Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Måndagen den 17 augusti 2020 klockan 14.00-18.00, på distans via zoom.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater av

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_r \hat{\mathbf{e}}_r + A_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

dvs vi vet att $A_\theta = 0$. För respektive deluppgift nedan, ge ett exempel på komponenter $(A_r,\, A_\varphi)$ som inte bägge är noll och som medför att

(a) Fältet är både konservativt och divergensfritt;

(b) Fältet är virvelfritt, men har en konstant källtäthet $\rho(\vec{r}) = 1$;

(c) Fältet är konservativt, men har överallt en nollskild virveltäthet;

utanför $r = 0$. Ange om fältet är singulärt någonstans och skissa fältlinjer för all tre fallen. *(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

Lösning:

Teckna uttryck för divergens och rotation i kroklinjiga koordinater. Fält med de önskade egenskaperna kan konstrueras med enbart $A_r \neq 0$. Exempelvis:

(a) $A_\varphi = 0$, $A_r = \frac{1}{r^2}$. Fältlinjerna pekar radiellt utåt och fältet är singulärt i $r = 0$.

(b) $A_\varphi = 0$, $A_r = \frac{r}{3}$. Fältlinjerna pekar radiellt utåt. Fältet är ej singulärt.

(c) Går ej eftersom eftersom konservativa fält har $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$.

---

2. Ett vektorfält $\vec{F}$ har potentialen

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{12}\left(\frac{y^4}{2} + x^4\right) - \frac{x^2}{2} & \text{om } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{om } |z| > 1 \end{cases}$$

Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt positivt? Beräkna detta maximala positiva flöde. *(10 poäng)*

Lösning:

- Använd Gauss sats för att visa att flödesintegralen kan skrivas som $\int_V (-\Delta\phi) dV$, där den sökta ytan är rand till volymen V.
- Integranden blir $1 - (x^2 + y^2/2)$, för $|z| \leq 1$, vilket betyder att flödesbidraget blir negativt utanför den elliptiska cylindern $x^2 + y^2/2 = 1$ (dvs källtätheten blir negativ).
- Flödet kommer inte att påverkas genom att förlänga den elliptiska cylindern i z-led bortanför $|z| > 1$ så vi väljer dessa ytor som topp och botten.
- Integralen blir $\sqrt{2}\pi$.

---

3. Betrakta följande vektorfält i cylindriska koordinater

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\rho^2 + 1}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho^2 \hat{\mathbf{e}}_\rho.$$

Beräkna storleken av linjeintegralen $\oint_\lambda \vec{A} \cdot d\vec{r}$ där λ är en ellips som ligger i xy-planet, med centrum i origo, storradie a längs y-axeln samt lillradie b längs x-axeln. I vilken riktning skall kurvan vara definierad för att integralen skall vara negativ? *(10 poäng)*

Lösning:

- Fältet kan skrivas som en summa av tre termer där den ena identifieras som en virveltråd med styrkan 2π i positiv z-led. För att få en negativ linjeintegral testar vi därmed att genomlöpa kurvan medurs (negativ z-led) vilket ger att denna term bidrar med -2π..
- Termen $\rho^2 \hat{\rho}$, kommer att ge noll bidrag pga symmetrin.
- Användande av Stokes sats, alternativt kurvparametrisering $\vec{r}(\varphi) = b \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + a \sin\varphi \hat{\mathbf{y}}$, ger den tredje termens bidrag till $-ab2\pi$.
- Med kurvan genomlöpt medurs (negativ z-led) får vi att $I = -2\pi(1 + ab)$.

---

4. Finn temperaturfältet $T(\vec{r})$ i ett sfäriskt skal ($R_1 \leq r \leq R_2$) i avsaknad av värmekällor. Temperaturen är konstant vid den inre randen $T(r = R_1) = T_1$ medan Newtons avkylningslag gäller vid den yttre randen. Det innebär att normalkomponenten av värmeströmmen är proportionell mot temperaturskillnaden $T(r = R_2) - T_2$, där T_2 är omgivningens temperatur. Kontrollera att värme flödar i den riktning som

man kan förvänta sig. Ledning: inför själv eventuella konstanter som behövs. *(10 poäng)*

Lösning:

- Avsaknad av värmekällor gör att vi skall lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$. Problemets symmetri gör att vi kan ansätta enbart radiellt beroende $T = T(r)$.
- Integrera Laplaces ekvation i sfäriska koordinater vilket ger lösningen $T(r) = c_1 + c_2 r^{-1}$ (och notera att vi inte har någon singularitet i vårt område).
- Värmeströmmen ges av $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda T'(r) \hat{\mathbf{e}}_r$.
- Det inre randvillkoret är ett Dirichlet-RV $T(r = R_1) = T_1$, medan det yttre är ett Neumann-RV:

  $$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \vec{q}\Big|_{r=R_2} = -\lambda T'(R_2) = -\alpha \left(T_2 - T(R_2)\right),$$

  där vi har infört en positiv konstant α och utformat villkoret så att värme strömmar från varmt till kallt.
- Randvillkoren ger slutligen integrationskonstanterna och vi finner att

  $$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\lambda/(\alpha R_2^2) + 1/R_1 - 1/R_2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right).$$

---

5. Visa följande vektoridentitet med indexnotation

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

(10 poäng)

Lösning:

- VL kan enligt kedjeregeln skrivas $\nabla_i (A_j B_j) = (\nabla_i A_j) B_j + A_j (\nabla_i B_j)$.
- I HL skriver vi kryssprodukterna med ε-tensorer och använder likheten $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})$.
- Detta ger slutligen sex termer: HL=$A_j \nabla_j B_i + B_j \nabla_j A_i + A_j \nabla_i B_j - A_j \nabla_j B_i + B_j \nabla_i B_j - B_j \nabla_j A_i = A_j \nabla_i B_j + B_j \nabla_i B_j$. VSV.

---

6. Betrakta Laplaces ekvation för skalärfältet $\phi(\vec{r})$ i området $r > a$, där a är en positiv konstant. Vi har Neumanns homogena randvillkor på ytan $r = a$ samt ett Dirichletvillkor $\phi = -\phi_0 z$ vid $r \gg a$. Finn både potentialen och det resulterande vektorfältet. *(10 poäng)*

Lösning:

- Randvillkoret vid $r = a$ kan skrivas $\partial\phi/\partial r|_{r=a} = 0$ medan det vid stora r gäller att $\phi = -\phi_0 z = -\phi_0 r \cos\theta$.
- Symmetrin gör att vi ansätter lösningen $\phi = \phi(r, \theta)$ och randvillkorens vinkelberoende gör att vi kan utnyttja variabelseparation och finna $\phi(r, \theta) = f(r) + g(r)\cos\theta$.
- Ansatsen leder till lösningen $f(r) = A + B/r$ och $g(r) = Cr + D/r^2$.
- Konstanten A är irrelevant. Beteendet för stora r ger att $C = -\phi_0$
- Gradientens radiella komponent är $\partial\phi/\partial r = -B/r^2 + (C - 2D/r^3)\cos\theta$, och RV vid $r = a$ ger då att $B = 0$, $C - 2D/a^3 = 0$.
- Sammantaget ger detta

$$\phi = -\phi_0 \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos\theta = -\phi_0 z \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right).$$

(notera att beteckningen ϕ_0 var lite förvirrande eftersom enheten $[\phi_0] = [\phi]/L$, men detta påverkar förstås inte lösningen.)