تابع السؤال الرابع :-

$x = -6$

$$N = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أساس N هو $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$\dim(N) = 2$$

$$M+N = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = x$$

$$M+N = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & y \end{bmatrix}$$

$x = -a$

أساس الفضاء M+N هو

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim(M+N) = 3$$

$$\dim(M \cap N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M+N)$$

$$= 2 + 2 - 3$$

$$\dim(M \cap N) = 1$$

السؤال الأول :- (10

حل السؤال الثالث

لإثبات ما إذا كانت V_1, V_2, V_3 مستقلة خطياً

$$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0$$

$$c_1(1,1,1) + c_2(1,2,0) + c_3(0,1,2) = 0$$

$c_1 + c_2 = 0 \longrightarrow (1)$

$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \quad (2)$

$c_1 + 2c_3 = 0 \longrightarrow (3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$R(A) = R(A/B) = n = 3$ حل وحيد وهو (الحل الصفري)

$\therefore V_1, V_2, V_3$ مستقلة خطياً وكذلك يمكن إثبات أنها تركيبة خطية للفضاء $\mathbb{R}^3$ وذلك بوضع

$$c_1(1,1,1) + c_2(1,2,0) + c_3(0,1,2) = \mathbb{R}^3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 2 & c-a \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2a-b \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 3 & b+c-2a \end{array}\right)$$

$R(A) = R(A/B) = n = 3$ المنظومة متوافقة

$\therefore V_1, V_2, V_3$ تنشئ $\mathbb{R}^3$

$\therefore V_1, V_2, V_3$ هي أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$

حل السؤال الرابع

(1) لإثبات أن M فضاء جزئياً من V

$$M_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} \in M$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \in M$$

(1) $M_1 + M_2 \in M$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in M$$

1# تتحقق

(2) $\alpha M \in M \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & 0 \\ 0 & \alpha y \end{bmatrix} \in M$$

2# تتحقق

M فضاءً جزئياً من V

*(2) لإثبات أن N فضاءً جزئياً من V

$$N_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

(1) $N_1 + N_2 \in N$

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

1# تتحقق

(2) $\alpha N \in N \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha b & 0 \end{bmatrix} \in N$$

2# تتحقق

N فضاءً جزئياً من V

لإيجاد بعد (M) نعين الأساس

$$M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أساس M هو $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim(M) = 2$

① $M_1+M_2 \in V$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & 0 \\ 0 & y_1+y_2 \end{bmatrix} \in V$$

$\frac{1}{2}$

$0\ 3\frac{1}{2}$

السؤال الرابع :-(5 درجات)

لتكن $V = M_{2\times2}(IR)$ و $M = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}; x, y \in IR\right\}$ و $N = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}; a, b \in IR\right\}$

اثبت أن N, M فضاءان جزئيان من V ثم أوجد البعد لكل من $M, N, M \cap N, M + N$

① $N_1+N_2 \in V$

الفضاء الجزئي :-

$$N = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

1 تتحقق

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ b_1+b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

1

② $\alpha N \in V$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha b & 0 \end{bmatrix}$$

2

$$M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أساس M هو :-

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\frac{1}{2}$

$\boxed{\dim(M) = 4}$

$$N = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أساس N هو :- $\frac{1}{2}$

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$\boxed{\dim(N) = 4}$

1

$$\dim(M \cap N) = \dim(N) + \dim(M) - \dim(M+N)$$

$$4 + 4 - 5 = 3$$

V_1 V_2 V_3 V_4

السؤال الثالث :- (5 درجات)

عين أساس ل IR^3 من المجموعة $\{(1,1,1),(1,2,0),(0,1,2),(1,3,2)\}$ علل إجابتك

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \alpha_4 V_4 = 0$$

أساس ← ① مستقلة ② تنشئ فضاء

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

(التدرج)

أولاً لإثبات أنها مستقلة

$\boxed{n=4}$

شروط الأساس: ① أن تكون مستقلة ② تنشئ فضاء

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

① لإثبات أنها مستقلة

$R(A) = R(A/B) = 3 < n=4$

∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول

∴ مرتبطة خطياً وليست مستقلة

$$+ \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \alpha_4 V_4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$\boxed{n=4}$

$= R(A/B) = 3] < n=4$

∴ مرتبطة خطياً وليست مستقلة

السؤال

6) إذا كان المجموعة $S = \{1, x, x^2, 1-2x+x^2\}$ في P_3 حيث $P_3 = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ;\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$

فإن :

a) S تولد P_3 b) S مستقلة خطيا c) S تولد فضاء جزئي من P_3 ذو بعد 3 d) S لا تولد فضاء جزئي من P_3 ذو بعد 3

7) إذا كان V فضاء متجهي و W_2, W_1 فضائيين جزئيين من V بحيث $V = W_1 + W_2$

$\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 5$, $\dim V = 6$ فإن $\dim(W_1 \cap W_2)$ يساوي

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

$\dim(w_1 \cap w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim w_1 + w_2$

$(w_1 \cap w_2) = \dim$
$2 + 5 - 6$

8) إذا كان W_2, W_1 فضائيين جزئيين من فضاء متجهي V و $W_1 \nsubseteq W_2$, $W_2 \nsubseteq W_1$ فإن

S ليست فضاء جزئي من V إذا كان :

a) $S = W_1 \cup W_2$ b) $S = W_1 \cap W_2$ c) $S = W_1 + W_2$ d) $S = W_1 \cup (W_1 + W_2)$

9) إذا كان W_2, W_1 فضائيين جزئيين من فضاء متجهي V بحيث $V = W_1 \oplus W_2$ و v متجه في V فإن :

a) لا يمكن كتابة v على صورة تركيبة خطية $v = w_2 + w_1$, w_1 في W_1 , w_2 في W_2

b) يمكن كتابة v على صورة تركيبة خطية لعنصر w_1 في W_1 , w_2 في W_2 بطريقتين مختلفتين

c) من الضروري أن يكون v في إحدى الفضائين الجزئيين وليس في الفضاء الجزئي الأخر

d) v تكتب على صورة تركيبة خطية وحيدة لعنصرين إحداهما في W_1 و الأخر في W_2

10) إذا كان V فضاء متجهي ذو بعد n على مجال F و كان W فضاء جزئي من V و يوجد متجه v في V بحيث $v \notin W$ فإن :

a) dim W=dim V b) dim W< dim V c) dim W=dim (V ∪ W) d) dim V=dim (V∩ W)

1) إذاكان V فضاء متجهي ذو بعد n و Sمجموعة جزئية من V تحتوي على $n+1$ متجه فمن الضروري أن:

a) S مرتبطة خطيا b) S مستقلة خطيا c) S لا تنشئ(اولا تولد) V

d) لا يمكن لأي من عناصر S أن تكتب على صورة تركيبةخطية للعناصر الأخرى

2) إذاكان V فضاء جزئي غير بديهي(غير صفري) فإن :

a) المجموعة المكونة من المتجه الصفري فقط لا تكون فضاء جزئي

b) V يحتوي على فضاء جزئي غير صفري c) V ليس فضاء جزئي من V d) بعد V يساوي صفر

3) أي مجموعة من المتجهات تحتوي على المتجه الصفري و متجه أخر لا يساوي الصفر لابد ان :

a) مرتبطة خطيا b) مستقلة خطيا c) يكون الصفر تركيبة خطية غير بديهية لبقية المتجهات

d) لا تحتوي على مجموعة مستقلة خطيا

4) إذا كانت $A \in M_{2\times2}(IR)$ حيث IR مجال الأعداد الحقيقية فإن A غير شادة إذا كان ;

a) صفوف A مستقلة خطيا b) صفوف A مرتبطة خطيا c) أحد صفوف A أصفار d) أحد أعمدة A أصفار

5) إذاكانت $A = \{(1,-3,2),(2,-4,-1),(1,-5,3)\}$ فإن $v = (2,-5,3)$ تكون :

a) تركيبة خطية للمتجهات A b) ليس تركيبة خطية للمتجهات A

c) تكون مجموعة مستقلة خطيا $A \cup \{v\}$ d) v عنصر في المتجه المولد ب $\{(2,-4,-1)(1,-3,2)\}$