Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Lördagen den 26 oktober 2019 klockan 08.30-12.30 i SB.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Vad är ytintegralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z^2 \hat{z}$ och S är ytan till enhetssfären ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) med normalvektor $\hat{r}$?

(b) Skissa nivåytorna $\phi = -1, 0, 1$ för skalärpotentialen $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ i området $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Skissa också den fältlinje (inkl riktning) som går genom punkten $(x, y) = (1, 1)$.

(c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion. *(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

2. En oändligt lång metallcylinder med radie ρ_0 och symmetriaxeln längs z-axeln genom $x = y = 0$ har en temperatur som ges av

$$T(\rho, \varphi, z) = T_0 \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \sin\varphi,$$

i cylindriska koordinater. *Konstanten $T_0 > 0$.* Betrakta punkten P: $\rho = \rho_0/2$, $\varphi = \pi/4$, $z = 0$.

   (a) I vilken riktning ökar temperaturen som mest i punkten P?

   (b) Hur stor är temperaturökningen per längdenhet i riktningen $\vec{n} = \hat{e}_\rho + \hat{e}_z$ i punkten P?

   (10 poäng)

3. Visa att $V = \frac{1}{3}\oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S}$, där V är den inneslutna volymen och ytan ∂V har utåtriktad normal. Bekräfta detta samband för en sfär genom att explicit utföra integralen för detta fall. *(10 poäng)*

4. En punktladdning q befinner sig på avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? ($\vec{E}$-fältet är noll inne i metallen.) *(10 poäng)*

5. Tröghetstensorn för någon stel kropp i ett Cartesiskt koordinatsystem (xyz) ges av

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix},$$

där η är ett reellt tal och I_0 är en konstant med enheten (massa $\times$ längd^2). Ett roterat koordinatsystem $(x'y'z')$ ges av transformationen:

$$x' = z; \quad y' = y; \quad z' = -x.$$

Använd tensorers transformationsegenskaper för att visa vad tröghetstensorn blir i detta roterade koordinatsystem. *(10 poäng)*

6. Betrakta en oändligt lång, rektangulär stav med $-b \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, samt $-\infty < z < \infty$. Notera att den oändliga utsträckningen i z-led gör att problemet effektivt sett blir tvådimensionellt. Inuti plattan

gäller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. Dessutom gäller randvillkoren

$$\begin{aligned} &\phi(x, y = 0) = \phi(x, y = a) = 0 \\ &\phi(x = -b, y) = \phi(x = b, y) = \phi_0 \end{aligned}$$

Lösningen $\phi(x, y)$ kan skrivas som en oändlig summa av termer

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X(n\pi x/a) Y(n\pi y/a).$$

Identifiera funktionerna X och Y samt finn ett villkor för koefficienterna C_n med hjälp av randvillkoren vid $x = \pm b$. *(10 poäng)*