# Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

| | |
|---|---|
| **Tid och plats:** | Måndagen den 4 januari 2016 klockan 08.30-12.30 i Maskinsalarna. |
| **Hjälpmedel**: | Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling. |
| **Examinator**: | Christian Forssén (031–772 3261). |
| **Jourhavande lärare**: | Christian Forssén (031–772 3261). |

**FFM232:** Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. Till detta tillkommer eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

**Rättningsprinciper:** Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

*Lycka till!*

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Beräkna den stationära temperaturfördelningen inuti en sfär med radie $a$. Inuti sfären finns en homogen värmekälla (källtäthet $s_0$), materialet har värmeledningsförmåga $\lambda$ och sfärens yta hålls vid en konstant temperatur $T_0$.

(b) Använd indexnotation för att ange ett uttryck för spåret av matrisen $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ i termer av matriselement hos matriserna $\mathbf{M}$ och $\mathbf{N}$. (Ledning: spåret av en matris är summan av dess diagonalelement).

(c) Bestäm konstanten $a$ så att funktionen

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} a\cos^2(x/\varepsilon), & |x| \leq \pi\varepsilon/2 \\ 0, & |x| > \pi\varepsilon/2 \end{cases}$$

närmar sig en deltafunktion $\delta(x)$ då $\varepsilon \to 0^+$ ($a$ kan eventuellt bero på $\varepsilon$).

*(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

2. Bestäm nivåytorna till skalärfältet

$$\Phi = \Phi_0 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + a^2},$$

med $a > 0$ och $\Phi_0 > 0$. *(10 poäng)*

3. Ett vektorfält $\vec{F}$ har potentialen

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Genom vilken sluten yta $S$ är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet. *(10 poäng)*

4. Betrakta ett kroklinjigt koordinatsystem $\{u_i\}_{i=1}^3$. En möjlig och naturlig definition av normerade basvektorer är att ta normerade tangentvektorer till koordinatlinjerna

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i},$$

där $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|$ kallas för skalfaktorer.

(a) Teckna ett uttryck för förskjutningsvektorn $d\vec{r}$ i det kroklinjiga koordinatsystemet. *(3 poäng)*

(b) Härled sedan ett uttryck för gradienten av ett skalärfält i kroklinjiga koordinater. *(5 poäng)*

(c) Tillämpning: räkna ut gradientvektorn till skalärfältet $\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ i sfäriska koordinater. *(2 poäng)*

5. Beräkna integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där kurvan $C$ ges av $x^2 + \frac{y^2}{4} = a^2$ och $z = 0$, som genomlöps i positiv riktning, och fältet ges av

$$\vec{F} = F_0 \left[ \frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a} \hat{\varrho} + \left( \frac{a}{\varrho} - \frac{\varrho \sin^2 \varphi}{a} \right) \hat{\varphi} \right].$$

$F_0$ och $a$ är konstanter. *(10 poäng)*

6. En punktladdning $q$ befinner sig avståndet $a$ från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? (Fältet är noll inne i metallen.) *(10 poäng)*