Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 24 oktober 2016 klockan 14.00-18.00 i M-huset.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Tobias Wenger (0730-381 453). Besöker tentamenssalen cirka kl 15 och kl 17.

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. Till detta tillkommer eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Skissa nivåytor och fältlinjer för en punktkälla, dvs $\phi = \frac{1}{4\pi r}$ och $\vec{F} = \frac{1}{4\pi r^2}\hat{r}$.

   (b) Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\cos(x)\mathrm{d}x$, (notera derivatan).

   (c) Teckna följande tre uttryck med indexnotation: (i) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, (ii) $\mathbf{M}\vec{a}$, (iii) $\mathbf{MN}$, där $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ är vektorer och $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ är 3×3 matriser.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Maxwells ekvationer är

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{4}$$

   (a) Använd Faradays induktionslag, $U = -d\Phi/dt$, för att visa Maxwells andra ekvation $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Notera att Φ är det magnetiska flödet genom en yta $\vec{S}$ och U är den inducerade spänningen längs randen ∂S. *(5 poäng)*

   (b) Använd Maxwells ekvationer för att visa att kontinuitetsekvationen $\partial\rho/\partial t = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}$ är uppfylld för $\rho(\vec{r}, t)$ = elektrisk laddningstäthet och $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$ = elektrisk strömtäthet. *(5 poäng)*

3. Ett klot med radien R har ett litet klot med radien r_0 urkarvad ur sig (se figur). Båda kloten är centrerade i origo. Området mellan radierna r_0 och R har en konstant massdensitet ρ_0. Notera att gravitationsfält är kontinuerliga (till skillnad från elektriska fält som ju har diskontinuiteter vid ytladdningar). Gravitationspotentialen uppfyller Poissons ekvation (vi antar att vi använder smarta enheter så att Newtons konstant $G = 1$)

$$\Delta\Phi(r) = \rho(r). \tag{5}$$

   Notera att tecknet i Poissons ekvation är motsatt mot vad man har för elektriska fält, detta beror på att två massor attraherar varandra.

   (a) Beräkna gravitationsfältet $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi(r)$. Skissa den radiella komponenten $F_r(r)$ som en funktion av r. *(7 poäng)*

   (b) Om man betraktar fältet i en punkt $\vec{r}$ där $r = |\vec{r}| > R$ så ser fältet ut som fältet från en punktkälla. Vilken massa (styrka) har en punktkälla som producerar samma fält? *(2 poäng)*

   (c) Hur rör sig en liten testmassa som placeras (utan initialhastighet) i gravitationsfältet i området $r < r_0$? *(1 poäng)*

   (10 poäng)

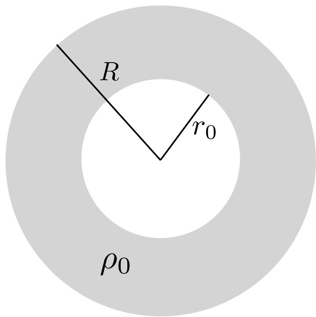

Figure 1: Klotet till gravitationsuppgiften.

4. Betrakta de tre vektorfälten: $\vec{F}_1 = \rho\hat{e}_\theta$, $\vec{F}_2 = z\hat{e}_z$ och $\vec{F}_3 = z\hat{e}_\rho$.

   (a) Vilket av dessa tre fält kan skrivas i termer av en vektorpotential? *(2 poäng)*

   (b) Ange en explicit form för en vektorpotential, $\vec{A}$, som ger detta fält. *(4 poäng)*

   (c) Samma som (b) men med det extra (gauge-)villkoret att $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (detta kan alltså vara samma vektorpotential som du redan har konstruerat). *(4 poäng)*

5. I en mycket lång homogen cylinder med radien R kan temperaturfördelningen skrivas $T = T(\rho, \theta)$ i cylindriska koordinater, dvs temperaturen kan antas vara z-oberoende. Den stationära temperaturfördelningen i cylindern uppfyller Laplaces ekvation

$$\Delta T(\rho, \theta) = 0. \tag{6}$$

   (a) Beräkna temperaturfördelning i hela cylindern givet Dirichlet randvillkoret $T(R, \theta) = T_0 + T_1 \cos\theta$. *(6 poäng)*

   (a) Beräkna värmeflödet genom den halvan av cylinderytan som beskrivs av $\rho = R$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (streckade halvan i Figur 2.). Kommentera kort svaret och ange om värmen flödar in eller ut och ange även enheten på det beräknade värmeflödet. (Värmeströmtätheten beräknas med $\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T(\rho, \theta)$, där λ är en materialberoende konstant som antas vara känd.) *(4 poäng)*

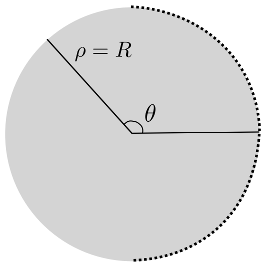

Figure 2: Cylindern i genomskärning. Cylindern antas vara mycket lång och därmed blir lösningen z-oberoende.

6. Betrakta Poissons ekvation $\Delta\phi = -\rho$ i det endimensionella området $\{x : 0 \leq x \leq L\}$ med Dirichlets homogena randvillkor. För detta problem är Greensfunktionen

$$G(x, x') = \begin{cases} \left(1 - \frac{x'}{L}\right) x & 0 \leq x < x', \\ \left(1 - \frac{x}{L}\right) x' & x' \leq x \leq L. \end{cases}$$

   (a) Använd denna Greensfunktion för att beräkna potentialen för två punktladdningar i det givna området (med de givna randvillkoren): En laddning $+q$ i punkten $L/2 + \varepsilon/2$ och en laddning $-q$ i punkten $L/2 - \varepsilon/2$ där ε är en kort sträcka. *(6 poäng)*

   (b) Verifiera att den givna Greensfunktionen verkligen är korrekt. I uppgiften ingår alltså att inse vad det är som skall verifieras. Även ett tydligt resonemang kring detta kan ge delpoäng. *(4 poäng)*