Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Tisdagen den 7 januari 2020 klockan 08.30-12.30, Johanneberg.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(-2x)\,(x^2 - x + 2)\,dx$

   (b) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Begränsningsytan vid $x = 0$ är värmeisolerad medan den vid $x = d$ hålls vid en konstant temperatur T_d. Det finns inga värmekällor inne i plattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i plattans inre.

(c) Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där fältet ges av $\vec{F} = \hat{\varphi}/\rho$ och kurvan C parametriseras av $x = \cos(4\pi t)$, $y = \sin(4\pi t)$ och $z = t$ med kurvparametern $0 \leq t \leq 1$.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Låt S vara ytan $y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ vars normalvektor har icke-negativ z-komponent ($n_z \geq 0$). Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = x\hat{x} + x^2 z^2 \hat{y} + z\hat{z}$. *(10 poäng)*

3. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}.$$

(10 poäng)

4. Använd indexnotation för att visa följande:

   (a) om T_{ij} är en tensor så är T_{ii} en skalär.

   (b) δ_{ij} är en invariant tensor.

(10 poäng)

5. Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3}(2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$, där μ är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/2)$. Rita också denna fältlinje i rummet tillsammans med xyz-axlarna och indikera riktningen på vektorfältet vid några punkter längs fältlinjen. *(10 poäng)*

6. Bestäm p och ℓ så att

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin^\ell \theta \cos(2\varphi),$$

är en icke-singulär lösning till Laplaces ekvation i området $r < a$.

(10 poäng)