

$$\hat{a} = \left(\mathbf{R}_x^\top \mathbf{W} \mathbf{R}_x \right)^{-1} \mathbf{R}_x^\top \mathbf{W} \mathbf{y}$$

$$\hat{a} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x & \cdots & x_n - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 - x \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x & \cdots & x_n - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \\ k_1(x_1 - x) & \cdots & k_n(x_n - x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 - x \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \\ k_1(x_1 - x) & \cdots & k_n(x_n - x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} s_0(x) & s_1(x) \\ s_1(x) & s_2(x) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}^\top \mathbf{y} \\ (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^\top \mathbf{K} \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s_0 s_2 - s_1^2} \begin{bmatrix} s_2(x) & -s_1(x) \\ -s_1(x) & s_0(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}^\top \mathbf{y} \\ (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^\top \mathbf{K} \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\left(s_2 \mathbf{k}^\top - s_1 (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^\top \mathbf{K} \right) \mathbf{y}}{s_0 s_2 - s_1^2} = \frac{\left(s_2 \mathbf{k}^\top - s_1 (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^\top \mathbf{K} \right) \mathbf{y}}{s_0 s_2 - s_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

$$w_i = k_i (s_2 - s_1 (x_i - x))$$

$$s_0 s_2 - s_1^2 = \sum_{i=1}^n s_2 k_i - \sum_{i=1}^n s_1 k_i (x_i - x) = \sum_{i=1}^n k_i (s_2 - s_1 (x_i - x)) = \sum_{i=1}^n w_i$$