Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 och FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 23 oktober 2017 klockan 14.00-18.00 i Maskinsalarna.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är ytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z\hat{z}$ och S är enhetssfären i övre halvplanet ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$) och normalvektorn till S har en negativ z-komponent?

   (b) Vad blir integralen $\int_0^\pi \delta(2x - \pi/2)\sin(x)dx$?

   (c) Vad blir den stationära temperaturfördelningen inuti en endimensionell stav med längden L och en konstant värmekälla s i hela staven (med enhet $[s] = \mathrm{Wm}^{-1}$), givet värmeledningsförmåga λ, homogena Dirichlet randvillkor samt $T(x, t = 0) = 0$?

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) $-\frac{2\pi}{3}$

   (b) $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$

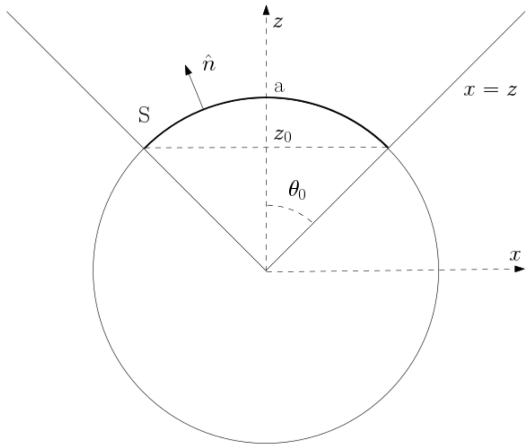
   (c) $T(x) = \frac{s}{2\lambda}x(L - x)$
   (notera att endim. $[\lambda] = WmK^{-1}$; kan ses som $\int \lambda_{3D} dS$.)

---

2. Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = \frac{kz}{a}\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2}$ och S är den del av sfären ($x^2 + y^2 + z^2 = a^2$) som ligger inom konområdet $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z > 0$ och normalvektorn till S är uppåtriktad. *(10 poäng)*

   Lösning:

   Ett snitt (xz-planet) av den aktuella ytan visas i figuren. Vi noterar att vinkeln $\theta_0 = \pi/4$ och att punkten $z_0 = a/\sqrt{2}$.



Vektorfältet skrivs enklast i cylindriska koordinater

$$\vec{F} = \frac{kz}{a}\frac{\hat{\rho}}{\rho},$$

vilket vi känner igen som fältet från en linjekälla längs z-axeln med z-beroende styrka $2\pi kz/a$.

Vi kan lösa uppgiften antingen genom direkt integrering eller genom att utnyttja Gauss sats. Med direkt integrering behöver man följande ingredienser:

- ytelementet: $d\vec{S} = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}$.
- Fältet längs ytan: $\vec{F}|_{r=a} = \frac{k(a\cos\theta)/a}{a\sin\theta}\hat{\rho} = \frac{k\cos\theta}{a\sin\theta}\hat{\rho}$.
- Ytintegralen ger svaret:
  $I = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \{\hat{r}\cdot\hat{\rho} = \sin\theta\} = 2\pi ka\int_0^{\theta_0}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{k\pi a}{2}$.

Med utnyttjande av Gauss sats får vi först sluta ytan med en bottenplatta vid $z = z_0$. Den inneslutna volymen blir då den del av klotet $r \leq a$ som ligger ovanför z_0. Ytintegralen genom den extra ytan ger inget bidrag eftersom dess normalriktning är vinkelrät mot fältet.

Sedan konstaterar vi att divergensen av fältet kan skrivas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{2\pi kz}{a}\delta^{(2)}(\rho\hat{\rho}),$$

så att volymsintegralen blir

$$I = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV = \frac{2\pi k}{a}\int_{a/\sqrt{2}}^{a} zdz = \frac{\pi ka}{2},$$

vilket överensstämmer med svaret vi fick ovan genom direkt integrering.

3. Det vektorfält som har den skalära potentialen $\phi = \alpha$ (där α är vinkeln i cylindriska koordinater) kan (utanför z-axeln) alternativt beskrivas med en vektorpotential $\vec{A}$.

   (a) Finn en sådan vektorpotential med villkoret att den bara har en ρ-komponent. *(6 poäng)*

   (b) Utnyttja sedan Gaugeinvariansen för att finna en annan vektorpotential som uppfyller $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 1$ (utanför z-axeln). *(4 poäng)*

Lösning:

- Vektorfältet blir $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\hat{\alpha}}{\rho}$ i cylindriska koordinater.
- En vektorpotential $\vec{A}$ skall ge ovanstående fält genom $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Vi får följande tre differentialekvationer

$$\frac{1}{\rho}\partial_\alpha A_z - \partial_z A_\alpha = 0,$$
$$\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z = -\frac{1}{\rho},$$
$$\frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho A_\alpha) - \partial_\alpha A_\rho\right] = 0.$$

  Vi försöker finna en lösning med det givna villkoret att komponenterna $A_\alpha = A_z = 0$. Den första ekvationen blir automatiskt uppfylld. Den tredje ekvationen ger att $A_\rho = A_\rho(\rho, z)$. Tillsammans med den andra ekvationen får vi då slutligen att $A_\rho = -\frac{z}{\rho} + f(\rho)$.
- Vi väljer lösningen med $f(\rho) = 0$ vilket ger ett svar till (a)-uppgiften

$$\vec{A} = -\frac{z}{\rho}\hat{\rho}.$$

- Med denna vektorpotential blir $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Men väljer vi istället $f(\rho) = \rho/2$, dvs vektorpotentialen

$$\vec{A} = \left(-\frac{z}{\rho} + \frac{\rho}{2}\right)\hat{\rho},$$

  så uppfyller vi (b)-uppgiftens villkor att $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 1$.
  Notera att det finns flera lösningar som uppfyller detta villkor. Man kan utnyttja Gaugeinvariansen och lägga till ett godtyckligt fält $\vec{\nabla}\Lambda$ som väljs så att divergensvillkoret uppfylls.

4. Tröghetstensorn för någon stel kropp i ett Cartesiskt koordinatsystem (xyz) ges av

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix},$$

där η är ett reellt tal och I_0 är en konstant med enheten (massa $\times$ längd^2). Ett roterat koordinatsystem $(x'y'z')$ ges av transformationen:

$$x' = z; \quad y' = y; \quad z' = -x.$$

Använd tensorers transformationsegenskaper för att visa vad tröghetstensorn blir i detta roterade koordinatsystem. *(10 poäng)*

Lösning:

Den givna koordinattransformationen kan skrivas med indexnotation $x'_i = L_{ij}x_j$. Elementen i transformationsmatrisen får vi genom att derivera $L_{ij} = \partial x'_i/\partial x_j$, vilket ger

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notera gärna att $\det(\mathbf{L}) = +1$, dvs det är fortfarande ett högersystem. Med tensorers transformationsegenskaper får vi att tröghetstensorn i det roterade koordinatsystemet är $I'_{ij} = L_{ik}L_{jl}I_{kl} = L_{ik}I_{kl}(L^t)_{lj}$, eller explicit som en matrismultiplikation

$$\begin{aligned}\mathbf{I}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\eta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+\eta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1+\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Svaret är rimligt eftersom den givna transformationen motsvarar en rotation 90° moturs runt y-axeln. Vi hamnar i ett nytt koordinatsystem som fortfarande sammanfaller med kroppens huvudtröghetsaxlar, men där två av axlarna har bytt plats jämfört med det ursprungliga systemet.

5. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ i $\mathbf{R}^3$. Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. *(10 poäng)*
Ledning: Dipolmomentet μ har enheten (laddning $\times$ längd).

Lösning:

Vi lägger punktdipolen i origo. En dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ motsvarar en laddning $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$ i punkten $(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$ och en laddning $-q = -\frac{\mu}{\varepsilon}$ i origo. Källtätheten kan skrivas

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r} - \varepsilon\hat{z}) - \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Alternativt kan vi lägga punktladdningarna i $z = \pm\varepsilon/2$. Det blir samma fält för $r/\varepsilon \gg 1$.

Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir (notera permeabiliteten från Maxwells första ekvation)

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r}.$$

Nu vill vi studera hur detta uttryck kan skrivas vid stora avstånd. Vi kan skriva $|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}| = \sqrt{\varrho^2 + (z - \varepsilon)^2}$, och om ε är litet $(\varepsilon/\varrho, \varepsilon/z \ll 1)$ blir detta $\sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$. Därför får vi

$$\frac{1}{|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}).$$

Här har vi använt Taylorutvecklingarna $\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ samt $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$.
Potentialen blir

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu\cos\theta}{4\pi r^2} \tag{1}$$

Mer generellt kan man skriva den elektrostatiska potentialen från en dipol $\vec{\mu}$:

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

I vårt fall var alltså $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ dipolmomentet (som alltså ges av produkten av laddningen $\frac{\mu}{\varepsilon}$ och separationsvektorn $\varepsilon\hat{z}$).

6. Betrakta det tvådimensionella problemet med två punktladdningar ($+q$ och $-q$) längs y-axeln på avståndet a från varandra. Det finns inga andra källor. Potentialen $\phi(x, y)$ uppfyller Poissons ekvation i $\mathbf{R}^2$. Ekvipotentialytan $\phi = 0$ ligger på linjen $y = 0$.

   Skissa de två ekvipotentialkurvorna $\phi = \pm\frac{q}{2\pi}\ln 2$ och ange specifikt vid vilka punkter som de skär y-axeln. *(10 poäng)*

   Lösning:

   Potentialen skall uppfylla $\Delta\phi = -\rho$ i $\mathbf{R}^2$ med laddningsfördelningen

$$\rho = q\delta^{(2)}(\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{y}) - q\delta^{(2)}(\vec{r} + \frac{a}{2}\hat{y}),$$

   där lägesvektorn ges av $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Laddningarna måste ligga symmetriskt runt $y = 0$ för att kunna få en ekvipotentialyta där. Lösningen är alltså potentialen från två stycken punktkällor i $\mathbf{R}^2$ (se formelsamling, eller identifiera situationen med den analoga potentialen från en linjekälla i tre dimensioner)

$$\phi(x, y) = -\frac{q}{2\pi}\ln\frac{|\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{y}|}{|\vec{r} + \frac{a}{2}\hat{y}|}.$$

   Vi inför den dimensionslösa storheten η som

$$\eta(x, y) \equiv \frac{|\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{y}|}{|\vec{r} + \frac{a}{2}\hat{y}|} = \sqrt{\frac{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2}},$$

   vilket hjälper oss att konstatera att lösningen uppfyller $\phi(x, y = 0) = 0$ eftersom $\eta(x, y = 0) = 1$.

   Vi söker nu ekvipotentialytorna $\phi = \pm\frac{q}{2\pi}\ln 2 \equiv \phi_\pm$. Vår situation är helt (anti-)symmetrisk under $y \mapsto -y$ så det räcker att explicit hitta den ena av dessa ytor (kurvor i två dimensioner). Vi fokuserar på ϕ_+ och vill alltså hitta kurvan som ger $\ln(\eta) = -\ln(2)$, eller $2 = 1/\eta$. Detta ger

$$4(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - ya) = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} + ya,$$

   vilket efter kvadratkomplettering ger en ekvation för en cirkel

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{6}a\right)^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Denna cirkel har centrum i $(0, 5a/6)$ och skär y-axeln vid följande två punkter ($x = 0$):

$$y - \frac{5}{6}a = \pm\frac{2a}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} 3a/2 \\ a/6 \end{cases}$$

Vi får precis motsvarande cirkel i det nedre halvplanet för ekvipotentialkurvan ϕ_-. Cirklarna bör skissas i lösningen.
