Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 eller FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 23 oktober 2017 klockan 14.00-18.00 i Maskinsalarna.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM234 eller FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Skriv din kurskod på tentamensomslaget (FFM234 gäller från läsåret 17/18, FFM232 gäller för äldre studenter).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är ytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z\hat{z}$ och S är enhetssfären i övre halvplanet ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$) och normalvektorn till S har en negativ z-komponent?

   (b) Vad blir integralen $\int_0^\pi \delta(2x - \pi/2) \sin(x) dx$?

(c) Vad blir den stationära temperaturfördelningen inuti en endimensionell stav med längden L och en konstant värmekälla s i hela staven (med enhet $[s] = \mathrm{Wm}^{-1}$), givet värmeledningsförmåga λ, homogena Dirichlet randvillkor samt $T(x, t = 0) = 0$?

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = \frac{kz}{a} \frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2}$ och S är den del av sfären ($x^2 + y^2 + z^2 = a^2$) som ligger inom konområdet $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z > 0$ och normalvektorn till S är uppåtriktad. *(10 poäng)*

3. Det vektorfält som har den skalära potentialen $\phi = \alpha$ (där α är vinkeln i cylindriska koordinater) kan (utanför z-axeln) alternativt beskrivas med en vektorpotential $\vec{A}$.

   (a) Finn en sådan vektorpotential med villkoret att den bara har en ρ-komponent. *(6 poäng)*

   (b) Utnyttja sedan Gaugeinvariansen för att finna en annan vektorpotential som uppfyller $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 1$ (utanför z-axeln). *(4 poäng)*

4. Tröghetstensorn för någon stel kropp i ett Cartesiskt koordinatsystem (xyz) ges av

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix},$$

   där η är ett reellt tal och I_0 är en konstant med enheten (massa $\times$ längd^2). Ett roterat koordinatsystem ($x'y'z'$) ges av transformationen:

$$x' = z; \quad y' = y; \quad z' = -x.$$

   Använd tensorers transformationsegenskaper för att visa vad tröghetstensorn blir i detta roterade koordinatsystem. *(10 poäng)*

5. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ i $\mathbf{R}^3$. Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. *(10 poäng)*
   Ledning: Dipolmomentet μ har enheten (laddning $\times$ längd).

6. Betrakta det tvådimensionella problemet med två punktladdningar ($+q$ och $-q$) längs y-axeln på avståndet a från varandra. Det finns inga andra källor. Potentialen $\phi(x, y)$ uppfyller Poissons ekvation i $\mathbf{R}^2$. Ekvipotentialytan $\phi = 0$ ligger på linjen $y = 0$.

   Skissa de två ekvipotentialkurvorna $\phi = \pm\frac{q}{2\pi} \ln 2$ och ange specifikt vid vilka punkter som de skär y-axeln. *(10 poäng)*