محاضرة

تصميم وبناء دائرة الجامع Adder والطارح Subtractor

By: Zahra Elashaal

الجامع Adder

يؤدي الكمبيوتر الرقمي كثيراً من المعالجات المختلفة للمعلومات لتحقيق أهداف مختلفة ومن بين الوظائف الحسابية التي يتم إجراؤها بواسطة الكمبيوتر عملية جمع رقمين ثنائيين وهذا الجمع يتكون من أربعة احتمالات أساسية وهي:

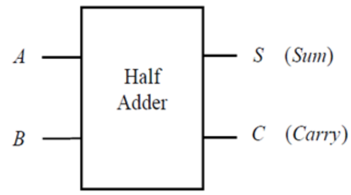
0+0=0
0+1=1
1+0=1
1+1=10

الجامع النصفي Half Adder

نصف الجامع هو أبسط أنواع الجوامع، وهو عبارة عن دائرة منطقية تقوم بجمع خانتين ثنائيتين إلى بعضهما البعض وإيجاد حاصل الجمع (SUM) والحمل (CARRY)

المخطط المنطقي للجامع النصفي Half Adder

0+0=00
0+1=01
1+0=01
1+1=10



A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

يمكن تصميم دائرة الجامع النصفي باستخدام طريقة التصميم من جدول الصدق:

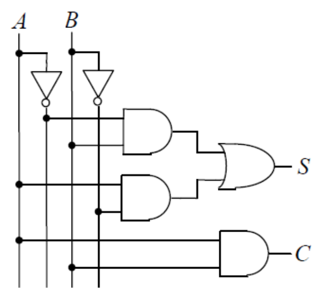
A \ B		
	0	0
	0	1

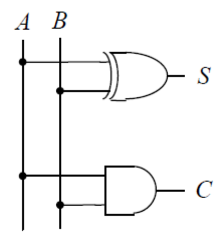
$C = AB$

A \ B		
	0	1
	1	0

$S = \overline{A}B + A\overline{B}$

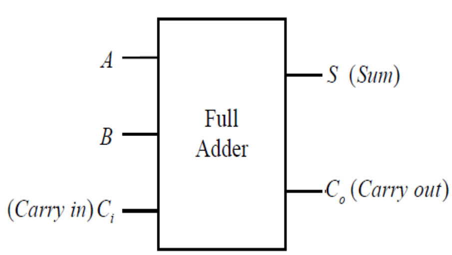
$S = A \oplus B$





الجامع الكامل Full Adder

تتقبل دائرة الجامع الكلي ثلاث مداخل وتعطي خرجين هما المجموع والمرحل لذلك الفرق الأساسي بين دائرة الجامع النصفي ودائرة الجامع الكامل هو أن دائرة الجامع الكامل لها مدخل إضافي هو المرحل السابق Carry in (C_i).



#	A	B	C_i	S	C_o
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

$$S = \sum m\,(1,2,4,7)$$

$$C_o = \sum m\,(3,5,6,7)$$

يمكن تصميم دائرة لجمع ثلاث خانات ثنائية باستخدام طريقة التصميم من جدول الصدق او من مجموع الحدود الصغرى:

$$S = \sum m\,(1,2,4,7)$$

$$C_o = \sum m\,(3,5,6,7)$$

S:

	0	1	0	1
A	1	0	1	0

C_o:

	0	0	1	0
A	0	1	1	1

$$S = \bar{A}\,\bar{B}C_i + ABC_i + \bar{A}B\bar{C_i} + A\,\bar{B}\,\bar{C_i}$$

$$S = (\bar{A}\,\bar{B} + AB)C_i + (\bar{A}B + A\,\bar{B})\,\bar{C_i}$$

$$S = \overline{(A \oplus B)}C_i + (A \oplus B)\,\bar{C_i}$$

$$let \quad X = A \oplus B$$

$$S = \bar{X}\,C_i + X\,\bar{C_i}$$

$$S = X \oplus C_i$$

$$S = A \oplus B \oplus C_i$$

$$C_o = AB + AC_i + BC_i$$

$$C_o = AB + AC_i(B + \bar{B}) + BC_i\,(A + \bar{A})$$

$$C_o = AB + ABC_i + A\bar{B}C_i + ABC_i + \bar{A}BC_i$$

$$C_o = AB + ABC_i + A\bar{B}C_i + ABC_i + \bar{A}BC_i$$

$$C_o = AB(1 + C_i + C_i) + (A\bar{B} + \bar{A}B)C_i$$

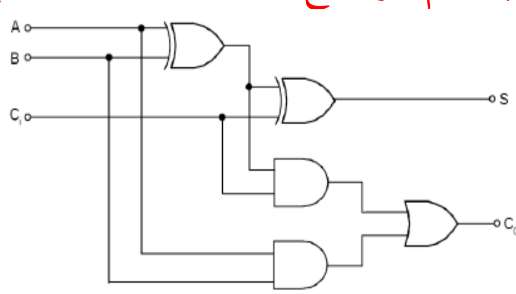
$$C_o = AB + (A \oplus B)C_i$$

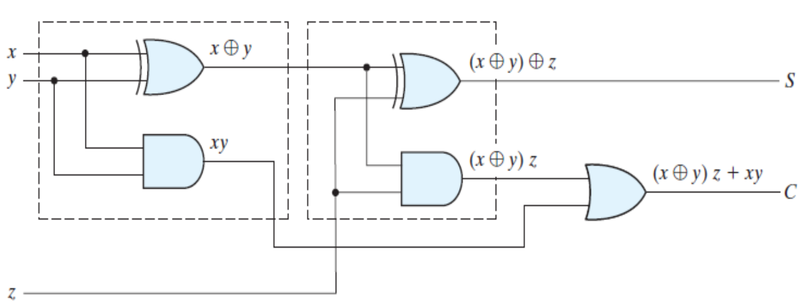
$$C_o = AB + C_i(A \oplus B)$$

ومنها تصمم دائرة الجامع الكامل لثلاث خانات ثنائية هي:

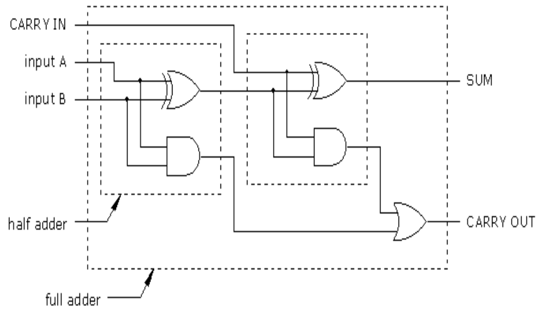
$$S = A \oplus B \oplus C_i$$

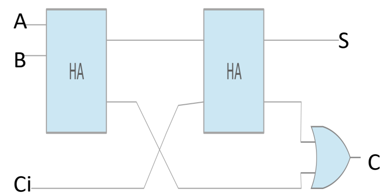
$$C_o = AB + C_i(A \oplus B)$$

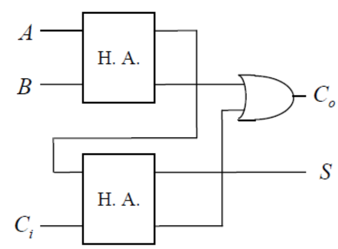




بناء الجامع الكامل باستخدام دائرتي نصف جامع وبوابة OR:







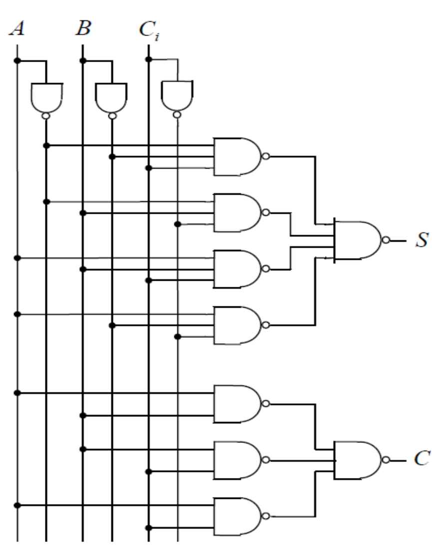
لاحظ أننا قد استخدمنا هنا نصف الجامع الأول لجمع الخانتين A, B ثم أدخلنا حاصل الجمع الناتج إلى نصف الجامع الثاني مع الخانة الثالثة C_i لحصلنا على مجموع الخانات الثلاثة. أما الحمل الخارج C_o فإنه إما أن ينتج عن عملية الجمع الأولى أو عن عملية الجمع الثانية، لذلك ربطنا الحمل الخارج من دائرتي نصف الجامع بعملية OR.

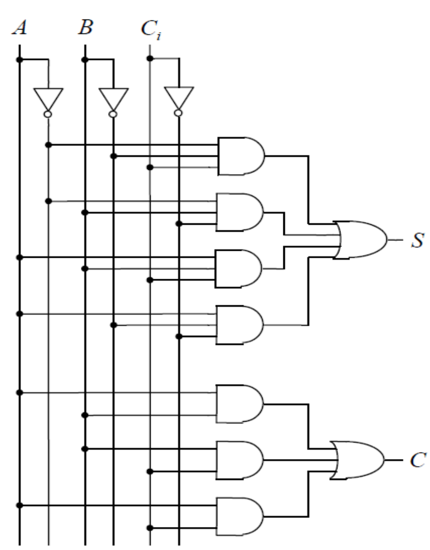
تصميم دائرة الجامع الكامل باستخدام:

1) البوابات الأساسية الثلاث.   2) بوابات NAND

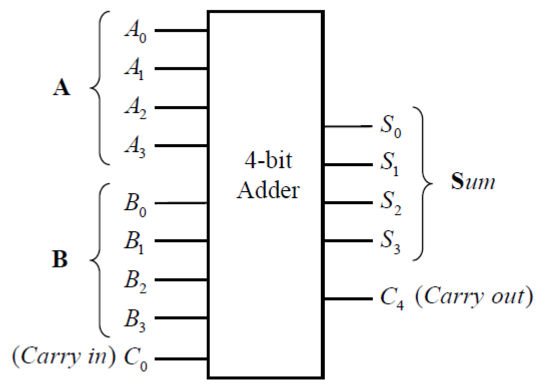
$$C_o = AB + AC_i + BC_i$$

$$S = \overline{A}\,\overline{B}C_i + ABC_i + \overline{A}B\overline{C_i} + A\,\overline{B}\,\overline{C_i}$$





المخطط المنطقي للجامع ذو الأربعة خانات (4 bit Adder)

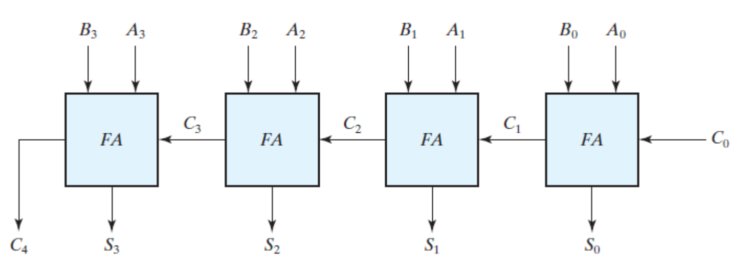


المرحل المدخل Ci في البداية يكون مساوي صفر لأنه عند جمع رقمين ثنائيين في البداية لا يكون هناك مرحل سابق.

الجامع متعدد الخانات (Multi bit Adder)

صمم دائرة منطقية تقوم بجمع عددين ثنائيين يتكون كل منهما من أربع خانات ثنائية (4 bit Adder)

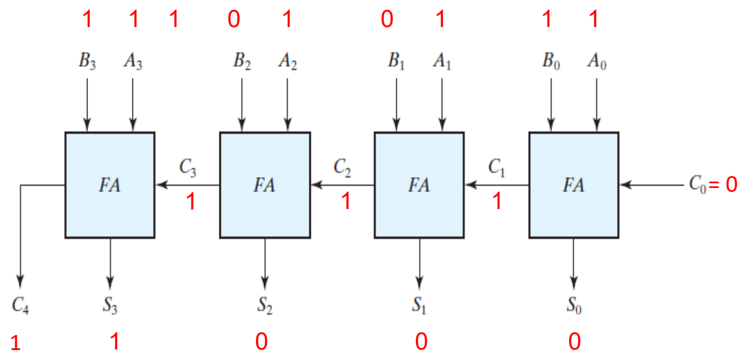
	C_3	C_2	C_1	$C_0=0$
	A_3	A_2	A_1	A_0
	B_3	B_2	B_1	B_0
C_4	S_3	S_2	S_1	S_0



الجامع متعدد الخانات (Multi bit Adder)

صمم دائرة تقوم بجمع العددين A=1111 , B=1001

بما أنه كل عدد يتكون من أربعة خانات فإننا نحتاج إلى 4 جوامع كاملة



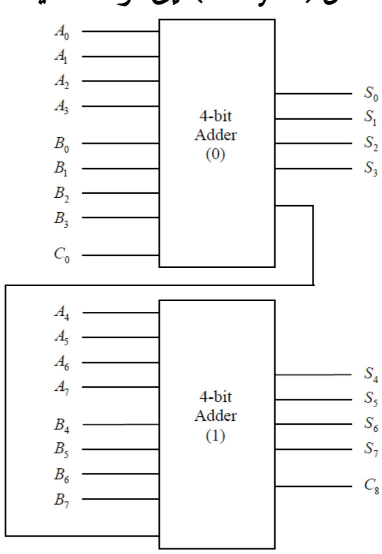
الحل = 11000

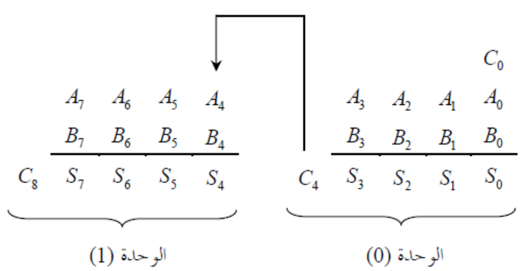
H.W باستخدام الجوامع اجمع الأعداد التـــاليـــة: B= 111 , A=101

B= 0101 , A=1101

ربط الجوامع: يمكن ربط وحدات جامع صغيرة لبناء جامع أكبر.

فعند ربط جامع كامل ذو أربع خانات نحصل على جامع ذو ثمانية خانات حيث نقوم بترحيل الحمل الخارجي (Carry out) من الوحدة الأولى وادخاله كحمل داخل (Carry in) إلى الوحدة الثانية





وضح طريقة ربط 4 وحدات جامع ذو أربعة خانات 4-bit Adder لبناء جـامع ذو 16 خانة 16-bit Adder

الطـارح Subtractor

يمكن اجراء عملية الطرح بتحويلها إلى عملية جمع وعليه فإن كل خانة من خانات المطروح تطرح من الخانة المناظرة للمطروح منه وحاصل الطرح هو الفرق بينهما فإذا كان المطروح أكبر من المطروح منه فتحدث عملية استلاف من الخانة المجاورة.

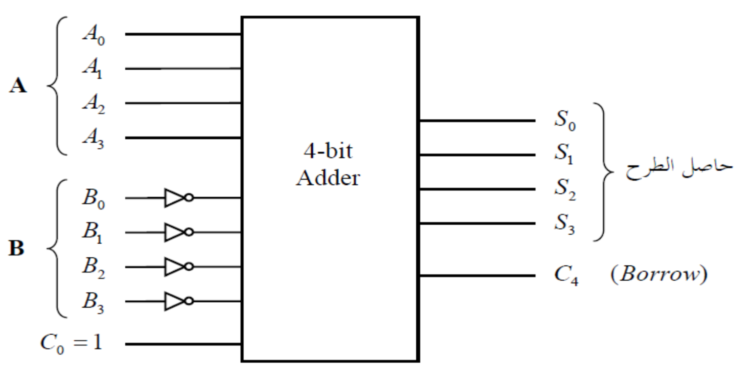
يتم تحويل عملية الطرح إلى عملية جمع مع سالب العدد المطروح كالتالي:

A - B = A + (-B)

وسالب العدد B هو المكمل الثاني 2^{nd} Complement له ونحصل عليه بعكس جميع خانات العد B ثم إضافة 1 إلى خانة LSB فإذا اعتبرنا أن كل من A و B عبارة عن عدد ثنائي ذو أربعة خانات فإن عملية الطرح تتم كالتالي:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ & \overline{B_3} & \overline{B_2} & \overline{B_1} & \overline{B_0} \\ \hline C_4 & S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{array}$$

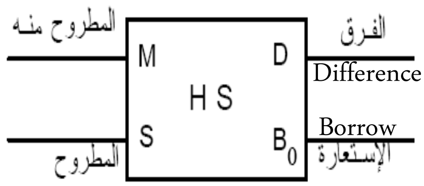
ويتم إجراء عملية الطرح الجامع ذو أربعة خانات:



ملاحظة: عندما يكون $C_4 = 1$ فإن ذلك يدل على حدوث إستلاف Borrow من الخانة التي تلي الخانة العليا MSB ويحدث هذا الإستلاف إذا كان العدد المطروح B أكبر من العدد المطروح منه A. أي أن كان $C_4=1$ فان ذلك يدل على أن حاصل الطرح عبارة عن عدد سالب، أي ان C_4 تمثل إشارة الطرح.

الطارح النصفي Half Subtractor

هي دائرة منطقية تقوم بطرح رقمين ثنائيين عند المداخل وتعطي خرجين هما الفرق (Difference) والاستعارة (Borrow) كما في الشكل التالي :



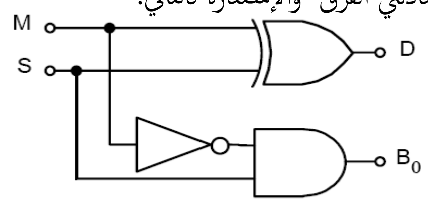
M	S	D	B_0
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

يمكن استنتاج المعادلات المنطقية لخرج الفرق (D) والاستعارة (B_o) كدوال في متغيرات الدخل

تنفيذ معادلتي الفرق والإستعارة كالتالي:

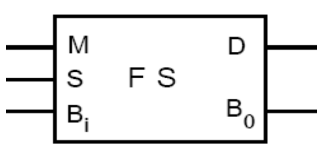
$$D = \overline{M}S + M\overline{S} = M \oplus S$$

$$B_o = \overline{M}S$$



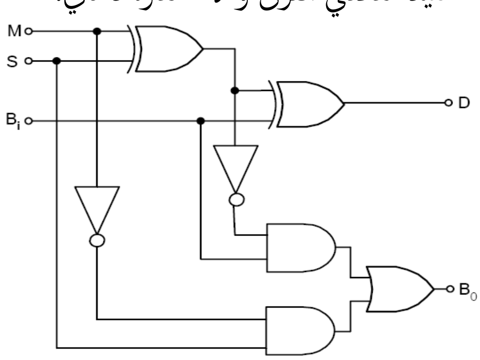
الطارح الكامل Full Subtractor

تستقبل دائرة الطارح ثلاثة مداخل وتولد خرج الفرق D وخرج الإستعارة B كالتالي:



M	S	B_i	D	B_0
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

تنفيذ معادلتي الفرق والاستعارة كالتالي:



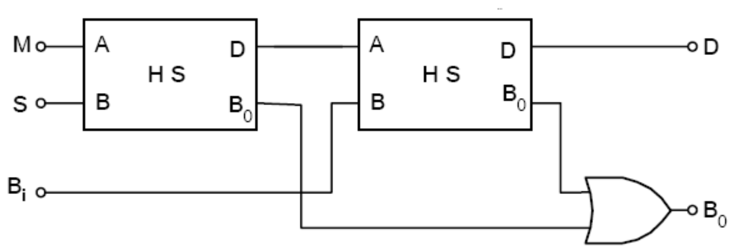
يمكن استنتاج المعادلات المنطقية لخرج الفرق (D) والاستعارة (B_o) :

$$D = M \oplus S \oplus B_i$$

$$B_o = B_i + (\overline{M \oplus S})MS$$

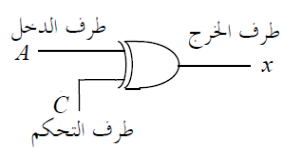
الطارح الكامل Full Subtractor

التنفيذ بإستخدام دائرة الطارح النصفي:



الجامع والطارح لاربع خانات Four-bit adder-Subtractor

يمكن اجراء عمليتي الجمع والطرح بنفس الدائرة باضافة دائرة XOR واستخدامها لتحكم Controlled:



C	A	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$x = C \oplus A$

$x = \overline{C}\,A + C\,\overline{A}$

فعندما يكون $C = 0$ فإن

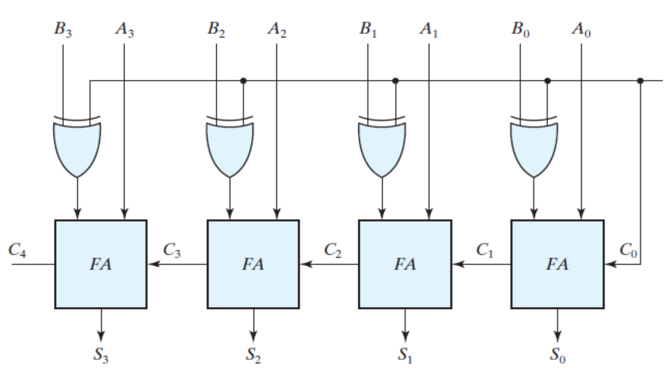
$x = 1 \cdot A + 0 \cdot \overline{A} = A$

و عندما يكون $C = 1$ فإن

$x = 0 \cdot A + 1 \cdot \overline{A} = \overline{A}$

C	x
0	A
1	$\overline{A}$

$$x = \begin{cases} A & , C = 0 \\ \overline{A} & , C = 1 \end{cases}$$



اذا كانت

M=0 Adder

M=1 Subtractor

ملاحظة مهمة:

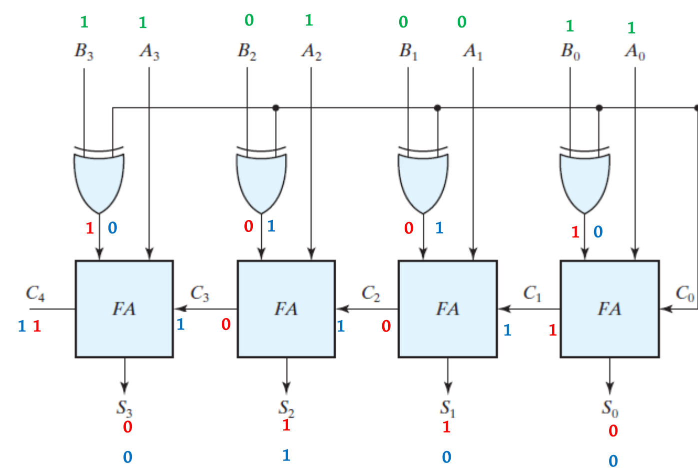
في حالة الجمع: المحمول Carry النهائي يحسب من ضمن الناتج ان وجد

في حالة الطرح: المحمول Carry النهائي يهمل ان وجد

الجامع والطارح لاربع خانات Four-bit adder-Subtractor

مثال: باستخدام الجوامع وضح عمليتي الجمع والطرح للعداد التالية:

A=1101 و B=1001



M=0 Adder

M=1 Subtractor

=0

=1

الجمع = 10110

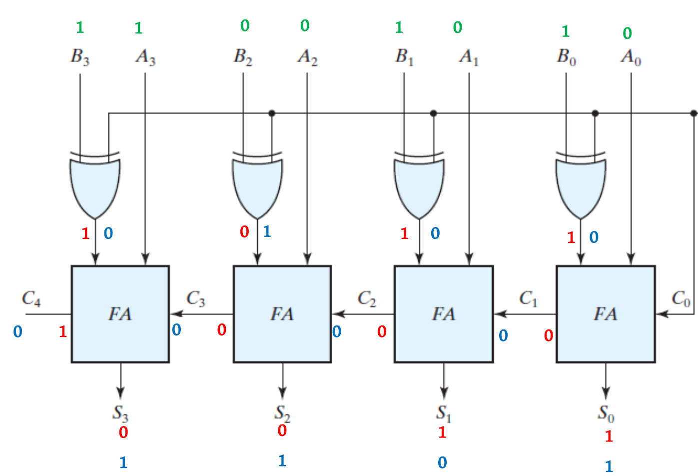
Carry النهائي يحسب من ضمن الناتج

الطرح = 0100

Carry النهائي يهمل

الجامع والطارح لاربع خانات Four-bit adder-Subtractor

مثال: باستخدام الجوامع وضح عمليتي الجمع والطرح للعداد التالية: B=1011 و A=1000



M=0 Adder

M=1 Subtractor

=0

=1

حل الجمع = 10011

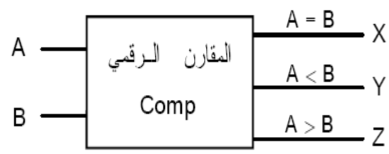
Carry النهائي يحسب من ضمن الناتج

ملاحظة: في حالة الطرح: عندما لا يوجد مرحل نهائي Carry نأخذ المثمم الثنائي للحل ونضع امامه علامة السالب

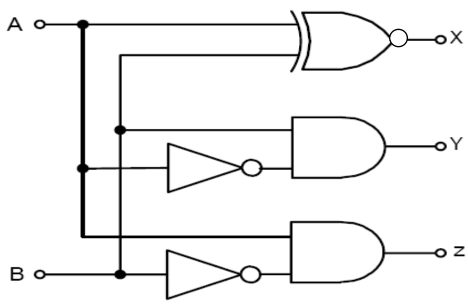
حل الطرح = 0011 -

Digital Comparator المقارن الرقمي

هو أحد الدوائر التركيبية التي تقوم بالمقارنة بين كلمتين (عددين) ثنائيين من حيث حالة أكبر من
أو أصغر من أو حالة التساوي للعددين (A = B , A < B , A > B)



A	B	X A=B	Y A<B	Z A>B
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0



$$X = \bar{A}\bar{B} + AB = \overline{A \oplus B}$$

$$Y = \bar{A}B$$

$$Z = A\bar{B}$$

Thank you