Langages et Automates – Contrôle Continu

Durée : 1 h - Aucun document n'est autorisé

Les exercices sont indépendants.

Le barème est approximatif. Il est donné à titre indicatif.

On note L(G) le langage engendré par une grammaire G et L(M) le langage reconnu par un automate M.

Vous devez <u>impérativement tracer le graphe</u> de <u>tous</u> les automates construits.

<u>Exercice 1.</u> *(4 points)*

Soit la grammaire hors contexte G_1 = <N={S,T}, X={a,b}, $\mathcal{P}$, S> avec $\mathcal{P}$ défini comme suit :

(1) $S \rightarrow S\ a\ S\ a\ S$
(2) $S \rightarrow T$
(3) $T \rightarrow b\ T$
(4) $T \rightarrow \lambda$

a- Donner tous les mots w de $L(G_1)$ tels que $|w| \leq 3$ (sans justifier).

b- Choisir un mot w tel que $|w| = 3$ et donner au choix la suite des dérivations[1] <u>ou</u> l'arbre de dérivation pour w.

c- La grammaire est-elle ambiguë ? Justifier.

d- Quel est le langage engendré par G_1. Justifier informellement.

<u>Exercice 2.</u> *(4 points)*

Pour chacun des langages ci-dessous sur X={a,b,c}, indiquer s'il est reconnaissable par un automate fini. Si oui, donner l'automate, sinon justifier informellement (sans utiliser le lemme de l'étoile).

- $L_1 = \{w \in X^* \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ w = a(bca)^n\}$
- $L_2 = \{w \in X^* \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ w = a^n a^n a^n\}$
- $L_3 = \{w \in X^* \mid \exists\, n,p,q \in \mathbb{N} \text{ avec } q = n+p,\ w = a^n b^p c^q\}$

[1] Pour chaque dérivation, indiquer le numéro de la règle utilisée.

Exercice 3. *(4 points)*

Soit X un alphabet. On considère dans cet exercice une définition des automates finis différente de celle donnée en cours : en plus des changements d'états habituels, il est possible que le système change d'état sans qu'un évènement se produise. On note φ ce pseudo-évènement.

En d'autres termes... Soit $<X\cup\{\varphi\}, Q, q_0, F, \delta>$ un tel automate avec $\delta : X\cup\{\varphi\} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ (fonction de transition). δ est telle que $\forall\, q_1,q_2 \in Q,\; q_2 \in \delta(q_1,\varphi)$ s'il est possible de passer de q_1 à q_2 sans qu'un évènement se produise.

Le but de l'exercice est de définir deux procédures spécifiques à ce type d'automate pour construire l'union et le produit.

Soient 2 automates $M = <X\cup\{\varphi\}, Q, q_0, F, t>$ et $M' = < X\cup\{\varphi\}, Q', q_0', F', t'>$ définis comme indiqué ci-dessus.

1) Union d'automates.

a- Expliquer informellement comment construire, à partir de M et de M', un automate U qui reconnait $L(M)\cup L(M')$, union des langages L(M) et L(M').

b- Donner la définition formelle sous forme de quintuplet de l'automate U qui reconnait $L(M)\cup L(M')$.

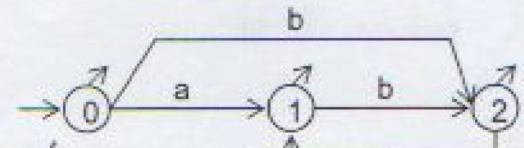
2) Produit d'automates.

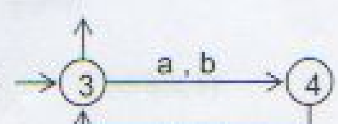
a- Expliquer informellement comment construire, à partir de M et de M', un automate P qui reconnait $L(M)\bullet L(M')$, produit des langages L(M) et L(M').

b- Donner la définition formelle sous forme de quintuplet de l'automate P qui reconnait $L(M)\bullet L(M')$.

Exercice 4. *(8 points)*

Soient les automates M_0 et M_3 définis comme suit :

M_0 :


M_3 :


$\neg$(2a ou 2b consécutifs)

X^* a/b [illegible]

a- Caractériser en français les langages $L(M_0)$ et $L(M_3)$.

b- Construire (en justifiant) un automate qui reconnait X^*-$L(M_0)$.

c- Par le calcul sur les systèmes d'équations de langages, construire un automate fini qui reconnaît $L(M_0)\cap L(M_3)$.

d- Soit la grammaire $G_5 = <X=\{a,b\}, N=\{N_5,N_6\}, N_5, \mathcal{P}>$

avec $\mathcal{P} = \{N_5 \rightarrow a\, N_6\, ;\; N_6 \rightarrow a\, N_6 \mid b\, N_6 \mid \lambda\}$

Donner l'automate M_5 déduit de la grammaire G_5.

Par le calcul sur les systèmes d'équations de langages de M_3 et M_5, construire un automate fini déterministe à 4 états qui reconnaît $L(M_3)\cup L(M_5)$.