Université Toulouse III – Paul sabatier
L2 Informatique

Logique — TD

Semestre 3

Toulouse, le 17 octobre 2012

CHAPITRE 1

TD 1

1.1 En vrac

1.2 Les ensemble

$$
\begin{array}{rcl}
x & \in & C(E \cup C(F)) \\
\neg X & \in & (E \cup C(F)) \\
\not(X \in E & \wedge & X \in C(F)) \\
\neg(x \in E & \wedge & \neg(X \in F))
\end{array}
$$

1.2.1 Expression ensembliste

$$X \in (A \cup B)$$

1.2.1.1 Compl.

$$
\begin{array}{rcl}
C(C(A)) & = & A \\
C(a \cup B) & = & C(A) \cap C(B) \\
C(A \cap B) & = & C(A) \cup C(B)
\end{array}
$$

1.2.1.2 Distrib.

Chapitre 2

Métathéorie

2.1 Induction

2.1.1 4.

2.1.1.1 Définition de $\circ$

$$\begin{aligned} (p)^\circ &= \neg p \\ (\bot)^\circ &= \neg\bot \\ (\neg A)^\circ &= \neg(A)^\circ \end{aligned}$$

2.1.1.2 Test de $\circ$

2.1.1.3 Preuve par induction

Montrer que $\forall F, F^\circ \equiv \neg F$

Variable propositionnelle

$$\begin{aligned} p^\circ &\equiv \neg p \\ (p)^\circ = \neg p &\equiv \neg p \\ \bot^\circ &\equiv \neg\bot \\ (\bot)^\circ = \neg\bot &\equiv \neg\bot \end{aligned}$$

Négation

$$\begin{aligned} A^\circ &\equiv \neg A \text{ (Hypothèse)} \\ (\neg A)^\circ &\equiv \neg\neg A \\ (\neg A)^\circ = \neg(A^\circ) &= \neg\neg A \end{aligned}$$

Disjonction

$$\begin{aligned} A^\circ &\equiv \neg A \\ B^\circ &\equiv \neg B \\ \text{Montrer que } (A \vee B)^\circ &\equiv \neg(A \vee B) \\ (A \vee B)^\circ = A^\circ \wedge B^\circ = (\neg A) \wedge (\neg B) &\equiv \neg(A \vee B) \end{aligned}$$

Conjonction

$$\begin{aligned} A^\circ &= \neg A \\ B^\circ &= \neg B \\ \text{Montrer que} (A \wedge B)^\circ &= \neg(A \wedge B) \\ (A \wedge B)^\circ = A^\circ \vee B^\circ = \neg A \vee \neg B &\equiv \neg(A \wedge B) \end{aligned}$$

2.1.2 5.

2.1.2.1 Définition de ΔA_n

$$\begin{array}{rcl} \Delta_0 &=& A_0 \\ \Delta_{(n+1)} &=& A_{(n+1)} \wedge \Delta_n \\ (\Delta_n &=& A_n \wedge \Delta_{(n+1)}) \text{ Pour } n \neq 0 \\ \Gamma_0(B) &=& A_0 \to B \\ \Gamma_{n+1}(B) &=& A_{(n+1)} \to \Gamma_n \end{array}$$

2.1.2.2 Preuve par induction

Montrer que $\forall n (\Delta_n \to B) \equiv \Gamma_n(B)$

$$P(n) \quad = \quad \Delta_n \to B \equiv \Gamma_n(B)$$

2.1.3 $\text{subst}(A, B, p)$

2.1.3.1 Définition

$\text{subst}(A, B, p)$

2.1.3.2 Trâce d'execution

$((p \vee q) \wedge \neg(r \vee p))[(r \vee p)/p]$

2.1.3.3 Preuve

$\forall F.nc(F) \leq nc(F[A/p]) \quad — \quad A[B/p]$

Cas $\perp$

$$\begin{array}{rcl} nc(\perp) & \leq & nc(\perp[A/p] \\ 0 & \leq & (\perp) \\ 0 & \leq & 0 \end{array}$$

R nc est le nombre de connecteur d'une expression.

$$\begin{array}{rcl} nc(p \vee q) & = & 1 \\ nc((p \vee q)[x \vee y/p]) & = & nc((x \vee y) \vee q) = 2 \\ nc((p \vee q)[x \vee y]) & = & nc(r \vee q) = 1 \end{array}$$

Cas $F = \neg G$ **— Hypothèse** $nc(G) \leq nc(G[A/p])$

$$\begin{array}{rcl} nc(G) & \leq & nc(G[A/p]) \\ nc(\neg G) & \leq & nc(\neg G[A/p]) \\ & \leq & nc(\neg(G[A/p])) \\ & \leq & nc(\neg G[A/p]) \\ & \leq & nc(G[A/p]) + 1 \\ nc(G) + 1 & \leq & nc(G[A/p]) + 1 \Rightarrow \text{ Vrai par hypothèse} \end{array}$$

Cas $F = G \wedge H$ **— Hypothèse :** $nc(G) \leq nc(G[A/p])$ **et** $nc(H) \leq nc(H[A/p])$

$$\begin{array}{rcl} nc(G \wedge H) & \leq & nc((G \wedge H)[A/p]) \\ nc(G) + nc(H) + 1 & \leq & nc(G[A/p] \wedge H[A/p]) \\ & \leq & nc(G[A/p]) + nc(H[A/p]) + 1 \Rightarrow \text{ Vrai par hypothèse} \end{array}$$

Cas $F = v$

Sous cas $v = p$

$$\begin{array}{rcl} nc(p) & \leq & nc(p[A/p]) \\ 0 & \leq & nc(A) \end{array}$$

Souscas $v \neq p$

$$\begin{array}{rcl} nc(v) & \leq & nc(v[A/p]) \\ 0 & \leq & nc(v) = 0 \end{array}$$

2.2 Logique du premier ordre

2.2.1 Syntaxe

2.2.1.1 Exercice 13

1. $\forall x(\neg(Rx(x)))$ ou $\neg\exists x.(Rx(x))$
2. $\forall x(Bl(x) \leftrightarrow \neg Br(x))$ ou $\neg\exists x.(Bl(x) \wedge Br(x))$
3. $\forall x.F(x) \rightarrow (\exists y.H(y) \wedge (Gc(y) \wedge Dte(x,y))$