Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 17 augusti 2015 klockan 14.00-18.00 i M-huset.
Lösningsskiss: Christian Forssén

---

1. (a) c: värmekapacitivitet [J/(kg K)]; ρ: densitet [kg/m^3]; T: temperatur [K]; λ: värmeledningsförmåga [J/(m s K)]; s: värmekälltäthet [J/(m^3 s)].

   (b) $T(z) = (T_d - T_0)\frac{x}{d} + T_0$.

   (c) $T(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 x G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') u(\vec{r}', t')$, där G är lösningen till

   $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \Delta \right) G = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t').$$

2. (a) Notera riktningen på kurvan som omlöper virveltråden. Integralen blir $-j$.

   (b) Konstruera enhetsvektorer från $\nabla\xi$ och $\nabla\eta$ och ta skalärprodukten för att finna villkor för deras ortogonalitet. Man finner $\alpha = \gamma = 0$ och $\beta \neq 0$, men annars godtyckligt.

   (c) Använd partiell integration. Integralen blir noll.

3. Fältet har en punktkälla med styrkan $4\pi A$ i $a\hat{z}$ innanför ytan. C-termen motsvarar en rymdkälla med $\nabla \cdot \vec{F} = C$ i nedre halvplanet. Dessutom finns det en ytkälla vid $z = 0$-planet som bestäms av diskontinuiteten. Man finner ytkällans styrka $\sigma = -Aa/(\rho^2 + a^2)^{3/2}$. Tillsammans blir integralen $\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi A \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{16}{3}\pi a^3 C$.

   Alternativet kan bidraget från A-termen erhållas genom att räkna ut rymdvinklen som den övre delen av sfären upptar sett från punktkällan.

4. Betrakta vektorfältet $\vec{v} = x^2\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}$ i xy-planet.

   (a) $\nabla \cdot \vec{v} = 2x - 1$, $\nabla \times \vec{v} = 0$.

   (b) Rotationen är noll så det finns en potential. Denna blir $\phi = -\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$.

   (c) Det eftersökta flödet är $\int_\lambda \vec{v} \cdot \hat{n} \mathrm{d}s$, där $\hat{n}$ är vinkelrät mot $\mathrm{d}\vec{r}$. Kurvan kan parametriseras enligt $\vec{r} = \hat{x} + \lambda\hat{y}$ med $\lambda \in [0, 1]$. Detta ger $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\lambda\hat{y}$ så att $\hat{n}\mathrm{d}s = \hat{x}\mathrm{d}\lambda$ (där riktningen inte är väldefinierad så ett extra minustecken är också godtagbart). Integralen blir

   $$\int_0^1 \mathrm{d}\lambda(\hat{x} - \lambda\hat{y}) \cdot \hat{x} = 1.$$

5. Lös lämpligen med Greensfunktionsmetoden.

$$\phi(z\hat{z}) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} a^2 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos\theta'}{\sqrt{a^2+z^2-2az\cos\theta'}} \sin\theta' \mathrm{d}\theta'.$$

Integralen löses t.ex. med substitution $t = \cos\theta'$. Man finner

$$\epsilon_0\phi(z\hat{z}) = \begin{cases} \mathrm{sign}(z)\frac{a^3\sigma_0}{3z^2} & |z| > a \\ \frac{\sigma_0 z}{3} & |z| < a \end{cases} \qquad \vec{E}(z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3}\hat{z} & |z| > a \\ -\frac{\sigma_0}{3}\hat{z} & |z| < a \end{cases}$$

6. Första ekvationen är uppfylld eftersom $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, dvs $\rho = 0$. Andra ekvationen ger $\partial\vec{B}/\partial t = -\nabla\times\vec{E} = E_0 k\hat{y}\sin(k(z-ct))$, vilket integreras till

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c}\cos(k(z-ct)) + B_0(\vec{r}),$$

där den sista termen är tidsoberoende.

Våglängden är $2\pi/k$ och periodtiden $2\pi/(kc)$.