تصميم الدوائر المنطقية

Logic Circuit Design

محاضرة 5

By: Zahra Elashaal

أهداف وحدة تصميم الدوائر المنطقية

1. تحديد مواصفات الدائرة المنطقية
2. كتابة التعبيرات المنطقية

A. صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms) **(SOP)**

B. صوره مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms) **(POS)**

3. تبسيط التعبيرات المنطقية

✓ باستخدام نظريات الجبر البولياني

✓ باستخدام مخططات كارنو (Karnaugh Maps)

4. بناء الدائرة المنطقية

❖ باستخدام البوابات الأساسية (OR, AND, NOT)

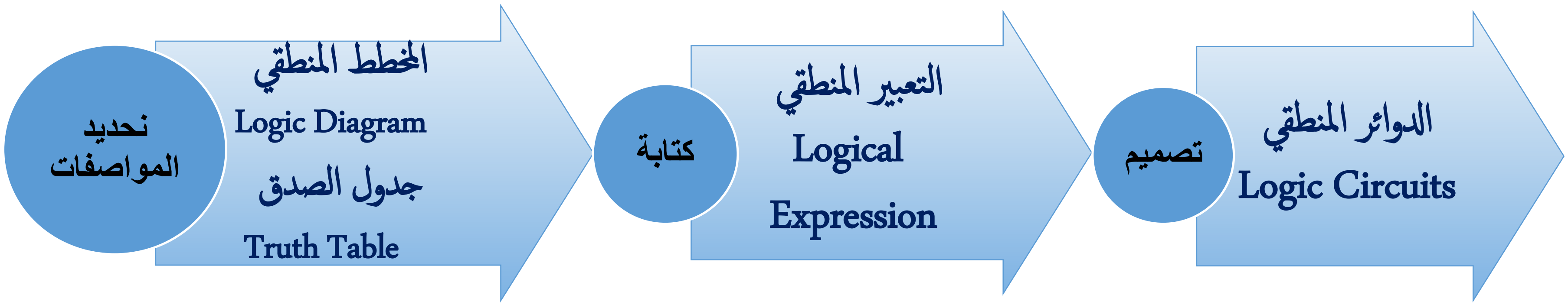
❖ باستخدام نوع واحد من البوابات (NOR, NAND)

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على:

- تحديد مواصفات الدائرة المنطقية.
- كتابة التعبيرات المنطقية بالصور المختلفة واختيار الصورة المناسبة.
- تبسيط التعبيرات المنطقية واختيار أسلوب التبسيط المناسب.
- بناء الدائرة المنطقية باستخدام البوابات الأساسية الثلاث أو باستخدام نوع واحد من البوابات.

مراحل تصميم الدائرة المنطقية



1- تحديد مواصفات الدائرة المنطقية

الخطوة الأولى في تصميم أي دائرة منطقية هي تحديد مواصفات تلك الدائرة بدقة. و يتم ذلك بإعطاء:

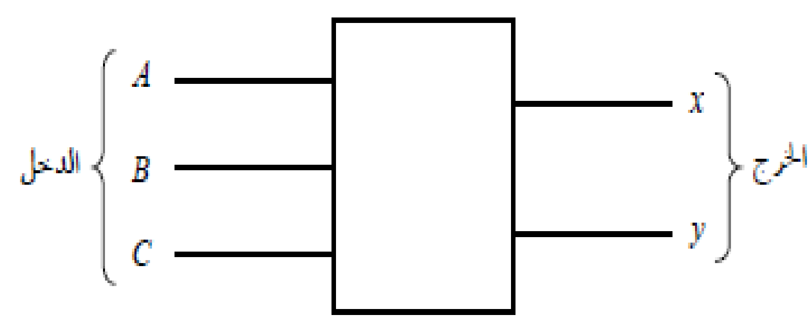
- **مخطط منطقي (Logic Diagram)**
- **جدول صواب (Truth Table)**

مثال: صمم الدائرة المنطقية الموضح المخطط المنطقي وجدول الصواب لها أدناه.

(Truth Table

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Logic Diagram



المخطط المنطقي هنا يوضح أن الدائرة المطلوب تصميمها لها ثلاثة متغيرات دخل هي A و B و C ، و متغيرا خرج هما x و y . و جدول الصواب يحدد قيم متغيري الخرج x و y المطلوبة لكل احتمال من احتمالات الدخل.

2- كتابة التعبيرات المنطقية

في هذه الخطوة يتم كتابة تعبير منطقي لكل متغير من متغيرات الخرج، بحيث يعطي التعبير نفس قيم الخرج المطلوبة والموضحة في جدول الصواب. ويتم كتابة هذه التعبيرات المنطقية من جدول الصواب.

تكتب التعابير المنطقيية باحد الصور التالية:

- صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms) **(SOP)**

  مجموع المضاريب (Sum of Products) **(SOP)**

- صوره مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms) **(POS)**

  مضروب المجاميع (Product of Sums) **(POS)**

(SOP) (Sum of Products) (Sum of minterms) مجموع الحدود الصغرى

الحد الأصغر minterms هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات AND وقد يظهر متغير معين في الحد الأصغر معكوساً إذا كانت قيمة المتغير هي 0.

أويظهر بدون عكس x إذا كانت قيمة المتغير هي 1 .

لكتابة التعبير المنطقي لمتغير معين من متغيرات الخرج في صورة مجموع الحدود الصغرى ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الصواب و نبحث عن ال 1^s، ثم نقوم بأخذ الحدود الصغرى المقابلة لهذه ال 1^s ونربط بينها، أي نقوم بجمعها بعمليات OR.

يمكن كتابة 2^n من مجموع الحدود الصغرى لـــ n من المتغيرات في جدول كالآتي:

1- كتابة الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^n-1 تحت المتغيرات البالغة n.

2- كل الحد الأصغر minterms عبارة عن حد AND مؤلف من المتغيرات البالغ عددها n مع جعل كل متغير منها مكملاً إذا كان الرقم الثنائي المناظر 0 وغير مكمل إذا كان 1. (وذلك لينتج عن كل حد القيمة 1). يرمز لكل حد من الحدود الصغرى بالرمز m_j حيث j يشير إلى العدد العشري الذي يكافئ العدد الثنائي.

مجموع المضاريب او مجموع الحدود الصغرى

(Sum of Products) (Sum of minterms) (SOP)

- الجدول التالي يبين مجموع المضاريب minterms لمتغيرين X,Y.

الأعداد الثنائية من 0 إلى $2^{n}-1$ حيث n عدد المداخل او عدد المتغيرات

عندما n=2 الأعداد الثنائية من 0 إلى $2^2-1 = 3$

#	X	Y	minterms	الرمز
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}$	m_0
1	0	1	$\overline{X}.Y$	m_1
2	1	0	$X.\overline{Y}$	m_2
3	1	1	$X.Y$	m_3

عندما n=3 الأعداد الثنائية من 0 إلى $2^3-1 = 7$

#	A	B	C	Minterm	
0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0
1	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	ABC	m_7

ملاحظة / قيمة الدالة تساوي مجموع الحدود ذات القيمة 1 .

مجموع المضاريب او مجموع الحدود الصغرى
(Sum of Products) (Sum of minterms) (SOP)

مثال: اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج y, x في جدول الصواب في صورة مجموع الحدود الصغرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

قد قمنا باختيار الحدود الصغرى المقابلة لل 1^s فقط في جدول الصواب و ربطناها بعمليات OR لهذا عند تعويض أي احتمال من احتمالات الدخل المقابلة لل 1^s في التعبير المنطقي فإن الحد الأصغر المقابل لذلك الاحتمال سيساوي **1**

(SOP) (Sum of minterms) مجموع المضاريب

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مجموع المضاريب يتم ترقيم أسطر جدول الصواب (ابتداءاً بالقيمة 0) واستخدام الرمز m_k للحد الأصغر المقابل للسطر k من جدول الصواب

#	A	B	C	x	y	Minterm	
0	0	0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
1	0	0	1	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	1	0	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	0	1	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
5	1	0	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	0	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	1	0	ABC	m_7

التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج باستخدام رموز الحدود الصغرى،

$$x = m_0 + m_1 + m_3 + m_7$$

$$y = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير أكثر من ذلك باستخدام رمز المجموع $\sum$

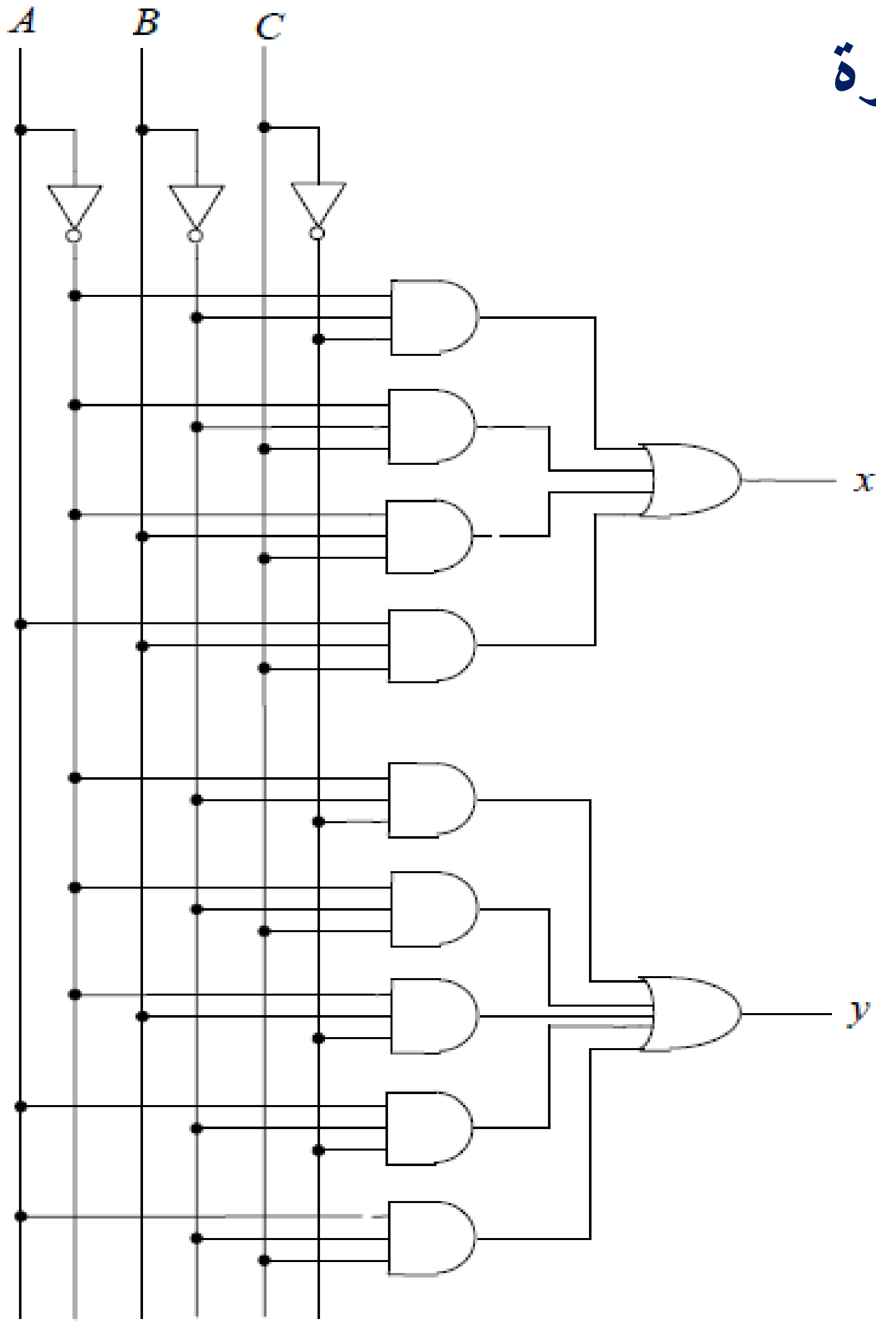
$$x = \sum m\,(0,1,3,7)$$

$$y = \sum m\,(0,1,2,4,5)$$

$$\begin{aligned} x &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC \\ &= m_0 + m_1 + m_3 + m_7 \\ &= \sum m\,(0,1,3,7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C \\ &= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \\ &= \sum m\,(0,1,2,4,5) \end{aligned}$$

الدائرة المنطقية للتعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى او مجموع المضاريب (SOP)



$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$
$$= m_0 + m_1 + m_3 + m_7$$
$$= \sum m\,(0,1,3,7)$$

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$
$$= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$
$$= \sum m\,(0,1,2,4,5)$$

مضروب الحدود الكبرى او مضروب المجاميع

(POS) (Product of Sums) (Product of Maxterms)

الحد الاكبر Maxterms هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات OR

وقد يظهر متغير معين في الحد الأصغر معكوساً $\bar{x}$ إذا كانت قيمة المتغير هي 1 أويظهر بدون عكس x إذا كانت قيمة المتغير هي 0.

لكتابة التعبير المنطقي لمتغير معين من متغيرات الخرج في صورة مضروب الحدود الكبرى ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الصواب ونبحث عن ال 0s، ثم نقوم بأخذ الحدود الصغرى المقابلة لهذه ال 0s ونربط بينها، أي نقوم بجمعها بعمليات AND.

يمكن كتابة 2^n من حدود مضروب الحدود الكبرى لــ n من المتغيرات في جدول كالآتي:

1- كتابة الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^n-1 تحت المتغيرات البالغة n.

2- كل حد مضروب الحدود الكبرى عبارة عن حد OR مؤلف من المتغيرات البالغ عددها n مع جعل كل متغير منها مكملاً إذا كان الرقم الثنائي المناظر 1 وغير مكمل إذا كان 0. (وذلك لينتج عن كل حد القيمة 0).

يرمز لكل حد مضروب الحدود الكبرى بالرمز M_J حيث j يشير إلى العدد العشري الذي يكافئ العدد الثنائي.

مضروب الحدود الكبرى او مضروب المجاميع

(POS) (Product of Sums) (Product of Maxterms)

- الجدول التالي يبين مضروب المجاميع **Maxterms** لمتغيرين X,Y.

الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^n-1 حيث n عدد المداخل او عدد المتغيرات

عندما n=3 الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^3-1 =7

#	A	B	C	Maxterm	
0	0	0	0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

عندما n=2 الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^2-1 =3

#	X	Y	Maxterms	الرمز
0	0	0	$X+Y$	M_0
1	0	1	$X+\overline{Y}$	M_1
2	1	0	$\overline{X}+Y$	M_2
3	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}$	M_3

ملاحظة / قيمة الدالة تســـاوي حاصل ضرب الحـــدود ذات القيمة 0 .

مضروب الحدود الكبرى او مضروب المجاميع

(POS) (Product of Sums) (Product of Maxterms)

مثال: اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج y, x في جدول الصواب في صورة مضروب الحدود الكبرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$x=(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$y=(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

قد قمنا باختيار الحدود الكبرى المقابلة لل 0^s فقط في جدول الصواب و ربطناها بعمليات AND لهذا عند تعويض أي احتمال من احتمالات الدخل المقابلة لل 0^s في التعبير المنطقي فإن الحد الاكبر المقابل لذلك الاحتمال سيساوي **0**

مضروب المجاميع (Product of Maxterms) (Product of Sums) **(POS)**

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مضروب المجاميع يتم ترقيم أسطر جدول الصواب (ابتداءاً بالقيمة 0) واستخدام الرمز M_k للحد الاكبر المقابل للسطر k من جدول الصواب

#	A	B	C	x	y	Maxterm	
0	0	0	0	1	1	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	1	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	0	1	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	1	0	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	0	1	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	0	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج باستخدام رموز الحدود الكبرى،

$$x = M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6$$

$$y = M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير أكثر من ذلك باستخدام رمز المضروب $\prod$

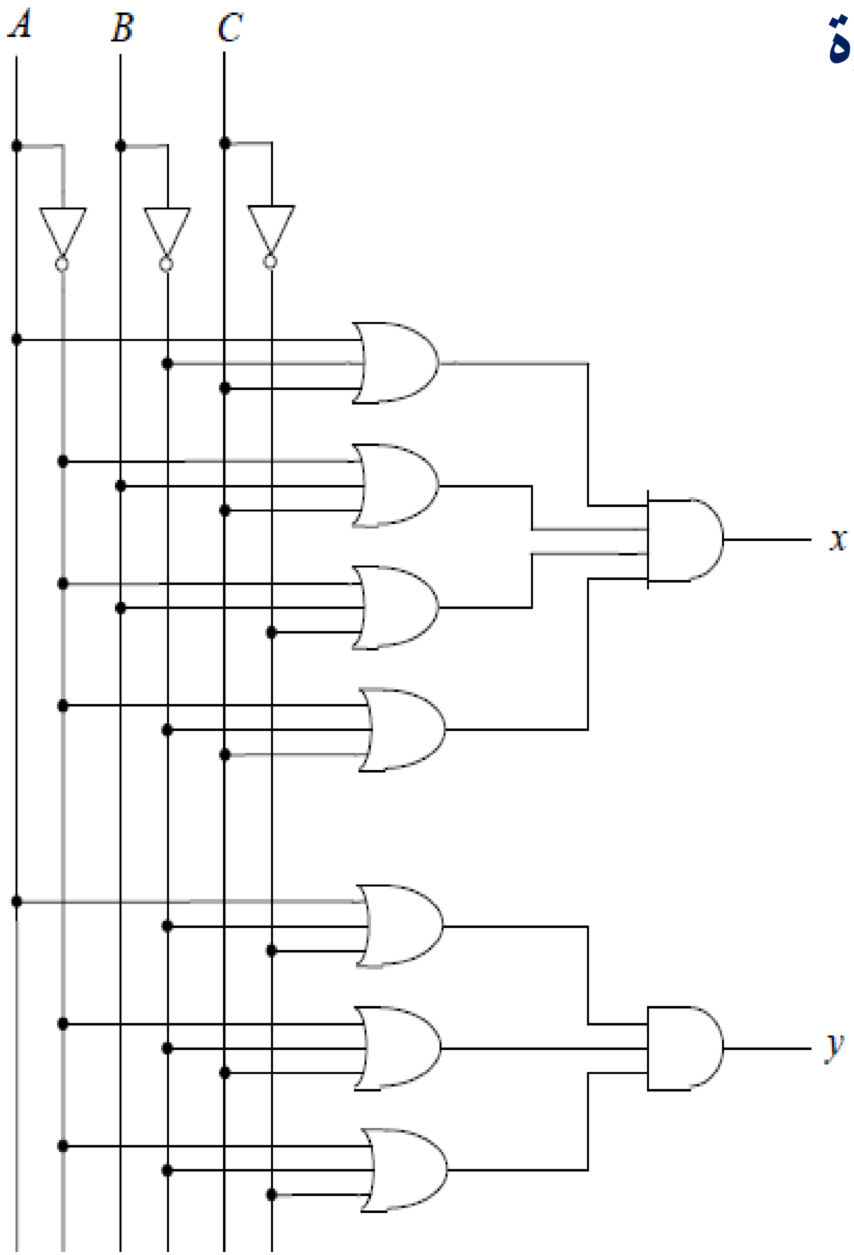
$$x = \prod M(2,4,5,6)$$

$$y = \prod M(3,6,7)$$

$$\begin{aligned} x &= (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C) \\ &= M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M \\ &= \prod M(2,4,5,6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \\ &= M_3 \cdot M_6 \cdot M_7 \\ &= \prod M(3,6,7) \end{aligned}$$

الدائرة المنطقية للتعبير في صورة مضروب الحدود الكبرى او مضروب المجاميع (POS)



$$
\begin{aligned}
x &= (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M \\
&= \prod M(2,4,5,6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \\
&= M_3 \cdot M_6 \cdot M_7 \\
&= \prod M(3,6,7)
\end{aligned}
$$

اختيار الصورة المناسبة للتعبيرات المنطقية:

نختار الصورة المناسبة للتعبيرات المنطقية من الصور التي درسناها بناء على شكل الدائرة المطلوب.

- فإذا كنا نريد دائرة في شكل **AND-OR Structure** نختار صورة **مجموع الحدود الصغرى (مجموع المضاريب)** (Sum of Products)
- أما إذا أردنا دائرة في شكل **OR-AND Structure** فإننا نختار صورة **مضروب الحدود الكبرى (مضروب المجاميع)** (Product of Sums)

تدريب:

من جدول الصواب التالي اكتب التعبيرات المنطقية لمتغيرات الخرج x و y و z في صورة:

1- مجموع الحدود الصغرى

2- مضروب الحدود الكبرى

A	B	C	x	y	z
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

ملاحظة:

$$M_j = \overline{m_j}$$

For Example : j = 3 = $(011)_2$

$$m_i = \bar{x}yz$$

$$\overline{m_i} = \overline{\bar{x}yz}$$

$$\overline{m_i} = x + \bar{y} + \bar{z} = M_3$$

HW / اكتب جدول SOP و POS لأربع متغيرات W,X,Y,Z

الصور القياسية للمعادلات المنطقية:

كما ذكرنا بأنه يمكن التعبير جبرياً (في صورة قياسية)عن أي دالة بولينية من جدول صدق معطى وذلك في إحدى الصورتين القياسيتين التاليتين:-

1- جمع حدود حواصل الضرب (جمع المضاريب) Sum Of Product's SOP

- وهي الصيغة القانونية مجموع الحدود الصغرى

- وهو جمع OR لحدود حواصل الضرب (AND) والتي تكون عندها الدالة بـــ 1 ويرمز لها بالرمز $\sum$

2- ضرب حدود حواصل الجمع (ضرب المجاميع) Product Of Sum's POS

- وهي الصيغة القانونية مجموع الحدود الكبرى.

- وهو ضرب AND لحدود حواصل الجمع (OR) والتي تكون عندها الدالة بـــ 0 ويرمز لها بالرمز $\prod$

تلخيص حساب المعادلة المنطقية باستخدام SOP او POS

فإذا كان الخرج y هو:

				SOP		POS				
#	A	B	C	Minterm		Maxterm		Y	SOP	POS
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0	1	m_0	
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1	$A+B+\overline{C}$	M_1	0		M_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2	$A+\overline{B}+C$	M_2	0		M_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3	1	m_3	
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4	$\overline{A}+B+C$	M_4	1	m_4	
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5	0		M_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6	1	m_6	
7	1	1	1	ABC	m_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7	1	m_7	

$$\boldsymbol{M_j = \overline{m_j}}$$

SOP

$$Y = \sum m(0,3,4,6,7)$$

$$Y = \sum m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7$$

$$Y = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\,\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

POS

$$Y = \prod M(1,2,5)$$

$$Y = \prod M_1 \,.\, M_2 .\, M_5$$

$$Y = (A + B + \bar{C}).\,(A + \bar{B} + C).\,(\bar{A} + B + \bar{C})$$

التحويل بين الصيغ القانونية:

$F = \overline{\overline{F}}$ $\qquad M_j = \overline{m_j}$

#	A	B	C	F	$\overline{F}$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	0	$m_1 = \overline{M_1}$
2	0	1	0	0	1	
3	0	1	1	0	1	
4	1	0	0	1	0	$m_4 = \overline{M_4}$
5	1	0	1	0	1	
6	1	1	0	0	1	
7	1	1	1	1	0	$m_7 = \overline{M_7}$

- مجموع الحـــدود الصغرى ل SOP (F):

$$F = \sum m(1,4,7)$$

$$F = m_1 + m_4 + m_7$$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

- حاصل ضرب الحدود الكبرى ل POS ($\overline{F}$):

$$\overline{F} = \prod M(1,4,7)$$

$$\overline{F} = \prod M_1 . M_4 . M_7$$

$$\overline{F} = (A + B + \overline{C}).(\overline{A} + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

$$\because F = \overline{\overline{F}}$$

$$\therefore F = \overline{\overline{F}} = \overline{(A + B + \overline{C}).(\overline{A} + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})}$$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

مثال: • استنتج المعادلة المنطقية من جدول الصدق التالي في صورة:

أولا: SOP ثانياً: POS

#	A	B	C	F	
0	0	0	0	0	M_0
1	0	0	1	1	m_1
2	0	1	0	0	M_2
3	0	1	1	0	M_3
4	1	0	0	1	m_4
5	1	0	1	0	M_5
6	1	1	0	0	M_6
7	1	1	1	1	m_7

أولا: لإيجاد SOP نجمع الحدود m التي عندها **F=1**

$$F = m_1 + m_4 + m_7$$

$$F = \sum m(1,4,7)$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

ثانياً: لإيجاد POS نضرب الحدود M التي عندها **F=0**

$$F = M_0 . M_2 . M_3 . M_5 . M_6$$

$$F = \prod M(0,2,3,5,6)$$

$$F = (A+B+C).(A+\bar{B}+C).(A+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+B+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

مثال: • استنتج المعادلة المنطقية من جدول الصدق التالي في صورة:

أولا: SOP ثانياً : POS ثم ارسم المخطط المنطقي لهما

#	X	Y	Z	F	
0	0	0	0	1	m_0
1	0	0	1	0	M_1
2	0	1	0	1	m_2
3	0	1	1	0	M_3
4	1	0	0	0	M_4
5	1	0	1	1	m_5
6	1	1	0	0	M_6
7	1	1	1	1	m_7

أولا: لإيجاد SOP نجمع الحدود m التي عندها F=1

$$F = m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

$$F = \sum m(0,2,5,7)$$

$$F = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}Z + XYZ$$

ثانياً: لإيجاد POS نضرب الحدود M التي عندها F=0

$$F = \prod M(1,3,4,6)$$

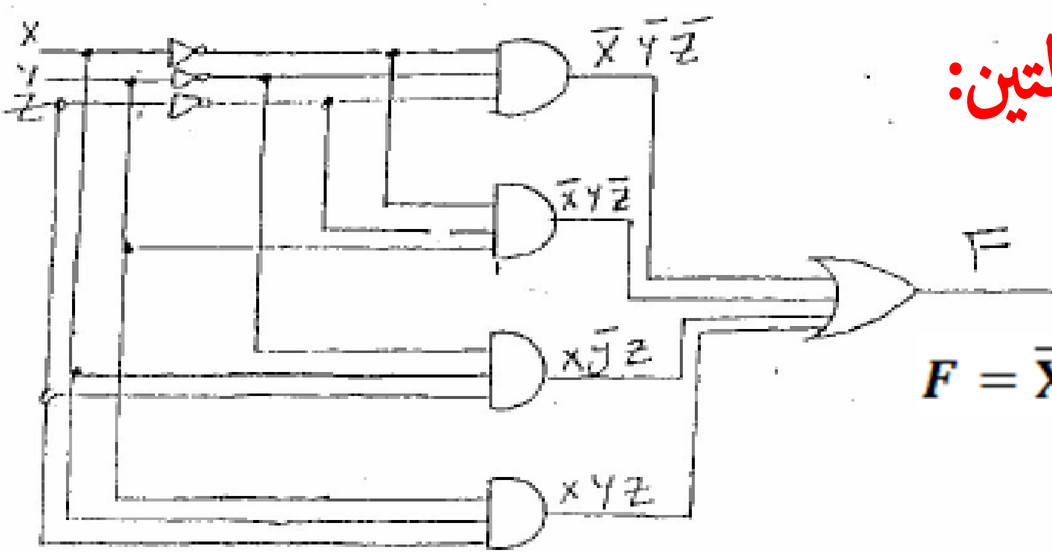
$$F = M_1 . M_3 . M_4 . M_6$$

$$F = \left(X + Y + \bar{Z}\right).\left(X + \bar{Y} + \bar{Z}\right).\left(\bar{X} + Y + Z\right).\left(\bar{X} + \bar{Y} + Z\right)$$

رسم المخطط المنطقي للمعادلتين:

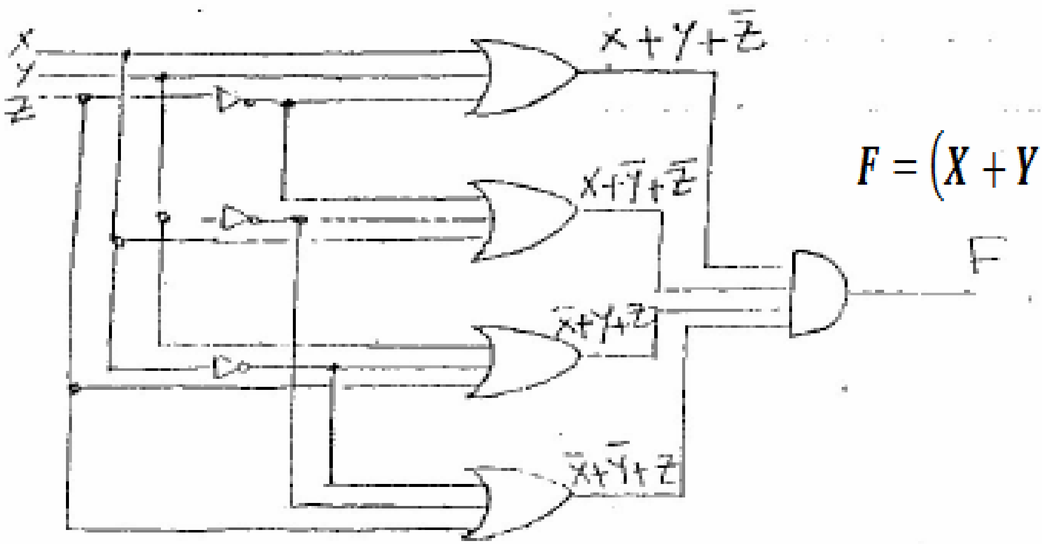
أولا: SOP

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ$$



ثانياً: POS

$$F = (X + Y + \overline{Z}).(X + \overline{Y} + \overline{Z}).(\overline{X} + Y + Z).(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$



مثال: اكتب المعادلة المنطقية في صورة أولا: SOP ثانياً : POS

ثم ارسم المخطط المنطقي لهما

$$X(A,B,C) = \sum m(0,1,5)$$

الحل:

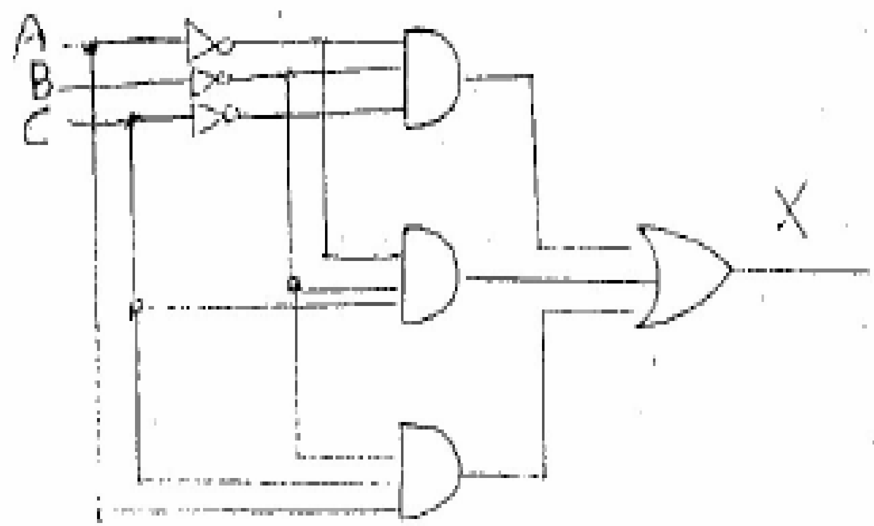
أولا: SOP

$$X(A,B,C) = \sum m(0,1,5)$$

$$X(A,B,C) = m_0 + m_1 + m_5$$

$$X(A,B,C) = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + A\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

المخطط المنطقي لي SOP



ثانياً: POS

$$X(A,B,C) = \prod M(2,3,4,6,7)$$

$$X(A,B,C) = \prod M_2.M_3.M_4.M_6.M_7$$

$$X(A,B,C) = (A + \bar{B} + C).(A + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{A} + B + C).(\bar{A} + \bar{B} + C).(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

قم برسم المخطط المنطقي لي POS

مثال: عبر عن الدالة المنطقية $E = \overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Z}$ في صورة

1- SOP   2 - POS

- نكتب جدول الصدق للمعادلة E

	X	Y	Z	$\overline{Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$\overline{X}\,\overline{Z}$	E	
0	0	0	0	1	1	1	1	1	m_0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	m_1
2	0	1	0	0	1	1	1	1	m_2
3	0	1	1	0	1	0	0	0	M_3
4	1	0	0	1	0	1	0	1	m_4
5	1	0	1	1	0	0	0	1	m_5
6	1	1	0	0	0	1	0	0	M_6
7	1	1	1	0	0	0	0	0	M_7

- لايجاد SOP نجمع الحدود m التي عندها E = 1

$$E = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$

$$E(X,Y,Z) = \sum m(0,1,2,4,5)$$

$$E(X,Y,Z) = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z$$

- لايجاد POS نضرب الحدود M التي عندها E = 0

$$E = M_3 + M_6 + M_7$$

$$E = \prod M(3.6.7)$$

$$E(X,Y,Z) = (X + \overline{Y} + \overline{Z}).(\overline{X} + \overline{Y} + Z).(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})$$

تدريب: عبر عن الدالة المنطقية $F = (A + \bar{B})(\bar{A} + B + C)$ في صورة

1- SOP 2 - POS

تبسيط التعبيرات المنطقية:

الهدف من عملية تبسيط التعبيرات المنطقية هو وضعها في أبسط صورة ممكنة، أي تقليل عدد البوابات المنطقية المستخدمة في بنائها، و بالتالي تقليل تكلفتها. ويتم تبسيط التعبيرات المنطقية بإحدى طريقتين:

- باستخدام نظريات الجبر البولياني (Boolean Algebra Theorems)
- باستخدام مخططات كارنو (Karnaugh Maps)

التبسيط باستخدام نظريات الجبر البولياني:

- نبدأ من جدول الحقيقة
- نكتبها بالصيغة القانونية
- نستخدم الجبر البولي لتبسيط المعادلة:

يتم التبسيط هنا بالبحث عن التشابهات ما بين الحدود. والحدين المتشابهين هما حدان يتشابهان في كل شيء عدا متغير واحد يظهر في أحدهما معكوساً و في الآخر بدون عكس. ويتم جمع كل حدين متشابهين في حد واحد هو عبارة عن العامل المشترك ما بين الحدين، أما المتغير المختلف فيتم اختصاره.

و في حالة وجود حد معين يتشابه مع أكثر من حد آخر فإنه يمكن تكرار ذلك الحد حسب الحاجة.

Boolean Algebra Theorems نظريات الجبر البولياني

اسم النظرية	النظرية	النظرية المقابلة
عكس العكس	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
العمليات مع 1 و 0	$A + 1 = 1$ $A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = A$
المتغير مع نفسه	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
المتغير مع عكسه	$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$
النظرية الإبدالية	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
النظرية التجميعية	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
النظرية التوزيعية	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
الامتصاص أو الابتلاع	$A + A \cdot B = A$ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (A + B) = A$ $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
دي مورغان (De Morgan)	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

التبسيط باستخدام نظريات الجبر البولياني

- نبدأ من جدول الحقيقة
- نكتبها بالصيغة القانونية
- نستخدم الجبر البولي لتبسيط المعادلة:

$$F(A,B,C) = \sum m(1,4,5,6,7)$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}(\bar{C} + C) + AB(\bar{C} + C)$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B} + AB$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A(\bar{B} + B)$$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A$$

$$F = \bar{B}C + A$$

مثال: صورة مجموع الحدود الصغرى

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرين المنطقيين التاليين المكتوبين في صورة مجموع الحدود الصغرى

$$x = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

الحل:

$$x = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

$$x = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

$$x = \bar{A}\bar{B} + BC$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}$$

$$y = \bar{B} + \bar{A}\bar{C}$$

مثال: صورة مضروب الحدود الكبرى

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرين المنطقيين التاليين المكتوبين في صورة مضروب الحدود الكبرى

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

الحل:

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$x = (\overline{B}+C)(\overline{A}+B)$$

$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$y = (\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B})$$

ملاحظة: يمكن تبسيطها اكثر ولكن هذا يؤدي إلى تغيير صورة التعبير المنطقي الي صورة مجموع الحدود الصغرى

$$y = \overline{B}+\overline{C}\,\overline{A}$$