Bevis av Arfken (7.10)

Betrakta en diff.ekv

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$$\Rightarrow \quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

Betrakta nu en funktion $\varphi(x,y)$.

Dess differentral

$$d\varphi = (\partial_x \varphi)dx + (\partial_y \varphi)dy = 0 \quad (2)$$

om $\varphi(x,y) = \text{konstant}$

För en "exakt differentral"

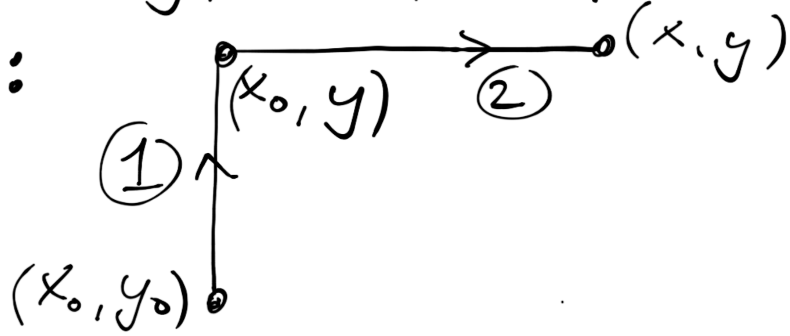
gäller $\partial_x \varphi = P(x,y)$

$\partial_y \varphi = Q(x,y)$

vilket innebär att (1) och (2) är samma problem.

Vad är då $\varphi(x,y)$?

Utnyttja att $\varphi = \int d\varphi$ och integrera från (x_0, y_0) till (x,y). Välj följande väg:



$$\varphi(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y')\,dy' + \int_{x_0}^{x} P(x',y)\,dx'$$

endast $\partial_y \varphi\, dy$ -delen av $d\varphi$ bidrar eftersom $dx = 0$ längs 1. Vi följer vägen längs $x' = x_0$!

endast $\partial_x \varphi\, dx$ bidrar längs 2. Här är $y' = y$!

vilket skulle visas

$$\text{konstant} = \varphi(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y')\,dy' + \int_{x_0}^{x} P(x',y)\,dx'$$

Notera att jag är lite mer noggrann att skilja på integrationsparametrar och integrationsgränser än vad som görs i Arfken.