Mathématiques discrètes

Chapitre 1 : Manipulation de sommes

Un *ouvrage de référence* : Jacques Vélu, Méthodes mathématiques pour l'informatique, Dunod éd.

Pour retrouver ce cours sur *Moodle* :

---

1. Définition du symbole Σ

Si $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des réels, on définit la notation suivante :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dans cette écriture, la lettre k est un *indice muet*. Cela signifie qu'on peut remplacer k par une autre lettre sans changer la valeur obtenue (comme dans les intégrales). Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Exemples 1

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 =$

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n =$

Exercice de cours 1.

Ecrire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

$$A = 10 + 12 + 14 + 16 + \cdots + 100, \qquad B = 1 + 3 + 5 + \cdots + 33.$$

---

2. Règles de calcul :

1) *commutativité* : si $a_1, a_2, \ldots a_n$ et $b_1, b_2, \ldots b_n$ sont des réels :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

justification :

Exemples 2

$$\sum_{k=1}^{n}(k+k^2) =$$

$$\sum_{j=1}^{100}(\sqrt{j}+\frac{j}{2}) =$$

2) *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition : si $a_1, a_2, \dots a_n$ et λ sont des réels :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

justification :

Exemples 3

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{2} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} 4k^2 =$$

3) *changement d'indice* : si $a_1, a_2, \dots a_n$ sont des réels on a par exemple

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}, \quad \text{en posant } j = i-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}, \quad \text{en posant } j = n+1-i.$$

Il y a beaucoup d'autres changements d'indice possibles.
justification :

Exemples 4

$$\sum_{k=1}^{m} 4k = \sum_{j=0}$$

$$\sum_{k=5}^{10} k^2 = \sum_{j=0}^{5}$$

Exercice de cours 2. Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n} (3k+2)^2$$

en fonction des quantités suivantes :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n} 1, \quad S_1 = \sum_{k=0}^{n} k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

Exercice de cours 3. Calculer la somme

$$T = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{k}+3)^2$$

en fonction des quantités suivantes :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n} 1, \quad S' = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}, \quad S_1 = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Exercice de cours 4. Effectuer le changement d'indice proposé dans la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{10} (k+3)^3 = \sum_{j=5}$$

---

3. Sommes particulières :

4) si les a_i sont *constants*, par exemple pour tout i, $a_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

(c'est-à-dire le nombre de termes multiplié par la constante)

Exemple 5

$$\sum_{k=1}^{50} 3 = \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} 1 =$$

5) progression *géométrique* : si q est un réel différent de 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exemples 6

$$\sum_{k=0}^{4} 2^k =$$

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} =$$

Cette formule sera démontrée en TD.

Exercice de cours 5. On donne un entier positif n.

a) Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 9.10^k.$$

b) vérifier le résultat pour $n = 5$

Exercice de cours 6. (somme d'une progression arithmétique)

a) montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

utiliser un changement de variable

b) calculer

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1).$$

c) vérifier le résultat obtenu pour $n = 3$ et pour $n = 5$.

Travaux Dirigés

Exercice 1.

On veut vérifier la propriété 5) des sommes : somme d'une progression géométrique.

Soit q un réel différent de 1. On note

$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Développer l'écriture de $(1-q)S$, et en déduire la propriété 5). *on pourra commencer à faire le travail en écrivant S "avec des pointillés", puis s'inspirer de la méthode pour travailler avec le symbole Σ.*

Exercice 2.

Calculer $\sum_{i=1}^{n} a_i$ avec

a) $a_i = 2$ pour $1 \leq i \leq n$,

b) $a_i = 3i$ pour $1 \leq i \leq n$,

c) $a_i = 2i + 4$ pour $1 \leq i \leq n$.

Exercice 3.

a) Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} q^k.$$

on discutera selon la valeur du réel q.

b) On donne deux entiers m et n tels que $m \leq n$. Calculer

$$\sum_{k=m}^{n} q^k.$$

on discutera selon la valeur du réel q.