Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 15 augusti 2016 klockan 14.00-18.00 på Samhällsbyggnad.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. (a) $-2\pi F_0 a$

   (b) $-a^2 - c^2$

   (c) $\hat{z}(= -\hat{\theta})$

2. (a) Ytan kan betraktas som en nivåyta till ett skalärfält. Gradienten till ett skalärfält är alltid vinkelrätt mot dess nivåytor och motsvarar alltså ytans normalriktning.

$$\nabla\phi = 2xyz\hat{x} + x^2z\hat{y} + x^2y\hat{z}.$$

   I punkten $(1, 2, -1)$ blir detta $\vec{n} = -4\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$. En enhetsnormal kan peka åt två håll och skall vara normaliserad. Svaret blir

$$\hat{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{21}}\left(-4\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}\right).$$

   (b) Teckna de definierande ekvationerna: $\frac{dx}{d\tau} = -y/(x^2 + y^2)$ och $\frac{dy}{d\tau} = x/(x^2 + y^2)$. Detta kan skrivas som en separabel differentialekvation $\frac{dx}{dy} = -y/x \quad \Rightarrow \quad xdx = -ydy$ med lösningen $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$ eller likvärdigt $x^2 + y^2 = a^2$. Detta motsvarar cirklar i xy-planet med mittpunkt på z-axeln.

   Riktningen fås t.ex. genom att studera den första kvadranten $(x > 0, y > 0)$ där vi ser att x minskar med τ och y ökar med τ. Cirklarna genomlöps alltså moturs.

3. Basvektorerna fås från $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}$ och $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}$.

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}\left(1 - \cosh\xi\cos\eta, -\sinh\xi\sin\eta\right),$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}\left(-\sinh\xi\sin\eta, \cosh\xi\cos\eta - 1\right).$$

Dessa vektorer är ortogonala mot varandra för godtyckligt värde på a. Dock gäller uppenbarligen att $a \neq 0$.

Skalfaktorerna är
$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta},$$
så att ett uttryck för gradienten av ett skalärfält blir

$$\nabla\phi = \hat{e}_\xi \frac{\cosh\xi - \cos\eta}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \hat{e}_\eta \frac{\cosh\xi - \cos\eta}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$$

med de normerade basvektorerna

$$\begin{aligned}
\hat{e}_\xi &= \frac{1}{(\cosh\xi - \cos\eta)}\left(1 - \cosh\xi\cos\eta, -\sinh\xi\sin\eta\right), \\
\hat{e}_\eta &= \frac{1}{(\cosh\xi - \cos\eta)}\left(-\sinh\xi\sin\eta, \cosh\xi\cos\eta - 1\right).
\end{aligned}$$

4. Singulariteten för fältet $\vec{F}$ ligger i punkten $\vec{r} = \vec{r}_0$. Vi noterar att $|\vec{r}_0| = \frac{3a}{5}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{25}}a$ vilket betyder att singulariteten ligger utanför sfären som omsluts av ytan S. Vi kan alltså använda Gauss sats.

   Genom att definiera $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0$ blir den sökta integralen

   $$I = \frac{q}{4\pi}\int_{S'} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|^3}\cdot d\vec{S}\,' = \frac{q}{4\pi}\int_{S'} \frac{\hat{r}\,'}{|\vec{r}\,'|^2}\cdot d\vec{S}\,',$$

   och S' är ytan på en sfär med radien a som tangerar origo.

   För att applicera Gauss sats räknar vi först ut $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r'^2}\frac{\partial}{\partial r'}(r'^2 F_{r'}) = 0$. Detta innebär att den sökta integralen är noll.

5. Inget i problemställningen beror på z, så vi betraktar det som ett tvådimensionellt problem. Den elektrostatiska potentialen uppfyller Laplaces ekvation på cirkelskivan $\rho < a$. En rimlig ansats är $\phi(\rho,\varphi) = f(\rho)\cos 2\varphi$. Laplaces ekvation säger

   $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho f'(\rho)\right)'\cos 2\varphi - \frac{4}{\rho^2}f(\rho)\cos 2\varphi.$$

   En ansats $f(\rho) = A\rho^p$ ger $p^2 - 4 = 0$ eller $p = \pm 2$. Minustecknet ger ett singulärt fält. Randvillkoret ger $A = \phi_0/a^2$. Potentialen är

   $$\phi = \phi_0\frac{\rho^2}{a^2}\cos 2\varphi = \phi_0\frac{x^2 - y^2}{a^2}.$$

Det elektriska fältet är

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{2\phi_0\rho}{a^2}\left(-\hat{\rho}\cos 2\varphi + \hat{\varphi}\sin 2\varphi\right) = -\frac{2\phi_0}{a^2}(x\hat{x} - y\hat{y}).$$

Ekvipotentialytorna är alltså hyperbler $x^2 - y^2 =$ konstant. Fältlinjerna är hyperbler $xy =$ konstant.

6. - Vi har en punktkälla med värmeeffekten W och ett Neumann randvillkor vid ytan till sfären. Temperaturfältet skall alltså uppfylla Poissons ekvation inuti sfären

$$\Delta T = -s/\lambda, \quad \text{med } s = W\delta^3(\vec{r}).$$

- Lösningen är $T = T(r) = \frac{W/\lambda}{4\pi r} + T_1$, vilket man kan se genom att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i området $0 < r < a$ (dvs där källtermen är noll) och sedan identifiera punktkälltermen. Integrationskonstanten T_1 är fortfarande obestämd.
- Värmeströmmen är $\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\hat{r}\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{W}{4\pi r^2}\hat{r}$. Detta är bra eftersom vi därmed kan verifiera att

$$\int_{|\vec{r}|=a} \vec{q}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = W.$$

  Dvs värmeeffekt från källan är lika med värmeström per tidsenhet ut genom ytan.
- Den totala värmeenergin i sfären ges av integralen $H = \int_V c\rho T \mathrm{d}V$. För en konstant temperaturfördelning (som vid $t = 0$) blir detta $H_0 = c\rho T_0 \frac{4\pi a^3}{3}$. För vår stationära lösning gäller

$$H = c\rho T_1 \frac{4\pi a^3}{3} + c\rho\, \underbrace{4\pi \int_0^a \frac{W}{4\pi\lambda} r \mathrm{d}r}_{=\frac{Wa^2}{2\lambda}}.$$

- Värmeenergin skall vara bevarad vilket ger T_1. Svaret blir

$$T(r) = \frac{W}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2a}\right) + T_0$$