Exercice 17 (Sommes télescopiques)

a par récurrence

$n=1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$ la formule est vraie pour $n=1$

supposons la formule vraie pour un certain $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

donc la formule est vraie au rang $n+1$

conclusion la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

b $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$: il suffit de réduire au même dénominateur

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$ on pose $j = k+1$ dans la 2ème somme

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 18

Calculons quelques éléments de A en appliquant la règle d'induction plusieurs fois : $0 \in A$, $5 \in A$, $10 \in A$, $15 \in A$ etc...

on voit que A est l'ensemble des multiples de 5.

Exercice 19

Calculons l'image de quelques entiers : $\varphi(0)=1$; $\varphi(1)=1$; $\varphi(2)=2\varphi(1)=2$

$\varphi(3)=3\times\varphi(2)=6$; $\varphi(4)=4\times\varphi(3)=4\times 6=24$ etc...

on voit que $\varphi(n)=n!$