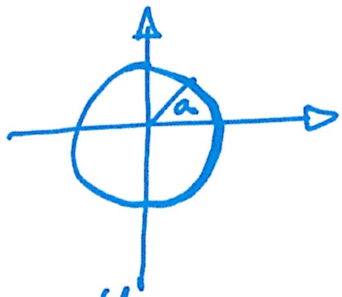
Tenta 161220-6

$\Delta\phi = -\rho$ innuti ytan S (2-dim)

med $\phi(\rho=a)=0$



Visa att

$$G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'|}{|\vec{\rho}-(\frac{a}{\rho'})^2\vec{\rho}\,'|} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho'}{a} \quad (1)$$

är Greensfunktionen.

<u>Lösning</u> Följande skall gälla:

i) Funktionen (1) är en lösning till $\Delta G = -\delta^{(2)}(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')$ inne i området (dvs Poissons ekv för en punktkälla med styrka 1 i pkten $\vec{\rho}\,'$)

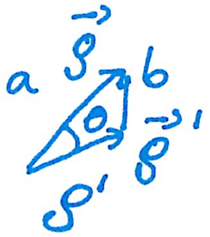
ii) Funktionen (1) uppfyller RV: $G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,')|_{\rho=a}=0$ $\forall\ \vec{\rho}\,'$

Vi börjar med (ii).

Vi vill visa att

$$\frac{|\vec{\varrho}-\vec{\varrho}\,'|}{|\vec{\varrho}-\left(\frac{a}{\varrho'}\right)^2\vec{\varrho}\,'|}=\frac{\varrho'}{a}$$

då $\varrho = a$.



$$|\vec{\varrho}-\vec{\varrho}\,'| = b$$

$$|\vec{\varrho}-\left(\frac{a}{\varrho'}\right)^2\vec{\varrho}\,'| = c$$

$$b^2 = a^2 + (\varrho')^2 - 2a\varrho'\cos\theta$$

$$c^2 = a^2 + \frac{a^4}{\varrho'^2} - 2a\frac{a^2}{\varrho'}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{(\varrho')^2\left[\left(\frac{a}{\varrho'}\right)^2 + 1 - 2\frac{a}{\varrho'}\cos\theta\right]}{a^2\left[1+\left(\frac{a}{\varrho'}\right)^2 - 2\frac{a}{\varrho'}\cos\theta\right]}$$

$$= \left(\frac{\varrho'}{a}\right)^2 \qquad \square$$

Vad gäller villkor (i) så konstaterar vi att

$$G = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'|}{C} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\vec{\rho}-(\frac{a}{\rho'})^2\vec{\rho}\,'|}{D}$$

Linjekällan i 3-dim eller punktkällan i 2-dim } samma

m. styrka $q = +1$ genom $\vec{\rho} = \vec{\rho}\,'$ (dvs innanför ytan)

$q = -1$ genom $\vec{\rho} = \left(\frac{a}{\rho'}\right)^2 \vec{\rho}\,'$

dvs $\rho = \frac{a^2}{\rho'} = \underbrace{\left(\frac{a}{\rho'}\right)}_{>1} a > a$

dvs utanför ytan

(Se formelsamling)