ITGS217
Discrete Structures

التراكيب المنفصلة

د. رضوان حسين

دوال الاقتراحات المنطقية

Logic Propositional Functions

الجمل المنطقية

- منطق الاقتراحات الذي تعرفنا عليه حتى الآن يعجز عن التعبير عن معاني كل الجمل الرياضية أو جمل اللغات الطبيعية
- مثلاً, الجملة: **" كل حاسبات شبكة الجامعة تعمل جيداً "**

  والجملة: **" ITL3.4 يعمل جيداً "**
- فلا يوجد في قواعد الاقتراحات المنطقية Propositional Logic تمكن من استنتاج قيمة الصدق للجملة, وأن **ITL3.4** هو جهاز حاسوب رقم 4 بمعمل رقم 3 بكلية تقنية المعلومات وهو يعمل جيداً

القرار المنطقي Predicate Logic

- مثلاً, الجملة: " هناك حاسوب في شبكة الجامعة يتعرض للاختراق"

  والجملة: " CS211 يهجم عليه مخترِق"

- فلا يوجد قواع في الاقتراحات المنطقية Propositional Logic تمكن من استنتاج قيمة الصدق بأن **CS211** هو جهاز حاسوب 211 بمعمل قسم علوم الحاسب بكلية العلوم وهو يخترق من قبل شخص ما
- **القرار المنطقي Predicate Logic** يستخدم للتعبير عن جمل ذات المتغيرات
- **ويساعد في التحليل الرياضي reasoning وكشف العلاقات بين الكائنات Objects**

Predicate Logic القرار المنطقي

- الجمل:

"$x > 3$," "$x = y + 3$," "$x + y = z$,"

"computer x is under attack by an intruder,"

"computer y is functioning properly,"

- **ليست خطأ و لا صح طالما المتغيرات غير محددة القيمة.**
- **الجملة " x أكبر من 3 " تتكون من جزئين**

1. **موضوع الجملة** Subject وهو المتغير x
2. **القرار** Predicate وهو "أكبر من 3" ويعبر عن صفة property الكائن موضوع الجملة

الدالة المنطقية Propositional Function

- **الجملة " x أكبر من 3 "** يمكن أن تكتب ***P(x)*** وتقرأ P دالة في x
  - ***P*** هي القرار predicate " أكبر من 3 "
  - **x** هي المتغير

- *P(x)* أيضاً تسمى قيمة الدالة المنطقية P في x, بالإنجليزية P at x
- عندما تمنح **جميـــع** متغيرات الدالة المنطقية قيماً محددة instantiated تصبح الدالة **اقتراحاً منطقياً** لديه قيمة صدق محددة
- مثلاً: إذا كان *P(x)* تعني " x > 3 " , أوجد قيمة الصدق للدوال *P(2)* و *P(4)*

أمثلة الدالة المنطقية

1. إذا كان $A(x)$ تعبر عن الجملة " الحاسوب x يتعرض إلى لاختراق "

- بفرض أن في شبكة الجامعة فقط الحاسوبين ITL3.5 و CS211 يتعرضان للاختراق,
- ماهي قيمة الصدق لكل من $A(\text{ITL3.5})$ و $A(\text{CS200})$ و $A(\text{CS211})$ ؟

- $A(\text{ITL3.5})$, $x = \text{ITL3.5}$ و قيمة الصدق هي true
- $A(\text{CS200})$, $x = \text{CS200}$ و قيمة الصدق هي false
- $A(\text{CS211})$, $x = \text{CS211}$ و قيمة الصدق هي true

أمثلة الدالة المنطقية

2. إذا كان $Q(x, y)$ تعبر عن الجملة " $x = y + 3$ "

- ماهي قيمة الصدق للقتراحين $Q(1, 2)$ و $Q(3, 0)$ ؟

- الجملة $Q(1, 2)$ تعبر عن الاقتراح حيث $x = 1$ و $y = 2$
  و قيمة الصدق هي false
- الجملة $Q(3, 0)$ تعبر عن الاقتراح حيث $x = 3$ و $y = 0$
  و قيمة الصدق هي true

أمثلة الدالة المنطقية

3. إذا كان $A(c,n)$ تعبر عن الجملة " الحاسوب c متصل بالشبكة n "

- حيث c تعبر عن حاسوب ما و n تعبر عن شبكة من شبكات الجامعة
- إذا كان ITL3.5 حاسوب بشبكة معمل 3 بكلية تقنية المعلومات
- و CS211 حاسوب 211 بشبكة قسم علوم الحاسب بكلية العلوم
- ماهي قيمة الصدق للقتراحين $A(3.5,\mathrm{cs})$ و $A(211,\mathrm{cs})$ ؟

✓ الجملة $A(3.5,\mathrm{cs})$ و قيمة الصدق هي false

✓ الجملة $A(211,\mathrm{cs})$ و قيمة الصدق هي true

أمثلة الدالة المنطقية

4. إذا كان $Person(a)$ دالة منطقية قيمتها صح إذا كانت a شخصاً

- ماهي قيمة الصدق للقتراحين $Person(\text{"Steve Jobs"})$ و
- $Person(\text{"}i \text{ phone } X\text{"})$ ؟

✓ الاقتراح $Person(\text{"Steve Jobs"})$ قيمة الصدق هي true

✓ الاقتراح $Person(\text{"}i \text{ phone } X\text{"})$ و قيمة الصدق هي false

الكميات Quantifiers

- عرفنا أنه عندما تحدد قيمة المتغير بالدالة المنطقية فإن الدالة تصبح اقتراحاً.
- ماذا لو أن عندنا قيم مختلفة للمتغير (موضوع subject الالة)؟
- **الكم Quantification :**
  - **يستخدم عندما قرار predicate الدالة المنطقية يتعامل مع مدى range من القيم التي تمنح لمتغير الدالة المنطقية التي تجعل قيمة الدالة "صح"**
- في اللغات الطبيعية نستخدم كلمات للتعبير عن الكميات:
  - some, all, many, none, few
  - بعض, كل, كثير, بلا, قليل

النطاق Domain

- كثير من جمل المواصفات specifications, والخواص characteristics, والتعبيرات الرياضية تتعامل مع نطاق domain معين لقيم متغيراتها.
- يسمى هذا النطاق بعددة مسميات:
  - ✓ نطاق موضوع الحوار Domain of Discourse
  - ✓ عالم الموضوع Universe of Discourse
  - ✓ **النطاق Domain**
- **النطاق يحدد القيم الممكنة لمتغير ما**
- **يجب تحديد نطاق المتغير عندما نتعامل مع الكميات quantifiers**

أنواع الكميات

- سنتعامل مع نوعين من الكميات Quantifications:

1. الكم الشامل Universal Quantification

- يكون القرار predicate صحيحاً في **جميع** قيم متغير الدالة

2. كم الوجود Existential Quantification

- يكون القرار صحيحاً مع عنصر أو أكثر من قيم متغير الدالة

Universal Quantifier الكم الشامل

- الكم الشامل لـدالة منطقية P(x) في نطاق محدد للمتغير x تقرر asserts أن الدالة P تكون صحيحةً في كل قيم x داخل النطاق المحدد
- يتغيرمعنى الكم الشامل (صح أم خطأ) للدالة P(x) عندما يتغير النطاق
- يكتب الكم الشامل للدالة P(x) على الصيغة:

$$\forall x P(x)$$

- ∀ تسمى بالكم الشامل Universal Quantifier
- تقرأ: لكل قيم x في P(x), بالإنجليزية for all x P(x)
- أو: في جميع قيم x في P(x)

الكم الشامل Universal Quantifier

- مثال:

1. بفرض أن P(x) هي العبارة " $x + 1 > x$ " , ما هي قيمة الصدق للكم الشامل $\forall x P(x)$ عندما يكون نطاق x يحتوي على كل الأعداد الحقيقية real؟
   - تقرأ: لكل عدد حقيقي x حيث x + 1 أكبر من x
   - لأن P(x) تكون صحيحة مع كل قيم الأعداد الحقيقية للمتغير x,

   فإن الكم الشامل $\forall x P(x)$ يكون صحيحاً
2. بفرض أن Q(x) هي العبارة " $x < 2$ " , ما هي قيمة الصدق للكم الشامل $\forall x Q(x)$ عندما يكون نطاق x يحتوي على كل الأعداد الحقيقية real؟
   - Q(x) غير صحيحة لكل قيم نطاق x,
   - Q(3) تكون خطأ, وبالتالي فإن قيمة الصدق للكم $\forall x Q(x)$ هي خطأ false

المثال المضاد Counterexample

- عندما تكون أحد قيم نطاق المتغير تعطي الكم الشامل $\forall x P(x)$ قيمة صدق خطأ فإنها تسمى مثال مضاد counterexample
- مثال مضاد واحد يكون كافياً لكي نعتبر الكم الشامل **خطأ**
- **سؤال:**
  - إذا كان نطاق x خالياً empty فهل تعتبر مثال مضاد للكم $\forall x P(x)$ ؟

✓ تعتبر قيمة الصدق $\forall x P(x)$ **صح**

✓ **لأنه لا توجد قيمة في نطاق x تجعل الدالة المنطقية P(x) اقتراحاً خاطئاً**

✓ **إذن عندما يكون النطاق خالياً لا يعتبر مثال مضاد للكم الشامل**

الكم الشامل و الترابط AND

- عندما يمكن سرد list كل عناصر نطاق متغير الدالة المنطقية للكم الشامل

  $\forall x P(x)$, حيث نطاق x هو $x_1, x_2, . . ., x_n$,

- عندها يكون الكم الشامل يكافئ الترابط AND conjunction

$$P(x_1) \land P(x_2) \land \cdot\cdot\cdot \land P(x_n),$$

- لأن هذا الترابط صحيحاً إذا و فقط إذا $P(x_n)$, . . . ,$P(x_1), P(x_2)$ كلهم **صح**
- **مثال:** ما هي قيمة الصدق للكم $\forall x P(x)$ عندما $P(x)$ تعبر عن $x^2 > 10$ و نطاق x الأعداد الموجبة التي لا تزيد عن 4
  - عندما $x = 4$ في الاقتراح $4^2 > 10$ تكون قيمة الصدق خطأ
  - $P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4)$ تكون خطأ وبالتالي $\forall x P(x)$ تكون خطأ

سرد نطاق الكم الشامل

- ماذا تعني العبارة $\forall x N(x)$, حيث $N(x)$ تعبر عن الجملة

" الحاسوب x مربوطاً مع الشبكة ", والنطاق يحوي كل الحواسيب في الجامعة؟

- تعني " أن كل حاسوب في الجامعة هو مربوط مع الشبكة "
- كما أسلفنا:
  - **يجب** تحديد كل عناصر نطاق متغيرات الكميات
  - قيمة الصدق للكميات تعتمد على كل عنصر في النطاق
- فهل فعلاً كل الحاسبات متصلة بشبكة الجامعة !
- فقد **توجد exists** بعض العناصر لها وضعية خاصة

Existential Quantification كم الوجود

- كما أشرنا في المثال الأخير, قد يكون بعض عناصر النطاق لها خواص خاصة
- هذه العبارات يعبر عنها باستخدام كم الوجدود Existential Quantifiers
- نكون اقتراحاً proposition يكون صحيحاً إذا وفقط إذا P(x) تكون صح

  true مع على الأقل أحد قيم نطاق المتغير x
- يرمز لكم الوجود للدالة المنطقية P(x) بالصيغة $\exists x P(x)$
- تسم ∃ بكم الوجود
- تقرأ: "يوجد قيمة x حيث p(x)" بالإنجليزية "There is an x such that p(x)"

أو "يوجد على الأقل x حيث p(x)" بالإنجليزية "There is at least one x such that p(x)"

أو "لبعض x P(x)" بالإنجليزية "For some xP(x)"

Existential Quantifier كم الوجود

- **مثال:**

1. بفرض أن P(x) تصف العبارة " $x > 3$ " , فما هي قيمة الصدق للكم $\exists x P(x)$ عندما نطاق المتغير يحتوي على كل الأعداد الحقيقية real numbers؟
   - تقرأ: يوجد عدد حقيقي x حيث x أكبر من 3.
   - العبارة " $x > 3$ " تكون صحيحة مع بعض القيم مثل $x = 4$
   - إذن قيمة الصدق للكم $\exists x P(x)$ هي صح true
2. بفرض أن Q(x) تصف العبارة " $x = x + 1$ " , فما هي قيمة الصدق للكم $\exists x Q(x)$ عندما نطاق المتغير يحتوي على كل الأعداد الحقيقيةreal numbers؟
   - لأن Q(x) تكون خطأ في جميع قيم النطاق, فإن الكم $\exists x Q(x)$ يكون خطأ

النطاق الخالي

- بشكل عام فإن نطاق الكميات لا يكون خالياً Empty
- **ولكن لو كان نطاق الاقتراح P(x) خالياً**, يوجد نطاق ولكن خال {Ø}
- فإن كم الوجود $\exists x P(x)$ يكون خطأ,
- لأنه لاتوجد قيمة في النطاق تجعله صح
- **عندم يمكن سرد list كل عناصر النطاق,** مثل $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- **فإن كم الوجود** $\exists x P(x)$ **يكون مكافئ للانفصال OR بين اقتراحات P(x)**
- $P(x_1) \lor P(x_2) \lor \cdots \lor P(x_n)$
- لأن الانفصال OR يكون صحيحاً إذا, وفقط إذا, على الأقل أحد الاقتراحات صحيحاً

ملخص الكميات

Quantifiers الكم		
Statement	*When True?* صح	*When False?* خطأ
$\forall x P(x)$	$P(x)$ is true for every x.	There is an x for which $P(x)$ is false.
$\exists x P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is true.	$P(x)$ is false for every x.

- يجب أن يحدد نطاق متغيرات الدوال المنطقية في الكميات
- تعتبر الكميات اقتراحات, لأن قيم المتغيرات محدد في عناصر النطاق

Precedence of Quantifiers أسبقية الكميات

- الكميات $\forall$ و $\exists$ لديها أسبقية أعلى من كل المشغلات المنطقية الأخرى
- مثال:

$$\forall x P(x) \vee Q(x)$$

- ✓ يعبر عن الانفصال OR بين $\forall x P(x)$ و $Q(x)$
- ✓ وهذا يعني $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$
  - ○ ولا يعني $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

Negating Quantifiers نفي الكميات

- عادة نحتاج لنفي تعبيرات الكم
- مثال:
- **" كل طالب في فصل مادة ITGS217 درس مادة ITMM122 "**
- ماهو موضوع subject الجملة؟ المتغير x هو طالب في فصل مادة ITGS217
- ما هو القرار predicate ؟ درس مادة ITMM122
- ما هو نطاق المتغير x ؟ كل الطلبة في فصل المادة ITGS217
- ما هي الدالة المنطقية P(x) ؟ الطالب x درس مادة ITMM122
- ما هو تعبير الكم لهذه الجملة ؟ الكم الشامل $\forall x P(x)$

Negating Quantifiers نفي الكميات

- **مثال:**
- **" كل طالب في فصل مادة ITGS217 درس مادة ITMM122 "**
- نفي هذه الجملة:
- **" ليس كل طالب في فصل مادة ITGS217 درس مادة ITMM122 "**

$$\neg \forall x P(x)$$

- و هذا يكافئ الجملة:
- " **يوجد** طالب في فصل مادة ITGS217 **لم** يدرس مادة ITMM122 "

$$\exists x \neg P(x)$$

- إذن $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Negating Quantifiers نفي الكميات

De Morgan's Laws for Quantifiers قوانين دي مورقن للكميات			
Negation	*Equivalent Statement*	*When Is Negation True?*	*When False?*
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x, $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	$P(x)$ is true for every x.

Negating Quantifiers نفي الكميات

- مثال:

- " ليست كل الطابعات مشتركة في الشبكة"

- " Not all printers are shared in the network "

- x: كل الطابعات في الشبكة
- Printer(x): طابعة في الشبكة
- Shared(x): طابعة مشتركة

$$\neg \forall x\ (Printer(x) \rightarrow Shared(x))$$

- تكافئ

$$\exists x\ (Pinter(x) \wedge \neg\ Shared(x))$$

- راجع الكتاب المنهجي مثال 22 ص 48, و section 1.3 جدول 7 لإثبات التكافؤ

Nested Quantifiers الكميات المتداخلة

- تداخل الكميات: عندما يقع كم ما في مجال scope كم آخر
- **التعبير التالي يتكون من من كم شامل وكم وجود حيث x و y أعداد صحيحة**

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

- **يمكن تجزءة التعبير إلى:**

- P(x, y): $x + y = 0$
- Q(x): $\exists y P(x, y)$
- $\forall x Q(x)$

- كم الوجود يقع في مجال الكم الشامل

الكميات المتداخلة Nested Quantifiers

- **التعبير التالي يتكون من كم شامل وكم وجود حيث x و y أعداد صحيحة**

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

- **تقرأ:**

" لكل عدد صحيح x يوجد عدد صحيح y بحيث x + y = 0 "

وهي تقر بأنه هناك معكوس جمعي لأي عدد صحيح

الكميات المتداخلة Nested Quantifiers

- **إقرأ التعبير التالي** بينما نطاق x و y جميع الأعداد الحقيقية:

$$\forall x \forall y((x > 0) \land (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

- **تقرأ:**

" لكل عدد صحيح x وكل عدد صحيح y, إذا كان x > 0 و y < 0 ,

فإن ضرب x y < 0 "

وهي تقر بأنه حاصل ضرب عدد حقيقي موجب في عدد حقيقي سالب دئماً يكون سالباً

ترتيب الكميات المتداخلة **Order** of Nested Quantifiers

- **مثال:** **إذا كان $Q(x,y,z)$ هي العبارة " $x + y = z$ " ونطاق كل المتغيرات يحتوي على الأعداد الحقيقية, فما هي قيمة الصدق للتعبيرين:**

$$\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z) \quad , \quad \exists z \forall x \forall y Q(x,y,z)$$

- **تقرأ:** $\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z)$

" لكل عدد حقيقي x وكل عدد حقيق y, يوجد عدد حقيقي z بحيث $x + y = z$ "

قيمة الصدق **صح**

- **تقرأ:** $\exists z \forall x \forall y Q(x,y,z)$

" يوجد عدد حقيقي z لكل عدد حقيقي x ولكل عدد حقيق y, بحيث $x + y = z$ "

قيمة الصدق **خطأ** لا يوجد عدد حقيقي محدد واحد ينتج من جمع أي عددين حقيقيين

ترجمة اللغة الطبيعية إلى كميات

- مثال: عبر عن الجملة التالية بالكميات المناسبة.
- " إذا كان الشخص رجل وهو ولي أمر طالب فإنه يكون والده أو عمه "
- الحل, يمكن أن تحور الجملة إلى:
- " لكل شخص x , إذا كان الشخص x رجلاً والشخص x ولي أمر, فإنه يوجد طالب y, والشخص x والد الطالب y أو الشخص x عم الطالب y "
- نقدم الدوال المنطقية:

- **M(x):** الشخص x رجل
- **P(x):** الشخص x ولي أمر
- **F(x, y):** الشخص x والد الطالب y
- **R(x, y):** الشخص x عم الطالب y

ترجمة اللغة الطبيعية إلى كميات

- " لكل شخص x , إذا كان الشخص x رجلاً والشخص x ولي أمر, فإنه يوجد طالب y, والشخص x والد الطالب y أو الشخص x عم الطالب y "
- **الدوال المنطقية:**

- M(x)   الشخص x رجل
- P(x):   الشخص x ولي أمر
- F(x, y):   الشخص x والد الطالب y
- R(x, y):   الشخص x عم الطالب y

$$\forall x((M(x) \land P (x)) \rightarrow \exists y(F(x, y) \oplus R(x, y)))$$

- بما أن y لا تظهر في الطرف $(M(x) \land P (x))$, يمكننا نقل $\exists y$ بجانب $\forall x$

$$\forall x \exists y((M(x) \land P (x)) \rightarrow (F(x, y) \oplus R(x, y)))$$

ترجمة اللغة الطبيعية إلى كميات

- مثال: عبر عن الجملة التالية بالكميات المناسبة.
- " إذا كان الشخص رجل وهو ولي أمر طالبة فإنه يكون والدها أو زوجها "
- الحل, يمكن أن تحور الجملة إلى:
- " لكل شخص x , إذا كان الشخص x رجلاً والشخص x ولي أمر, فإنه يوجد طالبة y, والشخص x والد الطالبة y أو الشخص x زوج الطالبة y "
- نقدم الدوال المنطقية:

- **M(x):** الشخص x رجل
- **P(x):** الشخص x ولي أمر
- **F(x, y):** الشخص x والد الطالبة y
- **H(x, y):** الشخص x زوج الطالبة y

ترجمة اللغة الطبيعية إلى كميات

- " لكل شخص x , إذا كان الشخص x رجلاً والشخص x ولي أمر, فإنه يوجد طالبة y, والشخص x والد الطالبة y أو الشخص x زوج الطالبة y "
- **الدوال المنطقية:**

- M(x) الشخص x رجل
- P(x): الشخص x ولي أمر
- F(x, y): الشخص x والد الطالبة y
- H(x, y): الشخص x زوج الطالبة y

$$\forall x(\ (M(x) \wedge P\ (x)) \rightarrow \exists y(F(x,\ y) \oplus H(x,\ y))\ )$$

- بما أن y لا تظهر في الطرف $(M(x) \wedge P\ (x))$, يمكننا نقل $\exists y$ بجانب $\forall x$

$$\forall x \exists y((M(x) \wedge P\ (x)) \rightarrow (F(x,\ y) \oplus H(x,\ y)))$$

ترجمة اللغة الطبيعية إلى كميات

- تمرين: عبر عن الجملة التالية بالكميات المناسبة.
- **" " إذا كان الشخص رجل وهو ولي أمر طالب فإنه يكون والده أو عمه, أما إذا كان الشخص رجل وهو ولي أمر طالبة فإنه يكون والدها أو زوجها, أما إذا كان ولي أمر الطالبة امرأة فإنها تكون أم الطالبة"**
- الحل :

؟

راجع الكتاب

الجزء 1.4 و 1.5 لمزيد من الأمثلة

نهاية المحاضرة,
موضوعنا التالي:

الفئات

Sets