

# تبسيط الدوائر المنطقية باستخدام خرائط كارنوف

## محاضرة 6

By: Zahra Elashaal

1

### خرائط كارنوف Karnaugh Maps

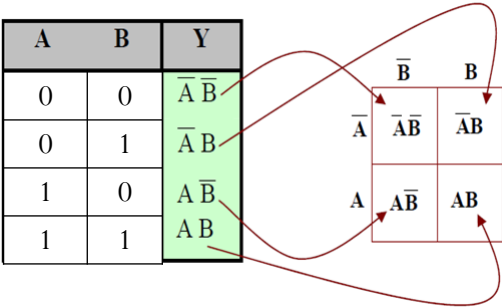
- مخطط كارنو (Karnaugh Map)، أو K-Map اختصاراً، هو عبارة عن طريقة أخرى للتعبير عن المعلومات الموجودة في جدول الصدق أو يمكن اعتبارها صيغة مختلفة لجدول الحقيقة.
- والهدف من استخدام المخطط هو تسهيل عملية اكتشاف التشابهات ما بين الحدود و جمع الحدود المتشابهة.
- عدد مربعاتها  $2^n$  حيث  $n$  عدد المتغيرات.
- كل مربع يمثل حد أصغر
- كل مربعين متجاورين يختلفان في متغير واحد فقط.
- المربعات المتجاورة (أفقياً أو عمودياً فقط) يمكن دمجها في صورة أبسط بشرط أن يكون عددها 2 أو 4 أو 8 أو 16 ....
- بحيث يتم استبعاد المتغير المتذبذب

2

عدد الخلايا في خريطة كارنوف يعتمد على عدد المتغيرات (المدخلات)

عدد الخلايا او المربعاتها هو  $2^n$  حيث  $n$  عدد المتغيرات

1- **خريطة كارنوف لمتغيرين**: لو كان هناك متغيرين هما (A,B) فإن خريطة كارنوف تحتوي فقط على أربعة احتمالات (00,01,10,11) وبالتالي لهما أربع مربعات وكل مربع منها يمثل حد من حواصل الضرب الأربعة كالتالي:



يتم تمثيل المتغير باحتمالية 0 و 1 رأسياً وأفقياً.  
لاحظ أن المتغير A يظهر مكماً في الصف 0 وغير مكمل في الصف 1

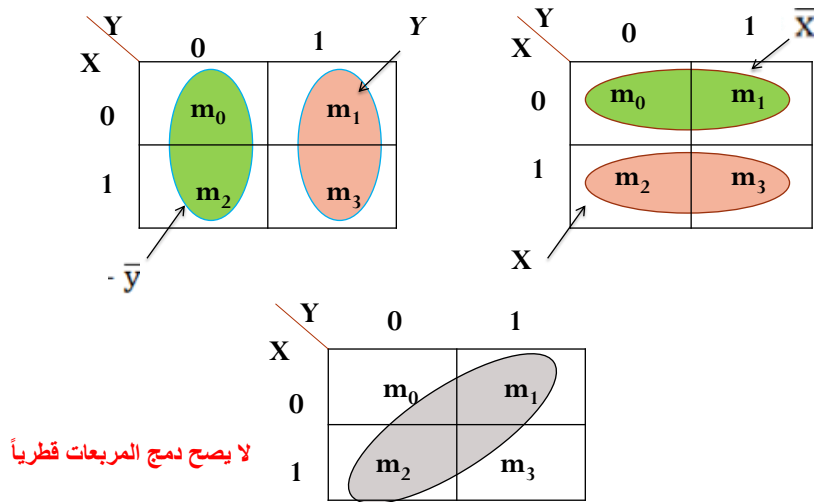
3

خطوات تمثيل دالة ذات متغيرين في خريطة كارنوف

- 1- نرسم الخريطة والتي تحتوي على أربعة مربعات تمثل جميع الاحتمالات الممكنة لمتغيرات الدخل A,B
- 2- وضع واحد في كل مربع ينتمي للدالة.
- 3- تجميع كل مربعين متجاورين أفقياً أو رأسياً حيث يحتوي كل منهما على واحد.
- 4- تبسيط المربعات المتجاورة إلى متغيرات ثابتة

4

### طرق دمج المربعات لمتغيرين في خرائط كارنوف:



5

### ملاحظات مهمة

عدد المربعات التي يمكن ضمها يجب أن تكون 1 أو 2 أو 4 ( قوى 2 ) وذلك لمتغيرين حيث:

- يمثل المربع الواحد حداً مؤلفاً من متغيرين.
- يمثل مربعان متجاوران حداً مؤلفاً من حرف واحد.
- يمثل أربعة مربعات متجاورة الدالة التي تساوي 1.

6

التبسيط باستخدام مخططات كارنو (Karnaugh Maps)

مخطط كارنو لمتغيرين:

سنقوم بتحويل جدول الصواب التالي، و الذي يحتوي على متغيري دخل هما A، B إلى مخطط كارنو في متغيرين

#	A	B	x
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

جدول الصواب

		B	
		0	1
A	0	1	0
	1	0	1

مخطط كارنو

7

بسط الدوال المنطقية التالية:

$E(x,y) = \bar{x}y + xy$

		Y	
		0	1
X	0		1
	1		1

$E(x,y) = Y$

$F(x,y) = \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

		Y	
		0	1
X	0	1	1
	1		

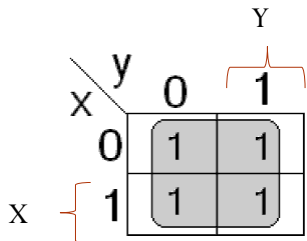
$F(x,y) = \bar{x}$

X	Y	F	E	Minterm
0	0	1	0	m <sub>0</sub> $\bar{X}\bar{Y}$
0	1	1	1	m <sub>1</sub> $\bar{X}Y$
1	0	0	0	m <sub>2</sub> $X\bar{Y}$
1	1	0	1	m <sub>3</sub> $XY$

8

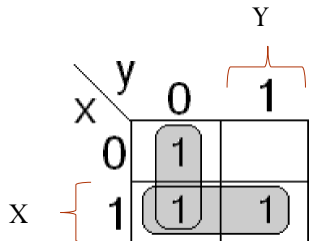
بسط الدوال المنطقية التالية:

$F(x,y) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + x\bar{y} + xy$



$F(x,y) = 1$

$F(x,y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + xy$



$F(x,y) = x + \bar{y}$

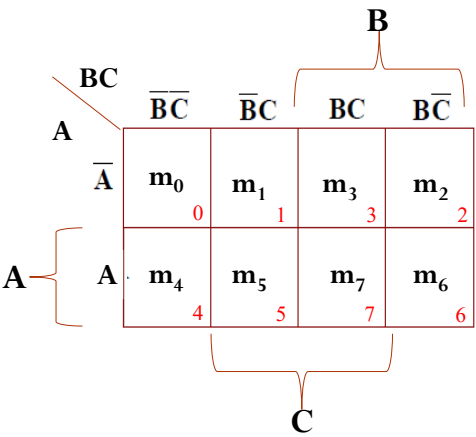
9

2- خريطة كارنوف لثلاث متغيرات

لوكان هناك ثلاث متغيرات هما (A,B,C) فإن خريطة كارنوف تحتوي فقط على ثمانية احتمالات وبالتالي لهما ثمانية مربعات كالآتي:

$2^n = 2^3 = 8$  عدد الخلايا هو  $n=2$

#	A	B	C	Minterm	
0	0	0	0	m <sub>0</sub>	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
1	0	0	1	m <sub>1</sub>	$\bar{A}\bar{B}C$
2	0	1	0	m <sub>2</sub>	$\bar{A}B\bar{C}$
3	0	1	1	m <sub>3</sub>	$\bar{A}BC$
4	1	0	0	m <sub>4</sub>	$A\bar{B}\bar{C}$
5	1	0	1	m <sub>5</sub>	$A\bar{B}C$
6	1	1	0	m <sub>6</sub>	$AB\bar{C}$
7	1	1	1	m <sub>7</sub>	$ABC$



10

## 2- خريطة كارنوف لثلاث متغيرات

نلاحظ بأن حدود حواصل الضرب ليست مرتبة بمتابعة ثنائية :

$$110 - 010 - 001 - 000$$

ولكن تترتب بحيث أنه عند الانتقال من مربع لمربع آخر مجاور يتغير واحد فقط من المتغيرين من 0 إلى 1 أو العكس.

تعتبر الخريطة موضوعة علي سطح أسطوانة حيث تتلامس الحافتان اليمنى واليسرى لتكوين مربعات متجاورة فمثلاً:

BC \ A	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	$BC$	$B\overline{C}$
	$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{A}$
$\overline{A}$	$m_0$ 0	$m_1$ 1	$m_3$ 3	$m_2$ 2
A	$m_4$ 4	$m_5$ 5	$m_7$ 7	$m_6$ 6

$m_0$  تعتبر مجاورة لـ  $m_2$

$m_4$  تعتبر مجاورة لـ  $m_6$

## ملاحظات مهمة

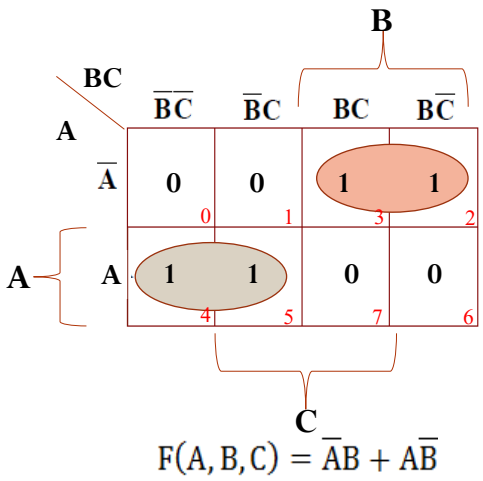
عدد المربعات التي يمكن ضمها يجب أن تكون 1 أو 2 أو 4 أو 8 (قوى 2) وذلك لثلاثة متغيرات حيث:

- يمثل المربع الواحد حداً مؤلفاً من ثلاثة حروف.
- يمثل مربعان متجاوران حداً مؤلفاً من حرفين.
- يمثل أربعة مربعات متجاورة حداً من حرف واحد.
- تمثل ثمانية مربعات متجاورة الدالة التي تساوي 1.

2- خريطة كارنوف لثلاث متغيرات

من جدول الصدق ارسم خريطة كارنوف لإيجاد المعادلة.

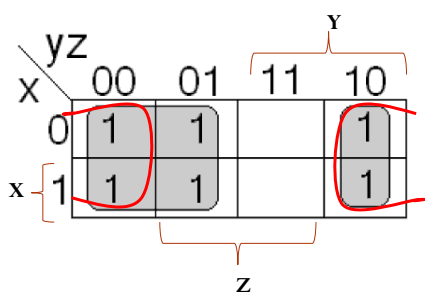
#	A	B	C	F	Minterm
0	0	0	0	0	$m_0 \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
1	0	0	1	0	$m_1 \bar{A}\bar{B}C$
2	0	1	0	1	$m_2 \bar{A}B\bar{C}$
3	0	1	1	1	$m_3 \bar{A}BC$
4	1	0	0	1	$m_4 A\bar{B}\bar{C}$
5	1	0	1	1	$m_5 A\bar{B}C$
6	1	1	0	0	$m_6 AB\bar{C}$
7	1	1	1	0	$m_7 ABC$



13

بسط الدوال المنطقية التالية:

$F(x,y,z) = \sum (0,1,2,4,5,6)$

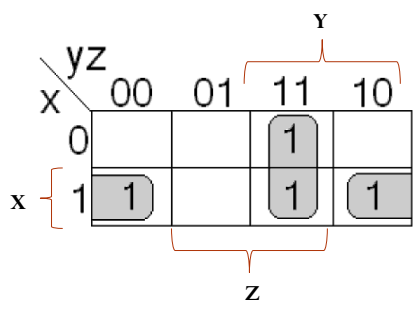


$F(x,y,z) = \bar{y} + yz$

المعادلة السابقة ليست في أبسط صورة لان المجموعات لم تؤخذ بطريقة صحيحة

$F(x,y,z) = \bar{y} + \bar{z}$

$F(x,y,z) = \sum (3,4,6,7)$

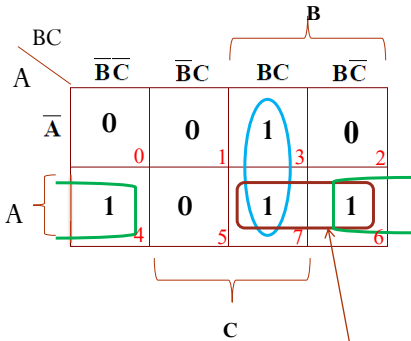


$F(x,y,z) = x\bar{z} + yz$

14

بسط الدوال المنطقية التالية:

A	B	C	F	Minterm	
0	0	0	0	$m_0$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	0	$m_1$	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	$m_2$	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	$m_3$	$\overline{A}BC$
1	0	0	1	$m_4$	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	$m_5$	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$m_6$	$AB\overline{C}$
1	1	1	1	$m_7$	$ABC$



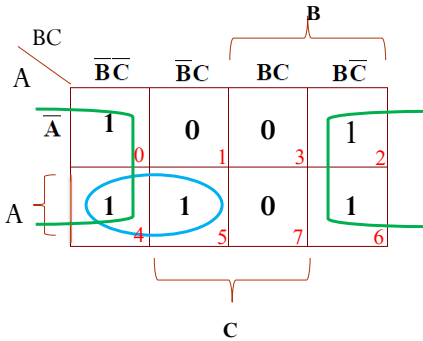
$F(A, B, C) = AC̄ + BC + AB$

لا يمكن استخدام الدمج أكثر من مرة فذلك  
الحد AB زائد

15

بسط الدوال المنطقية التالية:

A	B	C	F	Minterm	
0	0	0	1	$m_0$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	0	$m_1$	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1	$m_2$	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0	$m_3$	$\overline{A}BC$
1	0	0	1	$m_4$	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	1	$m_5$	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$m_6$	$AB\overline{C}$
1	1	1	0	$m_7$	$ABC$



$F(A, B, C) = C̄ + AB̄$

16



**بسط الدالة التالية باستخدام خرائط كارنوف:**

$F(A,B,C) = \bar{A}C + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}C + BC$

**الحل بالطريقة الاولى:**

- نحاول استكمال كتابة المعادلة بعدد متغيرات الادخال لكل حد وفي الحاليين:  
حالة يكون المتغير الاضافي مثبت وحالة يكون المتغير الاضافي منفي

$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + ABC + \bar{A}BC$

$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + ABC + \bar{A}BC$

$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$

$F(A,B,C) = \Sigma(1,2,3,5,7)$

**الحل بعد التبسيط**

$F(A,B,C) = C + \bar{A}B$

17

**بسط الدالة التالية باستخدام خرائط كارنوف:**

$F(A,B,C) = \bar{A}C + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}C + BC$

**الحل بالطريقة الثانية:**

- الحل بطريقة اخرى وذلك برسم كل حد مباشرة في خريطة كارنوف كما يلي:

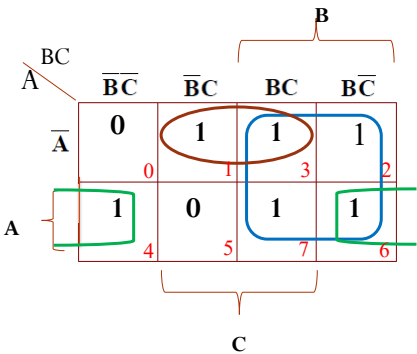
**الحل بعد التبسيط**

$F(A,B,C) = C + \bar{A}B$

18

بسط المعادلة المنطقية التالية:

$$F(A,B,C) = M_0 \cdot M_5$$



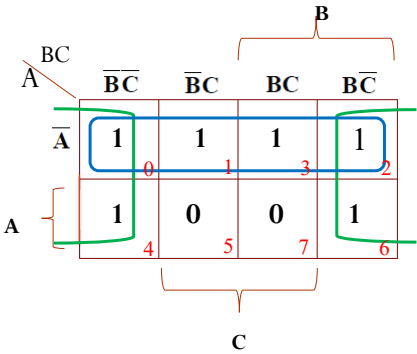
$$F = B + \overline{A}C + A\overline{C}$$

$$F = B + A \oplus C$$

19

بسط المعادلة المنطقية التالية:

$$F(A,B,C)=\sum m(0,1,2,3,4,6)$$



$$F = \overline{C} + \overline{A}$$

20

خرائط كارنوف لأربعة متغيرات

$2^n = 2^4 = 16$  عدد الخلايا هو  $n=4$

CD AB	$\overline{C}\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	$CD$ 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\overline{B}$ 00	$m_0$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 0	$m_1$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$ 1	$m_3$ $\overline{A}\overline{B}CD$ 3	$m_2$ $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$ 2
$\overline{A}B$ 01	$m_4$ $\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$ 4	$m_5$ $\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$m_7$ $\overline{A}BCD$ 7	$m_6$ $\overline{A}B C\overline{D}$ 6
$AB$ 11	$m_{12}$ $AB\overline{C}\overline{D}$ 12	$m_{13}$ $AB\overline{C}D$ 13	$m_{15}$ $ABCD$ 15	$m_{14}$ $AB C\overline{D}$ 14
$A\overline{B}$ 10	$m_8$ $A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 8	$m_9$ $A\overline{B}\overline{C}D$ 9	$m_{11}$ $A\overline{B}CD$ 11	$m_{10}$ $A\overline{B} C\overline{D}$ 10

- لأربعة متغيرات يوجد ستة عشر مربع مخصصة لحواصل الضرب.
- الصفوف والأعمدة مرقمة بمتتالية بحيث يتغير متغير واحد فقط قيمته بين صفين أو عمودين متجاورين.
- يتم تعريف المربعات المتجاورة بأنها المربعات الموجودة جنبا إلى جنب كما ان الخريطة تعتبر موضوعة على سطح تتلامس فيه الحافتان العليا والسفلى وأيضا اليمنى واليسرى لتكوين مربعات متجاورة.

21

خرائط كارنوف لأربعة متغيرات

A	B	C	D	Minterms
0	0	0	0	$m_0$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$
0	0	0	1	$m_1$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$
0	0	1	0	$m_2$ $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
0	0	1	1	$m_3$ $\overline{A}\overline{B}CD$
0	1	0	0	$m_4$ $\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$
0	1	0	1	$m_5$ $\overline{A}B\overline{C}D$
0	1	1	0	$m_6$ $\overline{A}BC\overline{D}$
0	1	1	1	$m_7$ $\overline{A}BCD$
1	0	0	0	$m_8$ $A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$
1	0	0	1	$m_9$ $A\overline{B}\overline{C}D$
1	0	1	0	$m_{10}$ $A\overline{B}C\overline{D}$
1	0	1	1	$m_{11}$ $A\overline{B}CD$
1	1	0	0	$m_{12}$ $AB\overline{C}\overline{D}$
1	1	0	1	$m_{13}$ $AB\overline{C}D$
1	1	1	0	$m_{14}$ $ABC\overline{D}$
1	1	1	1	$m_{15}$ $ABCD$

CD AB	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$CD$	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	$m_0$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 0	$m_1$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$ 1	$m_3$ $\overline{A}\overline{B}CD$ 3	$m_2$ $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$ 2
$\overline{A}B$	$m_4$ $\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$ 4	$m_5$ $\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$m_7$ $\overline{A}BCD$ 7	$m_6$ $\overline{A}B C\overline{D}$ 6
$AB$	$m_{12}$ $AB\overline{C}\overline{D}$ 12	$m_{13}$ $AB\overline{C}D$ 13	$m_{15}$ $ABCD$ 15	$m_{14}$ $AB C\overline{D}$ 14
$A\overline{B}$	$m_8$ $A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 8	$m_9$ $A\overline{B}\overline{C}D$ 9	$m_{11}$ $A\overline{B}CD$ 11	$m_{10}$ $A\overline{B} C\overline{D}$ 10

22

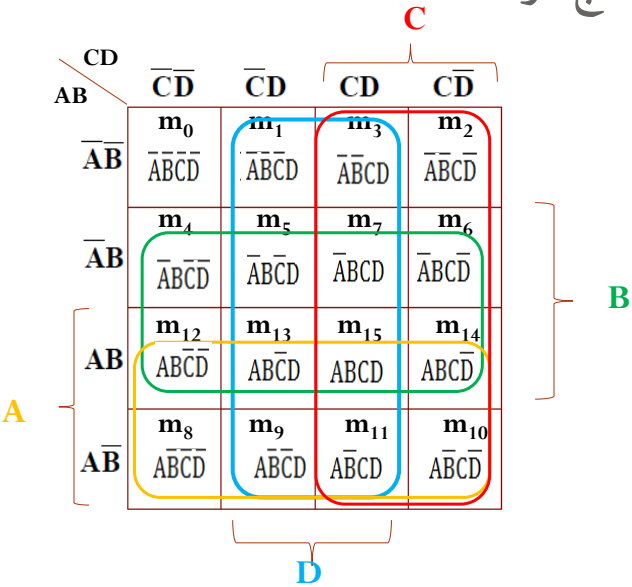
ملاحظات مهمة

عدد المربعات التي يمكن ضمها يجب أن تكون 1 أو 2 أو 4 أو 8 أو 16 (قوى 2) وذلك لأربعة متغيرات حيث:

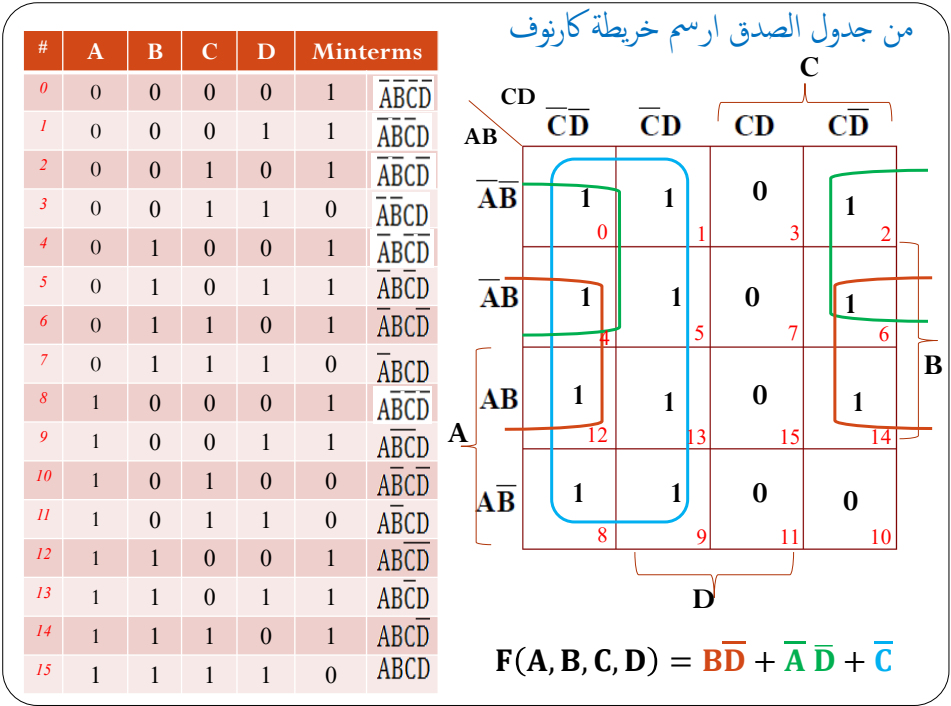
- يمثل المربع الواحد حد حاصل ضرب مؤلف من أربعة حروف.
- يمثل مربعان متجاوران حداً مؤلفاً من ثلاثة حروف.
- يمثل أربعة مربعات متجاورة حداً من حرفين.
- تمثل ثمانية مربعات متجاورة حداً من حرف واحد.
- تمثل ستة عشر مربعاً متجاورة الدالة التي تساوي 1.

23

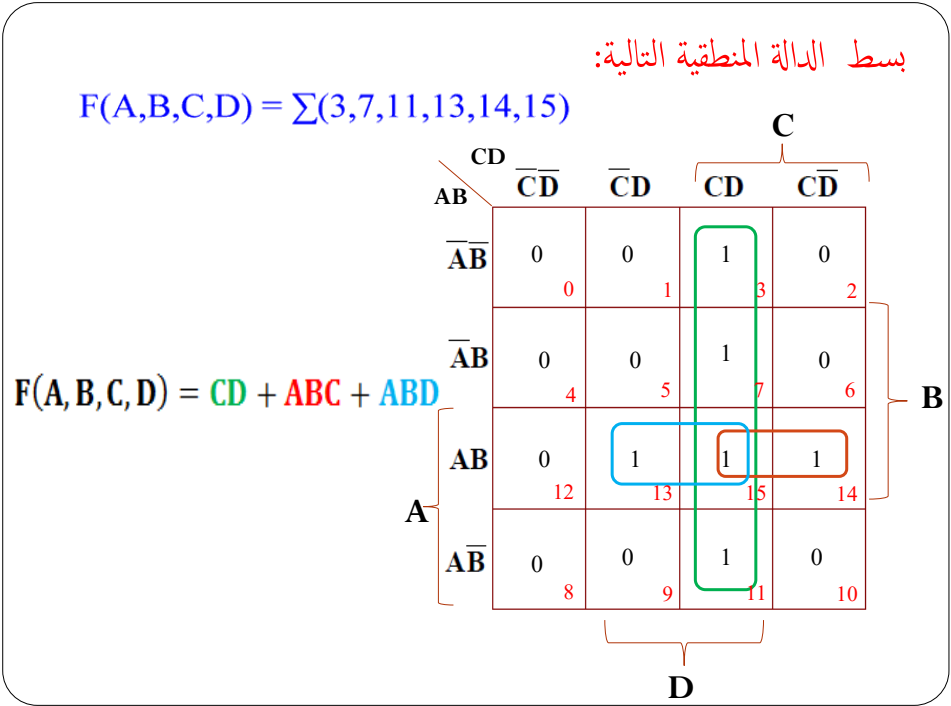
طرق دمج المربعات:



24



25



26

بسط الدالة المنطقية التالية باستخدام مضروب المجاميع POS:

$f(A,B,C,D) = \prod M(0,1,4,5,11,15)$

$F(A,B,C,D) = (A + C)(\bar{A} + \bar{C} + \bar{D})$

		C			
		CD	C̄D	CD	C̄D
A	AB	1	1	0	0
	AB̄	1	1	0	0
Ā	AB	0	0	1	1
	AB̄	0	0	1	1

27

اختصر الدالة المنطقية التالية:

$F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$

$F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD$

$F(A,B,C,D) = \bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C\bar{D}$

		C			
		CD	C̄D	CD	C̄D
A	AB	1	1	0	0
	AB̄	1	1	0	0
Ā	AB	0	0	1	1
	AB̄	0	0	1	1

28

الدول غير المحددة بالكامل (Incompletely Specified Functions)  
الحالات المجهولة Don't Care Conditions

في بعض الحالات تكون قيمة الدالة مجهولة أو مستحيلة الحدوث، أو أن مخرجاتها غير معلوم ما اذا كان 0 او 1 ففي مثل هذه الحالات يعرف خرج الدالة بأنه غير مهم (**Don't Cares**) ويرمز إليها بالرمز x حيث أنها تساعدنا في الحل بحيث:

- لا يتوجب علينا تغطية المربعات التي تحتوي على x بالكامل،
- وإذا احتجنا لاستخدامها مع المربعات التي تحتوي على قيمة 1 لتجميعها في مجموعات من قوى (2).

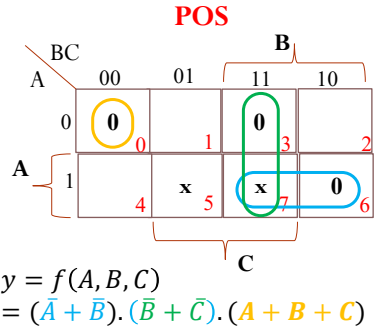
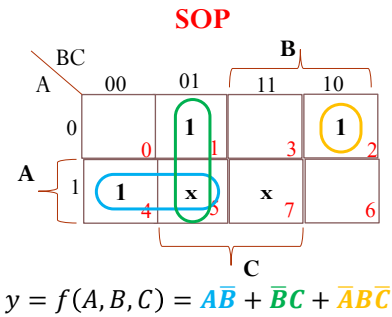
**مثلا على ذلك:** في نظام التشفير BCD العشرة أرقام الأولى فقط مستخدمة بينما الستة الأخرى لا يمكن حدوثها وبهذا سوف نعتبرها حالات مهيمة **Don't Care**

29

**مثال:** يوضح طريقة ظهور القيم غير المحددة في جداول الصواب، وفي مخططات كارنو، وفي التعبيرات المنطقية المكتوبة في صورة مجموع الحدود الصغرى SOP وفي صورة مضروب الحدود الكبرى POS

#	A	B	C	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	x
6	1	1	0	0
7	1	1	1	x

$$y = f(A, B, C) = \sum m(1, 2, 4) + \sum d(5, 7)$$
$$y = f(A, B, C) = \prod M(0, 3, 6) \cdot \prod d(5, 7)$$



30

بسّط الدالة المنطقية التالية: معطى لديك المعادلة في صورة SOP مع الـ Don't Care

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1,3,7,11,15) + \sum d(0,2,5,8)$$

أولاً: نقوم بتعبئة المربعات بـ 1 ثم  
تعبئتها بـ X  
ثانياً: نقوم بدمج المربعات التي سوف  
تعطينا قيمة الدالة.

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B} + CD$$

		C			
		$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$C\overline{D}$	$CD$
A	$\overline{A}\overline{B}$	x	1	1	x
	$\overline{A}B$	0	x	1	0
	$AB$	0	0	1	0
	$A\overline{B}$	x	0	1	0
		D			
		$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$C\overline{D}$	$CD$
B	$\overline{A}\overline{B}$	0	1	3	2
	$\overline{A}B$	4	5	7	6
	$AB$	12	13	15	14
	$A\overline{B}$	8	9	11	10

31

بسّط الدالة المنطقية  $F(A, B, C, D)$  التي تعطي الخرج يساوي 1 عندما تكون شفرة الـ BCD أكبر من أو تساوي 5.

القيم التي أكبر من أو تساوي 5 هي من 5 إلى 9 في نظام BCD وباقي الحالات بعد ذلك هي مستحيلة ونرمز لها بالرمز X

$$F(A, B, C, D) = A + BD + BC$$

		C			
		$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$C\overline{D}$	$CD$
A	$\overline{A}\overline{B}$	0	0	0	0
	$\overline{A}B$	0	1	1	1
	$AB$	x	x	x	x
	$A\overline{B}$	1	1	x	x
		D			
		$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	$C\overline{D}$	$CD$
B	$\overline{A}\overline{B}$	0	1	3	2
	$\overline{A}B$	4	5	7	6
	$AB$	12	13	15	14
	$A\overline{B}$	8	9	11	10

32



No	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

من جدول الصدق قم بكتابة التعبير المنطقي لمتغير الخرج Y في صورة:

- 1- مجموع الحدود الصغرى SOP
  - 2- مضروب الحدود الكبرى POS
- ثم قم بتبسيط المعادلات باستخدام خرائط كارنوف.

صورة مجموع الحدود الصغرى SOP:

$$Y(A,B,C,D) = \sum m(1,2,5,6,9) + \sum d(10,11,12,13,14,15)$$

صورة مضروب الحدود الكبرى POS:

$$Y(A,B,C,D) = \prod M(0,3,4,7,8) \cdot \prod d(10,11,12,13,14,15)$$

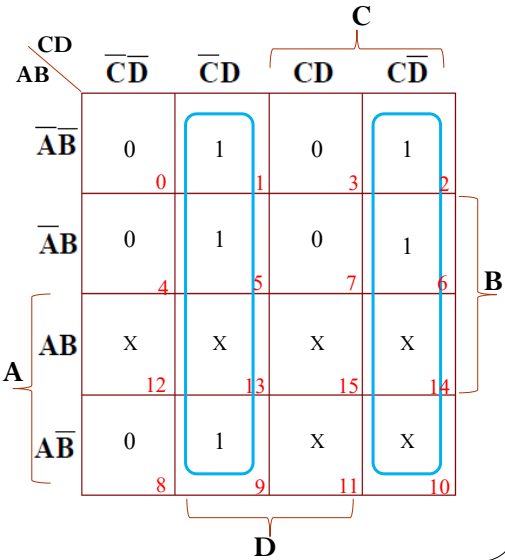
33

No	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

بتبسيط المعادلات باستخدام خرائط كارنوف:

1- مجموع الحدود الصغرى SOP

$$Y(A,B,C,D) = \overline{C}D + C\overline{D}$$



34

## 2- مضروب الحدود الكبرى POS

		C			
		$\overline{CD}$	$\overline{CD}$	CD	CD
A	$\overline{AB}$	0	1	0	1
	$\overline{AB}$	0	1	0	1
B	AB	X	X	X	X
	AB	0	1	X	X

**تلمیپ 7:**

## تدريب

$$z = f(D, C, B, A) = \sum m(0, 1, 7, 8, 9, 10, 15)$$

$$z = f(D, C, B, A) = \prod M(2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14)$$
$$y = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \prod M(1,3,4,5,12) \cdot \prod d(2,6,8,9,10,11,14)$$

ITGS126