ITGS217
Discrete Structures

التراكيب المنفصلة

د. رضوان حسين

مواضيع المحاضرة

- **المنطق الرقمي بت Bit**
- التكافؤ Equivalence
- الوفاق Tautologies
- التناقض Contradictions

المنطق الرقمي وعمليات بت Logic and Bit Operations

- الحاسبات الرقمية مبنية على مبدأ نظام الترقيم الثنائي **binary system**
- الخانة الواحدة **digit** تسمى **بت bit** تحتوي على قيمة واحدة إما **0** أو **1**
- يمكن تمثيل قيم متغيرات المنطق صح و خطأ **(true, false)** بخانة بت

المنطق الرقمي	
قيمة الصدق Truth value	قيمة خانة بت Bit
صح	1
خطأ	0

Logic and Bit Operations المنطق الرقمي وعمليات بت

- المتغير البُـولي Boolean Variable
  - قيمته truth value أما صح و إما خطأ
  - رقمياً, المتغير البولي قيمته إما 1 أو 0 في وحدة بت
- عمليات بت في الحاسبات الرقمية تمثل الروابط المنطقية logical connectives

		x OR y	x AND y	x XOR y	عمليات بت
x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	روابط منطقية
0	0	0	0	0	
0	1	1	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	1	1	0	

الوتر الرقمي بت Bit String

- **الوتر (نضيد أي مصطف) بت هو سلسلة sequence من قيم بت 0 و 1**
- **طول الوتر هو عدد قيم بت في الوتر**
- **مثال:**
  - **وتر يحتوي على قيم بت** 1 0101 0011 **طول الوتر يكون 9 بت**
  - **وتر يحتوي على قيم بت** 0000 0000 **طول الوتر يكون 8 بت**

- **يتباعد بين قيم الأوتار لتكون مجموعات من أربع خانات ليسهل قراءتها**

عمليات على الوتر الرقمي بت Bit String Operations

- العمليات المنطقية تجرى على سلسلة الأوتار لإجراء الروابط المنطقية بينها
- تسمى العمليات على الأوتار:
  - **bitwise *OR*, bitwise *AND*, bitwise *XOR***
  - يمكن استخدام الرموز المنطقية أيضاً: $\oplus$, $\wedge$, $\vee$
- يشترط أن يكون الوترين من نفس الطول

عمليات على الوتر الرقمي بت Bit String Operations

- **مثال:**
- **أوجد ناتج العمليات المنطقية** bitwise *XOR*, bitwise *AND*, bitwise *OR* **على وتري بت X و Y**
- **ما هو طول الوتر X و Y ؟**

- **bit string Y:** 01 1011 0110
- **bit string Y:** 11 0001 1101

11 1011 1111 bitwise *OR*

01 0001 0100 bitwise *AND*

10 1010 1011 bitwise *XOR*

التكافؤ المنطقي Logical Equivalences

- الاقتراحات التي لها نفس قيم الصدق في جميع الحالات تسمى منطقياً متكافئة.

$\neg (p \wedge q)$

$(\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Propositional Equivalences تكافؤ الاقتراحات

- تكافؤ الاقتراحات يعتبر مهماً في الحجج الرياضية Mathematical Arguments.
- يمكن تبديل عبارة ما بعبارة أخرى لـها نفس قيمة الصدق **truth value**.
- الاقتراح المركب r والاقتراح المركب s يكونان متكافئين

عندما $s \leftrightarrow r$ دائماً نتيجتها صح **true**

$r: \neg (p \wedge q)$

$s: (\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$\neg (p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$r \leftrightarrow s$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Tautology and Contradiction الوفاق والتناقض

- الاقتراحات المركبة التي دائماً صحيحة **true** مهما كانت قيم الصدق لمتغيراتها, تسمى " وفاق " tautology
- الاقتراحات المركبة التي دائماً خاطئة **false** مهما كانت قيم الصدق لمتغيراتها, تسمى " تناقض " contradiction
- الاقتراحات المركبة التي ليست " وفاق " ولا " تناقض " تسمى محتملة الوقوع contingency

Contingency:
something that might possibly happen in the future, usually causing problems or making further arrangements necessary

Tautology and Contradiction الوفاق والتـناقض

- مثال:
- باعتبار p اقتراحاً, و $\neg p$ نفي الاقتراح

Examples of a Tautology and a Contradiction			
p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

- لأن الاقتراح المركب $p \vee \neg p$ دائماً صح فهو يسمى وفاقاً
- لأن الاقتراح المركب $p \wedge \neg p$ دائماً خطأ فهو يسمى تناقضاً

Propositional Equivalences تكافؤ الاقتراحات

- الاقتراحان المركبان r و s يكونان متكافئين عندما $r \leftrightarrow s$ وفـاقـاً tautology

$r: \neg (p \wedge q)$

$s: (\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$\neg (p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$r \leftrightarrow s$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

- يمكن أن نستخدم جداول الصدق لإثبات تكافؤ الاقتراحات

Propositional Equivalences تكافؤ الاقتراحات

- يرمز للتكافؤ بين اقتراحين p و q
- $p \equiv q$
- الرمز $\equiv$ ليس رابط أو مشغل منطقي, والتعبير $p \equiv q$ ليس اقتراحاً مركب.
- التعبير $p \equiv q$ هو جملة تفيد بأن العبارة $p \leftrightarrow q$ هي وفاق **tautology**
- الرمز $\Leftrightarrow$ قد يستخدم للدلالة على الكافؤ المنطقي بدلاً من الرمز $\equiv$
- $p \Leftrightarrow q$

De Morgan’s Laws قوانين دي مورقن

1. نفي اقتراح الترابط AND بين متغيرين منطقيين يكافئ منطقياً اقتراح الانفصال OR بين نفي المتغير المنطقي الأول ونفي المتغير الثاني

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

2. نفي اقتراح الانفصال OR بين متغيرين منطقيين يكافئ منطقياً اقتراح الترابط AND بين نفي المتغير المنطقي الأول ونفي المتغير الثاني

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

قوانين دي مورقن De Morgan's Laws

- مثال:
- إذا كان $-1 < x \le 4$
- فإنه يعني العبارة $-1 < x$ AND $x \le 4$
- وبناءً على قانون مورقن الأول
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- نفي العبارة $-1 < x$ AND $x \le 4$
- يكافئ العبارة $-1 \ge x$ OR $x > 4$

De Morgan's Laws قوانين دي مورقن

- مثال:
- إذا كان $-1 < x \leq 4$
- نفي نتيجة الاقتراح $-1 < x$ AND $x \leq 4$
- يكافئ الأقتراح $-1 \geq x$ OR $x > 4$
- إذا كان $x = 2$
- $p : -1 < x$
- $q : x \leq 4$
- $\neg p : -1 \geq x$
- $\neg q : x > 4$

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

تمرين

- أثبت أن $p \to q$ و $\neg p \lor q$ هما متكافان منطقياً **Logically Equivalent**
- الحل: نكون جدول الصدق للاقتراحين المركبين

بما أن نتيجة الاقتراحين على وفاق tautology, إذن هما متكافئان

Truth Tables for $\neg p \lor q$ and $p \to q$					tautology
p	q	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$p \to q$	$(\neg p \lor q) \leftrightarrow (p \to q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

تمرين

- أثبت أن $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ هما متكافان منطقياً **Logically Equivalent**
- الحل: نكون جدول الصدق للاقتراحين المركبين

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Equivalence Laws قوانين التكافؤ

- T تعني اقتراح دائماً نتيجته صح (وفاق (tautology
- F تعني اقتراح دائماً نتيجته خطأ (تناقض (contradiction

Logical Equivalences

Equivalence القانون التكافؤ	*Name* اسم القانون
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws التطابق
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws الهيمنة
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws الثبات آيدمبوتنت
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws النفي

Equivalence Laws قوانين التكافؤ

Logical Equivalences	
$\neg(\neg p) \equiv p$	**Double Negation** النفي المزدوج
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws التبديل
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws الترابط
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws التوزيع
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws دي مورقن
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws الاختزال

قوانين التكافؤ

- **مثال:**

باستخدام قوانين التكافؤ اثبت أن: $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

- نأخذ الطرف الأيسر لإثبات تكافؤه مع الطرف الأيمن
- باستخدام قانون دي مورقن $\equiv (\neg(\neg p) \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
- بقانون النفي المزدوج $\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
- قانون التوزيع $\equiv p \vee (\neg q \wedge q)$ $\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
- قانون التبديل $\equiv p \vee (q \wedge \neg q)$
- قانون النفي $(q \vee \neg q) \equiv \mathbf{F}$ $\equiv p \vee \mathbf{F}$
- قانون التطابق $\equiv p$

قوانين التكافؤ

- **مثال:**

باستخدام قوانين التكافؤ اثبت أن:

$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$

- قانون التوزيع

الشرط $p \to$ موزع على $(q \land r)$

نهاية المحاضرة,

موضوعنا التالي:

دوال الاقتراحات المنطقية