Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Lördagen den 24 oktober 2020 klockan 08.30-12:30, på distans via zoom.
Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna.
Lösningsskiss:	Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Betrakta en kubisk volym (sidlängd a) inuti vilken det finns en värmekälla $s = \alpha_s r^2$ (notera att $[s] = \mathrm{Wm}^{-3}$). Material är homogent med värmeledningsförmåga λ. Randvillkoren är sådana att de tillåter en stationärlösning att uppnås. Använd Gauss sats för att beräkna värmeflödet ut ur volymen när temperaturfältet är tidsoberoende.
(10 poäng)

   Lösning:

   - Vi vill beräkna $\oint_{\partial V} \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV$ enligt Gauss sats.
   - Vi har att $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -\lambda \Delta T$. Vid stationärlösningen gäller $\Delta T = -s/\lambda$.
   - Återstår att beräkna

   $$\int_V \alpha_s (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = 3\alpha_s a^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} = \alpha_s \frac{a^5}{4},$$

     där vi utnyttjar att vi får tre likvärdiga termer.
   - Enheten stämmer eftersom $[\alpha_s] = \mathrm{Wm}^{-5}$ så att svaret får enheten W.

---

2. Använd indexnotation för att visa följande likheter

   (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$

   (b) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

   (c) $\vec{\nabla} r = \hat{r}$

   där $\vec{r}$ är ortsvektorn och $\hat{r}$ motsvarande enhetsvektor.
   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)
   (bevis utan indexnotation kan också ge poäng, dock maximalt 4 poäng).

   Lösning:
   Notera att ortsvektorn $\vec{r}$ har komponenterna x_i.

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \partial_i x_i = 3$.

(b) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \epsilon_{ijk} \partial_j x_k = 0$, eftersom $\epsilon_{ijk} = 0$ om $j = k$ medan $\partial_j x_k = 0$ om $j \neq k$.

(c) $\vec{\nabla} r = \partial_i \left(x_j x_j\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(x_k x_k\right)^{-1/2} \partial_i \left(x_j x_j\right)$. Enligt kedjeregeln är $\partial_i \left(x_j x_j\right) = 2x_j \partial_i x_j = 2x_j \delta_{ij} = 2x_i$. Slutligen får vi därför $\vec{\nabla} r = x_i \left(x_k x_k\right)^{-1/2}$ vilket vi identifierar med $\vec{r}/r = \hat{r}$.

---

3. Vad är värdet av integralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F} = q \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \sigma \frac{|z|}{a} \hat{\mathbf{z}},$$

där $\vec{r}_0 = \frac{a}{2}(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$? *(10 poäng)*

Lösning:

- Den första termen motsvarar en punktkälla med laddning $4\pi q$ i punkten $\vec{r}_0$ på avståndet $r_0 = \frac{a}{2}\sqrt{3} < a$. Den är alltså innanför sfären och kommer att ge bidraget $4\pi q$ till integralen.
- Den andra termen är symmetrisk runt z-axeln och har alltid en positiv z-komponent. Detta ger att dess flöde genom ytan är lika stort negativt på den undre halvsfären som positivt på den övre. Summan blir noll.
- Alternativt kan man använda Gauss sats på den andra termen och konstatera att

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma |z|/a) = \frac{\sigma}{a} \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ -1 & z \leq 0, \end{cases}$$

  vilket gör att volymsintegralen blir noll.
- Den totala ytintegralen blir alltså $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi q$.

---

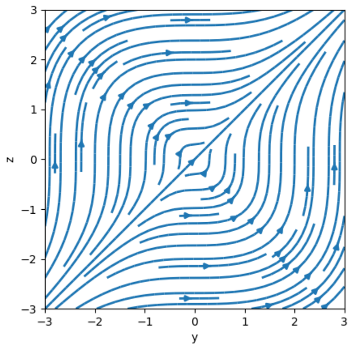
4. Tvärsnittsfiguren nedan visar fältlinjerna för en vektorpotential $\vec{A}$.

   (a) Vilken av följande vektorpotentialer skulle kunna motsvara fältlinjerna i figuren?

   (i) $\vec{A} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + z^2 \hat{\mathbf{y}} + y^2 \hat{\mathbf{z}}$

(ii) $\vec{A} = y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}} + z^2\hat{\mathbf{z}}$

(iii) $\vec{A} = z^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} + z^2\hat{\mathbf{z}}$



(b) Beräkna vektorfältet som erhålls från den vektorpotential som du har valt i deluppgift (a) och härled uttryck för dess fältlinjer.

(c) Rita specifikt den fältlinje från uppgift (b) som startar i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$.

(10 poäng)

Lösning:

(a) Figuren motsvarar fält (i): $\vec{A} = x^2\hat{\mathbf{x}} + z^2\hat{\mathbf{y}} + y^2\hat{\mathbf{z}}$, vilket vi t.ex. ser genom det faktum att ingen av y- och z-komponenterna är konstant, att de alltid är positiva, att y-komponenten är noll längs $z = 0$, samt att $A_y = A_z$ då $y = z$.

(b) $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (2y - 2z)\hat{\mathbf{x}}$. Fältlinjer $\vec{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ fås från

$$\frac{dx}{d\tau} = y - z,$$
$$\frac{dy}{d\tau} = 0,$$
$$\frac{dz}{d\tau} = 0,$$

där de två sista direkt ger $y(\tau) = y_0$ och $z(\tau) = z_0$, vilket i sin tur ger $x(\tau) = (y_0 - z_0)\tau + x_0$.

(c) Det efterfrågade fältlinjen visas enklast i xy-planet vid $z = z_0 = 2$(!). Den startar ($\tau = 0$) i punkten $(x_0, y_0) = (0, 1)$ och går sedan rakt åt vänster i negativ x-led.

---

5. Potentialen från en punktdipol ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Betrakta dipolen $\vec{\mu} = \mu\hat{x}$. Beräkna motsvarande kraftfält $\vec{F}(\vec{r})$ och beräkna de tre ytintegralerna

$$\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

för ytorna $S_i \in \{S_x, S_y, S_z\}$ som motsvarar tre olika halvsfärer vilka definieras av S_i: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ för $x > 0$ (för $i = x$), $y > 0$ (för $i = y$), $z > 0$ (för $i = z$).
(Notera att det finns ett tryckfel i föreläsningsanteckningarna och i kursboken när det gäller uttrycket för vektorfältet från en dipol.)
(10 poäng)

Lösning:

- Vi gör koordinatbytet $x \to z'$, $y \to x'$, $z \to y'$ så att vi kan skriva $\phi = \frac{\mu \cos\theta'}{4\imath r'^2}$. Låt oss i det följande låta bli att skriva med prim på koordinaterna $r'\theta'\varphi'$.
- Kraftfältet blir

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\rho = -\frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{(-2\cos\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{(-\sin\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_\theta\right]$$
$$= \frac{\mu}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta\right]$$

- Vi börjar med integralen över $S_x = S_{z'}$. Ytelementet är $d\vec{S} = \hat{\mathbf{e}}_r R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Vi kan direkt utföra integralen $\int d\varphi = 2\pi$ och vi får

$$\int_{S_x} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu}{R}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\mu}{R}\left[-\frac{cos2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu}{2R}$$

- Notera att fältet är antisymmetriskt runt $y' = 0$ och $x' = 0$ planen ($\cos(\pi/2 - \alpha) = -\cos(\pi/2 + \alpha)$). Detta gör att både

$$\int_{S_y} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_z} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

6. Betrakta Laplaces ekvation för potentialen ϕ inuti en volym V. Volymens inre begränsningsyta är en oändligt lång cylinder med radie a_0 och dess yttre begränsningsyta är en annan oändligt lång cylinder med radie a_1. De två cylindrarna har samma symmetriaxel. Vi har två Dirichlet-randvillkor: $\phi(\rho = a_0) = \phi_0$ samt $\phi(\rho = a_1) = \phi_1 \cos(2\varphi)$. Finn lösningen $\phi(\vec{r})$.
(10 poäng)

Lösning:

- Gör ansatsen $\phi = f(\rho) + g(\rho)\cos(2\varphi)$ då vi noterar att det inte kan finnas något z-beroende och att båda termernas vinkelberoende är egenfunktioner till Laplacianens vinkeldel.
- Denna separabla ansats uppfyller randvillkoren om $f(a_0) = \phi_0$ (i), $f(a_1) = 0$ (ii), $g(a_0) = 0$ (iii), $g(a_1) = \phi_1$ (iv).
- Laplace ekvation för den första termen ger lösningen

  $$f(\rho) = C\ln(\rho/a_1) + D,$$

  där vi har omdefinierat integrationskonstanten D så att vi får nämnaren a_1 i logaritmen (blir enklare uttryck). Randvillkor (ii) ger då att $D = 0$ medan villkor (i) ger att $C = \frac{\phi_0}{\ln(a_0/a_1)}$.
- Laplaces ekvation på den andra termen, med ansatsen $g(\rho) = A\rho^p$ ger den karakteristiska ekvationen $p^2 - 4 = 0$ och därmed lösningen

  $$g(\rho) = A\rho^2 + B\rho^{-2}.$$

  Notera gärna att $\rho = 0$ inte är med i volymen. Randvillkor (iii) ger $A = -B/a_0^4$ och därmed ger (iv) att $\phi_1 = -\frac{B}{a_1^2}\left(\frac{a_1^4}{a_0^4} - 1\right)$.
- Sammantaget, och med lite omskrivningar, blir

  $$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \frac{\ln\rho - \ln a_1}{\ln a_0 - \ln a_1} + \phi_1 \frac{a_1^2}{a_1^4 - a_0^4}\left(\rho^2 - \frac{a_0^4}{\rho^2}\right)\cos(2\varphi).$$

  Vi kan notera att termerna har dimensionerna $[\phi_0]$ respektive $[\phi_1]$ vilket lär stämma.