# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

**Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers**

Aug 10, 2019

Här följer ledtrådar till två roliga, men kluriga, uppgifter från kapitel 5: Indexnotation.

## 5.5.10

Bevisa den Stokes-analoga satsen

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times \vec{v} = \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{v}.$$

Visa att ett val av ytan $S$ i $xy$-planet reproducerar Greens formel.

**Hint.**

- Bilda ett vektorfält $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{v}$, där $\vec{a}$ är ett godtyckligt, men konstant vektorfält.
- Teckna Stokes sats för detta nya vektorfält $\vec{F}$. Målet är sedan att skriva både VL och HL av Stokes sats som $\vec{a}$ gånger en integral. För att nå dit får man skriva om några kryssprodukter för vilket man med fördel kan använda indexformalism.
- Målet är alltså att komma fram till att

$$-\vec{a} \cdot \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \vec{v} = -\vec{a} \cdot \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{v}.$$

- Eftersom det sambandet skall gälla för godtyckligt fält $\vec{a}$ så måste integralerna vara lika.

### 5.5.11

Visa att arean av en plan yta omsluten av en kurva $C$ är

$$A = \frac{1}{2} \left| \oint_C \vec{r} \times d\vec{r} \right| .$$

**Hint.**

- Lägg ett koordinatsystem så att den plana ytan ligger i $xy$-planet.
- Notera sedan att $\vec{r} \times d\vec{r}$ är en vektor som pekar i $z$-riktningen. Eftersom vi skall ha absolutvärdet av integralen kan vi få fram vektorns enda komponent genom att skalärmultiplicera med $\hat{z}$.
- Notera att $\vec{z} \cdot (\vec{r} \times d\vec{r}) = d\vec{r} \cdot (\hat{z} \times \vec{r})$.
- Då kommer man till en punkt där man kan utnyttja Stokes sats.
- Sedan får man utnyttja indexformalism för att skriva om den dubbla kryssprodukten. Notera att vektorn $\hat{z}$ kan skrivas som $\delta_{3l}$ med indexformalism (detta skall ju tolkas som tre komponenter, $l = 1, 2, 3$, där bara den tredje är nollskild och lika med 1).