$$\hat{a} = \left(\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{\top}\mathbf{W}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{\top}\mathbf{W}\mathbf{y}$$

$$\hat{a} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x & \cdots & x_n - x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x_1 - x \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x & \cdots & x_n - x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \\ w_1(x_1 - x) & \cdots & w_n(x_n - x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x_1 - x \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \\ w_1(x_1 - x) & \cdots & w_n(x_n - x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x \\ \mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x & (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\top}\mathbf{y} \\ (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}\begin{bmatrix} (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) & x - \mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} \\ x - \mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\top}\mathbf{y} \\ (\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_0 = \frac{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1})\mathbf{w}^{\top}\mathbf{y} - \left(x - \mathbf{w}^{\top}\mathbf{x}\right)(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}$$

$$= \frac{\left((\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1})\mathbf{w}^{\top} - \left(x - \mathbf{w}^{\top}\mathbf{x}\right)(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}\right)\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - x)^2\right)\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix} - \left(x - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right)\begin{bmatrix} w_1(x_1 - x) & \cdots & w_n(x_n - x) \end{bmatrix}\right)\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\begin{bmatrix} w_1\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - x)^2\right) - w_1(x_1 - x)\left(x - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) & \cdots & w_n\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - x)^2\right) - w_n(x_n - x)\left(x - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \end{bmatrix}\right)\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\begin{bmatrix} w_1\left(s_2(x) - (x_1 - x)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - x)\right)\right) & \cdots & w_n\left(s_2(x) - (x_n - x)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - x)\right)\right) \end{bmatrix}\right)\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\begin{bmatrix} w_1\left(s_2(x) - (x_1 - x)s_1(x)\right) & \cdots & w_n\left(s_2(x) - (x_n - x)s_1(x)\right) \end{bmatrix}\right)\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - x\mathbf{1})^{\top}\mathbf{W}(\mathbf{x} - x\mathbf{1}) - \left(\mathbf{w}^{\top}\mathbf{x} - x\right)^2}$$