. aucun des cubes n'est à côté de lui-même
6. le cube 2 est à côté d'un cube qui n'est pas bleu
7. le cube 1 est à côté d'un jaune s'il est lui-même bleu, et à côté d'un vert sinon
8. donnez une formule définissant !(A,B,C).

TD 2 : Induction : définitions et preuves

NB : Etablissez clairement la base de l'induction. Précisez clairement vos hypothèses d'induction. Etablissez clairement l'étape d'induction. Rédigez clairement la conclusion. Tout ne pourra être fait en TD, vous **devez** poursuivre chez vous !

1. **Donnez** des définitions inductives de nc(A), ncu(A), ncb(A), nsf(A) respectivement nombre de connecteurs, nombre de connecteurs unaires, nombre de connecteurs binaires et nombre d'occurrences de sous-formules d'une formule A.
2. Combien (d'occurrences) de sous-formules a une formule avec n connecteurs binaires (et sans négation) ? **Prouvez** le résultat par induction.
3. Combien (d'occurrences) de sous-formules a une formule avec n connecteurs (binaires et unaires) ? **Prouvez** le résultat par induction.
4. Soit A une formule ne contenant ni implication ($\rightarrow$), ni équivalence ($\leftrightarrow$), ni $\top$, mais uniquement des propositions, ainsi que les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\bot$. On définit la duale de A, notée A°, la formule issue du remplacement dans A : de tous les $\wedge$ par des $\vee$, de tous les $\vee$ par des $\wedge$, de toute proposition p,q,r,… par sa négation $\neg p$,$\neg q \neg r$ et enfin de tous les $\bot$ par $\neg\bot$.

   Exemple **:** $(\neg (p \vee (\neg \bot \wedge \neg q)))$ ° = $(\neg (\neg p \wedge (\neg \neg \bot \vee \neg \neg q)))$

Donnez une définition inductive de °

5. Soit $n \geq 0$ un entier quelconque, et B, $A_0,\ldots, A_n$ des formules du langage de la logique des propositions. **Définissez** inductivement les abréviations $\Delta_n = A_n \wedge (A_{n-1} \wedge (\ldots \wedge (A_1 \wedge A_0)))$ et $\Gamma_n(B) = A_n \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_0 \rightarrow B)))$.
6. Soit A une formule quelconque. On définit, par induction, la grandeurs pf(A) de la manière suivante (pf(A) donne la profondeur de A et est définie par) :

pf($\bot$) = 0 ; pf(p) = 0 (p$\in$PROP) ; pf(($\neg$B)) = pf(B)+1 ; pf((C*B)) = max(pf(C) , pf(B)) + 1

Exemple : nsf($(\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q))))$) = 8 et pf($(\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q))))$) = 4

Montrez par induction sur A que : $nsf(A) \leq 2^{pf(A)+1} - 1$ où nsf(A) est la fonction définie dans l'exercice 1.

7. **Montrez** que $\Delta_n \rightarrow B$ et $\Gamma_n(B)$ (voir exercice 4) sont logiquement équivalentes.
8. Reprise exercice 4 : **montrez** par induction que A° est logiquement équivalente à ($\neg$A)
9. Soit E l'ensemble des formules écrites avec la proposition p, les connecteurs $\wedge$, $\vee$, le $\bot$ et les parenthèses uniquement. **Montrez** que pour toute valuation v et toute formule A de E, on a v(A)=0 ou v(A)=v(p). En déduire que E ne contient aucune tautologie.
10. Soit E l'ensemble des formules écrites avec toute proposition, les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et les parenthèses. Soit v une valuation telle que v(p)=1 pour tout p. **Montrez** que si A $\in$ E alors v(A)=1. En déduire que pour toute formule A de E, il n'y a pas de formule B de E équivalente à $\neg$A.

TD 3 : Calcul booléen

Objectif : Connaître et savoir appliquer les règles de simplification issues des diverses propriétés des connecteurs logiques (idempotence, commutativité, associativité, distributivité, éléments neutres et absorbants, …). Constater que la méthode a ses limites pour les grandes formules. Simplifiez celles des formules suivantes (cf. TD 1) qui vous paraissent valides jusqu'à obtenir **T**.

a) $((f \rightarrow m) \wedge f) \rightarrow m$
b) $((o \rightarrow p) \wedge \neg p) \rightarrow \neg o$
c) $(o \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg o)$
d) $((d \rightarrow m) \wedge \neg d) \rightarrow \neg m$
f) $((mam \rightarrow m) \wedge (\neg mam \rightarrow o)) \rightarrow (o \vee m)$
g) $((p \vee m) \wedge \neg m) \rightarrow p$
h) $((f \rightarrow m) \wedge (r \rightarrow m)) \rightarrow (\neg m \rightarrow (\neg f \wedge \neg r))$
i) $((f \rightarrow m) \wedge (r \rightarrow m)) \rightarrow ((m \wedge \neg f) \rightarrow \neg r)$
j) $((n \rightarrow f) \wedge (v \rightarrow f) \wedge (n \vee v) \wedge (é \rightarrow \neg f)) \rightarrow \neg é$
k) $((d \vee c) \wedge (d \rightarrow c)) \rightarrow c$
l) $(p40 \wedge p \wedge (vA \rightarrow (c40 \wedge \neg p)) \wedge (vB \rightarrow (c43 \wedge p)) \wedge (vC \rightarrow (c40 \wedge p))$
$\wedge (vA \vee vB \vee vC) \wedge (c43 \rightarrow \neg p40)) \rightarrow vC$
m) $(p43 \wedge p \wedge (vA \rightarrow (c43 \wedge \neg p)) \wedge (vB \rightarrow (c40 \wedge p)) \wedge (vC \rightarrow (c43 \wedge p))$
$\wedge (vA \vee vB \vee vC)) \rightarrow vC$
n) $(rn \wedge \neg cn \wedge (P \rightarrow (cn \wedge \neg qn)) \wedge (Q \rightarrow (rn \wedge \neg qn)) \wedge (R \rightarrow rn) \wedge (cn \leftrightarrow \neg qn)$
$\wedge (P \vee (Q \vee R))) \rightarrow R$

TD 4 : Théorie des modèles, méthode des tableaux

Objectif : Connaître les notions de modèle et contre-modèle, de conséquence logique, de validité, de satisfiabilité, et pratiquer la méthode des tableaux. Rappel : A est logiquement équivalente à B, noté $A \equiv B$, si et seulement si A et B sont conséquences logiques l'une de l'autre (A |== B et B |== A). Traiter au moins l'exercice 1.

1. Vérifiez si les ensembles suivants sont satisfiables, et donnez un modèle si oui.

- **a.** $\{p43, p, vA \rightarrow (c43 \wedge \neg p), vB \rightarrow (c40 \wedge p), vC \rightarrow (c43 \wedge p), vA \vee (vB \vee vC), \neg vC\}$
- **b.** $\{rn, \neg cn, P \rightarrow (cn \wedge \neg qn), Q \rightarrow (rn \wedge \neg qn), R \rightarrow rn, cn \leftrightarrow \neg qn, P \vee (Q \vee R), \neg R\}$
- **c.** $\{p40, p, vA \rightarrow (c40 \wedge \neg p), vB \rightarrow (c43 \wedge p), vC \rightarrow (c40 \wedge p), vA \vee (vB \vee vC),$
  $c43 \rightarrow \neg p40, \neg vC\}$

----

2. Supplément :

a) Tautologies ?

|== $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ |== $A\rightarrow(B\rightarrow(A\wedge B))$
|== $(A\rightarrow((A\leftrightarrow B)\vee B))$ |== $((A\wedge B)\rightarrow C)\leftrightarrow((A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C))$
|== $(A\wedge B)\leftrightarrow((A\vee\neg B)\wedge B)$

b) Equivalences logiques ?

3. Reprendre les formules obtenues au TD 1 (sauf o, p et q traités ci-dessus) : dites lesquels des raisonnements sous-jacents sont valides. Donnez des contre-modèles pour ceux qui ne le sont pas.
4. Montrer que si |== $(A \vee B)$ et |== $(\neg A)$ alors |== B (cf. définition de |==)
5. Soient A et B deux formules, montrer que si B est satisfiable alors l'une au moins de $B\wedge A$ et $B\wedge\neg A$ est également satisfiable.
6. Ecrire la table de vérité du connecteur si … alors … sinon … (Que l'on pourra noter _ ?_ ;_). Exprimez-le à l'aide des connecteurs habituels. A l'inverse, à l'aide de ce connecteur et de la négation uniquement, exprimez les autres éléments du langage ($\perp$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$).
6. Ecrire la table de vérité du connecteur ternaire ! tel que !(A,B,C) est vrai si et seulement si une et une seule parmi A, B et C est vraie. Exprimez-le à l'aide des connecteurs habituels.

TD 5 : théorie de la preuve (déduction naturelle)

Objectif : s'approprier les notions de preuve et de déductibilité, en pratiquant la déduction naturelle. On pourra indifféremment prouver directement les formules ou simplifier d'abord le problème en utilisant les propriétés de la déductibilité (ainsi soit on construit directement une preuve de $\vdash (C\to A)\to((C\to B)\to(C\to(A\wedge B)))$, soit, en justifiant la transformation, on construit une preuve de $C\to A, C\to B, C \vdash A\wedge B$ – ce qui en fait revient au même). Traiter au moins une question de l'exercice 2.

1. Compléter les preuves suivantes en précisant (c'est signalé par des ?), la règle appliquée, les formules obtenues et la, ou les, hypothèses déchargées. De quoi sont-elles la preuve (quelles hypothèses pour quelle conclusion) ?

```
                                              ¬ p      p ③
                                              ------------- (I⊥)
                                                   ?
                                              ------------- (?)
                                                   q
                                              ------------- (I→)(③)
               ( p → q) → p ①                      ?
               ------------------------------------------------------ (E→)
                                  ?                                 ¬ p ②
                                  ------------------------------------------ (I⊥)
                                                 ?
                                              ----- (I¬)(2)
                                                 ?
                                              ------ (E¬)
                                                 ?
                                         ------------------ (I→)(1)
                                                 ?
```

```
                                             q (5)          ¬ p ∧ ¬ q (2)          r (6)
     p (3)          ¬ p ∧ ¬ q (2)                           --------------- (?)
                    -------------- (?)                            ¬ q
                         ¬ p                  ----------------------------- ( ?)
     ---------------------------- (?)                      ⊥
              ⊥                                     ---------- (?)
         ---------- (?)            q ∨ r (4)                r
              r                    ------------------------------------------------------------- (?)(?)
                                                             ?
p ∨ (q ∨ r) (1)
------------------------------------------------------------------------------------------------ (?) (?)
                                   r
            ---------------------------------------------------------- (?) ( ?)
                             (¬ p ∧ ¬ q) → r
            ---------------------------------------------------------- (?) ( ?)
                   ((p ∨ (q ∨ r)) → ((¬ p ∧ ¬ q) → r)
```

```
          (p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) (1)                                          (p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) (1)
         ----------------------------- (?)          r(3)      ¬q(4)   ----------------------------- (?)
                r∨¬q                                                           p→q                  p
                                                                               ----------------------------- (?)
                                                                                          q
                                                                   ------------------------- (?)
                                                                               ⊥
                                                                            -------- (?)
                                                                               r
                ---------------------------------------------------------------------------- (?) (?)
p (2)                                              r                                  (p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) (1)
------------------------------------------------------- (?)                                ------------------------ (?)
                p∧r                                                                                ¬(p∧r)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------- (?)
                                                   ?
                                              ---------- (?)(?)
                                                   ¬p
                                  ------------------------------------------------------ (?) ( ?)
                                       ((p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r)) → ¬p
```

TD 5 : théorie de la preuve (suite)

2. Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes

a) Règles utilisées : (E$\wedge$), (I$\wedge$), (E$\rightarrow$), (I$\rightarrow$), (I$\vee$)

$(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow (B\rightarrow(A\rightarrow C))$	$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
$(C\rightarrow A)\rightarrow((C\rightarrow B)\rightarrow(C\rightarrow(A\wedge B)))$	$(A\wedge(A\vee B))\leftrightarrow A$
$(A\rightarrow B)\leftrightarrow((A\wedge B)\leftrightarrow A)$	$(C\rightarrow(A\wedge B))\leftrightarrow((C\rightarrow A)\wedge(C\rightarrow B)$

b) Règles utilisées : les mêmes qu'en a) plus (E$\vee$)

$(A\rightarrow B)\leftrightarrow((A\vee B)\leftrightarrow B)$	$(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))$
$(A\wedge(B\vee C))\rightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$	$((A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\vee B)\rightarrow C)$
$(A\vee(B\wedge C))\rightarrow((A\vee B)\wedge(A\vee C))$	$(A\vee(A\wedge B))\rightarrow A$

c) Règles utilisées : les mêmes qu'en b) plus (I$\neg$), (E$\neg$), (I$\bot$), (E$\bot$)
Il s'agit essentiellement de preuves par l'absurde.

$A\leftrightarrow\neg\neg A$	$(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$
$(A\wedge B)\leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$	$(A\vee B)\leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$
$(A\rightarrow B)\leftrightarrow\neg(A\wedge\neg B)$	$\neg(A\vee B)\leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B)$
$\neg(A\wedge B)\leftrightarrow (\neg A\vee\neg B)$	$(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$

3. Reprendre les raisonnements valides du TD 1 et donnez une preuve en déduction naturelle des arguments invoqués. En particulier les deux suivants (n applications successives d'une même règle (RE) ou (RI) sera notée : (RE)xn ou (RI)xn) :
Soit SIT = $rn \wedge \neg cn \wedge (P \rightarrow (cn \wedge \neg qn)) \wedge (Q \rightarrow (rn \wedge \neg qn)) \wedge (R \rightarrow rn) \wedge (cn \leftrightarrow \neg qn) \wedge (P \vee (Q \vee R))$,
montrer que : a) $\vdash$ (SIT $\wedge$ P) $\rightarrow \bot$, b) $\vdash$ SIT $\rightarrow \neg$Q et c) $\vdash$ SIT $\rightarrow$ R (Exo 1.q)
et
soit SIT = $\{p40, p, vA \rightarrow (c40 \wedge \neg p), vB \rightarrow (c43 \wedge p), vC \rightarrow (c40 \wedge p), vA \vee (vB \vee vC), c43 \rightarrow \neg p40\}$
montrer que : a) SIT, vA $\vdash \bot$, SIT $\vdash$ vB $\rightarrow \bot$ et c) SIT $\vdash$ vC (Exo 1.o)

TD 6 : Résolution

Objectif : Savoir appliquer le principe de résolution pour éventuellement réfuter un ensemble inconsistant de clauses. Faire au moins l'exercice 1.

1. Pour chaque ensemble de clauses, vérifier si on peut en dériver la clause vide. Concluez.

A.
- a) $p40$
- b) $\neg vA \vee c40$
- c) $\neg vB \vee c43$
- d) $\neg vC \vee c40$
- e) p
- f) $\neg vA \vee \neg p$
- g) $\neg vB \vee p$
- h) $\neg vC \vee p$
- i) $vA \vee (vB \vee vC)$
- j) $\neg c43 \vee \neg p40$
- k) $\neg vC$

B.
- a) rn
- b) $\neg cn$
- c) $\neg P \vee cn$
- d) $\neg P \vee \neg qn$
- e) $\neg Q \vee rn$
- f) $\neg Q \vee \neg qn$
- g) $\neg R \vee rn$
- h) $\neg cn \vee \neg qn$
- i) $cn \vee qn$
- j) $P \vee (Q \vee R)$
- k) $\neg R$

C.
- a) $p \vee r$
- b) $q \vee s$
- c) $\neg p \vee \neg q$
- d) $\neg r \vee \neg s$
- e) $q \vee r$
- f) $p \vee s$

D.
- a) $\neg q \vee r$
- b) $\neg r \vee p$
- c) $\neg p \vee q$
- d) $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
- e) $p \vee q \vee r$

E.
- a) $p \vee q$
- b) $\neg p \vee r \vee \neg q \vee p$
- c) $p \vee \neg r$
- d) $q \vee \neg p \vee \neg q$
- e) $q \vee \neg r \vee p$
- f) $r \vee q \vee \neg p \vee \neg r$
- g) $\neg r \vee q$

F.
- a) $p \vee q \vee r$
- b) $\neg q \vee s$
- c) $\neg r \vee s$
- d) $p \vee \neg s$
- e) $\neg p$
- f) $\neg r \vee q$

2. Utilisez le principe de résolution pour vérifier si les formules suivantes sont valides (après avoir mis leur négation en FNC – ou Forme Normale Conjonctive) :

$((p \rightarrow (q \wedge (r \vee s))) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow s)$

$(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((s \vee p) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q))$

$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg (r \rightarrow s)) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (r \vee \neg q)) \rightarrow (q \wedge s)$

$((p \vee q) \wedge (\neg s \rightarrow (p \rightarrow r)) \wedge ((r \vee s) \rightarrow q)) \rightarrow q$

TD 7 : Logique des prédicats : sémantique

Objectif : Se familiariser avec la sémantique de la logique des prédicats, les notions de modèles et d'interprétation.

1. On suppose que le langage logique contient (les symboles de) prédicats binaires ≥ et =, les constantes z et u, les fonctions S et + d'arité 1 et 2 respectivement.
Remarque : pour les raisons de commodité habituelle, on écrira (x≥y) au lieu de ≥(x,y), x=y au lieu de =(x,y) et x+y au lieu de +(x,y). Le prédicat = aura toujours son interprétation usuelle.

Soient M0, M1 et M2 les interprétations définis ci-dessous, pour chacune des formules qui suivent, vérifiez si elles sont ou non satisfaites par chacune des interprétations (si ce n'est pas le cas, explicitez un contre-exemple) :

M0 = (D0,m0) avec
D0 = {tf,f,t,c,tc} -- très froid, froid, tiède, chaud, très chaud
m0(≥) = {(f,tf),(t,tf),(t,f),(c,tf),(c,f),(c,t),(tc,tf),(tc,f),(tc,t),(tc,c),(tc,tc)}
m0(z) = tf et m0(u) = tc
m0(S) = {(tf,f),(f,t),(t,c),(c,tc),(tc,tc)}
m0(+) = max – i.e. le plus grand des deux arguments suivant ≥

M1 = (D1,m1) avec
D1 = N (ensemble des entiers naturels)
m1(≥) = interprétation usuelle {(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2),…}
m1(z) = 0 et m1(u) = 1
m1(S) = fonction successeur (+1 dans N)
m1(+) = fonction addition usuelle

M2 = (D2,m2) avec
D2 = R^{+*} (ensemble des réels strictement positifs)
m2(≥) = interprétation usuelle
m2(z) = 1 et m1(u) = π
m2(S) = fonction carré (^2 dans N)
m2(+) = fonction division usuelle (m2(+) = / dans R)

a. $\exists x \, \forall y \, (y \geq x)$;
b. $\forall y \, \exists x \, (y \geq x)$;
c. $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (((x \geq y) \wedge (y \geq z)) \rightarrow (x \geq z))$
d. $\forall y \, (u \geq y)$;
e. $\forall y \, (S(y) \geq y)$;
f. $\forall x \, \forall y \, \exists z \, (x \geq y \rightarrow (x \geq z \wedge z \geq y))$
g. $\forall x \, \forall y \, ((x = S(y)) \rightarrow \neg \, (x = y))$
h. $\forall x \, (x + z = x \wedge \forall y \, (x + S(y) = S(x+y)))$
i. $\forall x \forall y \, (x+y = y+x)$

TD 8 : Logique des prédicats : formalisation

Objectif : Se familiariser avec les possibilités et difficultés de la formalisation d'énoncés en français dans le langage de la logique des prédicats, surtout vis-à-vis des quantificateurs. On pourra toujours introduire, **en les définissant au préalable**, des prédicats intermédiaires.

1. Dans une soirée mondaine, autour d'une table circulaire, il y des hommes et des femmes, blond(e)s, brun(e)s ou roux/rousses, des grand(e)s, des moyen(ne)s et des petit(e)s. D'où vous êtes vous constatez les faits suivants :

a. Il n'y a aucun roux et aucune rousse
b. Aucune personne blonde n'est brune et vice-versa
c. Toute femme a un homme grand à sa droite
d. Tout homme a une femme brune à sa gauche ou une femme blonde à sa droite
e. Toute personne a sur sa droite une personne ayant sur sa droite une personne blonde
f. Toute personne a sur sa droite une personne qui n'a que des blond(e)s sur sa gauche
g. Il y a toujours une femme brune entre deux hommes petits quelconques
h. Il n'y a pas deux personnes blondes de la même taille

Formalisez ces énoncés en utilisant les prédicats suivants :
Bl(x) : x est blond(e) **H(x)** : x est un homme **P(x)** : x est petit **x=y** : x et y sont identiques
Rx(x) : x est roux/rousse **F(x)** : x est une femme **M(x)** : x est moyen
Br(x) : x est brun(e) **Gd(x)** : x est grand **Dte(x,y)** : y est à droite de x

NB : Deux personnes *sont de la même taille* ssi elles sont toutes deux grandes ou petites ou moyennes ; Une personne en a une autre *à sa gauche* ssi la $2^{ème}$ a la première à sa droite ; Une personne est *entre* deux autres ssi elle est à la droite de l'une et à gauche de l'autre

2. En utilisant les prédicats et fonctions suivants :

- Ent (x) se lit x est un nombre entier ;
- Rat(x) se lit x est un nombre rationnel ;
- Pair (x) se lit l'entier x est pair ;
- Pre (x) se lit l'entier x est premier ;
- y|x se lit l'entier y divise l'entier x ;
- S(x,y) se lit l'entier y est le successeur de l'entier x (y = x+1) ;
- P(x,y) se lit l'entier y est le prédécesseur de l'entier x (y = x-1) ;
- les prédicats et fonctions =, <, ≤, 0, 1 + et x avec leur signification habituelle

Formalisez les énoncés :
a) Il y a un entier plus petit ou égal à tous les autres
b) Il n'y a pas d'entier supérieur ou égal aux autres autres mais pour tout entier il y en a un plus grand
c) Tout nombre entier pair est égal à la somme de deux nombres entiers premiers [3]

Définissez les notions suivantes :
d) Donnez une formule définissant y|x par rapport aux autres prédicats et fonctions .
e) De même pour Pair, Pre, P, par rapport aux autres prédicats et fonctions
f) Définissez Rac(x,y) où y est la partie entière de la racine carrée de x
g) Définissez PGCD(x,y,z) où z est le pgcd de x et de y
h) Donnez une définition (inductive) de la soustraction, en introduisant la fonction « – »

3. En utilisant les prédicats suivants (ainsi que =) :

- P (x) se lit « x est un point » ;
- D(x) se lit « x est une droite » ;
- In (x,y) se lit « x appartient à y » ;
- Par (x,y) se lit « x est parallèle à y » ;
- Entre(x,y,z) se lit « y est entre x et z » ;
- Alignés(x,y,z) se lit « x, y et z sont alignés ».

Formalisez les énoncés :
a) Les points et les droites sont des objets distincts
b) Par deux points passe au moins une droite
c) Par deux points passe exactement une droite
d) Deux droites distinctes non parallèles se coupent en (au moins) un point
e) Deux droites distinctes non parallèles se coupent en exactement un point
f) Etant donné un point et une droite extérieure à ce point, par le point il ne passe qu'une seule autre droite parallèle à la première (Postulat des parallèles)
g) Etant donné deux points distincts, il y a au moins un point entre eux
h) Trois points distincts sont alignés ssi il y a une droite qui les contient tous trois
i) Etant donné trois points alignés (et distincts), l'un d'eux est entre les deux autres
j) Si A, B et C sont trois points alignés et que deux d'entre eux sont alignés avec un 4ème point alors ce dernier appartient à une droite passant par A, B et C (*Bien entendu, cette droite est unique en géométrie euclidienne à cause de l'énoncé* c)

TD 9 : Logique des prédicats : déduction naturelle

Objectif : S'approprier les notions de preuve et de déductibilité, en pratiquant la déduction naturelle. On pourra indifféremment prouver directement les formules ou simplifier d'abord le problème en utilisant les propriétés de la déductibilité, de plus on pourra utiliser toutes les simplifications connues : inter-définissabilité des connecteurs et des quantificateurs en particulier.

Définition Soit R une relation binaire (on écrira xRy plutôt que R(x,y))
R est réflexive ssi $\forall x\ xRx$
R est sérielle ssi $\forall x\ \exists y\ xRy$
R est dense ssi $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow \exists z\ (xRz \wedge zRy))$
R est irréflexive ssi $\forall x\ \neg xRx$
R est transitive ssi $\forall x \forall y \forall z\ ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$
R est symétrique ssi $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow yRx)$
R est asymétrique ssi $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow \neg yRx)$
R est confluente ssi $\forall x \forall y \forall z\ ((xRy \wedge xRz) \rightarrow \exists u\ (yRu \wedge zRu))$
R est euclidienne ssi $\forall x \forall y \forall z\ ((xRy \wedge xRz) \rightarrow yRz)$

Que pensez-vous de l'affirmation suivante : si R est transitive et symétrique alors R est réflexive ? (Vérifiez-le sans déduction naturelle, puis avec)

1. Donnez une preuve en déduction naturelle des énoncés suivants :

a) Si R est réflexive alors R est sérielle
b) Si R est réflexive alors R est dense
c) Si R est asymétrique alors R est irréflexive
d) Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique
e) Si R est symétrique alors R est confluente
f) Si R est symétrique et transitive alors R est euclidienne
g) Si R est sérielle, symétrique et transitive alors R est réflexive
h) Si R est réflexive et euclidienne alors R est symétrique
i) Si R est réflexive et euclidienne alors R est transitive

2. **Reprendre l'exercice 1 du TD 7 :**
a) Montrer que tout le monde est blond.
b) En précisant que $\forall x\ \forall y\ (Dte(x,y) \rightarrow x \neq y)$, montrer qu'il y a au moins deux personnes présentes.
c) (Très fastidieux) Montrer qu'il y a au plus trois personnes présentes.
d) (Très difficile) Montrer qu'il y a exactement deux personnes présentes en ajoutant les formules décrivant la circularité de la table.