S2 : Analyse

Ce texte est le document de travail complet pour ce module. Il se compose de :
- 4 chapitres de cours avec exercices qui seront étudiés pendant les séances de Cours-T.D. ;
- un test d'autoévaluation en fin de chaque chapitre ;
- une feuille de travaux dirigés (exercices d'applications, problèmes en travail personnel) par chapitre ;
- un travail personnel dont le corrigé sera disponible sous Moodle.

Des travaux pratiques qui seront éxécutés sous Maple en fin de semestre.
Il est donc impératif d'avoir avec soi ce document pendant toute séance de cours, travaux dirigés ou travaux pratiques. Il est disponible sur Moodle.

Contenu du cours :

Ch 1 : Suites et fonctions numériques : variations et limites.
Ch 2 : Etude et approximation locale d'une fonction numérique.
Ch 3 : Résolution numérique d'équations.
Ch 4 : Intégration numérique.

Contrôle des connaissances :

- un contrôle de 1 heure en milieu de semestre ;
- un contrôle de 2 heures en fin de semestre.

Pendant ces contrôles, le document de travail est interdit, et l'emploi d'une calculatrice est autorisé et fortement conseillé (le modèle utilisé au lycée sera suffisant).
On vérifiera les connaissances sur ce document par une question du type de celles figurant dans les tests d'auto-évaluation.
On vérifiera les connaissances acquises sous Maple par une question spécifique (sans machine) au second contrôle.

Ch. 1 : Suites et fonctions numériques : variations et limites.

1 La droite réelle.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est en correspondance bijective[1] avec les points d'une droite :

$$-\infty \;\overset{}{\rule{6cm}{0.4pt}}\;\overset{0}{\cdot}\;\rule{6cm}{0.4pt}\; +\infty$$

Structure algébrique. $\mathbb{R}$ est muni de deux lois + et $\times$ avec les règles de calcul usuelles (commutativité, associaticité, distributivité...).
- Tout élément a un opposé pour + : on peut donc soustraire (On dit que $\mathbb{R}$ est un anneau).
- Tout élément non nul a un inverse pour $\times$: on peut diviser (On dit que $\mathbb{R}$ est un corps).
- Le corps $\mathbb{R}$ contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (qui admettent une écriture sous forme de fraction p/q), qui lui-même contient l'ensemble $\mathbb{Z}$ des *entiers*, qui lui-même contient l'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* (positifs ou nul). $\mathbb{Q}$ est un corps (pourquoi ?) ; $\mathbb{Z}$ est un anneau, mais n'est pas un corps (pourquoi ?). $\mathbb{N}$ n'est pas un anneau (pourquoi ?).

$\mathbb{R}$ possède une *distance* : $d(x, y) = |y - x|$ et une *relation d'ordre total* : $\leq$.

Intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ (il y a des variantes fermées, semi-fermées).
Intervalle ouvert centré en c : $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R},\ |x - c| < \varepsilon\}$.

Majorants, borne supérieure : Un majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ est un nombre M tel que pour tout a de A : $a \leq M$. La borne supérieure de A ($\sup(A)$) est le plus petit de ses majorants. On a des notions analogues de minorants et de borne inférieure.
Dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. De même, toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Exercice 1.

1. *Ecrire sous forme d'intervalle :* $A = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 2| < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{R},\ |2x + 1| \leq 5\}$. *Les dessiner sur la droite réelle. Quel est leur milieu ? leur longueur ?*
2. *Donner un majorant de A, de B, puis l'ensemble de tous les majorants de A, de tous les majorants de B, puis* $\sup(A)$ *et* $\sup(B)$.
3. *L'ensemble* $\{1 + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ *est-il minoré ? majoré ? borné ?*
4. *Ecrire l'intervalle* $[3, 6]$ *sous la forme centrée* $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$.

1. Voir le cours de Mathématiques discrètes pour la signification de ce terme.

2 Suites et fonctions numériques : variations.

Suite numérique : c'est une application u d'une partie $D = \{n \geq n_0\}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} u : D & \to & \mathbb{R} & \\ n & \mapsto & u(n) & \text{(plus souvent noté } u_n) \end{array}$$

Exemple : $D = \{n \geq 1\}, \quad u : \ n \mapsto u_n = 5\frac{n+2}{n}$.

Fonction numérique : c'est une application f d'une partie D (en général une réunion d'intervalles ouverts) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Exemple : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f : \ x \mapsto f(x) = 5|\frac{x+2}{x}|$.

Variations d'une suite ou d'une fonction.

Une suite numérique est :
- croissante si pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$,
- décroissante si pour tout n, $u_n \geq u_{n+1}$,
- constante si pour tout n, $u_n = u_{n+1}$.

Une fonction numérique est :
- croissante sur un intervalle I si pour tout couple (x, y) dans I, $f(y) - f(x)$ a le même signe que $y - x$, ou de manière équivalente : $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$.
- décroissante sur I si pour tout couple (x, y) dans I, $f(y) - f(x)$ est de signe contraire à $y - x$: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$.
- constante sur I si pour tout couple (x, y) dans I, on a : $f(x) = f(y)$.

On dira qu'une croissance ou décroissance est stricte lorsqu'on peut remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte dans les définitions précédentes. Une suite (ou fonction) qui est soit croissante soit décroissante est dite "monotone".

Exercice 2.

1. *Décrire et démontrer le type de variation de la suite u de l'exemple précédent.*
2. *Décrire et démontrer le type de variation de la fonction f de l'exemple précédent.*
3. *Quel est le type de variation de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$?*

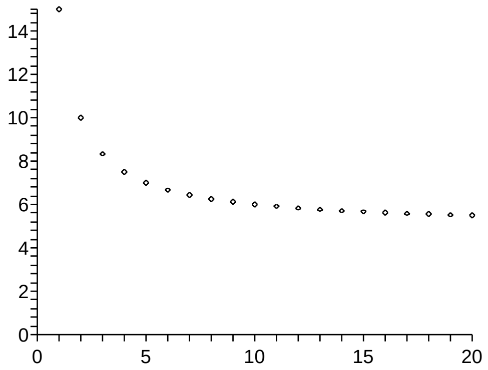

Figure 1 – Représentation graphique de $u_n,\ n \in \{1, \cdots 20\}$

.

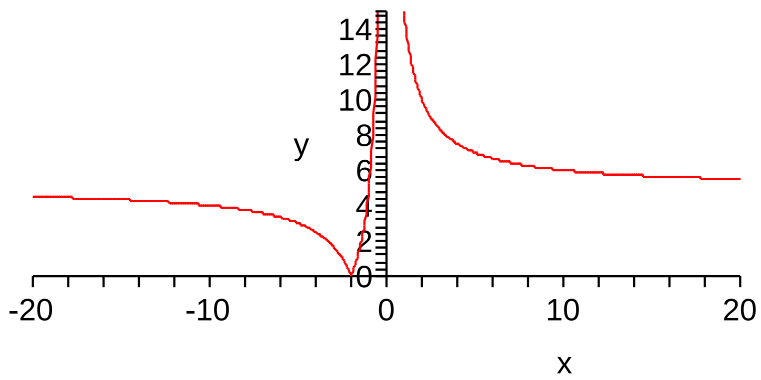

Figure 2 – Représentation graphique de f sur l'intervalle $]-20, 20[$.

Exercice 3.

1. *Soit* $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$. *Déterminer le signe de* $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ *sur son domaine de définition (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par* $\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}$*) et en déduire les varaitions de* f.
2. *On définit une suite* v *par* $v_1 = \sqrt{2}$, *puis* $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$ *pour tout* $n \geq 1$. *Démontrer par récurrence que* v *est croissante.*
3. *Montrer (par récurrence) que* (v_n) *est bornée par 2.*

Fréquemment, les suites sont définies de manière itérative par la donnée d'un premier terme et une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples classiques :

Suite arithmétique. C'est une suite définie par la donnée de son premier terme et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + a$, où a est une constante.

Suite géométrique. C'est une suite définie par la donnée de son premier terme et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \times q$, où q est une constante.

Exercice 4. *Décrire le type de variation des suites arithmétiques et géométriques.*

3 Fonction réciproque.

- la valeur $y = f(x)$ est appelée "image" de x par f. L'ensemble des $\{f(x),\ x \in I\}$ est noté $f(I)$. Si $I = D$ est le domaine de définition de f, $f(D)$ est appelé "image de f".

- une solution x de $f(x) = y$ est appelée "pré-image" ou "antécédent" de y par f.

- Une fonction est *injective* d'un intervalle I vers un intervalle J lorsque pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ admet *au plus une* solution x dans I.

- Une fonction est *surjective* d'un intervalle I vers un intervalle J lorsque pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ admet *au moins une* solution x dans I.

- Une fonction est *bijective* d'un intervalle I vers un intervalle J lorsque pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ admet *exactement une* solution x dans I.
Elle admet alors une application réciproque : $f^{-1}:\ J \to I$ qui à tout y de J associe l'unique solution x de $f(x) = y$. Son graphe est obtenu à partir de celui de f par la symétrie : $(x,y) \to (y,x)$, c'est-à-dire par symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Propriété. Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective sur I. Elle est donc bijective de I sur $J = f(I)$.

Exercice 5. *La fonction* $f:\ x \mapsto x^2$ *est-elle injective, surjective, bijective de* $[0,1]$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*
- même question de $[-1,1]$ *sur* $[0,+\infty[$ *?*
- même question de $[-1,0]$ *sur* $[0,+\infty[$ *?*
- Lorsqu'elle est bijective, précisez son application inverse.

4 Limites d'une suite ou d'une fonction.

On dit qu'une suite (u_n) tend vers l lorsque n tend vers l'infini lorsque tout intervalle ouvert $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ autour de l contient tous les termes de la suite au delà d'un certain rang n_0 :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } n_0 \text{ tel que si } n \geq n_0, \text{ alors } |u_n - l| < \varepsilon.$$

De même, on dit qu'une fonction f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert autour de l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x au-delà d'un certain rang x_0 :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } x_0 \text{ tel que si } x \geq x_0, \text{ alors } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On montre facilement que lorsqu'une suite ou fonction admet une limite l celle-ci est unique.

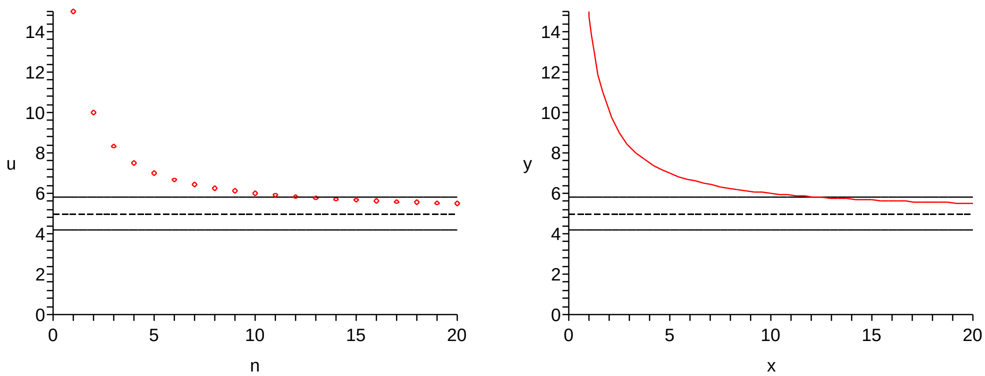

Figure 3 – Toutes les valeurs de u (ou de f) rentrent dans l'intervalle $]5-0.8\ ,\ 5+0.8[$ pour n (ou x)≥ 13.

Exercice 6. *Nous allons démontrer ce que suggèrent les graphiques précédents, à savoir :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 5, \ \textit{et} \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5.$$

On se donne donc un intervalle quelconque $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Trouver en fonction de ε un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite rentrent dans cet intervalle. De même, trouver un rang x_0 au delà duquel toutes les valeurs $f(x)$ rentrent dans cet intervalle.

Généralisation de la notion de limite. Dans le cas d'une fonction, on peut généraliser la notion de limite lorsque la variable x se rapproche d'une valeur a autre que $+\infty$. Il suffit que a appartienne à D ou soit sur le bord de D (cas le plus intéressant) :

On dit qu'une fonction f tend vers l lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert autour de l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $|x-a|$ inférieur à un certain rang η.

En d'autres termes on a : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ lorsque, quelquesoit l'intervalle ouvert $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ autour de l, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que :

$$\text{si } |x-a| < \eta \text{ alors } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

De plus, si on obtient cette condition seulement pour $0 < (x-a) < \eta$, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs positives (ou par la droite). On a de même une notion de limite à gauche lorsque $x - a < 0$. On utilise les notations :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

La limite en a de f existe si et seulement si les limites à droite et à gauche en a existent et sont égales.

Dans le cas d'une suite, on peut généraliser la notion de limite à $l = \pm\infty$: on dit qu'une suite (u_n) tend vers $l = +\infty$ lorsque n tend vers l'infini ($\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$), lorsque tout intervalle ouvert $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite au delà d'un certain rang n_0. On a une définition analogue pour $l = -\infty$, et pour les fonctions.

5 Suites convergentes, suites divergentes.

On dit qu'une suite est *convergente* lorsqu'elle admet une limite *finie* quand n tend vers $+\infty$. Elle est *divergente* dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque, ou bien la limite n'existe pas (par exemple $u_n = (-1)^n$), ou bien elle existe mais est infinie (par exemple $u_n = 2n$).

Remarque : toute suite convergente est bornée, puisque tous ses termes sauf un nombre fini prennent leurs valeurs dans un intervalle borné autour de l. La réciproque est fausse :
Exemple de suite bornée mais divergente : $u_n = (-1)^n$.

Exercice 7.

1. *Montrer que toute suite arithmétique avec $a \neq 0$ est divergente.*
2. *Montrer que toute suite géométrique avec $|q| < 1$ converge vers 0.*
3. *Montrer que toute suite géométrique avec $|q| > 1$ diverge.*

Un critère suffisant de convergence de suites.

- *Toute suite croissante et majorée par M converge vers une limite l. De plus on a : $l \leq M$.*
- *Toute suite décroissante et minorée par m est convergente vers une limite l, et $l \geq m$.*

Exemple - La suite (v_n) de l'exercice 3 est convergente. On ne connait pas sa limite l, mais on sait que $l \leq 2$. On verra à l'exercice 11 comment calculer cette limite.

Attention ! Même si $v_n < M$ pour tout n, on a seulement : $\lim_n(v_n) \leq M$. On retiendra donc que *par passage à la limite les inégalités strictes deviennent larges.*

Preuve du critère - On utilise que la partie $A = \{u_n, n \geq 0\}$ est non vide et majorée, et donc admet une borne supérieure l. On vérifie ensuite que l est bien la limite de la suite. En effet puisque l est un majorant de A et puisque quelquesoit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A, on peut trouver un terme u_{n_0} de la suite qui vérifie : $l - \varepsilon < u_{n_0} \leq l$. La suite étant croissante, tous les termes de la suite rentrent dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l]$ à partir de ce rang n_0.

Suites adjacentes : la propriété des intervalles emboités. (très utile pour donner des valeurs approchées d'une solution d'équation.)

- Deux suites adjacentes a_n et b_n (c'est-à-dire vérifiant : a_n croissante, b_n décroissante, $a_n < b_n$ et $\lim(b_n - a_n) = 0$) sont convergentes et ont même limite.

En effet, la première est croissante majorée (par quoi ?) et la seconde décroissante minorée. Elles convergent donc toutes les deux. Leurs limites sont égales puisque $\lim(b_n - a_n) = 0$.

Remarquons que, géométriquement, cette limite est l'intersection de tous les intervalles emboités $[a_n, b_n]$.
Les valeurs a_n sont des *approximations par défaut* de l et les valeurs b_n des *approximations par excès*. L'erreur commise lorsqu'on approxime l (inconnue) par a_n (calculable) est majorée par $(b_n - a_n)$ (calculable).

Exercice 8. *Montrez que les suites définies par $u_n = \sqrt{2} - 1/n^2$ et $v_n = \sqrt{2} + 1/n$ sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?*
Que vaut l'intersection $\cap_{n=1}^{\infty}[u_n, v_n]$ dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{Q}$?

Critère de convergence par comparaison.

Si à partir d'un certain rang n_0 on a : $a_n \leq b_n \leq c_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.
On a un critère analogue pour les fonctions : si on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle autour de a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Exercice 9. *Déterminer la limite de $x\sin(1/x)$ quand x tend vers 0.*

6 Calcul pratique d'une limite.

Dans la pratique, on utilise rarement la définition elle-même. On utilise d'abord (lorsque c'est possible) les propriétés "algébriques" des limites (c'est-à-dire les propriétés par rapport aux opérations algébriques). On rappelle le théorème suivant :

Règles algébriques. Si les suites (u_n) et (v_n) ont pour limites l et l' quand n tend vers l'infini alors :

1. $(u_n + v_n)$ a pour limite $l + l'$;
2. $(u_n \times v_n)$ a pour limite $l \times l'$;
   En particulier $(a \cdot u_n)$ a pour limite al si a est une constante.
3. Si $l' \neq 0$, (u_n/v_n) a pour limite l/l' ;
   Si le dénominateur tend vers $l' = 0$ *en gardant un signe constant*, alors (u_n/v_n) a pour limite $\pm\infty$, le signe du résultat étant donné par la règle des signes d'un quotient.
   On peut symboliser ce résultat (pour $l > 0$) par : $l/0^+ \to +\infty$, $l/0^- \to -\infty$.

Règles algébriques étendues. La plupart de ces résultats s'étendent aux cas où les limites l ou l' sont infinies avec les règles représentées par la liste suivante (le signe "$\to$" symbolise ici à chaque fois un théorème qu'on peut énoncer sous la forme précédente) :

1. $(+\infty) + (+\infty) \to (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) \to (-\infty)$, $(\pm\infty) + l \to (\pm\infty)$.
2. $(\pm\infty) \times (\pm\infty) \to (\pm\infty)$, si $l \neq 0$, $(\pm\infty) \times l \to (\pm\infty)$,
   le signe du résultat est donné par la règle des signes d'un produit.
3. $l/(\pm\infty) \to 0$, si $l \neq 0$, $(\pm\infty)/l \to (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0^+ \to (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0^- \to (\pm\infty)$,
   le signe du résultat étant donné par la règle des signes d'un quotient.

On a exactement les mêmes résultats si on considère deux fonctions f et g admettant des limites l et l' lorsque x tend vers la même valeur a.

Règles de composition. (Il y a à nouveau des versions étendues aux limites infinies dont on devinera facilement l'énoncé.)

1. On considère la fonction $g \circ f$ (g composée avec f) définie par : $x \mapsto g(f(x))$. On a :

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

2. On considère une suite (u_n) et une fonction f. On a :

$$\text{Si } \lim_{n \to +\infty} u_n = b \text{ et } \lim_{x \to b} f(x) = c, \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = c.$$

   En particulier, si $\lim_{n \to +\infty} u_n = b$, si b est dans le domaine de définition de f et $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$ (on dit alors que f est continue en b : voir le chapitre suivant), alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(b).$$

Exercice 10. *A l'aide des règles ci-dessus, étudier l'existence et la valeur des limites suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty} \exp(1-n^2); \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{n} + \ln(1+\frac{1}{n})).$$

Remarque - D'après les règles de composition, si une suite (u_n) est définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur un intervalle autour de l, et si (u_n) est convergente, alors sa limite l vérifie $f(l) = l$. En effet, le premier membre de l'égalité tend vers l (c'est la suite (u_n) "décalée") et le second membre tend vers $f(l)$. On a donc égalité par unicité de la limite.

Exercice 11. *Déterminer la limite de la suite (v_n) de l'exercice 3.*

Les résultats précédents permettent de calculer les limites de suites ou fonctions sauf dans les 4 situations suivantes, appelées "formes indéterminées", symbolisées par :

1. $(+\infty) + (-\infty) \to$?
2. $0 \times (\pm\infty) \to$?
3. $(\pm\infty)/(\pm\infty) \to$?
4. $0/0 \to$?

Dans ces situations, les résultats changent suivant les suites ou fonctions considérées. On doit "lever l'indétermination" par différentes techniques, qui visent toutes à comparer les vitesses de convergence vers 0 ou ∞ pour repérer le terme dominant. On pourra par exemple essayer de simplifier l'expression, ou encore utiliser les critères de comparaison. Nous aurons d'autres outils dans le chapitre suivant (dérivation, développements limités).

Exercice 12.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; $\quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$;
2. *Vérifier la formule :* $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. *En déduire l'existence et la valeur de la limite :* $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$.
3. *Démontrer que pour* $x \geq 0$, $\sin x \leq x$. *En déduire :* $1 - x^2/2 \leq \cos x \leq 1$ *et* $x - x^3/6 \leq \sin x \leq x$. *Calculer la limite quand x tend vers 0 de* $\sin x/x$.

7 Comparaison de deux fonctions au voisinage d'un point

Soit a un point (éventuellement infini) sur le bord des domaines de définition de f et de g. On introduit le vocabulaire et les notations suivantes :

- f est équivalente à g au voisinage de a (notation : $f \sim g$), si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Deux fonctions équivalentes en a ont donc même limite quand x tend vers a.

Exercice 13.

1. *Montrer que* $\sin x \sim x$ *au voisinage de 0.*
2. *Montrer que si* $f \sim f_0$ *et* $g \sim g_0$ *au voisinage d'un point* a*, alors* $(fg) \sim (f_0 g_0)$ *et* $(f/g) \sim (f_0/g_0)$ *au voisinage de* a*.*
3. *Attention, c'est faux pour une somme ou différence : montrer que* $\cos(x) \sim 1$ *au voisinage de 0 et aussi* $\cos(x) \sim 1 - x^2/2$ *au voisinage de 0. Pourtant,* $0 \not\sim x^2/2$*.*
4. *Montrer qu'un polynôme* $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_0$ *est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de* $+\infty$ *ou de* $-\infty$*.*
5. *Soit* $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_0$ *et* $Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \cdots + b_0$ *deux polynômes de degré* p *et* q*. Trouver un équivalent de* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *au voisinage de* $+\infty$ *et en déduire sa limite quand* x *tend vers* $+\infty$*.*

- f est dominée par g au voisinage de a, $f(x) = b(x)g(x)$ où b est bornée sur un intervalle autour de a.

Notation : $f = O(g)$.
Exemple : $x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$ au voisinage de 0.

- f est négligeable devant g au voisinage de a, si $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Notation : $f = o(g)$.
Exemple : Si $p > q$, $(x-a)^p = o((x-a)^q)$ au voisinage de a.

- La notation $f(x) = g(x) + o((x-a)^n)$ signifie donc

$$f(x) = g(x) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

On l'utilise lorsqu'on ne peut pas préciser cette fonction ε. Intuitivement, elle signifie que la différence $f - g$ tend vers 0 quand x tend vers a "plus rapidement" que $(x-a)^n$.

Ch. 1 : Travaux dirigés

1. Soit $v_n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$ la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et de premier terme 1.
   (a) En utilisant la formule de l'exercice 12.2 du cours, vérifier que : $v_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.
   (b) En déduire que si $|q| < 1$, la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
   (c) Application : calculer $\sum_{i=0}^{\infty}(10^{-3})^i$. On donnera le résultat sous forme d'une fraction. (La notation $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ signifie : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} u_i$).

2. *Approximation décimale d'un nombre rationnel.*
   (a) En effectuant la division, donner les 12 premiers termes de la suite décimale illimitée par défaut du rationnel $x = 13/7$. Pouvez-vous deviner le développement décimal illimité infini de ce rationnel ? Pour quelle raison cette périodicité apparaitra-t-elle systématiquement lorsque x est rationnel ?
   (b) Réciproquement, on considère un réel x dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang : 0,72486486486486...
   En utilisant le résultat de l'exercice 1, déterminer le rationnel représenté par cette suite décimale illimitée périodique.

3. *Approximation d'une racine carrée : méthode de Héron d'Alexandrie.*
   Soit a un nombre réel positif, et u_0 un nombre entier plus grand que $\sqrt{a}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
   (a) Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.
   (b) Démontrer par récurrence la propriété : $\sqrt{a} < u_n < u_{n-1}$. En déduire que (u_n) est convergente.
   (c) Calculer la limite l de (u_n) en utilisant la remarque de la page 10.
   (d) Nous allons vérifier que la convergence de cette suite est très rapide :
   - Vérifier l'égalité : $(u_{n+1} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$.
   - On se place dans le cas $a = 2$ et on choisis $u_0 = 2$. Montrer que $(u_{n+1} - \sqrt{2}) \leq (u_n - \sqrt{2})^2$. Expliquer pourquoi cette convergence "quadratique" implique que le nombre de décimales exactes de l'approximation de $\sqrt{a}$ par u_n double à chaque itération.

   Nous généraliserons ultérieurement cette méthode d'approximation qui est un cas particulier de la méthode de Newton (voir chapitre 3).

4. On considère la fonction $g : x \mapsto 2\sqrt{x} - x$ définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
   (a) Démontrer que g est strictement croissante sur I (méthode indifférente).
   (b) Quelle est l'image $J = g(I)$ de l'intervalle I par g ?
   (c) Démontrer l'existence de la fonction réciproque $g^{-1} : J \to I$.
   Déterminer cette fonction.

Ch. 1 : Travail personnel.

Un problème d'évolution de population. (contrôle partiel 2010)
(Correction sur Moodle)

On évalue chaque année numérotée n le nombre d'individus u_n d'une population d'animaux, exprimée en millions d'individus. La première année, on a 300.000 individus, et donc $u_1 = 0,3$. On constate que d'une année à l'autre, la population évolue par la loi :

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f(x) = kx(1-x).$$

La constante k est un paramètre réel strictement positif qui dépend du milieu où vit la population (plus ou moins hostile ou accueillant).

1. Démontrer que f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ (toutes les méthodes seront acceptées).
2. Expliquer pourquoi, lorsque (u_n) est convergente, sa limite l vérifie $f(l) = l$.
   Résoudre cette équation et donner les deux valeurs possibles pour l.
3. Dans toute cette question, on fixe $k = 1$.
   (a) Calculez u_2, u_3, et comparez u_1, u_2 et u_3.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1/2$.
   (c) En déduire que (u_n) converge et donner la valeur limite du nombre d'individus de la population quand n tend vers l'infini.
4. Dans toute cette question, on fixe maintenant $k = 2$. En suivant une stratégie analogue à la question précédente (calcul et comparaison des premiers termes u_1, u_2 et u_3, étude des variations de (u_n), recherche d'une borne), démontrer que (u_n) est à nouveau convergente et déterminer sa limite.
5. Décrire dans chaque cas l'évolution de la population.
   Des deux valeurs $k = 1$ et $k = 2$, laquelle correspond à l'environnement le plus hostile ?