FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Oct 1, 2018

Repetition: Singulära fält

Punktkälla i origo.

- Fältet i punkten $\vec{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r, \tag{1}$$

fås av potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r}, \tag{2}$$

eftersom $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$.

- Superposition ger potentialen i punkten $\vec{r}$ från en laddningsfördelning $\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}\,')\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$, där $G(\vec{r},\vec{r}\,') \equiv \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ kallas för Greensfunktionen i $\mathbb{R}^3$.

- Hur skall vi skriva källtätheten, $\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, för en punktkälla? Och hur skall vi hantera Gauss sats?

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{3}$$

Vi har att $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ för $r \neq 0$, men explicit uträkning ger HL $= q$ om den inneslutna volymen V innehåller origo.

7. Deltafunktioner

Kan vi approximera $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \rho(\vec{r})$, där laddningsfördelningen motsvarar en punktkälla, på något sätt? T.ex.

$$\rho_\varepsilon(\vec{r}) = \begin{cases} c & r < \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases} \tag{4}$$

Dvs, en “utsmetad” punktladdning där vi väljer c så att den totala laddningen är q, dvs

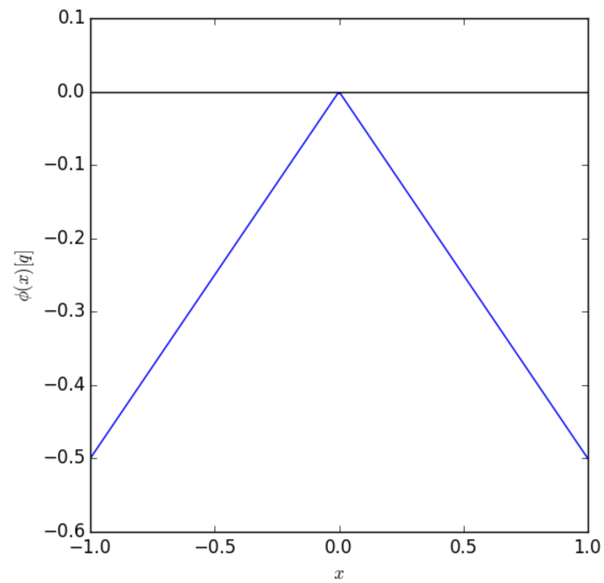
$$\rho_\varepsilon(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon^3/3} & r \leq \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases} \tag{5}$$

- Vad blir funktionen då $\varepsilon \to 0^+$?
- Det kan vi tyvärr inte definiera.
- $\rho(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \rho_\varepsilon(\vec{r})$ är inte en funktion; sekvensen av funktioner som erhålls genom att variera ε kallas för en distribution.

Deltafunktioner i en dimension

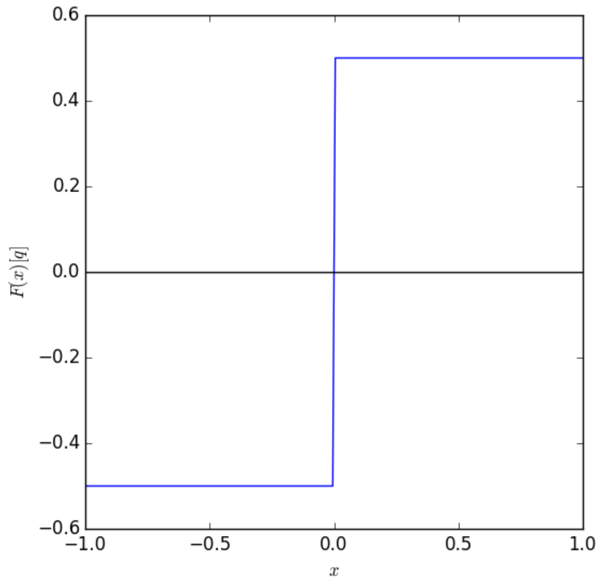
Punktkälla i $D = 1$. I en dimension kan vi definiera en punktkälla från potentialen

$$\phi(x) = -\frac{q}{2}\,|x| \tag{6}$$



vilket ger fältet

$$\vec{F}(x) = -\hat{x}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{q}{2}\hat{x} & x > 0 \\ -\frac{q}{2}\hat{x} & x < 0 \end{cases} \tag{7}$$



Vi kallar den enda komponenten av detta vektorfält för $F(x)$, dvs $F(x) = \frac{q}{2}\mathrm{sign}(x)$. Motsvarigheten till Gauss sats för detta endimensionella fält är

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}dx = F(b) - F(a) = \begin{cases} q, & \text{om } a < 0 < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \tag{8}$$

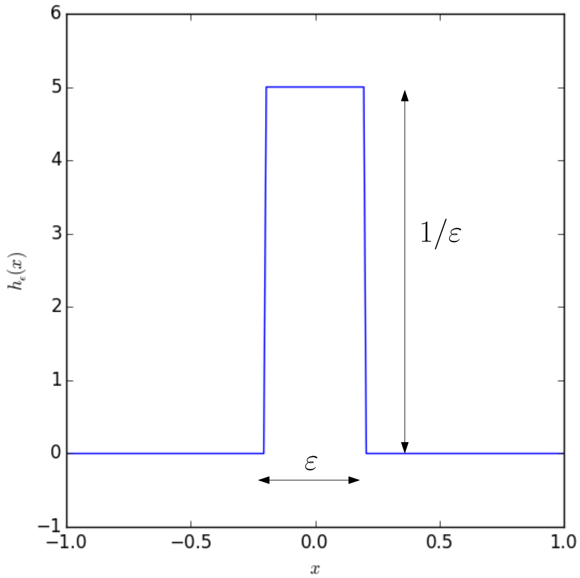
medan en naiv insättning av $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x = 0$ i VL hade gett noll.

Problemet är ju att $\frac{dF}{dx} = 0$ för $x \neq 0$, men "$\frac{dF}{dx} = \infty$" för $x = 0$. Vi kan uttrycka detta som en "funktion", $\frac{dF}{dx} = q\delta(x)$, där

- $\delta(x)$ är noll då $x \neq 0$, och
- integralen $\int_{a<0}^{b>0} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$.

Distributioner. Vi konstruerar denna "funktion" som en gräns $\varepsilon \to 0^+$ för distributionen

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & |x| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{9}$$



Kontrollera.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(x) = 0,$$

för $x \neq 0$. Dessutom har vi

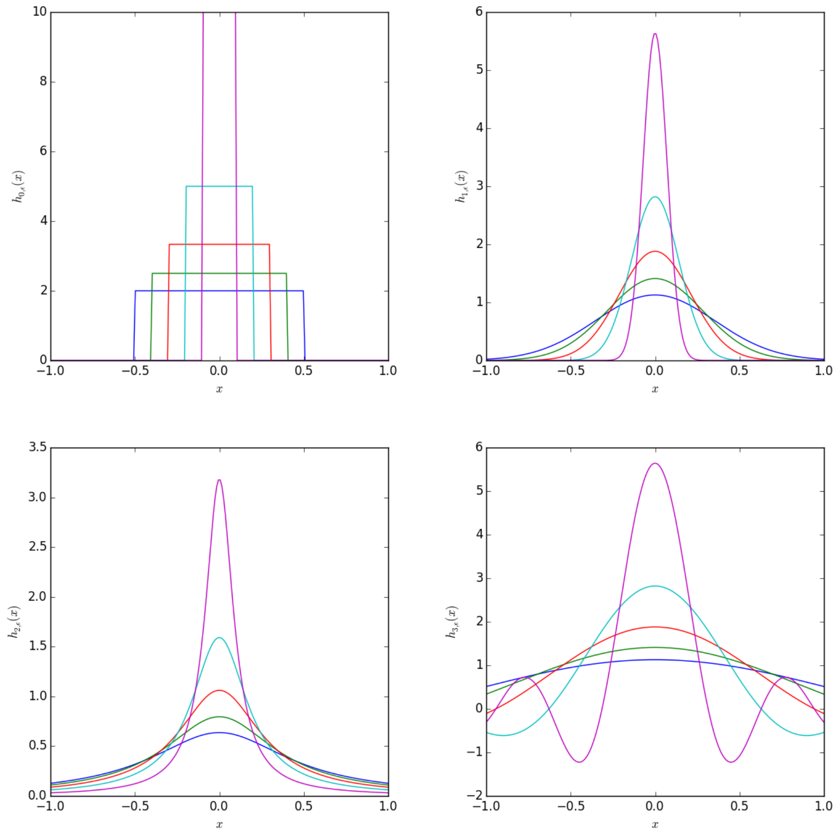
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a<0}^{b>0} h_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[x \right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 = 1.$$

Men det finns också andra möjligheter:

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}, \tag{10}$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \tag{11}$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}. \tag{12}$$



Samtliga dessa utgör en *sekvens av funktioner* (en *distribution*) från vilka vi kan definiera *Diracs deltafunktion*

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h_\varepsilon(x) \tag{13}$$

med de definierande egenskaperna

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \tag{14}$$

$$f(0) = \int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x, \tag{15}$$

där $f(x)$ är en välbeteende funktion och $[a, b]$ inkluderar 0.

Ett specialfall ($f(x) = 1$) av ovanstående är

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1 \tag{16}$$

Exempel: endimensionella deltafunktioner

Kontrollera att vi erhåller Diracs deltafunktion från sekvensen $h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}$.

Lösning: För $x \neq 0$ gäller

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon \exp(x^2/\varepsilon^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon \left[1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \ldots\right]} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(x^2 + \varepsilon^2 + \frac{x^4}{2\varepsilon^2} + \ldots\right)} \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \to 0^+ \end{aligned} \tag{17}$$

Vidare har vi integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\varepsilon^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi\varepsilon^2}$ (se tabell över definita integraler, eventuellt Beta 7.5-41). Detta ger

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sqrt{\pi\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}\varepsilon} = 1, \quad \text{för } \varepsilon > 0. \tag{18}$$

För att vara helt korrekta skall vi egentligen visa den mer allmänna egenskapen $\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$ för en väl beteende funktion $f(x)$. Eftersom ekv. (17) gäller, och $f(x)$ inte utgör något problem, kan vi utöka integrationsintervallet och istället studera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0). \tag{19}$$

Vi Taylorutvecklar, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \ldots$, och konstaterar att

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) h_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = f(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = f(0), \tag{20}$$

enligt vad vi visat ovan (18). Det återstår att visa att

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n h_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = 0, \tag{21}$$

för alla heltal $n > 0$. I vårt fall har vi en jämn funktion $h_\varepsilon(x)$ vilket gör att ekv. (21) är trivialt uppfyllt för udda n då integranden blir udda. För jämna $n = 2k$ finner vi (se t.ex. Beta 7.5-42)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi}\varepsilon\varepsilon^{2k} = 0. \quad (22)$$

Alltså har vi visat att

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a<0}^{b>0} f(x) \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \mathrm{d}x = f(0), \quad \text{för } \varepsilon > 0. \quad (23)$$

Egenskaper hos Diracs deltafunktion

- Jämn:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

- Skalning:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Kommentar

Visas enklast genom att göra substitutionen $y = xa$ i uttrycket

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x.$$

Var noga med tecknet på integrationsgränserna.

- Translation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

Kommentar

visas genom substitutionen $y = x - x_0$.

- Derivata

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x - x_0)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = -f'(x_0),$$

vilket kan betraktas som definitionen av derivatan $\delta'(x)$.

Kommentar

Visas genom partiell integration med någon av funktionssekvenserna som definierar deltafunktionen.

- Kan generaliseras till fler dimensioner. Vi skriver generellt $\delta^{(D)}(\vec{r})$, där vi skall tolka superskriptet som antalet dimensioner. T.ex. har vi för $D = 3$

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

I sfäriska koordinater blir detta

$$\iiint f(\vec{r})\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = f(\vec{r}_0).$$

Med vissa förbehåll (se t.ex. upp för punkten $\vec{r}_0 = 0$ i sfäriska koordinater) kan deltafunktionen i kroklinjiga koordinater skrivas

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1(\vec{r}_0)h_2(\vec{r}_0)h_3(\vec{r}_0)}\delta(u_1 - u_{1,0})\delta(u_2 - u_{2,0})\delta(u_3 - u_{3,0}).$$

Rita

Skissa gärna den "primitiva funktionen" till en deltafunktion i en dimension.

Deltafunktioner i högre dimensioner

Vi startar med punktkällan i origo: $\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r$, och den problematiska volymsintegralen

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\mathrm{d}V,$$

som borde bli lika med q om V omfattar origo. Detta kan vi åstadkomma genom att införa $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = q\delta^3(x) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ eftersom

$$\int_V \delta(x)\delta(y)\delta(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1.$$

Låt oss använda sfäriska koordinater. Hur kan vi uttrycka $\delta^{(3)}(\vec{r})$ så att följande integralegenskap uppfylls?

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r})r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 1,$$

om volymen V innesluter origo. Vi vill finna $\delta^{(3)}(\vec{r})$ som ett gränsvärde av en distribution $h_\varepsilon(\vec{r})$.

Starta från ett *regulariserat* fält

$$\vec{F}_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi(r^2+\varepsilon^2)}\hat{e}_r \tag{24}$$

som uppenbarligen går mot $\vec{F}$ då $\varepsilon \to 0^+$.

Divergensen för $r \neq 0$ blir ($\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \ldots$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2}\right)}_{=\frac{2r}{r^2+\varepsilon^2}-\frac{2rr^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}=\frac{2r\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}} = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{r(r^2+\varepsilon^2)^2} \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \to 0. \tag{25}$$

Utan styrkan q kallar vi denna sekvens av funktioner för $h_\varepsilon(\vec{r})$ och påstår att $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r})$. Utför integralen

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_\varepsilon \mathrm{d}V = \int_V q h_\varepsilon(\vec{r})\mathrm{d}V = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi}4\pi\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r\frac{1}{r(r^2+\varepsilon^2)^2} \tag{26}$$

$$= 2q\varepsilon^2\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2+\varepsilon^2}\right]_0^\infty = 2q\varepsilon^2\frac{1}{2\varepsilon^2} = q \tag{27}$$

Alltså har vi visat att

- $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\vec{r}) = 0$ för $r \neq 0$.
- $\int_{\mathbf{R}^3} h_\varepsilon(\vec{r})\mathrm{d}V = 1$

Alltså skriver vi källtätheten

$$\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = -\Delta\phi = q\delta^3(\vec{r}).$$

Linjekälla. Linjekällan $\vec{F} = \frac{k}{2\pi\rho}\hat{e}_\rho$ (motsvarar en punktkälla i $D=2$). Källtätheten kan skrivas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = k\delta^2(\vec{\rho})\,(= k\delta(x)\delta(y))\,.$$

Studera t.ex. normalytintegralen genom en cylinder med höjden L runt linjekällan

$$\int_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S+S_0+S_L}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\mathrm{d}V = \int_0^L \mathrm{d}z\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y k\delta(x)\delta(y) = \int_0^L \mathrm{d}z k = kL.$$

där vi först har slutit ytan genom att införa ytorna S_0 och S_L som är cirkelskivor vid botten och toppen och som har normalytintegralen noll eftersom fältet är vinkelrät mot normalen.

Virveltråd. Vi kan resonera på liknande sätt för en virveltråd $\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi$. Stokes sats säger att

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

där vi kan räkna ut VL $= J$ (t.ex. för en cirkel runt virveltråden). För detta fält är det rotationen som är problematisk. Notera att detta är en vektor.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = J\delta^2(\vec{\rho})\hat{z} = \vec{J}\delta(x)\delta(y).$$

Avancerat exempel: tillämpning av deltafunktionen; Fouriertransform och ortogonalitet.

Givet en funktion $f(x)$ definieras dess Fouriertransform som

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$$

Den inversa transformen ger frekvenssönderläggningen av $f(x)$, i detta fall motsvaras "frekvensen" av vågtalet k:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

(normeringen har valts för att åstadkomma symmetri mellan de två uttrycken).

Genom att sätta in det första uttrycket i det andra får man, under förutättning att man kan byta integrationsordning,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{-ikx'} f(x') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')} \right) f(x') \end{aligned}$$

Uttrycket inom parenteser i det sista ledet beror bara på $x - x'$, och om resultatet skall bli $f(x)$ måste det vara en deltafunktion lika med $2\pi\delta(x - x')$. Dvs

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')}. \tag{28}$$

Genom att byta vågtalet k och koordinaten x får man också $2\pi\delta(k - k') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x}$. Detta sätt att skriva deltafunktionen kunde vi också ha anat från ekv. (12) genom att byta

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{\pi x}.$$

Här kan man nämligen göra omskrivningen

$$\int_{-n}^{n} e^{ixk}dk=\left[\frac{e^{ixk}}{ix}\right]_{-n}^{n}=\left[\frac{\cos(xk)+i\sin(xk)}{ix}\right]_{-n}^{n}=2\frac{\sin(nx)}{x},\qquad (29)$$

så att vi får

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixk}dk,\qquad (30)$$

vilket är analogt med ekv. (28)

Funktionerna $e_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ kan alltså ses som ortogonala och "deltafunktionsnormerade" med ortogonalitetsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e_k(x)e^*_{k'}(x)=\delta(k-k')$$

Man kan bekräfta resultatet genom att göra beräkningen explicit för de regulariserade funktionerna $e_{k,\varepsilon}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx-\varepsilon^2x^2}$ och låta $\varepsilon\to 0$ (se uppgift 7.15).