Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Tisdagen den 7 januari 2020 klockan 08.30-12.30, Johanneberg.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(-2x)\,(x^2 - x + 2)\,dx$

   (b) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Begränsningsytan vid $x = 0$ är värmeisolerad medan den vid $x = d$ hålls vid en konstant temperatur T_d. Det finns inga värmekällor inne i plattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i plattans inre.

   (c) Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där fältet ges av $\vec{F} = \hat{\varphi}/\rho$ och kurvan C parametriseras av $x = \cos(4\pi t)$, $y = \sin(4\pi t)$ och $z = t$ med kurvparametern $0 \leq t \leq 1$.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) Integralen kan skrivas $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(z) \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} + 2 \right) dz = 1$.

   (b) Randvillkoren $T'(0) = 0$ och $T(d) = T_d$ ger att stationärlösningen blir $T(x) = T_d$.

   (c) Fältet är en virveltråd längs z-axeln med styrkan $J = 2\pi$. Kurvan går två varv i positiv riktning runt virveltråden vilket gör att kurvintegralen blir 4π.

---

2. Låt S vara ytan $y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ vars normalvektor har icke-negativ z-komponent ($n_z \geq 0$). Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = x\hat{x} + x^2 z^2 \hat{y} + z\hat{z}$. *(10 poäng)*

   Lösning:

   - Ytan är en halv cylinder (endast övre halvplanet) med radie $\rho = 1$ och z-axeln som symmetriaxel.
   - Vi använder Gauss sats och stänger volymen med de annars öppna begränsningsytorna som är halvcirklar vid $x = \pm 1$ ($S_{x=\pm 1}$) samt en rektangel vid $z = 0$ ($S_{z=0}$).
   - Divergensen blir $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2$ vilket gör att volymsintegralen $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 2\frac{\pi}{2} 2 = 2\pi$, där $\partial V = S + S_{x=+1} + S_{x=-1} + S_{z=0}$.
   - Vi noterar att $\vec{F} \perp \hat{z}$ vid $z = 0$ så att $\int_{S_{z=0}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$.

- Begränsningsytorna vid $x = \pm 1$ har normalriktningar $\pm\hat{x}$ vilket sammanfaller med vektorfältets x-komponent på dessa ytor så att integralerna blir $\int_{S_{x=+1}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{x=-1}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pi/2$.
- Sammantaget blir den sökta integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.

---

3. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}.$$

(10 poäng)

Lösning:

Kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\jmath},$$

härleds förslagsvis med hjälp av Gauss sats (se avsnitt 4.2 i kompendiet med den konserverade storheten *laddning* istället för *massa*).

Från Amperes lag (utan tidsberoende) har vi

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Med ytterligare en term (förskjutningsströmmen) i Amperes lag

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath},$$

stämmer kontinuitetsekvationen vilket man ser efter insättning.

4. Använd indexnotation för att visa följande:

(a) om T_{ij} är en tensor så är T_{ii} en skalär.

(b) δ_{ij} är en invariant tensor.

(10 poäng)

Lösning:

(a) Transformationen av tensorn T_{ij} ges av $T'_{ij} = L_{ik}L_{jl}T_{kl}$. Detta betyder att dess spår, T_{ii}, är en skalär eftersom den är invariant under koordinattransformation: $T'_{ii} = L_{ik}L_{il}T_{kl} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{kk}$, där vi har utnyttjat ortonormaliteten hos transfomationsmatrisen $\mathbf{L}$.

(b) Vi betraktar koordinattransformationen $\delta'_{ij} = L_{ik}L_{jl}\delta_{kl} = L_{ik}L_{jk} = \delta_{ij}$, där vi återigen har utnyttjat ortonormaliteten hos transfomationsmatrisen $\mathbf{L}$. Kroneckers delta är därför en invariant tensor.

---

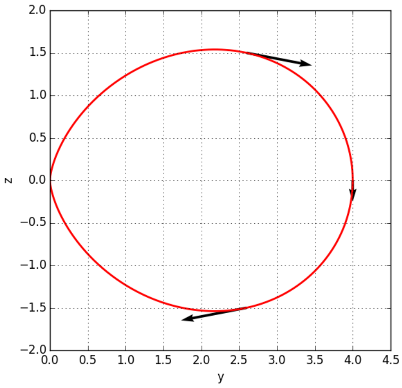
5. Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$, där μ är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r,\theta,\varphi) = (2,\pi/4,\pi/2)$. Rita också denna fältlinje i rummet tillsammans med xyz-axlarna och indikera riktningen på vektorfältet vid några punkter längs fältlinjen. *(10 poäng)*

Lösning:

Fältlinjer bestäms ur sambandet $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E}$. Här väljer vi $C = 4\pi/\mu$ och vi använder sfäriska koordinater så att $\mathrm{d}\vec{r} = \hat{r}\mathrm{d}r + r\hat{\theta}\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\hat{\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

I detta fall får vi den separabla differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2r}{\tan\theta}$ med lösningen $r = A\sin^2\theta$. Integrationskonstanten bestäms från den givna punkten till $A = 4$.

Detta är fältet från en dipol. Just denna fältlinje ligger i zy-planet $(x = 0)$ med start och slut i origo. I punkten $\theta = \pi/2$, dvs $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ pekar vektorfältet i riktningen $\hat{\theta} = -\hat{z}$. Se figur.



---

6. Bestäm p och ℓ så att

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin^\ell \theta \cos(2\varphi),$$

är en icke-singulär lösning till Laplaces ekvation i området $r < a$.

(10 poäng)

Lösning:

Laplaces ekvation $\Delta\phi$ skall gälla i hela området. Vi behöver inte inkludera den konstanta faktorn ϕ_0/a^p nedan.

Vi skriver Laplaces ekvation i sfäriska koordinater

$$-\frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r\right) r^p \sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi) = r^{p-2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right]\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi).$$

Vinkelberoendet i VL är $\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi)$ vilket betyder att det måste vara detsamma i HL för att likheten skall gälla överallt. Detta betyder i sin tur att fältets vinkelberoende måste vara en egenfunktion till operatorn i hakparantesen HL.

Vi utför derivatorna i HL och finner att

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right]\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi) &= \ldots \\ &= \left[\frac{\ell^2-4}{\sin^2\theta} - \ell(\ell+1)\right]\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi).\end{aligned}$$

Vi har alltså en egenfunktion, med egenvärde $-\ell(\ell+1)$,om $\ell^2 - 4 = 0$, dvs $\ell = \pm 2$. En negativ exponent skulle dock göra fältet singulärt längs z-axeln (där $\theta = 0, \pi$) så vi måste ha $\ell = +2$.

Vi kan nu förkorta bort vinkelberoendet från bägge leden. Återstår gör den radiella ekvationen

$$-\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right)r^p\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi) = -r^{p-2}\ell(\ell+1),$$

vilket leder till att $p(p+1) = \ell(\ell+1) = \{\ell = 2\} = 6$. Av de två lösningarna, $p = 2$ och $p = -3$, ger enbart den förra ett icke-singulärt fält.

Följande icke-singulära skalärfält är därmed en lösning till Laplaces ekvation inuti $r < a$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin^2\theta\cos(2\varphi).$$
