L2 Mention Informatique

UE Probabilités

Chapitre 2 : Variables aléatoires discrètes

Notes de cours rédigées

par

Régine André-Obrecht, Julien Pinquier, Sergei Soloviev

Année universitaire 2011-2012

Pré requis mathématiques

$(U_n)_{n\geq 1}$ suite numérique : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Définition : (S_n) la série converge $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n < +\infty$

Proposition : Si $\sum U_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$. Réciproque fausse : $U_n = \frac{1}{n}$.

Propriétés : $U_n \geq 0$, (S_n) est croissante $\Rightarrow (S_n)$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ est bornée.

Remarques :

- l'ordre des termes est important pour U_n quelconque,
- il ne l'est pas si $U_n \geq 0$ et « on peut sommer par paquets »,
- Si $\sum |U_n|$ converge, alors $\sum U_n$ converge.

Rappel du chapitre 1

Cas où $\Omega = \{\omega_n, n \in N\}$, ensemble infini mais dénombrable :

1. Une probabilité définie sur Ω est entièrement caractérisée par sa valeur sur les singletons $P(\omega_n)$
2. Etant donnée une suite $(p_n)_n$ de réels tels que :
   $0 \leq p_n \leq 1$, $\sum_n p_n = 1$, il lui correspond une unique probabilité P telle que
   pour tout A de W, $P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n$

I. Variable aléatoire discrète

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.

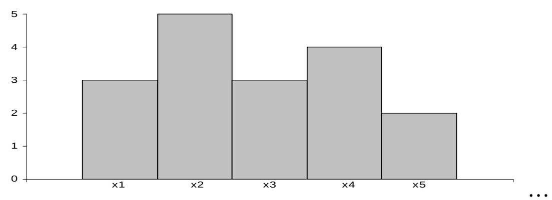
X est une variable aléatoire discrète si E est un espace discret, c'est-à-dire fini ou dénombrable et si pour tout B, $B \subset \mathcal{P}(E)$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Remarque : la tribu associée à E est $\mathcal{P}(E)$.

Proposition : La loi P_X d'une variable aléatoire discrète X est caractérisée par $P_X(\{x\})$ pour tout $x \in E$ et on a pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, $P_X(B) = \sum_{x\in B} P_X(\{x\})$.

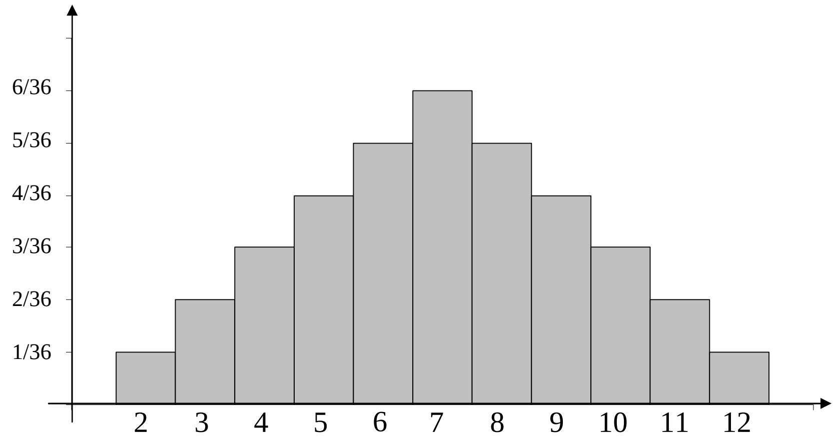
Représentation par histogramme de la loi X (diagramme « en bâtons »)

Par convention, $E = \{(x_n), n \in N\}$.



<u>Exemple</u> : Jeu avec 2 dés. X est la somme des deux lancers.

$P_x(2) = 1/36$, $P_x(3) = 2/36$, …, $P_x(12) = 1/36$



II. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X : $\Omega \to E$ et $(E, \mathcal{P}(E), P_x)$ l'espace probabilisé associé.
Notation $E = \{x_n, n \geq 0\}$ et $P_x(x_n) = P(X = x_n) = P_x(\{x_n\})$

Définition : On dit que la variable aléatoire X est **intégrable** si $\sum_{n\geq 0} |x_n| P_x(x_n) < +\infty$.

Dans ce cas, on appelle **espérance de X**, la valeur $E(X) = \sum_{n\geq 0} x_n P_x(x_n)$. *(moment d'ordre 1)*

<u>Exemple précédent</u> : Jeu avec 2 dés : X est la somme des lancers.
E(X) = (12 + 2) * 1/36 + (11 + 3) * 2/36 + (10 + 4) * 3/36 + (9 + 5) * 4/36 + (8 + 6) * 5/36 + 7 * 6/36 = 7

Propriétés : Soit $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l' ensemble des variables aléatoires discrètes intégrables, cet ensemble est un espace vectoriel (propriété 1)
X, Y$\in$ $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ λ, μ réels

1. $Z = \lambda.X + \mu.Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $E(Z) = \lambda.E(X) + \mu.E(Y)$.

2. Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.

3. Soit f : E → F
Si $\sum_{x\in E} |f(x)| P_x(x) < +\infty$ alors f(X) est une v.a. intégrable discrète à valeurs dans F et $E(f(x)) = \sum_{x\in E} f(x) P_x(x)$.

4. $E(X) \leq E(|X|)$

<u>Cas particuliers</u> :
1. $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contient toutes les variables aléatoires bornées.
2. Si Ω est fini, L^1 contient toutes les variables aléatoires.
3. Si X(w) = a, $\forall w \in \Omega$ alors E(X) = a.

Définition On dit que X est de carré intégrable, si X^2 appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Propriété et définition : si X est de carré intégrable, $|X - E(X)|$ est de carré intégrable et on appelle alors **variance de X**, le nombre positif : $var(X) = E\left(|X - E(X)|^2\right)$ *(moment d'ordre 2)*
<u>Démonstration et remarques</u> : soit $Y = |X - E(X)|^2$, avec X de carré intégrable
1. $|X| \leq 1 + X^2$ donc $X^2 \in L^1 \Rightarrow X \in L^1$,
2. $Y = X^2 - 2.E(X).X + E(X)^2$: somme de fonctions de L^1
 ➔ $Y \in L^1$ donc on peut calculer var(X) .
3. $var(X) = E(X^2 - 2.E(X).X + E(X)^2) = E(X^2) - 2.E(X.E(X)) + E(E(X)^2)$
 E(X) est un réel constant = a ➔ $var(X) = E(X^2) - 2.a.E(X) + a^2 = E(X^2) - E(X)^2$
4. $var(X) \geq 0 \Rightarrow E(X)^2 \leq E(X^2) \Rightarrow |E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}$.

Définition : Si X est de carré intégrable, on appelle **Ecart type** : $\sigma = \sqrt{var(X)}$.

Proposition : Si Y = a X + b alors var(Y) = a^2 var(X).
Si var(X) = 0 alors P(X=E(X)) = 1.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : X de carré intégrable, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} var(X)$.

<u>Exercice</u> : Un joueur coche 6 numéros sur une grille de 49 numéros. Les 6 numéros gagnants sont obtenus par tirage au sort.
L'espace d'états Ω est l'ensemble des parties de 6 éléments dans {1, 2, …, 49}.
Soit N le nombre de numéros gagnants sur la grille du joueur.
Pour une mise de 0,3 € le gain G(N) est de :

6 numéros	→	G(6) = 789.177	5 numéros	→	G(5) = 1.813
4 numéros	→	G(4) = 31	3 numéros	→	G(3) = 3

Quel est le gain moyen ? Quel est le bénéfice moyen ?

III. Vecteur aléatoire et Variables aléatoires indépendantes

a. Vecteur aléatoire

Définition : (X_1, X_2, …, X_n) définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X = (X_1, X_2, …, X_n) est appelé **vecteur aléatoire**.

En général, X_i : $\Omega \to E_i$ donc X : $\Omega \to E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est une variable aléatoire.

Proposition : Si les $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des v.a. discrètes alors X est une v.a. discrète et sa loi est donnée par : $P_x(x) = P(X=x) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)$ avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\{X = x\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}$$

Formule des lois marginales (i fixé)

Sous les hypothèses précédentes,

$$P_{X_i}(x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n \\ \text{Tout sauf } i}} P_X(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Covariance - Corrélation : Si X_1, X_2 sont de carré intégrable, on appelle **covariance** de X_1 et X_2, la valeur $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E\big((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\big) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$.

Si $\operatorname{var}(X_1) > 0$ et $\operatorname{var}(X_2) > 0$ on appelle **corrélation** de X_1 et X_2, la valeur $\operatorname{cor}(X_1, X_2) = \dfrac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\operatorname{var}(X_1)\operatorname{var}(X_2)}}$.

Inégalité de Cauchy Schwarz : $E(X_1X_2)^2 \leq E(X_1^2)E(X_2^2)$

Propriété : $\operatorname{cor}(X_1, X_2) \in [-1,1]$.

Proposition :

1. $\operatorname{var}(X_1+X_2) = \operatorname{var}(X_1) + \operatorname{var}(X_2) + 2\operatorname{cov}(X_1,X_2)$
2. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ alors $\operatorname{var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq l < m \leq n} \operatorname{cov}(X_l, X_m)$

b. Variables aléatoires indépendantes

Indépendance : Soit $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ n variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont indépendantes ssi : $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$.

Théorème : $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ variables aléatoires indépendantes ssi $\forall (f_i)_{1\leq i\leq n}$ 3 → 3, $f_i(X_i)$ intégrable, on a $E\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E(f_i(X_i))$.

Proposition : Si X_1 et X_2 de carré intégrable sont indépendantes alors $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$
(car $\operatorname{cor}(X_1, X_2) = 0$).

La réciproque est fausse !

IV. Fonctions génératrices d'une variable aléatoire discrète

Soit $X : \Omega \to E$, une variable alatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_n, n \geq 0\}$

Définition : On appelle **fonction génératrice** de la v.a. la somme de la série entière :
$G_x(z) = \sum_{n\geq 0} p_n z^n$ avec $p_n = P_x(x_n)$.

__Propriétés__ :

1. Pour tout z, $|z| \leq 1$, $G_x(z)$ existe et vaut $E(z^x)$.
2. Pour tout z, $|z| < 1$, G_x est continue et indéfiniment dérivable.
3. $P_x(x_n) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d^n}{dz^n}[G_x(z)]\right)_{z=0}$ et G_x détermine entièrement la loi de X.

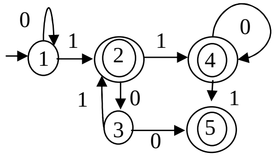
__Proposition 13__ : Le moment $E(X^k)$ existe ssi G_x est dérivable à gauche en 1 à l'ordre k et alors $\dfrac{d^k}{dz^k}[G_x(z)]_1 = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)P_x(x_n) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

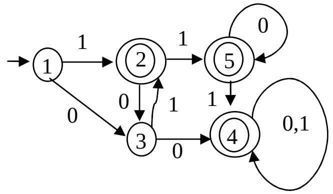
Unité de cours Probabilités - Exercices –
Chapitre 2 : Variables aléatoires discrètes

(Les exercices indexés d'une étoile * sont faits en séance)

Exercice 1* (Deux automates)

Soient deux automates A_1 et A_2 représentés par les deux diagrammes suivants avec les conventions du TD1





Soit Ω, l'ensemble des mots binaires de longueur 3, muni de la loi uniforme P.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies comme suit :

- $X_i(\omega) = k$, si le mot binaire ω est accepté par l'automate A_i dans l'état k.
- Sinon, $X_i(\omega) = 0$.

Afin de trouver le coefficient de corrélation *corr*(X_1,X_2) :

1- trouver la loi jointe de (X_1,X_2)
2- trouver la loi marginale des deux variables
3- calculer $E(X_1X_2)$, $E(X_1)$, $E(X_2)$.
4- En déduire *corr*(X_1,X_2)

Exercice 2* Quelques lois usuelles –espérance, variance et fonction génératrice-

2.1 La loi de Bernoulli (jeu de pile ou face)

La loi de Bernoulli est définie sur $\Omega = \{0, 1\}$ par $P(\{1\})=p$, $P(\{0\})=q$ avec $q=1-p$. Donner son espérance, sa variance et la fonction génératrice.

2.2 - La Loi binomiale.

$$\Omega = \{(a_1, a_2, ..., a_n), a_i \in \{0,1\}\}$$

On pose $P(\{(a_1, a_2, ..., a_n)\}) = p^k (1-p)^{n-k}$ avec k le nombre de a_i égal à 1.

Vérifier que c'est une loi de probabilités. Trouver la probabilité $P(A_k)$ avec $A_k=\{\omega / \omega$ contient exactement k fois 1}. Soit X la variable aléatoire définie par X(w) = nombre de a_i égal à 1 dans w. Donner sa loi, elle est appelée loi binomiale de paramètre *(n,p)*. Calculer son espérance, sa variance.

2.3 - La Loi géométrique.

$\Omega = N^*$ et $P(\{k\}) = p^{k-1} q$ avec $0<p,q<1$

Soit T l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, montrer que (Ω, T, P) est un espace de probabilités et ce, pour une unique valeur de q que l'on précisera. Supposons qu'une variable aléatoire discrète à valeurs dans N* suive cette loi géométrique, de paramètre p. Quelle est son espérance et sa variance ?

2.4 – La loi de Poisson de paramètre λ

$\Omega = N$ et $P(k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}, \; k \geq 0$

Montrer que P ainsi définie est une probabilité sur N. Calculer E(X), E(X(X-1)). En déduire var(X).

Exercice 3* (Variables discrètes et indépendance)

Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme qui prennent comme valeurs 1, 2 et 3. On pose Z = X + Y et U =XY.
1 – Est-ce que les variables Z et U sont indépendantes ?
2 – Donner leur coefficient de corrélation.

Exercice 4* (loi géométique)

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire discrète de loi :

$$P(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}, \; k \geq 0.$$

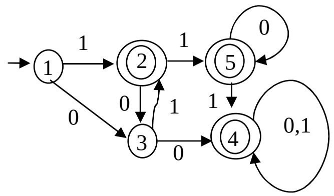
1- Vérifier que X suit bien une loi de probabilité (loi de type géométrique).
2- Calculer son espérance et sa variance.
3- Connaissant son stock s, calculer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 5* (loi binomiale et loi de Poisson)

Un élément chimique émet des électrons pendant une période T. Le nombre d'électrons émis est une variable Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces sur la période T.
1 Déterminer la loi du couple (Y,Z).
2 Déterminer la loi de Z, calculer son espérance.
3 Les variables Y et Z sont elles indépendantes ?
4 On considère X la variable aléatoire égale au nombre d'électrons émis non efficaces. Déterminer la loi du couple (X,Z). Les variables X et Z sont elles indépendantes.

Exercice 6 (Annales Partiel Octobre 2007)

Soit un automate A_1 représenté par le diagramme suivant (convention du cours/TD). On rappelle l'état (1) est l'état initial, les états (2), (4) et (5) sont des états de fin.



Soit Ω l'ensemble des mots binaires de longueur 4, muni de la loi uniforme P.

1. Quel est le cardinal de Ω ? quelle est la probabilité de chaque mot ω?

2. Soit Y la variable aléatoire définie par :

- Y(ω) = nombre k d'éléments égaux à 1 dans ω.

  Soient X_4 et X_5 deux variables aléatoires définies comme suit :
- $X_i(\omega) = i-Y(\omega)$, si le mot binaire ω est accepté par l'automate dans l'état i.
- Sinon $X_i(\omega) = 0$.

Afin de trouver les coefficients de corrélation *corr*(X_4,Y) et *corr* (X_5,Y) :

5- Trouvez les lois jointes de (X_4,Y) et (X_5,Y)

Pour la suite, avant de répondre à chaque question, il est demandé de rappeler la formule théorique donnant la quantité recherchée.

6- Trouvez la loi marginale des trois variables aléatoires, leurs espérances et leurs variances respectives
7- Calculez $E(X_4Y)$, $E(X_5Y)$
8- Déduisez *corr*(X_4,Y) et *corr* (X_5,Y)
9- Conclure