Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 eller FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 19 augusti 2019 klockan 14.00-18.00 i SB.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM234 eller FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Skriv din kurskod på tentamensomslaget (FFM234 gäller för alla studenter från läsåret 17/18).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där fältet $\vec{F} = F_0 \frac{x}{b} \hat{y}$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\sin t, \cos t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

(b) Beräkna vektorn $\varepsilon_{ijk}M_{ij}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

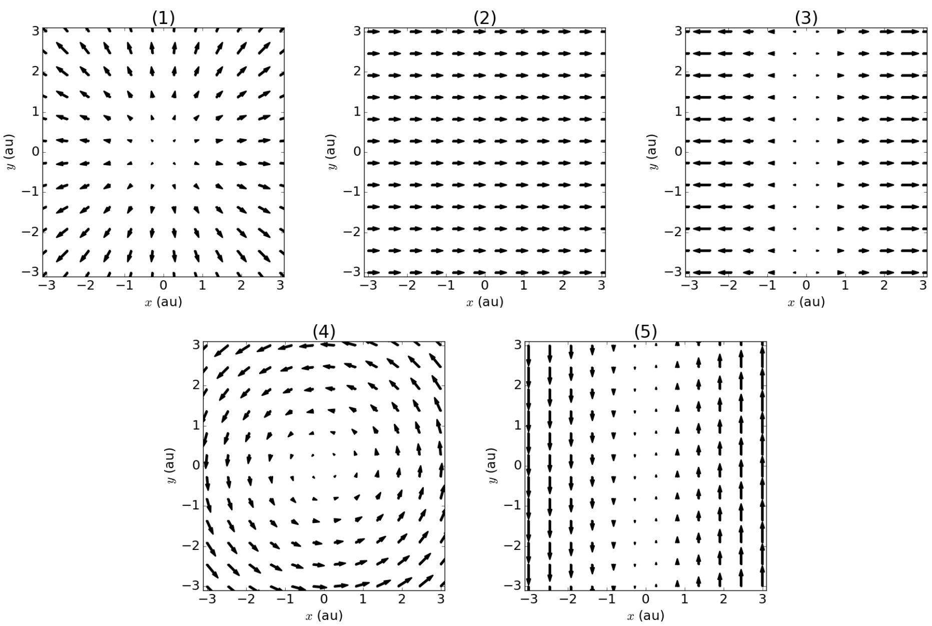
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Betrakta skalärfältet $\phi(\vec{r}) = \cos\theta/r^2$. För vilken enhetsvektor $\hat{n}$ är riktningsderivatan av detta fält i riktningen $\hat{n}$ i punkten $(x, y, z) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ maximal och positiv? (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. (a) Vad blir följande derivator på vektorfältet $\vec{A} = r\hat{r}$:
(i) $\nabla \cdot \vec{A}$; (ii) $\nabla \times \vec{A}$; (iii) $\Delta\vec{A}$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$; (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$? *(5 poäng)*

(b) Para ihop de fem tvådimensionella vektorfälten: (i) $\vec{A} = \hat{x}$; (ii) $\vec{A} = x\hat{x}$; (iii) $\vec{A} = x\hat{y}$; (iv) $\vec{A} = r\hat{r}$; (v) $\vec{A} = x\hat{y} - y\hat{x}$; med visualiseringarna i figurerna (1)–(5). Ange för samtliga huruvida *divergensen* och *rotationen* (z-komponenten) är noll, positiv eller negativ i det uppritade området. *(5 poäng)*



3. Ett vektorfält $\vec{F}$ har potentialen

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt positivt? Beräkna detta maximala positiva flöde. *(10 poäng)*

4. Betrakta värmeledning genom en glasruta med materialkonstanterna λ (värmeledningsförmågan), c (värmekapacitiviten) och ρ (densitet). Glasrutans bredd och höjd är betydligt större än dess tjocklek d. Härled den stationära temperaturfördelningen då

$$T(x, t = 0) = T_0 \frac{x(d - x)}{d^2}$$

där T_0 är en konstant (enhet: K). Glasrutan är perfekt isolerad så att ingen värme passerar genom glasets begränsningsytor vid $x = 0$ och $x = d$.

(10 poäng)

5. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ i $\mathbf{R}^3$. Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. *(10 poäng)*
Ledning: Dipolmomentet μ har enheten (laddning $\times$ längd).

6. Antag att man på ytan S av en sfär med radien a och centrum i origo mäter upp det elektriska fältet $\vec{E}$ och finner att

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{x}{a^2}\hat{x} + \frac{y}{b^2}\hat{y} + \frac{z}{c^2}\hat{z} \right),$$

där ϵ_0 ρ_0, b och c är konstanter. Visa att denna information tillsammans med en av Maxwells ekvationer är tillräcklig för att bestämma den totala laddningen Q inuti sfären. Beräkna Q.

(10 poäng)