Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 4 januari 2016 klockan 08.30-12.30 i Maskinsalarna.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. (a) $T(r) = \frac{s_0}{6\lambda}\left(a^2 - r^2\right) + T_0$.
   (b) $\mathrm{Tr}(\mathbf{P}) = M_{ik}N_{ki}$.
   (c) $a = \frac{2}{\pi\varepsilon}$.

2. Vi sätter $\Phi = C\Phi_0$ med $C \leq 0$. Detta ger ekvationen
$$\frac{1-C}{Ca^2}x^2 + \frac{1-C}{Ca^2}y^2 + \frac{1}{Ca^2}z^2 = 1.$$
   Det finns tre olika fall:
   (a) $0 \leq C < 1$
   Alla koefficienter är positiva och ekvationen beskriver en ellips med halvaxlarna $\left(\frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{1-C}}, \frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{1-C}}, a\sqrt{C}\right)$
   (b) $C = 1$
   Ett specialfall där ekvationen ger att $z^2 = a^2$, dvs xy-planen med $z = \pm a$.
   (c) $C > 1$
   Vi skriver ekvationen som $\frac{C-1}{Ca^2}x^2 + \frac{C-1}{Ca^2}y^2 - \frac{1}{Ca^2}z^2 = -1$, vilket är ekvationen för en tvåmantlad hyperboloid med z-axeln som symmetriaxel och med halvaxlarna $\left(\frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{C-1}}, \frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{C-1}}, a\sqrt{C}\right)$. Genomskärningar av denna yta kan med fördel skissas för några olika värden på z.

3. Flödet kan vi skriva
$$\Phi(S) = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = -\int_V \Delta\phi dV,$$
   där vi har använt oss av Gauss sats ($S = \delta V$). Potentialen skrivs enkelt i sfäriska koordinater $\phi = r^4 - 3r^2$ och Laplace-operatorn ger $-\Delta\phi = 18-20r^2$. Denna funktion utgör alltså integranden för volymsintegralen och är positiv om $r < 3/\sqrt{10}$. Störst flöde fås alltså om vi integrerar över ytan på en sfär med radien $r = 3/\sqrt{10}$. Det maximala, totala flödet blir
$$\int d\Omega \int_0^{3/\sqrt{10}} (18 - 20r^2)r^2 dr = 4\pi\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{54}{25}.$$

4. Se t.ex. avsnitt 2.2 i kompendiet

   (a) $d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{e}_i du_i$.

   (b) Betrakta ett skalärt fält f. Om vi förflyttar oss en sträcka $d\vec{r}$ så förändras f med $df = \nabla f \cdot d\vec{r}$. Förflyttningen kan vi i de nya koordinaterna skriva som

   $$d\vec{r} = h_1\hat{e}_1 du_1 + h_2\hat{e}_2 du_2 + h_3\hat{e}_3 du_3.$$

   Om vi skriver f som en funktion av u_1, u_2 och u_3 får vi

   $$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \\ &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} h_1 du_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} h_2 du_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} h_3 du_3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{e}_3 \right) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

   Då kan vi identifiera uttrycket inom parentesen som gradienten i de nya koordinaterna u_1, u_2, u_3

   $$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{e}_3.$$

   (c) Skalärfältet kan skrivas $\phi = 1/r$ och gradienten blir

   $$\nabla\phi = \hat{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \ldots = -\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

5. Kurvan C är en ellips med centrum i origo och halvaxlarna a och $2a$. Enligt högerhandsregeln väljer vi $\hat{z}$ som normal till ellipsskivan. Fältet $\vec{F}$ är singulärt på z-axeln. Singulariteten sitter helt i $\vec{F}_1 = F_0 \frac{a}{\varrho}\hat{\varphi}$, som vi känner igen som en virveltråd på z-axeln med styrkan $2\pi F_0 a$. Vi kallar resten av fältet $\vec{F}_2$. Dess rotation är

   $$\nabla \times \vec{F}_2 = \frac{F_0}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varrho\sin 2\varphi}{2a} & -\frac{\varrho^2\sin^2\varphi}{a} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{a}\hat{z}.$$

   Eftersom C omsluter z-axeln en gång i positiv led, ger $\vec{F}_1$ bidraget $2\pi F_0 a$. Bidraget från $\vec{F}_2$ fås med hjälp av Stokes sats som $-F_0/a$ gånger arean av ellipsen, som är $2\pi a^2$. Värdet på den totala integralen är $2\pi F_0 a - \frac{F_0}{a} 2\pi a^2 = 0$.

6.
- Vektorfältet är noll inuti metallen, vilket innebär att potentialen är konstant. Vi väljer att sätta $\phi = 0$, vilket gör att ytan ($z = 0$) blir en ekvipotentialyta med $\phi = 0$.
- Detta Dirichlet randvillkor kan uppfyllas genom att införa en spegelladdning $-q$ i punkten $-a\hat{z}$. Den elektriska potentialen (för $z > 0$) ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + a\hat{z}|}.$$

- Det elektriska fältet ges av

$$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r} - a\hat{z}}{|\vec{r} - a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + a\hat{z}}{|\vec{r} + a\hat{z}|^3}\right].$$

- Vid ytan är $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ och $|\vec{r} - a\hat{z}| = |\vec{r} + a\hat{z}| = \sqrt{a^2 + \rho^2}$. Därför blir vektorfältet vid ytan $\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2a\hat{z}}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$.
- Ytladdningen motsvaras av en diskontinuitet i fältet

$$\sigma = \epsilon_0\hat{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-).$$

  Här är $\hat{n} = \hat{z}$ och $\vec{E}_- = 0$ vilket ger $\sigma = \frac{-qa}{2\pi(\rho^2+a^2)^{3/2}}$.
- Den totala inducerade laddningen fås genom att integrera över ytan

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\infty} \sigma\rho d\rho = \ldots = -q,$$

  vilket man egentligen kan inse från det givna randvillkoret.