Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 och FFM232)

Tid och plats: Tisdagen den 19 december 2017 klockan 08.00-12.00 i SB.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad blir divergensen av vektorfältet $\vec{F} = \sin\theta \hat{e}_\theta$ (givet i sfäriska koordinater)?

   (b) Bestäm konstanten C så att distributionen

   $$h_\epsilon(x) \equiv C \frac{\exp(-x^2/\epsilon^2)}{\epsilon},$$

   blir en korrekt normaliserad deltafunktion i gränsen $\epsilon \to 0^+$.

   (c) När man använder indexnotation för att bevisa vektoridentiteten $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta\vec{F}$ stöter man på termen $\partial_m \partial_i F_m$, där indexen i, m löper över kartesiska koordinater. Vilket/vilka av följande påståenden stämmer?

(A) $\partial_m \partial_i F_m = \partial_i \partial_m F_m$	(B) $\partial_m \partial_i F_m = \partial_m F_m \partial_i$
(C) $\partial_m \partial_i F_m = F_m \partial_m \partial_i$	(D) ingetdera

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) $2\cos\theta/r$

   (b) $C = 1/\sqrt{\pi}$

   (c) (A)

---

2. Ett koordinatsystem uvz är definerat genom

   $$x = u^2 + \lambda v^2; \quad y = uv; \quad z = z,$$

   där $u \geq 0$. Bestäm konstanten λ så att koordinatsystemet blir ortogonalt och beräkna systemets skalfaktorer. Visa också om systemet är ett höger- eller ett vänstersystem. *(10 poäng)*

Lösning:

Enhetsriktningar (ej normaliserade) skapas genom $\partial\vec{r}/\partial u_i$. Detta ger

$$\vec{e}_u = (2u, v, 0), \quad \vec{e}_v = (2\lambda v, u, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1).$$

Ortogonalitet erhålls omm $\lambda = -1/4$.
Skalfaktorerna är $h_i = |\partial\vec{r}/\partial u_i|$, vilket ger $h_u = \sqrt{4u^2+v^2}$, $h_v = \sqrt{4u^2+v^2}/2$, $h_z = 1$.
Systemet är ett högersystem eftersom $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k$, där ijk är cykliska permutationer av uvz. Visa t.ex. med

$$\hat{e}_u \times \hat{e}_v = \frac{2}{4u^2+v^2}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2u & v & 0 \\ -v/2 & u & 0 \end{vmatrix} = \hat{e}_z$$

---

3. Ytan till en (oändligt) lång cylindrisk kavitet med radien a hålls vid den elektriska potentialen $\phi(\rho = a, \alpha, z) = \phi_0 \cos 2\alpha$, där (ρ, α, z) är cylindriska koordinater och där $\phi_0 > 0$. Bestäm den statiska elektiska potentialen i kaviteten och skissa några ekvipotentialytor. Markera speciellt ekvipotentialytan för $\phi = 0$ (om den existerar i området) och ange i vilka områden som potentialen är positiv respektive negativ.
(*cylindrisk kavitet = en ihålig cylinder.*) *(10 poäng)*

Lösning:

Vi har inget z-beroende och gör ansatsen $\phi = \phi(\rho, \alpha) = f(\rho)\cos 2\alpha$. Detta uppfyller RV om $f(a) = \phi_0$ och ger en separabel diff.ekv.

$$\Delta\phi = \ldots = \cos 2\alpha \left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho f'(\rho)) - \frac{4}{\rho^2}f(\rho)\right] = 0.$$

Ansatsen $f(\rho) = A\rho^p$ ger lösningarna $p = \pm 2$ men vi eliminerar den negativa exponenten eftersom den ger en singularitet som vi inte har. RV ger A så att

$$\phi = \phi_0 \frac{\rho^2}{a^2}\cos 2\alpha = \phi_0 \frac{x^2 - y^2}{a^2}.$$

Här bör man rita en figur, förslagsvis på ett snitt av cylindern. Ekvipotentialytorna blir hyperbler $x^2 - y^2 =$ konstant. Ytorna $y = x$ samt $y = -x$ ger $\phi = 0$ och potentialen är positiv (negativ) i den högra och vänstra (övre och nedre) kvadranten.

4. Antag att vi har ett vektorfält $\vec{F}$ som är kontinuerligt och (dubbelt) deriverbart på en volym V. Utgå från Gauss sats för att visa att Stokes sats,
$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$
gäller för alla ytor S med rand ∂S som ligger på ytan ∂V (dvs randen ligger på den yta som innesluter volymen V). *(10 poäng)*

Lösning:

Välj två ytor S_1 och S_2 som har samma rand ∂S och som tillsammans innesluter en volym på vilken man kan tillämpa Gauss sats. Se t.ex. kursboken avsnitt 4.3.
Denna uppgift visade sig dock vara otydligt formulerad (den avsedda uppgiften var att visa att valet av yta inte spelar någon roll för uppfyllandet av Stokes sats givet att de har samma rand).

5. Betrakta en kropp med volymen V. På randen till kroppen gäller Neumanns homogena randvillkor för temperaturen. Initialt gäller $T = T_0$ i hela kroppen. Vid tiden $t = 0$ slås en värmekälla på med värmekälltätheten $s = P\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$, där P är en konstant och $\vec{r}_0$ ortsvektorn för en punkt i kroppen. Denna värmekälla förblir sedan påslagen. Bestäm värdet av $\int_V T(\vec{r}, t) dV$ för alla tider $t > 0$. Materialet har värmeledningsförmåga λ, densitet ρ och värmekapacitivitet c. *(10 poäng)*

Lösning:

Randvillkoret ger att kroppen är värmeisolerad. Detta innebär att ingen värmeenergi kommer att flöda genom kroppens rand. När värmekällan slås på ökar följdaktligen den totala värmeenergin linjärt med tiden. Vi får att
$$\int_V T(\vec{r}, t) dV = T_0 V + \frac{Pt}{c\rho}.$$

6. Betrakta Poissons ekvation $\Delta\phi = -\rho$ i det endimensionella området $\{x : 0 \leq x \leq L\}$ med Dirichlets homogena randvillkor. För detta problem är Greensfunktionen
$$G(x, x') = \begin{cases} \left(1 - \frac{x'}{L}\right) x & 0 \leq x < x', \\ \left(1 - \frac{x}{L}\right) x' & x' \leq x \leq L. \end{cases}$$
Använd denna Greensfunktion för att beräkna potentialen för en punktladdning $+q$ i punkten $L/4$ (med de givna randvillkoren). Skissa denna potential. Beräkna också det motsvarande kraftfältet och skissa detta i

en figur. Ge slutligen en fysikalisk tolkning av de diskontinuiteter som uppvisas i kraftfältet. *(10 poäng)*

Lösning:

Laddningsfördelning kan skrivas

$$\rho(x') = +q\delta(x' - L/4),$$

och lösningen kan skrivas i termer av den givna Greensfunktionen

$$\phi(x) = \int_0^L G(x, x')\rho(x')\mathrm{d}x'.$$

Pga Greensfunktionens utseende får vi betrakta två separata områden:

För $x < L/4$: Här är $G = (1 - x'/L)x$ och vi får

$$\phi(x) = +q\left(1 - \frac{L/4}{L}\right)x = q\frac{3x}{4}.$$

För $x > L/4$: Här är $G = (1 - x/L)x'$ och vi får

$$\phi(x) = q\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{L}{4} = q\frac{L - x}{4}.$$

Potentialen skissas upp. Då ser man att den ökar linjärt från noll vid $x = 0$ till $3qL/16$ vid $x = L/4$ för att sedan avta linjärt till noll igen vid $x = L$.
Kraftfältet blir

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla}\phi = -\hat{x}\frac{d\phi}{dx} = \begin{cases} -\frac{3q}{4}\hat{x}, & 0 < x < L/4 \\ +\frac{q}{4}\hat{x} & L/4 < x < L. \end{cases}$$

Vi finner tre diskontinuiteter i kraftfältet vilka vi tolkar som endimensionella ytladdningar (dvs punktladdningar). Ekvationen $\hat{x} \cdot (\vec{F}_+ - \vec{F}_-)$ ger oss styrkan hos yt-(punkt-)laddningen. $+q$ i punkten $L/4$ är den givna laddningen i problemet. Punktladdningarna $-3q/4$ vid $x = 0$ och $-q/4$ vid $x = L$ kan tolkas som inducerade laddningar pga randvillkoret. De summerar till $-q$ som förväntat.