Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 och FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 20 augusti 2018 klockan 14.00-18.00, Hörsalsvägen 5.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där fältet $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2 + y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\sin t, \cos t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

   (b) Beräkna $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

   $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Ange för vilken enhetsvektor $\hat{n}$ som riktningsderivatan i riktningen $\hat{n}$ av skalärfältet $\phi(\vec{r}) = \cos\theta/r^2$ i punkten $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ är maximal och positiv. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga.)

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) $2\pi F_0 a$

   (b) $-a^2 - c^2$

   (c) $-\hat{z}$ $(= -\hat{r})$

---

2. Betrakta ett kraftfält

   $$\vec{F} = (y^2 + 5)\hat{x} + (2xy - 8)\hat{y}.$$

   I xy-planet märker vi ut en kvadrat med hörnen $O : (0, 0)$, $A : (1, 0)$, $B : (1, 1)$, $C : (0, 1)$. Visa att kraftfältet kan beskrivas med en skalärpotential, och ange en sådan potential explicit. Beräkna sedan arbetet som utförs av kraftfältet vid en förflyttning längs tre av kvadratens sidor $OABC$. *(10 poäng)*

Lösning:

Det visas enkelt att kraftfältet är virvelfritt $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, vilket betyder att fältet är konservativt. I detta fall existerar det skalärpotentialer ϕ sådana att $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, dvs

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -(y^2 + 5) \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = -xy^2 - 5x + f_1(y),$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -(2xy - 8) \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = -xy^2 + 8y + f_2(x),$$

där $f_1(y)$ och $f_2(x)$ är godtyckliga funktioner. För att få ett specikt svar väljer vi $f_1(y) = 8y$ och $f_2(x) = -5x$ så att

$$\phi(x,y) = -xy^2 - 5x + 8y.$$

För att beräkna arbetet W vid förflyttningen $OABC$ kan vi utnyttja att detta är ett konservativt kraftfält så att arbetet inte beror på vägen utan enbart på ändpunkterna

$$W = \phi\big|_O - \phi\big|_C = \phi(0,0) - \phi(0,1) = -8.$$

Givetvis får vi samma resultat om vi räknar ut arbetet explicit via vägintegralen $W = \int_{OABC} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

---

3. Visa att gränsvärdet $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ av distributionen

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp\left(-x^2/\varepsilon^2\right)}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

uppfyller de definierande egenskaperna för en endimensionell deltafunktion. *(10 poäng)*

Lösning:

Visa först att

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon \exp(x^2/\varepsilon^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon \left[1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \ldots\right]}$$
$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(x^2 + \varepsilon^2 + \frac{x^4}{2\varepsilon^2} + \ldots\right)} \to 0 \quad \text{för } x \neq 0 \text{ då } \varepsilon \to 0^+ \qquad (1)$$

Vidare har vi integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\varepsilon^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\varepsilon^2}$ (se t.ex. Mathematics Handbook for Science and Engineering [Beta] 7.5-41). Detta ger

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{\pi\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}\varepsilon} = 1, \tag{2}$$

för $\varepsilon > 0$. För att vara helt korrekta skall vi egentligen visa den mer allmänna egenskapen $\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$ för en väl beteende funktion $f(x)$. Eftersom ekv. (1) gäller, och $f(x)$ inte utgör något problem, kan vi utöka integrationsintervallet och istället visa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0).$$

Vi Taylorutvecklar, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \ldots$, och konstaterar att

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)h_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = f(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = f(0),$$

enligt vad vi visat ovan (2). Det återstår att visa att

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n h_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{3}$$

för alla heltal $n > 0$. I vårt fall har vi en jämn funktion $h_\varepsilon(x)$ vilket gör att ekv. (3) är trivialt uppfyllt för udda n då integranden blir udda. För jämna $n = 2k$ finner vi (se t.ex. Mathematics Handbook for Science and Engineering [Beta] 7.5-42)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}\frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}\varepsilon\varepsilon^{2k} = 0,$$

för $\varepsilon > 0$. Alltså har vi visat att

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a<0}^{b>0} f(x)\frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\mathrm{d}x = f(0), \quad \text{med } \varepsilon > 0.$$

---

4. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ i $\mathbf{R}^3$. Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. *(10 poäng)*
Ledning: Dipolmomentet μ har enheten (laddning$\times$längd). *(10 poäng)*

Lösning:

Vi lägger punktdipolen i origo. En dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ motsvarar en laddning $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$ i punkten $(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$ och en laddning $-q = -\frac{\mu}{\varepsilon}$ i origo. Källtätheten kan skrivas

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r} - \varepsilon\hat{z}) - \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Alternativt kan vi lägga punktladdningarna i $z = \pm\varepsilon/2$. Det blir samma fält för $r/\varepsilon \gg 1$.

Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir (notera permeabiliteten från Maxwells första ekvation)

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r}.$$

Nu vill vi studera hur detta uttryck kan skrivas vid stora avstånd. Vi kan skriva $|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}| = \sqrt{\varrho^2 + (z-\varepsilon)^2}$, och om ε är litet $(\varepsilon/\varrho, \varepsilon/z \ll 1)$ blir detta $\sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$. Därför får vi

$$\frac{1}{|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}).$$

Här har vi använt Taylorutvecklingarna $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ samt $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$.

Potentialen blir

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu\cos\theta}{4\pi r^2} \tag{4}$$

Mer generellt kan man skriva den elektrostatiska potentialen från en dipol $\vec{\mu}$:

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}.$$

I vårt fall var alltså $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ dipolmomentet (som alltså ges av produkten av laddningen $\frac{\mu}{\varepsilon}$ och separationsvektorn $\varepsilon\hat{z}$).

---

5. Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien a hålls vid den elektriska potentialen $\phi\,(\rho = a, \varphi, z) = \phi_0 \sin 2\varphi$, där ρ, φ, z är cylindriska koordinater. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissera ekvipotentialytor och fältlinjer.

(10 poäng)

Lösning:

Inget i problemställningen beror på z, så vi betraktar det som ett tvådimensionellt problem. Den elektrostatiska potentialen uppfyller Laplaces ekvation på cirkelskivan $\rho < a$. En rimlig ansats är $\phi(\rho, \varphi) = f(\rho) \sin 2\varphi$. Laplaces ekvation säger

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho f'(\rho)\right)' \sin 2\varphi - \frac{4}{\rho^2} f(\rho)\sin 2\varphi = 0.$$

En ansats $f(\rho) = A\rho^p$ ger $p^2 - 4 = 0$ eller $p = \pm 2$. Minustecknet ger ett singulärt fält. Randvillkoret ger $A = \phi_0/a^2$. Potentialen är

$$\phi = \phi_0 \frac{\rho^2}{a^2} \sin 2\varphi = 2\phi_0 \frac{xy}{a^2}.$$

Det elektriska fältet är

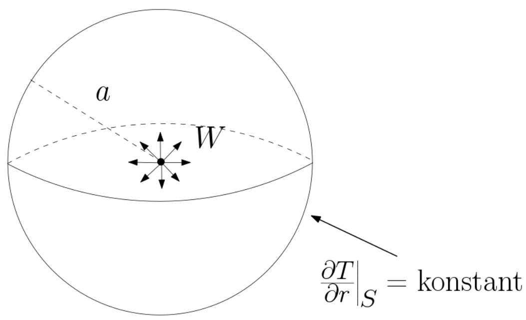
$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{2\phi_0\rho}{a^2}\left(\hat{\rho}\sin 2\varphi + \hat{\varphi}\cos 2\varphi\right) = -\frac{2\phi_0}{a^2}(y\hat{x} + x\hat{y}).$$

Ekvipotentialytorna är alltså hyperbler $xy =$ konstant. Fältlinjerna blir hyperbler $x^2 - y^2 =$ konstant.

---

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt W. Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie a. Vid ytan S gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_S = \text{konstant}.$$



Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant $T(r < a) = 0$ vid $t = 0$ och att materialets värmekonduktivitet är λ (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen).

Lösning:

- Vi har en punktkälla med värmeeffekten W och ett Neumann randvillkor vid ytan till sfären. Temperaturfältet skall alltså uppfylla Poissons ekvation inuti sfären

$$\Delta T = -s/\lambda, \quad \text{med } s = W\delta^3(\vec{r}).$$

- Lösningen är $T = T(r) = \frac{W/\lambda}{4\pi r} + T_1$, vilket man kan se genom att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i området $0 < r < a$ (dvs där källtermen är noll) och sedan identifiera punktkälltermen. Integrationskonstanten T_1 är fortfarande obestämd.
- Värmeströmmen är $\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\hat{r}\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{W}{4\pi r^2}\hat{r}$. Detta är bra eftersom vi därmed kan verifiera att

$$\int_{|\vec{r}|=a} \vec{q}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = W.$$

  Dvs värmeeffekt från källan är lika med värmeström per tidsenhet ut genom ytan.
- Den totala värmeenergin i sfären ges av integralen $H = \int_V c\rho T \mathrm{d}V$. För en konstant temperaturfördelning $T_0 = 0$ (som vid $t = 0$) blir detta $H_0 = c\rho T_0 \frac{4\pi a^3}{3} = 0$. För vår stationära lösning gäller

$$H = c\rho T_1 \frac{4\pi a^3}{3} + c\rho \underbrace{4\pi \int_0^a \frac{W}{4\pi\lambda} r \mathrm{d}r}_{=\frac{Wa^2}{2\lambda}}.$$

- Värmeenergin skall vara bevarad vilket ger T_1. Svaret blir

$$T(r) = \frac{W}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2a}\right).$$