Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 14 augusti 2017 klockan 14.00-18.00 i Maskinsalarna.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. *Svar:*

   (a) 0

   (b) 1/2

   (c) $\hat{n} = -\hat{r}$ (eller $\hat{n} = -\hat{x}$)

---

2. *Lösning:*

   (a) (i) $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 r) = 3$; (ii) $\nabla \times \vec{A} = 0$; (iii) $\Delta\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(3) - \nabla \times (0) = 0$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ (alltid sant); (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times (0) = 0$.

   (b) Divergens och rotation kan uppskattas baserat på fältens utseenden. Alternativt kan explicita uttryck för fälten ansättas.

	$\nabla \cdot \vec{A}$	$\nabla \times \vec{A}$
Fält (1) ser ut som $\vec{A} = r\hat{r}$.	> 0	0
Fält (2) ser ut som $\vec{A} = \hat{x}$.	0	0
Fält (3) ser ut som $\vec{A} = x\hat{x}$.	> 0	0
Fält (4) ser ut som $\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$.	0	> 0
Fält (5) ser ut som $\vec{A} = x\hat{y}$.	0	> 0

---

3. *Lösning:*

   (a) Först noterar vi att $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 0$ om $i \neq j$ eftersom minst en av ε-tensorerna då kommer att bli noll.
   Vi studerar nu fallet $i = j = 1$ och finner att $\varepsilon_{1kl}\varepsilon_{1kl} = 2$ (bara termerna $\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1$ och $\varepsilon_{132}\varepsilon_{132} = (-1) \cdot (-1)$ är nollskilda).
   Vi får samma resultat för $i = j = 2$ och $i = j = 3$. Sammanfattningsvis har vi alltså att $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$.

(b) Kroneckers delta är en invariant tensor vilket betyder att den är oberoende av koordinatsystem: $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$.

(c) Vi använder transformationsregeln $\delta'_{ij} = L_{il}L_{jm}\delta_{lm} = L_{il}L_{jl}$. Vi noterar vidare att transformationsmatrisen måste uppfylla $\mathbf{L}\mathbf{L}^t = \mathbf{1}$ eller med indexnotation $L_{il}(L^t)_{lj} = \delta_{ij}$. Notera att $(L^t)_{lj} = L_{jl}$ så att $L_{il}L_{jl} = \delta_{ij}$. Alltså har vi att $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$, vilket skulle visas.

---

4. *Lösning:*

- Ytan är en halvsfär med radien a.
- Fältet kan delas upp i de två termerna $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ där $\vec{F}_1$ är reguljärt med divergensen $\nabla \cdot \vec{F} = 2F_0/a$ medan $\vec{F}_2$ är fältet från en punktkälla med styrkan $+q$ belägen i origo.
- För att beräkna bidraget från $\vec{F}_1$ kan vi använda Gauss sats, men vi behöver isf sluta ytan. Vi sluter den givna ytan genom att lägga till en pottenplatta S_1 med normalen $-\hat{z}$. Gauss sats ger oss att

$$\oint_{S+S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}_1 \mathrm{d}V = \frac{4\pi F_0 a^2}{3}.$$

- Integralen över bottenplattan räknas enklast ut i cylinderkoordinater ($x = \rho\cos\varphi$)

$$\int_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{F_0}{a^2}\int_0^a \int_0^{2\pi} (\rho\cos\varphi)^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi F_0 a^2}{4}.$$

- den sökta ytintegralen för $\vec{F}_1$ blir därför

$$\int_S \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S+S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{19\pi F_0 a^2}{12}.$$

- Ytan S upptar en rymdvinkel 2π (den täcker övre halvplanet sett från origo). Normalytintegralen för punktkällan blir därför

$$\int_S \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{q}{2}.$$

- Svaret är $\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{19\pi F_0 a^2}{12} + \frac{q}{2}$.

---

5. *Lösning:*

Den sökta temperaturfördelningen skall uppfylla Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ inuti sfären och Dirichlets randvillkor $T(r = R, \theta, \varphi) = T_0 + T_1 \cos\theta$ på dess rand.

Vi gör ansatsen: $T(\vec{r}) = Ar^p + Br^q \cos\theta$, vilken har fördelen att den kommer att separera i en radiell- och en vinkeldel när man evaluerar Laplacianen, samt att den ger förutsättning att reproducera randvillkoret. Vi finner att

$$\Delta(Ar^p) = Ap(p+1)r^{p-2}$$
$$\Delta(Br^q \cos\theta) = B\left(q(q+1) - 2\right) r^{q-2} \cos\theta.$$

Bägge dessa termer måste vara noll oberoende av varandra för att uppfylla Laplaces ekvation överallt. Vi förkastar dock de negativa lösningarna eftersom de skulle motsvara singulariteter i $r = 0$. Det var givet att området inte innhöll några källor. Detta innebär att $p = 0$ och $q = 1$. Samtidigt väljer vi integrationskonstanterna A och B så att randvillkoret uppfylls. Vi får lösningen

$$T(\vec{r}) = T_0 + T_1 \frac{r}{R} \cos\theta.$$

6. *Lösningsmall:*

- Vi inför en spegelladdning $q' = -q\frac{R}{a}$ belägen på z-axeln, $z' = \frac{R^2}{a}$, dvs inuti sfären. Den elektrostatiska potentialen utanför sfären kan då skrivas
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\varrho} + \frac{q'}{\varrho'}\right),$$
där ϱ och ϱ' är avstånden till de respektive punktladdningarna.

(a) Längs negativa z-axeln gäller att $\varrho = a - z$ och $\varrho' = R^2/a - z$. Dvs vi får att

$$\phi(0,0,z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{R-za/R}\right) & \text{för } z < -R \\ 0 & \text{för } -R \leq z < 0 \end{cases}$$

- Vi tecknar också uttrycket för potentialen där avstånden uttrycks i sfäriska koordinater mha cosinussatsen. Detta finns i formelsamlingen

$$\phi(r,\theta\phi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r^2+a^2-2ra\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{R/a}{\left(r^2+R^4/a^2-2r(R^2/a)\cos\theta\right)^{1/2}}\right],$$

och vi noterar att detta givetvis ger samma resultat som ovan med $\theta = -\pi$ och $r = |z|$ längs negativa z-axeln.

(b) Den inducerade ytladdningen fås från uttrycket $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \hat{n}\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$. Vi har $\hat{n} = \hat{r}$ för sfären och kraftfältet fås från $\vec{E} = -\nabla\phi$. Inuti sfären är $\phi = 0$ och följdaktligen är $\vec{E}_- = 0$.
Vi behöver alltså den radiella delen av kraftfältet, $E_r = (-\nabla\phi)_r = \partial_r\phi$. De två termerna i potentialen har samma generella form och vi beräknar

$$\partial_r\left(r^2+A-Br\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(2r-B)\left(r^2+A-Br\right)^{-3/2}.$$

Vi skall evaluera detta på sfärens yta där $r = R$. Vi introducerar också den dimensionslösa storheten $\tilde{a} \equiv a/R > 1$. Efter några steg får vi

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \hat{r}\cdot\vec{E}_+ = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{\tilde{a}^2-1}{\left(1+\tilde{a}^2-2\tilde{a}\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

(c) För att hitta den inducerade laddningen skall vi integrera ytladdningstätheten över sfärens yta S. Vi kan väl ana att detta kommer att motsvara den spegelladdning som vi har introducerat inuti sfären för att uppfylla randvillkoret. Vi finner

$$Q_{\text{ind}} = \int_S \sigma(\theta)R^2\sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{q}{2}\left(\tilde{a}^2-1\right)\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\left(1+\tilde{a}^2-2\tilde{a}\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

Vi byter integrationsvariabel till $t = -\cos\theta$ och får

$$Q_{\text{ind}} = -\frac{q}{2}\left(\tilde{a}^2-1\right)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(1+\tilde{a}^2+2\tilde{a}t\right)^{3/2}}.$$

Integralen går att finna i Beta Mathematics Handbook. Vi får att

$$Q_{\text{ind}} = q\left(\tilde{a}^2-1\right)\frac{1}{\tilde{a}\left(1-\tilde{a}^2\right)} = -q/\tilde{a},$$

precis som vi anade.