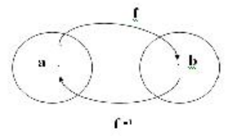
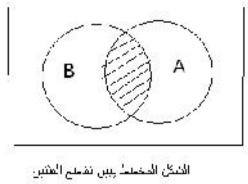
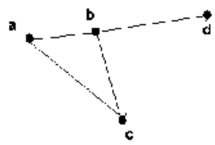
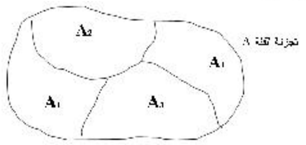
التراكيب المنفصلة

Discrete Structures









إعداد

د. عمر محمد زرتي

أستاذ بقسم الحاسوب

كلية العلوم، جامعة الفاتح، طرابلس

تمهيد

تعتبر مادة (التراكيب المنفصلة) أو ما يعرف باللغة الانجليزية ب (discrete structures) من المواد الأساسية في علم الحاسوب، فهي مادة متفق على أهمية وجودها في أي برنامج دراسي يؤدي إلى منح شهادة جامعية في علم الحاسوب، في معظم جامعات العالم إن لم يكن جميعها.

والحقيقة أنه يوجد أكثر من هدف من تدريس (التراكيب المنفصلة). ومن أهم هذه الأهداف أنها تهيء لطالب علم الحاسوب الأسس الرياضية المتينة التي يحتاج إليها عند دراسة المواد المتقدمة في علم الحاسوب مثل (تراكيب البيانات) و(خوارزميات الحاسوب)،َاضافة الى أنها تعلمهم كيف يفكرون بطريقة رياضية منطقية.

ونظرا للنقص الشديد في المراجع العربية في هذا الموضوع ، فقد رأيت أنه من الضروري إعداد هذا الكتاب لمساعدة الأستاذ والطالب في العملية التعليمية لمادة (التركيب المنفصلة).

وهنا تواجه اعداد الكتاب مشكلة المواضيع التي يجب أن نركز عليها في هذه المادة، والسبب هو أن مجال هذه المادة واسع ويحتوي على العديد من المواضيع، وهناك اختلافات في وجهات نظر المختصين في هذا المجال. ولكني بعد الاطلاع على عدد من مناهج الجامعات العالمية، وبالخصوص كتاب كنث روزن Kenneth Rosen(وهو مرجع أساسي لهذا الكتاب):

Discrete Mathematics and Its Applications

وجدت أنه من الأنسب أن أتبع التسلسل التالي:

1. علم المنطق
2. الفئات
3. الدوال
4. المتواليات
5. الاستنتاج الرياضي
6. طرق العد

7. العلاقات
8. الأشكال
9. الأشجار

وأعتقد أن في هذا التسلسل ما يكفي أو يزيد عن الوعاء الزمني لفصل دراسي كامل (حوالي 14 أسبوعا بواقع ساعتين نظري وساعتين عملي).
والدروس العملية في هذه المادة مهمة ، فهي تعمق فهم الطالب للدروس النظرية، وتعطيه خبرة أكثر في البرمجة بصفته متخصصا في علم الحاسوب. وفي هذه الدروس يكتب الطالب برامج بلغة باسكال أو سي أو غيرها مثل:

- برامج تطبع جداول الصدق للمؤثرات المنطقية.
- برامج تحسب العمليات على الفئات مثل التقاطع والاتحاد وغير ذلك.
- برامج لحساب الدوال
- برامج تحسب مجموع متوالية مع المقارنة بالقانون
- برامج لحساب التوافيق والتباديل
- برامج لاختبار نوع العلاقة

ويتميز الكتاب بعدد كبير نسبيا من التمارين مع حل كامل لها في نهاية الكتاب.

أملي أن يجد طلاب هذا المقرر في هذا الكتاب معينا لهم في دراستهم للتراكيب المنفصلة، مستفيدين من تعدد الأمثلة والتمارين والاختبارات المحلولة. والله نسأل التوفيق للجميع.

د. عمر زرتي
طرابلس - ليبيا

الفهرس

الباب الأول : المنطق Logic

الباب الثاني : الفـئـــات Sets

الباب الثالث: الدوال **Functions**

الباب الرابع: المتواليات **Sequences**

الباب الخامس: الاستنتاج الرياضي
Mathematical Induction

الباب السادس : طرق العد Counting

الباب السابع : العلاقات Relations

الباب الثامن : الأشكال Graphs

الباب التاسع : الأشجار Trees

ملحق : إجابات التمارين

الباب الأ

1

الباب الأول

المنطق Logic

إذا حاول أحد أن يقنعك بشيء ما أو يبرهن نظرية ما فإنه يستعمل المنطق للوصول إلى هدفه. ولكن كيف تعرف أن أسلوبه "منطقي" وأنه يتبع قواعد المنطق التي تبين كيف يمكن استنتاج الخلاصة من الفرضيات بطريقة سليمة؟
هذا ما تفيدنا به دراسة هذا الباب.

1.1 الفرضية المنطقية proposition

الفرضية (أو العبارة المنطقية) هي جملة مفيدة قابلة لأن تكون إما صائبة TRUE أو خاطئة FALSE .

مثال(1): تعتبر الجمل التالية عبارات منطقية (فرضيات):

a) القاهرة عاصمة مصر.

b) $1 + 1 = 2$

c) القمر أكبر من الشمس.

d) المثلث له أربعة أضلاع.

e) اليوم عيد ميلادي.

الفرضية الأولى والثانية صائبتان، أي أن قيمة كل منهما تساوي True ، أما الفرضية الثالثة والرابعة فهي خاطئة أي أن قيمتها False. أما الفرضية الخامسة فيمكن أن تكون صائبة أو خاطئة بناء على متى تم قولها.

مثال(2) : هل العبارات التالية تعتبر فرضية proposition ؟

a) ما اسمك ؟

b) اقرأ هذا الكتاب.

c) كلية العلوم.

هذه العبارات لاتعتبر فرضيات propositions لأنها ليست جمل مفيدة . بصورة عامة فإن جمل الاستفهام والتعجب والأمر لاتعتبر فرضيات منطقية.

1.2 المتغيرات المنطقية Logical Variables

المتغير المنطقي هو متغير قيمته إما True أو False، ونستخدمه كرمز للعبارة المنطقية باستخدام حرف واحد ، وعادة ما نستخدم الأحرف:

$$p , q , r , s , ..$$

لهذا الغرض .

كما تستخدم الاختصار

T = True
F = False

كقيم لهذه المتغيرات.

وبستخدم المتغير المنطقي في بعض لغات البرمجة مثل لغة باسكال حيث يسمى متغير بوولي Boolean variable نسبة إلى العالم الرياضي جورج بوول George Boole مؤسس علم الجبر المنطقي.

مثال : ما هي قيم المتغيرات المنطقية p و q في الجمل التالية بلغة باسكال :

p := (2>1) ;
q : = (3=4) ;

الإجابة هي أن المتغير المنطقي p تتعين له قيمة True أما المتغير المنطقي q فتتعين له القيمة False .

1.3 المؤثرات المنطقية Logical Operators

استخدام المؤثرات المنطقية logical operators يساعدنا في تبسيط كتابة الجمل المنطقية المعقدة compound propositions. في هذا الباب سوف ندرس المؤثرات المنطقية التالية:

- مؤثر النفي negation operator
- مؤثر الدمج conjunction operator
- مؤثر الفصل disjunction operator

- مؤثر الاستنباط implication operator
- مؤثر الاستباط المزدوج bidirectional operator

1− **مؤثر النفي** negation operator (يسمى ايضا مؤثر العكس)**:** هو مؤثر ينفي الجملة المنطقية p (ونرمز له ¬p وأحيانا نستخدم الرمز p ~ أو NOT p بنفس المعنى) وهو **مؤثر أحادي** unary operator لأنه يؤثر على العبارة المنطقية الواحدة فيغير قيمتها من T **إلى** F **أو من** F **إلى** T.

ويمكن تلخيص ذلك فيما يعرف **بجدول الصواب** **Truth Table**.

لكل عملية منطقية يوجد جدول صواب يبين جميع القيم التي يمكن أن تعين للمتغير وما يقابل ذلك نتيجة هذه العملية. ومنه نستطيع حساب القيمة المنطقية لعبارة مركبة من عبارات بسيطة .

جدول الصواب للعبارة ¬p

p	¬p
T F	F T

2− المؤثر AND (مؤثر دمج conjunction operator)

كمثال آخر للمؤثرات المنطقية ندرس المؤثر AND (يسمى مؤثر دمج أو وصل conjunction operator أو رابط دمج conjunction connective) وهو مؤثر ثنائي binary operator لأن هذا المؤثر

المنطقـي (ونرمـز لـه بـالرمز $\wedge$) يـؤثر علـى فرضـيتين p ، q كمـا يبـين جـدول الصواب التالي:

جدول صواب AND

p	q	p^q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

حيث نلاحظ في هذا الجدول أن p^q لا تكون صائبة إلا إذا كان كلا من العبارة p و q صائبة.

3- المؤثر OR (مؤثر **الفصل** Disjunction operator)

المؤثر الثالث الذي ندرسه في هذا الباب هو المؤثر OR بمعنـى أو (ويسمى مـؤثر **الفـصل** Disjunction operator أو رابـط الفـصل disjunction connective) ونرمز لهذا المؤثر المنطقي بالرمز $\vee$ وهو يؤثر على العبارتين المنطقيتين p ، q كما يلي :

جدول OR

p	q	$p \lor q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

حيث نلاحظ في هذا الجدول أن ناتج فصل عبارتين دائما True إلا إذا كان كلا العبارتان False.

أمثلة :

اكتب الجمل التالية باستخدام المتغيرات المنطقية:

1. اليوم جمعة والسماء صافية .
2. عادل مجتهد وذكي .
3. سوف يأتي أحمد عاجلا أو آجلا .

الحل:

-1 " اليوم جمعة " = p

"السماء صافية" = q

"اليوم جمعة والسماء صافية" = $p \land q$

2- "عادل مجتهد" = p

"عادل ذكي " = q

"عادل مجتهد وذكي " = $p \wedge q$

3- "سوف يأتي أحمد عاجلا " = p

"سوف يأتي أحمد آجلا" = q

"سوف يأتي أحمد عاجلا أو آجلا" = $p \vee q$

<u>ملاحظة :</u>

استخدام المؤثر $\vee$ يعني أن احدى العبارتين p ، q يكفي أن تكون صائبة TRUE لكي يكون الناتج صائبا TRUE . وإذا كان كلاهما صائبا TRUE فان الناتج يكون أيضا صائبا TRUE .

في الحقيقة يوجد نوعان من المؤثر OR هما :

1- "أو" الشاملة Inclusive OR

2- "أو" القاصرة Exclusive OR

الأول هو OR أما الثاني فيرمز له عادة بالرمز $\oplus$ أو XOR (في لغات البرمجة).

في النوع الشامل (inclusive disjunction أي OR) إذا كان p أو q أو كلاهما TRUE فان $p \vee q$ تكون TRUE (ونرمز لها $\vee$).

وأما في النوع القاصر Exclusive disjunction (أي ⊕) إذا كان p أو q (ولكن ليس كلاهما) TRUE فان p ⊕ q تكون TRUE ، وإلا فإنها FALSE وذلك حسب الجدول التالي :

Exclusive OR (XOR)

p	q	p ⊕ q
T	T	**F**
T	F	T
F	T	T
F	F	F

عندما نستعمل "أو" في لغتنا العادية، عادة ما تعرف هل المقصود أو القاصرة أم أو الشاملة من السياق.

مثال : عندما تقول "سأذهب غدا لزيارة صديقي أو سأبقى في البيت للمذاكرة" فإنك تقصد أو القاصرة لأنك ستعمل أحد الأمرين وليس كلاهما.

وعندما يقول لك مدير الشركة التي تتقد اليها بطلب عمل " نريد خبرة 3 سنوات أو يزيد عمرك عن 25 سنة." فإنه يقصد أو الشاملة بمعنى أن أحد الشرطين أو كلاهما كافي.

وعندما يقول لك صاحب المطعم : "الشربة أو السلطة مجانا" ، هل يقصد أو الشاملة أم القاصرة ؟

طبعا هو يقصد " إما الشربة أو السلطة مجانا وليس كلاهما". أي أن "أو" هنا هي القاصرة exclusive وليس الشاملة inclusive.

<u>ملاحظة :</u> بصورة عامة في اللغة العربية عندما نستخدم "أو" فإننا نقصد عادة أو الشاملة inclusive ، مثل قولنا (إذا كنت مجتهدا أو ذكيا سوف تنجح) ، ولكن أحيانا نستخدم "أو" القاصرة (مثل قولنا تستطيع أن تذهب إلى السوق مشيا على الأقدام أو تركب السيارة) . وعندما تقول (إذا أمطرت أو كان الجو باردا فلن نذهب للنزهة) فإنك تقصد أحد الحالتين أو كلاهما (المطر وبرودة الجو) سوف يمنعك من النزهة .

4- المؤثر التضميني: implication

يسمى أيضا مؤثر الاستلزام أو المؤثر الاستنتاطي ونرمز له بالرمز → ويستخدم في عمليات الاستنباط ، أي أن :

$$p \rightarrow q$$

يعني أن q نستنبطها من p. أو بعبارة أخرى:

p تتضمن q (p implies q)

ويمكن تعريف هذا المؤثر من الجدول التالي Implication Truth Table :

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ملاحظة :

في العبارة q → p تسمى p بالفرضية hypothesis و q بالنتيجة .conclusion

ويمكن التعبير عن q → p لغويا بإحدى الطرق التالية :

باللغة العربية	باللغة الانجليزية
إذا p كانت TRUE فان q أيضا TRUE	1. If p then q
p تعني q	2. p implies q
الشرط p كافي لتحقيق q	3. p is sufficient condition for q
q تكون TRUE كلما كانت p TRUE	4. q whenever p
q شرط ضروري لتحقق p	5. q is necessary for p

لاحظ أن $p \to q$ تكافئ $\neg q \to \neg p$ (ويمكن اثبات ذلك من جدول الصواب) لهذا السبب فإن q هي شرط ضروري لتحقق p كما في الصف الأخير من الجدول.

لاحظ في جدول الصواب للمؤثر التضميني أن الناتج دائما true إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون p=false و q=true فإن الناتج في هذه الحالة يكون false. أما عندما تكون q=false فإن الناتج يكون true مهما كانت قيمة p ، ويمكن تفسير ذلك كما يلي:
إذا قلت (إذا نجحت سوف أعمل لكم حفلة) فإنك لم تذكر ماذا ستعمل في حالة أنك لم تنجح. ربما تعمل حفلة أو لاتعمل. في كلتا الحالتين لم تخلف وعدك وتكون الجملة التي قلتها صحيحة.

مثال : بناء على القاعدة : "إذا كنت ليبيّا فأنت إفريقي"
هل يمكن أن تكون إفريقيا إذا كنت ليس ليبيّا؟
الإجابة نعم فأنت يمكن أن تكون مصريا مثلا.
هل يمكن أن تكون لست ليبيّا ولست إفريقيا؟
الإجابة أيضا نعم فقد تكون هنديا مثلا.
هذه الاحتمالات كلها واردة ، ولكن هل يمكن أن تكون ليبيّا ولست إفريقيا؟
الإجابة طبقا للقاعدة المذكورة "لا" .

أي أننا إذا وضعنا

q = "أحمد إفريقي" ، p = "أحمد ليبي"

فانه يوجد لدينا 4 احتمالات :

1- $p = T$, $q = T$, $(p \rightarrow q) = T$
2- $p = F$, $q = T$, $(p \rightarrow q) = T$
3- $p = F$, $q = F$, $(p \rightarrow q) = T$
4- $p = T$, $q = F$, $(p \rightarrow q) = F$

حيث نلاحظ أن الاستنباط دائما True إلا في الحالة الأخيرة التي فيها

$p = T$, $q = F$, $(p \rightarrow q) = F$.

أي لا يمكن أن تكون الفرضية صائبة والنتيجة خاطئة.

مثال : في لغة باسكال عندما نكتب

If p then s

فإننا نطلب من الحاسوب أن ينفذ الجملة s عندما تكون p=True. فمثلا بعد تنفيذ الجمل التالية :

```
x:=0 ;
If  (2+2 = 4)  then  x:= x+1;
```

ماذا ستكون قيمة x ؟

بما أن القيمة المنطقية للعبارة 4 = 2+2 هي TRUE فان الجملة

x:= x+1;

يتم تنفيذها بإضافة 1 إلى x (أي باضافة 1 الى 0) ويكون الناتج

x =0+1 =1

5-مؤثر الاستباط المزدوج Bidirectional Proposition

نرمز لهذا المؤثر بالسهم ذي الاتجاهين على النحو :

$$p \leftrightarrow q$$

وهو يعني

p صائبة إذا وفقط إذا q صائبة.

وأيضا

p خاطئة إذا وفقط إذا q خاطئة.

باختصار فإن المؤثر $\leftrightarrow$ يعني: إذا وفقط إذا if and only if .

بتعبير آخر نقول أن p هو شرط ضروري وكافي للشرط q .

p is a necessary and sufficient condition for q.

والجدول التالي يبين القيم المنطقية للاستنباط المزدوج :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

لاحظ أن :

$p \leftrightarrow q$ تكافئ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

مثال : اكتب الجملة التالية :

" تكون x^2 سالبة إذا وفقط إذا كانت x عددا تخيليا"

باستخدام المتغيرات المنطقية.

الحل :

دع

p = " سالبة x^2 "

q = " عدد تخيلي x "

بذلك تكون الجملة المنطقية المطلوبة هي

$p \leftrightarrow q$

مثال : اكتب الجملة التالية بالرموز :

"يعتبر الطالب ناجحا في المقرر فقط إذا تحصل على درجة 50 أو أكثر"

الحل : دع

p = " يعتبر الطالب ناجحا"

q = " تحصل الطالب على درجة 50"

r = " تحصل الطالب على درجة أكبر من 50"

وبالتالي فان الجملة المذكورة تكافئ الآتي :

$p \leftrightarrow q \vee r$

1.4 العبارات المركبة Compound Propositions

في العبارة المركبة يوجد لدينا أكثر من مؤثر منطقي. ولذلك من المهم أن نعرف أي مؤثر يتم تنفيذه قبل الآخر. مثلا إذا صادفتنا عبارة مركبة مثل :

$$\neg p \wedge q$$

فهل هي تعني $(\neg p) \wedge q$

أم تعني $\neg(p \wedge q)$

الإجابة : المعنى الأول هو الصحيح وذلك حسب قانون الأولويات priorities في المنطق الرياضي كما سنسردها فيما بعد (المؤثر الأحادي تكون له دائما الأسبقية على المؤثر الثنائي).

أولويات التنفيذ : في لغات البرمجة يتم تنفيذ المؤثرات NOT ، AND ، OR على الترتيب التالي :

1. المؤثر NOT
2. المؤثر AND
3. المؤثر OR و XOR

في حالة تساوي الأسبقية (مثل OR , XOR) تعطى الأسبقية من اليسار إلى اليمين. وفي حالة استعمال الأقواس ( ) تعطى الأسبقية للعملية بداخلها على أي عملية أخرى.

مثال : ما هو ناتج تنفيذ البرنامج التالي بلغة باسكال ؟

```
PROGRAM LOGIC ;
```

```
VAR   p , q , r , s : BOOLEAN ;
BEGIN
          p := FALSE ;
          q := FALSE ;
          r := TRUE ;
          s := p  AND  q  OR  r ;
            WRITELN(s)
END .
```

الإجابة : TRUE

والسبب هو أن التنفيذ يكون على النحو التالي:

```
s = (p  AND  q) OR  r
  = (TRUE  AND  FALSE) OR (TRUE)
  = FALSE  OR  TRUE
  =    TRUE
```

أي أن AND تسبق OR في التنفيذ.

مثال : ما هو ناتج تنفيذ البرنامج التالي بلغة باسكال؟

```
 PROGRAM LOGIC ;
VAR  p , q , r , s : BOOLEAN ;
BEGIN
```

```
        p := TRUE ;
        q := FALSE ;
        r := TRUE ;
        s := p  AND  NOT q  OR  r ;
WRITELN (s) ;
END .
```

الإجابة : TRUE

والسبب كما يلي :

تعطي الأسبقية (NOT ثم AND ثم OR) أي :

```
s:= p  AND (NOT  q)  OR r ;
  = (FALSE  AND  TRUE) OR  TRUE
  = FALSE OR TRUE
  = TRUE
```

حيث نلاحظ ما يلي:

تنفذ (NOT q) في هذه العبارة قبل غيرها . أي أن NOT لها الأسبقية على OR و AND. وتوصف NOT بأنها مؤثر أحادي لأنها تدخل على قيمة منطقية واحدة ، أما OR و AND فهي مؤثرات ثنائية لأنها تؤثر على قيمتين منطقيتين .

1.5 مؤثرات البت Bit Operators

البت bit هي اختصار للكلمتين :

خانة ثنائية= **Bi**nary Digi**t**

وهي لها قيمتان محتملتان هما 0 أو 1 .

وأول من استخدم هذا المصطلح هو : جون توكي John Tukey سنة 1946.

لاحظ إمكانية تمثيل المتغيرات المنطقية باستخدام البت حيث نضع

False = 0

True = 1

تعريف : النضيد الثنائي bit string

هو عبارة عن سلسلة من الأرقام الثنائية .

مثلا : العدد 01001001

هو نضيد ثنائي به 8 خانات ثنائية .

الآن يمكننا تلخيص المؤثرات المنطقية التالية

$\vee \quad \wedge \quad \oplus$

بالجدول التالي حيث 0 يعني FALSE و 1 يعني TRUE .

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

1	1	1	1	0

هنا نلاحظ أن x , y هي متغيرات منطقية لها قيمة 0 أو 1 .

مثال: دع

$x = 1011$
$y = 1101$

أوجد :

$x \oplus y \quad , \quad x \wedge y \quad , \quad x \vee y$

ملاحظة : تسمى المؤثرات في حالة أن x , y نضائد ثنائية كما يلي :

$\wedge$ Bitwise AND
$\vee$ Bitwise OR
$\oplus$ Bitwise XOR

الحل:

$$\begin{array}{r} 0110 \\ \underline{1101} \\ 0100 \\ 1111 \\ 1011 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \text{Bitwise AND} \\ \rightarrow \text{Bitwise OR} \\ \rightarrow \text{Bitwise XOR} \end{array}$$

1.7 تمارين1 Exercises 1

(1) هل تعتبر الجمل التالية منطقية ؟   في حالة نعم أوجد قيمتها المنطقية .

a) العلم نور.

b) بيروت عاصمة العراق.

c) $2 + 3 = 5$

d) $5 + 7 = 11$

e) ماذا تعرف عن المنطق؟

f) أجب عن جميع الأسئلة

g) $x + y$

(2) اكتب نفي الجمل التالية (negation)

a) اليوم هو الاثنين.

b) لا يوجد تلوث في البيئة.

c) $2 + 3 = 5$

d) الجو في الشتاء بارد .

(3) د ع $p =$ " ذاكرت دروسي جيدا"

$q=$ " نجحت بتفوق"

عبر باللغة العربية عن الأتي :

a) $\neg p$
b) $p \vee q$
c) $p \rightarrow q$
d) $p \wedge q$
e) $p \wedge \neg q$
f) $\neg p \rightarrow \neg q$
g) $\neg p \wedge \neg q$
h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

(4) د ع $p =$ "الجو بارد"

$q =$ "السماء صافية"

أكتب الجمل التالية من اللغة العربية إلى جمل رمزية

a) الجو بارد والسماء صافية
b) الجو بارد والسماء غير صافية
c) الجو ليس باردا والسماء ليست صافية
d) الجو بارد أو السماء صافية

e(إذا كانت السماء غير صافية فإن الجو يكون بـ اردا

f(شرط ضروري وكافي لأن يكون الجو باردا أن تكون السماء غير صافية.

(6) هل OR في الجمل التالية inclusive أم exclusive ؟

(ا) لكي تكون مبرمجا جيدا يجب أن تدرس الرياضيات أو الفيزياء.

(ب) لكي تشتري سيارة يجب أن تدفع الثمن دفعة واحدة أو بالتقسيط .

(ج) هذا البيت معروض للبيع أو الإيجار.

(7) كوّن جدول الصواب Truth Table للعبارات المنطقية المركبة التالية :

a) $p \wedge \neg p$

b) $p \vee \neg p$

c) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

e) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

g) $p \oplus p$

h) $p \oplus \neg p$

i) $p \oplus \neg q$
k) $\neg p \leftrightarrow q$

(8) إذا كانت $x = 1$ قبل تنفيذ الجمل التالية . فما هي قيمة x بعد التنفيذ

a) If 1 + 2 = 3 then x:= x + 1 ;
b) If (1 + 1 = 3) OR (2 + 2 = 3) then x:= x + 1 ;
c) If (2 + 3 = 5) AND (3 + 4 = 7) then x:= x + 1 ;
d) If (1 + 1 = 2) XOR (1 + 2 = 3) then x:= x + 1 ;
e) If x < 2 then x:= x + 1 ;

(9) أوجد قيمة bitwise OR

وقيمة bitwise AND

وقيمة bitwise XOR

لما يلي:

a) 101 1110 , 010 0001
b) 1111 0000 , 1010 1010
c) 00 0111 0001 , 10 0100 1000
d) 11 1111 1111 , 00 0000 0000

1.7 التوافق والتناقض Tautology & Contradiction

تعريف (1) العبارة المنطقية المركبة Compound Proposition التي يكون ناتجها دائما صوابا TRUE مهما كانت قيم مكوناتها تسمى توتولوجي (أو توافق) Tautology .

تعريف (2) العبارة المنطقية المركبة التي يكون ناتجها دائما خاطئا FALSE مهما كانت قيم مكوناتها تسمى تناقضا Contradiction.

A **tautology** is a compound proposition which is true no matter what the truth values of its simple components.

A **contradiction** is a compound proposition which is false no matter what the truth values of its simple components.

مثال (1): هل تعتبر العبارة المركبة $p \vee (\neg p)$ توتولوجي ؟

الإجابة : نعم، فمهما كانت قيمة p فإن الناتج قيمته True كما يبين الجدول التالي:

p	¬p	p v (¬p)
T	F	T
F	T	T

مثال(2): هل تعتبر العبارة التالية $p \wedge \neg p$ توتولوجي ؟

الإجابة : لا، بل هي تناقض لأن ناتج العبارة $p \wedge \neg p$ دائما FALSE كما يبين الجدول التالي:

p	¬p	p ∧ ¬p
T	F	F
F	T	F

أي أن هذه العبارة هي تناقض contradiction.

1.8 التكافؤ المنطقي Logical Equivalence

تعتبر العبارتان المنطقيتان متكافئتين منطقيا إذا كانت نتيجتهما دائما متساوية مهما كانت قيمة الفرضيات المبنية عليهما.

Two propositions are said to be **logically equivalent** if they have identical truth values for every set of truth values of their components.

ويمكن استخدام الرمز ⇔ للتعبير عن التكافؤ المنطقي ولكن أحيانا نستخدم العبارة $P \equiv Q$ لتعني أن P تكافئ Q .

ويوجد في علم المنطق العديد من قوانين التكافؤ المهمة نورد بعضا منها فيما يلي.

قوانين دي مورغان De Morgan's laws

القانون الأول $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

القانون الثاني $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

يمكن اثبات القانونين باستخدام جدول الصواب حيث نحصل على عمودين متطابقين .

مثلا الجدول التالي يبين صحة القانون الثاني:

p	q	¬(p v q)	¬p	¬q	¬p∧¬Q
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

نلاحظ في هذا الجدول أن عمود العبارة $\neg(p \vee q)$ يطابق عمود العبارة $\neg p \wedge \neg q$ (وقد تم تظليلهما في الجدول) لذلك فالعبارتان متكافئتان.

مثال على قانون دي مورغان الأول :

انفي العبارة التالية :

"علي عمره أكبر من 20 سنة وأقل من 30 سنة"

الإجابة: النفي هو

"علي عمره أقل من (أو يساوي) 20 سنة أو أكبر من (أو يساوي) 30 سنة"

نلاحظ هنا عند النفي أن "و" قد تحولت إلى "أو" ، فإذا وضعنا:

"عمر علي أكبر من 20" = p

"عمر علي أقل من 30" = q

فان العبارة الأصلية هي:

$$p \wedge q$$

وعبارة النفي هي:

$$\neg p \vee \neg q$$

بنفس الطريقة يمكن كتابة مثال على قانون دي مرغان De Morgan الثاني .

مثال : بين أن العبارة $p \to q$ والعبارة $\neg p \vee q$ متكافئتان .

الإجابة : نحسب الجدول التالي للعبارتين

p	q	$p \to q$	$\neg P$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T

F	F	T	T	T

نلاحظ في هذا الجدول أن عمود $p \rightarrow q$ وعمود $\neg p \vee q$ متكافئان.

ملاحظة : نستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ للدلالة على التكافؤ.

قوانين التوزيع Distributive law

القانون الأول $\mathbf{p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$

القانون الثاني $\mathbf{p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$

لإثبات القانون الأول ننشئ الجدول التالي :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

نلاحظ أن عمود $p \vee (q \wedge r)$ يكافئ عمود $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.9 تكافؤات أخرى مهمة :

(1) $$\mathbf{p \wedge T \Leftrightarrow p}$$

حيث $\Leftrightarrow$ هو رمز التكافؤ

(2) $$p \vee F \Leftrightarrow p$$

يسمى القانون (1) و (2) بقانون الوحدة identity law

(3) $$p \vee T \Leftrightarrow T$$

$$p \wedge F \Leftrightarrow F$$

(4) $$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

(5) commutative law قانون التبديل

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

(6) associative law قانون الدمج أو الترتيب

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow P \wedge (q \wedge r)$$

$p \vee \neg p \Leftrightarrow \text{True}$ (7)

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \text{False}$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (8)

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ (9)

مثال(6) بين باستخدام قوانين التكافؤ أن :

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$

تكافئ منطقيا

$\neg p \wedge \neg q$

الإثبات:

باستخدام قانون دي مورغان الثاني:

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

والآن باسخدام قانون دي مورغان الأول

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q)$

ولكن من قانون التوزيع فإن هذا يكافئ

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow \quad F \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$

وهو المطلوب إثباته.

مثال : دع

$p =$ "عثمان رجل غني"

$q =$ "عثمان رجل كريم"

هذا يعني أن :

$p \wedge q =$ "عثمان رجل غني وكريم"

$p \vee q =$ "عثمان رجل غني أو كريم"

من الواضح هنا أن :

$p \wedge q \rightarrow p \vee q$

ولكن العكس غير صحيح .

مثال(7) بين أن العبارة :

$p \wedge q \rightarrow (p \vee q)$

توتولوجي.

أي أن العبارة $p \wedge q$ إذا كانت قيمتها TRUE فان من تحصيل الحاصل أن تكون $p \vee q$ أيضا TRUE.

الإثبات :

يمكن إثبات ذلك باستخدام جدول الصواب ولكن هنا نستخدم قوانين التكافؤ

$$(p \land q) \rightarrow (p \lor q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \land q) \lor (p \lor q)$$

وذلك ما تم إثباته في مثال(4).

ولكن من قانون دي مورغان الأول نحصل على:

$$\neg(p \land q) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q) \lor (p \lor q)$$

والآن من قانون الدمج :

$$\Leftrightarrow (\neg p \lor p) \lor (\neg Q \lor q)$$

$$\Leftrightarrow T \lor T$$

$$\Leftrightarrow T$$

أي أن ناتج العبارة دائما TRUE مهما كانت q , p

أي أن العبارة من نوع توتولوجي .

1.10 تمارين (2)

(1) استخدم جدول الصواب Truth Table لإثبات ما يلي :

a) $p \land T \Leftrightarrow p$

b) $p \lor F \Leftrightarrow p$

c) $p \land F \Leftrightarrow F$

d) $p \lor T \Leftrightarrow T$

e) $p \lor p \Leftrightarrow p$

f) $p \land p \Leftrightarrow p$

(2) استخدم جدول الصواب لتحقيق قانون التوزيع :

$$p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$$

(3) بين أن التضمينات التالية implications من نوع توتولوجي:

a) $(p \land q) \rightarrow p$
b) $p \rightarrow (p \lor q)$
c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(أ) باستخدام جدول الصواب.

(ب) بدون استخدام جدول الصواب.

(4) حقق القوانين التالية (التي تسمى قوانين الامتصاص absorption Laws)

$$(p \land (p \lor q)) \Leftrightarrow p$$

$$(p \lor (p \land q)) \Leftrightarrow p$$

(5) هل العبارة المنطقية:

$$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$$

من نوع توتولوجي ؟

(6) بين أن العبارة: $\neg p \leftrightarrow q$

والعبارة: $p \leftrightarrow \neg q$

متكافئتان منطقيا.

(7) بين أن العبارة: $p \rightarrow q$

تكافئ منطقيا العبارة:

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

(هذا يعني أن العبارة $p \rightarrow q$ تكافئ مقلوب النفي)

(8) استخدم خاصية (العبارة $p \rightarrow q$ تكافئ مقلوب نفيها) لإثبات أن

"إذا كان مربع العدد فرديا فان العدد نفسه يكون فرديا"

1.11 الدالة المنطقية

الدالة $P(x)$ هي عبارة منطقية تعتمد على قيمة المتغير المستقل x .

أي أن:

$$P : X \rightarrow \{ T , F \}$$

حيث X هو نطاق الدالة P ومداها هو الفئة {T, F} حيث T ترمز ل True و F ترمز ل False.

مثال(1) إذا كانت $P(x)$ دالة منطقية تعني "$x > 3$" حيث x عدد حقيقي، فما هي قيمة $P(3)$ ، $P(4)$ ؟

الإجابة:

$P(3) =$"3>3" = False

$P(4) =$"4>3"= True

لاحظ أن نطاق الدالة المنطقية قد يكون جميع الأعداد الحقيقية أو الأعداد الصحيحة وقد يكون لها أكثر من متغير مستقل واحد.

مثال(2) : دع $Q(x,y)$ تعني "$x = y+ 3$" حيث x و y أعداد صحيحة. ما قيمة $Q(1,2)$ ، $Q(3,0)$ ؟

الإجابة :

$Q(1,2) =$ "1 = 2 + 3" = False

$Q(3,0) =$ " 3 = 0 + 3" = True

مثال(3): إذا كانت $R(x, y ,z)$ تعني $x + y = z$ فما قيمة $R(1, 2 ,3)$ ؟

الإجابة : $R(1,2,3) =$ " 1 + 2 = 3"= True

1.12 المقياس الشامل والوجودي

تسمى العبارة $\forall x\ P(x)$ بالمقياس الشامل universal quantification وهي تعني (لجميع قيم x في نطاق معين فإن الدالة المنطقية $P(x)$ صائبة True).

مثال(4): دع $p(x)$ تعني "$x + 1 > x$" ما هي قيمة $\forall x\ P(x)$ ؟
حيث x تنتمي لفئة الأعداد الحقيقية؟

الإجابة:

بما أن x تعني عدد حقيقي real number فان

$$\forall x\ P(x) = \text{True}$$

لأن إضافة 1 للعدد يجعله أكبر مما كان.

مثال(5): دع $Q(x)$ تعني "$x < 2$" ما هي قيمة المقياس $\forall x\ Q(x)$
حيث x رقم حقيقي؟

الإجابة :

$$\forall x\ Q(x) = \text{False}$$

لأن بعض قيم x (مثلا $x=3$) لا تحقق المقياس المطلوب.

مثال(6): ما قيمة المقياس $\forall x\ P(x)$ حيث $P(x)$ هي الجملة "$x^2 < 10$"

وأن النطاق هو الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 4 ؟

الإجابة :

النطاق هنا هو الأعداد $\{1,2,3,4\}$ حيث نلاحظ أن

$P(1) = True$, $P(2) = True$, $P(3) = True$, $P(4) = False$

ولكن لكي تكون $\forall x\, P(x) = True$ يجب أن تكون :

$P(1)$ ، $P(2)$ ، $P(3)$ ، $P(4)$ جميعها True .

لذلك فان $\forall x\, P(x) = False$

المقياس الوجودي existential quantification

هو المقياس الذي يعبر عن وجود عنصر واحد x على الأقل بحيث تكون الدالة المنطقية $P(x)$ صائبة ، أي $P(x) = True$

ونعبر عن ذلك بالرمز التالي: $\exists x\, P(x) = True$

مثال(7): دع $Q(x)$ تعني $x = x + 1$

ما هي قيمة المقياس $\exists x\, Q(x)$ حيث x رقم حقيقي

الإجابة :

$$\exists x\, Q(x) = False$$

لأنه لا يوجد رقم حقيقي يحقق هذا المقياس ، أي لا يوجد رقم حقيق يساوي نفسه زائد 1 .

مثال(8): دع $C(x)$ تعني أن " **x** لديه حاسوب "

$F(x ,y)$ تعني " **x , y** صديقان"

حيث x ، y تنتمي إلى فئة طلبة الكلية ، ما معنى:

$$\forall x\ (C(x) \vee \exists y\ (C(y) \wedge F(x ,y)))$$

الإجابة:

هذه الجملة تعني أن كل طالب في المعهد أما أن يكون لدبه حاسوب أو لديه صديق عنده حاسوب.

مثال(9): باستخدام المقاييس عبر عن الجمل التالية :

(أ) "بعض الطلبة في هذا الفصل زاروا بنغازي "

(ب) "كل طالب في هذا الفصل قد زار إما الزاوية أو بنغازي"

الإجابة:

الفئة الشاملة هي جميع الطلبة في الفصل

x : طالب في الفصل

$M(x)$ = "x زار بنغازي"

$C(x)$ = "x زار الزاوية"

(أ) لاحظ أن كلمة "بعض" تعني وجود واحد على الأقل، لذلك نكتب الجملة كما يلي:

$\exists x\ M(x)$ = "يوجد طالب واحد على الأقل قد زار بنغازي"

(ب) $\forall x\ (M(x) \vee C(x))$

= "جميع الطلبة إما زاروا الزاوية أو بنغازي"

1.13 النفي NEGATION

مثال(1): ما هو نفي الجملة

"كل طالب في هذا الفصل درس الكيمياء"

لاحظ أن هذه الجملة يمكن كتابتها على النحو $\forall x\ P(x)$

حيث $P(x)$ تعني أن x درس الكيمياء.

نفي هذه الجملة هو $\exists x \neg P(x)$

بمعنى أن

"يوجد طالب واحد على الأقل في هذا الفصل لم يدرس الكيمياء"

أي

هذا المثال يوضح التكافؤ التالي

$$\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$$

مثال(2):

ما هو نفي الجملة

"يوجد طالب واحد على الأقل في هذا الفصل قد درس الكيمياء"

الإجابة:

"كل الطلبة في هذا الفصل لم يدرسوا الكيمياء"

أي أن لدينا التكافؤ التالي:

$$\neg \exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$$

حيث "x درس الكيمياء" = P(x)

1.14 تمــارين (3)

1- دع P(x) تعني الجملة $x \le 4$ ما هي قيمة :

a) P(0)
b) P(4)
c) P(6)

2- دع Q(x,y) تعني "x عاصمة y" ما هي قيمة :

a) Q(Cairo , Egypt)
b) Q(Tripoli , Tunis)
c) Q(New York , USA)

3- إذا كان P(x) تعني "x طالب ممتاز"

ماذا تعني الجمل التالية :

a) $\exists x\, P(x)$

b) $\forall x\ P(x)$

c) $\exists x \neg P(x)$

d) $\forall x\ \neg P(x)$

علما بأن الفئة الشاملة هي طلبة الكلية.

4- دع $W(x , y)$ تعني أن "x visited y" أي "x قد زار y"

حيث x تنتمي إلى فئة طلبة الكلية، y تنتمي إلى فئة مواقع الانترنت.

ماذا تعني الجمل التالية :

.a) W(Ali , www.fatahu.edu).

b) $\exists x$: W (x , www.yahoo.com)

c) $\exists y$: W (Omar , y)

d) $\exists y$ (W (Anas, y) $\wedge$W(Adel, y))

e) $\exists y\ \forall z\ (y \neq \text{Ahmed} \wedge (W(\text{Ahmed},z) \rightarrow W(y,z)))$

f) $\exists x\ \exists y\ \forall z\ ((x \neq y) \wedge(W(x,z) \leftrightarrow W(y,z)))$

5- دع $P(x)$ تعني الجملة "x يتكلم الروسية"

، $Q(x)$ تعني "x يعرف لغة ++C"

حيث x طالب في الكلية .

عبر عما يلي بالروابط المنطقية:

(أ) يوجد طالب بالكلية يعرف لغة ++C ويتكلم الروسية.

(ب) يوجد طالب بالكلية يتكلم الروسية ولكنه لا يعرف لغة ++C

(ج) كل طالب في الكلية إما أنه يتكلم الروسية أو يعرف لغة ++C

(د) لا يوجد طالب في الكلية يتكلم الروسية أو يعـرف لغة ++C

6- دع

$S(x)$ تعني الجملة "x طالب"

$F(x)$ تعني الجملة "x عضو هيئة تدريس"

$A(x, y)$ تعني "x سأل y سؤالا"

استخدم quantifiers المقاييس للتعبير عن :

(أ) سأل طارق الأستاذ مصطفى سؤالا .

(ب) كل طالب سأل الأستاذ يحيى سؤالا.

(ج) كل عضو هيئة تدريس إما أنه سأل الأستاذ منصور سؤالا أو أنه تم توجيه سؤال إليه من قبل الأستاذ جمال.

(د) بعض الطلبة لم يسألوا أي عضو هيئة تدريس أي سؤال.

(هـ) يوجد عضو هيئة تدريس لم يتم سؤاله من قبل أي طالب.

7- ما هو نفي الجمل التالية:

(أ) $\exists x\, P(x)$

(ب) $\exists x\, \neg P(x)$

(ج) $\forall x\, P(x)$

(د) $\forall x\, \neg P(x)$

اكتب معنى هذه الجمل إذا كانت P(x) تعني أن "x يدرس علم الحاسوب" وأن الفئة الشاملة التي ينتمي إليها x هي طلبة كلية الدعوة الإسلامية.

اختبار

س1 دع

P = " اليوم جمعة "

Q = " 5 = 3 + 2 "

ما قيمة العبارة المنطقية التالية :

$$P \rightarrow Q$$

===============

س2 ما قيمة x بعد تنفيذ الجزء التالي بلغة باسكال:

```
x:=2;
If 2+2=4 then x:=x+3;
```

==============

س3 اثبت أن

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\text{NOT } p \vee q)$$

=============

س4 أكمل مستخدما قوانين دي مورغان

ا- العبارة $NOT (p \wedge q)$ تكافئ ----------------------

ب- العبارة $NOT (p \vee q)$ تكافئ ----------------------

============

س5 اكتب العبارة التالية باستخدام الرموز

أ- " اسماعيل لعيب كرة قدم أو كرة سلة وليس كلاهما "

ب- " كل الطلبة مجتهدون "

ت- "بعض الأطباء مخلصون"

ث- " لا يوجد طلبة ليبيون في الكلية "

===========

س6 اكتب نفي العبارات في س5 باستخدام الرموز وباللغة العربية

===========

س7 دع

$P(x)$ = " x يملك جهاز محمول "

$Q(x,y)$ = " y صديق x "

ما معنى العبارة التالية:

$$\forall x\, P(x) \vee \exists y\, (Q(x,y) \wedge P(y))$$

علما بأن الفئة الشاملة هي طلبة الكلية.

=========

س8 اكتب برنامجا لطباعة جدول الصواب للعبارة المنطقية

$P \wedge (P \vee Q)$

==

الجزء الثاني

التراكيب المنفصلة
Discrete Structures

د. عمر زرتي
Dr. Omar Zarty
قسم الحاسوب \كلية العلوم \ جامعة طرابلس

الباب الثاني 2

الفئـــات Sets

2.1 مقدمة

الفئة هي مجموعة من العناصر ذات خاصية مشتركة. فمثلا عندما نشير إلى فئة الطلبة المسجلين في مقرر «التراكيب المنفصلة» في كلية ما، فإن عناصر هذه الفئة هم طلبة الكلية المسجلين بهذا المقرر، والخاصية المشتركة بين هؤلاء الطلبة هي التسجيل في المقرر.

ونظرا لما للفئات من أهمية في وصف التراكيب المنفصلة، سندرس في هذا الباب ما يتعلق بالفئات من تعاريف ومبرهنات أساسية.

2.2 رموز الفئات

نستخدم الأقواس { } في سرد عناصر الفئة ، فمثلا فئة الأعداد الفردية من 1 إلى 10، يمكن كتابتها بطريقة السرد كما يلي:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

وقد تكون عناصر الفئة غير محدودة، فمثلا فئة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة ، عناصرها غيرمحدودة infinite ، ويمكن كتابتها كالآتي:

$$A = \{1, 2, 3, \ldots \}$$

حيث تم استخدام النقط للتعبير عن الاستمرار الى مالانهاية.

ويمكن وضع هذه النقط أيضا من اليسار فمثلا الفئة

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1 , 0 ,1 ,2 ,3,\ldots\}$$

هي فئة جميع الأعداد الصحيحة.

إذا كان a عنصر ينتمي إلى الفئة A نكتب: $a \in A$

وإذا كان a لا ينتمي إلى A نكتب: $a \notin A$

الفئة الخالية هي الفئة التي لا يوجد بها أي عنصر ،ونرمز لها بالرمز Φ (empty set) وأحيانا نرمز لها بالرمز { } .

والفئات التالية فئات خاصة ذات استخدام شائع لذلك تم تخصيص رموز متعارف عليها كما يلي:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ the set of **natural numbers**.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ the set of **integers**†.

$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ and } q \neq 0\}$ the set of fractions or **rational numbers**.

$\mathbb{R}$ = the set of **real numbers**;

$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ and } i^2 = -1\}$ the set of **complex numbers**.

أي أن N هي فئة الأعداد الطبيعية ، و Z هي فئة الأعداد الصحيحة، و Q هي فئة الأعداد القياسية، و R هي فئة الأعداد الحقيقية، و C هي فئة الأعداد المركبة.

2.3 تساوي الفئات

الفئتان A و B متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر (بغض النظر عن ترتيبها).

مثال: هل الفئتان :

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{5, 3, 1\}$$

متساويتان ؟

الإجابة: نعم لأن لهما نفس العناصر.

مثال: هل الفئتان:

$$A = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{3, 3, 4, 5, 5, 6\}$$

متساويتان ؟

الإجابة: نعم لأن العنصر المتكرر يحسب مرة واحدة.

تعريف: الفئة

$$A = \{x: p(x)\}$$

هي الفئة التي عناصرها القيم x بحيث p(x)=true .

مثلا الفئتان:

$$A = \{ x : x \text{ is an odd positive integer}\}$$
$$B = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

متساويتان. لاحظ أن odd تعني فردي و positive تعني موجب و integer تعني صحيح.

كما أن :

$$\{x: x^2 -3x + 2\} = \{ 1, 2\}$$

2.4 الفئة الجزئية

نقول أن A فئة جزئية من الفئة B إذا (وفقط إذا) كان كل عنصر في A موجود أيضا في B .

ونرمز للفئة الجزئية بالرمز ⊆ .أي أن: $A \subseteq B$

تعني أن A فئة جزئية من B . أي أن : $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

The set A is a **subset** of the set B, denoted $A \subseteq B$, if every element of A is also an element of B. Symbolically, $A \subseteq B$ if $\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ is true, and conversely.

لاحظ أن الفئة الفارغة (أو الخالية) هي فئة جزئية لأي فئة أخرى S، أي أن:

$$\varnothing \subseteq S$$

كما أن أي فئة هي فئة جزئية من نفسها ، أي: $A \subseteq A$

ملاحظة : عندما نكتب

$$A \subset B$$

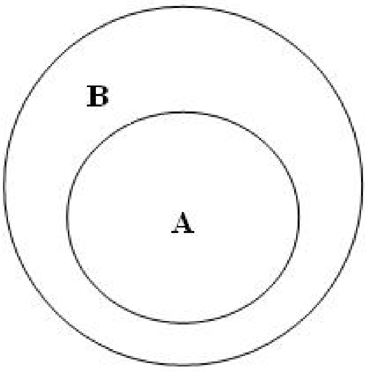
نقصد أن A لا تساوي B بل جزء منها فقط .

<u>**مثال**</u>

الفئة {1 , 2} هي فئة جزئية من الفئة {1 , 3, 2} ويمكن كتابة ذلك كما يلي:

$$\{1\ ,\ 2\} \subset \{1\ ,\ 3,\ 2\}$$

وعادة ما نستخدم الدوائر في تمثيل علاقات الفئات ، وتسمى هذه الدوائر بأشكال فن Venn diagrams . فمثلا لتمثيل الفئة الجزئية نرسم دائرة صغيرة نمثل الفئة الجزئية داخل دائرة أكبر كما في الشكل التالي:



تمثيل أشكال Venn لفئة A جزئية من B

$$A \subset B$$

لاثبات أن الفئتين A و B نلاحظ أن

A=B if and only if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$

وهذا يشبه الاستنباط المزدوج الذي درسناه في علم المنطق:

$p \leftrightarrow q$ تكافئ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

2.2 فئة القوى Power set

هي الفئة التي عناصرها جميع الفئات الجزئية للفئة الأصلية .

أي إذا كان لدينا فئة S فان فئة القوى (ونرمز لها بالرمز P(S)) هي فئة جميع الفئات الجزئية للفئة S.

مثال: ما هي فئة القوى للفئة {0,1,2}؟

الإجابة:

$$P\{0,1,2\} = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$$

لاحظ أن الفئة الخالية $\emptyset$ والفئة نفسها تكون عناصر لفئة القوى . لاحظ أيضا أن فئة القوى في هذا المثال تحتوي على 8 عناصر بينما الفئة الأصلية تحتوي فقط على 3 عناصر. هذا يدفعنا للسؤال عن العلاقة بين عدد العناصر في الفئتين.

تعريف : رتبة الفئة cardinality هي عدد العناصر في الفئة. ونرمز لها بالرمز $|A|$.

مثال: ما هي رتبة الفئة $A = \{7,8,9\}$

الإجابة:

$$|A| = 3$$

الآن يمكننا كتابة العلاقة بين رتبة الفئة S ورتبة فئة القوى P(S) على النحو التالي:

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

وسنقوم باثبات هذه العلاقة في الأبواب القادمة بإذن الله.

وعلى سبيل المثال فإن:

$$|P\{7, 8, 9\}| = 2^3 = 8$$

2.3 ضرب الفئات (الضرب الكارتيزي):

دع A , B فئتان. حاصل الضرب الكرتيزي لهما هو فئة جميع الأزواج المرتبة (a , b) حيث $a\in A$, $b\in B$ أي أن:

$$A \times B = \{(a, b): a\in A \wedge b\in B\}$$

مثال: أوجد الضرب الكارتيزي للفئتين :

$$A = \{ 1 , 2\} \qquad B=\{ a , b , c\}$$

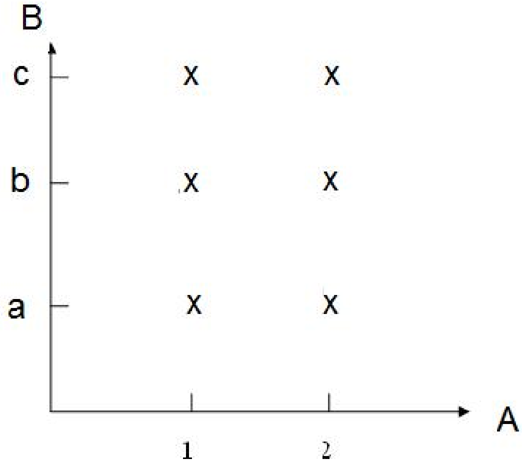
الاجابة:

$$A \times B = \{(1,a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

لاحظ أن :

$$A \times B \neq B \times A$$

التمثيل البياني لهذه الفئة يمكن رسمه كما يلي:



كما نلاحظ أن

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

تعريف:

الضرب الكارتيزي لثلاث فئات هو الفئة

$$A \times B \times C = \{(a, b, c): a\in A , b\in B , c\in C\}$$

2.4 تمارين (4)

(1) اسرد عناصر الفئات التالية:

(أ) $A = \{x : x \text{ is a real number and } x^2=1\}$

(ب) $B = \{x : x \text{ is positive integer less than } 12\}$

(ج) $C = \{x : x \text{ is a square of an integer and } x<100\}$

(د)

$D = \{x : x \text{ is an integer and } x^2=2\}$

(2) بين ما إذا كانت الجمل التالية صحيحة (T) أم خاطئة F .

(أ) $\{1,3,5\} = \{1,3,3,5\}$ T F

(ب) $\{1،\{1\}\} = \{\{1\} ،1\}$ T F

(ج) $\{\{2\}\} = \{2\}$ T F

(د) $\varnothing=\{\varnothing\}$ T F

(3) في الفئات التالية بين ما إذا كان 2 عنصر في الفئة:

$A = \{x \in R: x \text{ is integer greater than } 1\}$

$B = \{x \in R: x \text{ is the square of an integer}\}$

$C = \{2,\{2\}\}$

$D = \{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$

$E = \{\{\{2\}\}\}$

(4) هل الجمل المنطقية التالية True أم False ؟

a) $x \in \{x\}$

b) $x \subseteq \{x\}$

c) $\{x\} \subseteq \{x\}$

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\varnothing \subseteq \{x\}$

f) $\varnothing \in \{x\}$

(5) إذا كانت A , B , C ثلاث فئات بحيث $A \subseteq B$ ، $B \subseteq C$ أثبت أن $A \subseteq C$

(6) مل هي رتبة الفئات التالية :

a) $\{a\}$
b) $\{\{a\}\}$
c) $\{a,\{a\}\}$
d) $\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$

(7) أوجد فئة القوى Power Set للفئات التالية:

أ – $\{a\}$

ب– $\{a,\ b\}$

ج– $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

(8) دع $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{y, z\}$

أوجد:

$B\times A \quad , \quad A\times B$

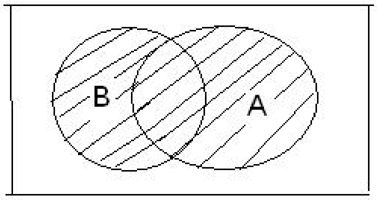
2.5 العمليات على الفئات Set Operations

تعريف(1): الإتحاد Union

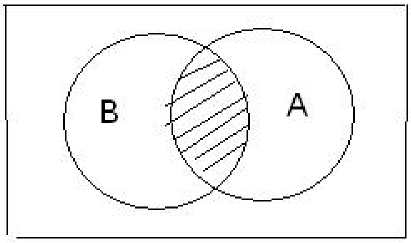
$$A\cup B =\{x: x\in A \vee x\in B\}$$

تعريف(2): التقاطع Intersection

$$A\cap B =\{x: x\in A \wedge x\in B\}$$



الشكل المخطط يمثل اتحاد الفئتين



الشكل المخطط يبين تقاطع الفئتين

مثال:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 4\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A \cap B = \{2, 3\}$$

<u>تعميم الاتحاد والتقاطع</u> إتحاد الفئات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هو

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$$

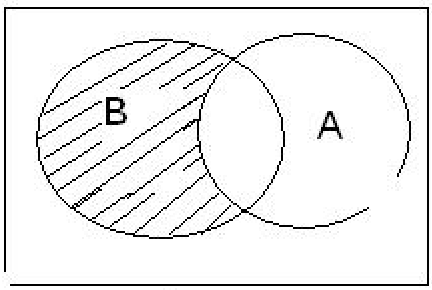
وتقاطع هذه الفئات هو

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_n$$

تعريف(3): الفرق difference بين الفئتين B , A هو:

$$B - A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

ويمكن تمثيلها بالشكل التالي:

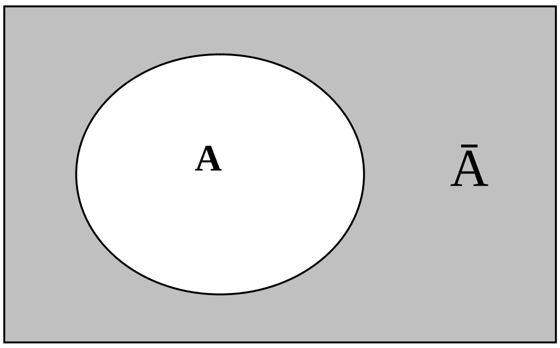


الشكل المخطط يبين الفرق بين الفئتين B-A

تعريف(4): الفئة المكملة Complement

$$\bar{A} = \{ x: x \notin A \}$$

الفئـــة المكمـــلة (المساحة المظللة)



مثال:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$B = \{6, 7, 8, 9\}$$
$$A - B = \{3, 4, 5\}$$

مثال: إذا كانت

$$U = \{x : x \text{ is integer }\}$$
$$A = \{x : x \text{ is integer} > 10\}$$

حيث U الفئة الشاملة، أوجد $\bar{A}$.

الإجابة:

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

2.6 بعض قوانين الفئات:

(1) قوانين الوحدة identity Laws

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap S = A$$

(2) قوانين الهيمنة Domination Laws

$$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup S = S$$

حيث S الفئة الشاملة

(2) قوانين المثل Idempotent Laws

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$

(4) قانون المكمل Complementation Laws

$$\bar{\bar{A}} = A$$

(5) قوانين التبديل Commutative Laws

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

(6) قوانين الدمج Associative Laws

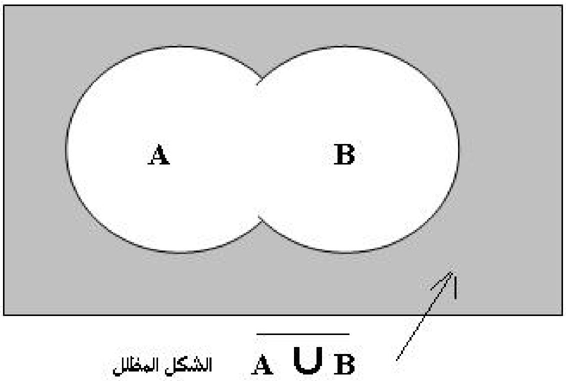
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

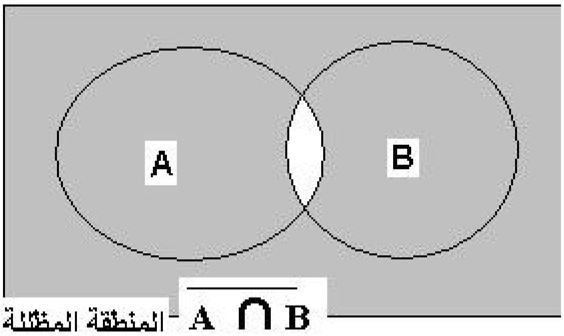
(7) قوانين دي مورغان De Morgan Laws

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



الشكل المظلل $\overline{A \cup B}$



المنطقة المظللة $\overline{A \cap B}$

نقوم الآن بإثبات بعض هذه القوانين على أن يقوم الدارس بإثبات باقي القوانين:

1- إثبات قانون دي مورغان

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

لاثبات هذا القانون لاحظ أن:

$$\overline{A \cap B} = \{x: \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$$

نستخدم الآن قانون دي مورغان في المنطق ، لنحصل على

$$\overline{A \cap B} = \{x: x \notin A \vee x \notin B\}$$
$$= \{x : x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}\}$$
$$= \{x : x \in \bar{A} \cup \bar{B}\}$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

2- اثبات قانون التوزيع : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

الإثبات: من تعريف التقاطع والاتحاد، نلاحظ أن

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \wedge x \in B \cup C\}$$
$$= \{x : x \in A \wedge (x \in B \text{ or } x \in C)\}$$

والآن نطبق قانون التوزيع في المنطق، أي

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

لنحصل على

$$A \cap (B \cup C) = \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\}$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.7 الفئات في لغة باسكال

يمكن تعريف المتغيرات في لغة باسكال بأنها من نوع الفئة باستخدام الكلمة المحجوزة: SET OF . مثلا إذا كتبنا في بداية البرنامج

```
TYPE staff = (Ali, Raja, Ahmed, Adel) ;
 VAR          p, q, r, u : SET OF Staff ;
```

حيث Staff الفئة الشاملة ، في هذه الحالة يمكن تحديد الفئات وعناصرها بجملة تعيين مثل

```
p:= [Ali, Adel] ;
q:= [Ali, Raja] ;
```

ويمكن إيجاد التقاطع بين فئتين باستخدام إشارة * ،مثل

```
r := p * q
```

ولايجاد الاتحاد نستعمل إشارة + ، مثل

```
u:= p + q ;
```

ونستخدم الكلمة المحجوزة IN للدلالة على انتماء عنصر إلى فئة مثل :

```
IF  m  IN  r  THEN  i:= i + 1 ;
```

2.8 تمـــارين (5)

1- دع A تمثل فئة الطلبة المسجلين بمقرر (التراكيب المنفصلة) ، B فئة الطلبة المسجلين بمقرر (البرمجة بلغة باسكال) . قم بوصف الفئات التالية:"

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $A - B$ d) $b - A$

2- دع

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 3, 6\}$

أوجد

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

c) $A - B$ d) $B - A$

3- إذا كان A فئة . اثبت أن

$$\bar{\bar{A}} = A$$

4- إذا كان A , B فئتينن ، اثبت أن

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

5- اثبت أن

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

6- إذا كان

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

أوجد

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$

c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

7- ما هي العلاقة بين الفئة A , B عندما تكون الجمل التالية صحيحة TRUE؟

a) $A \cup B = A$ b) $A \cap B = A$

c) $A - B = A$ d) $A \cap B = B \cap A$

e) $A - B = B - A$

8- أكتب برنامج بلغة باسكال لحساب عدد الطلبة في تقاطع فئتين معلومتين، حيث كل فئة تمثل أسماء الطلبة المسجلين في مقرر دراسي.

3

الباب الثالث

الدوال Functions

3.1 مقدمة

تعتبر الدالة function من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات والحاسوب.
ورغم ذلك فإن الدالة لم يتم تعريفها بصورة واضحة وشاملة إلا حديثا.
في هذا الباب نقوم بتعريف العلاقات والدوال وأنواعها وخصائصها.

3.2 العلاقة والدالة

1- العلاقة relation بين فئتين A و B هي أي فئة جزئية من الضرب الكارتيزي AxB.

مثال: دع

A = {1, 2, 3}
B = {a, b}
R = {(1, a), (2, b), (3, a)}

نلاحظ هنا أن R هي فئة جزئية من AxB لذلك فهي تعتبر علاقة بين A و B.

2- الدالة **f** هي علاقة بين الفئة A و B بحيث

$$(x, y)\in f \land (x, z)\in f \leftrightarrow y=z$$

بتعبير آخر، فإن الدالة تتطلب أن العنصر الواحد في الفئة A لا يقابله في الفئة B إلا عنصر واحد فقط. ولكن من الممكن تعيين عنصر واحد في الفئة B لأكثر من عنصر واحد في الفئة A .

فإذا تم تعيين العنصر b للعنصر a بواسطة الدالة f فإننا نعبر عن ذلك كالتالي:

$$b=f(a)$$

كما نستخدم الاختصار

$$f : A \to B$$

للتعبير عن أن f دالة من الفئة A الى الفئة B.

Let A and B be sets. A **function f from A to B**, written

$$f: A \to B$$

is a subset $f \subseteq (A \times B)$ which satisfies:

(*) for each $a \in A$ there exists a unique $b \in B$ such that

$$(a, b) \in f.$$

The set A is called the **domain**, and the set B the **codomain**, of f.

If $(a, b) \in f$ the element $b \in B$ is called the **image** of $a \in A$ and is written

$$b = f(a)$$

A function is also called a **mapping** or a **transformation**

مثال:

لتكن الفئة A هي طلاب مادة (التراكيب المنفصلة) ، والفئة B درجاتهم في هذه المادة. هل العلاقة بين الطلاب ودرجاتهم تعتبر **دالة؟**

الاجابة نعم حيث يوجد لكل طالب درجة واحدة في المادة الواحدة. صحيح أنه يمكن أن يكون لطالبين أو أكثر نفس الدرجة ولكن لا يجوز أن يكون لطالب واحد درجتان أو أكثر. لذلك تعتبر هذه العلاقة دالة.

مثال : إذا تحصل الطالب (سعيد) على درجة 65 في هذه المادة ، فكيف نعبر عن ذلك بالرموز؟

الاجابة: يمكن أن نعبر عن ذلك كالآتي:

f(سعيد) = 65

حيث f ترمز للدرجة.

ملاحظات:

1- تكتب الدالة على الشكل

$$f : A \to B$$

حيث تسمى الفئة A **النطاق** domain و تسمى الفئة B **المدى** range أو النطاق المقابل codomain.

2- تسمى النقطة f(a) بصورة a، كما تسمى الفئة f(A) **بصورة** A (**image** of A) حيث

$$f(A) = \{y : y = f(x)\ \forall\ x \in A\}$$

3- **الدالة التناقصية**

تعتبر الدالة f تناقصية decreasing إذا كان

$$x < y \leftrightarrow f(x) > f(y)$$

لجميع y , x في النطاق .

وتعتبر **تزايدية** increasing إذا كان

$$x < y \leftrightarrow f(x) < f(y)$$

4- دالة الوحدة (أو الدالة المحايدة) identity function هي الدالة

$$i : A \rightarrow A$$
$$i(x)=x$$

3.3 دالة واحد لواحد (1-1) one-to-one function

تعتير الدالة f من نوع واحد لواحد ونرمز لها بالرمز 1-1 إذا حققت :

$$f(a) = f(b) \leftrightarrow a = b$$

أي أن f(a)=f(b) إذا وفقط إذا كانت a=b .

ويوصف هذا النوع بالدوال الحقنية injective functions .

مثال: دع $f: A \rightarrow B$

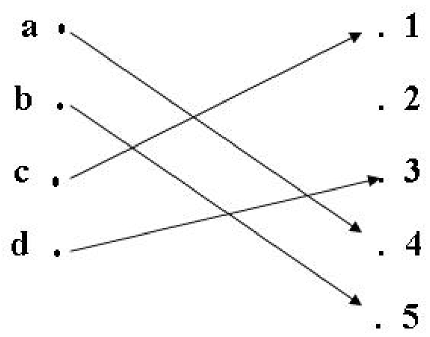
حيث

$A = \{a, b, c, d\}$

$f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$, $f(d) = 3$

هل هذه الدالة من نوع 1−1 ؟ وضّح بالرسم.

<u>الإجابة:</u> نعم هذه الدالة من نوع 1−1 كما يبين الشكل التالي حيث نلاحظ أنه يوجد سهم واحد من كل نقطة في الفئة A الى النقطة في الفئة B:



دالة من نوع 1−1

مثال: هل الدالة $f(x) = x^2$

من نوع 1−1 ؟ علما بأن نطاقها هو فئة الأعداد الصحيحة Z .

<u>الإجابة:</u>

لا . لأن فئة الأعداد الصحيحة Z تحتوي على الاعداد الموجبة والسالبة، وحيث أن

$$(-x)^2 = x^2$$

فإن

$$f(x)=f(-x)$$

وهذا يعني أنها ليست 1−1.

مثال: هل الدالة $f(x) = 2x + 1$ من نوع 1−1 حيث x تنتمي إلى فئة الأعداد الحقيقية ؟

الإجابة :

نعم . فمن الواضح هنا أن إذا وجدت x و y بحيث $f(x)=f(y)$ فإن ذلك يعني أن $2x+1=2y+1$ وبطرح 1 من الطرفين نجد أن $2x=2y$ ، أي أن

$$f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$$

مما يدل على أن f من نوع 1−1.

3.3 الدالة الفوقية **onto** function

هي الدالة f التي تحقق الشرط التالي :

$$f: A \rightarrow B$$

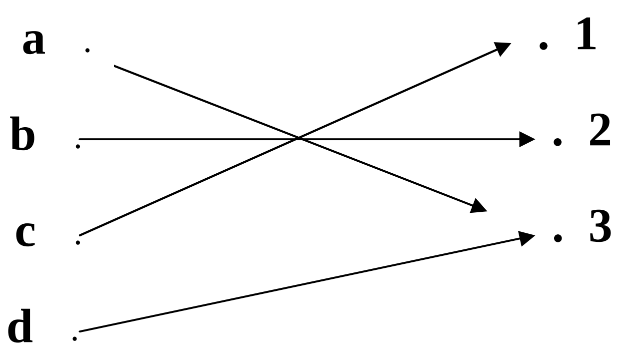
$$\forall b \in B \; \exists \; a \in A : f(a) = b$$

وهذا يعني أن لكل عنصر b في B يوجد عنصر a في A بحيث $b=f(a)$.

أي لا يوجد عنصر في B لايقابله عنصر في A .

ملاحظة: الدالة الفوقية تسمى بالانجليزية أيضا surjective. وإذا كانت الدالة من نوع 1−1 وفوقية فتسمى bijective.

مثال : الشكل التالي يبين دالة فوقية (أي من نوع onto) ولكن ليست 1−1 .



مثال: دع

$$f: Z \to Z$$
$$f(x) = x^2$$

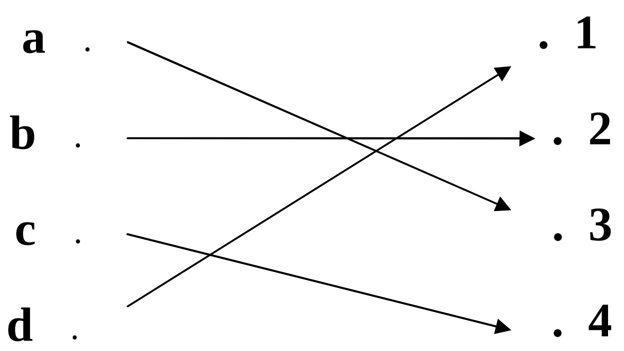
حيث Z فئة الأعداد الصحيحة integers

هل f من نوع onto ؟

الإجابة: لا . لأن الأعداد السالبة تعتبر أعدادا صحيحة ، ولكن f(x) في هذا المثال لا تكون سالبة.

على سبيل المثال لا يوجد عدد صحيح x بحيث $x^2 = -1$.

مثال: هل العلاقة التالية تعتبر دالة فوقية onto ؟ هل هي من نوع 1-1؟



الاجابة نعم هي فوقية وأيضا 1−1 حيث نجد أن كل عنصر في المدى يقابله عنصر في النطاق (فوقية) كما أنه لايوجد إلا عنصر واحد في النطاق لكل عنصر في المدى (1−1).

مثال: الدالة $f(x) = x$ بحيث $f: Z \to Z$

فوقية و 1−1 وهي تسمى : دالة الوحدة identity function

3.4 معكوس الدالة inverse function

إذا كانت

$$f : A \to B$$

دالة فوقية وأيضا واحد لواحد (أي bijective) فإنه يوجد دالة

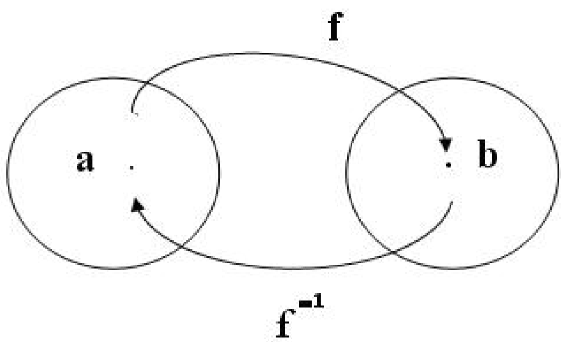
$$g : B \rightarrow A$$

بحيث

$$f(b) = a \quad \leftrightarrow \quad g(a) = b$$

وتسمى g بمعكوس الدالة f . وغالبا ما نرمز لها بالرمز f^{-1}

والشكل التالي يبين هذه العلاقة :



مثال: إذا كان $f:\{a, b, c\} \rightarrow \{2, 3, 5\}$ بحيث

$$f(a) = 2 \quad f(b) = 5 \quad f(c) = 3$$

فإن هذه الدالة تحقق الخاصيتين (1–1 و فوقية) ، ومعكوسها هو الدالة f^{-1}

حيث $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(3) = c$, $f^{-1}(5) = b$

مثال: هل يوجد معكوس للدالة $f(x) = x^2$ حيث النطاق هو $\{-2,-1,0,1,2\}$؟

<u>الإجابة:</u> لا، لأن هذه الدالة ليست واحد لواحد one-to-one

3.5 الدالة المركبة composite function

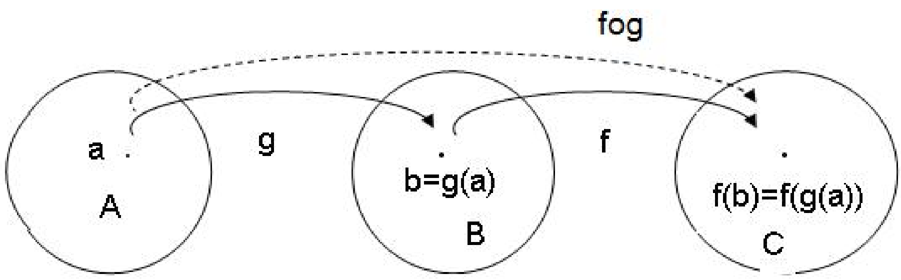
إذا كان لدينا دالتان f و g بحيث

$$f: A \rightarrow B$$
$$g: B \rightarrow C$$

يمكننا تعريف دالة نرمز لها بالرمز fog بحيث

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

وهي تسمى دالة مركبة. ويمكن توضيحها بالرسم التالي:



وبنفس الطريقة فإن

$$(gof)(a) = g(f(a))$$

مثال: إذا كان

$$g(a) = b$$
$$g(b) = c$$
$$g(c) = a$$

وكانت

$$f(a) = 3$$

$$f(b) = 2$$
$$f(c) = 1$$

أوجد قيمة

(أ) الدالة المركبة $fog(x)$

(ب) الدالة المركبة $gof(x)$

عند $x = a, b, c$

<u>الإجابة:</u>

(أ)

$$fog(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$$
$$fog(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$$
$$fog(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$$

(ب)

$$gof(a) = g(f(a)) = g(3) = ?$$

نلاحظ أن $g(3)$ غير معرفة ، وبالتالي لا يمكن حساب الدالة gof عند النقاط (a, b, c)

مثال: إذا كانت

$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = 3x + 2$$

أوجد fog ، gof

<u>الإجابة:</u>

دع $y = g(x) \quad z = f(x)$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(y) = 2y + 3$$
$$= 2(3x + 2) + 3 = 6x + 4 + 3$$
$$= 6x + 7$$

$$gof(x) = g(f(x)) = 3z + 2$$
$$= 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

ملاحظات(1) من المثال السابق نرى بصورة عامة أن

$$fog \neq gof$$

مثال : إذا كانت f دالة من نوع 1−1 و فوقية ، بين أن

$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$$

أي أن

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$$

بعبارة أخرى فإن معكوس المعكوس هو الدالة المحايدة identity function .

أي

$$(f^{-1})^{-1}(z) = i(z) = z$$

لجميع z في النطاق.

الاجابة :

$$y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)$$
$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \rightarrow x = f(f^{-1}(x))$$

3.6 شكل الدالة Graph of a function

إذا كان

$$f: A \rightarrow B$$

فإن شكل الدالة هو الفئة :

$$G = \{(a, b) : a \in A , b = f(a)\}$$

حيث (a, b) يسمى زوج مرتب ordered pair

مثال: ما هو شكل الدالة:

$$f(n) = 2n + 1$$

حيث

$$f : A \rightarrow Z$$

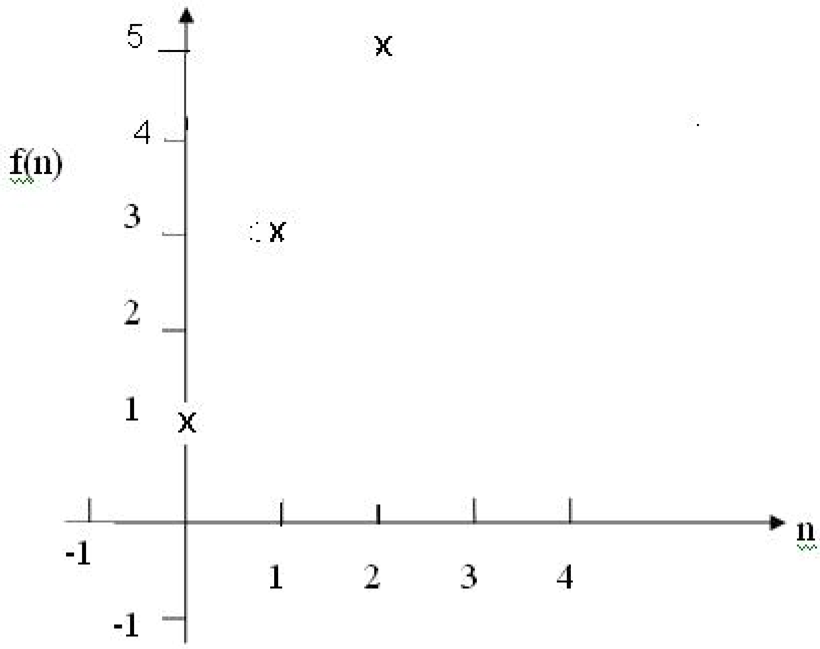
علما بأن Z هي فئة جميع الأعداد الصحيحة. وأن

$$A = \{ 0, 1, 2\}$$

الإجابة:

$$G = \{ (0,1), (1,3), (1,5) \}$$

ويمكن تمثيل هذه الفئة بالشكل التالي:

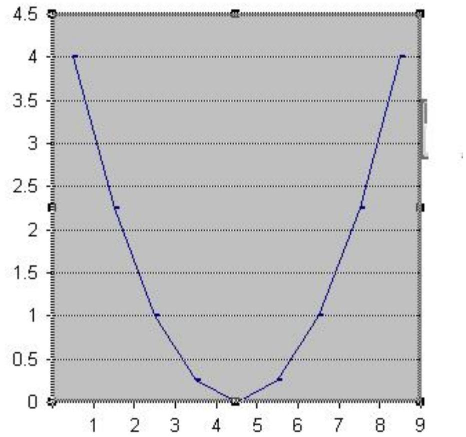


تبين النقاط المبينة بالعلامة x في هذا الشكل الدالة $f(n) = 2n + 1$.

مثال: ما هو شكل الدالة $f(x) = (x-4.5)^2/16$ حيث $f: [\,0.5, 8.5] \rightarrow R$

حيث $[0.5,\ 8.5]$ هي الفترة المغلقة من 0.5 إلى 8.5 و R فئة الأعداد الحقيقية .

<u>الإجابة</u>: يمكننا رسم منحنى لهذه الدالة (وهي دالة متصلة وليست منفصلة كما في المثال السابق) وذلك بأخذ بعض النقاط في النطاق المحدد ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط لنحصل على الشكل التالي:



شكل الدالة $f(x) = (x-4.5)^2/16$

3.7 تمـــارين (6)

1) هل الدوال التالية من نوع 1−1 ؟

a) $f(a) = b \;,\; f(b) = a \;,\; f(c) = c \;,\; f(d) = d$

b) $f(a) = b \;,\; f(b) = b \;,\; f(c) = d \;,\; f(d) = c$

c) $f(a) = d \;,\; f(b) = b \;,\; f(c) = c \;,\; f(d) = d$

علما بأن

$$f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$$

2) أي من الدوال في تمرين (1) تعتبر onto ؟

3) هل الدوال التالية تعتبر 1−1 وفوقية؟

a) $f(x) = -3x + 4$

b) $f(x) = -3x^2 + 7$

c) $f(x) = x^3$

علما بأن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4) بين أنه إذا كانت g دالة من A إلى B ، f دالة من B إلى C فإن :

(أ) إذا كانت g , f من نوع 1− 1 فإن fog من نوع 1−1 .

(ب)إذا كانت g , f فوقية onto فإن fog فوقية.

5) هل الدالة

$$f(x) = 4x + 5$$

حيث $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

لها معكوس؟ ما هو؟

6) ارسم الدالة

$$f(n) = 1 - n^2$$

حيث $f: D \rightarrow D$

$D= \{-2,-1,0,1,2\}$

7) الدالة $f(x) = x^3 + 1$ نطاقها ومداها جميع الأعداد الحقيقية. هل لها معكوس ؟ ما هو ؟

الجزء الثالث

التراكيب المنفصلة
Discrete Structures

د. عمر زرتي
Dr. Omar Zarty

قسم الحاسوب \كلية العلوم\ جامعة طرابلس

الباب

الرابع

4

الباب الرابع

ا

المتواليات Sequences

4.1 مقدمة

تعتبر المتوالية تركيبة منفصلة discrete structure تمثل قائمة لانهائية من القيم تتولد بطريقة محددة. وهي حالة خاصة من الدالة، لأنها عبارة عن دالة نطاقها الأعداد الطبيعية، فإذا رمزنا لاسم هذه الدالة بالرمز a فإن

$$a : Z \rightarrow S$$

حيث

$$Z = \{0,1,2,\ldots.\}$$

وبدلا من أن نستخدم $a(n)$ كما هو الحال في الدوال، عادة ما نستخدم

$$\{a_n\}$$

للتعبير عن المتوالية.

4.2 أمثلة لبعض المتواليات

مثال(1): إذا كان $a_n = 5^n$ ، حيث $n = 0,1,2,\ldots$

فإن هذه المتوالية يمكن سرد عناصرها كما يلي:

$$\{a_n\} = 1, 5, 25, 125,\ldots$$

مثال(2): إذا كان $a_n = 1/n$ حيث $n = 1, 2, 3,\ldots$

فإن المتوالية :

$$\{a_n\} = 1, 1/2, 1/3, \ldots.$$

لاحظ هنا أن النطاق لا يشمل الصفر لأن ذلك يؤدي إلى القسمة على صفر.

مثال(3): إذا كان $b_n = (-1)^n$ ، حيث $n = 0 ,1 ,2, \dots$

فإن :

$$\{b_n\} = 1, -1, 1, -1,\dots$$

مثال **(4)**: أوجد الحد العاشر من المتوالية:

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53$$

علينا هنا أن نستنتج العلاقة بين الحد والذي يليه. نلاحظ أن الفرق بين الحد والذي يليه هو 6 وبالتالي فإن الحد

العاشر هو $53 + 6 = 59$

4.3 المتوالية الحسابية arithmetic sequence

المتوالية في المثال (4) هي حالة خاصة من المتوالية الحسابية arithmetic sequence .

والشكل العام لها هو :

$$a, a+d , a+2d , a+3d , \dots$$

فمثلا المتوالية:

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53$$

هي متوالية حسابية حيث نلاحظ هنا أن الفرق بين الحد والذي يليه هو 6 وبالتالي فإن $d=6$ $a=5$

مثال(5): هل المتوالية:

$$1, 7, 25, \dots$$

حسابية؟

الإجابة : لا، لأن الفرق بين الحد الأول والثاني لايساوي الفرث بين الحد الثاني والثالث.

مثال(6) بين أن مجموع المتوالية الحسابية

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

هو $n(n+1)/2$

الاثبات:دع

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

يمكننا كتابة المتوالية تنازليا كما يلي

$$S= n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1$$

الآن نقوم بجمع الصيغتين:

$$2S = (1+n) + (2 +(n-1)) + (3+(n-2)) + \ ...+(n+1)$$
$$=(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)$$

حيث نلاحظ وجود n من الحد n+1. أي أن

$$2S= n(n+1)$$
$$S= n(n+1)/2$$

4.4 مجموع المتوالية

أحيانا تكون حدود المتوالية مجموع حدود متوالية أخرى.

مثال(7): ما هي المتوالية

$$a_n = \sum j^2$$

(حيث j من 1 الى n) عندما n=3 وعندما n=5؟

<u>الإجابة:</u>

$$a_n =1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2$$
$$a_3 =1 + 4 + 9= 14$$
$$a_5 =1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

مثال(8): ما هي المتوالية

$$a_n = \sum (-1)^k$$

حيث k من 0 الى n؟

<u>الإجابة:</u>

$$a_n = \quad 1 – 1 + 1 – 1 + ...$$

هنا نلاحظ أن

$a_n= 0$ if $n=even$ زوجي

$a_n= 1$ if $n=odd$ فردي

4.5 المتوالية الهندسية geometric sequence

هي المتوالية

$$a_n = r^n$$

حيث r هو عدد حقيقي. مثلا إذا كانت r=2 فإن المتوالية تكون على النحو التالي:

1 , 2, 4 , 8 , ,,,

مثال(8): ما هي قيمة

$$a_n = \sum r^k$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

<u>الإجابة:</u> المطلوب هنا مجموع متوالية هندسية geometric sequence

حيث

$$a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

ملاحظة:
يمكن حساب مجموع المتوالية الهندسية من القانون:
$\sum r^k = (r^{n+1} - 1) / (r - 1)$
حيث k من 0 الى n . سنثبت هذا القانون في الفصل القادم إن شاء الله.

مثال(9): ما هي قيمة

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{10}$$

الاجابة: هذه متوالية هندسية حيث في هذا المثال

$r = 2 \quad , \quad n = 10$

لذلك فإن $S = (2^{11} - 1)/(2-1) = 2^{11} - 1 = 2047$

4.6 برنامج لمتوالية

مثال(10): اكتب برنامجا بلغة باسكال لطباعة 6 حدود من المتوالية التالية :

1, 2, 6, 24, 120, 720, ..

حيث $a_n = n!$

في كتابة هذا البرنامج نستفيد من العلاقة $(n+1)! = (n+1)n!$

```
 PROGRAM factorial ;
VAR  i , f : INTEGER ;
BEGIN
f = 1 ;
FOR  I := 1  TO  6
BEGIN
WRITE (f : 6 );
```

```
  f = f * i ;
END;
END.
```

4.7 تمـــارين (7)

1) إذا كان

$$a_n = 2(-3)^n + 5^n$$

أوجد :

a) a_0 b) a_1 c) a_4 d) a_5

2) اكتب متوالية الأعداد الأولية prime numbers حيث العدد الأولي هو العدد الذي لايقبل القسمة إلا على نفسه أو على الواحد.

3) اكتب متوالية فيبوناتشي Fibonacci

حيث

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

أي أن كل حد يساوي مجموع الحدين السابقين.

4) اكتب المتوالية $\{a_n\}$ حيث

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

5) ما نوع المتوالية التالية :

3, 6, 12, 24,…

وما هو مجموع 8 حدود الأولى ؟ (بدون اجراء عملية الجمع)

6) استخدم قانون مجموع المتوالية الهندسية لتحويل العدد الثنائي $(11111111)_2$ الى النظام العشري؟

7) احسب:

a) $\sum (k+1)$

حيث k من 1 الى 5 .

b) $\sum (-2)^j$

حيث j من 0 الى 4 .

c) $\sum 3j^0$

حيث j من 1 الى 10 .

d) $\sum(2^{j+1} - 2^j)$

حيث j من 0 الى 8 .

e) $\sum (3^j - 2^j)$

حيث j من 0 الى 8 .

8) اثبت أن

$$\sum (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

حيث j من 1 الى n.

9) اثبت أن

$$\sum 1/[k(k+1)] = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1)$$

حيث k من 1 الى n.

ارشاد:

$$1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$$

10) اكتب برنامجا لطباعة 10 حدود الاولى من المتوالية {n(n+1)}

5

الباب الخامس

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

5.1 مقدمة

إذا أعطيت دالة منطقية $P(n)$ كيف تبرهن أن هذه الدالة قيمتها TRUE لجميع الأعداد الصحيحة $n=0, 1, 2, \ldots$ ؟ هذا ما سندرسه في هذا الباب باستخدام ما يعرف بالاستنتاج الرياضي (أو الاستقراء الرياضي) .

معطيات المسألة هي الدالة المنطقية $P(n)$ والمطلوب اثبات أن

$$P(n) = \text{TRUE} \quad \forall n=0, 1, 2, ..$$

البرهان يعتمد على إتباع الخطوتين التاليتين:

1- التحقق من أن البداية صائبة ، أي أن $P(1) = \text{TRUE}$.

2- التحقق من أن التضمين :

$$P(n) \rightarrow P(n+1)$$

صائب (true) لجميع n في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة .

إذا أثبتنا الخطوتين (1) و (2) فذلك يعني أن : $\forall n\ P(n) = \text{TRUE}$

أي أن الاستنتاج الرياضي يرتكز على النظرية التالية :

$$\boxed{P(1) \wedge (\forall n\ P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall n\ P(n)}$$

والسؤال الذي يفرض نفسه هنا: لماذا إذا تحقق الشرطان المذكوران أعلاه فإن ذلك يعني أن $P(n)=\text{True}$ لجميع n في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة؟

والإجابة أن الشرط الأول يحقق المطلوب في الخطوة الأولى ، والشرط الثاني يحققه في الخطوة الثانية والثالثة الى مالانهاية.
أي أن الاستنتاج الرياضي يقوم على أساس أنه إذا كانت البداية صحيحة وكانت كل مرحلة تؤدي الى المرحلة التي تليها بشكل صحيح فإن جميع المراحل ستكون صحيحة.

5.2 مجموع الأعداد الفردية

نبدأ أول مثال على استخدام فكرة الاستنتاج الرياضي باثبات أن مجموع الأعداد الفردية من 1 إلى $2n - 1$ هو

$$P(n) = 1+3+5+\ldots+(2n - 1) = n^2$$

<u>الإثبات:</u>

أولا نلاحظ أن عندما $n=1$ $\quad P(1) = 1 = (1)^2$

أي أن $P(1)$ صحيحة منطقيا .

الآن افترض أن $P(n)$ صحيحة منطقيا (أي أن $P(n)=n^2$) اثبت أن:

$$P(n+1)= (n+1)^2$$

وهذا يمكن اثباته كما يلي:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n+2-1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n+1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) \end{aligned}$$

$= n^2+(2n+1) = n^2+2n+1= (n+1)^2$ أي أن $P(n+1)$ صحيحة منطقيا ، وبالتالي فإن :

$\forall n\ P(n)$ صحيحة منطقيا لجميع $n=1, 2, 3, \ldots$.

5.3 اثبات المتباينات

يمكن استخدام الاستنتاج الرياضي في اثبات بعض المتاينات.

مثال: أثبت أن :إذا كانت n عدد صحيح $n\geq 0$ فإن $n<2^n$

<u>الإثبات:</u> الخطوة الأولى : بوضع $n=0$ فإن

$$0< 2^0$$

وهي صائبة لأن $1 > 0$.

الخطوة الثانية : افترض أن $P(n)$ صائبة منطقيا ، أي

$n<2^n$

اثبت أن $P(n+1)$ هي أيضا صائبة،

أي المطلوب إثبات أن :

$n + 1 < 2^{n+1}$

وهي صائبة لأن بإضافة 1 لطرفي المتباينة $n<2^n$ نحصل على

$n + 1 < 2^n + 1$

وبما أن $(1<2^n)$ لجميع $n>0$ فإن

$n + 1 < 2^n + 2^n = 22^n = 2^{n+1}$

5.4 مجموع المتوالية الهندسية

أثبت أن مجموع المتوالية الهندسية

$P(n) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$

هو

$[r^{n+1} - 1]/(r - 1)$

حيث $n \geq 1$ ، $r > 1$.

الإثبات:

$P(1) = (r^2 - 1)/(r - 1)$

ولكن $r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1)$

وبما أن $r \neq 1$ فإن

$P(1) = r + 1$

أي أن الصيغة $P(n)$ تتحقق عندما $n=1$. والآن افترض أن $P(n)$ هي صائبة:

$P(n) = (r^{n+1} - 1)/(r - 1) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\begin{aligned}
P(n + 1) &= 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + r^{n+1} \\
&= 1 + r(1 + r^2 + \ldots + r^n) \\
&= 1 + r(r^{n+1} - 1)/(r - 1) \\
&= 1 + (r^{n+2} - r)/(r - 1) \\
&= [r - 1 + (r^{n+2} - r)]/(r - 1) \\
&= (r^{n+2} - 1)/(r - 1)
\end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته.

5.5 رتبة فئة القوى

سبق ،ان ذكرنا الفئة ذات n عنصر لها 2^n فئة جزئية (أي أن رتبة فئة القوى لها هي 2^n) ويمكننا الآن اثبات ذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي.

الإثبات: هذه النظرية صحيحة عندما n=1 لان الفئة ذات العنصر الواحد لها فئتان جزئيتان فقط هما Ø (الفئة الخالية) والفئة نفسها.

الخطوة الثانية هي افتراض أن النظرية صائبة في حالة وجود n عنصر وإيجاد عدد الفئات الجزئية في حالة n + 1 عنصر .

لاحظ أن زيادة عنصر إلى الفئة S سيضاعف من عدد الفترات الجزئية (انظر الملاحظة أدناه) وهذا يعني أن عدد الفئات الجزئية في الفئة التي عناصرها n+1 هو

$$2^n + 2^n = 2\ 2^n = 2^{n+1}$$

وهو المطلوب إثباته .

ملاحظة: لتوضيح أن عدد الفترات الجزئية يتضاعف عند إضافة عنصر واحد للفئة . دع

$$P1 = \{A1, A2, \ldots, Am\}$$

هي فئة القوى للفئة A. إذا أضفنا العنصر a للفئة A فإن فئة القوى تصبح على النحو التالي:

$$P2 = \{A1, A2, \ldots, Am, A1\cup\{a\}, A2\cup\{a\}, .., Am\cup\{a\}\}$$

حيث نلاحظ أن :

$$|P2| = 2m = 2\,|P1|$$

5.6 تمــــارين (8)

1− اثت أن $2^n > n^2$ حيث n عدد صحيح أكبر من 4

2−اثبت أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$

حيث n عدد صحيح موجب .

3− اثبت أن

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n + 1) = [(n+1)(2n+1)(2n+3)]/3$$

حيث n عدد صحيح موجب.

4- أكتب برنامجا للتحقق من القوانين في تمرين (1) ، (2) ، (3) . احسب الطرف الأيمن والأيسر من كل قانون لبعض قيم n وبين أنهما متساويان.

الباب السادس

6

طرق العـــد
Methods of Counting

6.1 مقدمة

الغرض من هذا الباب هو دراسة طرق عد العناصر في فئة معينة وهو موضوع له تطبيقات كثيرة تتعلق بعلم الحاسوب بشكل أساسي (على سبيل المثال في دراسة طرق أمن الحاسوب).

6.2 قاعدة الجمع

إذا كان $|A|$ = عدد العناصر في الفئة A. و عدد العناصر في الفئة= $|B|$

فإن عدد العناصر في اتحاد فئتين A و B يمكن حسابه من العلاقة :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ملاحظة : إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

مثــال: إذا كـان عـدد الطلبـة المـسجلين فـي مقـرر (مبـادئ الحاسـب) هـو 15 ، وعـدد الطلبـة المسجلين في مقرر (باسكال) هو 20 وكان هناك 5 طلبة مسجلون في كلا المقررين فإن:

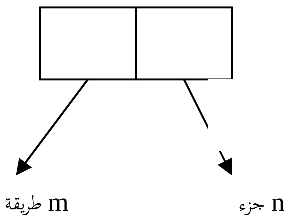
عدد الطلبة في المقررين =

$$|A1| + |A2| - |A1 \cap A2| = 15 + 20 - 5 = 30$$

6.3_ قاعدة الضرب

إذا كان العمل يمكن تقسيمه إلى n من الأجزاء ، وكل جزء يمكن أداؤه بعدد m من الطرق فإن :

عدد الطرق لأداء العمل = $m \times n$



مثال: كم عدد الطلبة يمكن ترقيمهم بحيث يبدأ الترقيم من A01 إلى Z99؟

الإجابة:

نطبق قاعدة الضرب

بما أن عدد الحروف اللاتينية = 26

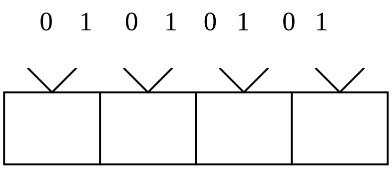
وعدد الأرقام في خانتين من 01 إلى 99 هو 99 فإن:

عدد الطلبة الذين يمكن ترقيمهم بهذه الطريقة = 26×99

$= 2574$

مثال: كم عدد الكلمات الثنائية التي يمكن تكوينها في 4 خانات ثنائية ؟

الإجابة:



بما أن هناك خيارين في كل خانة (هما 0 أو 1) فإن العدد الإجمالي هو

$2\times2\times2\times2 = 16$

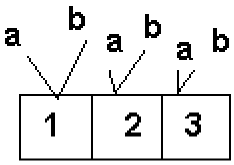
مثال: كم عدد الدوال التي يمكن تعريفها على الفئتين A , B حيث

A = {1, 2, 3}
B ={a, b}

ماهي هذه الدوال؟

الاجابة:

نلاحظ أن كل عنصر في A يقابله اختياران في B هما a أو b على النحو التالي:



لذلك فإن عدد الاختيارات لدينا هو :

$8=2*2*2$

الدوال التي يمكن تعريفها هي:

f1= {(1,a),(2,a),(3,a)}
f2={(1,a),(2,a),(3,b)}
f3={(1,a),(2,b),(3,a)}
f4={(1,a),(2,b),(3,b)}
f5={(1,b),(2,a),(3,a)}
f6={(1,b),(2,a),(3,b)}
f7={(1,b),(2,b),(3,a)}
f8={(1,b),(2,b),(3,b)}

حيث نلاحظ أن عدد الدوال هو $2^3 = 8$

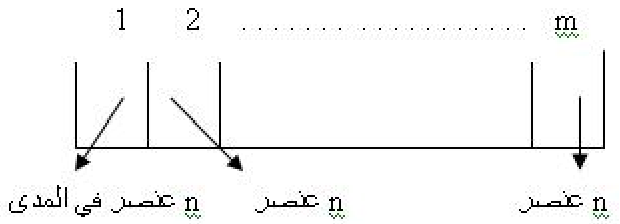
<u>ملاحظة</u>: بصورة عامة

عدد الدوال = $n^m = n\times n\times\ldots\times n$

حيث

m = عدد عناصر النطاق

n = عدد عناصر المدى



مثال:

إذا كانت

$A= \{1, 2\} \quad B=\{a, b, c\}$

كم عدد الدوال من نوع 1−1 التي يمكن تعريفها من A الى B؟

الاجابة:

في هذا المثال، الدالة من نوع 1−1 هي الدالة التي فيها f(1) لا يساوي f(2)

وحيث أنه يوجد 3 اختيارات لقيم f(1) وفي كل اختيار يبقى لنا اختياران فقط ل f(2) وبتالي نطبق قاعدة الضرب

عدد الدوال = 3*2 = 6

والدوال هي:

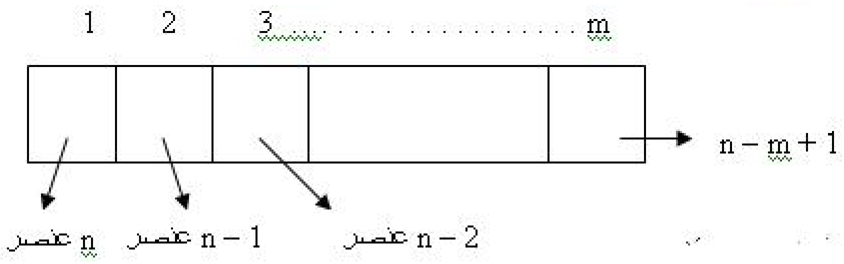
F1 = { (1,a), (2,b)}
F2 = { (1,a), (2, c) }
F3 = { (1,b), (2,a)}
F4= { (1,b), (2,c)}
F5={ (1,c), (2,a) }
F6 ={ (1,c), (2,b)}

ملاحظة:

بصورة عامة إذا هناك m عنصر في النطاق و n عنصر في المدى فإن عدد الدوال من نوع 1−1 التي يمكن تعريفها هو

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)$$

وذلك على النحو التالي:



فإذا كانت m=n (أي أن الدالة من نوع 1–1 وفوقية) فإن عدد الدوال التي يمكن تعريفها هو n!.

مثال: كم عدد الفئات الجزئية التي يمكن تكوينها من فئة عدد عناصرها n ؟

لاحظ هنا أن كل فئة جزئية يمكن تمثيلها بعدد ثنائي . فمثلا إذا كانت الفئة

$S = \{a, b, c\}$

فإن

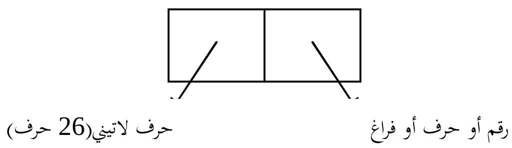
$$000 \leftrightarrow \varnothing$$
$$100 \leftrightarrow \{a\}$$
$$010 \leftrightarrow \{b\}$$
$$011 \leftrightarrow \{b, c\}$$
$$111 \leftrightarrow \{a, b, c\}$$

ومن هذا نرى أن عدد الفئات الجزئية هو

$$(11\ldots1)_2 +1= 1+2+\ldots+2^{n-1} +1 = (2^n - 1)+1= 2^n$$

حيث تمت إضافة 1 مقابل الفئة الخالية.

مثال: كم عدد المتغيرات في لغة برمجة بحيث يأخذ المتغير الشكل التالي:



الإجابة: عدد المتغيرات = (26 + 10 + 1) 26

= 37 × 26

= 962

مثال: كم عدد كلمات السر التي يمكن تكوينها في 4 خانات حيث كل خانة يمكن أن تحتوي على رقم أو حرف.

<u>الإجابة:</u> $(26+10)^4 = 36^4$

$= 1,679,616$

لاحظ هنا أن لدينا 26 حرف و 10 أرقام . أي أن عدد الاختيارات في كل خانة هو $10 + 26 = 36$

6.4 تمـــارين (9)

1- إذا كان عدد الطلبة في قسم الحاسوب هو 16 وعدد الطلبة بقسم الإدارة هو 23 :

(أ) ما هو عدد الطرق لتكوين فريق من طالبين، واحد من قسم الحاسوب والآخر من قسم الإدارة ؟

(ب) كم عدد الطرق لاختيار طالب واحد من القسمين؟

2- اختبار من نوع الاختيارات المتعددة به 10 أسئلة ، بكل سؤال 4 اختيارات. أ – ما عدد الطرق التي يمكن أن يجيب بها الطالب (دون أن يترك أي سؤال بدون إجابة) ؟

ب- ما عدد الطرق التي يمكن أن يجيب بها الطالب مع إمكانية ترك أسئلة بدون إجابة ؟

3- إذا كان هناك عدد 5 رحلات من طرابلس إلى روما ، وكان هناك 10 رحلات من روما إلى لندن ، فكم عدد الطرق التي يمكن أن يسافر بها من طرابلس إلى لندن عن طريق روما ؟

4- كم عدد الكلمات التي يمكن كتابتها في 3 خانات مستخدما الأحرف الانجليزية ؟

5- كم عدد الكلمات ذات 3 أحرف بشرط أن تبدأ بالحرف A.

6- كم عدد الكلمات الثنائية في 10 خانات ثنائية بشرط أن تبدأ بالواحد وتنتهي بالواحد ؟

6.5 التباديل Permutations

إذا كانت الفئة S تحتوي على العناصر {a1,a2,…,an}

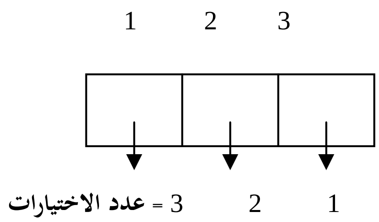
فكم عدد الطرق التي يمكن بها سرد هذه العناصر ؟

مثلا الفئة {1,2,3} يمكن سردها بالطرق التالية:

$$\begin{aligned} S &= \{1,2,3\} \\ &= \{1,3,2\} \\ &= \{2,3,1\} \\ &= \{2,1,3\} \\ &= \{3,1,2\} \\ &= \{3,2,1\} \end{aligned}$$

أي يوجد 6 طرق لترتيب عناصر هذه الفئة. لاحظ عدم تكرار العناصر في كل ترتيب .

ويمكن حساب عدد هذه الطرق من الشكل التالي:



إذا اخترنا عنصرا في الخانة الأولى من بين العناصر الثلاثة، يبقى في الخانة الثانية اختياران فقط ، وفي الخانة الثالثة اختيار واحد. وباستخدام قاعدة الضرب فإن:

عدد الترتيبات = $3\times2\times1 = 3!$

$= 6$

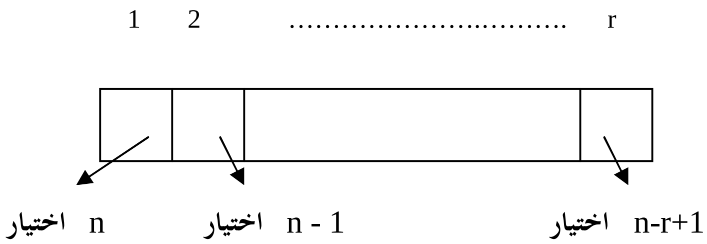
بصورة عامة إذا كان عدد عناصر الفئة هو n فإن:

$$P(n) = n!$$

هو عدد الترتيبات التي يمكن عملها من n عنصر. وتسمى P(n) هنا (permutation) التباديل.

ماذا لو نريد ترتيب r من العناصر حيث لدينا n من الاختيارات لكل عنصر؟

في هذه الحالة يكون الوضع بالشكل التالي:



عدد الاختيارات (عدد الترتيبات) هو

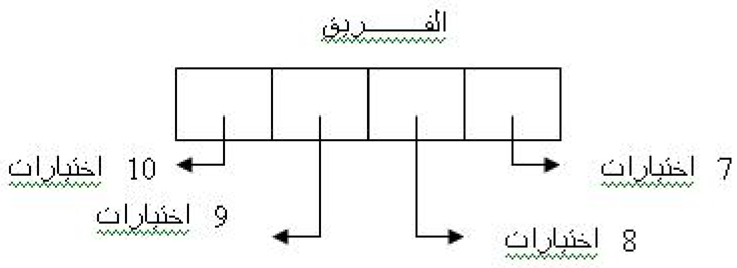
$$= n(n - 1)....(n - r + 1)$$

ونرمز لها بالرمز $p(n,r)$ وتسمى r-permutation

لاحظ أن:

$$P(n,r) = n!/(n - r)!$$

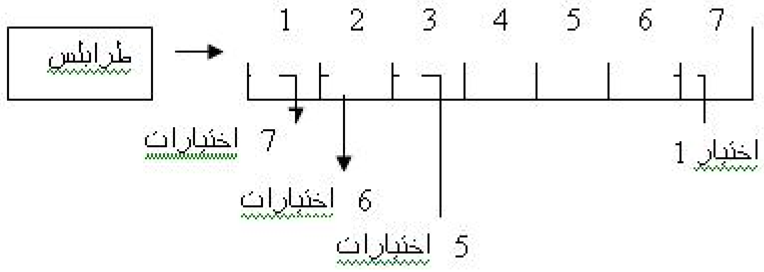
مثال: ما عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من بين 10 حروف إذا كان عدد الخانات هو 4 مع عدم تكرار الحرف في الكلمة .



الإجابة: عدد الكلمات هو

$$P(10,4) = 10!/(10 - 4)! = 10!/6!$$
$$= 10\times 9\times 8\times 7 = 5040$$

مثال: بائع متجول يريد زيارة 8 مدن ابتداء من طرابلس ،والمدن الباقية بطريقة عشوائية وبأي ترتيب. ما عدد الطرق التي يمكن أن يزور بها كل المدن (بشرط عدم زيارة المدينة أكثر من مرة)



عدد الاختيارات (عدد الطرق) هو

$$7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$$

ملاحظة: إذا أراد البائع حساب أقصر طريق لزيارة كل المدن،تسمى المسألة

TSP = Traveling Salesman Problem

أي مسألة البائع المتجول.

6.6 التوافيق Combinations

إذا قمنا باختيار m عنصر من فئة عدد عناصرها n حيث $m \le n$ بغض النظر عن ترتيب هذه العناصر فإن هذا الاختيار يسمى تركيبة (أو توفيق). أي أن الترتيب هنا غير مهم، بمعنى أن (عمر وعلي) هما (علي وعمر) لافرق.

مثال(1): ما عدد الاختيارات لتشكيل لجنة من 3 أعضاء من بين 5 مرشحين؟

في هذا المثال نلاحظ أن اللجنة تتكون من 3 أعضاء بغض النظر عن ترتيبهم، مثلا اللجنة {1,2,3} هي نفس اللجنة {1,3,2} أي أن الترتيب هنا غير مهم. أو بتعبير آخر أن الفئة (التوفيق combination) {1,2,3} نفس التوفيق {1,3,2} ونفس التوفيق {2,3,1} وبالتالي فإن عدد الاختيارات في حالة التوافيق أقل من الاختيارات في حالة التباديل permutation.

نظرية: عدد التركيبات (التوافيق) r-combinations من فئة ذات n عنصر هو

$$C(n, r) = n! / r!(n - r)!$$

<u>ملاحظة :</u> أحيانا نستخدم الرمز

$$\binom{n}{r} = C^{n}_{1} = C\,(n,r)$$

ويسمى هذا الرقم بمعامل ذات الحدين binomial coefficient

بهذا فإن عدد الاختيارات لتشكيل لجنة من 3 أعضاء من بين 5 أشخاص هو :

$$C^{5}_{3} = C\,(5,3) = 5!/(3!\ 2!) = (4\times5)/2 = 10$$

مثال(2): استخدم نظرية ذات الحدين لحساب $(x + y)^4$

<u>الإجابة:</u>

$$(x+y)^4 = C^4_0\ x^4 + C^4_1\ x^3y + C^4_2\ x^2y^2 + C^4_3\ xy^3 + C^4_4\ y^4$$

حيث

$$C^4_0 = 4!/4! = 1$$
$$C^4_1 = 4!/3! = 4$$
$$C^4_2 = 4!/(2!\ 2!) = 6$$

أي أن:

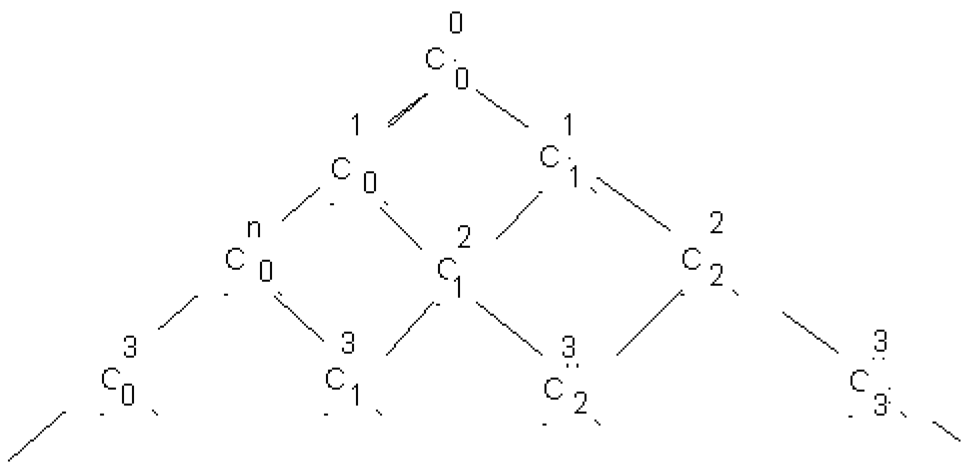
$$(x + y)^4 = x^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + y^4$$

6.7 مثلث باسكال Pascal Triangle

يستعمل لحساب C^n_k من قانون باسكال Pascal Identity

$$C^{n+1}_{k} = C^{n}_{k} + C^{n}_{k-1}$$

كالتالي:



مثلث باسكال

مع ملاحظة أن

$$C(n, 0) = C(n, n)=1$$

بتطبيق قانون باسكال نحصل على باقي القيم كما يلي:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

6.8 تمـــارين (10)

1− أكتب جميع التباديل permutations للفئة {a, b, c}

2- كم كلمة طولها 6 أحرف يمكن تكوينها من الأحرف $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ بشرط أن تنتهي بحرف a وعدم تكرار أي حرف .

3- أحسب

a) $P(6,3)$
b) $P(6,5)$
c) $P(8,1)$

4- كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها في 5 خانات إذا كان لدينا 9 أحرف، وبشرط عدم تكرار أي حرف .

5- جمعية ذات 25 عضو، تتكون لجنة الإدارة من 4 أعضاء. كم عدد الاختيارات لتشكيل اللجنة من بين أعضاء الجمعية؟

6- تحتوي اللغة الانجليزية على 26 حرفا، منها 5 متحركات vowels وأخرى ساكنة consonant عددها 21. كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من 6 أحرف بحيث يوجد حرف متحرك واحد بالكلمة ؟

7- إذا كان بالمؤسسة 10 رجال و 15 امرأة . كم عدد الطرق لتكوين لجنة ذات 6 أعضاء بشرط أن يكون هناك عدد متساوي من الرجال والنساء باللجنة؟

8- كم عدد المباريات التي يمكن إجراؤها في الدوري إذا كان عدد الفرق 10 بحيث لابد أن يقابل كل فريق الفريق الآخر؟

9- كم عدد الكلمات الثنائية ذات طول 10 بت وتحتوي على ثلاثة "1" وعلى سبعة "0" ؟

10- اثبت قانون باسكال

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n$$

11- اكتب برنامجا يطبع 10 أسطر الأولى من مثلث باسكال

الباب السابع 7

العــلاقات Relations

7.1 مقدمة

العلاقة الثنائية من الفئة A الى الفئة B

Binary Relation from A to B

هي فئة جزئية من الفئة $A \times B$.

أي أنها مجموعة من الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a \in A$, $b \in B$.

سندرس في هذا الباب أنواع العلاقات وطرق تمثيلها في الحاسوب.

7.2 أمثلة

مثال(1):

إذا كان الزوج المرتب (a, b) تعني أن الطالب a مسجل في المقرر b ، فهذا يعرّف علاقة.

مثلا إذا كان(أحمد آدم) مسجل بالمقرر (التراكيب المنفصلة) فإن الزوج المرتب:

(التراكيب المنفصلة ، أحمد آدم)

يعتبر عضوا في هذه العلاقة .

مثال(2):

إذا كانت العلاقة R تحتوي على الأزواج المرتبة (x, y) التي تعني أن x مدينة في البلد y ، فهل ينتمي العنصر (Tripoli, Egypt) إلى العلاقة R.؟

الإجابة:

(لا) لان طرابلس Tripoli تقع في ليبيا (أو لبنان) وليس في مصر Egypt.

مثال(3):

إذا كان

$A = \{0, 1, 2\}$ $\quad\quad B = \{a, b\}$

$R = \{(0, a), (0,b), (1, a), (2, b)\}$

فإن R تعتبر علاقة بين B , A حيث

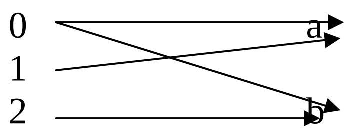
$(1,b) \notin R$ $\quad\quad (0,a) \in R$

أو نستخدم التعبير (بنفس المعنى)

$0 \; R \; a$

$1 \; \not R \; b$

هذه العلاقة يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي:



أو عن طريق جدول كالآتي:

R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

7.3 الـدالة Function

تعتبر الدالة نوعا خاصا من العلاقات، أي أنها أيضا فئة من الأزواج المرتبة ولكن بشرط أن يكون لكل عنصر في النطاق A عنصر واحد يقابله في المدى B .

لاحظ في المثال السابق أن العلاقة ليست دالة لأن العنصر 0 يقابله عنصران في المدى هما b ., a

بمعنى أن كل دالة علاقة وليست كل علاقة دالة .

أي أن العلاقة يمكن أن تكون من نوع one-to-many واحد–للعديد ولكن الدالة لا يمكن أن تكون من هذا النوع.

لاحظ أيضا أن العلاقة يمكن أن تكون بين الفئة A ونفسها، ونقول في هذه الحالة أن العلاقة على الفئة A.

مثال:

إذا كانت العلاقة R معرفة على الفئة $A = \{1,2,3,4\}$ بحيث (a, b) تعني أن:

a divides b

أي b تقبل القسمة على a ، أوجد العلاقة R بحيث $b \in A$ ؟

الإجابة:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$

مثال:

مثل العلاقة R (في المثال السابق) بجدول.

الإجابة:

R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			x	
4				×

مثال: اسرد عناصر العلاقة R حيث

$$R = \{(a, b) : a \text{ and } b \text{ are positive integer and } a \le b\}$$

الإجابة:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 2), (2, 3), \ldots, (3, 3), (3,4), \ldots\}$$

أي أن R تحتوي على مالانهاية من العناصر .

مثال: كم عدد العلاقات التي يمكن تعريفها من الفئة A الى B إذا كانت A ذات n عنصر و B ذات m عنصر؟

عدد عناصر الفئة الشاملة $A \times B$ هو nm
وبما أن عدد الفئات الجزئية في أي فئة تحتوي على k من العناصر هو 2^k فإنه يمكن تعريف 2^{nm} علاقة ثنائية .

7.4 أنواع العلاقات

1– العلاقة الانعكاسية reflexive relation

هي العلاقة على الفئة A بحيث :

$$\forall x \in A \quad x\,R\,x$$

مثال:

العلاقة a divides b

هي علاقة انعكاسية reflexive لأن كل عدد يقبل القسمة على نفسه وبالتالي فإن (x , x) تنتمي إلى هذه العلاقة .

2– العلاقة المتماثلة symmetric relation

هي العلاقة على الفئة A بحيث $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in R \leftrightarrow (b, a) \in R$$

أي (بتعبير آخر)

$$a\ R\ b \leftrightarrow b\ R\ a$$

3– العلاقة اللامتماثلة anti-symmetric Relation

هي العلاقة التي يتحقق فيه الشرط :

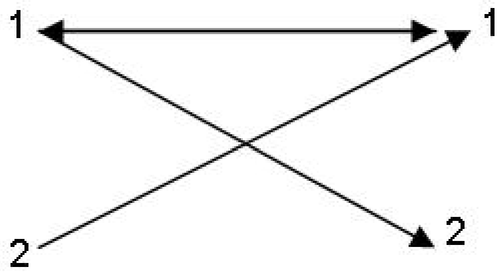
$$(a\ R\ b) \wedge (b\ R\ a) \leftrightarrow a = b$$

مثال:

العلاقة التالية متماثلة symmetric relation

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

كما مبين بالشكل التالي:



علاقة متماثلة symmetric

مثال:

العلاقة التالية لا متماثلة anti symmetric

$$R = \{(1,1)\ ,\ (1,2)\}$$

مثال:

ما نوع العلاقة:

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in Z\ ,\ x \geq y\ \}$$

الإجابة: هذه العلاقة لا متماثلة لأن

$$x \geq y \text{ and } y \geq x \leftrightarrow x=y$$

أي أن

$$x\ R\ y \wedge y\ R\ x \leftrightarrow x = y$$

<u>4-</u> العلاقة الانتقالية Transitive Relation

هي العلاقة التي تحقق الأتي:

$$\forall a, b, c \in A \text{ if } a\ R\ b \wedge b\ R\ c \text{ then } a\ R\ c$$

أي إذا كانت (a, b) ، (b, c) تنتمي إلى العلاقة R فإن (a, c) تنتمي إلى R أيضا.

مثال: العلاقة التي عناصرها (x,y) حيث y , x عدد صحيح موجب بحيث

$$x > y$$

تعتبر علاقة انتقالية لأن

$$(a > b) \wedge (b > c) \rightarrow a > c$$

مثال: العلاقة: x شقيق y

هي علاقة انتقالية لأن إذا كان a شقيق b وكان b شقيق c فهذإ يعني أن a شقيق c.

مثال: هل العلاقة x ابن خال y علاقة انتقالية ؟

الإجابة طبعا لا !

هل العلاقة (x إبن عم y) انتقالية ؟

الإجابة أيضا لا، لأن ابن عم ابن عمك قد يكون شقيقك وليس ابن عمك.

7.5 العلاقات بين مجموعة من الفئات n-ary Relations

ناقشنا حتى الآن العلاقة الثنائية (أي العلاقة بين فئتين) ولكن قد يوجد أحيانا 3 فئات (وليس اثنين فقط) تربطها علاقة ما .

مثلا

$R = \{(a, b, c) : a > b > c\}$

حيث c , b , a أعداد صحيحة موجبة

في هذه الحالة

$$(3,2,1) \in R$$
$$(1,2,3) \notin R$$

ملاحظة: يسمى العنصر (a, b , c) Triple أي ثلاثي .

بصورة عامة يمكن أن تكون العلاقة على النحو التالي:

$$R = \{(a_1,a_2,..,a_n): a_1>a_2>\ldots> a_n\}$$

هذا المثال بين الفئات:

$$A_1,A_2, .., A_n$$

حيث $a_i \in A_i$ ويسمى العنصر

$$(a_1, a_2, \ldots,a_n)$$

n-tuple (نوني)

مثال: إذا كانت عناصر العلاقة R هي الرباعي:

(name, id ,major, GPA).

حيث name اسم الطالب ، id رقم الطالب ، major تخصص الطالب ، GPA متوسط درجاته فإن R علاقة ذات 4-tuple ويمكن تمثيلها بجدول به 4 أعمدة، عمود لكل فئة.

ملاحظة: يسمى الرباعي(name, id , major, GPA) بالسجل record في قواعد البيانات.

حيث تتكون قاعدة البيانات Database من مجموعة سجلات (أي مجموعة n-tuple) وكل عنصر في السجل يسمى حقل field.

وتوضع العلاقة في قاعدة البيانات على شكل جدول table.

ويكون للجدول مفتاح رئيسي primary key وهو عبارة عن قيمة تميز كل سجل عن الآخر، مثلا رقم الطالب id في جدول بيانات الطلبة.

7.6 تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات
Representing relations using matrices

يمكن تمثيل العلاقات بين الفئات المحدودة باستخدام المصفوفات الثنائية.

فإذا كانت

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

فإن العلاقة R من A إلى B يمكن تعريفها كالتالي:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

مثال: دع

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,2\}$

حيث

$$a \, R \, b \leftrightarrow a > b$$

كيف نمثل هذه العلاقة بالمصفوفة M ؟

الإجابة:

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

حيث نلاحظ أن:

$$M_{11} = 0 \leftrightarrow (1,1) \notin R$$
$$M_{12} = 0 \leftrightarrow (1,2) \notin R$$
$$M_{21} = 1 \leftrightarrow (2,1) \in R$$
$$M_{22} = 0 \leftrightarrow (2,2) \notin R$$
$$M_{31} = 1 \leftrightarrow (3,1) \in R$$
$$M_{32} = 1 \leftrightarrow (3,2) \in R$$

مثال: إذا كان

$$A = \{a_1, a_2 , a_3 \}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4 , b_5\}$$

وكانت المصفوفة

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمثل العلاقة بين A و B ، ما هي عناصر هذه العلاقة ؟

الإجابة:

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

ملاحظات:

(1) إذا كانت M مصفوفة مربعة فإن العلاقة R تعتبر انعكاسية reflexive إذا كانت عناصر القطر في المصفوفة M كلها تساوي1 ، أي:

$$m_{ii} = 1$$

أو بتعبير آخر:

$$\sum m_{ij} = n$$

(2) إذا كان M مصفوفة مربعة وكانت أيضا متماثلة أي:

$$M_{ij} = M_{ji}$$

فإن العلاقة R أيضا متماثلة symmetric

(3) إذا كانت المصفوفة M تحقق الآتي:

$$m_{ij} = 0 \rightarrow m_{ji} = 1$$
$$m_{ij} = 1 \rightarrow m_{ji} = 0$$

فإن العلاقة R تعتبر لامتماثلة anti-symmetric

مثال: دع

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمثل العلاقة R . هل هذه العلاقة :

أ- انعكاسية reflexive

ب- متماثلة symmetric

ج- لامتماثلة anti symmetric

إجابـة (أ) "نعم انعكاسية" لأن القطر كله 1.

وإجابة (ب)"نعم متماثلة" لآن M مصفوفة متماثلة.

وإجابة (ج) "لا ليست لامتماثلة" بطبيعة الحال لأنها متماثلة .

7.7 تمـــارين (11)

(1) إذا كانت R علاقة من A إلى B حيث:

$$A = \{0,1,2,3,4\}$$
$$B = \{0,1,2,3\}$$

أوجد العلاقة a R b حيث

(أ) $a = b$

ب) $a + b = 4$

ج) $a > b$

(2) بين نوع العلاقات التالية :

a) {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)}
b) {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)}
c) {(2,4),(4,2)}

(3) ما نوع العلاقات التالية :

أ- x أطول من y.

ب- x ، y مولودان في نفس اليوم.

ج- x ، y لهما نفس الاسم.

د- x ، y لهما نفس الجد.

علما بأن العلاقة معرفة على فئة جميع البشر .

(4) ما نوع العلاقات في تمرين (1).

(5) ما هي عناصر العلاقة ذات الثلاثيات (a, b, c) بحيث

$0 < a < b < c < 5$ ؟

(6) مثل العلاقات التالية باستخدام المصفوفة الثنائية :

a) {(1,1),(1,2),(1,3)}
b) {(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)}
c) {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}
d) {(1,3),(3,1)}

(7) بين ما إذا كانت العلاقة R التي تمثلها المصفوفة التالية:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أ- انعكاسية.

ب- متماثلة.

ج- لا متماثلة.

7.8 علاقات التكافؤ Equivalence Relations

تسمى العلاقة على الفئة A علاقة تكافؤ إذا (وفقط إذا) كانت:
انعكاسية reflexive، وتماثلية symmetric، وانتقالية transitive.

مثال: دع العلاقة

$$a\ R\ b$$

تعني أن a ، b كلمتان بنفس عدد الأحرف.

هل هذه العلاقة انعكاسية؟

نعم لآن a R a (أي أن الكلمة تناظر نفسها من حيث عدد الأحرف).

هل هي علاقة متماثلة؟

نعم فإذا كانت الكلمة ذات نفس عدد الأحرف مثل كلمة أخرى فإن تلك الكلمة لها نفس عدد الأحرف مثل الكلمة الأولى.

وأخيرا **هل هي علاقة انتقالية؟**

نعم لأن إذا كان لدينا 3 كلمات، وكانت الكلمة الأولى ذات n حرف، وكانت الكلمة الثانية مساوية لها في عدد الأحرف، فإن عدد حروفها يكون n أيضا، وإذا الكلمة الثالثة مساوية للثانية في عدد الأحرف فإن أحرفها سيكون أيضا n .

من هذه الخصائص الثلالثة نستنتج أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

مثال: هل العلاقة

$$a\ R\ b \leftrightarrow a^2 = b^2$$

علاقة تكافؤ ؟

نلاحظ أن هذه العلاقة :

1. انعكاسية reflexive لأن $a^2 = a^2$
2. متماثلة symmetric لأن $a^2 = b^2$ تكافئ $b^2 = a^2$
3. انتقالية transitive لأن إذا كان $a^2 = b^2$ و $b^2 = c^2$ فإن $a^2 = c^2$

لذلك فهي تحقق الشروط الثلاثة في علاقة التكافؤ.

مثال: بين أن العلاقة

$$R = \{(a, b) : a = b \pmod m\}$$

علاقة تكافؤ.

ملاحظة : إذا كان b , a عددين صحيحين فإن :

$$a = b \pmod m \leftrightarrow \exists \text{ integer } k :$$
$$a = b + km$$

مثلا $13 = 1 \pmod{12}$

لآن $13 = 1 + (1)(12)$

و

$$26 = 2 \pmod{12}$$

لآن $26 = 2 + (2)(12)$

$$35 = 5 \pmod 6$$

لآن $35 = 5 + (5)(6)$

والآن لإثبات علاقة التكافؤ نلاحظ أن هذالعلاقة:

1. انعكاسية reflexive لأن

$$a R a \leftrightarrow a = a \pmod m$$

لأن $a = a + (0)m$

2. متماثلة symmetric لأن

$$a R b \rightarrow a = b + km \rightarrow b = a - km$$
$$\rightarrow b = a + (-k)m \rightarrow b R a$$

3. انتقالية transitive لأن

$$a R b \wedge b R c \rightarrow$$
$$a = b + km \wedge b = c + Lm$$
$$a = c + Lm + km = c + (L + k)m$$
$$= c + n m$$

حيث k , L ، n=k+L أعداد صحيحة. أي أن a R b .

7.9 فصيلة التكافؤ Equivalence Class

إذا كانت R علاقة على الفئة A فإن الفئة

$$[a]R = \{s: (a, s) \in R\}$$

حيث a عنصر في الفئة A ، تسمى [a]R بفصيلة تكافؤ للعنصر a.

<u>مثال 1</u>: دع A تمثل فئة طلبة الكلية والعلاقة aRb تعني أن a و b طالبان يدرسان في نفس القسم

دع c = طالب من قسم الرياضيات.

إذن فإن الفئة

$$[c]R = \{s : (c, s)\in R\}$$

تمثل فصيلة جميع طلبة قسم الرياضيات.

<u>لاحظ</u> أن علاقة التكافؤ تقسم الفئة A إلى فئات جزئية لايوجد بينها تقاطع، أي أن تقاطعها هو فئة خالية.

فمثلا تقاطع فئة طلبة الرياضيات وطلبة النبات هو فئة خالية. فإذا كان c طالب من قسم الرياضيات و d طالب من قسم النبات فإن تقاطع الفئتين:

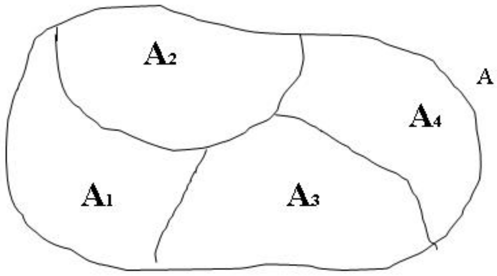
$$[c]R \cap [d]R = \emptyset$$

تسمى هذه العملية بالتجزئة partitioning . أي من أهم استخدامت علاقات التكافؤ أنها تقسم الفئة الشاملة الى فئات جزئية غير متقاطعة.

حيث (في المثال السابق) يمكننا تجزئة الفئة (طلبة الكلية) إلى فئات جزئية، كل واحدة تمثل طلبة قسم معين. أي أن

$$\cap A_i = \emptyset \qquad\qquad A = \cup A_i$$

والشكل التالي يبين كيف نقسم الفئة الشاملة الى 4 فئات جزئية:



تجزئة الفئة A

<u>مثال 2</u>:

إذا كان لدينا العلاقة :

$$a \equiv b \pmod 4$$

فإن

الفصائل الأربعة

$$[0] = \{\ldots,-8, -4, 0, 4, 8,\ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots,-7, -3, 1, 5, 9,\ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots,-6, -2, 2, 6, 10,\ldots\}$$
$$[3] = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11,\ldots\}$$

هي فصائل تكافؤ لأن تقاطعها فارغ واتحادها هو جميع الأعداد الصحيحة.

7.10 برامج لاختبار العلاقات

مثال1 : أكتب برنامج يقرأ المصفوفة الثنائية m ويختبر إذا ما كانت تمثل علاقة انعكاسية ؟

في هذا البرنامج نستخدم الخاصية: $\sum m_{ii} = n$ لاختبار العلاقة الانعكاسية.

```
Program Reflexive ;
VAR  s , i , j , n : INTEGER;
                        m : ARRAY[1..10,1..10] of  INTEGER;
            BEGIN
                         Readln(n) ;
                          FOR i:=  1  TO  n  DO
                         FOR j:=  1  TO  n  DO
                         Begin
                              WRITE('Enter m',i,j,  '→ ') ;
                              Readln(m[i,j]) ;
                          END ;
                          s:=0 ;
                          FOR i:= 1  TO  n   DO
                               s:= s + m[i,i] ;
                          IF (s = n) THEN
                                WRITELN('Reflexive') ;
                          ELSE
                                WRITELN('Not reflexive') ;
                   END .
```

مثال4 : أكتب جزءا من برنامج لاختبار المصفوفة هل هي متماثلة أو غير متماثلة.

```
……..
        ……..
        FOR i:= 1    TO n   DO
        FOR j:= i + 1   TO  n  DO
             IF (m[i,j] = m[j,i]) THEN
                  flag:= 1
             ELSE
             BEGIN
                  flag:= 0 ;
                  GOTO   LB1 ;
             END
LB1 :     IF (flag = 1)THEN
               WRITLN('symmetric')
          ELSE
               WRITELN('Not symmetric') ;
```

7.11 تمـــارين (12)

1- أي من العلاقات التالية على الفئة {0,1,2,3} تعتبر علاقة تكافؤ ؟

أ- {(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)}

ب- {(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

ج- {(0,0),(1,1)(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)}

د- {(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}

هـ - {(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)}

2- بين أن العلاقة x R y حيث x , y نضيدان strings طول كل منهما 3 بت أو أكثر ،بحيث x , y يتفقان في الخانات الثلاثة الأولى، هي علاقة تكافؤ على فئة النضائد ذات طول 3 بت فما فوق.

3- أوجد فصيلة التكافؤ للعلاقات التالية:

(أ) a R b ↔ a , b طالبان من نفس العمر.

(ب) x R y ↔ x , y طالبان يتكلمان نفس اللغة (اللغة الأم).

4- أوجد جميع فصائل التكافؤ للعلاقة

$$a = b \pmod 5$$

5- أكتب برنامج لقراءة مصفوفة ثنائية مربعة M تصف العلاقة R واختبار ما إذا كانت العلاقة لا متماثلة anti symmetric

7.11 الترتيب الجزئي Partial Ordering

تعريف:

إذا كانت العلاقة R على الفئة S من نوع:

(1) انعكاسية Reflexive

(2) لا متماثلة Anti symmetric

(3) انتقالية Transitive

فإن هذه العلاقة تسمى ترتيب جزئي. أما الفئة S مع العلاقة R فتسمى فئة مرتبة جزئيا Poset حيث

Poset = Partially ordered set

ويرمز لها بالرمز (S,R).

مثال1: دع Z تمثل فئة الأعداد الصحيحة و x R y تعني $x \geq y \quad x \in Z , y \in Z$

هل هذه العلاقة ترتيب جزئي ؟

الإجابة:

نعم فهي تحقق الشروط الثلاثة (انعكاسية لأن $x\geq x$ ، ولا متماثلة لأن $y \geq x$، و $x\geq y$ إذا وفقط إذا $x=y$ ، وانتقالية لأن $x\geq y$ و $y\geq z$ يعني أن $x\geq z$ ، لذلك فهي ترتيب جزئي لفئة الأعداد الصحيحة Z.

مثال2: دع $x\ D\ y$ تعني $x, y \in Z^+$

و أن x تقبل القسمة على y ، وحيث Z^+ هي فئة الأعداد الصحيحة الموجبة. هل هذه علاقة ترتيب جزئي ؟

<u>الإجابة:</u>

نعم لأنها تحقق الشروط الثلاثة (أي أن العلاقة انعكاسية ولامتماثلة وانتقالية) لذلك فإن (Z^+, D) هي فئة مرتبة جزئيا Poset .

مثال3: دع $a\ R\ b$ تعني $a \subseteq b$ حيث $a, b \in P(S)$

$P(S)$ هي فئة القوى للفئة S

هل $(P(S),\subseteq)$ فئة مرتبة جزئيا Poset ؟

<u>الإجابة: يمكنك التحقق من الشروط الثلاثة</u>

1-حيث أن $A \subseteq A$ كلما كانت A فئة جزئية من S. أي أن العلاقة $\subseteq$ انعكاسية reflexive

2- كما أنها لامتماثلة لأن:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$$

3-وهي أيضا انتقالية لأن:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$$

لذلك فإن $\subseteq$ هي ترتيب جزئي على فئة القوى $P(S)$، كما أن $(P(S),\subseteq)$ تعتبر ترتيب جزئي Poset.

<u>**ملاحظة:**</u>

ليس كل الفئات في فئة القوى $P(S)$ فئات جزئية من بعضهم . مثلا إذا كانت :

$$S = \{1,2,3\}$$

فإن $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 3\}$

أي لا يجوز المقارنة بين هاتين الفئتين بالعلاقة $\subseteq$.

تعريف:

في الفئة المرتبة جزئيا (S, R) إذا كان a ، b عنصران في الفئة S بحيث

إما $a\,R\,b$ أو $b\,R\,a$

فإن العنصرين a , b قابلان للمقارنة comparable.

أما إذا كان ذلك غير صحيح فيعتبران غير قابلين للمقارنة incomparable.

مثال4: هل العنصران 3 و 9 قابلان للمقارنة في الترتيب الجزئي (Z^+, D) (حيث D تعني علاقة قابلية القسمة)؟

الإجابة:

نعم لأن 9 تقبل القسمة على 3 .

مثال5: هل العنصران 5 و 7 قابلين للمقارنة في الترتيب الجزئي (Z^+, D)؟

الإجابة:

لا لأن 5 لاتقبل القسمة على 7 وأيضا 7 لاتقبل القسمة على 5 .

7.12 الترتيب الكلي Total order

إذا كان كل عنصرين في الفئة المرتبة جزئيا(S, R) قابلين للمقارنة فإن هذه الفئة تعتبر مرتبة كليا Total order كما تسمى ترتيبا خطيا Linear order

مثال1: الفئة $(Z, \leq)$ حيث $\leq$ تعني (أقل من أو تساوي) هي ترتيب كلي (خطي) لأن كل عددين صحيحين يكون مقارنتهما على النحو $a \leq b$ صحيحة.

مثال2: الفئة (Z^+, D) حيث | تعني قابلية القسمة ليست مرتبة ترتيبا كليا لأن بعض الأعداد الصحيحة لا تقبل القسمة على بعض الأعداد الأخرى.

7.14 الترتيب الحسن Well-Order

تعريف:

إذا كانت (S,R) ذات ترتيب كلي وكانت كل فئة جزئية من S لها عنصر أدنى Least Element فإن (S, R) تعتبر حسنة الترتيب well-ordered.

مثال1: هل الترتيب $(Z, \leq)$ ترتيب حسن؟

حيث Z هي فئة الأعداد الصحيحة.

الاجابة : نعم فهو ترتيب كلي وأي فئة من الأعداد الصحيحة لها عنصر هو الأصغر من باقي العناصر يسمى العنصر الأدنى.

مثال2: دع $S = Z^{+} \times Z^{+}$

أي أن S فئة الأزواج الصحيحة الموجبة .

ودع العلاقة $(a1,a2) \leq (b1,b2)$

تعني أن $a1 < b1$

أو $a1 = b1$ and $a2 \leq b2$

يسمى هذا الترتيب Lexicographic order

وهو المستخدم في ترتيب الكلمات في القاموس (أي الترتيب الأبجدي) حيث على سبيل المثال:

"am" < "is"

لأن a تأتي في الترتيب قبل i ، بينما

"if" < "in"

هنا الحالة (a1 = b1) أي يتساوى النضيدان في الحرف الأول فننظر إلى الحرف الثاني حيث نجد: "f" < "n"

هذا الترتيب الأبجدي يعتبر حسن الترتيب well-ordered (الإثبات تمرين).

مثال2: هل $(Z,\leq)$ حسنة الترتيب ؟

(حيث Z فئة الأعداد الصحيحة)

الإجابة:

لا ، حيث أن الفئة الجزئية $\{\ldots,-3,-2,-1\} \subseteq Z$

ليس لها عنصر أدنى. لذلك فإن $(Z,\leq)$ ليست حسنة الترتيب well-ordered.

7.15 تمــارين (13)

1) أي من الآتي يعتبر Poset (فئة مرتبة جزئيا)؟

a) $(Z , =)$
b) $(Z , \neq)$
c) $(Z , \geq)$
d) $(Z , \nmid)$

حيث $\nmid$ تعني عدم قابلية القسمة.

2) أوجد عنصرين غير قابلين للمقارنة incomparable في الفئات المرتبة جزئيا التالية:

a) $(P\{0,1,2\} , \subseteq)$
b) $(\{1,2,4,6,8\} , |)$

3) اثبت أن الترتيب الأبجدي للكلمات التي تتكون من حرفين يعتبر حسن الترتيب well-ordered. وأيضا يعتبر ترتيبا كليا Total-ordered.

الباب الثامن

8

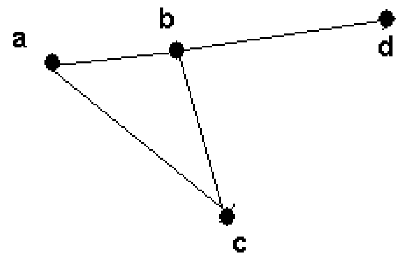
الأشكال Graphs

8.1 مقدمة

ندرس في هذا الباب موضوع (الأشكال graphs) ، والشكل هو عبارة عن مجموعة من الرؤوس vertices (تسمى أيضا العقد) مرتبطة بخطوط تسمى الحواف edges (أو الأضلع). وتأتي أهمية موضوع الأشكال من استخدامها في توضيح العلاقات وتراكيب الشبكات إلى جانب تطبيقات أخرى مهمة.

8.2 أنواع الأشكال

إذا افترضنا أن لدينا شبكة من الحواسيب مرتبطة ببعضها كما في الشكل 8.2.1



الشكل 8.2.1 شكل بسيط simple graph

فإننا نلاحظ في هذا الشكل أنه:

1- يوجد بين كل رأس والآخر حافة واحدة على الأكثر. أي أن بعض الرؤوس مرتبطة بحافة واحدة وبعضها غير مرتبط.

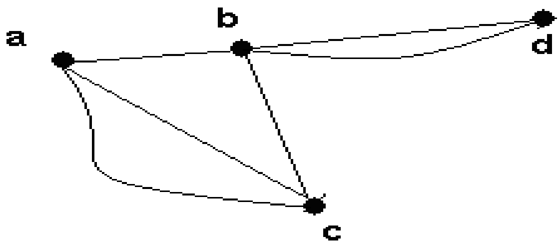
2- لايوجد حافة بين الرأس ونفسه.

هذا الشكل يعتبر مثالا لشكل من النوع البسيط simple graph. رياضيا يمكن تعريف الشكل البسيط بأنه علاقة ثنائية E على الفئة V حيث:

$$V = \{v_1, v_2, , v_3, \ldots, \; , v_n\}$$
$$E = \{ (u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$$

لاحظ في الشكل البسيط أن الحافة (u, v) هي نفسها الحافة (v, u).

أحيانا نجد أن هناك بعض الأشكال بها أكثر من حافة تصل بين عقدتين (رأسين) وهذا يحدث مثلا عند وجود ازدحام البيانات في شبكات الحاسوب أو ازدحام المركبات الآلية في حالة شبكات الطرق. في هذه الحالة يسمى الشكل بالمتعدد multigraph كما في الشكل 8.2.2 .



الشكل 8.2.2 شكل متعدد multigraph

<u>ملاحظة:</u>

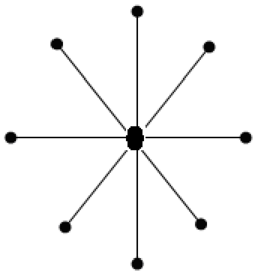
اذا كان الشكل يحتوي على حواف متعددة multiple edges وكذلك يحتوي على حلقات loops بين الرأس ونفسه فانه في هذه الحالة يسمى شكل زائف pseudograph.

8.3 تطبيقات الأشكال applications of graphs

من التطبيقات المهمة للأشكال استخدامها لتمثيل هيكلية شبكة الحاسوب. وندرس الآن أهم هذه الهيكليات:

1) هيكلية النجمة Star Topology

يبين الشكل 8.3.1 مجموعة من العقد (تمثل حواسيب أو أجهزة ملحقة) مرتبطة مع بعضها عن طريق جهاز تحكم مركزي يسمى المبدّل switch أو المجمّع hub. هذا الشكل يسمى بهيكلية النجمة.



Star Topology هيكلية النجمة

الشكل 8.3.1

لاحظ في الشكل الحلقي أن الحواف هي:

$$(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_n)$$

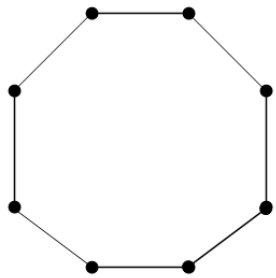
حيث v_1 هو الرأس الموجود في مركز الشبكة (المجمع hub) و

$$v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$$

هي باقي الرؤوس في هذا الشكل.

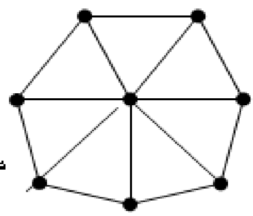
2) هيكلية الحلقة Ring Topology

في هذه الهيكلية، كل حاسوب (أو جهاز) مرتبط مع جهازين آخرين مجاورين كما في الشكل 8.3.2 .



الشكل 8.3.2 هيكلية الحلقة ring topology

3) هيكلية المزيج Hybrid

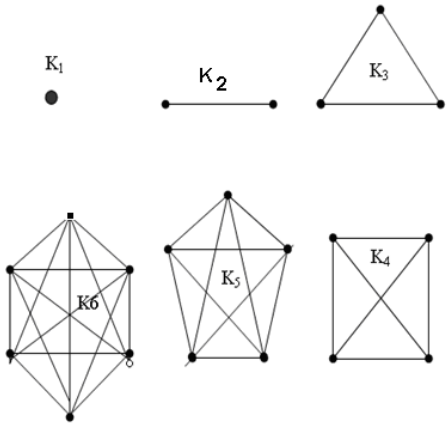


مزيج من الحلقة والنجمة.

يسمى هذا النوع بشكل العجلة wheel حيث يوجد فيه اتصال بين الرؤوس على شكل حلقي ونجمي في نفس الوقت.

8.2 الأشكال الكاملة Complete Graphs

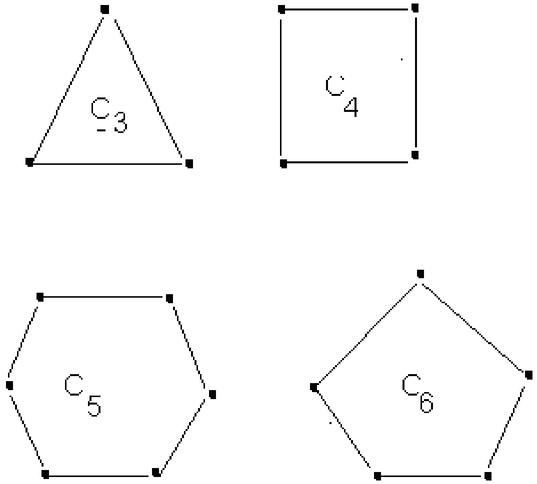
يوجد في هذا النوع من الأشكال حافة (ضلع) بين كل زوج من الرؤوس . أي أن كل رأس متصل بالآخر بحافة كما مبين بالأشكال التالية والتي يرمز لها عادة بالرمز K_n حيث n هو عدد الرؤوس بالشكل.



الأشكال الكاملة

2- **الأشكال الحلقية Cycles** ونرمز لها بالرمز $\mathbf{C_k}$

حيث k هو عدد الرؤوس ويساوي عدد الحواف كما في الأشكال التالية:



الأشكال الحلقية Cycles

فإذا رمزنا في الشكل الحلقي C_n للرؤوس بالرموز

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$

فإن الحواف في هذا الشكل هي :

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$$

ملاحظة:

في النوعين السابقين نلاحظ أنه لا يوجد اتجاه معين في الحافة التي تربط بين رأسين. يسمى هذا النوع بالشكل **غير الموجّه** undirected graph. ولكن كما درسنا سابقا هناك أشكال لابد من تحديد الاتجاهات على حوافها وتسمى هذه الاشكال بالأشكال **الموجّهة** directed graphs.

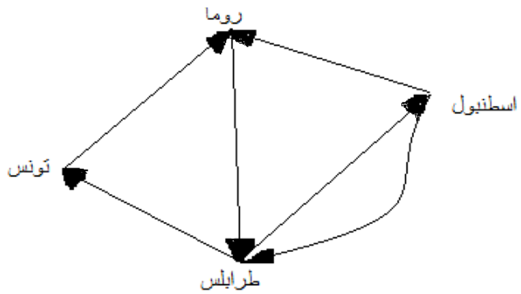
مثال لشكل موجه directed graph

خطوط جوية لديها رحلات كالاتي:

(طرابلس، تونس) ، (طرابلس، اسطنبول) ، (تونس، روما) ، (روما، طرابلس) ، (اسطنبول، روما) (اسطنببول، طرابلس)

ارسم شكلا يبين هذه الرحلات.

الشكل التالي يبين خطوط هذه الرحلات. لاحظ أن الشكل موجه directed ومتعدد multgraph



8.4 نظرية التصافح handshaking theorem

تعريفات

1- الرأس u والرأس v يعتبران متجاورين (adjacent) إذا وجد بالشكل حافة تربط بينهما.

2- درجة الرأس هي عبارة عن عدد الحواف التي تتصل به.

فمثلا في الشكل الدوري نجد أن درجة كل راس تساوي 2 ، ونكتبها رياضيا على الصورة:

$$Deg(v) = 2$$

مبرهنة

إذا كان الشكل يحتوي على حواف عددها e ورؤوس عددها n فإن مجموع درجات الرؤوس يساوي ضعف عدد الجواف. أي أن

$$2e = deg(v_1) + deg(v_2) + \ldots + deg(v_n)$$

كمثال لهذه النظرية (التي تسمى نظرية التصافح) نجد في الشكل C_2 أن n=3 و e=3 وأن

$$deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) = 2 + 2 + 2 = 6$$

وهذا فعلا يساوي $2e = 2(3)$

وكمثال آخر نستطيع تطبيق هذه النظرية لنحصل على عدد الحواف في الشكل K_6.
ففي هذا الشكل نلاحظ أن درجة كل رأس هي 5 وأن عدد الرؤوس هو 6 وبالتالي فإن

$$deg(v_1) + deg(v_2) + \ldots + deg(v_6) = 6(5) = 30 = 2e$$

أي أن عدد الحواف $= e = 30/2 = 15$

8.5 تمــارين (14)

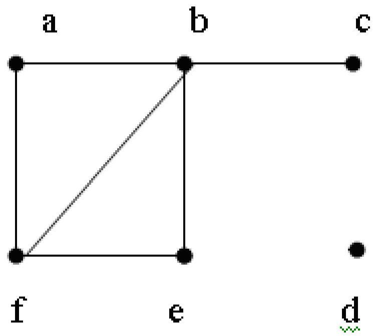
1) أوجد

(أ) عدد العقـد v

(ب) عدد الحــواف e

(ج) درجة كل عقـدة deg

في الشكل التالي:



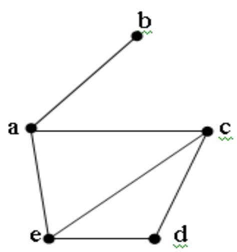
2) في تمرين (1) حقق نظرية التصافح (أي أن $\sum \deg(v) = 2e$)

8.6 تمثيل الأشكال Representing Graphs

يعتمد تمثيل الشكل باستخدام الجدول على ما إذا كان الشكل موجها أو غير موجه.

1) في الحالة الأولى (أي الشكل البسيط غير الموجّه) يمكن تمثيله بإستخدام قائمة الجوار (Adjacency List) أي قائمة العقد المجاورة.

مثال : الشكل البسيط التالي:

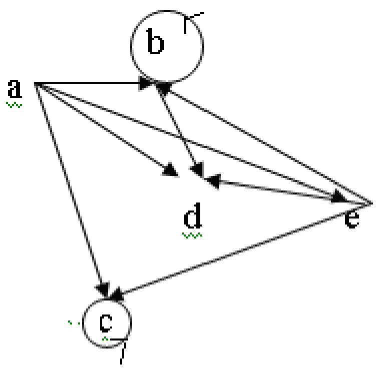


يمكن تمثيله كما في الجدول التالي :

Vertex الرأس	Adjacency vertices الرؤوس المجاورة
a	b, c , e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	d, a, c

2) في حالة تمثيل **الشكل الموجّه** Directed Graph نستخدم جدولا يبين بداية ونهاية كل حافة كما في المثال التالي .

مثال : الشكل الموجّه التالي:



يمكن تمثيله بالجدول التالي

Initial vertex عقدة البداية	Terminal vertices عقد النهاية
a	b, c, e, d
b	b, d
c	c
d	
e	b, c, d

1) تمثيل الشكل البسيط باستخدام **مصفوفة الجوار Adjacency Matrix**

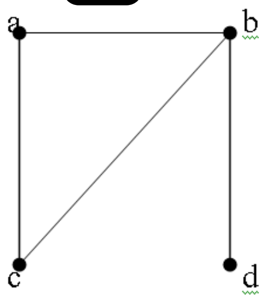
وهي مصفوفة a_{ij} عناصرها إما واحد أو صفر .

في حالة وجود حافة بين v_i و v_j فإن $a_{ij} = 1$ وإلا فإن $a_{ij} = 0$. أي أن

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } (v_i , v_j) \text{ is an edge} \\ 0 \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

حيث v_i هي عقد الشكل البسيط G.

مثال : ما هي مصفوفة الجوار للشكل التالي :



الاجابة: مصفوفة الجوار لهذا الشكل هي:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

لاحظ أن الشكل **بسيط** لذلك فإن **المصفوفة متماثلة لأن وجود حافة بين a و b يعني أيضا وجود حافة بين b و a** .

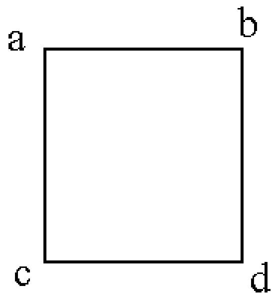
مثال : ارسم شكل مصفوفة الجوار التالية

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

الإجابة : المصفوفة متماثلة والقطر أصفار لذلك فهي تمثل شكلا بسيطا. نضع أسماء للرؤوس أفقيا وعموديا كما يلي:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

والآن يمكن أن نرسم الشكل المطلوب كما يلي :

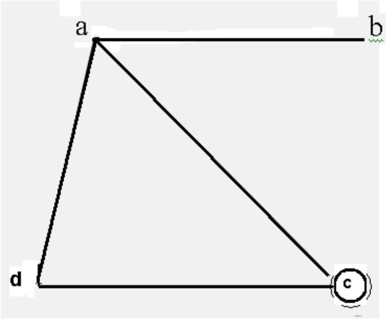


مثال : ارسم الشكل لمصفوفة الجوار التالية adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث العنصر a_{ij} يمثل عدد الحواف بين v_i ، v_j

الإجابة : بوضع (a, b, c, d) أفقيا وعموديا حول المصفوفة ،
نحصل على الشكل التالي :



لاحظ أن المصفوفة لهذا الشكل متماثلة ولكن القطر ليس كله أصفار بل يوجد 1 يقابل الرأس c لذلك وضعنا دائرة صغيرة حوله لنبين وجود حافة منه وإليه.

تمثيل الشكل الموجه Directed Graph (Digraph)

سبق وأن درسنا في الباب السابع تمثيل الأشكال الموجهة حيث استخدمنا المصفوفة

$$a_{ij} = 1$$

لتعني

$$v_i \longrightarrow v_j$$

تمثيل الشكل المتعدد Multi graph

في هذه الحالة لن تكون المصفوفة ثنائية لأن

a_{ij} = number of edges from v_i To v_j

أي أن عدد الحواف من v_i إلى v_j = a_{ij}

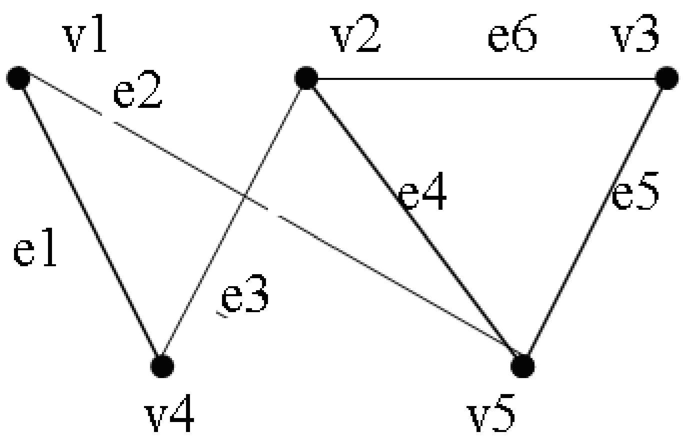
مصفوفة السقوط Incidence Matrix

هذه طريقة أخرى لتمثيل الأشكال . هنا نستخدم المصفوقة M حيث

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{عندما } e_j \text{ تمر على } v_i) \\ 0 & (\text{غير ذلك}) \end{cases}$$

حيث v_i هو الرأس vertex(i) ، e_j هو الحافة edge(j) .

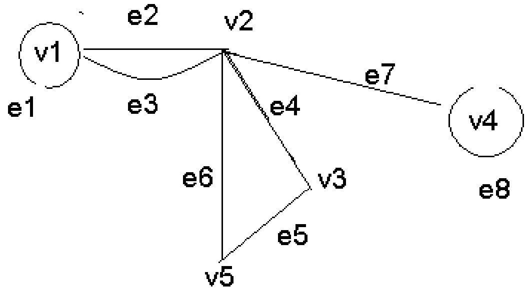
مثال: أوجد مصفوفة السقوط M للشكل التالي:



الاجابة: نلاحظ هنا وجود 5 رؤوس و 6 حواف. لذلك نكتب المصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{array}{c|cccccc} & e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \\ \hline v1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} = \text{incidence matrix}$$

مثال : مثّل الشكل التالي بمصفوفة السقوط incidence matrix



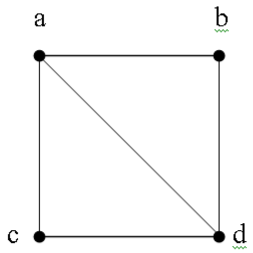
الإجابة :

$$\begin{array}{c|cccccccc} & e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 \\ \hline v1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

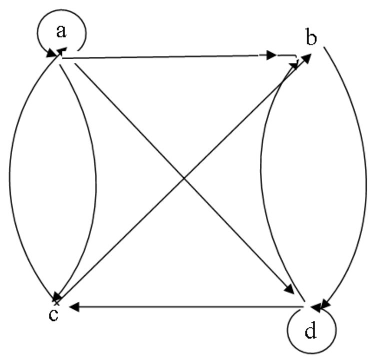
8.7 تمارين (15)

1- باستخدام قائمة الجوار adjacency List مثل الشكلين التاليين :

(أ)



(ب)



2- مثل الشكل في تمرين 1-ب بمصفوفة الجوار adjacency matrix

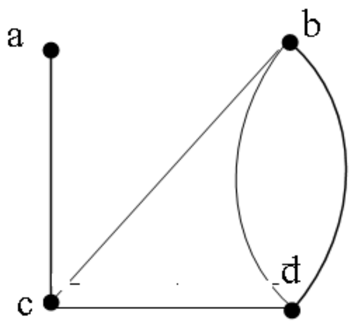
3- مثل الشكل الكامل k_4 بمصفوفة الجوار.

4- مثل الشكل الدوري C_4 بمصفوفة الجوار.

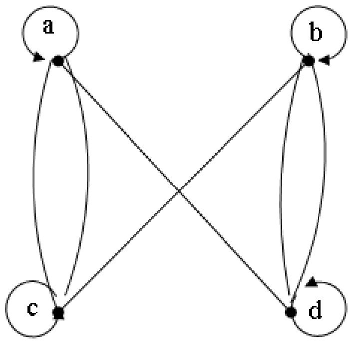
5- ارسم الشكل الذي تمثله مصفوفة الجوار التالية adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6- مثل الشكل التالي بمصفوفة الجوار



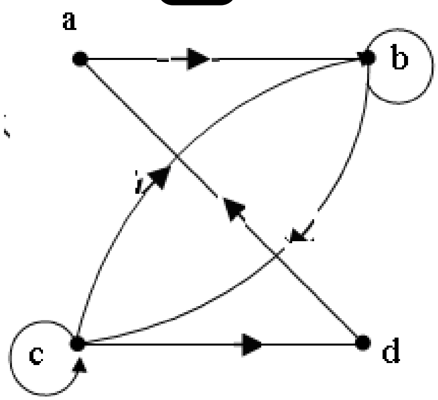
7- مثل الشكل التالي بمصفوفة الجوار



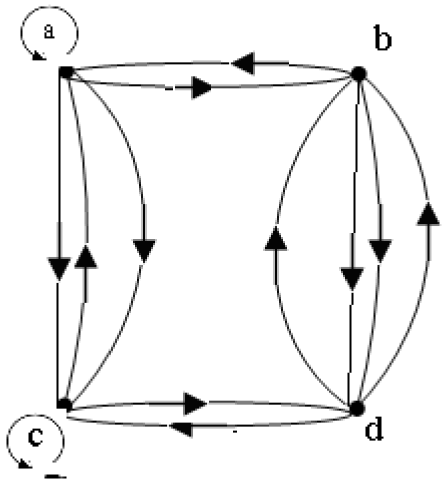
8- ارسم شكلا غير موجه تمثله مصفوفة الجوار التالية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9- أوجد مصفوفة الجوار للشكل التالي



10- أوجد مصفوفة الجوار للشكل التالي



11- أوجد الشكل الذي تمثله مصفوفة الجوار التالية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12− استخدم مصفوفة السقوط لتمثيل الشكل في تمرين (6).

13− استخدم مصفوفة السقوط لتمثيل الشكل في تمرين (7).

8.8 تمثيل العلاقات بالأشكال الموجهة Directed Graph

يمكن تمثيل العلاقة R برسم سهم (edge) يمثل العنصر (الزوج المرتب)(a,b) على النحو التالي:

$$a \xrightarrow[\text{edge or arc}]{} b\ .$$

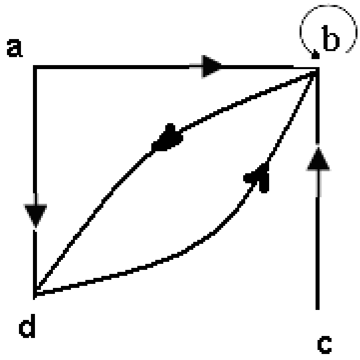
حيث a تسمى (initial vertex) العقدة الابتدائية

و b تسمى (terminal vertex) العقدة النهائية

مثال: ارسم شكلا موجها يبين العلاقة

R = {(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (d, b)}

الإجابة:

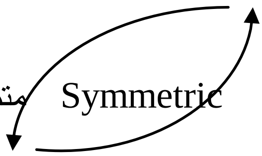


شكل موجه directed graph للعلاقة R

<u>ملاحظات:-</u>

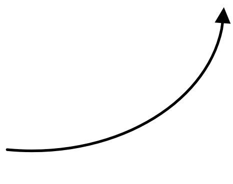
(1) إذا كانت العلاقة من نوع انعكاسي reflexive نجد دورة loop حول كل عقدة

(2) إذا كانت العلاقة من نوع متماثل نجد أن لكل سهم في الشكل الموجه يوجد سهم معاكس له كما يلي:



متماثل Symmetric

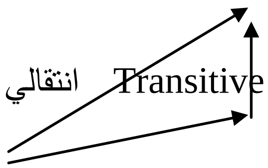
(3) إذا كانت العلاقة من نوع لا متماثل لا يكون للسهم سهم آخر معاكس له



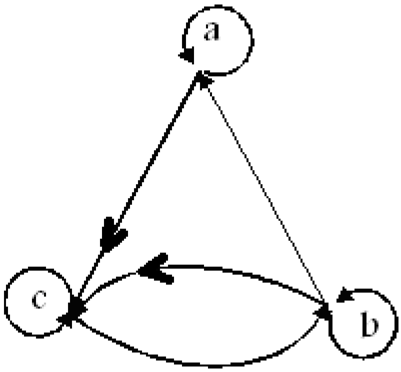
Anti symmetric

لامتماثل

(4) إذا كانت العلاقة من نوع انتقالي نجد أن وجد سهمان الأول من النقطة x الى النقطة y ، والثاني من العقدة y إلى العقدة z ، فانه يوجد سهم في الشكل من x إلى z.



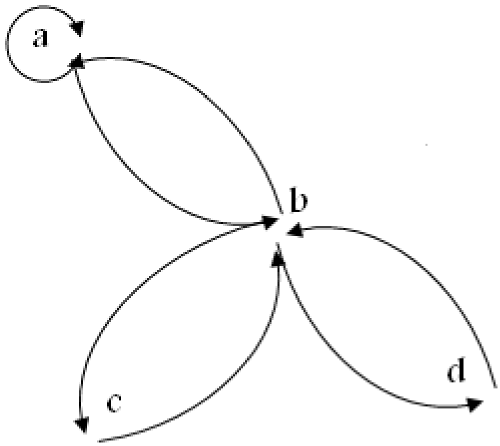
مثال: هل العلاقة التالية انعكاسية أو متماثلة أو لا متماثلة أو انتقالية ؟



من الواضح أن هذه العلاقة انعكاسية حيث يوجد دورة حول كل عقدة . ولكنها ليست متماثلة حيث مثلا نجد سهما من b إلى a ولا يوجد سهم من a إلى b. وفي نفس الوقت هي ليست لا متماثلة antisymmetric حيث يوجد سهمان متعاكسان بين العقدتين b , a.

وهي أيضا ليست انتقالية حيث نجد سهما من a إلى c وسهما من c إلى b ولا يوجد سهم من a إلى b.

مثـال: مـا نـوع العلاقـة التـي يمثلهـا الشـكل التـالي ؟ هـل هـي انعكاسـية؟ متماثلـة؟ انتقالية؟



هذه العلاقة ليست انعكاسية reflexive ولكنها متماثلة symmetric حيث نجد أن لكل سهم يوجد سهم معاكس له في الاتجاه .

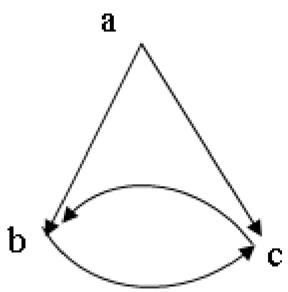
وهي ليست انتقالية transitive حيث نجد مثلا أن (a, b) و (b, c) تنتميان للعلاقة ولكن (a,c) لا تنتمي للعلاقة .

8.9 تمارين(16)

(1) مثل العلاقات باستخدام الأشكال الموجهة.

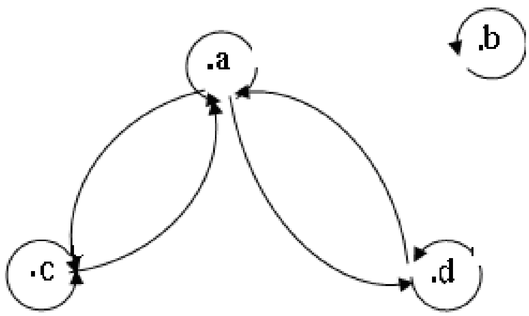
a) {(1,1),(1,2),(1,3)}
b) {(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)}
c) {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}
d) {(1,3),(3,1)}

(2) أكتب الأزواج المرتبة التي يمثلها الشكل التالي:

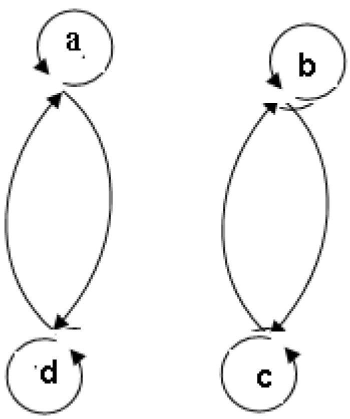


3- أي من العلاقات التالية علاقة تكافؤ equivalence relation

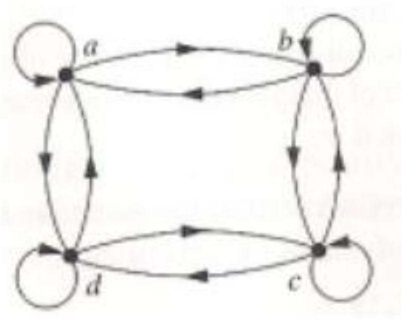
(أ)



(ب)

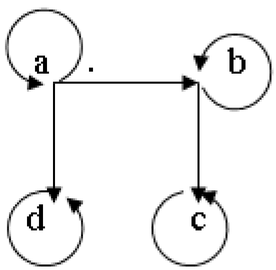


(ج)



4) أي من العلاقات التالية تعتبر مرتبة جزئيا poset ؟

ا-



ب-

8.10 الاتصــال Connectivity

كيف تتصل نقطة في الشبكة بأخرى؟ هل هناك (مسار) يصل بينهما؟ وما معنى المسار وما هي أنواعه؟ هذا ما نريد دراسته هنا؟

المسار هو الطريق الذي يوصل نقطة بأخرى في الشبكة. مثلا اذا كنا نتعامل مع شبكة طرق فالمسار من مدينة طرابلس الى مدينة غريان هو أي طريق يوصل بينهما. طبعا قد يوجد أكثر من طريق بينهما، وقد يمر الطريق على مدن أخرى. في هذه الحالة نحدد الطريق بتحديد المدن التي يمر عليها، كأن نقول المسار: (طرابلس ، السواني، العزيزية ، غريان) ، واذا وجد أكثر من طريق بين نقطة وأخرى multigraph في المسار فيجب تحديد كل طريق بين المدينتين . وللتوضيح نقوم بعمل تعريف دقيق كالاتي:

تعريفات :

(1) المسار Path (من V_0 إلى V_n)

المسار (في الشكل المتعدد multigraph) يتكون من متتابعة (sequence) من العقد والحواف على الصورة : $(V_0, e_1, V_1, e_2, \ldots, e_n, V_n)$
حيث كل حافة e_i تصل بين الرأس V_i والرأس V_{i-1}

(2) طول المسار

طول المسار هو عدد الحواف الموجودة به ، أي أن المسار
$(V_0, e_1, V_1, e_2, \ldots, e_n, V_n)$
طوله هو n .

ويمكن الرمز للمسار باستخدام حوافه فقط ، أي

$e_1, \ e_2, \ldots, e_n$

أو باستخدام العقد فقط على النحو :

$V_0, \ V_1, \ \ldots, V_n$

بشرط ألا يحدث ذلك أي التباس.

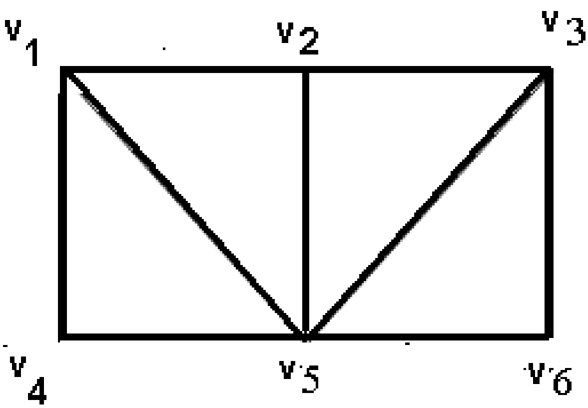
(3) المسار الدائري Circuit

يوصف المسار بأنه دائري إذا كان $V_0 = V_n$

(4) المسار البسيط simple path: هو مسار تكون فيه الحواف مختلفة (أي لا تكرار) يسمى أيضا بالممر .

مثال:

انظر إلى الشكل التالي، وأجب عن الأسئلة التالية:



ا- هل المتتابعة (V4,V1,V5,V2,V6) مسار ؟

ب- هل المتتابعة (V4,V1,V2,V5,V1,V2,V3,V6) تعتبر مسارا ؟

ج- هل المتتابعة في (ب) تعتبر مسارا بسيطا؟

د- هل المتتابعة (V4,V1,V5,V2,V3,V5,V6) مسارا بسيطا؟

هـ- هل المتتابعة في (د) مسار path ؟

و- أوجد مسارين من V4 إلى V6. أيهما أقصر؟

<u>الإجابة :</u>

ا- هذه المتتابعة تفترض وجود حافة بين V2 و V6 وهذا غير صحيح كما مبين بالشكل حيث لا يوجد حافة بين هاذين الرأسين. لذلك فهي لاتعتبر مسارا .

ب- بالنظر الى الشكل نجد أن بين كل رأسين في هذه المتتابعة يوجد حافة لذاك فهي تعتبر مسارا يبدأ من V4 وينتهي عند V6 .

ج- لا، لأن الحافة (V1,V2) متكررة مرتين في هذا المسار.

د- نعم ، حيث لا نجد استخدام حافة مرتين أو أكثر .

هـ- لا والسبب تكرر العقدة V5 في هذا المسار.

و- المسار الأول (V4,V5,V6)

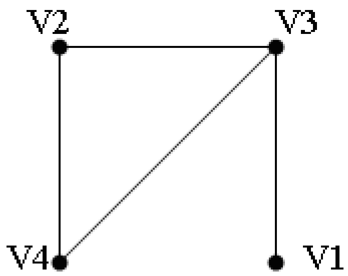
المسار الثاني (V4,V1,V2,V3,V6)

في المسار الأول الطول = 2 (أي عدد الحواف) وفي المسار الثاني الطول = 4 لذلك فإن المسار الأول هو الأقصر .

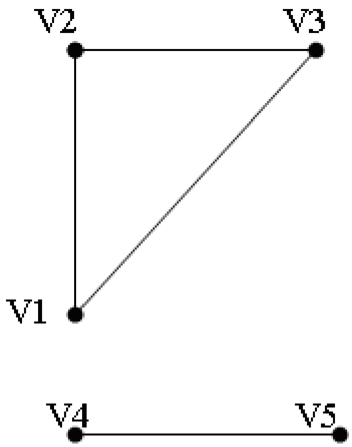
تعريف: الاتصال

يسمى الشكل متصلا connected إذا وجد به مسار بين كل اثنين من رؤوسه .

مثال :



شكل متصل



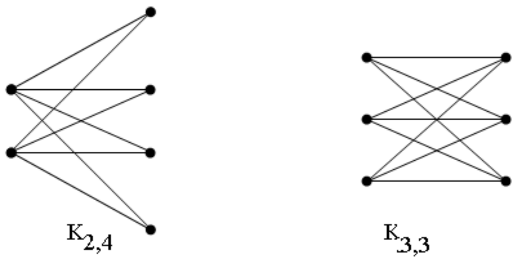
شكل غير متصل

8.11 الأشكال ذات القسمين Bipartite

يقال أن الشكل G ذو قسمين إذا كانت عقده (أي رؤوسه) V يمكن تجزئتها إلى فئتين جزئيتين M , N بحيث أن كل حافة في G تصل عقدة من M مع عقدة من N .

وإذا كان كل عقدة في M متصلة بكل عقدة في N نقول أن الشكل كامل ذو قسمين ويرمز له بالرمز $K_{m,n}$ حيث m عدد العقد في M ، و n عدد العقد في N

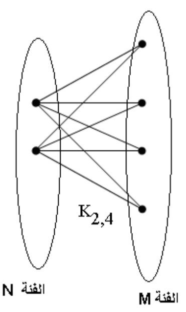
مثال : الشكلان التاليان من الأشكال الكاملة ذات قسمين bipartite



أشكال كاملة ذات قسمين

Complete bipartite

لأن في الشكل K(2,4) نستطيع تقسيمه الى قسمين M و N كما يلي:



حيث نجد أن كل عقدة في M متصلة بجميع عقد N . ويمكن تقسيم الشكل الآخر بنفس الطريقة.

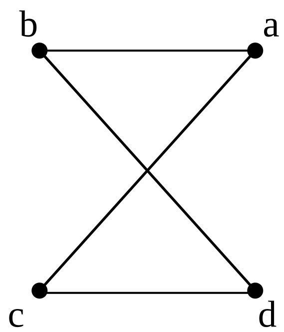
عدد المسارات بين العقد

<u>مبرهنة</u>

إذا كانت A هي مصفوفة الجوار للشكل G فإن عدد المسارات بطول r من العقدة V_i إلى العقدة V_j هو B_{ij} حيث المصفوفة :

$$B = A^r$$

مثال : في الشكل التالي



كم عدد المسارت ذات طول 4 من a إلى d؟

الحل: أولا نوجد مصفوفة الجوار adjacency matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نوجد المصفوفة

$$B = A^4 = A \times A \times A \times A$$

$$= A^2 \times A^2$$

أي أن

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

أي أنه يوجد 8 مسارات ذات طول 4 من a إلى d

يمكن التأكد من ذلك بدراسة هذه المسارات مثل :

Path-1: (a,b,a,b,d)
Path-2: (a,b,a,c,d)
Path-3: (a,b,d,b,d)
Path-4: (a,b,d,c,d)
Path-5: (a,c,a,b,d)
Path-6: (a,c,a,c,d)
Path-7: (a,c,d,b,d)
Path-8: (a,c,d,c,d)

8.12 تمارين (17)

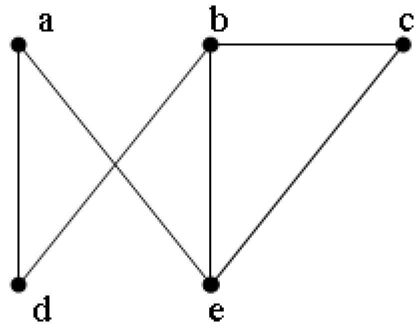
(1) في المتتابعات التالية بيّن

هل المتتابعة مسار ؟ هل المسار بسيط ؟ هل المسار دائري ؟

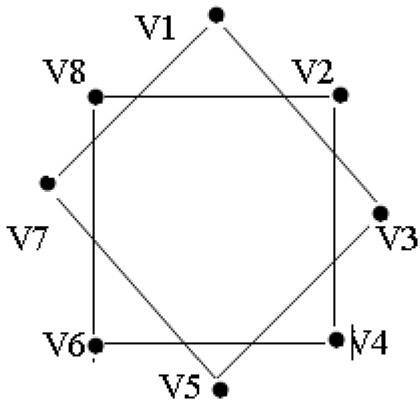
أوجد طول المسار.

a) (a,e,b,c,b)
b) (a,e,a,d,b,c,a)
c) (e,b,a,d,b,e)
d) (c,b,d,a,e,c)

حيث a , b , c , d , e عقد في الشكل التالي:



(2) هل الشكل التالي متصل ؟



(3) أوجد عدد المسارات بطول n بين عقدتين في الشكل K4 إذا كانت

a) n = 2

b) n = 4

8.13 الأشكال المستوية Planner Graphs

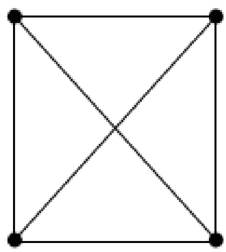
<u>تعريف:-</u>

يعتبر الشكل مستويا planner إذا كان بالامكان رسمه بدون أن تتقاطع حوافه (No edges Crossing) .

ويسمى الشكل الذي لا يوجد فيه تقاطع الحواف بالتمثيل المستوي للشكل Planner Representation (يسمى أيضا خريطة)

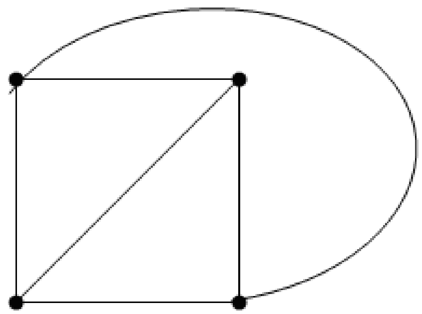
مثال: هل الشكل K4 مستوي ؟

الإجابة: نعم لأن K4 يمكن رسمه بدون تقاطع كما يلي :



K4

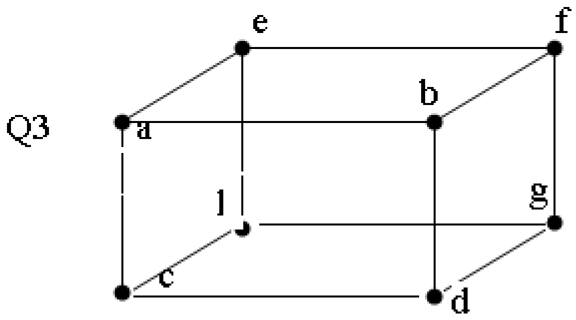
حواف متقاطعة



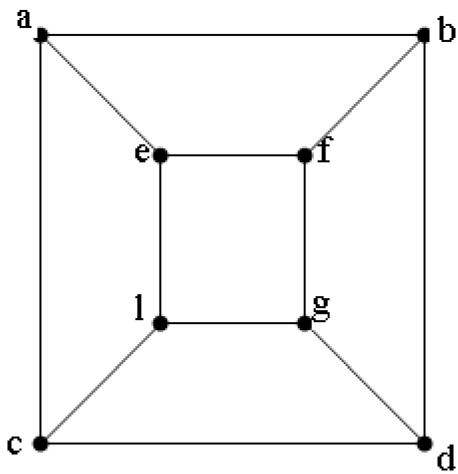
K4

حواف غير متقاطعة

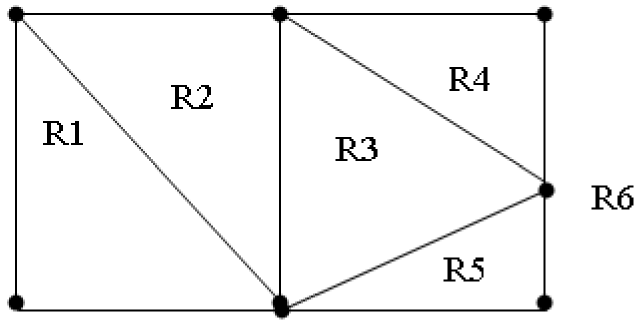
مثال: هل الشكل Q3 المبين أدناه مستوي؟



الإجابة: نعم لأن Q3 يمكن رسمه على النحو التالي



لاحظ أن التمثيل المستوي للشكل يقسم المستوى إلى مناطق متعددة . فمثلا الشكل التالي يقسم المستوى إلى 6 مناطق هي (R1,R2,R3,R4,R5,R6)



كما نلاحظ أن واحدة من هذه المناطق تكون غير محدودة Unbounded وهي في هذا الشكل المنطقة R6

مبرهنة أويلر Euler's Formula

في الشكل المستوي البسيط المتصل تكون عدد المناطق في خريطته (أي في تمثيله المستوى)

$$r = e - v + 2$$

حيث

r = عدد المناطق = number of regions

e = عدد الحواف = number of edges

v = عدد العقد = number of vertices

للتأكد من هذه المبرهنة قم بعد المناطق في الأشكال المستوية المذكورة أعلاه وعد الرؤوس (العقد) والحواف والتعويض في صيغة أويلر .

مثال : افترض أن شكلا مستويا وبسيطا ومتصلا له 20 عقدة ، كل عقدة درجتها 3. كم عدد المناطق التي يقسمها التمثيل المستوي في هذا الشكل؟

الحل: نحتاج لحساب عدد الحواف في هذا الشكل ، ويمكن أن نستخدم نظرية التصافح.

$$2e = \sum \deg(v)$$
$$= 20\ (3) = 60$$
$$e = 30$$

ثم نحسب عدد المناطق من صيغة أويلر:

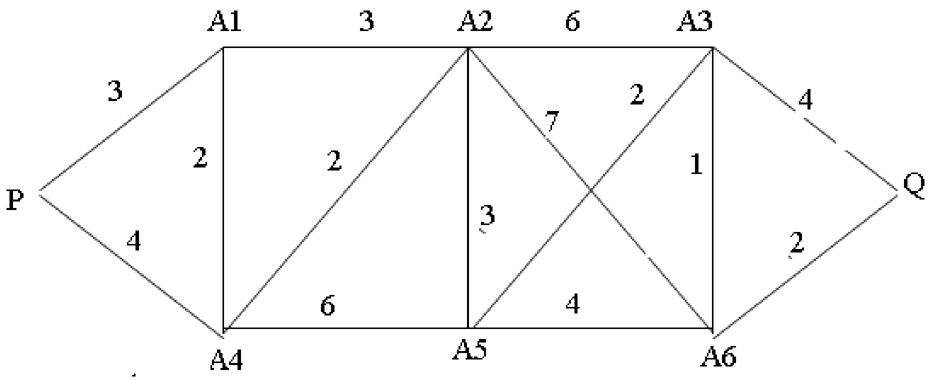
$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$$

8.14 الأشكال المميزة Weighted Graphs

الأشكال التي يوجد بها أرقام مخصصة لكل حافة تسمى أشكال مميزة weighed وهي تستعمل بصورة خاصة في الشبكات (سواء في شبكات الحاسوب أو الهاتف أو الطرق) والأرقام على الشكل قد تبين المسافات بين العقد أو زمن الاستجابة أو تكلفة الاتصال وما إلى ذلك .

تستخدم الأشكال المميزة في مسائل المسار الأقصر Shortest Path بين عقدتين.

مثال: في الشكل المميز التالي :



نجد أن المسار (P,A1,A2,A5,A3,A6,Q)

طوله (أو وزنه weight)

$$3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2 = 14$$

وهو أقصر طريق من P إلى Q .

مثلا إذا أخذنا طريقا آخر هو P,A1,A2,A3,Q

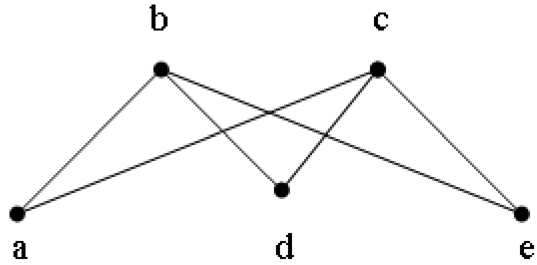
فإن طوله

$$3 + 3 + 6 + 4 = 16$$

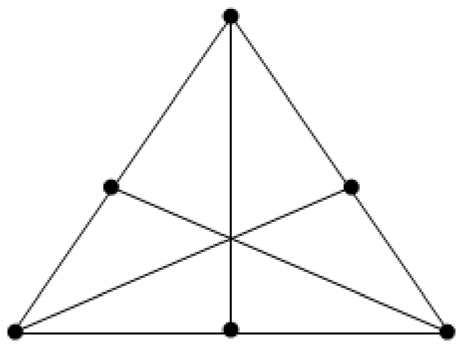
لإيجاد أقصر مسار بين عقدتين توجد العديد من الخوارزميات التي تؤدي هذا الغرض ، منها مثلا خوارزمية Dijkstre .

8.15 تمـــــارين (18)

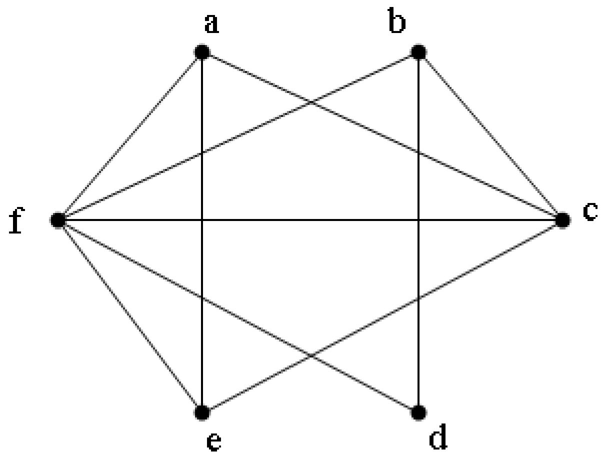
1- أعد رسم الشكل التالي بدون تقاطع



2- حاول إعادة رسم الشكل التالي بدون تقاطع؟ ماذا تلاحظ؟ هل الشكل مستوي؟

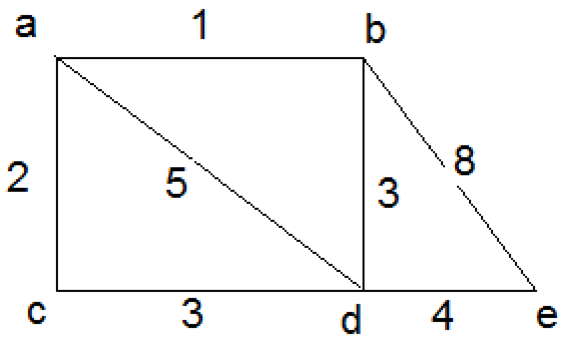


3- بين أن الشكل التالي مستوي



4- افترض أن لدينا شكلا مستويا ومتصلا له 6 عقد ،كل منها درجته تساوي 4 . كم عدد المناطق في خريطة هذا الشكل؟

-5- أوجد طول أقصر مسار بين a الى e ما هو هذا المسار ؟


a
1
b
2
5
3
8
c
3
d
4
e

الباب
الرابع

9

الباب التاسع

الأشجار Trees

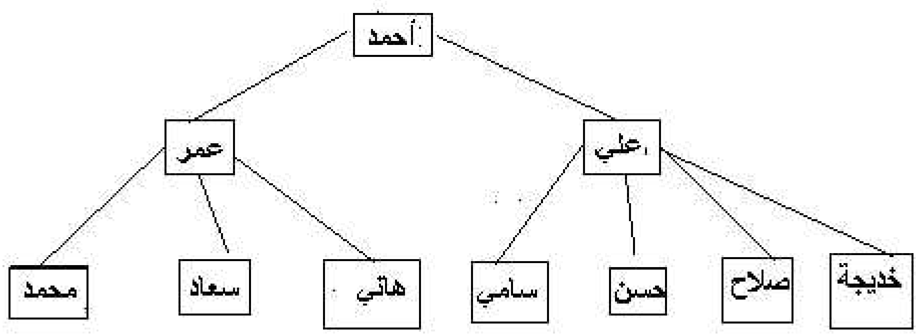
Main Reference:
Discrete Mathematics and its Applications.
Kenneth H. Rosen

9.1 مقدمة

يستخدم مصطلح (الشجرة) في تراكيب البيانات لتمثيل بعض البيانات بطريقة مماثلة للشجرة الفعلية. فالشجرة لها جذر وأغصان وأوراق، وقد وجد الانسان منذ القدم أن أفضل طريقة لمتابعة أصول عائلته هي طريقة الشجرة، وسماها "شجرة

العائلة". وبعد اختراع الحاسوب وجد المبرمجون أن أفضل طريقة لتمثيل بعض البيانات داخل ذاكرة الحاسوب هي طريقة الشجرة.

لنأخذ مثلا شجرة عائلة كما في الشكل التالي:



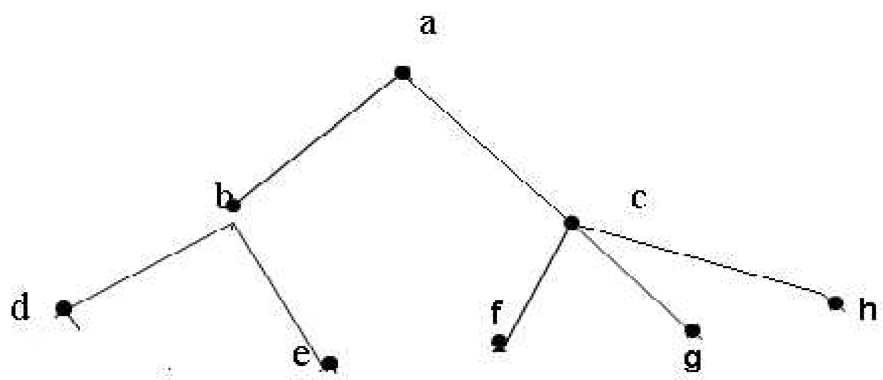
الشكل (9.1.1) شجرة عائلة

بمجرد النظر الى هذه الشجرة نستطيع فهم تركيبة هذه العائلة، فنلاحظ في هذه الشجرة أن اسم الجد هو "أحمد" وله ولدان هما "علي" و"عمر" وان "علي" له الأبناء " سامي وحسن وصلاح وخديجة" أما "عمر" فله من الأبناء " محمد وسعاد وهاني".

وكما نلاحظ فإن هذه الشجرة هي نوع خاص من الأشكال، وبالتحديد فهي عبارة عن ***<u>شكل متصل graph connected وغير موجه undirected لا يوجد به مسار دائري</u>***. تذكر أن المسار (الطريق) الدائري يكون فيه $V_0 = V_n$. أي أن آخر رأس vertex يتطابق مع أول رأس.

9.2 تعريفات

يبين الشكل 9.2.1 مثالا للشجرة.



الشكل (9.2.1) مثال لشجرة tree

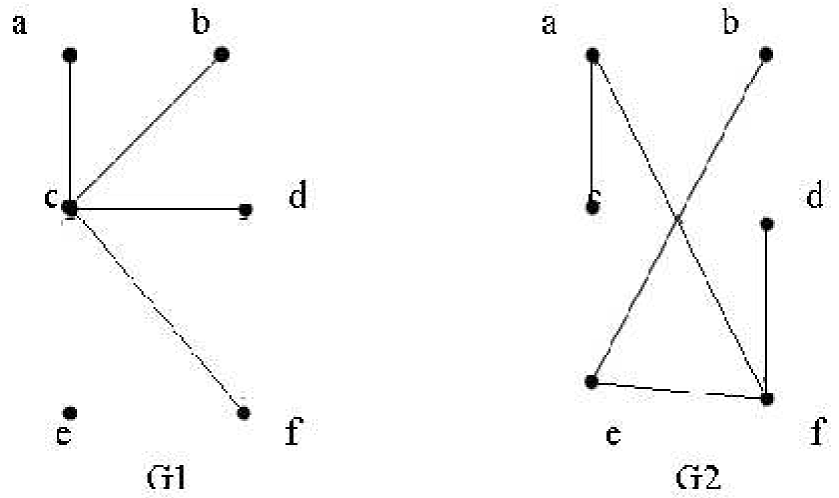
هذا الشكل يحقق الشرطين الأساسين في الشجرة : الاتصال وعدم وجود مسارات مغلقة. فمثلا يمكننا ايجاد مسار بسيط بين أي عقدتين (خاصية الاتصال) خذ مثلا المسار بين الرأس e والرأس f هو

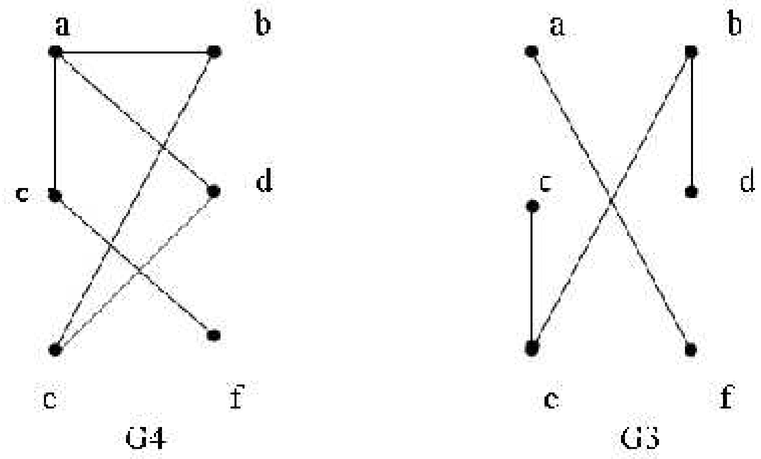
(e, b ,a , c, f)

لو وضعنا حافة edge بين الرأس d والرأس e في هذا الشكل ، فلن يعتبر شجرة لوجود مسار مغلق هو (b, d, e) .

مثال 9.2.1

أي من الأشكال التالية يعتبر شجرة ؟





الشكل 9.2.2 أي من هذه الأشكال يعتبر شجرة؟

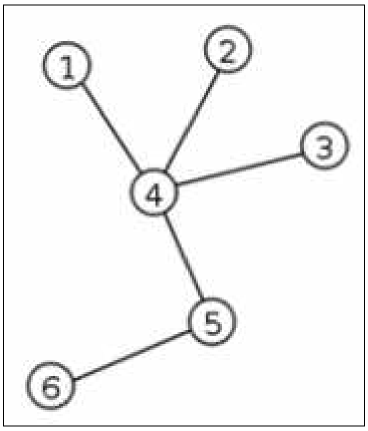
<u>الإجابـة:</u> يعتبر الشكلان G1 , G2 من نوع الشجرة أما G3 , G4 فليس كذلك. والسبب أن G3 ليس شجرة هو كونه شكلا غير متصل فمثلا لايوجد مسار بين الراسين a , b، أما G4 فنجد فيه مسارا دائريا مثل:

.(e, b, a, d, e)

<u>الجذر (root)</u> في الشجرة هو عبارة عن رأس يتجه منه مسار لكل رأس آخر في الشجرة. فمثلا في الشكل 9.2.1 يعتبر الرأس a جذرا لهذه الشجرة.

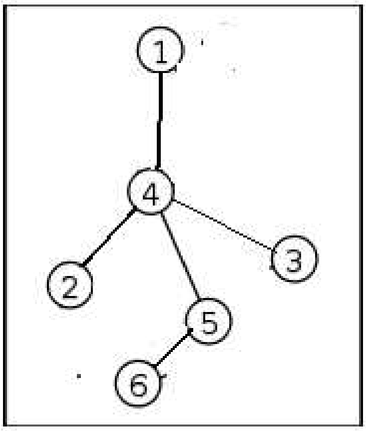
لاحـظ أن الـشجرة بـدون جـذر (unrooted) يمكـن تحويلهـا إلـى ذات جـذر (rooted) وذلك باختيار رأس مناسب كجذر.

على سبيل المثال الشجرة التالية:



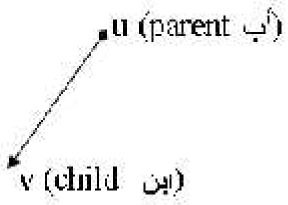
الشكل 9.2.3

التـي تحتـوي علـى 6 رؤوس vertices و 5 حـواف edges يمكـن اعـادة رسـمها بأخذ الرأس 1 كجذر على النحو التالي:



الشكل 9.2.4

وإذا كان v رأسا في الشجرة T (غير الجذر) فإن الرأس u يسمى **أب** (parent) للعقدة v إذا وجدت حافة موجهة من u إلى v. وفي هذه الحالة تسمى v **ابن** (child) للرأس u.



والرؤوس التي لها نفس الأب تسمى **إخوة** (siblings) . والرأس التي ليس لها أبناء تسمى **ورقة** (leaf).

والشجرة الفرعية subtree ذات الجذر a (حيث a رأس في الشجرة الأم) هي عبارة عن شكل فرعي subgraph يتكون من الرأس a وسلالته (descendent)

وأي رأس له أبناء children يسمى رأس **داخلي** internal vertex.

لاحظ أن:

عدد رؤوس الشجرة = عدد الرؤوس الداخلية + عدد الأوراق

مثال : ما هي الرؤوس الداخلية والأوراق في الشكل 9.25؟

الاجابة:

في هذا الشكل الرؤوس الداخلية هي:

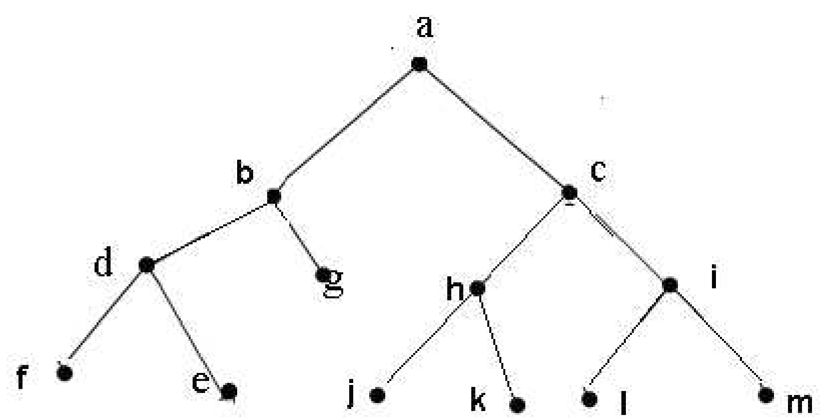
a, b , c, d, g, h, i

أما الأوراق فهي:

f , e, j, k, l , m

<u>الشجرة الثنائية</u> binary tree هي الشجرة التي كل رأس داخلي فيها لا يزيد عدد أبنائه عن 2 ، كما في الشكل التالي:

مثال لشجرة ثنائية



الشكل 9.2.5 مثال لشجرة ثنائية

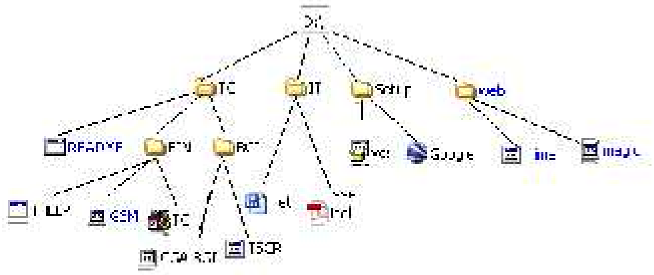
<u>ملاحظة :</u> بصورة عامة في الشجرة الثنائية يمكن أن يكون هناك رأس أو أكثر ذا ابن واحد، ولكن إذا كان عدد الأبناء في الشجرة لايزيد عن 2 فهي تسمى شجرة ثنائية أما إذا كان عدد الأبناء لأي رأس هو دائما 2 فتسمى ثنائية كاملة full binary tree.

9.3 أمثلة تطبيقية للأشجار

(1) شجرة الملفات في الحاسوب

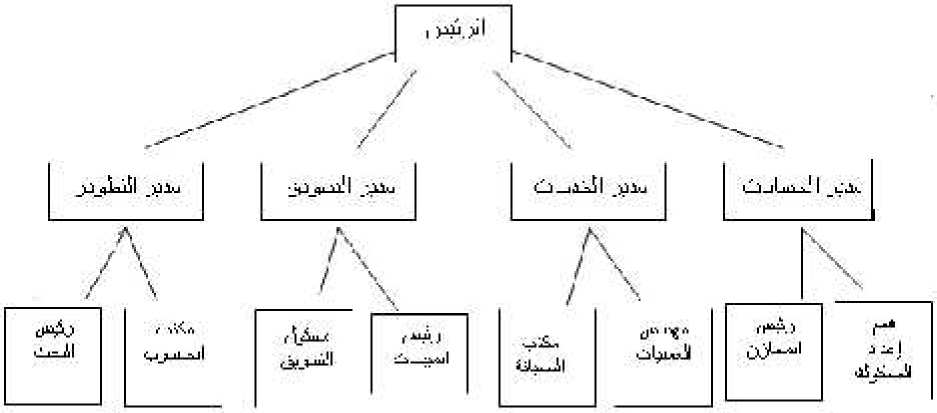
تقسم الملفات على القرص في مجلدات (أو أدلة) folders ، كل مجلد يحتوي على مجلدات أو ملفات. في هذه الحالة يسمى الجذر root directory ، والأدلة الفرعية subdirectories هي رؤوس داخلية، أما الملفات فهي عبارة عن أوراق leaves.

فمثلا قد يكون القرص :D متكونا من المجلدات والملفات التالية:



الشكل 9.3.1 مثال لشجرة الملفات في القرص :D

(2) التطبيق الثاني في الهيكلية الإدارية لشركة هو مثال شائع لتطبيق الشجرة :

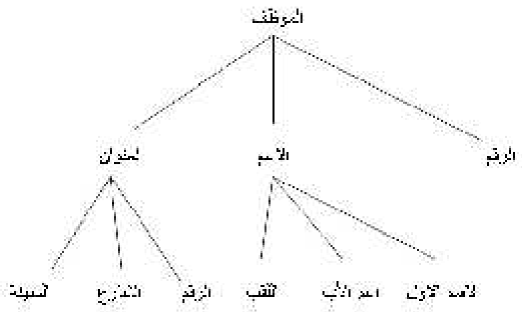


الشكل 9.3.2 هيكلية إدارية لشركة

قسم المراجعة

(3) سجل الموظف Employee record

يعتبر شجرة كما موضح في الشكل التالي:



الشكل 9.3.4 سجل موظف

التطبيق الثالث : تمثيل العمليات الحسابية

يمكن استعمال الأشجار في تمثيل العبارات الحسابية arithmetic expressions من حيث أولويات العمليات ، وذلك باعتبار العمليات كرؤوس في الشجرة ، واعتبار الأعداد والمتغيرات كأوراق الشجرة.

مثال1: ارسم شجرة للعملية التالية

$$(x + 5) / (x-4)$$

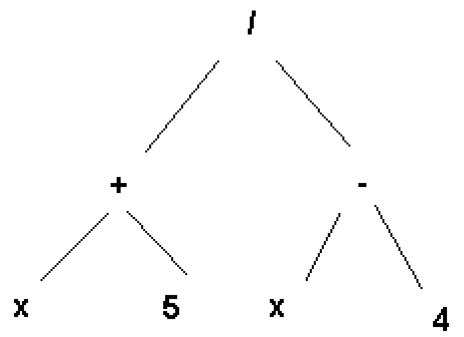
الاجابة : تتم العملية كما يلي:

1- الطرح x-4 لأن العملية بين قوسين

2- الجمع x+5 لأن العملية بين قوسين.

3- القسمة

ويمكن رسم شجرة لها بحيث تتم العمليات من اليسار إلى اليمين كما يلي:



الشكل 9.3.5 العملية $(x + 5) / (x-4)$

مثال 2 : ارسم شجرة للعملية التالية:

$x + y/x + 7$

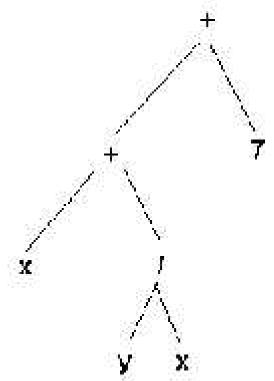
الاجابة: نلاحظ أن أولوية العمليات هنا كما يلي:

1- قسمة y على x

2- اضافة x الى y/x لأنها على اليسار

3- اضافة 7 الى الناتج من الخطوة 2.

يمكن تمثيل ذلك بالشجرة التالية:

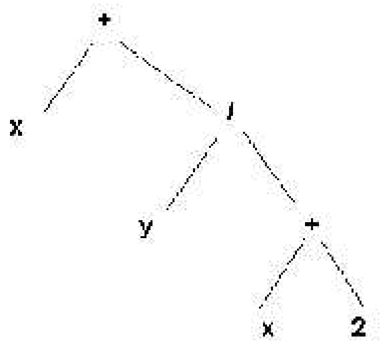


الشكل 9.3.6 العملية $x + y/x + 7$

لاحظ أن رؤوس الشجرة يتم تتبعها من اليسار الى اليمين.

مثال 3:

ما هي العملية التي يمثلها الشكل 9.3.7 ؟



الشكل 9.3.7 ما هي هذه العملية؟

الاجابة:

تقرأ الشجرة من اليسار الى اليمين فنحصل على

x + y/(x+2)

التطبيق الرابع : شجرة القرار Decision Tree

تساعدنا تركيبة الشجرة في اتخاذ القرار وذلك بمقارنة جميع الاحتمالات التي يمكن أن تحدث.

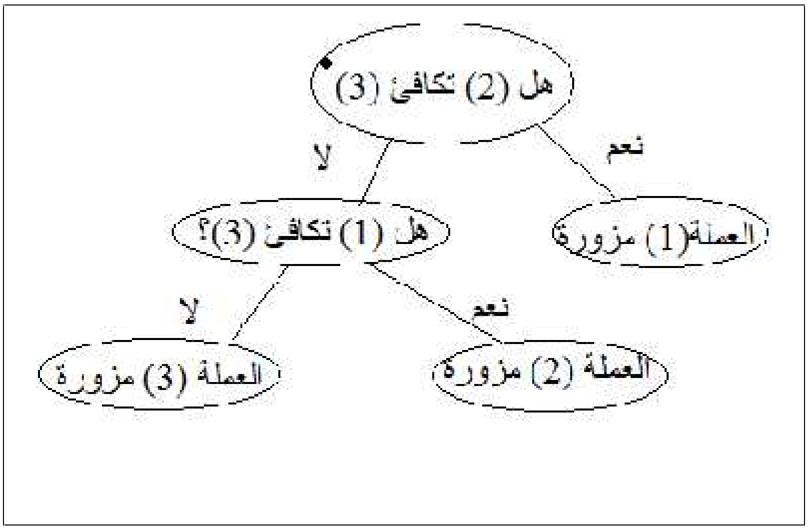
على سبيل المثال نفترض أن لدينا 3 عملات معدنية تبدو متكافئة ولكننا نعلم أن اثنين منها متكافئة ، والثالثة مزورة ، ونعرف ذلك من وزنها فهي أقل وزنا من باقي العملات. كيف يمكننا معرفة العملة المزورة إذا كان لدينا ميزان يقارن بين عملتين ونعرف بواسطته أيهما أقل وزنا؟

الحل:

نقوم بترقيم العملات الثلاثة من 1 الى 3. أي أن لدينا 3 احتمالات هي:

1. العملة رقم (1) مزورة. في هذه الحالة العملتان (2) و(3) متكافئتان.
2. العملة رقم (2) مزورة. في هذه الحالة العملتان (1) و(3) متكافئتان.
3. العملة رقم (3) مزورة. في هذه الحالة العملتان (1) و(2) متكافئتان.

هذه الخوارزمية يمكن تمثيلها بشجرة القرار التالية:



الشكل 9.3.8 شجرة القرار لاكتشاف العملة المزورة

9.4 نظريات

(1) الشجرة ذات n رأس بها $n - 1$ حافة .

(2) إذا كان كل رأس داخلي له m ابن ، وكان عدد الرؤوس الداخلية يساوي i فإن الشجرة بها $n = mi + 1$ رأس.

أما عدد الأوراق فهو

$$L = \frac{(m-1)\, n + 1}{m}$$

مثال 9.4.1 :

في شجرة الموظف المذكورة في الشكل 9.3.4 نجد أن

$m=3$ وأيضا $i=3$ أي أن عدد الرؤوس $n=3*3+1=10$

كما نجد أن

$$L = ((3-1)10+1)/3 = 21/3 = 7$$

أي أن عدد الأوراق في هذه الشجرة هو 7 وبالتحديد هي

1. الرقم
2. الاسم الأول
3. اسم الأب
4. اللقب
5. رقم (المنزل)
6. الشارع
7. المدينة

تعريفات :

أ) مستوى الرأس level of a vertex هو طول الطريق من الجذر إلى ذلك الرأس ، حيث مستوى الجذر = 0

- ارتفاع height الشجرة هو أكبر مستوى فيها ، أي أن الارتفاع هو طول أطول مسار فيها من الجذر إلى أي رأس.

نظرية:

في الشجرة التي كل رأس داخلي فيها له m من الأبناء وارتفاعها h، يكون عدد الرؤوس فيها:

$$n = 1 + m + m^2 + \dots + m^h$$
$$= (m^{h+1} – 1)/(m-1)$$

وعدد الأوراق

$$L = m^h$$

وعدد الرؤوس الداخلية هو :

$$i = n – L = (m^h – 1)/(m-1)$$

الاثبات: استخدم الاستنتاج الرياضي:

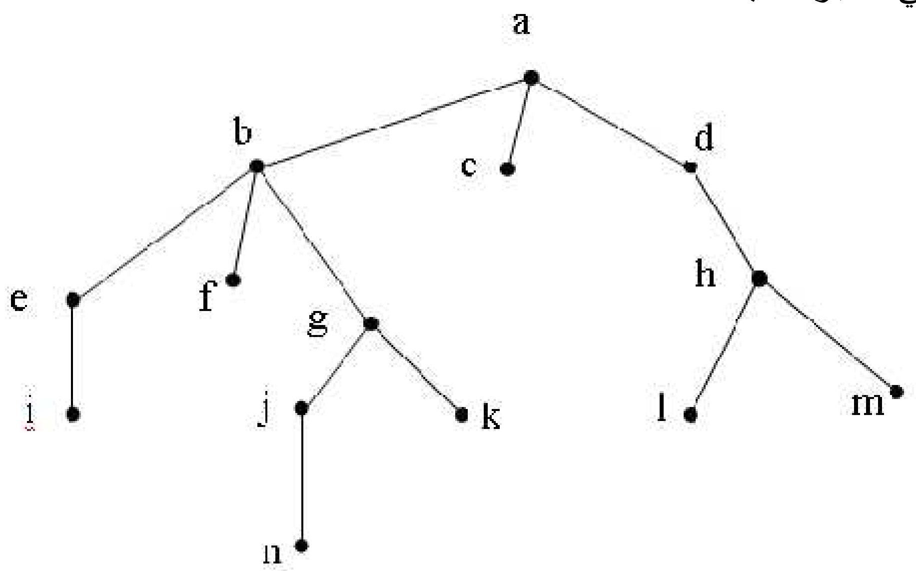
1. النظرية صحيحة في حالة h=1 لأن عدد الأبناء في هذه الحالة هو m^1 أي m .
2. الآن نفترض أن النظرية صحيحة عندما الارتفاع = h وبناء على ذلك نريد اثبات أن في حالة الارتفاع = h+1 فإن عدد الأوراق = $\mathbf{m^{h+1}}$. وهذا واضح لأن اضافة 1 للارتفاع يجعل كل ورقة من الأوراق التي عددها $\mathbf{m^h}$ رأسا داخليا له m من الأبناء . باستخدام قاعدة الضرب يصبح عدد الأوراق:

$$\mathbf{m^{h+1} = mm^h}$$

من (1) و(2) نرى أن النظرية صحيحة.

مثال 9.4.2

في الشجرة التالية :



الشكل 9.3.7 ما هو مستوى كل رأس في هذه الشجرة؟

مستوى a هو 0

مستوى b ، c ، d هو 1

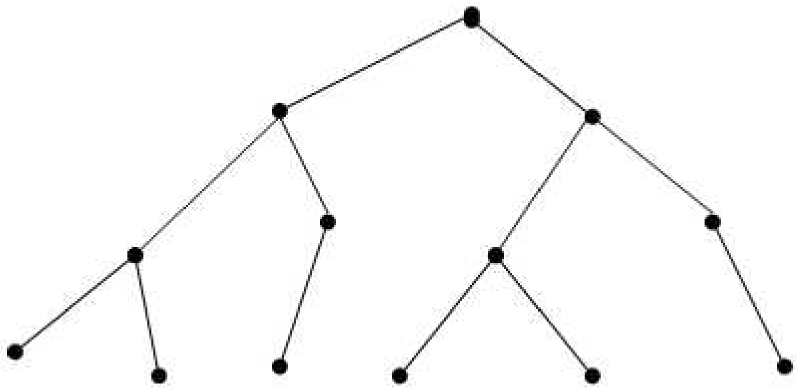
مستوى e ، f ، g ، h هو 2

مستوى i ، j ، k ، l ، m هو 3

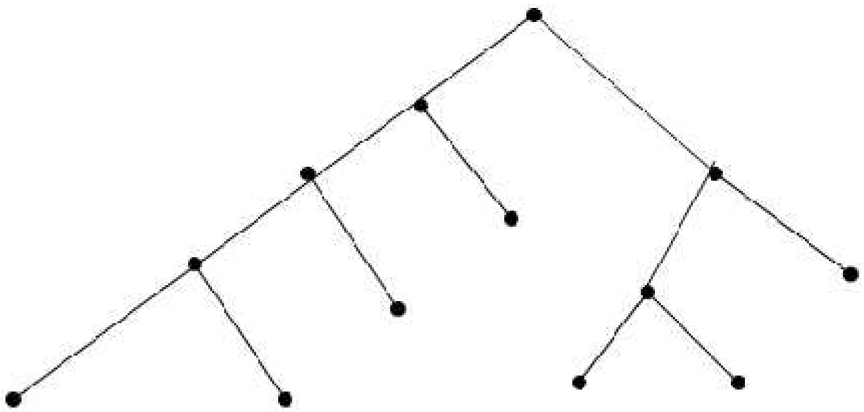
مستوى n هو 4

أي أن ارتفاع هذه الشجرة هو 4.

تعريـف : تسمى الشجرة متزنـة balanced إذا كـان مستوى كل الأوراق هـو h أو $h - 1$ حيث h هو ارتفاع الشجرة (height) .



الشكل 9.4.1. شجرة متزنة (ارتفاعها = 3)



الشكل 9.4.2 شجرة غير متزنة (يوجد بها مستويات 2 ، 3 ، 4 للأوراق)

9.5 تمثيل الشجرة في لغة باسكال

نبدأ أولاً ببعض التعريفات الأساسية :

1- الوحدة البيانية : (data item) وتعبر عن معلومة واحدة ، مثل الاسم أو العمر أو الدخل .

2- السجل (record) وهو مجموعة من الوحدات البيانية ذات علاقة. فالبيانات عن اسم الشخص مع عمره ودخله تعبر عن سجل يتكون من 3 وحدات بيانية (الاسم والعمر والدخل) .

3- الملف (file) وهو مجموعة من البيانات المتناظرة . كأن تكون سجلات عن طلبة كلية ما ، أو سجلات عن قطع الغيار المتوفر بالمخزن .

يمكن تمثيل الشجرة في لغة باسكال باستعمال السجل RECORD .

لتحديد نوع سجل و مكوناته ، نستخدم جملة TYPE على النحو :

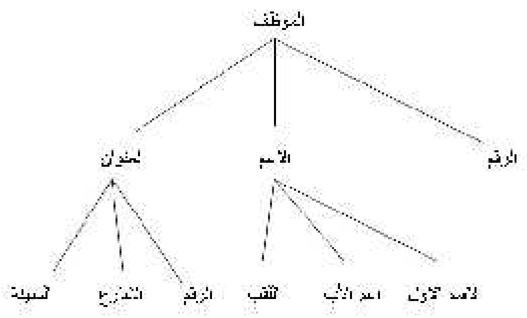
```
TYPE r = RECORD
      f1: typef1;
      f2: typef2;
      .............
```

fn: typefn

END;

حيث r هو اسم السجل (الأب parent) ، و f1, f2, f3, … , fn هي أسماء مكونات السجل على الترتيب (الأبناء children) ، و typef1 هو نوع f1 ، و typef2 هو نوع f2 ، … الخ .

ملاحظة : من الممكن أن يكون الابن من النوع السجل RECORD كما في الشجرة التالية:



سجل الموظف employee في هذا الشكل يتكون من 3 حقول (رؤوس) هي:

1- الرقم num من نوع صحيح .

2- الاسم nm من نوع سجل .

3- العنوان adrs من نوع سجل.

```
TYPE employee=RECORD
    num : INTEGER;
    nm : name;
```

```
    adrs : address;
END;
```

على أن يتم تعريف السجل name والسجل address على النحو التالي:

```
TYPE name=RECORD
    first : STRING[20];
    middle : STRING[20];
    last : STRING[20];
END;
```

```
TYPE address=RECORD
    nmbr : STRING[20];
    street : STRING[20];
    city : STRING[20];
END;
```

فمثلا قراءة اسم الموظف تتم كما يلي:

```
read( emp.name.first)
read(emp.name.middle)
read(emp.name.last)
```

حيث يجب تعريف emp على أنه من نوع employee.

```
VAR  emp : employee;
```

وبعد تحديد النوع employee ، يمكننا تحديد المتغير الذي يعبر عن ملف السجلات من النوع r (وليكن اسمه f) على النحو التالي :

VAR f: FILE OF employee;

مثال :

يبين البرنامج بالشكل (9.5.1) كيفية تكوين ملف نوعي (Typed file) . واسم هذا الملف (كما هو واضح في البرنامج) هو Studentf.dta

يبدأ هذا البرنامج بتحديد تركيبة السجل student في هذا الملف .

ويتحدد اسم السجل ومركباته في جملة TYPE . في هذا البرنامج ويتركب السجل (STUDENT) من 5 مكونات (fields) هي الرقم (number) و الاسم (name) و 3 درجات مختلفة (gr1, gr2, gr3) .

الشكل (9.5.1) : برنامج تكوين ملف نوعي على القرص

```
PROGRAM creatFile;
TYPE student=RECORD
     number : INTEGER;
     name : STRING[20];
     gr1, gr2, gr3 : REAL;
END;
VAR studentFile: FILE OF student;
    rec : student;
    i, num ,n : INTEGER;
    sname : STRING[20];
```

```
BEGIN
    ASSIGN(studentFile, 'studentf.dta');
    REWRITE(studentFile);
    WRITE('Enter number of students-->');
    READ(n);
    FOR i:= 1 TO n DO
    BEGIN
        WRITE('Enter number-->');
        READLN(rec.number);
        WRITE('Enter name-->');
        READLN(rec.name);
        WRITE('Enter grade1-->');
        READ(rec.gr1);
        WRITE('Enter second grade2-->');
        READ(rec.gr2);
        WRITE('Enter grade3-->');
        READ(rec.gr3);
        WRITE(studentFile,rec);
    END;
    CLOSE(studentFile);
END.
```

نلاحظ في البرنامج استخدام الجمل التالية :

1- جملة ASSIGN لتعيين اسم الملف الذي يتم التخزين به على القرص .
2- جملة REWRITE لفتح ملف جديد للكتابة فيه (أي لتكوينه)
3- جملة WRITE لكتابة السجلات في الملف (وليس WRITELN).
4- جملة CLOSE لقفل الملف .

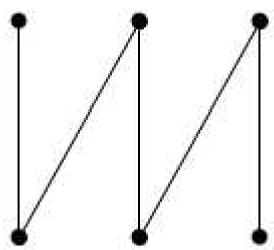
ونلاحظ أيضاً أن عدد السجلات التي تسجل في الملف طبقاً لهذا البرنامج هو 5 .

ملاحظة : إذا كان الملف موجوداً ، وثم فتح ملف باستخدام REWRITE فإن البيانات بالملف تضيع.

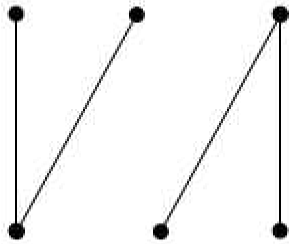
9.6 تمارين (19)

(1) أي من الأشكال التالية يعتبر شجرة ؟

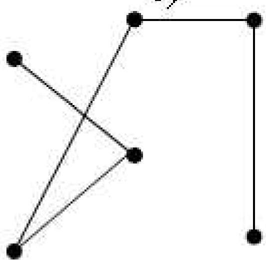
a)



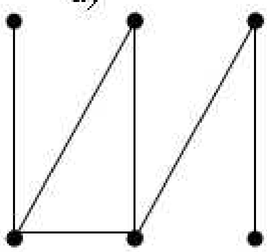
b)

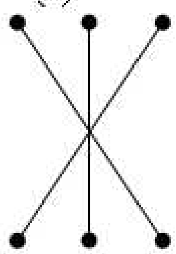


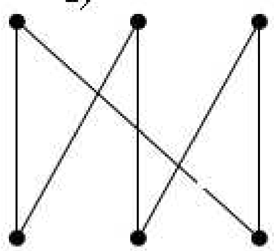
c)



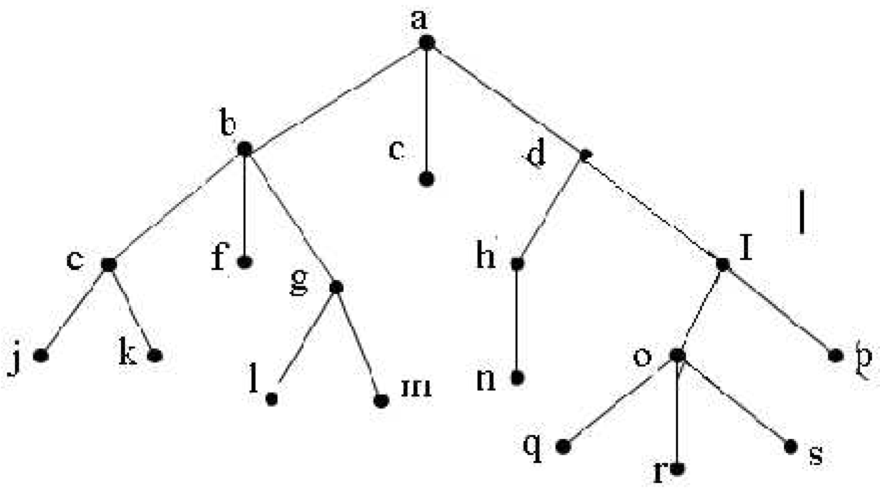
d)







(2) أجب عن الأسئلة التالية حول الشجرة المبينة :



أ- أي عقدة تعتبر الجذر ؟ root vertex

ب- أي عقد تعتبر داخلية؟ internal verities

ج- أي عقد تعتبر أوراق؟ leaves

د- أي عقد تعتبر أبناء I ؟ children

هـ- أي عقدة تعتبر أب h ؟ parent

و- أي عقد تعتبر أخوة o ؟ siblings

ز- أي عقد تعتبر سلالة b ؟ descendents

(3) في الشجرة في تمرين (2) :

أ- كم عدد أبناء كل عقدة داخلية ؟

ب- ما هو مستوى كل عقدة؟

ج- ما هو ارتفاع هذه الشجرة؟

د - هل تعتبر هذه الشجرة متزنة balanced ؟

(4) ارسم شجرة فرعية في تمرين (2) بحيث يكون جذرها عند :

أ- a

ب- c

ج- e

(5) ما هو ارتفاع شجرة ذات 85 رأس ، إذا كان كل رأس داخلي له 4 أبناء؟

(6) كم عدد الحواف في شجرة ثنائية كاملة بها 127 رأس داخلي ؟

(7) كم عدد الأوراق في شجرة بها 3280 رأسا داخليا إذا كان كل رأس داخلي به 3 أبناء؟

(8) ارسم الشجرة التي تمثل العملية الحسابية التالية:

ا- $(x + y) / (z + 9)$

ب- $5 + 7x - y$

ج - $(a – 6) /b + 8c + d$

(9) أرسم شجرة القرار لايجاد العملة المعدنية المزورة من بين 5 عملات (أربعة منها سليمة وواحدة مزورة وهي أقل وزنا من أي عملة أخرى) مستخدما ميزان يقارن بين الأوزان.