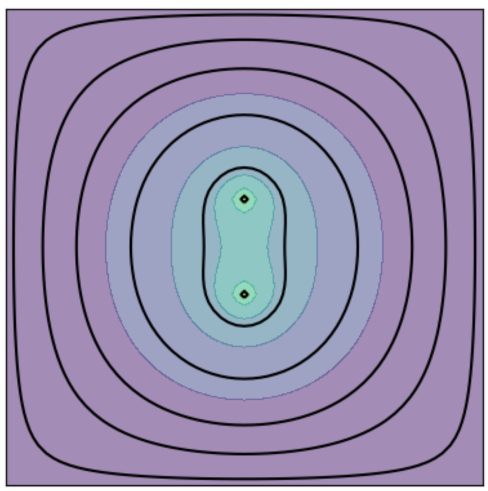
# FFM234, Datoruppgift 2: Poissons ekvation och värmeledning

**Christian Forssén**

Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige, Email: christian.forssen@chalmers.se

Oct 16, 2019



## Inledning

I den här laborationen skall vi studera värmeledningen genom en glasruta (en dimension) och genom en platta (två dimensioner). Den fysikaliska processen beskrivs av värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + u, \tag{1}$$

där $T$ är ett skalärfält som beskriver temperaturen som en funktion av läget och tiden. Parametern $k = \lambda/(c\rho)$ består av materialkonstanterna $\lambda$ (värmeledningsförmågan), $c$ (värmekapacitiviten) och $\rho$ (materialets densitet). Eventuella värmekällor beskrivs av skalärfältet $u \equiv s/(c\rho)$, där SI-enheten för $s$ är $\mathrm{W/m^3}$. För att ge en entydig lösning måste värmeledningsekvationen kompletteras med begynnelse- och randvillkor för temperaturen, det vill säga vi måste beskriva temperaturfördelningen i den aktuella geometrin vid starttidpunkten, och ge villkor för temperaturen (eller temperaturgradienten) på geometrins rand vid varje tidpunkt.

När $\partial T/\partial t = 0$ har vi uppnått en stationärlösning.

## Numerisk behandling av värmeledningsekvationen i en dimension

Det finns analytiska tekniker för att lösa den tidsberoende värmeledningsekvationen, men dessa kräver metoder som ingår i Fourier-analys, och faller därmed utanför ramen för vår kurs. Däremot kan vi konstruera en enkel numerisk metod för att lösa värmeledningsekvationen. Låt oss till att börja med att betrakta det en-dimensionella problemet. Antag att vi vill studera värmeledning genom en glasruta med en oändlig utsträckning, men endast en ändlig tjocklek $d$. Även om just oändliga glasrutor är ganska ovanliga(...) så kan detta ändå vara en god modell för en glasruta där längdskalorna i höjd- och sidled är betydligt större än den i djupled. Då behöver vi bara studera temperaturvariationer genom glasrutan. Värmeledningsekvationen reduceras då till den endimensionella ekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u, \tag{2}$$

där $x$ är avståndet från glasrutans innersida. Vi delar nu in glasrutan i $m$ punkter, så att den första och sista punkten ligger på inner- respektive yttersidan, och övriga punkter ligger på ett avstånd $\delta x = d/(m-1)$ från varandra. Vi representerar temperaturfältet genom denna diskretisering $T(x_i, t) \equiv T_i(t)$. En enkel numerisk approximation till Laplacianen $\nabla^2 T$ i punkten $x_i$ kan då skrivas

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\delta x^2}. \tag{3}$$

På samma sätt kan vi approximera tidsderivatan i punkten $i$ med

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{T_i\left(t + \delta t\right) - T_i\left(t\right)}{\delta t}. \tag{4}$$

Detta ger oss differensekvationen

$$\frac{T_i\left(t + \delta t\right) - T_i\left(t\right)}{\delta t} = k\frac{T_{i+1}\left(t\right) - 2T_i\left(t\right) + T_{i-1}\left(t\right)}{\delta x^2} + u_i\left(t\right), \tag{5}$$

där vi också har diskretiserat källtätheten $u(x_i, t) \equiv u_i(t)$.

Vi kan nu lösa ut $T_i(t + \delta t)$:

$$T_i\left(t + \delta t\right) = T_i\left(t\right) + \delta t k \frac{T_{i+1}\left(t\right) - 2T_i\left(t\right) + T_{i-1}\left(t\right)}{\delta x^2} + \delta t u_i\left(t\right). \tag{6}$$

Detta ger oss en enkel metod för att lösa värmeledningsekvationen.

Vad som nu återstår att göra är att bestämma en bra storlek på tidssteget $\delta t$. Om $\delta t$ blir för stor blir nämligen vår algoritm instabil. För stabilitet krävs ett tidssteg

$$\delta t = K \frac{\delta x^2}{k}, \tag{7}$$

där $K$ skall vara av storleksordningen 0.25–0.5. Det syns tydligt om algoritmen blir instabil, eftersom i så fall kommer temperaturen snabbt att bli orimligt hög i någon punkt. Vårt uttryck för $\delta t$ visar också på begränsningen med vår metod. Tidssteget kommer att bli väldigt kort om vi behöver ett kort avstånd mellan våra punkter. Därför används mer sofistikerade metoder i professionella beräkningar.

## Uppgift 1-1: Endimensionell temperaturfördelning i glasruta med Dirichlet randvillkor

Skriv ett Matlab- (eller Python-) program för att studera hur temperaturfördelningen genom en glasruta utvecklas med tiden. Vi antar att glasrutan är 10 mm tjock, och att vid starttidpunkten ($t = 0$) håller hela rutan temperaturen 0 °C, utom dess innersida som håller temperaturen 22 °C. Det finns ingen värmekälla inuti glasrutan. Vi antar att vi har Dirichlet randvillkor där inner- och yttersidorna alltså håller sin respektive konstanta temperatur. Erforderliga materialkonstanter kan hittas i tabeller (t.ex. Physics Handbook eller online. Liten ordlista: densitet=density; värmekapacitivitet=heat capacitivity; värmeledningsförmåga=thermal conductivity. Notera SI enheter). Ni bör kunna redovisa vilka konstanter ni har använt. Tänk också på att ge en explicit tidsskala så att ni kan se hur snabbt tidsförloppet är. Bestäm analytiskt den stationära temperaturfördelningen.

**Redovisning.**

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar tidsförloppet för temperaturfördelningen.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Ni skall även redovisa vilka materialkonstanter ni har använt och vilken källa ni har tagit dessa från.
- Redovisa kortfattat härledningen av den analytiska lösningen i rapporten.

**Goda råd:** Börja med att bestämma hur många punkter ni skall använda, 20 till 30 stycken torde räcka. Den första punkten kommer då att ligga på glasrutans innersida och den sista punkten på dess yttersida. Skapa sedan två vektorer *T1* och *T2*, som båda har lika många element som antalet diskretiseringspunkter. *T1* skall få lagra temperaturen vid den gamla tidpunkten, medan *T2* kommer att innehålla temperaturen vid den nya tidpunkten, vilken i sin tur beräknas ur Ekv. (6). Alltså måste du sätta *T1* till glasrutans temperaturfördelning vid $t = 0$. Detta är enkelt att göra om du använder funktionen `zeros(m)`, som ger dig en flyttalsvektor med $m$ element, som alla är 0, och sedan kan du bara ändra på temperaturen i den första punkten. Beräkna sedan övriga konstanter som du behöver. Konstruera sedan en loop för att beräkna *T2* ur *T1* enligt Ekv. (6), men kom ihåg att de första och sista punkterna i *T2* skall representera randvillkoren. Upprepa sedan beräkningen av *T2* så många gånger som behövs för att du skall kunna följa temperaturutvecklingen. Fundera på ett bra villkor för att definiera när stationärlösningen har uppnåtts. Tänk på att i slutet av varje steg, när hela *T2* är beräknad, måste du tilldela *T1* det värde som *T2* har.

Vi har nu löst värmeledningsekvationen för en dimension med randvillkoret att temperaturen är konstant på inner- och yttersidor. Detta är ett exempel på ett Dirichlet-villkor. I ett värmeledningsproblem betyder detta att glasrutan hela tiden tar emot eller avger precis så mycket värme som krävs för att den skall behålla samma temperatur. En annan möjlighet är att glasrutans inner- och yttersidor är isolerade på ett sådant sätt att de inte kan ta emot eller avge någon värme till omgivningen. Det betyder att värmeströmmen, $-\lambda\nabla T$ är 0 på glasets ytor, alltså måste $\nabla T$ försvinna där. Sådana randvillkor kallar vi för Neumann-villkor.

## Uppgift 1-2: Endimensionell temperaturfördelning i glasruta med värmekälla

Antag nu att det finns en konstant och homogen värmekälla $s$ inuti glaset. Lös värmeledningsekvationen för fallet att $s = 100\,\mathrm{kW\,m^{-3}}$. Antag att hela glasrutan från början har temperaturen $0\,^\circ\mathrm{C}$, att dess båda sidor håller denna temperatur hela tiden. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen.

**Redovisning.**

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar tidsförloppet för temperaturfördelningen.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Ni skall även redovisa vilka materialkonstanter ni har använt och vilken källa ni har tagit dessa från.
- Redovisa kortfattat härledningen av den analytiska lösningen i rapporten.

## Uppgift 2-1: Tvådimensionell temperaturfördelning i en platta med Dirichlet randvillkor

Vi studerar nu ett tvådimensionellt problem som inte är lika enkelt att lösa analytiskt. Vårt modellsystem är en kopparplatta med sidlängderna 2 x 2 cm. För denna uppgift tänker oss att utsträckningen i z-led är oändlig så att vi inte behöver ta hänsyn till någon rand i denna dimension.

Diskretisera det två-dimensionella området genom att skapa ett rutnät med 61 x 61 punkter och konstant steglängd ($\delta x = \delta y$). Mittpunkten ligger då i punkten $(x_{31}, y_{31}$.

Inuti plattan finns två tidsoberoende punktlika värmekällor belägna vid $y = \pm 2$ mm, där plattans centrum är i $x = y = 0$. Med ovan diskretisering kan vi beskriva värmekällorna med $s\left(x_{31}, y_{25}\right) = s\left(x_{31}, y_{37}\right) = 100\,\mathrm{MW/m}^3$ (och noll överallt annars).

Skriv ett Matlab- (eller Python-) program för att studera hur temperaturfördelningen i plattan utvecklas med tiden. Vid starttidpunkten ($t = 0$) håller hela plattan temperaturen $0\,^o\mathrm{C}$. Alla plattans fyra sidor håller sedan konstant temperatur $T = 0\,^o\mathrm{C}$ genom hela tidsförloppet. Erforderliga materialkonstanter kan hittas i t.ex. Physics Handbook.

Finn den stationära temperaturfördelningen i plattan genom att lösa värmeledningsekvationen numeriskt och stega fram i tiden tills temperaturfältet inte ändrar sig nämnvärt mellan två tidssteg.

**Redovisning.**

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar en fältbild med isotermer (nivåkurvor för temperaturfältet) och värmeström ($\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$). Det kan vara lämpligt att välja isotermerna $T = 0.001, 0.002, 0.004, 0.008, 0.012, 0.014\,^o\mathrm{C}$.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Ni skall även redovisa vilka materialkonstanter ni har använt och vilken källa ni har tagit dessa från.

**Goda råd:** Beteckna temperaturfältet $T(x_i, y_j, t) \equiv T_{i,j}(t)$. Vi kan då generalisera den numeriska formuleringen av värmeledningsekvationen till

$$\begin{aligned} T_{i,j}\left(t + \delta t\right) = T_{i,j}\left(t\right) + \frac{k\delta t}{\delta x^2} \Big[ & T_{i+1,j}\left(t\right) - 2T_{i,j}\left(t\right) \\ & + T_{i-1,j}\left(t\right) + T_{i,j+1}\left(t\right) - 2T_{i,j}\left(t\right) + T_{i,j-1}\left(t\right) \Big] + \delta t u_{i,j}, \end{aligned}$$

där värmekällorna är tidsoberoende.

Notera också att den numeriska lösningen i två dimensioner blir ännu känsligare för valet av diskretisering. Man märker givetvis när lösningen inte konvergerar. Vad gäller tidssteget kan ni eventuellt behöva använda konstanten $K \lesssim 0.25$, se ekv (7).

## Matlab och Python

Programmeringsspråket `Matlab` har ni antagligen redan stiftat bekantskap med. Det finns dock vissa speciella funktioner som är särskilt användbara för att visualisera och hantera vektorfält. Se gärna appendix A i kurskompendiet (*En första kurs i matematisk fysik*, 2017).

För den intresserade rekommenderar vi även det mycket kraftfulla programmeringsspråket `Python` som också diskuteras i kurskompendiet, appendix A. Tillsammans med modulen `numpy`, för matematiska funktioner, och `matplotlib`, för visualisering med matlab-liknande syntax, erbjuder detta ett fullgott alternativ. Att följa andras exempel är ofta en bra start. Se gärna Cookbook / Matplotlib om ni vill testa.

## Om rapporten

Rapporten till denna uppgift skall vara mycket begränsad i omfattning. Det är inte nödvändigt att skriva en inledning eller ett metodavsnitt. Men behöver inte heller reproducera själva uppgiftsformuleringen. Istället gäller följande riktlinjer tillsammans med de mer specifika instruktionerna till varje uppgift:

- Uppgiften utförs i par. Rapporten skall skrivas i TeX/LaTeX och varje par lämnar in en gemensam rapport. Detta görs via projektgrupper som finns på PingPong.
- Rapporten skall inte omfatta mer än fyra sidor inklusive era figurer. Bifoga er källkod i ett appendix (räknas ej med i sidantalet).
- Numeriska värden på erforderliga materialkonstanter (med enheter och källangivelse) måste anges i rapporten.
- För varje deluppgift skall ni:
  - Redovisa era resultat i grafisk form. Figurerna skall vara tydliga. Glöm inte enheter.
  - Diskutera kortfattat era resultat. Är den beräknade stationära temperaturfördelningen rimlig givet de olika randvillkoren?