Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 eller FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 20 augusti 2018 klockan 14.00-18.00, Hörsalsvägen 5.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM234 eller FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Skriv din kurskod på tentamensomslaget (FFM234 gäller från läsåret 17/18, FFM232 gäller för äldre studenter).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där fältet $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2 + y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\sin t, \cos t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

(b) Beräkna $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Ange för vilken enhetsvektor $\hat{n}$ som riktningsderivatan i riktningen $\hat{n}$ av skalärfältet $\phi(\vec{r}) = \cos\theta/r^2$ i punkten $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ är maximal och positiv. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Betrakta ett kraftfält

$$\vec{F} = (y^2 + 5)\hat{x} + (2xy - 8)\hat{y}.$$

I xy-planet märker vi ut en kvadrat med hörnen $O : (0, 0)$, $A : (1, 0)$, $B : (1, 1)$, $C : (0, 1)$. Visa att kraftfältet kan beskrivas med en skalärpotential, och ange en sådan potential explicit. Beräkna sedan arbetet som utförs av kraftfältet vid en förflyttning längs tre av kvadratens sidor $OABC$. *(10 poäng)*

3. Visa att gränsvärdet $\lim_{\varepsilon\to 0^+}$ av distributionen

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp\left(-x^2/\varepsilon^2\right)}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

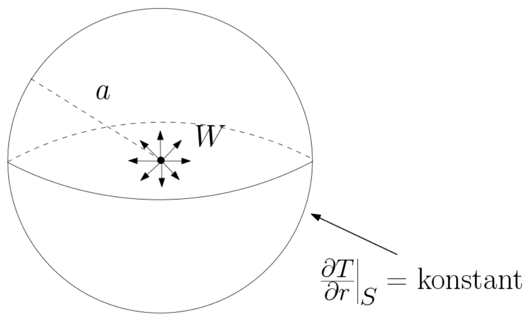
uppfyller de definierande egenskaperna för en endimensionell deltafunktion. *(10 poäng)*

4. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ i $\mathbf{R}^3$. Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. *(10 poäng)*
Ledning: Dipolmomentet μ har enheten (laddning $\times$ längd). *(10 poäng)*

5. Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien a hålls vid den elektriska potentialen $\phi\,(\rho = a, \varphi, z) = \phi_0 \sin 2\varphi$, där ρ, φ, z är cylindriska koordinater. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissera ekvipotentialytor och fältlinjer. *(10 poäng)*

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt W. Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie a. Vid ytan S gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_S = \text{konstant.}$$



Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant $T(r < a) = 0$ vid $t = 0$ och att materialets värmekonduktivitet är λ (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen).