أساسيات الجبر البولياني

Basics of Boolean Algebra

محاضرة 4

By: Zahra Elashaal

1

أهداف وحدة الاساسيات

1. المتغير المنطقي (Logical Variable)
2. العمليات المنطقية (Logical Operations)
3. تغيير عدد أطراف الدخل (Fan-In) للبوابة المنطقية
4. التعبير المنطقي (Logical Expression)
5. الدائرة المنطقية (Logic Circuit)
6. المخطط المنطقي (Logic Diagram)
7. جدول الصواب (Truth Table)
8. نظريات الجبر البولياني (Boolean Algebra Theorems)
9. استخدام نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبيرات المنطقية

2

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على:

- كتابة التعبيرات المنطقية والتعامل معها. ·
- إنشاء جداول الصواب واستخدامها. ·
- فهم نظريات الجبر البولياني. ·
- تبسيط التعبيرات المنطقية باستخدام النظريات.

3

تمهيد

- تتناول هذه الوحدة أساسيات الجبر البولياني (Boolean Algebra) وهو جبر المتغيرات المنطقية. والمتغيرات المنطقية هو نوع المتغيرات الذي يتم التعامل معه في الدوائر المنطقية (Logic Circuits)،
- تستخدم الدوائر المنطقية في معالجة البيانات الممثلة بالنظام الثنائي حيث ان البوابة المنطقية هي الوحدة الاساسية في بنـــــاء الدائرة المنطقية
- من اهم مزايا رموز النظام الثنائي انه يمكن بواسطتها تمثيل الظواهر الفيزيائية والنظرية التي تكون لها قيمة في احدى الحالتين.
- هناك حالات نظرية يمكن وصفها بالرموز الثنائية مثل وصف حقيقة عبارة خبرية بانها صائبة او خاطئة حيث تمثل حالة الصواب (1) والخطأ (0).
- اما التغير المنطقي:هو المقدار الذي يصف أي من الحالات السابقة اما عند تمثيل الدارة الكهربائية اذا كانت مفتوحة (0) اما مغلقة (1).
- يتعامل المنطق الثنائي مع المتغيرات التي تأخذ قيمتين منفصلتين (0 او1) ومع العمليات المنطقية.
- نرمز للمتغيرات بحروف أبجدية مثل A,B,C,D.....

4

المتغير المنطقي (Logical Variable)

المتغير المنطقي هو أي متغير يمكن أن يأخذ قيمة واحدة فقط من قيمتين يرمز لإحدى القيمتين بالرمز 1 وللقيمة الأخرى بالرمز 0 ... فأي متغير منطقي لا يمكن أن يأخذ إلا إحدى هاتين القيمتين و لا يوجد أي احتمال ثالث فإذا كان x متغير منطقي فإنه إما أن يكون $x = 1$ أو $x = 0$:

1 = ON = True = High = +5V 0 = OFF = False = Low = 0V

البوابات المنطقية Logic gates

هي دوائر إلكترونية يكون لها مدخل أو أكثر وتعطي إشارة مخرجية واحدة.

العمليات المنطقية Logical Operations

العمليات المنطقية هي العمليات التي يمكن إجراؤها على المتغيرات المنطقية.

بعض هذه العمليات هي عمليات أساسية، وهي عمليات OR , AND , NOT

و بعضها عمليات غير أساسية، مثل عمليات NOR و NAND و XOR و XNOR وهذه العمليات يمكن التعبير عنها باستخدام العمليات الأساسية.

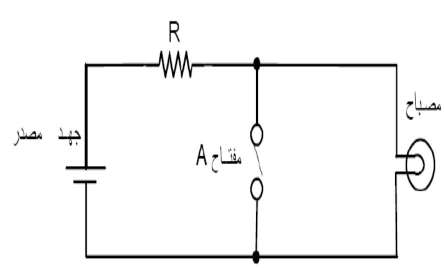
1- بوابة NOT

يطلق عليها أيضاً بوابة العكس المنطقي (Logical Inversion) وفيها يكون الخرج عبارة عن معكوس الدخل، فإذا كان الدخل مساوياً 1 فإن الخرج يكون مساوياً 0، وإذا كان الدخل مساوياً 0 فإن الخرج يكون مساوياً 1.

تمثل فكرة البوابة NOT بالدائرة التالية حيث الخرج (حالة المصباح تكون عكس الدخل والمصباح يضوء عندما يكون المفتاح A غير موصل).

الدخل	الخرج
A	حالة المصباح
OFF	ON
ON	OFF

يمثل الحالات الممكنة للدخل A

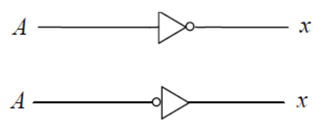


1- بوابة NOT

جدول الصواب اوالصدق Truth Table لعملية NOT، وجدول الصواب يوضح جميع احتمالات الدخل والخرج المقابل لكل منها. $M=2^n$

حيث M عدد الاحتمالات او عدد الصفوف في جدول الصدق و n عدد المداخل

بوابة NOT لها مدخل واحد n=1 فيكون عدد الاحتمالات M=2 فقط في جدول الصواب



البوابة المنطقية
(Logic gate)

$$x = NOT\ A$$

$$x = \overline{A}$$

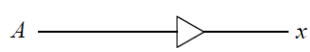
التعبير المنطقي
(Logical Expression)

A	x
0	1
1	0

جدول الصواب
Truth Table

وبوابة التكافؤ Equivalence (Buffer)

في هذه البوابة يكون الخرج مساوياً للدخل، و يرمز لها بعلامة التساوي



(Logic gate)

$$x = A$$

(Logical Expression)

A	x
0	0
1	1

Truth Table

7

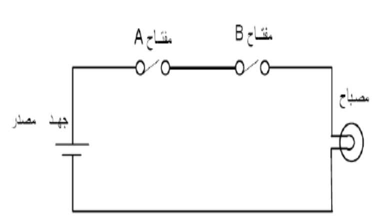
2- بوابة AND

تمثل فكرة البوابة AND بالدائرة التالية حيث أن المصباح يضيء فقط عندما يكون كلا المفتاحين A , B موصلين.

عدد المداخل n أو عدد المتغيرات.

عدد الصفوف في الجدول $2^n = 2^2 = 4$

الدخل		الخرج
A	B	حالة المصباح
OFF	OFF	OFF
OFF	ON	OFF
ON	OFF	OFF
ON	ON	ON



يمثل الحالات الممكنة للدخلين A , B

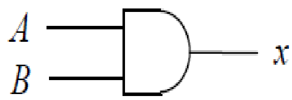
8

2- بوابة AND

هو جدول يضم كل التوافيق الممكنة للمتغيرات n مبيناً العلاقة بين القيم التي تأخذها المتغيرات وناتج العملية F

الدائرة السابقة تمثل فكرة عمل بوابة AND حيث تعطي الخرج 1 إذا كانت جميع المداخل ON أي عند المستوى المنطقي 1.

البوابة المنطقية



بوابة AND بمدخلين

(2-Input AND Gate)

التعبير المنطقي

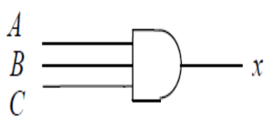
$x = A \text{ AND } B$

$x = A \cdot B$

$x = AB$

جدول الصواب

الدخل		الخرج
A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



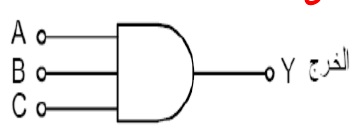
بوابة AND بثلاثة مداخل

(3-Input AND Gate)

قد يكون لبوابة AND أكثر من مدخلين

9

بوابة AND بثلاث مداخل :



جميع الاحتمالات الممكنة للمداخل وعدد هذه الاحتمالات تكون 2 مرفوعة لقوة تساوي عدد المداخل أي أن عدد الحالات $2^3 = 8$

الدخل			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

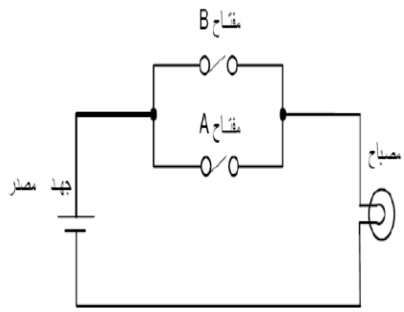
تدريب: قم بإنشاء جدول الصواب Ttuth Table لبوابة AND لاربعة مداخل.

10

3- بوابة OR

تمثل فكرة البوابة OR بالدائرة التالية حيث أن المصباح يضيء في جميع الحالات الا عندما يكون كلا من المفتاحين A , B غير موصلين في نفس الوقت.

الدخل		الخرج
A	B	حالة المصباح
OFF	OFF	OFF
OFF	ON	ON
ON	OFF	ON
ON	ON	ON

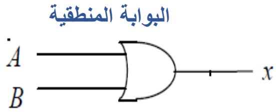


يمثل الحالات الممكنة للدخلين A , B

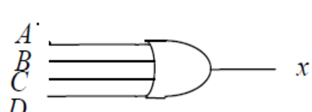
11

الدائرة السابقة تمثل فكرة عمل بوابة OR حيث تعطي الخرج 1 في جميع المداخل ماعدا عندما يكون المدخلين off.

البوابة المنطقية



بوابة OR بمدخلين
(2-Input OR Gate)



بوابة OR بأربعة مداخل
(4-Input OR Gate)

التعبير المنطقي

$$x = A \ OR \ B$$

$$x = A + B$$

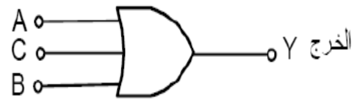
قد يكون لبوابة OR أكثر من مدخلين

جدول الصواب

الدخل		الخرج
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

12

بوابة OR بثلاث مداخل:



جميع الاحتمالات الممكنة للمداخل وعدد هذه الاحتمالات تكون 2 مرفوعة لقوة تساوي عدد المداخل أي أن عدد الحالات $2^3 = 8$

الدخل			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

تدريب: قم بإنشاء جدول الصواب Ttuth Table لبوابة AND لاربعة مداخل.

13

بـــوابـــة NAND

بوابة الــ NAND هي عكس بوابة الــ AND أي أنها عملية AND متبوعة بعملية NOT.

جدول الصواب

الدخل		الخرج
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

التعبير المنطقي

$x = A \ NAND \ B$

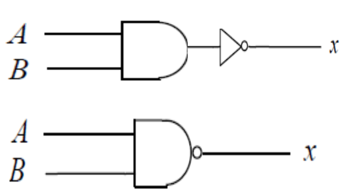
$x = \overline{A \ AND \ B}$

$x = \overline{A \cdot B}$

$x = \overline{AB}$

$x = A \uparrow B$

البوابة المنطقية



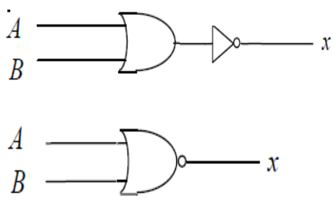
بوابة NAND بمدخلين
(2-Input NAND Gate)

14

بــوابـــة NOR

بوابة الــ NOR هي عكس بوابة ال OR أي أنها عملية OR متبوعة بعملية NOT.

البوابة المنطقية



بوابة NOR بمدخلين
(2-Input NOR Gate)

التعبير المنطقي

$x = A\ NOR\ B$

$x = \overline{A\ OR\ B}$

$x = \overline{A + B}$

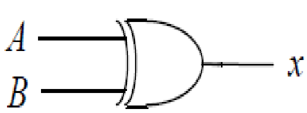
$x = A \downarrow B$

جدول الصواب

الدخل		الخرج
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

بـــوابـــة (XOR) Exclusive OR Gate

هذه البوابة تعطي خرج 1 عندما يكون هناك عدد فردي من المداخل التي عند المستوى المنطقي 1 وماعدا ذلك يكـــون الخرج 0



$x = A\ XOR\ B$

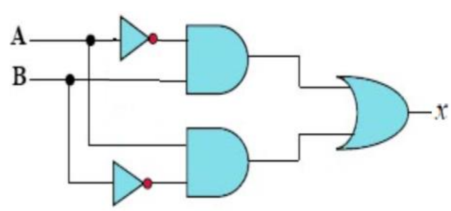
$x = A \oplus B$

$\boxed{A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}}$

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

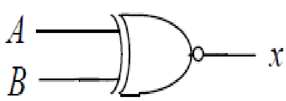
و جدول الصواب التالي يثبت أن $A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$\overline{A}B + A\overline{B}$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0



بـــوابـــة Exclusive NOR Gate (XNOR)

بوابة XNOR تعمل عكس بوابة ال XOR السـابقة فهي تعطي خرج 1 عندما يكون عدد المداخل التي عند المستوى المنطقــي 1 زوجي وماعدا ذلك يكون الخرج 0



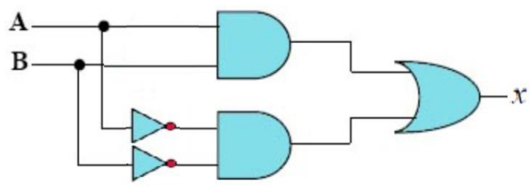
$x = A \ XNOR \ B$

$x = \overline{A \oplus B}$

$\boxed{\overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}}$

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

البوابة XNOR يمكن تجميعها من البوابات الأساسية



تدريب: قم بإنشاء Ttuth Table الذي يثبت ان: $\overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$

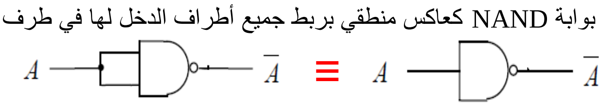
17

كفاية عملية NAND (Sufficiency of NAND)

المقصود بكفاية عملية NAND هو أن العمليات المنطقية الأساسية الثلاث (OR، AND، NOT) يمكن إجراؤها جميعاً باستخدام بوابات NAND فقط. وبالتالي يمكن بناء أي دائرة منطقية بالكامل باستخدام بوابات NAND،

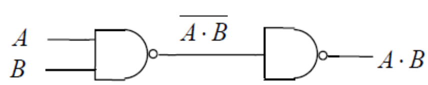
عملية NOT:

يمكن أن نقوم باستخدام بوابة NAND كعاكس منطقي بربط جميع أطراف الدخل لها في طرف واحد



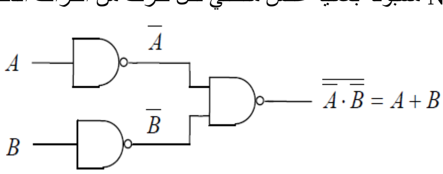
عملية AND:

يمكن إجراء عملية AND عن طريق إجراء عملية NAND متبوعة بعملية عكس منطقي



عملية OR:

يمكن إجراء عملية OR عن طريق إجراء عملية NAND مسبوقة بعملية عكس منطقي لكل طرف من أطراف الدخل



A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$	$A+B$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

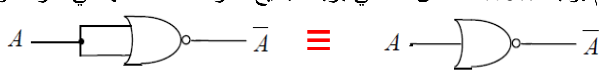
18

كفاية عملية NOR (Sufficiency of NOR)

المقصود بكفاية عملية NOR هو أن العمليات المنطقية الأساسية الثلاث (NOT ،AND ،OR) يمكن إجراؤها جميعاً باستخدام بوابات NOR فقط. وبالتالي يمكن بناء أي دائرة منطقية بالكامل باستخدام بوابات NOR،

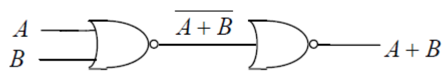
عملية NOT:

يمكن أن نقوم باستخدام بوابة NOR كعاكس منطقي بربط جميع أطراف الدخل لها في طرف واحد



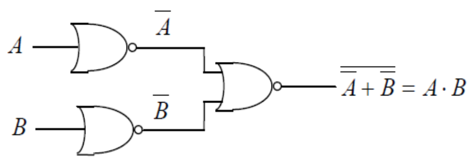
عملية OR:

يمكن إجراء عملية OR عن طريق إجراء عملية NOR متبوعة بعملية عكس منطقي.



عملية AND:

يمكن إجراء عملية AND عن طريق إجراء عملية NOR مسبوقة بعملية عكس منطقي لكل طرف من أطراف الدخل



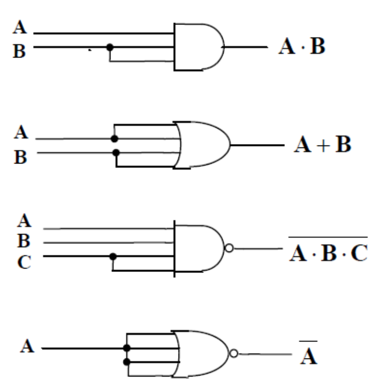
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{\overline{A}+\overline{B}}$	$A \cdot B$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

تغيير عدد أطراف الدخل (Fan-In) للبوابة المنطقية

في كثير من الأحيان قد تتوفر لنا بوابات منطقية بعدد من أطراف الدخل Fan-In أكبر أو أقل مما نحتاج إليه. سنوضح في هذا الجزء الأساليب المختلفة التي يمكننا إتباعها لتغيير عدد أطراف الدخل للبوابة المنطقية بالزيادة أو بالنقصان.

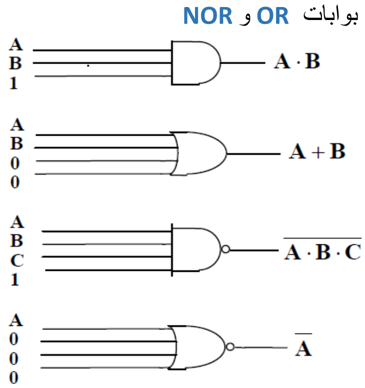
A- تقليل عدد أطراف الدخل باحد الطريقتين:

1- يتم ذلك بربط طرف الدخل الزائد بأحد أطراف الدخل المستخدمة، مثلاً



2- يمكن التخلص من طرف الدخل الزائد بوضع:

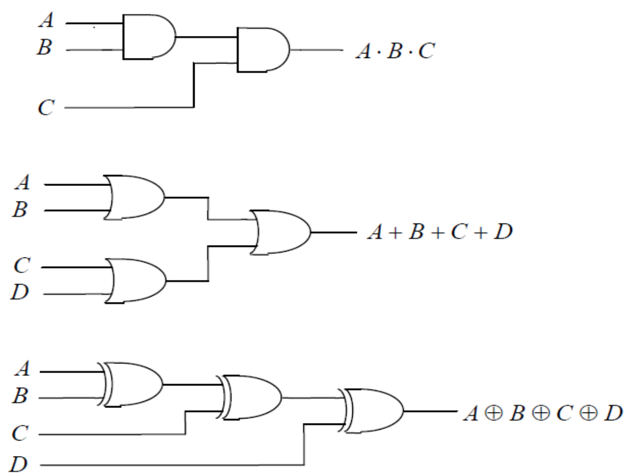
- القيمة المنطقية **1** في طرف الدخل الزائد في بوابات، **AND** و**NAND**
- ووضع القيمة المنطقية **0** في طرف الدخل الزائد في بوابات **OR** و **NOR**



تغيير عدد أطراف الدخل (Fan-In) للبوابة المنطقية

B- زيادة عدد أطراف الدخل:

يتم ذلك باستخدام أكثر من بوابة واحدة واستخدام خرج البوابة الأولى كدخل للبوابة الثانية،



21

تمثيل المعادلات المنطقية

يمكن تمثيل المعادلات المنطقية بإحدى الطرق التالية:

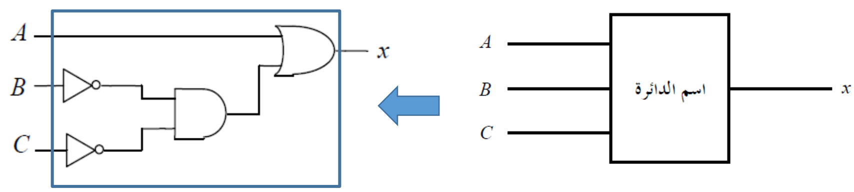
- ✓المخطط المنطقي **Logic Diagram**
- ✓جدول الصدق **Truth Table**
- ✓التعبير المنطقي **Logical Expression**
- ✓الدوائر المنطقي **Logic Circuits**

22

المخطط المنطقي (Logic Diagram)

هو عبارة عن مخطط مبسط يوضح متغيرات الدخل للدائرة المنطقية ومسمياتها ومتغيرات الخرج ومسمياتها، بالإضافة إلى اسم الدائرة الدال على وظيفتها.

- مثلاً، المخطط المنطقي التالي يمكن ان يحتوي على الدائرة المنطقية التالية:



المخطط المنطقي (Logic Diagram)   الدائرة المنطقية (Logic Circuit)

ونقوم باستخدام المخططات المنطقية كبديل للدائرة المنطقية المفصلة كنوع من التبسيط، وذلك عندما لا نكون بحاجة للتفاصيل الداخلية للدائرة المنطقية. كما في الدوائر المعقدة المكونة من عدد من الدوائر الصغيرة المربوطة مع بعضها البعض، حيث نقوم بتمثيل تلك الدوائر الصغيرة بمخطط

جدول الصواب Truth Table

هو عبارة عن جدول يوضح **جميع احتمالات** الدخل للدائرة المنطقية وقيم الخرج المقابل لكل منها، مثلا لإنشاء جدول الصواب للتعبير المنطقي

$$x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

نبدأ بتحديد عدد الصفوف وعدد الأعمدة في الجدول بمعنى متغيرات الدخل وهي A,B,C وعددها 3 أي أن احتمالات الدخل هو $2^3=8$ وهو عدد أسطر (صفوف) جدول الصواب. أما عن الأعمدة فنحتاج عموداً لكل متغير من متغيرات الدخل وعموداً لكل متغير من متغيرات الخرج. وهناك متغير خرج واحد هو x. كما نحتاج الي أعمدة إضافية لإجراء العمليات المنطقية،

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B}\cdot\overline{C}$	$x = A+\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

جدول الصواب Truth Table

$$x = A+\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$$x = (A+\overline{B})\cdot\overline{C}$$

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A+\overline{B}$	$x = (A+\overline{B})\cdot\overline{C}$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0

25

التعبير المنطقي Logical Expression

هو عبارة عن مجموعة من المتغيرات المنطقية (A,B,C,.....) المرتبطة مع بعضها البعض بعمليات منطقية (AND ,NOT,OR,....) والأقواس وعلامة =

مثلاً : $F = A + \overline{B}.\overline{C}$

وهنا التعبير المنطقي يتكون من أربعة متغيرات هي A, B. C, F وترتبط بينها عمليات NOT , AND ,OR وعملية التكافؤ (=) لو فرضنا بأن قيم المتغيرات A=1 ,B=0 ,C=1

فإن $F = A + \overline{B}.\overline{C} = 1 + \overline{0}.\overline{1} = 1 + 1 . 0 = 1$

أسبقية إجراء العمليات (Operation Precedence):

يتم إجراء العمليات المنطقية الأساسية الثلاث بالترتيب التالي:

1- ( ) الاقواس

2- NOT عملية العكس المنطقي

3- AND عملية

4- OR عملي

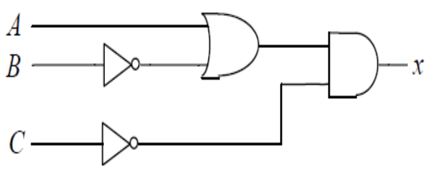
26

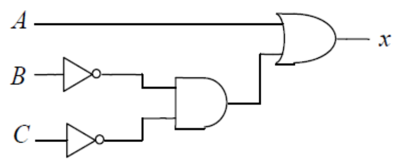
Logic Circuit الدائرة المنطقية

يمكن تمثيل أي تعبير منطقي بدائرة منطقية حيث ننظر للعمليات المنطقية الموجودة بالتعبير ونقوم بربط البوابات المنطقية التي تقوم بإجراء تلك العمليات بالأسلوب المناسب يمكن تمثيل التعبير المنطقي التالي بالدائرة المنطقية:

$x = (A + \overline{B}) \cdot \overline{C}$

$X = A + \bar{B}.\overline{C}$

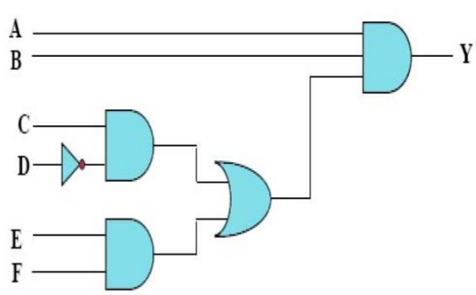


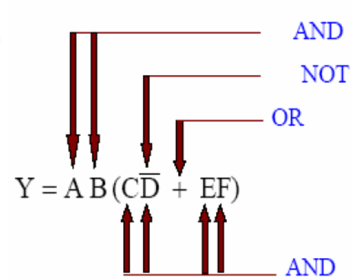


ارسم الدائرة المنطقية للتعبير المنطقي التالي:

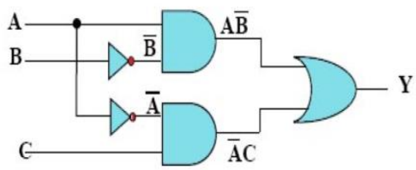
$Y = AB(C\overline{D} + EF)$

نقوم بتحليل البوابات المنطقية كالتالي:

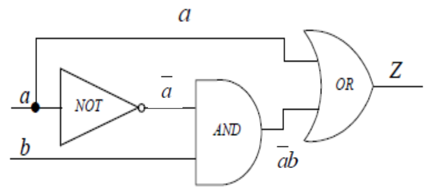




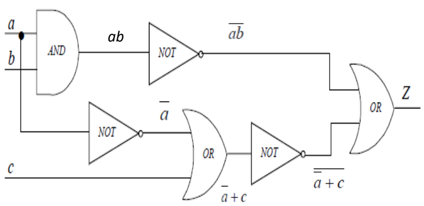
أوجد الخرج للدوائر المنطقية التالية.



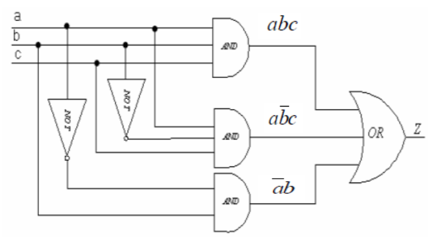
$$Y = A\bar{B} + \bar{A}C$$



$$Z = a + \bar{a}b$$



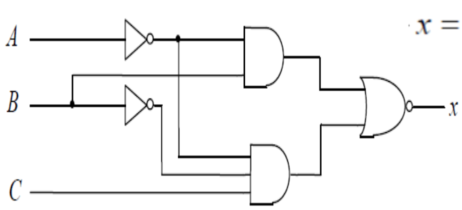
$$Z = \overline{ab} + \overline{\bar{a} + c}$$



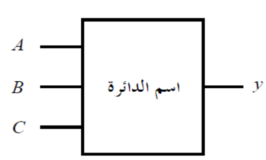
$$Z = abc + a\bar{b}c + \bar{a}b$$

ارسم المخطط المنطقي، و أكمل جدول الصواب، ثم ارسم الدائرة المنطقية للتعبير المنطقي

$$x = \overline{\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B}$$



الدائرة المنطقية



المخطط المنطقي

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B$	$\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B$	$x = \overline{\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B}$
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1

جدول الصواب

تمثيل دائرة منطقية من جدول الصدق

نحدد من جدول الحقيقة تشكيلة المدخلات التي تعطي الخرج Y=1حيث قيمة المدخلات هي A=0 ,B=1 , C=0 وتكتب بالتعبير البوليني على الشكل $\overline{A}B\overline{C}$

حيث يكتب المتغير برمزه إذا كان يساوي 1 ويكتب بعكس رمزه إذا كان يساوي 0 وبالمثل فإن الخرج يساوي 1 في الصف السابع من الجدول ويكتب بالتعبير البوليني على الشكل

$AB\overline{C}$

وبتجميع التعبيرات البولينية التي تعطي الخرج Y=1 عن طريق بوابة OR نحصل على:

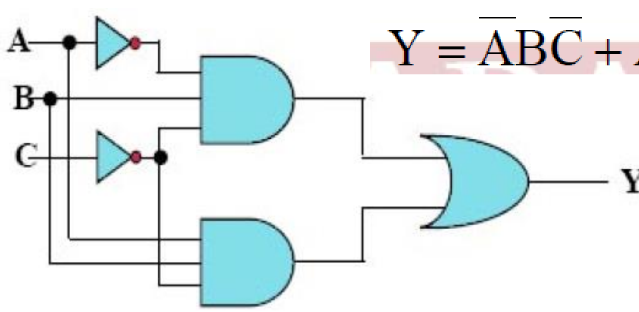
$$Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

تمثيل دائرة منطقية من جدول الحقيقة

بعد حساب المعادلة المنطقية من جدول الصدق نقوم برسم الدائرة المنطقية منها

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$



تدريب:

ارسم المخطط المنطقي، و أكمل جدول الصواب، ثم ارسم الدائرة المنطقية لكل تعبير من التعبيرات المنطقية التالية:

1- $x = \overline{A(\overline{B} + C)}$

2- $y = \overline{A}B(A + \overline{C})$

3- $z = \overline{A\overline{B} + C\overline{D}}$

نظريات الجبر البولياني Boolean Algebra Theorems

هو جبر المتغيرات المنطقية ويستخدم في تبسيط المتغيرات المنطقية. لكل نظرية من نظريات الجبر البولياني نظرية مقابلة أو مناظرة لها، وذلك باستبدال كل 1 ب 0 وكل 0 ب 1 وكل AND ب OR وكل OR ب AND .
والجدول التالي يوضح النظريات الأساسية المستخدمة في الجبر البولياني:-

النظرية المقابلة	النظرية	اسم النظرية
$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$	عكس العكس
$A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$ $A + 0 = A$	العمليات مع 1 و 0
$A \cdot A = A$	$A + A = A$	المتغير مع نفسه
$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$	المتغير مع عكسه
$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$	النظرية الإبدالية
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$	النظرية التجميعية
$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	النظرية التوزيعية
$A \cdot (A + B) = A$ $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$	$A + A \cdot B = A$ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$	الامتصاص أو الابتلاع
$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	دي مورغان (De Morgan)

اثبات صحة بعض قوانين الجبر البولياني باستخدام جداول الصدق:

المتغير مع نفسه X+X=X X.X=X

X	X.X	X+X
0	0	0
1	1	1

العنصر المحايد X+1=1 X.0=0

X	X.0	X+1
0	0	1
1	0	1

H.W : طبق قوانين التبديل والتجميع والتنسيق باستخدام جداول الصدق؟.

34

قانون الامتصاص ABSORPTION (DUAL)

X+XY=X

=X+XY — بأخذ X عامل مشترك

=X(1+Y) — قانون العنصر المحايد

= X

X(X+Y)=X

= X(X+Y) — قانون التوزيع

=X.X+X.Y — المتغير مع نفسه

=X+X.Y

=X(1+Y)

=X

$\mathbf{X+\overline{X}Y=X+Y}$

$=X+\overline{X}.Y$ — قانون التوزيع

$=(X+\overline{X}).(X+Y)$ — المتغير مع عكسه

$=(X+Y)$

$\mathbf{\overline{X}+X.Y=\overline{X}+Y}$

$\overline{X}+X.Y$ — قانون التوزيع

$(\overline{X}+X).(\overline{X}+Y)$ — المتغير مع عكسه

$(\overline{X}+Y)$

35

أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرات المنطقية

الهدف من تبسيط التعبير المنطقي هو تبسيط الدائرة المنطقية، أي تقليل عدد البوابات المنطقية الداخلة فى بنائها، و ذلك لتقليل تكلفتها. كما يعتبر تقليل تفرع الدخل للبوابات المنطقية المستخدمة فى بناء الدائرة نوعاً من التبسيط أيضاً.

مثال: استخدم نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبير المنطقي $y=\overline{\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B}$ ثم ارسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط و بعده.

الحل:

$y=\overline{\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B}$

$y=(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{C})\cdot(\overline{\overline{A}}+\overline{B})$ — دي مورغان

$y=(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B})$ — عكس العكس

$y=A+(B+\overline{C})\cdot\overline{B}$ — التوزيعية

$y=A+\overline{C}\,\overline{B}$ — الابتلاع

حل اخر:

$y=\overline{\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B}$

$y=\overline{\overline{A}\cdot(\overline{B}C+B)}$ — التوزيعية

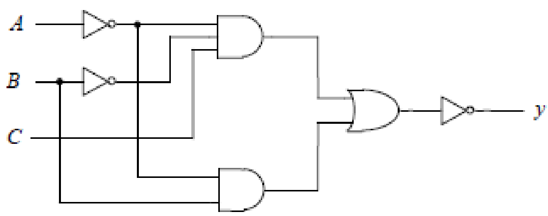
$y=\overline{\overline{A}\cdot(C+B)}$ — الابتلاع

$y=\overline{\overline{A}}+\overline{C}\,\overline{B}$ — دي مورغان

$y=A+\overline{C}\,\overline{B}$ — عكس العكس

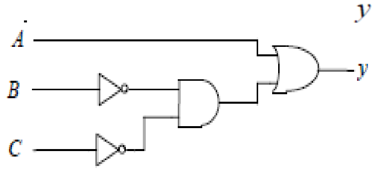
رسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط و بعده.

$$y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$$



الدائرة قبل التبسيط

$$y = A + \overline{C}\,\overline{B}$$



الدائرة بعد التبسيط

37

استخدام نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبيرات المنطقية

مثال: أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي ثم ارسم الدائرة قبل وبعده.

$$y = \overline{A}(A+B)+\overline{C}+CB$$

$y = \overline{A}(A+B)+\overline{C}+CB$

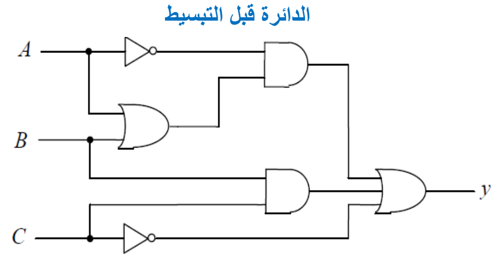
$y = \overline{A}B+\overline{C}+CB$ الابتلاع

$y = \overline{A}B+\overline{C}+B$ الابتلاع

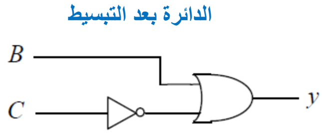
$y = \overline{A}B+B+\overline{C}$ الإبدالية

$y = B+\overline{C}$ الابتلاع

الدائرة قبل التبسيط



الدائرة بعد التبسيط



38

أمثلة :

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي:-

- $F = XY + X\overline{Y} = X(Y + \overline{Y}) = X.1 = X$
- $F = X(\overline{X} + Y) = X\overline{X} + XY = 0 + XY = XY$
- $F = (X + Y)(X + \overline{Y}) = X + Y\overline{Y} = X + 0 = X$

- $F = [XY(Z + \overline{Y}W) + \overline{X}Y]Z = [XYZ + XY\overline{Y}W + \overline{X}Y]Z$

$F = [XYZ + 0 + \overline{X}Y]Z = XYZZ + \overline{X}YZ$

$F = XYZ + \overline{X}YZ = YZ(X + \overline{X}) = YZ.1 = YZ$

39

39

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي:-

- $F = \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ$

$F = \overline{X}Y(Z + \overline{Z}) + XZ$

$F = \overline{X}Y + XZ$

- $F = ABC + A\overline{B}C + ABC + A$

$F = A(BC + \overline{B}C + BC + 1)$

$F = A$

40

40

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي:-

- $F = AB + A(A + C) + B(A + C)$

$F = AB + AA + AC + AB + BC$

$F = AB + A + AC + BC$

$F = A(B + 1 + C) + BC$

$F = A.1 + BC$

$F = A + BC$

- $F = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$

$F = \overline{B}(\overline{A} + A) + \overline{A}.B$

$F = \overline{B}.1 + \overline{A}.B \qquad F = \overline{B} + \overline{A}.B$

$F = \overline{B} + \overline{A}$ قانون الامتصاص

41

41

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي:-

- $F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.B.C$

بإخراج العامل المشترك في كل حدين متشابهين

$F = \overline{A}.\overline{B}(\overline{C} + C) + B.C(\overline{A} + A)$

$F = \overline{A}.\overline{B}.1 + B.C.1$

$F = \overline{A}.\overline{B} + B.C$

- $F = \overline{A}(A + B) + \overline{C} + CB$

$F = \overline{A}B + \overline{C} + CB$

$F = \overline{A}B + \overline{C} + B$

$F = \overline{A}B + B + \overline{C}$

$F = B + \overline{C}$

42

42

مثال: أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي $y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$

الحل:

لهذا المثال أهمية خاصة، و ذلك نظراً إلى أن التعبير المنطقي يظهر في صورة مميزة تسمى **صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms)**. و في هذه الصورة يتكون التعبير المنطقي من مجموعة من الحدود المرتبطة مع بعضها البعض بعمليات OR. و يسمى كل حد منها بالحد الأصغر (minterm). و الحد الأصغر تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مرتبطة مع بعضها البعض بعمليات AND، و يكون بعض هذه المتغيرات معكوساً و بعضها الآخر غير معكوس.

لتبسيط هذا النوع من التعبيرات نبحث عن التشابهات ما بين الحدود. و الحدان المتشابهان هما حدين يتفقان فى كل شيء عدا متغير واحد يظهر فى أحدهما معكوساً و في الآخر بدون عكس. مثلاً، في التعبير أعلاه الحد الأول $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ يشبه الحد الثاني $\bar{A}\bar{B}C$، حيث يتفق الحدان في كل شيء عدا المتغير C الذي يظهر في الحد الأول معكوساً و في الحد الثاني بدون عكس. و بنفس الطريقة يتشابه الحدان الثالث $\bar{A}BC$ و الرابع ABC، حيث يتفقان في كل شيء عدا المتغير A الذي يظهر في الحد الثالث معكوساً و في الحد الرابع بدون عكس.

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

لاحظ أن الإختلاف ما بين الحدين المتشابهين يجب أن يكون في متغير واحد فقط و لا يجوز أن يكون في أكثر من متغير.

تابع مثال: أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي.

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

بعد إيجاد التشابهات ما بين الحدود نقوم بجمع كل حدين متشابهين في حد واحد هو عبارة عن العامل المشترك ما بين الحدين، أما المتغير المختلف فيتم اختصاره.

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

$$y = \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) + BC(\bar{A} + A)$$ بإخراج العامل المشترك في كل حدين متشابهين

$$y = \bar{A}\bar{B}(1) + BC(1)$$ بجمع المتغير مع عكسه

$$y = \bar{A}\bar{B} + BC$$ بالعمليات مع 1

لاحظ في المثال السابق وجود تشابه إضافي بين الحدود، حيث أن الحد الثاني $\bar{A}\bar{B}C$ يشبه الحد الثالث $\bar{A}BC$، و لكن لم نكن في حاجة لاستخدام هذا التشابه في عملية التبسيط.

مثال: أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي.

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

الحل: التعبير هنا في صورة مجموع الحدود الصغرى، لذلك نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

نلاحظ هنا أن الحد الأول يتشابه في نفس الوقت مع كل من الحدين الثاني والثالث. في مثل هذه الحالات نقوم بتكرار الحد الأول (مستخدمين نظرية المتغير مع نفسه) بحيث يتم جمعه مع كلا الحدين الثاني والثالث.

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$ بتكرار الحد الأول

$$y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}$$ بجمع كل حدين متشابهين

$$y = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + \bar{A}\bar{C}$$ بالنظرية الإبدالية

$$y = \bar{B} + \bar{A}\bar{C}$$ بجمع الحدين المتشابهين

متمم الدالة باستخدام قوانين دي مورغان:-

➢ $F = \overline{(\bar{A} + YZ).\bar{P} + W}.$

$F = \overline{(\bar{A} + YZ).\bar{P}}.\bar{W}.$

$F = \overline{(\bar{A} + YZ)} + P.\bar{W}.$

$\mathrm{F} = \bar{\bar{A}} \cdot (\bar{Y} + \bar{Z}) + P \cdot \bar{W}$

$F = A \cdot \left(\bar{Y} + \bar{Z}\right) + P \cdot \bar{W}$

➢ $F = \{A[B + C(D + \bar{E})]\}$

$\bar{F} = \overline{\{A[B + C(D + \bar{E})]\}}$

$\bar{F} = \bar{A} + \bar{B}.\left(\bar{C} + \bar{D}\right).E.$

مثال: أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي.

$$y = \overline{\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}}$$

الحل: نلاحظ أن ما أسفل خط العكس المنطقي الخارجي هو عبارة عن تعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى، لذلك نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

$$y = \overline{\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}}$$

$y = \overline{\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}}$	
$y = \overline{B\bar{C} + A\bar{B}}$	بجمع كل حدين متشابهين
$y = \overline{(B\bar{C})} \cdot \overline{(A\bar{B})}$	بنظرية دي مورغان
$y = (\bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + B)$	بنظرية دي مورغان

مثال: أستخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي.

$$y = \overline{\bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC}$$

الحل: نلاحظ أن ما أسفل خط العكس المنطقي الخارجي هو عبارة عن تعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى، لذلك نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

$$y = \overline{\bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC}$$

$y = \overline{\bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC}$	
$y = \overline{\bar{A}BC + ABC + AB\bar{C} + ABC}$	بتكرار الحد الثالث
$y = \overline{BC + AB}$	بجمع كل حدين متشابهين
$y = \overline{B(C + A)}$	بأخذ العامل المشترك
$y = \bar{B} + \overline{(C + A)}$	بنظرية دي مورغان
$y = \bar{B} + \bar{C}\bar{A}$	بنظرية دي مورغان

مثال: أوجد الخرج من جدول الصدق التالي في أبسط شكل ثم صمم دائرة مناسبة لهذا الخرج.

a	b	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$Z = \bar{a}\bar{b} \quad OR \quad \bar{a}b \quad OR \quad ab$$

$$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + ab$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b(\bar{a} + a)$$

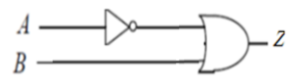
$$= \bar{a}\bar{b} + b1$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b$$

$$Z = (\bar{a} + b)\left(\bar{b} + b\right)$$

$$= (\bar{a} + b)(1)$$

$$= \bar{a} + b$$



تدريب: استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط كل من التعبيرات المنطقية التالية

1- $A = x + xyz + \bar{x}yz + xw + x\bar{w} + \bar{x}y$

2- $B = (x + \bar{y} + xy)(x + \bar{y})\bar{x}y$

3- $C = (x + \bar{y} + x\bar{y})(xy + \bar{x}z + yz)$

49

عيوب تبسيط المعادلات المنطقية باستخدام قوانين الجبر البوليني

- ليس لها خطوات محدده يتم اتباعها بالترتيب، ولكنها تعتمد بالدرجة الاولى على المعرفة الجيده بالقوانين الجبرية.
- الصورة المبسطة التي قد تصل اليها ليس هنا اي تأكيد على انها ابسط صورة، وقد يستطيع شخص اخر الحصول على صورة ابسط لانه امهر في استخدام هذه القوانين.

50