ITGS217
Discrete Structures

التراكيب المنفصلة

د. رضوان حسين

مواضيع المحاضرة

- الاقتراحات المُرضية Propositional Satisfiability
- تطبيقاتها...

Propositional Satisfiability الاقتراحات المُرضِية

- الاقتراح المركب يكون **مُرضياً** satisfiable إذا كان يوجد قيم صدق truth values تمنح assignment لمتغيراته المنطقية تجعل الاقتراح **صحيحاً true**.
- عندما **لا توجد** قيم صدق تجعل الاقتراح صحيحاً, أي أن الاقتراح المركب دائماً **خطأ** false بكل القيم الممنوحة لمتغيراته,

  فإن الاقتراح يكون **غير مُرضي** unsatisfiable

  - الاقتراح يكون غير مرضي إذا وفقط إذا كان نفيه negation يكون صحيحاً مع كل قيم الصدق الممنوحة لمتغيرات
  - أي إذا وفقط إذا كان نفيه يعطي **وِفاقاً tautology**

الاقتراحات المُرضِية Propositional Satisfiability

- عندما نتحصل على قيمة صدق تمنح للاقتراح المركب وتجعله " صح ", نكون أثبتنا أن الاقتراح **مُرضياً** satisfiable
- تلك القيمة التي تجعل الاقتراح صحيحاً تسمى "حلاً " a solution لمسألة الرضى في الاقتراح

إثبات الاقتراحات المُرضِية

- لإثبات أن الاقتراح المركب غير مُرضي نحن نحتاج أن نوضح أن كل قيم الصدق الممنوحة assigned للمتغيرات في جدول الصدق تجعل النتيجة دائماً خطأ false.
- لأن جداول الصدق قد تتكون من صفوف كثيرة بحسب عدد المتغيرات,
  - عادةً من المهنية efficient عدم استخدام جدوال الصدق
  - بل نستخدم التحليل المنطقي لقيم الصدق reason about

مثال: إثبات الاقتراحات المُرضِية

- باستخدام الإثبات المنطقي أوجد هل الاقتراحات المركبة التالية مرضية satisfiable

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
3. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

- **الحل:**

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$

الاقتراح يكون صحيحاً true عندما يكون p و q و r لها نفس القيمة المنطقية

✓ إذن الاقتراح مرضي satisfiable لأنه يوجد على الأقل قيمة صدق تمنح للمتغيرات المنطقية p و q و r بالاقتراح تجعله صح true

مثال: إثبات الاقتراحات المُرضِية

- **الحل:**

2. $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$

الاقتراح يكون صحيحاً true عندما على الأقل أحد المتغيرات p و q و r لها القيمة المنطقية صح true وأخر يكون خطأ false

✓ إذن الاقتراح مرضي satisfiable لأنه على الأقل يوجد قيمة تمنح للمتغيرات تجعل الاقتراح صحيحاً true

- **الحل:**

3. $(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p) \land (p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$

ليكون الاقتراح صحيحاً true يجب أن يكون التعبير

$(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p)$ صحيحاً true ,

$(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$ يكون صحيحاً

- ليكون التعبير الأول صحيحاً يجب أن يكون **كل المتغيرات لها نفس القيمة المنطقية**,
- وليكون التعبير الثاني صحيحاً يجب أن يكون **على الأقل متغير واحد بقيمة صح ومتغير آخر بقيمة خطأ**, و هذا يتعارض مع **شرط صحة التعبير الأول**

➢ **إذن الاقتراح المركب الثالث غير مرضي unsatisfiable**

إثبات الاقتراحات المُرضِية

مثال: استخدم المشغلات والمتغيرات المنطقية لصياغة اقتراح مركب يعبر عن جُمل الفقرة التالية

" الطالب يتخصص بقسم نظم المعلومات فقط إذا نجح في مادة أساسيات نظم المعلومات وأنجز أكثر من 55 وحدة, ويمكن للطالب الانتقال إلى قسم نظم المعلومات من قسم هندسة البرمجيات أو قسم تطبيقات الإنترنت إذا كان معدله العام لا يقل عن 60% , أو من قسم الحوسبة النقالة بمعدل عام لايقل عن 70% , ولا يقبل الطالب في قسم نظم المعلومات عدا ذلك "

p: الطالب يتخصص بقسم نظم المعلومات

¬p: الطالب لا يتخصص بقسم نظم المعلومات

q: الطالب نجح في مادة أساسيات نظم المعلومات

r: الطالب أنجز أكثر من 55 وحدة

s: الطالب من قسم هندسة البرمجيات

w: الطالب من قسم تقنيات الإنترنت

x: الطالب معدله أكبر من أو يساوي 60%

m: الطالب من قسم الحوسبة النقالة

z: الطالب معدله أكبر من أو يساوي 70%

$$p \rightarrow q \wedge [\, r \vee ((s \oplus w) \wedge x) \oplus (m \wedge z)]$$

$\oplus$: لايسمح بالتخصص في أكثر من قسم واحد

$q \wedge$: لابد من تصفية مادة أ ن م للتخص بقسم ن م

هل هي اقتراحات سليمة؟

$$p \rightarrow (r \wedge q) \vee (s \vee w \wedge x) \vee (m \wedge z)$$

$$p \rightarrow q \wedge [\, r \vee ((s \vee w) \wedge x) \vee (m \wedge z)]$$

مثال: طالب من قسم هـ ب معدله 60% ولم ينجز مادة أ ن م

$$p \rightarrow q \wedge [\, r \vee ((s \oplus w) \wedge x) \oplus (m \wedge z)]$$
$$p \rightarrow f \wedge [\, t \vee ((t \oplus f) \wedge t) \oplus (f \wedge f)]$$
$$p \rightarrow f \wedge [\, t \vee ((t) \wedge t) \oplus (f)]$$
$$p \rightarrow f \wedge [\, t \vee t \oplus f]$$
$$p \rightarrow f \wedge [\, t \oplus f]$$
$$p \rightarrow f \wedge t$$
$$p \rightarrow f \quad , \quad t \rightarrow f \quad , \quad f$$

مثال: طالب من قسم ح ن معدله ≥ 70 وأنجز مادة أ ن م

$$p \rightarrow q \wedge [\, r \vee ((s \oplus w) \wedge x) \oplus (m \wedge z)]$$
$$p \rightarrow t \wedge [\, t \vee ((f \oplus f) \wedge t) \oplus (t \wedge t)]$$
$$p \rightarrow t \wedge [\, t \vee ((f) \wedge t) \oplus (t)]$$
$$p \rightarrow t \wedge [\, t \vee f \oplus t]$$
$$p \rightarrow t \wedge [\, t \oplus t]$$
$$p \rightarrow t \quad , \quad t \rightarrow t \quad , \quad t$$

p: الطالب يتخصص بقسم نظم المعلومات

¬p: الطالب لا يتخصص بقسم نظم المعلومات

q: الطالب نجح في مادة أساسيات نظم المعلومات

r: الطالب أنجز أكثر من 55 وحدة

s: الطالب من قسم هندسة البرمجيات

w: الطالب من قسم تقنيات الإنترنت

x: الطالب معدله أكبر من أو يساوي 60%

m: الطالب من قسم الحوسبة النقالة

z: الطالب معدله أكبر من أو يساوي 70%

✓ **إذن الاقتراح المركب مرضي satisfiable لأنه على الأقل يوجد قيمة تمنح للمتغيرات تجعل الاقتراح صحيحاً true**

جرب: طالب من قسم عام معدله 50% وأنجز 57 وحدة ومادة أ ن م

جرب: طالب من قسم عام معدله 80% وأنجز 50 وحدة ومادة أ ن م

تطبيقات الاقتراحات المُرضِية

- كثير من المسائل في مجالات متنوعة يمكن وصفها بالاقتراحات المرضية
  - ✓ الروبوتات Robotics
  - ✓ اختبار البرمجيات Software Testing
  - ✓ التصميم بالحواسيب Computer Aided Design
  - ✓ شبكات الحاسوب Computer Networks
  - ✓ و في الألعاب Games, وغيرها ...

تطبيقات الاقتراحات المُرضِية

- سنعرض مثال في الألعاب Games, و هي لعبة لغز سودوكو Sudoku اليابانية
- كل خلية تحتوي على رقم واحد من الأرقام من 1 إلى 9
- كل صف وكل عمود وكل مربع 3×3 يحتوي على الأرقام من 1 إلى 9

5	3			7				
6	7		1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

The popularity of Sudoku dates back to the 1980s when it was introduced in Japan. It took 20 years for Sudoku to spread to rest of the world, but by 2005, Sudoku puzzles were a worldwide craze. The name Sudoku is short for the Japanese *suuji wa dokushin ni kagiru*, which means “the digits must remain single.” The modern game of Sudoku was apparently designed in the late 1970s by an American puzzle designer. The basic ideas of Sudoku date back even further; puzzles printed in French newspapers in the 1890s were quite similar, but not identical, to modern Sudoku

جرب حل هذا اللغز

Sudoku

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

جرب حل هذا اللغز

Sudoku

4		1	2	9			7	5
2			3			8		
	7			8				6
			1		3		6	2
1		5				4		3
7	3		6		8			
6				2			3	
		7			1			4
8	9			6	5	1		7

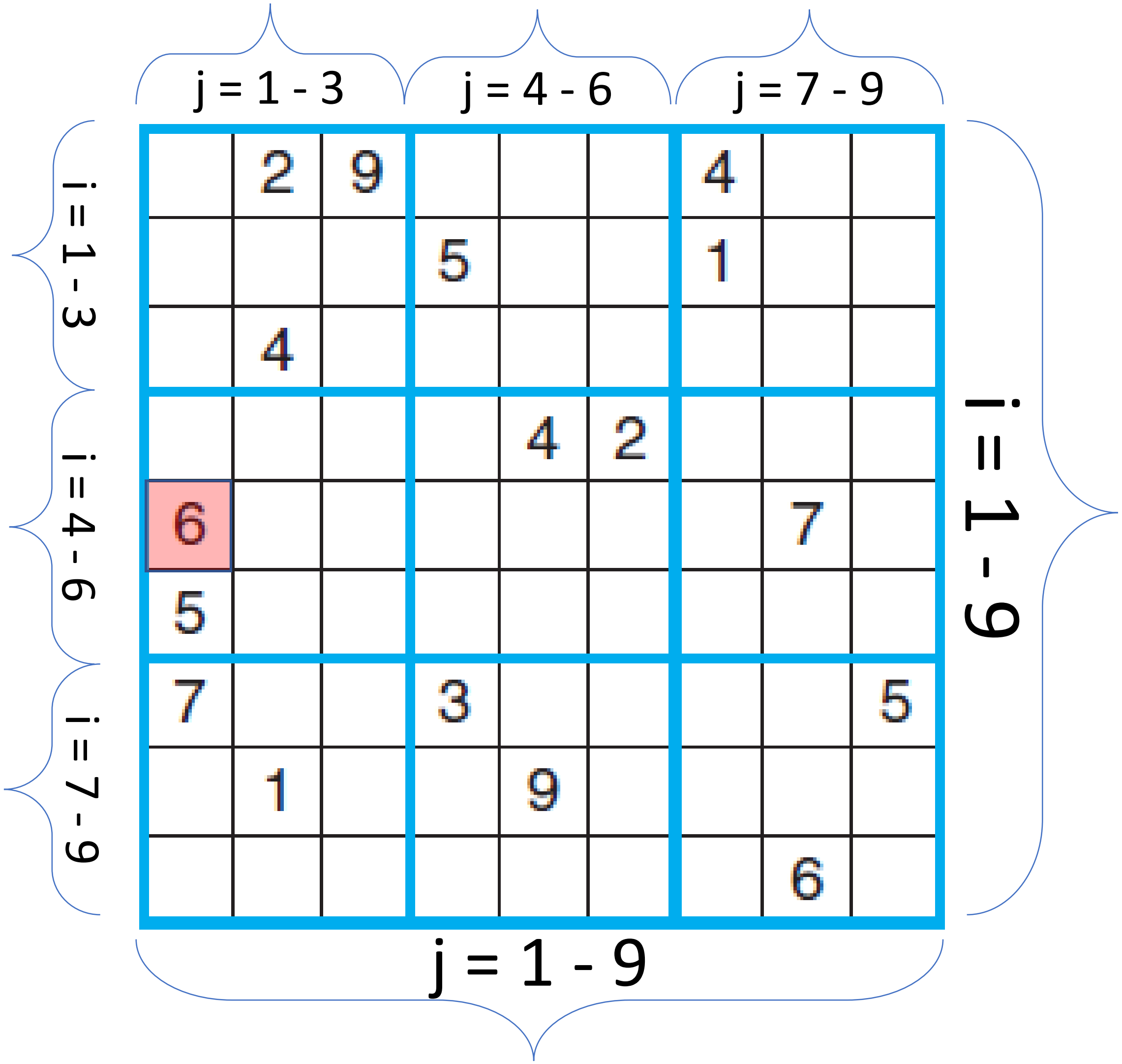
جرب حل هذا اللغز

Sudoku

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

أساسيات شكل رقعة لغز سودوكو

- حاول صياغة منطق اللعبة !



وصف اقتراحات لعبة لغز سودوكو

- لصياغة منطق اللعبة نفرض أن $p(i, j, n)$ تعبر عن الاقتراح الذي يكون صحيحاً true عندما يوجد الرقم n في الخلية بالصف i والعمود j .
- يوجد $9 \times 9 \times 9 = 729$ اقتراحاً p , أي واحد لكل خلية
  - ✓ حيث $i = 1\ to\ 9$ و $j = 1\ to\ 9$ و $n = 1\ to\ 9$
- مثلاً: في اللغز في الشكل السابق, الرقم 6 موجود في الصف الخامس بالعمود الأول,
- إذن $p(5, 1, 6)$ تعبر صح true
- ونعتبر $p(5, j, 6)$ خطأ false عندما $j = 2\ to\ 9$

تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

- كل خلية في الصف i والعمود j تعطى القيمة n, يمكن أن نمثلها بالاقتراح $p(i, j, n)$
- **كل صف $\boldsymbol{i}$ يحتوي على كل الأرقام $\boldsymbol{n}$**

الصف يتكون من j من الخلايا المرقمة بالأعمدة و $j = 1\ to\ 9$

الصف المحدد i يحتوي على الرقم المحدد n , أي أنه أحد خلايا الصف i يجب أن تحتوي على رقم محدد من الأرقام التسعة n

- يعبر عن هذا بأن

p(i, 1, n) v p(i, 2, n) v p(i, 3, n) v p(i, 4, n) v p(i, 5, n) v
p(i, 6, n) v p(i, 7, n) v p(i, 8, n) v p(i, 9, n)

وهو الانفصال disjunction OR بين كل هذه الاقتراحات p ويمكن كتابته بالشكل التالي:

$$\bigvee_{j=1}^{9} p(i, j, n)$$

تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

- كونا اقتراحاً مركباً يضمن أن أحد خلايا j في صف محدد i تحتوي على رقم n

$$\bigvee_{j=1}^{9} p(i, j, n)$$

الأن ليكون الصف المحدد i يحتوي على **كل الأرقام** n , أي أنه كل خلايا الصف i يجب أن يوجد فيها كل الأرقام التسعة n

بما أن j هي أي قيمة بين 1 و 9 وتشير إلى كل خلية من خلايا الصف i

p(i, j, 1) ∧ p(i, j, 2) ∧ p(i, j, 3) ∧ p(i, j, 4) ∧ p(i, j, 5) ∧ p(i, j, 6) ∧ p(i, j, 7) ∧ p(i, j, 8) ∧ p(i, j, 9)

و هو الرابط conjunction AND بين هذه الاقتراحات المعبرة عن الاقتراح المركب OR السابق

$$\bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} p(i, j, n)$$

تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

- كونا اقتراحاً مركباً يضمن أن كل الخلايا j في صف محدد i تحتوي على كل الأرقام n

$$\bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} p(i, j, n)$$

الآن نريد أن نأكد هذا في كل الصفوف $i = 1\ to\ 9$

p(1, j, n) ∧ p(2, j, n) ∧ p(3, j, n) ∧ p(4, j, n) ∧ p(5, j, n) ∧ p(6, j, n) ∧
p(7, j, n) ∧ p(8, j, n) ∧ p(9, j, n)

و هو الرابط AND بين هذه الاقتراحات المعبرة عن الاقتراح المركب AND OR السابق

$$\bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} p(i, j, n)$$

- **إذن كل صف i يحتوي على كل الأرقام n**

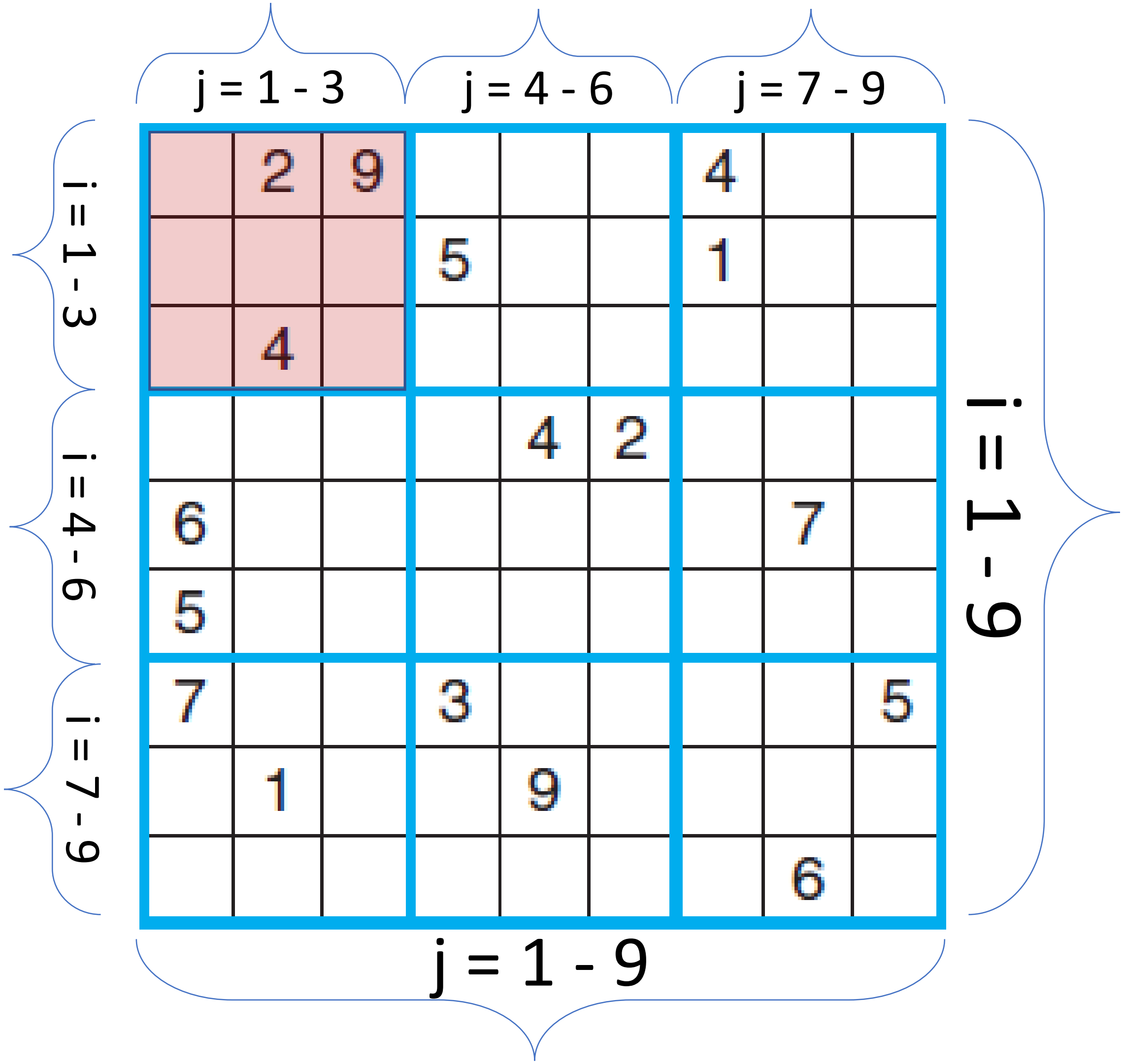
تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

- أثبت أن كل عمود j يحتوي على كل الأرقام n

$$\bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$$

تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

- أثبت أن كل صندوق 3 × 3 يحتوي على كل الأرقام n ,
  - ❑ لدينا 9 صناديق
  - ❑ كل منها 3 صفوف × 3 أعمدة



تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

الصندوق الأول يتكون من ثلاث صفوف $i = 1$ to 3 وثلاث من الأعمدة $j = 1$ to 3

- نثبت أنه أحد خلايا الصندوق يجب أن تحتوي على رقم محدد من الأرقام التسعة n

p(1, 1, n) v p(1, 2, n) v p(1, 3, n) v p(2, 1, n) v p(2, 2, n) v
p(2, 3, n) v p(3, 1, n) v p(3, 2, n) v p(3, 3, n)

$$\bigvee_{i=1}^{3} \bigvee_{j=1}^{3} p(i, j, n)$$

- نثبت أنه كل خلايا الصندوق المحدد يجب أن يوجد فيها **كل** الأرقام التسعة n

p(i, j, 1) ∧ p(i, j, 2) ∧ p(i, j, 3) ∧ p(i, j, 4) ∧ p(i, j, 5) ∧
p(i, j, 6) ∧ p(i, j, 7) ∧ p(i, j, 8) ∧ p(i, j, 9)

و هو الرابط AND بين هذه الاقتراحات المعبرة عن الاقتراح المركب السابق

$$\bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{3} \bigvee_{j=1}^{3} p(i, j, n)$$

تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

- أثبت أن **كل** صندوق يحتوي على **كل** الأرقام n , حيث لدينا 9 صناديق كل منها 3 × 3

الصندوق الثاني i = 4 to 6 , والصندوق الثالث i = 7 to 9 , أي إضافة 3 لقيمة i السابقة,
و j = 1 to 3

الصندوق الرابع i = 1 to 3 , ثم i = 4 to 6 , ثم i = 7 to 9 , حيث j = 4 to 6 , أي
زيادة 3 على قيمة j السابقة

الصندوق التالي i = 1 to 3 , ثم i = 4 to 6 , ثم i = 7 to 9 , حيث j = 7 to 9 أي زيادة
3 على قيمة j السابقة

نعتبر أن r = 0 to 2 للانتقال من صندوق لآخر أفقياً, s = 0 to 2 للانتقال من صندوق
لأخر عمودياً

$$\bigwedge_{r=0}^{2}\bigwedge_{s=0}^{2}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{3}\bigvee_{j=1}^{3} p(3r+i, 3s+j, n)$$

تطبيق الاقتراحات المُرضِية على Sudoku

الآن نربط conjunction بين كل تلك الاقتراحات الثلاث المركبة عن طريق المشغل AND

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{j=1}^{9} p(i,j,n)\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{9} p(i,j,n)\right)$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{r=0}^{2}\bigwedge_{s=0}^{2}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{3}\bigvee_{j=1}^{3} p(3r+i,3s+j,n)\right)$$

إذن لأي لغز سودوكو يمكننا أن نجد حل مرضي satisfiable وهو الذي يجعل قيم الصدق للاقتراحات $p(i,j,n)$ 729 قيمتها صح.

نهاية المحاضرة,
موضوعنا التالي:

دوال الاقتراحات المنطقية

Logic Functions