العمليات الحسابية على الانظمة العددية

Arithmetic Operations in Numbering Systems

محاضرة 3

By: Zahra Elashaal

العلاقة بين الانظمة العددية الاربعه

3 syst	Binary			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A=10	1	0	1	0
B=11	1	0	1	1
C=12	1	1	0	0
D=13	1	1	0	1
E=14	1	1	1	0
F=15	1	1	1	1

Binary Binary

Octal

Decemal

Hexa Decimal

العمليات الحسابية على النظام الثنائي
Binary Arithmetic

العمليات الحسابية في النظام الثنائي *Binary Arithmetic*

العمليات الحسابية في النظام الثنائي ضرورية في كل أجهزة الحاسوب وأنواع أخرى عديدة من النظم الرقمية. وسنكتفي هنا بشرح القواعد الأساسية لعمليتي الجمع والطرح فقط.

الجمع الثنائي *Binary Addition*

لإجراء عملية الجمع في النظام الثنائي، هناك أربعة قواعد أساسية لجمع الخانات الثنائية (*Binary Digits*) وهي:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 0$ *carry* (الحامل) $1 \Rightarrow = 10$

لا تحتاج القواعد الثلاثة الأولى إلى مزيد من الإيضاح، والقاعدة الرابعة تقول إنه في حالة جمع $1 + 1 = 10$ وهي تعني رقم (2) بالعشري، والواحد (1) هو المجموع الواجب ترحيله إلى العمود التالي

إذا كانت الأعداد الثنائية مكونة من أكثر من خانة واحدة فإن عملية الجمع تنفذ بنفس طريقة الجمع في النظام العشري مع مراعاة أن أساس النظام العد المستعمل هو 2.

أوجد جمع العددين الثنائيين $(101)_2 + (011)_2$

المحـمـول	1 1
العدد الأول	0 1 1
العدد الثاني	1 0 1
+	ــــــــــ
	1000

إذا كانت الأعداد الثنائية مكونة من أكثر من خانة واحدة فإن عملية الجمع تنفذ بنفس طريقة الجمع في النظام العشري مع مراعاة أن أساس النظام العد المستعمل هو 2.

أوجد جمع العددين الثنائيين $(101)_2 + (011)_2$

المحمـول	1 1
العدد الأول	0 1 1
العدد الثاني	+ 1 0 1
	1000

اجمع الرقمين الثنائيين 011, 110.

الحل: نرتب الأعداد الثنائية بحيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة كما يلي:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ +\,3 \\ \hline 9 \end{array} \text{ (عشري)}$$

اجمع الرقمين الثنائيين 011, 100.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\,3 \\ \hline 7 \end{array} \text{ (عشري)}$$

مثال: اوجد ناتج الجمع في النظام الثنائي

			1		1		
			1	0	1	0	
9			1	0	0	1	
+ 14	+		1	1	1	0	
+ 3	+		0	0	1	1	
+ 1	+		0	0	0	1	
+ 7	+		0	1	1	1	
+ 1	+		0	0	0	1	
35	1	0	0	0	1	1	

				1	
		1	0	1	0
5			1	0	1
+ 3		+	0	1	1
+ 6		+	1	1	0
+ 1		+	0	0	1
+ 3		+	0	1	1
18	1	0	0	1	0

أوجد ناتج عمليات الجمع التالية:

المحمـول 111

العدد الأول 11010

العدد الثاني 10110 +

110000

المجموع 1 1

1

العدد الأول 011

العدد الثاني 110

العدد الثالث 001

العدد الرابع 011 +

الناتج 1101

أوجد عمليات الجمع التالية :

- 101100 + 101011
- 1101 + 10001
- 111 + 1011
- 111+1010
- 0001+0111+0001+0011+1110+1001

الطرح الثنائي *Binary Subtraction*

هناك طريقتان لإجراء عملية الطرح وهما :

1- الطريقة المباشرة أو ما يطلق عليه بالطريقة الحسابية.

2- الطريقة المتممة.

الطرح بالطريقة المباشرة (الحسابية) يجب معرفة القواعد الأساسية لهذه العملية مع ملاحظة أن المقدار المطروح منه على اليسار والمقدار المطروح على اليمين:

$0 - 0 = 0$

$1 - 0 = 1$

$1 - 1 = 0$

$0 - 1 = 1 \longleftarrow$ تكون النتيجة (1) واستلفنا (1)

ويمكن تلخيص عملية الطرح في الطريقة المباشرة كما يلي :

- رتب الأرقام تحت بعضها بحيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة.
- ابدأ من الخانة الأولى على اليمين متجهاً إلى اليسار متبعاً القواعد التالية في الطرح:
  - عند طرح (0) من (0) أو (1) من (1) نضع في الناتج (0).
  - عند طرح (0) من (1) نضع الناتج (1).
  - عند طرح (1) من (0) نضع في الناتج (1) ثم نغير كل (0) من الخانات التالية (في المطروح منه) إلى (1) حتى نصل إلى أقرب (1) فنغيره إلى (0).
  - أكمل بعد ذلك علمية الطرح باستخدام القواعد السابقة.

مثال : اطرح من المقدار (101) المقدار (011).

الحل:

عندما استلفنا (1) أصبحت هذه الخانة (0)

$$
\begin{array}{rccc}
 & 0 & 1 = 10 = 2 & \\
\text{المطروح منه} & \cancel{1} & 0 & 1 \\
\text{المطروح} & -\;0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

استلفنا (1) من العمود الذي يليه فأصبحت الخانة تحتوي على (10) وبطرح (1) منها يصبح الناتج (1)

مثال: الطرح المقدار الثنائي 111 من المقدار الثنائي 10011

$$
\begin{array}{r}
19 \\
-\quad 7 \\
\hline
12
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rccccc}
 & & 1 & & & \\
 & & \cancel{10=2} & 10=2 & & \\
 & \cancel{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\
- & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

مثال: اطرح العدد الثنائي 110010 من العدد الثنائي 1100

- في هذا المثال نلاحظ ان المطروح 110010 اقل من المطروح منه 1100
- لهذا نقوم بطرح العددين بالعكس (العدد الاكبر ناقص العدد الاصغر) ثم نضع اشارة سالب على الناتج.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0 \\ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ \ \ \ 1\ \\ 0\ \ \cancel{10=2}\ \ 10=2 \\ 1\ \cancel{1}\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ -\ \ \ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

الناتج يكون بعد اضافة اشارة السالب **- 1 0 0 1 1 0**

اطرح العدد 11001 من العدد 111010

$$\begin{array}{r} {\color{red}{0\ 10}} \\ -\ 111\cancel{0}10 \\ 11001 \\ \hline 100001 \end{array}$$

اطرح العدد 110111 من العدد 1101

في هذا المثال نلاحظ أن العدد 1101 أصغر من العدد 110111

لذلك فإننا سنطرح الثاني من الاول ونعتبر النتيجة سالبة .

$$\begin{array}{r} {\color{red}{010}} \\ -\ 1\cancel{1}0111 \\ 1101 \\ \hline 101010 \end{array}$$

النتيجة ستكون = 101010-

العمليات الحسابية في النظام الثماني
Arithmetic Operations in Octal System

تلخيص عملية الجمع في النظام الثماني كالآتي:

- أنه يمكننا إجراء عملية الجمع للأرقام الثمانية كما في النظام العشري تماماً مادام حاصل الجمع لم يزد على رقم (7).
- إذا زاد حاصل الجمع عن رقم (7) فإننا نضيف إلى حاصل الجمع العشري (2) لنحصل على مقابله الثماني، حيث إن الرقم التالي للرقم (7) في النظام العشري هو (8) أما الرقم (7) الثماني فإن الرقم التالي له هو (10) الثماني أي أننا لو جمعنا (2) على حاصل الجمع العشري ينتج حاصل الجمع الثماني المقابل (لاحظ أن هذه الطريقة لا تستخدم في عملية التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني إنما تستخدم فقط في عملية الجمع).

ويكون العد في النظام الثماني كما يلي :

0 , 1 , 2 , 3, 4 ,5 , 6 , 7

10,11,12,13,14,15,16,17

20,21,22,23,24,25,26,27

Octal Addition الجمع الثماني

قاعدة الجمع في النظام الثماني

نجمع الاعداد كالجمع العشري العادي مع مراعاة الاتي:

1- اذا كان ناتج جمع الرقمين اقل من 8 يوضع الناتج كما هو.

2- اذا كان ناتج جمع الرقمين اكبر من او يساوي 8 يضاف 2 الي الناتج.

7	6	5	4	3	2	1	0	+
7	6	5	4	3	2	1	0	**0**
10	7	6	5	4	3	2	1	**1**
11	10	7	6	5	4	3	2	**2**
12	11	10	7	6	5	4	3	**3**
13	12	11	10	7	6	5	4	**4**
14	13	12	11	10	7	6	5	**5**
15	14	13	12	11	10	7	6	**6**
16	15	14	13	12	11	10	7	**7**

العمليات الحسابية في النظام الثماني
Arithmetic Operations in Octal System

مثال ١ : اجمع العددين الثمانيين $(34)_8$ ، $(42)_8$.

الحل: نرتب أولاً العددين رأسياً ثم نقوم بعلمية الجمع:

$$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 42 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\therefore (34)_8 + (42)_8 = (76)_8$$

نلاحظ هنا أن مجموع أي من الرقمين الرأسيين(4,2) أو (3,4) لم يزد عن رقم (7) وبالتالي يكتب حاصل الجمع كما هو.

مثال : اجمع العددين الثمانيين $(56)_8$ و $(63)_8$.

$$\begin{array}{rrr} & 1 & \\ & 5 & 6 \\ + & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 1 \end{array}$$

نلاحظ في هذا المثال أنه عند زيادة حاصل الجمع عن رقم (7) أضفنا (2) إلى الناتج ثم رحلنا الحامل (*Carry*) إلى الخانة التالية.

جمع الأعداد الثمانية

اجمع العددين (37305)8 و (1342)8 ؟

اجمع العددين (77777)8 و (6666)8 ؟

1

37305

\+ 1342

40647

1 1 1 1

77777

\+ 6666

106665

اجمع العددين (576041)8 و (625347)8

1 1   1 1

576041

\+ 625347

1423410

جمع الأعداد الثمانية

مثال: اجمع العددين $(52.2)_8 + (176.7)_8$

$$
\begin{array}{rr}
 & \color{red}{111} \\
 & 176.7 \\
\color{red}{+} & 052.2 \\
\hline
 & 251.1
\end{array}
$$

أوجد حاصل جمع العددين $(3456701)_8$ و $(6577)_8$ ؟

العمليات الحسابية في النظام الثماني

الطرح في النظام الثماني *Subtraction in Octal System*

يمكن تلخيص عملية الطرح في النظام الثماني كالتالي:

- إذا كان المطروح منه أكبر من المطروح أو يساويه فيتم كطرح الأرقام العشرية تماماً.
- أما إذا كان المطروح منه أصغر من المطروح فيتم إستلاف (1) من الخانة التالية – هذا الواحد يعبر عنه بثمانية (8) تضاف إلى الخانة التي يراد الطرح منها في العدد المطروح منه ثم يتم الطرح كالمعتاد في النظام العشري.

مثال : اجرِ عملية الطرح الآتية: $(657)_8 - (346)_8$

الحل: نضع الرقمين بصورة رأسية كما يلي :

$$\begin{array}{rrrr} & 6 & 5 & 7 \\ - & 3 & 4 & 6 \\ \hline & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

المطروح منه

المطروح

$$\therefore (657)_8 - (346)_8 = (311)_8$$

نلاحظ هنا أن كل رقم من المطروح منه أكبر من المطروح ولذلك تمت عملية الطرح كما في الأرقام العشرية تماماً.

العمليات الحسابية في النظام الثماني

الطرح في النظام الثماني *Subtraction in Octal System*

مثال : اجرِ عملية الطرح الآتية: $(732)_8 - (634)_8$

$$
\begin{array}{cccc|l}
 & & 10=8 & & \\
 & 6 & 2 & 10=8 & \\
 & \cancel{7} & \cancel{3} & 2 & \text{المطروح منه} \\
- & 6 & 3 & 4 & \text{المطروح} \\
\hline
 & 0 & 7 & 6 &
\end{array}
$$

$$\therefore (732)_8 - (634)_8 = (76)_8$$

نلاحظ هنا في العمود الأول عند طرح (4) من (2) فإن المطروح أكبر من المطروح منه ولذلك استلفنا (1) من الخانة التالية وهذا الواحد بثمانية تجمع على المطروح منه، ثم تمت عملية الطرح كما في النظام العشري وتكررت هذه العملية أيضاً عند طرح (3) من (2) في العمود الثاني.

طرح الأعداد الثمانية

اطرح العدد $(6357)_8$ من العدد $(43570)_8$ ؟

$$\begin{array}{rr} & \scriptstyle 3\,13\;\;6\,10 \\ & (\cancel{4}\cancel{3}5\cancel{7}0)_8 \\ - & (6357)_8 \\ \hline & (35211)_8 \end{array}$$

اطرح العدد $(123)_8$ من العدد $(260)_8$؟

$$\begin{array}{rr} & (260)_8 \\ - & (123)_8 \\ \hline & (135)_8 \end{array}$$

اطرح العدد $(42361)_8$ من العدد $(273504)_8$ ؟

$$\begin{array}{rr} & \scriptstyle 4\,10 \\ & (273\cancel{5}04)_8 \\ - & (42361)_8 \\ \hline & (231123)_8 \end{array}$$

العمليات الحسابية في النظام السادس عشر
Arithmetic Operations in Hexadecimal System

الجمع في النظام السداسي عشري *Hexadecimal Addition*

الجمع للنظام السداسي عشري تخضع لنفس قواعد الجمع للنظام العشري مع ملاحظة أن حاصل الجمع الزائد عن $(9)_{16}$ بواحد صحيح يعبر عنه بحرف $(A)_{16}$ والزائد عن $(9)_{16}$ باثنين يعبر عنه بحرف $(B)_{16}$ وهكذا حتى $(F)_{16}$.

أما لو جمعنا واحداً صحيحاً على $(F)_{16}$ فإن الناتج يكون $(10)_{16}$ حيث الصفر هو المجموع ويرحل الواحد إلى الخانة التالية ولوجمعنا اثنين على $(F)_{16}$ فإن الناتج يكون $(11)_{16}$ أي أن المجموع هو الواحد ويرحل الواحد إلى الخانة التالية وهكذا.

لتسهيل عملية الجمع في السادس عشر نتبع الخطوات الثالية:

نجمع القيم العشرية المقابلة لارقام الساد عشر بالطريقة العشرية المعتادة مع مرات الاتي:

1- اذا كان ناتج جمع الرقمين اقل من 16 يوضع الناتج بالقيمة المقابلة له في النظام السادس عشر.

2- اذا كان الناتج اكبر من او يساوي 16 نطرح من الناتج 16 ونضع ناتج الطرح بالنظام السادس عشر ولا ننسى إضافت (1) واحد الي الخانة الثالية للخانة الحالية.

3- في حالة جمع اكثر من رقم في خانة واحدة (مثلا خانة الاحاد) نقوم بطرح اكثر من 16 حتى يصل الناتج الي اقل من 16 يوضع مقابلة بالسادس عشر ويرحل عدد مرات طرح 16 الي الخانة الموالية (خانة العشرات). اي اذا طرحت 16 مرتين مثلا يرحل 2 الي الخانة الموالية.

العمليات الحسابية في النظام السادس عشر

الجمع في النظام السداسي عشري *Hexadecimal Addition*

F	**E**	**D**	**C**	**B**	**A**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**+**
F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	**0**
10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	**1**
11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	**2**
12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	**3**
13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	**4**
14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	**5**
15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	**6**
16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	**7**
17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	**8**
18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	**9**
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	**A**
1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	**B**
1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	**C**
1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	**D**
1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	**E**
1E	1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	**F**

العمليات الحسابية في النظام السادس عشر

الجمع في النظام السداسي عشري *Hexadecimal Addition*

مثال : أوجد نتيجة الجمع للعددين التاليين :

$(35AB2)_{16} + (1A675)_{16}$

الحل: نرتب العددين رأسياً أولاً ثم نقوم بعملية الجمع تبعاً للقواعد المبينة في الجدول السابق.

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 1 & 1 & & \\ & 3 & 5 & A & B & 2 \\ + & 1 & A & 6 & 7 & 5 \\ \hline & 5 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}$$

$\therefore (35AB2)_{16} + (1A675)_{16} = (50127)_{16}$

الجمع في النظام السادس عشر

مثال: اجمع العددين $(F1)_{16} + (DB)_{16}$

$$\begin{array}{r} F1 \\ +\ DB \\ \hline 1CC \end{array}$$

مثال: اجمع العددين $(31)_{16} + (29)_{16}$

$$\begin{array}{r} 31 \\ +\ 29 \\ \hline 5A \end{array}$$

مثال: اجمع العددين $(59F)_{16} + (E46)_{16}$

$$\begin{array}{r} {\color{red}1}\ \ \\ 5\ 9\ F \\ +\ E\ 4\ 6 \\ \hline 1\ 3\ E\ 5 \end{array}$$

مثال: اجمع العددين $(8E3)_{16} + (A9F)_{16}$

$$\begin{array}{r} {\color{red}1\ 1}\ \ \\ 8E3 \\ +\ A9F \\ \hline 1382 \end{array}$$

جمع الأعداد في النظام السادس عشر

مثال: أوجد حاصل الجمع للعمليات الثالية في النظام السادس عشر

$$
\begin{array}{rcc}
 & 3 & \\
 & F & B \\
 & E & 9 \\
 & D & E \\
 & A & A \\
+ & B & B \\
\hline
(4 & 2 & 7)_{16}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 5 & F \\
+ & & A & 7 \\
\hline
(2 & 0 & 6)_{16}
\end{array}
$$

العمليات الحسابية في النظام السادس عشر

الطرح في النظام السداسي عشري *Hexadecimal Subtraction*

- إذا كان المطروح منه أكبر من المطروح فتتم كعملية الطرح في الأعداد العشريةمع تحويل الحروف إلى ما يقابلها من أرقام عند الطرح وتحويل باقي الطرح إلى حروف إذا لزم الأمر.
- إذا كان المطروح منه أصغر فيتم استلاف (1) من الخانة التالية وهذا الواحد يعبر عنه بستة عشر تجمع إلى الخانة التي يتم الطرح منها في العدد المطروح منه ثم يتم الطرح كما في الخطوة الأولى وكما يتضح من المثال التالي.

اجرِ عملية الطرح الآتية: $(F2ABD)_{16} - (EF4CE)_{16}$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 10=16 & \\ & E & 10=16 & 9 & A & 10=16 \\ & \cancel{F} & 2 & \cancel{A} & \cancel{B} & D \\ - & E & F & 4 & C & E \\ \hline & & 3 & 5 & E & F \end{array}$$

لاحظ أنه تم حذف الصفر من يمين العدد الصحيح لأنه لا قيمة له.

الطرح في النظام السادس عشر

أوجد حاصل طرح العمليات التالية في نظام السادس عشر؟

$$\begin{array}{r} (FB)_{16} \\ -\ (CA)_{16} \\ \hline (31)_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} E\ F\ F\ F\ 11 \\ 10\ \ 10\ \ 10\ \ \\ (\cancel{F}\ \cancel{0}\ \cancel{0}\ \cancel{0}\ 1)_{16} \\ -\ (A\ FDA\ B)_{16} \\ \hline (4\ 0\ 2\ 5\ 6)_{16} \end{array}$$

أوجد حاصل طرح العدد 16(AFA83B) من العدد 16(BB8201) ؟

$$\begin{array}{r} F\ \ \ \ \ \ \\ A\ 1A\ 17\ 11\ \cancel{1}0\ 11 \\ (\cancel{B}\ \cancel{B}\ \cancel{8}\ \cancel{2}\ 0\ 1)_{16} \\ -\ (A\ F\ A\ 8\ 3\ B)_{16} \\ \hline (0\ B\ D\ 9\ C\ 6)_{16} \end{array}$$

تمثيل الاعداد ذات الاشارة

Representation of)

(Signed Numbers

تمثيل الأعداد ذات الإشارة *Representation of Signed Numbers*

إن النظم الرقمية التي تستخدم في الحاسوب يجب أن تكون لديها القدرة على التعامل مع الأعداد الموجبة والسالبة على حد سواء ونتيجة لذلك فإن الخانة الثنائية ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد الثنائي تمثل إشارة العدد، حيث يوضع في هذه الخانة (0) للعدد الموجب، ويوضع بها (1) للعدد السالب. فمثلاً في حالة العدد الثنائي المكون من ثماني خانات ثنائية فإن الخانة الثنائية ذات القمية العليا للعدد والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل إشارة العدد (*Sign Bit*) وبقية الخانات تمثل قيمة العدد (*Magnitude*).

وهناك ثلاثة طرق لتمثيل الأعداد ذات الإشارة في النظام الثنائي وهي: إشارة المقدار (*Sign-Magnitude*) والمتمم الأحادي (*1'sComplement*) والمتمم الثنائي (*2's Complement*).

تمثيل الاعداد السالبة

تمثل الاعداد السالبة باحد الطرق التالية:

1 – نظام مقدار اشارة Sign Magnitude

2 – المتمم الاول 1st complement

3- المتمم الثنائي 2nd complement

نظام إشارة المقدار (*Sign-Magnitude System*)

عند تمثيل العدد الثنائي بنظام إشارة المقدار، فإن الخانة الثنائية (*bit*) ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل خانة الإشارة وبقية الخانات تمثل مقدار العدد. حيث أن الخانات التي تمثل مقدار العدد تظل كما هي سواء أكان العدد سالباً أم موجباً أما في خانة الإشارة فإنه يتم وضع صفر إذا كان العدد موجباً أو واحد إذا كان العدد سالباً. فمثلاً لتمثيل العدد العشري (+23) بنظام إشارة المقدار فإننا نكتب العدد كالتالي:

$$\underset{\text{Sign Bit}}{0}\ \underbrace{0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1}_{\text{Magnitude Bits}}$$

خانة الإشارة

(Sign Bit)

خانات المقدار

(Magnitude Bits)

ولتمثيل العدد العشري (23–) فإننا نكتب ما يلي:

$$\underline{1}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$$

حيث نلاحظ أن الفرق الوحيد بين العددين (+23) , (23–) هو في خانة الإشارة فقط.

المتمم الأحادي والثنائي للأعداد الثنائية

One's and Two's Complements of Binary Numbers

إن أهمية المتممين الأحادي والثنائي يكمن في سماحهما لنا بتمثيل الأعداد الثنائية السالبة. والمتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في أجهزة الحاسوب للتعامل مع الأعداد السالبة. وللحصول على المتمم الأحادي لأي عدد ثنائي فإننا ببساطة نقوم بتغيير كل (1) إلى (0) ونغير كل (0) إلى (1) في العدد الثنائي كما يلي:

X = 1010
المتمم الأول لـ X = 0101

X = 1011001
المتمم الأول لـ X = 0100110

X = 0001111
المتمم الأول لـ X = 1110000

العدد الثنائي ← 1 0 1 1 0 0 1 1

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

المتمم الأحادي ← 0 1 0 0 1 1 0 0

أما المتمم الثنائي للعدد الثنائي فإنه يمكن ايجاده بطريقتين كما يلي:

الطريقة الأولى: نقوم بإيجاد المتمم الأحادي كما سبق. ثم بعد ذلك نقوم بإضافة العدد (1) إلى المتمم الأحادي الذي حصلنا علية وبذلك نحصل على المتمم الثنائي أي أن:

المتمم الثنائي = المتمم الأحادي + 1

ومثال ذلك نفترض أننا نريد الحصول على المتمم الثنائي للعدد الثنائي 10110011. حيث يجب أولاً الحصول على المتمم الأحادي ثم نجمع عليه (1) لنحصل على المتمم الثنائي للعدد.

العدد الثنائي ← 1 0 1 1 0 0 1 1

المتمم الأحادي ← 0 1 0 0 1 1 0 0

نضيف (1) ← + 1

المتمم الثنائي 0 1 0 0 1 1 0 1

الطريقة الثانية: نقوم بالنظر للخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا (LSB) من أقصى اليمين للعدد الثنائي فإن كانت تساوي (0) نقوم بكتابته ونستمر في ذلك وبمجرد أن نقابل أول خانة ثنائية تساوي واحداً عند ذلك نقوم بكتابة الواحد الذي قابلناه ثم بعد ذلك نقوم بقلب الصفر واحد اوالواحد صفراً وهكذا

Ex: convert to the 2nd complement

Binary Number

0 1 0 0 1 1 0 0

2nd complement

1 0 1 1 0 1 0 0

مثال: حويل العدد الثنائي $(10101101)_2$ إلى المتمم الثنائي:

المتمم الأحادي

العدد الثنائي ← 1 0 1 0 1 1 0 1

المتمم الثنائي ← 0 1 0 1 0 0 1 1

نظام المتمم الأحادي (*1's Complement System*)

الأعداد الموجبة في نظام المتمم الأحادي تمثل بنفس الطريقة التي تمت في تمثيل الأعداد الموجبة بنظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فيتم الحصول عليها عن طريق إيجاد المتمم الأحادي للعدد الموجب. وكمثال على ذلك العدد العشري (-23) يمكن تمثيله عن طريق ايجاد المتمم الأحادي للعدد كما يلي :

العدد $(+23)$ ← $\underline{0}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$

العدد (-23) ← $\underline{1}\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$

حيث إن الإشارة في كلا العددين تمثلها الخانة الأخيرة ذات القيمة العليا الموجودة في أقصى يسار العددين.

نظام المتمم الثنائي (*2's Complement*)

كما في نظام المتمم الأحادي فإن الأعداد الموجبة في نظام المتمم الثنائي تمثل بنفس الطريقة كما في نظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فنحصل عليها عن طريق إيجاد المتمم الثنائي للعدد الموجب، فمثلاً العدد العشري (-23) يمكن تمثيله عن طريق ايجاد المتمم الثنائي للعدد $(+23)$ كما يلي:

العدد $(+23)$ ← $\underline{0}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$

العدد (-23) ← $\underline{1}\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$

وكما ذكرنا سابقاً فإن نظام المتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في النظم الحاسوبية.

2nd complement امثله على المتمم الثاني

مثال

أوجد المتمم الثاني للأعداد الثنائية التالية :

① X = 0110

المتمم الثاني لـ X = 1010

② X = 1001

المتمم الثاني لـ X = 0111

③ X = 1000

المتمم الثاني لـ X = 1000

④ X = 101100

المتمم الثاني لـ X = 010100

⑤ X = 1101100

المتمم الثاني لـ X = 0010100

الطرح باستخدام المتممات

في كثير من الحاسبات الالكترونية تكون عملية الطرح مختلفة عن الطريقة العادية.

• اولا: باستخدام المتمم الاول:

القيام بعملية الطرح M نتتبع الخطوات التالية:

$$\begin{array}{r} M \\ -\ N \\ \hline \end{array}$$

1- نوجد المتمم الاول ل N
2- نجمع M والمتمم الاول ل N
3- إذا ظهر مَرحل نهائي (carry) نضيف 1 الي الرقم الاقل معنوية (مرحل دائري).
4- إذا لم يظهر مرحل نهائي, نأخذ المتمم الاول للعدد الناتج في الخطوة 2 ونضع امامه علامة سالب.

مثال
اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الأول
A = 101
B = 011 -

$$\begin{array}{rl} 101 & = A \\ +\ 100 & = B \text{ المتمم الأول لـ} \\ \hline 1\ 001 & \\ 1 & + \\ \hline 010 & \end{array}$$

الطرح باستخدام المتممات

مثـــــال : اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الاول A - B:

A= 1010100

- B = 1000011

نوجد المتمم الاول للعدد B وهو 0111100 ثم نجمعه مع العدد A

$$\begin{array}{r} 1010100 \\ +\ 0111100 \\ \hline 10010000 \\ +\ \ \ \ \ \ \ \ 1 \\ \hline \end{array}$$

يوجد مرحل نهائي لذلك سنضيفه إلى الرقم الاقل معنوية وستكون النتيجة النهائية هي :

A – B = 0010001

الطرح باستخدام المتممات

مثـــــال : اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الاول A - B :

$A = 101$

$- \quad B = 1001$

نوجد المتمم الاول للعدد B وهو 0110 ثم نجمعه مع العدد A

$$
\begin{array}{r}
0101 \\
+\ 0110 \\
\hline
1011
\end{array}
$$

لم يظهر مرحل نهائي لذلك نوجد المتمم الاول للناتج 1011 وهـــــو

0100 ونضع علامة سالب $A - B = -0100$

الطرح باستخدام المتمم الاول

اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الأول (A - B)

A= 1000011

B= 1010100

$$
\begin{array}{rl}
1000011 & = A \\
+\ 0101011 & = \text{المتمم الأول لـ} B \\
\hline
1101110 &
\end{array}
$$

لم يظهر مرحل نهائي

∴ نوجد المتمم الأول للناتج 1101110 = 0010001

A-B= - 0010001

الطرح باستخدام المتممات

ثانيا: الطرح باستخدام المتمم الثاني:

القيام بعملية الطرح $M - N$ باستخدام المتمم الثاني نتتبع الخطوات التالية:

$$\begin{array}{r} M \\ -\ N \\ \hline \end{array}$$

1- نوجد المتمم الثاني ل N

2- نجمع M والمتمم الثاني ل N

3- إذا ظهر مُرحل نهائي (carry) يتم اهماله (اهمال المرحل) والباقي يكون هو ناتج الطرح.

4- إذا لم يظهر مرحل نهائي, نأخذ المتمم الثاني للعدد الناتج في الخطوة 2 ونضع امامه علامة سالب.

مثال ؛ . : اطرح من المقدار 00001110 المقدار 11111010 باستخدام المتمم الثنائي للأعداد.

الحل: في هذه الحالة فإن:

$$14-(-6)=14+6=20$$

يمكن ترتيب العددين تحت بعضهما كما يلي:

$$\begin{array}{rl} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0 & \text{المطروح منه } (+14) \\ +\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0 & \text{المتمم الثنائي للمطروح } (+6) \\ \hline 0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0 & \text{الفرق } (+20) \end{array}$$

مثـــال : اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الثاني A – B :

A= 1000 - B = 0011

نوجد المتمم الثاني للمطروح B وهو 1101 ثم نجمعه مع العدد A

$$\begin{array}{r} 1000 \\ +\ 1101 \\ \hline 10101 \end{array}$$

يهمل المرحل

يوجد مرحل نهـائي لذلك سيهمـل ويكون ناتج الطرح A – B = 0101

مثـــــال : اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الثاني **A – B** :

A= 1010100 - B = 1000011

نوجد المتمم الثاني للمطروح B وهو 0111101 ثم نجمعه مع العدد A

$$
\begin{array}{r}
1010100 \\
+\ 0111101 \\
\hline
10010001
\end{array}
$$

يهمل المرحل

يوجد مرحل نهـائي لذلك سيهمـل ويكون ناتج الطرح **A – B = 0010001**

مثـــــال : اطرح العددين التاليين باستخدام المتمم الثاني **A – B** :

A= 1000011 - B = 1010100

نوجد المتمم الثاني للمطروح B وهو 0101100 ثم نجمعه مع العدد A

$$
\begin{array}{r}
1000011 \\
+\ 0101100 \\
\hline
1101111
\end{array}
$$

لم يظهر مرحل نهائي لذلك : نوجد المتمم الثاني للناتج ونضع علامة سالب النتيجة ستكون

A – B = - 0010001

مثال (   ): اجرِ عملية الطرح الآتية باستخدام نظام المتمم الثنائي:

$$(00001000)_2 - (00000100)_2$$

الحل: في هذه الحالة فإن:

$$8 - 4 = 8 + (-4) = 4$$

وبالتالي نجد أن:

$0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$	المطروح منه $(+8)$
$+\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$	المتمم الثنائي للمطروح (-4)
$\cancel{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$	الفرق $(+4)$

يهمل الحامل
(Discard carry)

مثال (   ): اجرِ علمية الطرح الآتية باستخدام المتمم الثنائي.

$$(11100111)_2 - (00001001)_2$$

الحل: في هذه الحالة فإن:

$$-25 - (+9) = -25 - 9 = -34$$

وبالتالي فإنه:

$1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$	المطروح منه (-25)
$+\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$	المتمم الثنائي للمطروح (-9)
$\cancel{1}\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0$	الفرق (-34)

يهمل الحامل
(Discard carry)

النظام العشري المشفر بالثنائي

Binary Coded Decimal (BCD)

النظام العشري المشفر بالثنائي Binary Coded Decimal (BCD)

النظام العشري	نظام BCD			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

- يتم تمثيل الاعداد في الحواسيب الرقمية اما بالثنائي او بالعشري المشفر بالثنائي (BCD)
- في الجدول التالي يتم تشفير الارقام العشرية ثنائياً ونلاحظ ان كل رقم عشري يتمثل بأربعة بتات في BCD.

التحويل من النظام العشري الي BCD:

كل رقم عشري يمثل باربع بت bit في نظام BCD.

$$(01100111)_{BCD} = (67)_{10}$$

$$(100101010000)_{BCD} = (950)_{10}$$

النظام العشري المشفر ثنائياً BCD
BINARY CODED DECIMAL

هو نظام يقوم بترميز جميع الارقام العشرية من 0-إلـــى 9 حيث كل رقم عشري يكتب على شكل رقم ثنائي مؤلف من 4 خانات ويدعى الثنائي المرقم عشرياً..

- **ملاحظات هامة حول نظام الـــ BCD**

1. إن نظام BCD يتعامل مع كل خانة لوحدها.
2. إن كل خانة في نظام BCD هي عبارة عن 4 خانات ثنائية.
3. إن نظام BCDهي عبارة عن أعداد من 0 إلى 9 وأكبر من 9 هو شيفرة خاطئة تحتاج إلى رقم ستة للتصحيح (0110)..

التحويل من النظام العشري إلى BCD

كل رقم عشري يمثل بأربعة بتات في الـــ BCD

مثال :

حول الأعداد التالية من النظام العشري إلى ال BCD

$$(0011\ \ 1000)_{BCD} = (38)_{10}$$

$$(0001\ \ 0000)_{BCD} = (10)_{10}$$

$$(0011\ \ 1001\ \ 0110)_{BCD} = (396)_{10}$$

$$(0001\ \ 0111\ \ 0110\ \ 0101)_{BCD} = (1765)_{10}$$

التحويل من الــ BCD إلى النظام العشري

مثال :

حول الأعداد التالية من الــ BCD إلى النظام العشري

$(185)_{10} = (0001 \quad 1000 \quad 0101)_{BCD}$

$(983)_{10} = (1001 \quad 1000 \quad 0011)_{BCD}$

$(260)_{10} = (0010 \quad 0110 \quad 0000)_{BCD}$

مثال: حول الاعداد الثالية من BCD الي العشري.

$(38)_{10} = (0011\ 1000)_{BCD}$

$(946)_{10} = (1001\ 0100\ 0110)_{BCD}$

$(120)_{10} = (0001\ 0010\ 0000)_{BCD}$

$(75)_{10} = (0111\ 0101)_{BCD}$

الجمع في نظام الـــ BCD

خطوات الجمع في نظام ال BCD

- نقوم بجمع الارقام المشفرة BCD كما لو كانت ارقام ثنائية.
- إذا كان ناتج الجمع الثنائي اقل من 1010 وبدون حمل carry, يكون ناتج الجمع صحيح.
- إذا كان ناتج الجمع الثنائي اكبر من او يساوي10 = (1010), يكون ناتج الجمع غير صحيح. وبإضافة 6 = (0110) الي ناتج الجمع الثنائي يحول الناتج الي قيمة صحيحة.

لذلك فإن نظام ال BCD يستوجب التعديل العشري في الجمع في الحالات التالية:-

- الحصول على رمز BCD غير سليم أي لا يوجد ما يقابله في النظام العشري من الارقام من 0 إلى 9.
- وجود رقم محمـــــول من الخانة الرابعة إلى الخانة الخــامسة أو من الخانة الثــامنة إلى الخانة التــاسعة و هكذا......

مثـــــال : أوجد ناتج الجمع في نظام الــ BCD

$A = (27)_{10}$ $B = (52)_{10}$

$$
\begin{array}{r}
(0010\ \ 0111)_{BCD} \\
+\ (0101\ \ 0010)_{BCD} \\
\hline
(0111\ \ 1001)_{BCD}
\end{array}
$$

الناتج صحيح ولا يحتاج للتصحيح

$$
\begin{array}{r}
8 \\
+9 \\
\hline
17
\end{array}
$$

Carry للخانة الخامسة لهذا يحتاج الي تصحيح

$$
\begin{array}{r}
(1000)_{BCD} \\
+\ (1001)_{BCD} \\
\hline
10001 \\
+\ 0110 \\
\hline
(0001\ \ 0111\ )_{BCD}
\end{array}
$$

الناتج أكبر من 9 لذلك سنضيف الرقم 6

مثـــــال : أوجد ناتج الجمع في نظام الــ BCD

$X=(101000)_{BCD}$, $Y=(11001)_{BCD}$

$$\begin{array}{r} 28 \\ +19 \\ \hline 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (0010\ \ 1000)_{BCD} \\ + & (0001\ \ 1001)_{BCD} \\ \hline & 0100\ 0001 \\ + & 0110 \\ \hline \end{array}$$

$(47)_{10}=(0100\ \ 0111)_{BCD}$

الناتج غير صحيح في حالة 19+28 لذلك سنضيف العدد 6

$$\begin{array}{r} 22 \\ +11 \\ \hline 33 \end{array}$$

$X=(100010)_{BCD}$, $Y=(10001)_{BCD}$

$$\begin{array}{rr} & (0010\ \ 0010)_{BCD} \\ + & (0001\ \ 0001)_{BCD} \\ \hline & (\ 0011\ \ 0011\ )_{BCD} \end{array}$$

الناتج صحيح ولا يحتاج للتصحيح

مثـــــال : أوجد ناتج الجمع في نظام الــ BCD

$$
\begin{array}{r}
9 \\
+5 \\
+8 \\
\hline
22
\end{array}
$$

$,X=(1001)_{BCD}\ ,\ Y=(0101\ )_{BCD}\ ,C=(1000)_{BCD}$

$$
\begin{array}{rr}
X= & (1001)_{BCD} \\
+\ Y= & (0101)_{BCD} \\
\hline
 & (1110)_{BCD} \\
+ & 0110 \\
\hline
 & 10100
\end{array}
$$

الناتج أكبر من 9 لذلك نضيف رقم 6

$$
\begin{array}{rr}
0001 & 0100 \\
+\quad C= & 1000 \\
\hline
0001 & 1100 \\
+ & 0110 \\
\hline
0010 & 0010
\end{array}
$$

الناتج أكبر من 9 لذلك نضيف رقم 6

أوجد حاصل جمع العددين في نظام ال BCD ؟ ؟ ؟

$$\begin{array}{r} 184 \\ +576 \\ \hline 760 \end{array}$$

$$A = (0001\ 1000\ 0100)_{BCD}$$

$$B = (0101\ 0111\ 0110)_{BCD}$$

يوجد مرحل إلى الرقم الثالي (الخانة الخامسة)

$$\begin{array}{rrrr} & & 1 & \\ & 0001 & 1000 & 0100 \\ + & 0101 & 0111 & 0110 \\ \hline & 0111 & \cancel{1}0000 & 1010 \\ + & & 0110 & 0110 \\ \hline & & 0110 & 0000 \end{array}$$

الناتج أكبر من 9 لذلك نضيف رقم 6

الحل هو:

$$A+B = (0111\ \ 0110\ \ 0000)_{BCD}$$