Partiel UEO1. DEUG S3

Durée : 1 h – Tous documents autorisés

Le barème est donné à titre indicatif

A. Formalisation (4 pts)

Considérons l'énoncé suivant : « S'il y a du soleil et que je ne porte pas de chapeau je risque l'insolation ; donc, je porte un chapeau ou s'il y a du soleil je risque l'insolation »

a. Précisez les propositions que vous repérez dans cet énoncé, et associez une lettre à chacune d'elle.
b. Formalisez l'énoncé.

B. Théorie des modèles (6 pts)

1. Par la méthode de votre choix, vérifiez que la formule obtenue à l'exercice précédent est valide.
2. Par la méthode de votre choix, vérifiez si la formules suivante est une tautologie, et donnez un contre-modèle (ou une substitution falsifiante au choix) si ce n'est pas le cas :

$$((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow q)$$

C. Théorie de la preuve (déduction naturelle) (10 pts)

1. Compléter la preuve suivante en précisant là où cela manque (signalé par des ❓), la règle appliquée, les formules obtenues et la, ou les, hypothèses déchargées. Vous répondrez directement sur la feuille fournie en annexe.

```
                                                      q ⑤   (¬ p ∧ ¬ q) ②          r ⑥
                p ③  (¬ p ∧ ¬ q) ②                          --------------- (E∧)
                     --------------- (❓)                      ¬ q
                          ¬ p                        ------------------------- ( ❓)
              -------------------------- (I⊥)                   ⊥
                      ⊥                                   ---------- (E⊥)
                  ---------- (❓)          ❓ ④                  r
                      r                    --------------------------------------------------------- (E∨)(⑤, ⑥)
                                                              ❓
 ((p ∨ (q ∨ r)) ①
 ---------------------------------------------------------------------------------------------------- (E∨) (❓,❓)
                                    r
               ------------------------------------------------------ (I→) ( ❓)
                            (¬ p ∧ ¬ q) → r
               ------------------------------------------------------ (❓) ( ❓)
                      ((p ∨ (q ∨ r)) → ((¬ p ∧ ¬ q) → r)
```

2. Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :
   1. $((p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow s) \rightarrow ((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow s))$
   2. $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

Partiel UEO1. DEUG S3

Feuille annexe à rendre dûment complétée

NOM :
Prénom :
N° Carte étudiant(e) :

p ③ $(\neg p \wedge \neg q)$ ②

--------------- (?)

$\neg p$

-------------------------- (I$\perp$)

$\perp$

---------- (?)

r

q ⑤ $(\neg p \wedge \neg q)$ ② r ⑥

--------------- (E$\wedge$)

$\neg q$

------------------------- (?)

$\perp$

---------- (E$\perp$)

r

? ④

-- (E$\vee$)(⑤, ⑥)

?

$((p \vee (q \vee r))$ ①

--- (E$\vee$) (?,?)

r

-- (I$\rightarrow$) (?)

$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$

-- (?) (?)

$((p \vee (q \vee r)) \rightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r)$

Examen Logique. IUP SI 2ème année. Janvier 2001

Tous documents autorisés

I. Logique des propositions

A. Réflexion (3,2 pts)

On souhaite enrichir la **logique des propositions** de la notion de possibilité, pour cela on introduit **un nouveau symbole unaire noté ◊** (◊A se lisant « Il est possible que A soit vraie », ou encore, « A est possible »). Bien sûr, ce nouveau symbole doit respecter certaines propriétés afin de rendre compte de cette notion de possibilité, en particulier on voudrait **qu'aucune des formules suivantes ne soit valide** :

i. $\Diamond p \rightarrow p$ (Car : « Il est possible qu'il pleuve n'implique pas qu'il pleut»)
ii. $\Diamond p$ (Car tout n'est pas possible)
iii. $((\Diamond p) \wedge (\Diamond q)) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ (Car : « Il est possible qu'il pleuve et il est possible qu'il ne pleuve pas n'implique pas qu'il est possible qu'il pleuve et qu'il ne pleuve pas en même temps » !)

On commence par une étude des connecteurs unaires. En logique des propositions, il n'y a que 4 tables de vérité unaires possibles et donc 4 connecteurs unaires possibles notés **u1, u2, u3** et **u4** et dont les tables de vérité sont respectivement :

p	**u1** p
1	0
0	1

p	**u2** p
1	1
0	0

p	**u3** p
1	0
0	0

p	**u4** p
1	1
0	1

1. (0,8 pt) : Exprimez par une formule chacun des connecteurs u1, u2, u3 et u4 en fonction des connecteurs habituels ($\wedge,\vee,\rightarrow,\neg,\bot$).
2. (1,6 pt) : Montrez que ◊ ne peut être aucun de ces 4 connecteurs.
3. (0,8 pt) : Qu'en concluez-vous ? (Répondez en une phrase courte)

B. Formalisation en logique des propositions (0,8 pt)

(0,8 pt) : Formalisez l'énoncé : « S'il y a du soleil et que je ne porte pas de chapeau je risque l'insolation ; donc je porte un chapeau, ou s'il y a du soleil je risque l'insolation ».

C. Théorie des modèles (1,6 pt)

Par la méthode de votre choix, vérifiez si les formules suivantes (où p, q, r et s dénotent des propositions) sont des tautologies, et donnez en un contre-modèle sinon (ou une substitution falsifiante au choix):

3. (0,8 pt) : La formule obtenue à l'exercice précédent (I.B)
4. (0,8 pt) : $((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow q)$

D. Théorie de la preuve (déduction naturelle) (4,8 pt)

Donnez une preuve en déduction naturelle des formules :

1. (0,8 pt) : $((p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow s) \rightarrow ((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow s))$
2. (1,6 pt) : $((p \oplus q) \wedge p) \rightarrow \neg q$ **Rappel** : $(p \oplus q) =_{def} ((p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q))$ (=ou exclusif)
3. (2,4 pt) : $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

II. Logique des prédicats

A. Théorie des modèles (3,2 pt)

On a vu en cours que la formule $((\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))) \leftrightarrow (\forall x : (P(x) \vee Q(x)))$ n'est pas valide.

1. (1,6 pt) : Montrez que, par contre, la formule $((\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))) \leftrightarrow (\forall x :\forall y: (P(x) \vee Q(y)))$ est valide.

> On pourra utiliser la propriété suivante (où α,β sont des fonctions booléennes quelconques) :
> $\min\limits_{d\in D} \max(\alpha,\beta) = \max(\alpha, \min\limits_{d\in D} \beta))$ si α ne dépend pas de d

2. (1,6 pt) : Est-ce vrai si l'on remplace $P(x)$ et $Q(y)$ par des formules quelconques A et B ?

B. Formalisation (6,4 pt)

1. (4 pt) On souhaite définir certains liens de parenté en fonction d'autres. On choisit comme prédicats de départ :

- `parent_de,`
- `est_femme,`
- de plus on suppose disponible le prédicat =

Afin de rester au plus proche de la lecture naturelle, on utilisera la notation infixe pour les prédicats binaires, et la notation postfixe pour les prédicats unaires.

- `(x parent_de y)` se lit « x est parent de y »
- `(x = y)` se lit « x et y sont identiques »,
- `(x est_femme)` se lit « x est une femme »

Exemple : dans ce cadre, le prédicat unaire `fille_de` est défini par la formule :

- `(x fille_de y)` $\leftrightarrow$ `((y parent_de x)` $\wedge$ `(x est_femme))`

Question: Définissez les prédicats suivants (et dont la lecture est donnée en regard) en n'utilisant que ceux fournis (`parent_de, est_femme` et `=`) plus ceux que vous aurez vous-même définis. Vous utiliserez au choix les notations infixe, postfixe ou préfixe (attention ! on n'est pas son propre frère ni sa propre soeur, idem pour cousin) :

	Prédicat	avec	qui se lit
a.	`est_homme`	`(x est_homme)`	« x est un homme »
b.	`mère_de`	`(x mère_de y)`	« x est mère de y »
c.	`frère_ou_soeur_de`	`(x frère_ou_soeur_de y)`	« x est frère ou soeur de y
d.	`frère_de`	`(x frère_de y)`	« x est frère de y »
e.	`grand_parent_de`	`(x grand_parent_de y)`	« x est un grand parent de y »
f.	`cousin_de`	`(x cousin_de y)`	« x est cousin de y »
g.	`ascendant_de`	`(x ascendant_de y)`	« x est un(e) ascendant(e) de y »

2. (2,4 pt) : A l'aide des prédicats précédents, des constantes que vous jugerez nécessaire d'ajouter **et sans utiliser** « $\exists$! » formalisez les énoncés :

a. « Tout homme, ou femme, a une et une seule mère »
b. « Julio Iglesias est un cousin de la mère de Michel Sardou »
c. « La mère de Julio Iglesias est la fille de la mère de Michel Sardou »

Corrigé logique

A.

1. On voit que u1 est la négation ($\neg$), que ((u2 p) $\leftrightarrow$ p), que ((u3 p) $\leftrightarrow \bot$) et que ((u4 p) $\leftrightarrow \top$)
2. Donc si $\Diamond$ est vérifonctionnel et unaire il doit être égal à l'un de ces 4 connecteurs, or :
si $\Diamond$ = u1 (resp. u3) alors $\Diamond\Diamond p \rightarrow p$ devient $\neg\neg p \rightarrow p$ (resp. $\bot \rightarrow p$) qui sont valides contrairement à a), et
si $\Diamond$ = u4 alors $\Diamond p$ devient (u4 p) qui est équivalente à $\top$ qui est valide contrairement à b),
si $\Diamond$ = u2 alors $\Diamond p \rightarrow p$ devient $p \rightarrow p$ qui est équivalente à $\top$ qui est valide contrairement à c).
Donc $\Diamond$ ne peut tout à la fois être vérifonctionnel et respecter les propriétés demandées.
3. Donc, ce « connecteur » ne pouvant à la fois être vérifonctionnel et respecter les contraintes qu'on lui impose, il est hors du champ de la logique des propositions.

B. On applique la méthode de balayage à la formule $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)) \rightarrow (((p \vee q) \vee (r \wedge s)) \leftrightarrow (r \wedge s))$

$\top$/r : $((p \vee q) \rightarrow (\top \wedge s)) \rightarrow (((p \vee q) \vee (\top \wedge s)) \leftrightarrow (\top \wedge s))$
$((p \vee q) \rightarrow s) \rightarrow (((p \vee q) \vee s) \leftrightarrow s)$

$\top$/s : $((p \vee q) \rightarrow \top) \rightarrow (((p \vee q) \vee \top) \leftrightarrow \top)$
$\top \quad \rightarrow \quad (\top \leftrightarrow \top)$
$\top$

$\bot$/s : $((p \vee q) \rightarrow \bot) \rightarrow (((p \vee q) \vee \bot) \leftrightarrow \bot)$
$\neg (p \vee q) \rightarrow \neg (p \vee q)$
$\top$

$\bot$/r : $((p \vee q) \rightarrow (\bot \wedge s)) \rightarrow (((p \vee q) \vee (\bot \wedge s)) \leftrightarrow (\bot \wedge s))$
$((p \vee q) \rightarrow \bot) \rightarrow (((p \vee q) \vee \bot) \leftrightarrow \bot)$
$\neg (p \vee q) \rightarrow \neg (p \vee q)$
$\top$

C'est donc une tautologie.

C. Il faut une preuve de $((p \oplus q) \wedge p) \rightarrow \neg q$, c'est-à-dire de $(((p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)) \wedge p) \rightarrow \neg q$.
Soit (1) = $((p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)) \wedge p$
Procédons par l'absurde et supposons en plus (2) = q. On a alors :

```
 (1)
------- (E∧)
  p          (2)                (1)
  ----------------- (I∧)   ---------------------- (E∧)
      p ∧ q                (p ∨ q) ∧ ¬ (p ∧ q)
                           ---------------------- (E∧)
                                 ¬ (p ∧ q)
     ------------------------------------------ (I⊥)
                       ⊥
                   -------- (I¬)(2)
                      ¬q
          ------------------------------------ (I→)(1)
          (((p ∨ q) ∧ ¬ (p ∧ q)) ∧ p)→¬q
```

Examen UEO1. DEUG S3. Septembre 2001

Tous documents autorisés

Partie logique (10 pts)

A. Formalisation et raisonnement (7 pts)

Trois fourmis (Ana, Bob et Cal) marchent l'une derrière l'autre dans une pièce où il n'y a qu'elles.
Ana dit « Je vois Bob devant moi » (H1), Bob dit « Je vois Ana ou Cal devant moi » (H2), et Cal dit « Je vois Ana ou Bob devant moi » (H3). De plus, aucune fourmi ne voit une fourmi qui la voit (H4), et aucune des fourmis ne se voit elle-même (H5).
On se propose de formaliser la situation afin de voir ce qu'on peut en conclure. Pour cela on introduira les propositions suivantes : **aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc** (où **ba** se lit « Bob voit Ana », **cb** se lit « Cal voit Bob », **bb** « Bob voit Bob », et ainsi de suite).

c. Formalisez par cinq formules du **langage de la logique des propositions** les données H1, H2, H3, H4 et H5 de la situation.
d. Formalisez par une formule F la situation dans laquelle les trois fourmis marchent en cercle et où chacune voit uniquement celle qui la précède.
e. Montrez, par la méthode du balayage ou des tables de vérité, que F est une conséquence logique de H1, H2, H3, H4 et H5 (c'est-à-dire montrez que H1, H2, H3, H4, H5 |= F)
f. Donnez une preuve **en déduction naturelle** de F à partir des hypothèses H1, H2, H3, H4 et H5.

B. Théorie des modèles (1 pts)

Par la méthode de votre choix, vérifiez si la formule suivante est une tautologie, et donnez un contre-modèle (ou une substitution falsifiante au choix) si ce n'est pas le cas :

$(p \wedge (\neg q \vee (r \rightarrow q))) \vee ((q \leftrightarrow (q \leftrightarrow q)) \rightarrow \neg r)$

C. Théorie de la preuve (déduction naturelle) (2 pts)

Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :

3. $((p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow s) \rightarrow ((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow s))$
4. $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

Partiel UEO1. DEUG S3. Novembre 2001.
Durée : 1 h – Tous documents autorisés
Le barème est donné à titre indicatif

A. Formalisation (4 pts)

Considérons l'énoncé suivant : « En début de mois je suis fauché, et en fin de mois aussi, or en ce moment je ne suis pas fauché ; donc on est ni en début de mois, ni en fin de mois »

g. Précisez les propositions que vous repérez dans cet énoncé, et associez une lettre à chacune d'elle.
h. Formalisez l'énoncé.

B. Théorie des modèles (6 pts)

5. Par la méthode de votre choix, vérifiez que la formule obtenue à l'exercice précédent est valide.
6. Par la méthode de votre choix, vérifiez si la formules suivante est une tautologie, et donnez un contre-modèle (ou une substitution falsifiante au choix) si ce n'est pas le cas :

$$(p \rightarrow ((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow (r \leftrightarrow \neg r))))$$

C. Théorie de la preuve (déduction naturelle) (10 pts)

3. **(4pts)** Compléter la preuve suivante en précisant là où cela manque (signalé par des ?), la règle appliquée, les formules obtenues et la, ou les, hypothèses déchargées. Vous répondrez directement sur la feuille fournie en annexe.

```
(p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) ①                                 (p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) ①
----------------------------- (?)       r③     ¬q④     ----------------------------- (E∧)
        r∨¬q                                                 p→q              p②
                                                             --------------------------------- (?)
                                                                       q
                                                    ---------------------------------------- (I⊥)
                                                             ⊥
                                                          -------- (?)
                                                             r
      ---------------------------------------------------------------------- (E∨) (?,?)
p②                                      r                               ((p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r)) ①
------------------------------------------------------ (I∧)            ------------------------------ (E∧)
                p∧r                                                             ¬(p∧r)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------ (?)
                                                   ?
                                              ---------- (?)(?)
                                                  ¬p
                          ----------------------------------------------------- (?) ( ?)
                                  ((p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r)) → ¬p
```

4. **(6 pts)** Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes (vous pourrez abréger le nom des propositions)
   5. $((\text{poule} \rightarrow \text{oiseau}) \wedge (\text{oiseau} \rightarrow \neg\ \text{dents})) \rightarrow ((\text{poule} \wedge \text{dents}) \rightarrow \bot)$
   6. $(((\text{fièvre} \rightarrow \text{malade}) \wedge (\text{nezbouché} \rightarrow \text{malade})) \wedge (\text{fièvre} \vee \text{nezbouché})) \rightarrow \text{malade}$

Feuille annexe à rendre dûment complétée

NOM :
Prénom :
N° Carte étudiant-e :

```
(p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) ①                                (p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r) ①
----------------------------- (?)        r③     ¬q④   ----------------------------- (E∧)
         r∨¬q                                                  p→q                     p②
                                                               --------------------------------- (?)
                                                                               q
                                                 ---------------------------------------- (I⊥)
                                                               ⊥
                                                           -------- (?)
                                                               r
          ---------------------------------------------------------------------- (E∨) (?,?)
p②                                     r                          ((p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r)) ①
------------------------------------------------------- (I∧)      ------------------------------ (E∧)
                       p∧r                                                  ¬(p∧r)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------ (?)
                                              ?
                                         ---------- (?)(?)
                                              ¬p
                        ----------------------------------------------------- (?) ( ?)
                                  ((p→q)∧(r∨¬q)∧¬(p∧r)) → ¬p
```

Logique des propositions

Echauffement (1pt)

Montrez, en en donnant une preuve en déduction naturelle, que A est déductible des formules $A \vee B$ et $\neg B$ (= montrer que $A \vee B, \neg B \vdash A$).

Formalisation et raisonnement (6 pts)

Convention : Afin d'alléger les preuves dans ce qui suit, lorsqu'on utilise une même règle de déduction naturelle plusieurs fois, on le fera en une seule en indiquant le nombre de fois à côté du nom de la règle. Exemple : une preuve en DN de $(A \wedge ((B \wedge C) \wedge D)) \rightarrow C$ s'écrira simplement :

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge ((B \wedge C) \wedge D)\;❩}{C}\,(E\wedge)\times 3}{(A \wedge ((B \wedge C) \wedge D)) \rightarrow C}\,(I\rightarrow)\;❩$$

au lieu de

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge ((B \wedge C) \wedge D)\;❩}{(B \wedge C) \wedge D}\,(E\wedge)}{B \wedge C}\,(E\wedge)}{C}\,(E\wedge)}{(A \wedge ((B \wedge C) \wedge D)) \rightarrow C}\,(I\rightarrow)\;❩$$

Problème : Trois fourmis (Ana, Bob et Cal) marchent l'une derrière l'autre dans une pièce où il n'y a qu'elles.
Ana dit « Je vois Bob devant moi » (H1), Bob dit « Je vois Ana ou Cal devant moi » (H2), et Cal dit « Je vois Ana ou Bob devant moi » (H3). De plus, aucune des fourmis ne voit une fourmi qui la voit (H4), et aucune des fourmis ne se voit elle-même (H5).
On se propose de formaliser la situation afin de voir ce qu'on peut en conclure. Pour cela on introduira les propositions suivantes : **aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc** (où **ba** se lit « Bob voit Ana », **cb** se lit « Cal voit Bob », **bb** « Bob voit Bob », et ainsi de suite).
Si besoin, vous pourrez utiliser l'exercice précédent.

i. Formalisez par cinq formules du **langage de la logique des propositions** les données H1, H2, H3, H4 et H5 de la situation.
j. Formalisez par une formule F la situation dans laquelle les trois fourmis marchent en cercle et où chacune voit uniquement celle qui la précède.
k. Montrez, par la méthode du balayage ou des tables de vérité, que F est une conséquence logique de H1, H2, H3, H4 et H5 (c'est-à-dire montrez que H1, H2, H3, H4, H5 $\models$ F)
l. Donnez une preuve **en déduction naturelle** de F à partir des hypothèses H1, H2, H3, H4 et H5.

Partiel UEO1. DEUG S3. Novembre 2002

Durée : 1 h – Aucun document autorisé

Le barème est donné à titre indicatif

A. Formalisation (4 pts)

Considérons le raisonnement suivant :

- Si les charges patronales sont lourdes, les entreprises n'investissent pas et embauchent peu.
- Or, quand les entreprises n'investissent pas, la croissance stagne, ce qui entraîne un taux de chômage élevé.
- Egalement, quand les entreprises embauchent peu, le taux de chômage est élevé.
- *Donc* si les charges patronales ne sont pas lourdes, le taux de chômage n'est pas élevé.

a. Précisez les propositions que vous repérez dans cet énoncé, et associez une lettre à chacune d'elle.
b. Formalisez l'ensemble du raisonnement en une seule formule.

B. Théorie des modèles (6 pts)

1. Par la méthode du balayage, vérifiez que la formule obtenue en A. n'est pas valide, et donnez un contre-modèle (ou une substitution falsifiante au choix).
2. Par la méthode du balayage, vérifiez si la formule suivante est une tautologie, et donnez un contre-modèle (ou une substitution falsifiante au choix) si ce n'est pas le cas :

$$((((\neg p \lor q) \to r) \to (p \to q)) \to \neg(p \land \neg q))$$

C. Théorie de la preuve (déduction naturelle) (10 pts)

1. Compléter la preuve suivante en précisant là où cela manque (signalé par des ?), la règle appliquée, les formules obtenues et la, ou les, hypothèses déchargées. Vous répondrez directement sur la feuille fournie en annexe.

¬ p② p③

------------- (?)

⊥

------------- (?)

q

------------- (?)(?)

(p → q) → p① p→q

-- (?)

p ¬ p②

--- (?)

⊥

----- (I¬)(?)

?

------ (?)

p

--------------------- (I→)(①)

?

2. Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :
3. $((p \land q) \to r) \to (p \to (q \to r))$
4. $((p \to (q \to r)) \to s) \to (((p \land q) \to r) \to s)$ - vous pouvez utiliser le a)
5. $((p \lor (q \land r)) \land \neg q) \to p$

Partiel UEO1. DEUG S3. Novembre 2002

Feuille annexe à rendre dûment complétée

NOM :
Prénom :
N° Carte étudiant(e) :

```
                                         ¬ p②    p③
                                         ------------- (?)
                                              ⊥
                                         ------------- (?)
                                              q
                                         ------------- (?)(?)
( p → q) → p①                                p→q
----------------------------------------------------------- (?)
                 p                                            ¬ p②
                 ----------------------------------------------- (?)
                                              ⊥
                                            ----- (I¬)
                                              ?
                                            ------ (?)(?)
                                              p
                                     --------------------- (I→)(①)
                                              ?
```

Université Paul Sabatier (Toulouse III)		*Deug Sciences et Technologies*
Janvier 2003	**Semestre 3**	**Informatique**

Aucun document autorisé hormis la fiche mémento

<u>Partie Logique</u> (7 pts)

A. Théorie des modèles (balayage)

a. Vérifiez que la formule

$(((panne \rightarrow (\neg essence \vee \neg batterie)) \wedge (batterie \wedge panne)) \rightarrow \neg essence)$

est valide.

b. Vérifiez que la formule

$((((\neg essence \vee \neg batterie) \rightarrow panne) \wedge (batterie \wedge panne)) \rightarrow \neg essence)$

n'est pas valide et donnez-en un contre-modèle.

B. Théorie de la preuve (déduction naturelle)

Donnez une preuve en déduction naturelle de la formule :

$(((panne \rightarrow (\neg essence \vee \neg batterie)) \wedge (batterie \wedge panne)) \rightarrow \neg essence)$

Examen UEO1. DEUG S3. Septembre 2003

Aucun document autorisé (sauf mémento)

Partie logique (7 pts)

Ne vous laissez pas impressionner par la longueur de l'énoncé !

A. Réflexion (4 pts)

On souhaite enrichir la logique des propositions pour passer à une logique à trois valeurs : « vrai » représenté dans le langage logique par $\top$, « faux » représenté par $\bot$, auxquels on ajoute « indéterminé » représenté par ∞. Les valuations pour cette nouvelle logique seront appelées 3-valuations, elles sont différentes des valuations habituelles et sont définies par :

- Une 3-valuation est une fonction de l'ensemble PROP des propositions vers l'ensemble {0, ½ ,1}, où ½ représente l'indétermination.
- Une 3-valuation v s'étend à toute formule grâce aux contraintes suivantes :
    - $v(\bot)=0$ et $v(\top)=1$ comme d'habitude, et de plus, $v(\infty)= ½$
    - Pour les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\to$, on garde les définitions habituelles :
      $v(\neg A)=1-v(A)$;
      $v(A\vee B)=\max(v(A),v(B))$;
      $v(A\wedge B)=\min(v(A),v(B))$;
      $v(A\to B)=\max(1-v(A),v(B))$;
    - Pour le connecteur $\leftrightarrow$ on a plusieurs possibilités qu'on va examiner.

- On dira qu'une formule A est valide (noté $\models A$) si et seulement si
  pour toute 3-valuation v, on a v(A)=1.

Remarque : on a ainsi, $v(\neg \infty) = 1-v(\infty) = 1-1/2 = 1/2$ (la négation de l'indéterminé est indéterminée) et $v(\infty\to \infty) = \max(1-v(\infty),v(\infty)) = ½$ (l'indéterminé n'implique pas l'indéterminé !)

1) **Donnez les nouvelles tables de vérité du $\vee$, du $\wedge$ et du $\to$ en remplissant les cases vides du tableau ci-dessous (VOUS REMPLIREZ LE TABLEAU FIGURANT SUR LA FEUILLE A RENDRE)**

p	**1**	**1**	**1**	**½**	**½**	**½**	**0**	**0**	**0**
q	**1**	**½**	**0**	**1**	**½**	**0**	**1**	**½**	**0**
$(p\vee q)$									
$(p\wedge q)$									
$(p\to q)$									

2) **On ajoute deux connecteurs pour l'équivalence : $\cong$ et $\leftrightarrow$ avec**
    - **$v(A\cong B)=1$ si $v(A)=v(B)$ et 0 sinon**
    - **$v(A\leftrightarrow B) = v((A\to B)\wedge(B\to A))$**

   Vérifiez que les tables de vérité de ces deux connecteurs sont différentes.

3) **On adapte la méthode de balayage de la manière suivante :**
   au lieu d'ouvrir deux branches, on en ouvre trois. Exemple :

$(p\to q)\to (\neg p\vee q)$

/ $[\infty/p]$ | $[\bot/p]$ \ $[\top/p]$

$(\infty\to q)\to(\neg \infty\vee q)$ $(\bot\to q)\to(\neg \bot\vee q)$ $(\top\to q)\vee(\neg\top\vee q))$

… … …

Et on simplifie en accord avec les tables de vérité. Pour cela, on conserve parmi les règles habituelles rappelées sur le mémento UNIQUEMENT CELLES DANS LESQUELLES INTERVIENT $\top$ OU $\bot$.

Par exemple, la règle : $(A\vee\perp)$ se simplifie en A, est conservée, même si $A=\infty$.

Par contre, $(A\vee\neg A)$ ne se simplifie plus en $\top$
(en effet, dans le cas de la formule où A est juste une proposition p et avec la valuation $v(p)=1/2$, on obtient $v(p\vee\neg p)=\min(1/2,1-1/2)=1/2$ qui n'est pas égal à 1 !)

Pour le symbole ∞ on ajoute les règles suivantes :

- $(A\wedge\infty)$, $(\infty\wedge A)$, $(A\vee\infty)$, $(\infty\vee A)$, $(A\rightarrow\infty)$ et $(\infty\rightarrow A)$ ne se simplifient pas ! (On ne connaît ni le min, ni le max)
- $(\neg\infty)$ se simplifie en ∞
- $(\infty\wedge\infty)$, $(\infty\vee\infty)$, $(\infty\rightarrow\infty)$ et $(\infty \leftrightarrow \infty)$ se simplifient en ∞
- et bien sûr, $(A \cong A)$ se simplifie en $\top$ quelque soit A, et en $\perp$ dans tous les cas ne se ramenant pas à celui-là.

La formule de départ sera dite **valide** si et seulement si on obtient uniquement des $\top$

En utilisant cette méthode de balayage adaptée,

a. Vérifiez que $((p\wedge q) \cong (\neg(\neg p\vee\neg q)))$ est valide
b. Vérifiez que $((q \wedge (p\vee\neg p)) \cong q)$ n'est pas valide et donnez-en un contre-modèle.

B. Théorie de la preuve (déduction naturelle) (3 pts)

Donnez une preuve en déduction naturelle de la formule :

$$((\text{panne} \rightarrow (\neg\text{essence} \vee \neg\text{batterie})) \wedge (\text{batterie} \wedge \text{panne}))\rightarrow \neg\text{essence}$$

Examen UEO1. DEUG S3. Septembre 2003

CETTE FEUILLE EST A RENDRE, DÛMENT REMPLIE

Nom :
Prénom :
Numéro de carte d'étudiant(e) :

1) **Donnez les nouvelles tables de vérité du ∨, du ∧ et du → en remplissant les cases vides du tableau ci-dessous**

p **q**	**1** **1**	**1** **½**	**1** **0**	**½** **1**	**½** **½**	**½** **0**	**0** **1**	**0** **½**	**0** **0**
(p∨q)									
(p∧q)									
(p→q)									
Les 3 lignes qui suivent servent à répondre à la question 2									
(q→p)									
(p≅q)									
(p↔q)									

2) **On ajoute deux connecteurs pour l'équivalence : ≅ et ↔ avec**
   - **v(A≅B)=1 si v(A)=v(B) et 0 sinon**
   - **v(A↔B) = v((A→B)∧(B→A))**

Vérifiez que les tables de vérité de ces deux connecteurs sont différentes.

Partiel du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Décembre 2003

Durée : 1 h 30

Le barème est donné à titre indicatif

A. Formalisation (4 pts : 0.5 par énoncé)

1) Formalisez chacun des énoncés **a.** à **h.** ci-dessous dans le langage de la logique des propositions.

Les **seules** propositions que vous utiliserez seront « x appartient à E » et « x appartient à F », elles seront représentées par les lettres **e** et **f** respectivement. Par exemple, les phrases du type « Ens1 est inclus dans Ens2 » seront tout d'abord transformée en : « si x appartient à Ens1 alors x appartient à Ens2 ».
[Rappel : le complémentaire de E, noté C(E), est l'ensemble des éléments n'appartenant pas à E]

a. « x appartient à E et à F »
b. « x appartient à E et pas à F»
c. « x appartient à C(F) et à E »
d. « x appartient à $E \cup F$ »
e. « x appartient au complémentaire de l'union de E et de C(F) »
f. « L'intersection de E et de F est incluse dans le complémentaire de l'union des complémentaires de E et de F »
g. « E est inclus dans F si et seulement si le complémentaire de F est inclus dans le complémentaire de E »
h. « L'intersection de E et de l'union de E et de F, est égale à E »

B. Induction (6 pts : 2 + 4)

Soit A une formule ne contenant ni implication ($\rightarrow$), ni équivalence ($\leftrightarrow$), ni $\top$, mais uniquement : des propositions, ainsi que les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\perp$.
On définit la **duale de A**, notée A°, comme étant la formule issue du remplacement dans A :

- de tous les $\wedge$ par des $\vee$
- de tous les $\vee$ par des $\wedge$
- de toute proposition p,q,r,… par sa négation $\neg p, \neg q \neg r$
- de tous les $\perp$ par $\neg\perp$

Exemple : $(\neg\ (p \vee (\neg \perp \wedge \neg\ q)))\ °$ = $(\neg\ (\neg\ p \wedge (\neg \neg \perp \vee \neg \neg\ q)))$

2) Donnez une définition inductive de ° :
   a. pour tout p, p° = ?
   b. $\perp$° = ?
   c. $(\neg B\ )$° = ?
   d. $(B \wedge C)$° = ?
   e. $(B \vee C)$° = ?

3) Montrer par induction que A° est logiquement équivalente à $(\neg A)$
   [Rappel : deux formules C et B sont logiquement équivalentes, noté $C \equiv B$ si et seulement si $|{=}{=}\ C \leftrightarrow B$]

   - Précisez formellement et clairement ce que vous cherchez à prouver par induction
   - Etablissez clairement la base de l'induction
   - Précisez formellement et clairement vos hypothèses d'induction
   - Etablissez clairement l'étape d'induction
   - Rédigez clairement la conclusion

C. Théorie des modèles (4 pts)

4) Montrer que si |== $(A \vee B)$ et |== $(\neg A)$ alors |== B en ayant recours à la définition de |==
[à savoir que |== C si et seulement si pour toute valuation v, on a v(C) = 1]

5) Soient A et B deux formules, montrer que si B est satisfiable alors l'une au moins de $B \wedge A$ et $B \wedge \neg A$ est également satisfiable.

D. Méthode des tableaux (6 pts : 4+2)

6) Un vol a été commis, on a relevé des traces de chaussures taille 43 et le voleur a été aperçu : il est petit. Parmi les 3 suspects A, B, C, A est grand et chausse du 43, B est petit et chausse du 40, enfin C est petit et chausse du 43. Le voleur est l'un des trois suspects. Doit-on arrêter C ?

Soit les propositions suivantes :

« le voleur portait du 43 »	: p43
« le voleur est petit »	: p
« A est le voleur »	: vA
« B est le voleur »	: vB
« C est le voleur »	: vC
« le voleur chausse du 43 »	: c43

La situation est résumée par la formule
$SIT = p43 \wedge p \wedge (vA \rightarrow (c43 \wedge \neg p)) \wedge (vB \rightarrow (c40 \wedge p)) \wedge (vC \rightarrow (c43 \wedge p)) \wedge (vA \vee vB \vee vC)$.

Afin d'établir la culpabilité de C, il faut vérifier que vC est une conséquence logique de la formule SIT, pour cela :

Question 5.1 (4 points) : Calculez le tableau de SIT $\wedge \neg$vC. Vérifiez que ce tableau est ouvert, et qu'on ne peut donc pas arrêter C (justifiez pourquoi en donnant un contre-modèle).

Question 5.2 (2 points) : Quelle hypothèse « réaliste » manque-t-il pour que le tableau soit fermé ?

Examen du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Février 2004

Durée : 2h00

Le barème est donné à titre indicatif

A. Formalisation en logique des prédicats (6 points)

Soient les énoncés **a.** à **h.**.

a. « Etant données 2 droites parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre»
b. « Toute perpendiculaire à une droite D est parallèle à toute perpendiculaire de la droite D»
c. « Deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles »
d. « Un segment chevauche à droite un autre segment si et seulement si l'extrémité gauche du premier est entre celles du second »
e. « Un segment chevauche à gauche un autre segment si et seulement l'extrémité droite du premier est entre celles du second »
f. « Un segment en chevauche un autre à droite si et seulement si le second chevauche le premier à gauche »
g. « Un segment est inclus dans un autre si et seulement si il le chevauche à droite et à gauche »
h. « Un segment précède un autre segment si et seulement si il chevauche à gauche un segment qui lui-même chevauche à gauche le second segment »

Soient les prédicats suivants :
Par(x,y) : x et y sont des droites parallèles – équivaut à Par(y,x).
Per(x,y) : x et y sont des droites perpendiculaires – équivaut à Per(y,x).
Entre(x,y,z) : x,y,z sont des points et y est entre x et z – équivaut à Entre(z,y,x).
Seg(x,y) : x et y sont respectivement les extrémités gauche et droite d'un segment.
Chev-droite(x,y,u,v) : x,y,u et v sont des points et le segment d'extrémités x et y chevauche à droite celui d'extrémités u et v.
Chev-gauche(x,y,u,v) : x,y,u et v sont des points et le segment d'extrémités x et y chevauche à gauche celui d'extrémités u et v.
Segment-inclus(x,y,u,v) : x,y,u et v sont des points et le segment d'extrémités x et y est inclus dans celui d'extrémités u et v.

1) **Remplacez les ?** (un quantificateur, variable ou prédicat par ?) dans les formules qui suivent **pour qu'elles formalisent les énoncés a. à c**.
   a. ? x (?y (Par(x,y) ? ? ? (Per(x,z) ? Per(x,y)))
   b. ? x (?y (?(x,y) ? $\forall$z (? (x,z) $\rightarrow$?(y,z))))
   c. ? x (?y (? z ((? (x,z) ? ?(y,z)) $\rightarrow$?(x,y))))

2) **Formalisez les énoncés d. à h.**

B. Induction (2 points)

Soit A une formule ne contenant ni implication ($\rightarrow$), ni équivalence ($\leftrightarrow$), ni T, mais uniquement : des propositions, ainsi que les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\perp$.
On définit la **duale de A**, notée A°, comme étant la formule issue du remplacement dans A :

- de tous les $\wedge$ par des $\vee$
- de tous les $\vee$ par des $\wedge$
- de toute proposition p,q,r,… par sa négation $\neg$p,$\neg$q$\neg$r
- de tous les $\perp$ par $\neg\perp$

Exemple : $(\neg (p \vee (\neg \perp \wedge \neg q)))^\circ \quad = \quad (\neg (\neg p \wedge (\neg \neg \perp \vee \neg \neg q)))$

1) Donnez une définition inductive de °
2) Montrer par induction que A° est logiquement équivalente à ($\neg$A)

C. Théorie des modèles (3 pts)

Par la théorie des modèles, montrez que la formule $\exists x(B(x) \rightarrow \forall y\ B(y))$ est valide[1].

D. Problème (6 points)

Un vol a été commis, on a relevé des traces de chaussures taille 40 et le voleur a été aperçu : il est petit. Parmi les 3 suspects A, B, C, A est grand et chausse du 40, B est petit et chausse du 43, enfin C est petit et chausse du 40. Bien entendu, quand on chausse du 43, on ne porte pas du 40…

Soit les propositions suivantes :

« le voleur porte du 40 » :	: p40
« le voleur est petit »	: p
« A est le voleur »	: vA
« B est le voleur »	: vB
« C est le voleur »	: vC
« le voleur chausse du 43 »	: c43

La situation est résumée par la formule

$SIT = p40 \wedge p \wedge (vA \rightarrow (c40 \wedge \neg p)) \wedge (vB \rightarrow (c43 \wedge p)) \wedge (vC \rightarrow (c40 \wedge p)) \wedge (vA \vee vB \vee vC) \wedge (c43 \rightarrow \neg p40)$

- **a.** **Calculez une forme normale FS conjonctive de SIT** et donnez les ensembles de clauses correspondant.
- **b.** Soit C1 = {vA}, C2 = {vB}, C3 = {¬ vC} trois clauses exprimant respectivement que A est coupable, B est coupable et C n'est pas coupable. **Montrez par résolution** que FS∪C1 est contradictoire, ainsi que FS∪C2 et FS∪C3.
- **c.** **Donnez une preuve en déduction naturelle** de :
  - i. $\vdash SIT \rightarrow \neg vA$
  - ii. $\vdash SIT \rightarrow \neg vB$
  - iii. $\vdash SIT \rightarrow vC$

Indice : dans chaque cas, on procèdera par l'absurde. Vous **devrez indiquer** les règles utilisées et les hypothèses déchargées. Vous **pourrez utiliser** toutes les simplifications fournies par les tautologies connues (comme $A \rightarrow B$ équivalent à $\neg A \vee B$, …)

E. Questions diverses (3 points)

- **a.** **Donnez une preuve en déduction naturelle** de :
  $\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ en utilisant exclusivement les règles de la déduction naturelle
- **b.** **Donnez une forme normale conjonctive** de :
  $(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg (r \rightarrow s)) \rightarrow (\neg(p \vee r) \rightarrow (q \wedge s))$

[1] Connu sous le nom de paradoxe du buveur : « Il y quelqu'un qui, s'il boit alors tout le monde boit »

Septembre 2004 - Durée : 2 h (Le barème est donné à titre indicatif)

A. Formalisation (8 pts)

Dans une soirée mondaine, il y des hommes et des femmes, blond(e)s, brun(e)s ou roux/rousses, des grand(e)s, des moyen(ne)s et des petit(e)s. D'où vous êtes vous constatez les faits suivants :

a. Il n'y a aucun roux et aucune rousse
b. Aucune personne blonde n'est brune et vice-versa
c. Toute femme a un homme grand à sa droite
d. Tout homme a une femme brune à sa gauche ou une femme blonde à sa droite
e. Toute personne a sur sa droite une personne ayant sur sa droite une personne blonde
f. Toute personne a sur sa droite une personne qui n'a que des blond(e)s sur sa gauche
g. Il y a toujours une femme brune entre deux hommes petits quelconques
h. Il n'y a pas deux personnes blondes de la même taille

NB : Deux personnes sont de la même taille ssi elles sont toutes deux grandes ou petites ou moyennes
Une personne en a une autre à sa gauche ssi la $2^{ème}$ a la première à sa droite
Une personne est entre deux autres ssi elle est à la droite de l'une et à gauche de l'autre

Formalisez **dans le langage de la logique des prédicats** les énoncés **a.** à **h.** en utilisant les prédicats suivants (vous pouvez en ajouter à condition des les définir par une formule utilisant les suivants) :

Bl(x) : x est blond(e)	**H(x)** : x est un homme	**P(x)** : x est petit	**x=y** : x et y sont identiques
Rx(x) : x est roux/rousse	**F(x)** : x est une femme	**M(x)** : x est moyen	
Br(x) : x est brun(e)	**Gd(x)** : x est grand	**Dte(x,y)** : y est à droite de x	

B. Problème (12 points)

Après une course hippique entre chevaux pie (= noir et blanc), le cheval gagnant fut celui qui avait une robe noire et une crinière blanche. De plus, il s'agissait de PetitGris, de Qristal ou de Rikita. Or PetitGris a une crinière noire et une queue blanche, Qristal a une robe noire et une queue blanche, et enfin Rikita a une robe noire. Enfin le gagnant avait sa crinière et sa queue de couleur opposées. On va montrer que c'est Rikita qui a gagné.

Soit les propositions suivantes :

« le gagnant a une robe noire »	: rn
« le gagnant a une crinière noire » :	: cn
« le gagnant a une queue noire »	: qn
« PetitGris est le gagnant »	: P
« Qristal est le gagnant »	: Q
« Rikita est le gagnant »	: R

La situation est résumée par la formule

$$\mathbf{SIT = rn \wedge \neg\, cn \wedge (P \to (cn \wedge \neg\, qn)) \wedge (Q \to (rn \wedge \neg\, qn)) \wedge (R \to rn) \wedge (cn \leftrightarrow \neg\, qn) \wedge (P \vee (Q \vee R))}$$

Question 1 (4 pts) : Vérifiez que R est **conséquence logique** de SIT (c'est-à-dire SIT |== C) en appliquant **la méthode des tableaux** (pour cela Calculez le tableau de SIT $\wedge$ ¬R et vérifiez que ce tableau est fermé)

Question 2 (4 pts) : Mettez SIT $\wedge$ ¬R en **forme normale conjonctive** et donnez **les ensembles de clauses** correspondants. Puis vérifiez qu'on peut en **déduire la clause vide**.

Question 3 (4 pts) : Donnez une preuve en déduction naturelle de

a) |-- (SIT $\wedge$ P) $\to \bot$
b) |-- SIT $\to$ ¬Q
c) |-- SIT $\to$ R

Partiel du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Décembre 2004

Durée : 1 h 30

Le barème est donné à titre indicatif

A. Induction (6 pts)

Soit A une formule quelconque. On définit, par induction, les grandeurs nsf(A) et pf(A) de la manière suivante :

- nsf(A) donne le nombre d'occurrences de sous-formules de A et est défini par :
  $nsf(\bot) = 1$; $nsf(p) = 1$ ($p \in PROP$) ; $nsf((\neg B)) = nsf(B)+1$; $nsf((C*B)) = nsf(C)+nsf(B)+1$
- pf(A) donne la profondeur de A et est défini par :
  $pf(\bot) = 0$; $pf(p) = 0$ ($p \in PROP$) ; $pf((\neg B)) = pf(B)+1$; $pf((C*B)) = \max(pf(C), pf(B)) + 1$

Exemple **:** $nsf\big((\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q)))) \big) = 8$ et $pf\big((\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q)))) \big) = 4$

Question : Montrer par induction sur A que : $nsf(A) \leq 2^{pf(A)+1} - 1$

NB : Etablissez clairement la base de l'induction. Précisez clairement vos hypothèses d'induction. Etablissez clairement l'étape d'induction. Rédigez clairement la conclusion

B. Formalisation : le problème de Max (6 pts)

Le problème de Max a quatre hypothèses :
H1. Si Max craint les gros poissons, alors il tombera à l'eau s'il pêche un gros poisson.
H2. Si Max utilise un gros appât et qu'il est un bon pêcheur, alors il pêchera un gros poisson.
H3. Si les gros appâts dégoûtent Max, alors il n'en utilise pas.
H4. Max n'est pas dégoûté par les gros appâts ou ne craint pas les gros poissons.

Le problème a trois conclusions :
C1. Si Max n'est pas dégoûté par les gros appâts et qu'il craint les gros poissons, alors il tombera à l'eau.
C2. Si Max est un bon pêcheur et qu'il craint les gros poissons, alors il tombera à l'eau s'il utilise de gros appâts.
C3. Si Max ne pêche pas un gros poisson et qu'il utilise de gros appâts, alors il n'est pas un bon pêcheur et il n'est pas dégoûté par les gros appâts.

1. Traduisez les sept affirmations précédentes (quatre hypothèses et trois conclusions) en utilisant les propositions suivantes (et pensez à mettre des parenthèses !) :

P pour « Max **P**êche un gros poisson »
C pour « Max **C**raint des gros poissons »
B pour « Max est un **B**on pêcheur »
A pour « Max utilise un gros **A**ppât »
T pour « Max **T**ombe à l'eau »
D pour « Les gros appâts **D**égoûtent Max »

2. Question de cours

Comment se lit « H2 ,H3 |== C3 » ? Donnez-en la définition.

C. Calcul booléen et théorie des modèles (8 pts)

1. Par le calcul booléen, montrer que la formule suivante est logiquement équivalente à T (indiquez les équivalences que vous utilisez) :

$((\neg p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \rightarrow ((s \rightarrow r) \rightarrow \neg s)$

2. Par la méthode des tableaux, vérifiez si les affirmations suivantes sont correctes, et donnez un contre-modèle sinon (indiquez les règles que vous utilisez) :

a. H2,H3 |== C3 (où H2, H3 et C3 sont issues du problème de Max, question B.1)
b. $|\!\!==$ $((\neg(p\wedge\neg t) \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \vee (\neg p\wedge\neg t))) \rightarrow ((s \rightarrow (r\vee t)) \rightarrow \neg s)$
c. $|\!\!==$ $(r \wedge (q \rightarrow (s \wedge \neg p)) \wedge (v \rightarrow (s \wedge p)) \wedge p \wedge (q \vee v) \wedge (u \rightarrow \neg r)) \rightarrow v$

Examen du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Janvier 2005

Durée : 2 h

Le barème est donné à titre indicatif

A. Induction (3 pts)

Soit A une formule quelconque. On définit, par induction, les grandeurs nsf(A) et pf(A) de la manière suivante :

- nsf(A) donne le nombre d'occurrences de sous-formules de A et est défini par :
  $nsf(\bot) = 1$; $nsf(p) = 1$ ($p \in PROP$) ; $nsf((\neg B)) = nsf(B)+1$; $nsf((C*B)) = nsf(C)+nsf(B)+1$
- pf(A) donne la profondeur de A et est défini par :
  $pf(\bot) = 0$; $pf(p) = 0$ ($p \in PROP$) ; $pf((\neg B)) = pf(B)+1$; $pf((C*B)) = max(pf(C) , pf(B)) + 1$

Exemple **:** $nsf\big((\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q)))) \big) = 8$ et $pf\big((\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q)))) \big) = 4$

Question : Montrer par induction sur A que : $nsf(A) \leq 2^{pf(A)+1} - 1$

NB : Etablissez clairement la base de l'induction. Précisez clairement vos hypothèses d'induction. Etablissez clairement l'étape d'induction. Rédigez clairement la conclusion

B. Logique des propositions : Le problème de Max (6 pts)

Le problème de Max (suite)

Soient les 2 hypothèses suivantes dont on donne la formalisation :

H1. Si Max utilise un gros appât et qu'il est un bon pêcheur, alors il pêchera un gros poisson.

$\mathbf{(A \wedge B) \to P}$

H2. Si les gros appâts dégoûtent Max, alors il n'en utilise pas.

$\mathbf{D \to \neg A}$

Soit la conclusion :

C. Si Max ne pêche pas un gros poisson et qu'il utilise de gros appâts, alors il n'est pas un bon pêcheur et il n'est pas dégoûté par les gros appâts.

$\mathbf{(\neg P \wedge A) \to (\neg B \wedge \neg D)}$

Q1 (3 pts). Par la méthode des tableaux, vérifiez que C? n'est pas une conséquence logique de H?, pour cela vérifiez que le tableau de {H?, ¬C?} est ouvert.

Q2 (3 pts). Donnez une preuve en déduction naturelle de H1, H2 |-- C

Logique des prédicats (11 pts)

Q1 (6 pts). Formalisation

La carte d'un pays X est découpée en régions. Chacune de ces régions est colorée suivant la température moyenne qui y règne pendant l'année. On remarque les faits suivants :

La région r1 est jaune et touche la région r2.
La région r1 touche une région rouge.
La région r1 ne touche aucune région bleue.
Toute région jaune touche au moins une région rouge.
Il y a au moins une région jaune qui touche toutes les régions rouge.
Toute région qui touche une région bleue est elle-même verte.

Q2 (2 pts). Pourquoi la preuve suivante n'est-elle pas correcte ? Rectifiez-la pour la rendre correcte.

Q3 (3 pts). Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes

$(\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow (\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)))$
$(\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists y\, P(y)) \rightarrow \exists z\, Q(z)$

Examen du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Septembre 2005

Durée : 2 h

Le barème est donné à titre indicatif

A. Logique des propositions : Le problème de Zoé (10 pts)

Le problème de Zoé a quatre hypothèses :

H1. Si les petites rues effrayent Zoé, alors elle ne les prend pas.

$$\mathbf{E \rightarrow \neg P}$$

H2. Zoé n'est pas effrayée par les petites rues ou ne prend pas sa voiture.

$\mathbf{\neg E \vee \neg V}$

H3. Si Zoé prend sa voiture, alors elle sera en retard si elle est bloquée.

$\mathbf{V \rightarrow (B \rightarrow R)}$

H4. Si Zoé prend les petites rues et qu'elle part à 8 h, alors elle sera bloquée.

$\mathbf{(P \wedge H) \rightarrow B}$

Le problème de Zoé a trois conclusions :

C1. Si Zoé n'est pas effrayée par les petites rues et qu'elle prend sa voiture, alors elle sera en retard.

$\mathbf{(\neg E \wedge V) \rightarrow R}$

C2. Si Zoé part à 8 h et prend sa voiture, alors elle sera en retard si elle prend des petites rues.

$\mathbf{(H \wedge V) \rightarrow (P \rightarrow R)}$

C3. Si Zoé n'est pas bloquée et qu'elle prend de petites rues, alors elle ne part pas à 8 h et elle n'est pas effrayée par les petites rues.

$\mathbf{(\neg B \wedge P) \rightarrow (\neg H \wedge \neg E)}$

Q1 (4 pts). Méthode des tableaux : vérifiez que C1 n'est pas une conséquence logique des hypothèses, pour cela vérifiez que le tableau de {H1, H2, H3, H4, ¬C1} est ouvert.

Q2 (6 pts). Donnez une preuve en déduction naturelle de :

H3, H4 |-- C2

H4, H1 |-- C3

B. Logique des prédicats (8 pts)

Des gens attendent le train dans une salle d'attente. Chacun d'eux a les cheveux bruns, roux, ou châtains. On remarque les faits suivants :

a. La personne p1 est brune et est en face de la personne p2.
b. La personne p1 est en face d'une personne rousse.
c. La personne p1 n'est en face d'aucune personne châtain.
d. Toute personne brune est en face d'au moins une personne rousse.
e. Il y a au moins une personne brune qui est en face de toutes les personnes rousses.
f. Toute personne qui est en face d'une personne châtain est elle-même brune.

Q1 (6 pts). Formalisez les énoncés a. à f. en utilisant uniquement les prédicats listés ci-dessous :
B(x) : « la personne x est brune », R(x) : « la personne x est rousse », C(x) : : « la personne x est châtain » et F(x,y) : « la personne x est en face de la personne y ».

Q2 (2 pts). Donnez une preuve en déduction naturelle de la formule suivante :

$$(\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow (\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)))$$

C . Induction (2 pts)

Soit A une formule quelconque. On définit, par induction, les grandeurs nsf(A) et pf(A) de la manière suivante :

- nsf(A) donne le nombre d'occurrences de sous-formules de A et est défini par :
  $nsf(\bot) = 1$; $nsf(p) = 1$ ($p \in PROP$) ; $nsf((\neg B)) = nsf(B)+1$; $nsf((C*B)) = nsf(C)+nsf(B)+1$
- pf(A) donne la profondeur de A et est défini par :
  $pf(\bot) = 0$; $pf(p) = 0$ ($p \in PROP$) ; $pf((\neg B)) = pf(B)+1$; $pf((C*B)) = max(pf(C) , pf(B)) + 1$

Exemple **:** $nsf\big((\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q)))) \big) = 8$ et $pf\big((\neg (p \vee ((\neg \bot) \wedge (\neg q)))) \big) = 4$

Question : Montrer par induction sur A que : $nsf(A) \leq 2^{pf(A)+1} - 1$

NB : Etablissez clairement la base de l'induction. Précisez clairement vos hypothèses d'induction. Etablissez clairement l'étape d'induction. Rédigez clairement la conclusion

Partiel du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Décembre 2005

Durée : 1 h 30

Le barème est donné à titre indicatif

A. Langage (6 pts)

Soit A une formule quelconque. On définit, par induction, la grandeur lg[A] et la fonction m[A] de la manière suivante (Vous remarquerez qu'on utilise les crochets « [» et «] » au lieu des parenthèses afin de ne pas confondre avec les parenthèses des formules) :

- lg[$\perp$] = 1 ; lg[p] = 1 (où p$\in$PROP) ; lg[$\neg$B] = lg[B]+1 ; lg[(B*C)] = lg[B]+lg[C]+3
  NB : lg[A] donne la longueur de A en nombre de symboles
- m[$\perp$] = $\perp$; m[p] = p (où p$\in$PROP) ; m[$\neg$B] = $\neg$ m[B] ; m[(B*C)] = (m[C] * m[B])

1. **Tracez** l'arbre de la formule $\neg$ (p $\vee$ ($\neg$ $\perp$ $\wedge$ $\neg$ q)).
2. Soient q et r deux propositions, **calculez**, en appliquant la définition, les résultats de :
   a. m[$\neg$q]
   b. m[($\neg\perp$ $\wedge$ $\neg$q)]
   c. m[$\neg$ (p $\vee$ ($\neg$ $\perp$ $\wedge$ $\neg$ q))]
3. On va montrer par induction sur A que lg[A] = lg[m[A]]
   a. Cas de base : **Montrez** que lg[$\perp$] = lg[m[$\perp$]] et que que lg[p] = lg[m[p]]
   b. Cas d'induction :
      les hypothèses d'induction étant lg[B] = lg[m[B]] et lg[C] = lg[m[C]],
      montrez que lg[$\neg$B] = lg[m[$\neg$B]] et que lg[(B*C)] = lg[m[(B*C)]]

B. Formalisation (5 pts)

Formalisez les énoncés suivants (précisez les propositions que vous utilisez) :

4. Si les avenues effrayent Zoé, alors elle ne les prend pas.
5. Zoé n'est pas effrayée par les avenues ou ne prend pas sa voiture.
6. Si Zoé prend sa voiture, alors elle sera en retard si elle est bloquée.
7. Si Zoé n'est pas effrayée par les avenues et prend sa voiture, alors elle sera en retard.
8. Si Zoé part à 8 h et prend sa voiture, alors elle sera en retard si elle prend des avenues.
9. Si Zoé n'est pas bloquée et qu'elle prend de avenues, alors elle ne part pas à 8 h et elle n'est pas effrayée par les avenues.

C. Calcul booléen et méthode des tableaux (9 pts)

10. **Réduisez** (((p $\to$ p) $\to$ p) $\to$ p) à $\top$ par calcul booléen
11. **Vérifiez** que le tableau de $\neg$(((p $\vee$ q) $\wedge$ $\neg$p) $\leftrightarrow$ $\neg$ (q $\to$ p)) est fermé. **Que peut-on en conclure ?**
12. **Réduisez** ((p $\vee$ q) $\wedge$ $\neg$p) $\leftrightarrow$ $\neg$ (q $\to$ p) à $\top$ par calcul booléen
13. **Montrez** que |== (((p $\vee$ $\neg$q) $\wedge$ ($\neg$q $\to$ $\neg$p)) $\to$ ((r $\to$ $\neg$q) $\to$ (r $\to$ $\neg$p)) par la méthode des tableaux.
14. **Réduisez** ((p $\vee$ $\neg$q) $\wedge$ ($\neg$q $\to$ $\neg$p)) $\to$ ((r $\to$ $\neg$q) $\to$ (r $\to$ $\neg$p)) à $\top$ par calcul booléen
15. En utilisant la méthode des tableaux, **donnez un contre-modèle** de la formule :

$$((p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q)) \to (p \to \neg r)$$

Examen du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Janvier 2006

Durée : 2h

Le barème est donné à titre indicatif

A. Déduction naturelle (40% des points)

Attention ! Vous devrez indiquer les règles utilisées et les hypothèses déchargées sur le modèle de ce que vous avez vu en TD, sinon votre réponse sera ignorée.

1. **Exercices** : Donnez une preuve en déduction naturelle des affirmations suivantes (rappel : H |-- C signifie « C est déductible des hypothèses de H ») :

a.		$\vdash (((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)))$
b.	$p \to q, q \to r$	$\vdash p \to r$
c.	$p, \neg p \vee \neg q$	$\vdash \neg q$
d.	$p \wedge \neg p$	$\vdash q$
e.		$\vdash p \to (\neg p \to q)$
f.	$(p \vee q) \to s, \neg s \to \neg r$	$\vdash (p \vee (q \vee r)) \to s$

2. **Problème** : on va voir qu'il existe deux nombres réels non-rationnels x et y (comme $\sqrt{2}$ p. ex.) tels que x^y est rationnel.

Soient les propositions suivantes : « 2 est rationnel » notée p, « $\sqrt{2}$ est rationnel » notée q, « $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est rationnel » notée r et « $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ est rationnel » notée s. On connaît les faits suivants : $\sqrt{2}$ est n'est pas rationnel (résultat dû à Pythagore), 2 est rationnel, $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ est rationnel si et seulement si 2 l'est, et enfin $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou non-rationnel.

Donnez une preuve en déduction naturelle de :

$$p, \neg q, r \vee \neg r, s \leftrightarrow p \vdash (\neg q \wedge r) \vee ((\neg q \wedge \neg r) \wedge s)$$

B. Théorie des modèles et méthode des tableaux (20% des points)

(rappel : H |== C signifie « C est conséquence logique de H » et Tab(H) désigne le tableau de l'ensemble de formules H)

3. Soient A, B et C trois formules, **montrez** que si A |== B et si A |== C alors A |== (B $\wedge$ C) en utilisant la définition de la conséquence logique.

4. **Terminez** le calcul du tableau suivant. Est-il ouvert ou fermé ? Quelle conclusion peut-on en tirer ? (Ne recopiez pas le tableau, indiquez seulement ce qui suit les nœuds 4 et 7.)

Tournez la page SVP

1. $\neg((\neg p \vee (\neg p \wedge r)) \rightarrow (p \wedge r))$

2. $\neg p \vee (\neg p \wedge r)$ ($\neg \rightarrow$ sur 1)
3. $\neg(p \wedge r)$ ($\neg \rightarrow$ sur 1)

4. $\neg p$ ($\vee$ sur 2) 5. $\neg p \wedge r$ ($\vee$ sur 2)

6. $\neg p$ ($\wedge$ sur 5)
7. r ($\wedge$ sur 5)

Soit φ la formule $\neg\big(((p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q)) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)\big)$. **Vous vous inspirerez obligatoirement de la présentation des tableaux telle qu'en question 4.**

5. Quel tableau **faut-il calculer** pour déterminer si **φ** est valide ? **Faites-le et concluez** au sujet de **φ.**
6. Quel tableau **faut-il calculer** pour déterminer si **φ** est satisfiable ? **Faites-le et extrayez en** un modèle de **φ**.

C. Logique des prédicats (40% des points)

Dans ce qui suit on utilisera exclusivement les prédicats P et C avec la lecture :
P(x,y) : « x parle à y » et C(x,y) : « x connaît y »
Attention, sauf si spécifié, « parler à » n'implique pas « connaître » ni réciproquement (vous connaissez le président de la république mais ne lui parlez pas, et parfois il vous parle – à vous entre autres- mais ne vous connaît pas).

7. En utilisant les équivalences remarquables **montrez que**
$$\forall x\, \exists y\, (C(x,y) \rightarrow P(x,y)) \equiv \forall x\, ((\forall y\, C(x,y)) \rightarrow \exists y\, P(x,y))$$

8. **Attribuez** à chaque énoncé en français (a à f) la formule (A à F) qui la formalise (ne perdez pas de temps à recopier les phrases et les formules !):

a. $\forall x\, ((\forall y\, C(x,y)) \rightarrow \exists y\, P(x,y))$	A. Quelqu'un qui connaît tout le monde parle à tout le monde
b. $\exists x\, ((\forall y\, C(x,y)) \rightarrow \forall y\, P(x,y))$	B. Au moins une personne parle à tous ceux qu'il connaît
c. $\forall x\, \exists y\, (C(x,y) \wedge P(x,y))$	C. Toute personne qui connaît tout le monde parle à quelqu'un
d. $\exists x\, \forall y\, (C(x,y) \rightarrow P(x,y))$	D. Tout le monde connaît au moins une personne à qui il parle
e. $(\exists x\, \forall y\, C(x,y)) \wedge (\exists x\, \forall y\, P(x,y))$	E. Quelqu'un connaît et parle à tout le monde
f. $\exists x\, \forall y\, (C(x,y) \wedge P(x,y))$	F. Quelqu'un connaît tout le monde et quelqu'un parle à tout le monde

9. **Formalisez** les énoncés suivants :
   a. A connaît B mais ne lui parle pas
   b. A connaît tout le monde
   c. Tout le monde connaît B mais personne ne lui parle
   d. On connaît ceux à qui l'on parle
   e. B parle à tous ceux qui connaissent C
   f. Quelqu'un connaît tous ceux à qui C parle ou qui parle à C
   g. Tout le monde parle à quelqu'un qui connaît tout le monde

Examen de Logique. Janvier 2006. Durée : 2h

Corrigé

A.1.

a.

```
(p∧q)→r (1)     p (2)     q (3)
                --------------- I∧
                   p ∧ q
------------------------------ E→
           r
        ----------- I→(3)
          q→r
        ----------- I→(2)
        p→(q→r)
--------------------------- I→(1)
((p∧q)→r)→( p→(q→r))
```

b.

```
q→r     p→q     p (1)
        ----------- E→
            q
------------------- E→
        r
------------------ I→(1)
        p→r
```

c.

```
            ¬p (3)     p     ¬q (2)
              ------------- I⊥
                    ⊥
                   ------- E⊥
¬p ∨ ¬q            ¬q
----------------------------------------- E∨ (2,3)
         ¬q
```

d.

```
p∧¬p                p∧¬p
------ E∧           ------ E∧
  p                   ¬p
------------------------- I⊥
            ⊥
         ------- E⊥
            q
```

e.

```
p(1)     ¬p (2)
-------------- I⊥
     ⊥
-------------- E⊥
     q
-------------- I→(2)
  ¬p → q
--------------- I→(1)
p → (¬p → q)
```

f.

```
                          p(1)                          q(3)                 ¬s    ¬s→¬r
                        ------ I∨                       ------ I∨             -------------- E→
          (p∨q)→s      p∨q                (p∨q)→s   p∨q            r(4)           ¬r
          ------------------------ E→      -------------------- E→   --------------------- I⊥
                          s                             s                   ⊥
                                                                       ------- E⊥
                                                                         ¬¬s
                                                                        -------- E¬
                                         q∨r (2)                           s
                                         ---------------------------------------------------- E∨ (3,4)
p∨(q∨r)                                                             s
--------------------------------------------------------------------------------------------------- E∨(1,2)
                                                s
```

A.2

$$\dfrac{r\vee\neg r \qquad \dfrac{\dfrac{\neg q \qquad r(1)}{\neg q \wedge r}\,I\wedge}{(\neg q \wedge r)\vee((\neg q \wedge \neg r)\wedge s)}\,I\vee \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg q \quad \neg r(2)}{\neg q \wedge \neg r}\,I\wedge \qquad \dfrac{p \qquad \dfrac{s\leftrightarrow p}{p\rightarrow s}\,E\wedge}{s}\,E\rightarrow}{(\neg q \wedge \neg r)\wedge s}\,I\wedge}{(\neg q \wedge r)\vee((\neg q \wedge \neg r)\wedge s)}\,I\vee}{(\neg q \wedge r)\vee((\neg q \wedge \neg r)\wedge s)}\,E\vee\ (1,2)$$

B.3

Hypothèses : A |== B et A |== C, il faut démontrer A |== (B∧C), autremenent dit il suffit de vérifier que tout modèle de A est un modèle de B∧C. Soit v un modèle de A, c-à-d v(A) =1, par hypothèse, v est aussi un modèle de B et donc v(B)=1, toujours par hypothèse, v est aussi un modèle de C et donc v(C) =1. En ce cas, on a v(B∧C) = min(v(B),v(C)) = min(1,1) = 1. Donc v est aussi un modèle de B∧C.

B.4

4. ¬p (∨ sur 2)

8. ¬p (¬∧ sur 3) | 9. ¬r (¬∧ sur 3)

7. r (∧ sur 5)

10. ¬p (¬∧ sur 3) | 11. ¬r (¬∧ sur 3)
12. ⊥ (⊥ sur 7,9)
X

Ce tableau est ouvert, il contient trois branches ouvertes. Donc la formule initiale ¬((¬p∨(¬p∧r))→(p∧r)) est satisfiable et admet un modèle, et donc la formule (¬p∨(¬p∧r))→(p∧r) n'est pas valide et admet un contre-modèle.

B.5 Il faut calculer le tableau de ¬ϕ, s'il est fermé alors ϕ est valide.

1. ¬¬ (((p∨¬q) ∧ (¬r ∨ ¬q)) → (p → ¬ r))
2. (((p∨¬q) ∧ (¬r ∨ ¬q)) → (p → ¬ r)   (¬→ :1)

3. p → ¬ r   (→ : 2)

4. ¬ p   (→ : 3)

⇑ **Branche ouverte** ⇑

L'existence d'une branche ouverte suffit pour conclure : le tableau n'est pas fermé, donc ¬ϕ n'est pas valide.

B.6 5 Il faut calculer le tableau de ϕ, s'il est ouvert alors ϕ est satisfiable.

1. ¬ (((p∨¬q) ∧ (¬r ∨ ¬q)) → (p → ¬ r))
2. (p∨¬q) ∧ (¬r ∨ ¬q)   (¬→ :1)
3. ¬(p → ¬ r)   (¬→ :1)
4. p∨¬q   (∧ :2)
5. ¬r ∨ ¬q   (∧ :2)
6. p   (¬→ :3)
7. ¬¬r   (¬→ :3)

14. p (∨ :4)   15. ¬q (∨ :4)

8. ¬r (∨ :5)
9. ⊥ (⊥ : 7,11)
X

13. ¬q (∨ :5)

10. ¬r (∨ :5)
11. ⊥ (⊥ : 7,14)
X

12. ¬q (∨ :5)

On a deux branches ouvertes, ϕ est donc satisfiable. Un modèle en est v telle que : v(p)=1, v(q)=0 et v(r)=1.

C.7 ∀x ∃y (C(x,y) → P(x,y))

≡ ∀x ∃y (¬C(x,y) ∨ P(x,y))   -- équivalence booléenne entre → et ∨
≡ ∀x (∃y ¬C(x,y) ∨ ∃y P(x,y))   -- distributivité du ∃ sur le ∨
≡ ∀x (¬∀y C(x,y) ∨ ∃y P(x,y))   -- lien entre ∀ et ∃
≡ ∀x (∀y C(x,y) → ∃y P(x,y))   -- équivalence booléenne entre → et ∨

Il ne fallait surtout pas utiliser ∃x (A→B) ≡ ((∀xA)→B) qui n'est correcte que si x∉ Lib(B), ce qui n'est pas le cas ici car y∈ Lib(P(x,y)).

C.8 Les formules étaient :

g. $\forall x\ ((\forall y\ C(x,y)) \rightarrow\ \exists y\ P(x,y))$
h. $\exists x\ ((\forall y\ \ C(x,y)) \rightarrow \forall y\ P(x,y))$
i. $\forall x\ \exists y\ (C(x,y) \wedge P(x,y))$
j. $\exists x\ \forall y\ (C(x,y) \rightarrow P(x,y))$
k. $(\exists x\ \forall y\ C(x,y)) \wedge (\exists x\ \forall y\ P(x,y))$
l. $\exists x\ \forall y\ (C(x,y) \wedge P(x,y))$

Remarques :

i. $\forall y\ C(x,y)$ signifie « x connaît tout le monde »
ii. $\exists y\ P(x,y)$ signifie « x parle à quelqu'un » (= « il existe quelqu'un à qui x parle »)
iii. $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ signifie donc « il y a quelqu'un (disons x) qui connaît tout le monde »
iv. $(\forall y\ C(x,y)) \rightarrow\ \exists y\ P(x,y)$ signifie donc « si x parle à tout le monde alors x parle à quelqu'un » (d'après i. et ii.)

a. D'après iv., a. peut se lire : « De tout x on peut dire : si x connaît tout le monde alors x parle à quelqu'un », ce qui se reformule en « Ceux qui connaissent tout le monde parlent à quelqu'un » ou encore « *Toute personne qui connaît tout le monde parle à quelqu'un* »
b. Voir plus bas
c. « De tout x on peut dire : il y a un y que x connaît et à qui x parle », autrement dit « De tout x on peut dire : x connaît quelqu'un à qui il parle » ou encore « *Tout le monde connaît au moins une personne à qui il parle* »
d. « Il y a un x qui, si x connaît un y quelconque alors x parle à y » autrement dit « *Au moins une personne parle à tous ceux qu'il connaît* »
e. « *Quelqu'un connaît tout le monde et quelqu'un parle à tout le monde* », attention, ce n'est pas nécessairement le même qui connaît tout le monde et qui parle à tout le monde, contrairement à f.
f. « *Quelqu'un connaît et parle à tout le monde* »
b. En fait, b. ne correspond pas à la phrase restante : « *Quelqu'un qui connaît tout le monde parle à tout le monde* » qui se reformule en « De tout x on peut dire : si x connaît tout le monde alors x parle à tout le monde » et correspond à $\forall x\ ((\forall y\ \ C(x,y)) \rightarrow \forall y\ P(x,y))$, or b. commence par $\exists$ $(\exists x\ ((\forall y\ \ C(x,y)) \rightarrow \forall y\ P(x,y)))$. La correspondance phrases/formules était donc incomplète.

C. 9

a. $C(A,B) \wedge \neg P(A,B)$
b. $\forall x\ C(A,x)$
c. $\forall x\ (C(x,B) \wedge \neg P(x,B))$
d. $\forall x\ \forall y\ (P(x,y) \rightarrow C(x,y))$
e. $\forall x\ (C(x,C) \rightarrow P(B,x))$
f. $\exists x\ \forall y\ ((P(y,C) \vee P(C,y)) \rightarrow C(x,y))$
g. $\forall x\ \exists y\ (P(x,y) \wedge \forall z\ C(y,z))$

Examen du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Septembre 2006

Durée : 2 h

Le barème est donné à titre indicatif

*A. Logique des propositions : Zoé, les aubergines et la moussaka (10 **pts)***

Ce problème a quatre hypothèses :

H1. Si Zoé déteste les aubergines, alors elle n'en mange pas.

$\mathbf{D \rightarrow \neg A}$

H2. Zoé ne déteste pas les aubergines ou ne prend pas de moussaka.

$\mathbf{\neg D \vee \neg M}$

H3. Si Zoé prend de la moussaka, alors elle sera rassasiée si elle finit son plat.

$\mathbf{M \rightarrow (F \rightarrow R)}$

H4. Si Zoé mange de l'aubergine et qu'elle mange vite, alors elle finira son plat.

$\mathbf{(A \wedge V) \rightarrow F}$

Ce problème a trois conclusions :

C1. Si Zoé ne déteste pas les aubergines et qu'elle prend de la moussaka, alors elle sera rassasiée.

$\mathbf{(\neg D \wedge M) \rightarrow R}$

C2. Si Zoé mange vite et prend de la moussaka, alors elle sera rassasiée si elle mange de l'aubergine.

$\mathbf{(V \wedge M) \rightarrow (A \rightarrow R)}$

C3. Si Zoé ne finit pas son plat et qu'elle mange de l'aubergine, alors elle ne mange pas vite et elle ne déteste pas les aubergines.

$\mathbf{(\neg F \wedge A) \rightarrow (\neg V \wedge \neg D)}$

Q1 (4 pts). Méthode des tableaux : vérifiez que C1 n'est pas une conséquence logique des hypothèses, pour cela vérifiez que le tableau de {H1, H2, H3, H4, ¬C1} est ouvert.

Q2 (6 pts). Donnez une preuve en déduction naturelle de :

H3, H4 |-- C2

H4, H1 |-- C3

B. Logique des prédicats (8 pts)

Deux personnes sont en train de jouer aux dames. On remarque les faits suivants :

g. Le pion p1 est blanc et est à côté du pion p2.
h. Tout pion est soit noir, soit blanc.
i. Le pion p1 est à côté d'un pion noir.
j. Le pion p3 n'est à côté d'aucun pion blanc.
k. Tout pion blanc est à côté d'au moins un pion noir.
l. Il y a au moins un pion noir qui est à côté de tous les pions blancs.
m. Tout pion qui est à côté d'un pion noir est lui-même blanc.
n. Toute dame est à côté d'un pion noir lui-même à côté d'un pion blanc.

Q1 (6 pts). Formalisez les énoncés a. à f. en utilisant uniquement les prédicats listés ci-dessous :
N(x) : « le pion x est noir », B(x) : « le pion x est blanc», D(x) : « le pion x est une dame », et C(x,y) : « le pion x est à côté du pion y ».

Q2 (2 pts). Donnez une preuve en déduction naturelle de la formule suivante en utilisant à bon escient les règles d'élimination et d'introduction du ∀ en plus des règles de la logique des propositions.

$$(\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x\, (Q(x) \to R(x))) \to (\forall x\, (P(x) \to R(x)))$$

C . Induction (2 pts)

Soit A une formule quelconque. On définit, par induction, les grandeurs nsf(A) et pf(A) de la manière suivante (où * est l'un des connecteurs binaires $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$) :

- nsf(A) donne le nombre d'occurrences de sous-formules de A et est défini par :
  $nsf(\perp) = 1$; $nsf(p) = 1$ ($p \in PROP$) ; $nsf((\neg B)) = nsf(B)+1$; $nsf((C*B)) = nsf(C)+nsf(B)+1$
- pf(A) donne la profondeur de A et est défini par :
  $pf(\perp) = 0$; $pf(p) = 0$ ($p \in PROP$) ; $pf((\neg B)) = pf(B)+1$; $pf((C*B)) = \max(pf(C) , pf(B)) + 1$

Exemple **:** $nsf\big((\neg (p \vee ((\neg \perp) \wedge (\neg q)))) \big) = 8$ et $pf\big((\neg (p \vee ((\neg \perp) \wedge (\neg q)))) \big) = 4$

Questions :
a) Donnez nsf(⊥) et nsf(p) où p est une proposition.
b) Donnez nsf((A*B)) en fonction de nsf(A) et nsf(B), nsf(¬A) en fonction de nsf(A).
c) Faites de même pour pf(⊥), pf(p), pf((A*B)) et pf(¬A).
d) Montrez par induction que pour TOUTE formule A on a $nsf(A) \leq 2^{pf(A)+1} - 1$.

Partiel du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Novembre 2006

Durée : 2h

Le barème est donné à titre indicatif

A. Formalisation (environ 6 pts)

Soit A, B et C trois formules, on définit un nouveau connecteur (à trois arguments) noté !(A,B,C) tel que : !(A,B,C) est vrai si et seulement exactement une des trois formules parmi A, B et C est vraie.

1) **Définissez** !(A,B,C) à l'aide des connecteurs habituels et dressez la table de vérité de votre définition pour la vérifer.

On a trois cubes nommés 1, 2 et 3, et trois couleurs bleu (B), jaune (J) et vert (V). Chaque cube peut être d'une ou plusieurs couleurs. On se donne les propositions suivantes : B1 : « le cube 1 est bleu », V1 : « le cube 1 est vert », J1 : « le cube 1 est jaune », B2 : « le cube 2 est bleu », etc ainsi que AC12 : « le cube 1 est à côté du 2 », AC13 : « le cube 1 est à côté du 3 », et ainsi de suite.

2) **Formalisez** les énoncés suivants (vous pouvez utiliser le connecteur défini en A.1) :
   a. la couleur du cube 1 est une seule des trois couleurs possibles
   b. le cube 2 est de deux couleurs exactement
   c. la couleur du cube 1 se retrouve sur le 3 mais pas sur le 2
   d. les cubes 2 et 3 ont exactement une couleur en commun
   e. aucun des cubes n'est à côté de lui-même
   f. le cube 2 est à côté d'un cube qui n'est pas bleu
   g. le cube 1 est à côté d'un jaune s'il est lui-même bleu, et à côté d'un vert sinon

B. Induction (4 pts)

Soit $n \geq 0$ un entier quelconque, et $A_0, \ldots, A_n$ des formules du langage de la logique des propositions.
On définit l'abréviation $\Delta_n = A_n \wedge (A_{n-1} \wedge (\ldots \wedge (A_1 \wedge A_0)))$ de manière inductive :

- $\Delta_0 = A_0$
- $\Delta_{n+1} = A_{n+1} \wedge \Delta_n$

Soit B une autre formule, on veut définir l'abréviation $\Gamma_n(B) = A_n \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_0 \rightarrow B)))$

3) **Donnez** une définition inductive de $\Gamma_n(B)$.
4) On souhaite montrer par induction sur n (= par récurrence) que $\Delta_n \rightarrow B$ et $\Gamma_n(B)$ sont logiquement équivalentes.
   - **Prouvez** les cas de base.
   - **Prouvez** les cas inductifs et **explicitez** votre ou vos hypothèses d'induction.

C. Réflexion : théorie des modèles (2 pts)

Soient $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ un ensemble **infini** de propositions et soit H l'ensemble **infini** des formules de la forme : $p_i \rightarrow p_{i+1}$, c'est-à-dire $H = \{ p_0 \rightarrow p_1 , p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \ldots\}$.

5) **Montrez** que (pour k quelconque) p_k est conséquence logique de H et de la proposition p_0 (c'est-à-dire, montrez que $H, p_0 \models p_k$) en utilisant la définition et/ou les propriétés de la conséquence logique.

D. Méthode des tableaux (8 pts)

Vérifiez si les conséquences logiques ci-dessous sont vraies **par la méthode des tableaux** (**l'usage d'une autre méthode sera sanctionné de même que l'absence d'indication des règles utilisées**) et **donnez un contre-exemple** si ce n'est pas le cas :

6) $p \vee (q \wedge r) \models (\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p)$
7) $\neg p2 \vee p3, p0 \rightarrow p1, \neg p2 \rightarrow \neg p1 \models p3$
8) $\models (p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)) \leftrightarrow p$

Examen du module de S3 : Programmation et logique.

Partie Logique. Janvier 2007

Durée : 2 h

Le barème est donné à titre indicatif

NB : Les questions auxquelles vous devez répondre sont numérotées de 1 à 13.

A. Logique des propositions

Méthode des tableaux (3 points)

En utilisant **exclusivement** la méthode des tableaux et en indiquant **clairement** les règles utilisées dites pour les deux formules ci-dessous si elle sont satisfiables et si oui **donnez-en un modèle** :

1) $(a \vee b) \wedge (a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow \neg a) \wedge (b \rightarrow c)$
2) $((a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg a \leftrightarrow c)) \rightarrow ((d \rightarrow b) \rightarrow d)$

Déduction naturelle (8 points)

Donnez une preuve en déduction naturelle des affirmations 3) à 6) **en précisant bien** les règles et les hypothèses que vous utilisez :

3) $a \rightarrow (b \rightarrow c)$ |-- $(a \wedge b) \rightarrow c$
4) $(a0 \rightarrow \neg\, b1), (\neg b0 \leftrightarrow a0), \neg\, b0$ |-- $(\neg b1 \rightarrow a1) \rightarrow a1$
5) $a \rightarrow (c \vee (b \rightarrow d))$ |-- $((a \wedge b) \rightarrow (c \vee d))$
6) $\neg\, (c \vee (b \rightarrow d))$ |-- b

B. Logique des prédicats

Equivalence logique (2 points)

On s'intéresse ici aux formules vraies dans l'interprétation $\mathbb{N}$, et construites avec les prédicats binaires : $\_ \leq \_$ et $\_ = \_$ et avec le prédicat ternaire $\_ \leq \_ \leq \_$, la constante 0 et la fonction successeur unaire s(_). Dans ce qui suit, en plus des équivalences remarquables vues en cours on pourra utiliser les équivalences a. à d.(qui sont vraies dans $\mathbb{N}$) et où Φ est une formule quelconque **mais ne contenant ni ∀, ni ∃** :

o. $x \leq y \leq z \equiv (x \leq y \wedge y \leq z)$
p. $x \leq s(y) \equiv (x = s(y) \vee x \leq y)$
c. $0 \leq x \equiv \top$
d. $(x=t \rightarrow \Phi) \equiv \Phi\,[t/x]$

En utilisant le remplacement par équivalence montrez rigoureusement que :

7) $\forall x\,(0 \leq x \leq s(y) \rightarrow \Phi) \equiv (\forall x\,(0 \leq x \leq y \rightarrow \Phi) \wedge \Phi\,[s(y)/x])$

Formalisation (6 points)

Le jeu Quarto™ se déroule sur un plateau de 4x4 cases avec 16 pièces distinctes. Chacune de ces pièces possède 4 caractères et est : trouée (t) OU pleine (p), ronde (r) OU carrée (c), haute (h) OU basse (b), verte (v) OU jaune (j). De plus, chaque pièce est une combinaison unique de ces caractères, le but du jeu étant d'aligner quatre pièces partageant un caractère commun (une ligne de pièces pleines, ou une colonne de pièces trouées par exemple). Afin de formaliser certaines situations, on choisit comme constantes : t, p, r, c, h, b, v, j (pour les caractères), l1, l2, l3, l4 (pour les lignes), c1, c2, c3, c4 (pour les colonnes), etc … et on choisit comme prédicats :

Li(x) pour « x est une ligne » Col(x) pour « x est une colonne »
Car(x) pour « x est un caractère » Pi(x) pour « x est une pièce »
Est(c,p) pour « la pièce p a le caractère c »
Pos(x,y,p) pour « la pièce p est sur la case en ligne x et colonne y »

Exemple de formule : $\forall x \forall y\, ((Li(x) \wedge Col(y)) \rightarrow \exists z\, (Pi(z) \wedge pos(x,y,z)))$ exprimant qu'il y a une pièce sur chaque case du jeu.

De plus, on va définir ci-dessous les prédicats Q0, Q1, Q2, Q3 et Q4 (d'arités 3, 2, 1, 1, 0).

Questions : définissez les prédicats Q0 à Q3 en formalisant l'énoncé qu'ils représentent (énoncés 8 à 12), une fois définis, vous pouvez bien entendu les réutiliser :

8) Q0(l2,c3,b) : « En ligne l2 et colonne c3, il y a une pièce basse »
9) Q1(l3,t) : « Sur la ligne l3, il y a une pièce trouée »
10) Q2(r) : « Sur chaque colonne, il y a une pièce ronde »
11) Q3(v) : « Il y a une colonne où toutes les pièces sont vertes »
12) Q4 : « Il y a une colonne où toutes les pièces ont un caractère commun »

Induction (2 pts)

Soit t un terme, var(t) est l'ensemble des variables apparaissant dans t.

13) Donnez une définition inductive de var(t).

Rappel : l'ensemble TERM des termes est défini inductivement par :

- c∈TERM si c est une constante
- x∈TERM si x une variable
- si t1,…,tn ∈TERM et si f une fonction à n arguments alors f(t1,…,tn) ∈TERM