

ITGS217

Discrete Structures

التراكيب المنفصلة

المنطق Logic

د. رضوان حسين

المنطق

- المنطق يعرف القواعد الأساسية لوصف الحقائق
- المنطق الرياضي يكشف هذه القواعد بالتفصيل
- ✓ وهو يشكل إثبات رسمي للحقائق formal proof
- دراسة المنطق الرياضي Mathematical Logic:
- طريقة جيدة لتعلم المنطق على أساس سليم
- كتابة إثباتات رسمية بمنطق رياضي يشبه كثيراً برمجة الحاسوب
- لأن القواعد محددة بوضوح clearly defined
- المنطق ضروري جداً للسببية الرياضية Mathematical Reasoning
- فهو مهم لتصميم البرامج, و أيضاً تصميم الدوائر الإلكترونية

المنطق الاقتراحي Propositional Logic

- المنطق الاقتراحي هو نظام مبني على اقتراحات propositions
- الاقتراح: عبارة statement (جملة مُحْكَمَة) تقريرية declarative تكون إما صحيحة أو خاطئة (وليس كلاهما).
- نقول أن القيمة الصادقة (الصائبة, الحقيقة) truth value لاقتراح ما تكون
 - صحيحة True (T)
 - أو خاطئة False (F)
- يشار إليهما بالقيمتين 1 و 0 في الدوائر المنطقية

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• " الفيلة أكبر من الفئران "

نعم

• هل هذه عبارة statement؟

نعم

• هل هذا اقتراح proposition؟

صح true

• ما هي قيمة الصواب truth value

لهذه الفرضية؟

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• "1900 > 2018 "

نعم

• هل هذه عبارة statement؟

نعم

• هل هذا اقتراح proposition؟

خطأ false

• ما هي قيمة الصواب truth value

لهذه الفرضية؟

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• " $y > 5$ "

نعم

• هل هذه عبارة statement؟

لا

• هل هذا اقتراح proposition؟

• لأن قيمة الصواب truth value تعتمد على قيمة y ولكن هذه القيمة غير محددة.

• نسمي هذا النوع من العبارات بالدوال الاقتراحية أو العبارات المفتوحة
propositional functions or open statements

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• " اليوم هو 27 يناير و $10 > 99$ "

نعم

• هل هذه عبارة statement؟

نعم

• هل هذا اقتراح proposition؟

خطأ false

• ما هي قيمة الصواب truth

value لهذا الاقتراح؟

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• " لو سمحت لا تنم أثناء المحاضرة "

لا

• هل هذه عبارة statement؟

لا

• هل هذا اقتراح proposition؟

• العبارات فقط يمكن أن تكون اقتراحات

لعبة الاقتراح/العبارة Proposition/Statement

• " هل يستطيع إبراهيم أن يذهب معك؟ "

لا

• هل هذه عبارة statement؟

لا

• هل هذا اقتراح proposition؟

• هذا سؤال وليس عبارة تقريرية declarative,

العبارات فقط يمكن أن تكون فرضيات

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• "خذ حبتي أسبرين"

• هل هذه عبارة statement؟ لا

• هل هذا اقتراح proposition؟ لا

• هذا أمر imperative وليس جملة تقريرية declarative,

العبارات فقط يمكن أن تكون اقتراحات

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

$$"x + 4 > 9" \quad \bullet$$

• هل هذه عبارة statement؟ نعم

• هل هذا اقتراح proposition؟ لا

• ... لأن قيمة الصواب للقترح تكون **صحيحة** عند قيم محددة للمتغير x مثل

6, وتكون **خاطئة** عند قيم أخرى للمتغير x مثل 5

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

• " هي طالبة في كلية تقنية المعلومات "

نعم

• هل هذه عبارة statement؟

لا

• هل هذا اقتراح proposition؟

• لأن قيمة الصواب truth value لهذا الاقتراح تعتمد على إلى من يشير ضمير الغائب هي.

Proposition/Statement لعبة الاقتراح/العبارة

" $x < y$ if and only if $y > x$ " •

نعم

• هل هذه عبارة statement؟

نعم

• هل هذا اقتراح proposition؟

صح true

• ما هي قيمة الحقيقة truth value

لهذا الاقتراح؟

• ... لأن قيمة الصواب للقتراح لا تعتمد على أي قيمة محددة في x و y

المنطق الاقتراحي Propositional Logic

- المنطق الاقتراحي هو لغة تبتعد عن محتوى النص وتركز عن الروابط المنطقية فيه
- كما لاحظنا في الأمثلة السابقة, يمكن دمج اقتراحين أو أكثر لتشكل اقتراح واحد مدمج **Compound proposition**
- يمكن صياغة **formalize** الاقتراحات بالحروف مثل p, q, r, s
- وصياغة عددة مشغلات **operators** منطقية (روابط **connectives** منطقية)

المشغلات (الروابط) المنطقية

Logical Operators (connectives)

• سنتعامل مع المشغلات المنطقية التالية:

- Negation (NOT, \neg) النفي
- Conjunction (AND, \wedge) التوافق "و"
- Inclusive Disjunction (OR, \vee) الانفصال الاحتوائي "أو"
- Exclusive-or (XOR, \oplus) "أو" الاستثنائية
- Implication (if – then, \rightarrow) الشرط (الاستنباط)
- Biconditional (if and only if, \leftrightarrow) الشرط المزدوج

استخدام المشغلات المنطقية

- نفي الاقتراح Negation

- لتكن p فرضية , نفي p يكتب $\neg p$ أو تكتب $\sim p$
- الفرضية $\neg p$ تقرأ "not p " أي نفي p
- قيم الصواب truth values لنفي p , $\neg p$, هو عكس قيمة الصواب للفرضية p

مثال: استخدام المشغلات المنطقية

- نفي الاقتراح Negation
- ليكن الاقتراح p : "اليوم هو الجمعة"
- الاقتراح $\neg p$: "اليوم ليس الجمعة"

جدول الصواب (النفي NOT)

• نفي الاقتراح Negation

• Unary Operator, Symbol: \neg

P	$\neg P$
true (T)	false (F)
false (F)	true (T)

استخدام المشغلات المنطقية

- التوافق (و AND) Conjunction
 - لتكن p و q اقتراحين ,
 - التوافق بين الاقتراحين p و q يكتب $p \wedge q$ وتقرأ p AND q
 - التوافق $p \wedge q$ يكون صحيحاً true عندما p AND q كلاهما صحيح
 - ويكون خطأ false غير ذلك otherwise
- Binary Operator, Symbol: \wedge
 - مشغل لمتغيرين

مثال: استخدام المشغل AND

- أوجد التوافق بين الاقتراحين p و q
 - ليكن الاقتراح p : "اليوم هو الجمعة"
 - و ليكن الاقتراح q : "إنها تمطر اليوم"
 - التوافق بين p و q
- $p \wedge q$: "اليوم هو الجمعة وهي تمطر اليوم"

جدول الصواب (AND)

- ترابط (توافق) الاقتراحات Conjunction
- يحتوي الجدول على أربعة صفوف لأن به متغيرين منطقيين p و q , ولكل متغير قيمتين (صح أم خطأ), وعدد الصفوف هو العدد إثنين مرفوع لعدد المتغيرات $4 = 2^2 =$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

استخدام المشغلات المنطقية

- الانفصال (أو Disjunction inclusive OR)

- لتكن p و q اقتراحين ,
- الانفصال بين الاقتراحين p و q يكتب $p \vee q$ وتقرأ $p \text{ OR } q$
- الانفصال $p \vee q$ يكون صحيحاً true عندما p أو q أو كلاهما صحيح
- ويكون خطأ false غير ذلك otherwise

مثال: استخدام المشغل OR

- أوجد الانفصال بين الاقتراحين p و q
 - ليكن الاقتراح p : "اليوم هو الجمعة"
 - و يكن الاقتراح q : "إنها تمطر اليوم"
 - الانفصال بين p و q
- $p \vee q$: "اليوم هو الجمعة أو هي تمطر اليوم"

جدول الصواب (Inclusive OR)

• انفصال الاقتراحات Disjunction

- Binary Operator, Symbol: \vee

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

استخدام المشغلات المنطقية

- الانفصال الاستثنائي (أو XOR) Exclusive OR
- لتكن p و q اقتراحين ,
- الانفصال الاستثنائي بين الاقتراحين p و q يكتب $p \oplus q$
- وهي تمثل الاقتراح $p \text{ XOR } q$
- الانفصال الاستثنائي $p \oplus q$ يكون واحد فقط من p أو q صحيحاً true
- ويكون خطأ false غير ذلك otherwise

مثال: استخدام المشغل XOR

- أوجد الانفصال الاستثنائي بين الاقتراحين p و q
 - ليكن الاقتراح p : " عاطف سينجح في مادة ITGS217 "
 - و يكن الاقتراح q : " عاطف سيرسب في مادة ITGS217 "
 - الانفصال الاستثنائي بين p و q
- $p \oplus q$: " عاطف سينجح أو يرسب في مادة ITGS217 "

جدول الصواب (XOR)

• انفصال استثنائي للقترحات Exclusive OR

- Binary Operator, Symbol: \oplus

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال: استخدام المشغل OR أو XOR

- الاقتراح التالي لنص أسلوب المفاضلة " أو " , من سياق النص أوجد هل المقصود هو تعبير الانفصال الاحتوائي OR أم الانفصال الاستثنائي XOR ؟
- " نبيل لديه أخ واحد أو ثلاث إخوة "
- لا يمكن أن يكون للشخص أخ واحد وثلاث إخوة
- وبالتالي " أو " استخدمت بشكل استثنائي (XOR)

مثال: استخدام المشغل OR أو XOR

- الاقتراح التالي لنص أسلوب المفاضلة " أو " , من سياق النص أوجد هل المقصود هو تعبير الانفصال الاحتوائي OR أم الانفصال الاستثنائي XOR ؟
- " للتسجيل في كلية تقنية المعلومات عليك اجتياز امتحان المفاضلة أو تكون طالب درست بقسم الحاسب بكلية العلوم "
- يمكن أن يجتاز الطالب امتحان المفاضلة و أن يكون طالباً سابق بقسم الحاسب بكلية العلوم
- وبالتالي " أو " استخدمت بشكل احتوائي (OR)

Conditional Statements العبارات الشرطية

• الدلالة Implication

- تعريف: لتكن p و q اقتراحين.
- العبارة الشرطية $p \rightarrow q$, تكون اقتراحاً " إذا كانت p تدل على q "
- أي p تؤدي إلى q
- " *if p, then q* "
- العبارة الشرطية تكون خطأ false عندما تكون p صح و تكون q خطأ
- وتكون العبار صح عدا ذلك

Implication (if - then)

الدالة

- Binary Operator, Symbol: \rightarrow

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Conditional Statements العبارات الشرطية

- الجملة الشرطية $p \rightarrow q$,
- تسمى p بالفرضية hypothesis أو مُعطى
- تسمى بالخلاصة conclusion أو النتيجة consequence

• مثال:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1. الاقتراح p : أسامة ليبي, q : أسامة أفريقي

2. "If I am elected, then I will lower taxes."

3. "If you get 100% on the final,

then you will get an A."

العبارات الشرطية Conditional Statements

- مفهوم عبارة الشرط (implication) في التراكيب والرياضيات المنفصلة
مختلف عن مفهوم الشرط في لغات البرمجة واللغات الطبيعية
- المنطق الرياضي لعبارة الدلالة (الشرط) **يحدد قيمة الصدق truth value**
ولا يعتمد على علاقة الفعل ورد الفعل بين الفرضية hypothesis والخلاصة
- لغة منطق الاقتراح Propositional Logic Language اصطناعية, ولكن
نستخدم اللغة الطبيعية للشرح

العبارات الشرطية Conditional Statements

- مثال:

" إذا كانت كريمة تملك هاتف ذكي, إذاً $7 = 5 + 2$ "

- نتيجة (قيمة الصدق) الاقتراح المنطقي تكون دائماً صح true , لماذا؟

- لأن قيمة العبارة $p \rightarrow q$ دائماً صح طالما خلاصة conclusion الشرط صح

- مثال:

" إذا كانت فاطمة تملك هاتف ذكي, إذاً $17 = 6 + 4$ "

- نتيجة الاقتراح المنطقي تكون صح true في حالة واحدة, ما هي؟

- إذا قيمة الفرضية hypothesis للعبارة $p \rightarrow q$ تكون خطأ

العبارات الشرطية Conditional Statements

• الشرط المزدوج Biconditional statement

• تعريف: لتكن p و q اقتراحين two propositions.

• عبارة الشرط المزدوج $p \leftrightarrow q$, هي الاقتراح

"تتحقق p إذا وفقط إذا تتحقق q "

• " p if and only if q "

• العبارة الشرطية المزدوجة (bi-implication دلالة مزدوجة) تكون

صح true عندما تكون p و q لديهما نفس قيمة الصدق truth values

• وتكون العبارة خطأ false عدا ذلك

Biconditional (if and only if)

الشرط المزدوج

الدلالة الموزدوجة bi-implication

- Binary Operator, Symbol: \leftrightarrow

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تكافؤ العبارة الشرطية المزدوجة

- العبارة $p \leftrightarrow q$ تكون صحيحة عندما:
العبارة $p \rightarrow q$ صحيحة , والعبارة $q \rightarrow p$ صحيحة أيضاً
وتكون خاطئة غير ذلك

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

- لهذا السبب نستخدم الجملة " إذا وإذا فقط " if and only if
- ونمزج الرمزين \rightarrow و \leftarrow

تكافؤ العبارة الشرطية المزدوجة

- العبارة $p \leftrightarrow q$ يمكن وصفها:
- "تحقق p ضروري لتحقيق q " والعكس صحيح
- "p is necessary for q"
- "تحقق p كاف لتحقيق q " والعكس صحيح
- "p is sufficient for q"
- "إذا تحققت p , إذاً تحققت q " و بالعكس
- "if p, then q"
- وتختصر إلى "p iff q" بدلاً من "if and only if"

مثال: العبارة الشرطية المزدوجة

- لتكن p : العبارة " يمكنك السفر على الرحلة الجوية "
- وتكن q : العبارة " عليك شراء تذكرة السفر "
- فتكون العبارة $p \leftrightarrow q$:
- " يمكنك السفر على الرحلة الجوية إذا وفقط إذا اشتريت تذكرة السفر "
- هذه العبارة صحيحة إذا p و q كلاهما صح أو كلاهما خطأ
- و هذه العبارة خاطئة إذا p و q لديهما قيمتين متناقضتين

لغة المنطق الرياضي مقابل المنطق الطبيعي

- العبارة $p \leftrightarrow q$:
- "يمكنك السفر على الرحلة الجوية إذا وفقط إذا اشتريت تذكرة السفر"
- في الواقع الطبيعي: يمكنك أن تحصل على تذكرة مجانية, فتسافر على الرحلة!
- أو قد تشتري التذكرة وتفوتك الرحلة أو تتمتع من السفر!
- معنى الشرط المزدوج غالباً لا يكون ظاهراً explicit في اللغة الطبيعية
- نحن نتكلم عن لغة منطق رياضي

لغة المنطق الرياضي مقابل المنطق الطبيعي

- مثلاً، العبارة باللغة العربية
"إذا أنهيت غذاءك، عندها يمكنك تناول الفاكهة"
المعنى المقصود هو "يمكنك تناول الفاكهة إذا وفقط إذا أنهيت غذاءك"
كما يمكن أن تكتب "يمكنك تناول الفاكهة فقط إذا أنهيت غذاءك"
منطقياً هذه الجمل متكافئة.
- مع أن الأولى لها شكل $p \rightarrow q$
- والثانية لها شكل $p \leftrightarrow q$
- والثالثة لها شكل $p \leftarrow q$

لغة المنطق الرياضي مقابل المنطق الطبيعي

- بسبب عدم الدقة في تعبيرات اللغة الطبيعية ووجود معان ضمنية في العبارات,
- ولأنه في الرياضيات والمنطق دائماً نحتاج لدقة **precision** وتحديد المعنى:
- يجب التمييز بين عبارة الشرط \rightarrow والشرط المزدوج \leftrightarrow

نهاية المحاضرة,
موضوعنا التالي:

المنطق Logic

... يتبع