Cederwall 7.1-2 - Stegfunktioner och deltafunktioner

Christin Rhén*
(Dated: October 3, 2016)

STEGFUNKTIONER

Konstruera approximationerna till stegfunktionen svarande mot approximationerna i ekvation (7.6), (7.7), och (7.8).

Stegfunktionen kan definieras som (ekvation (7.10) i Cederwall)

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t\ \delta(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Exakt vilket värde $H(0)$ antar varierar i litteraturen. Vanligt är att $H(0)$ är odefinierat eller lika med $1/2$.

Varje given deltafunktions-approximation kan alltså integreras enligt ekvation (1) och ger då en motsvarande stegfunktions-approximation. Till exempel kan

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} h_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \begin{cases} 1/\epsilon & |x| < \epsilon/2 \\ 0 & |x| > \epsilon/2 \end{cases} \tag{2}$$

integreras trivialt till

$$H(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \begin{cases} 0 & x < -\epsilon/2 \\ \frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2} & -\epsilon/2 < x < \epsilon/2 \\ 1 & x > \epsilon/2 \end{cases} . \tag{3}$$

För den Gaussiska deltafunktions-approximationen $h_\epsilon(x) = \exp\left[-x^2/\epsilon^2\right]/\epsilon\sqrt{\pi}$ får vi stegfunktionen $H(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]$. Här är felfunktionen

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}t\ e^{-t^2}. \tag{4}$$

Slutligen har vi den Lorentzianska approximationen $h_\epsilon(x) = \epsilon\pi^{-1}(x^2+\epsilon^2)^{-1}$, som även den är rättfram att integrera. Resultatet är $H(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tanh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]$.

Prova gärna att skissa dessa funktioner för några olika värden på ϵ.

DELTAFUNKTIONENS DERIVATOR

Konstruera approximationerna till de första tre derivatorna av en deltafunktion svarande mot approximationerna (7.7) och (7.8) av deltafunktionen. Skissera funktionernas beteende och reflektera över varför deras integraler mot en funktion $f(x)$ ger de resultat de gör i gränsen $\epsilon \to 0$.

Rättfram derivering ger

$$h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}, \tag{5}$$

$$h'_\epsilon(x) = -\frac{2x}{\epsilon^2} h_\epsilon(x), \tag{6}$$

$$h''_\epsilon(x) = \frac{4x^2 - 2\epsilon^2}{\epsilon^4} h_\epsilon(x), \tag{7}$$

$$h'''_\epsilon(x) = -\frac{8x^3 - 12x\epsilon^2}{\epsilon^6} h_\epsilon(x), \tag{8}$$

och

$$h_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi\left(x^2 + \epsilon^2\right)}, \tag{9}$$

$$h'_\epsilon(x) = -\frac{2x}{x^2 + \epsilon^2} h_\epsilon(x), \tag{10}$$

$$h''_\epsilon(x) = \frac{6x^2 - 2\epsilon^2}{\left(x^2 + \epsilon^2\right)^2} h_\epsilon(x), \tag{11}$$

$$h'''_\epsilon(x) = -\frac{24x^3 - 24x\epsilon^2}{\left(x^2 + \epsilon^2\right)^3} h_\epsilon(x). \tag{12}$$

Dessa funktioner och derivator är skisserade för $\epsilon = 0.02, 0.04, 0.06$.

Deltafunktionens derivator ska gå att partialintegrera (se diskussionen av ekvation (7.9) i Cederwall). Det vill säga (alla integraler går över hela $\mathbb{R}$, så alla randtermer är lika med noll):

$$\int \mathrm{d}x\ \delta'(x) f(x) = -\int \mathrm{d}x\ \delta(x) f'(x) = -f'(0), \tag{13}$$

$$\int \mathrm{d}x\ \delta''(x) f(x) = \int \mathrm{d}x\ \delta(x) f''(x) = f''(0), \tag{14}$$

$$\int \mathrm{d}x\ \delta'''(x) f(x) = -\int \mathrm{d}x\ \delta(x) f'''(x) = -f'''(0). \tag{15}$$

För en godtycklig slät funktion $f(x)$ och $x = \to 0$:

$$f(\epsilon) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 + \dots. \tag{16}$$

I båda fallen ovan är $h_\epsilon(x)$ en jämn funktion, så alla termer av typen $x^{2n+1}h_\epsilon(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ integreras till noll.

Vi börjar titta på den Gaussiska approximationen. För förstaderivatan får vi ($f^{(n)}(0) \equiv f_0^{(n)}$), genom att partialintegrera upprepade gånger,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ f(x) h'_\epsilon(x) &\approx -\frac{2}{\epsilon^2} \int \mathrm{d}x\ x h_\epsilon(x) \left[f'_0 x + \frac{1}{6} f'''_0 x^3 + \dots\right] \\ &= -f'_0 - \frac{1}{4} f'''_0 \epsilon^2 + \dots. \end{aligned} \tag{17}$$

Det är lätt att inse att alla termer som innehåller högre ordningens derivator av $f(x)$ kommer vara proportionella mot ϵ, och gå mot noll. Kvar finns bara den väntade $-f'(0)$.

På samma sätt studerar vi integralen över andraderivatan:

$$\int \mathrm{d}x\ f(x)h''_\epsilon(x) \approx \int \mathrm{d}x\ \frac{4x^2-2\epsilon^2}{\epsilon^4} h_\epsilon(x) \left[f_0 + \frac{1}{2} f''_0 x^2 + \ldots \right] = \frac{2-2}{\epsilon^2} f(0) + \frac{3-1}{2} f'''_0 \epsilon^2 + \ldots . \quad (18)$$

De högre ordningens termer kommer återigen vara proprotionella mot ϵ, och försvinner när gränsvärdet tas, vilket resulterar i att bara $f''(0)$ finns kvar.

Vi övergår nu till att studera den Lorentzianska approximationen. På samma sätt som ovan får vi för förstaderivatan

$$\int \mathrm{d}x\ f(x)h'_\epsilon(x) \approx -\int \mathrm{d}x\ \frac{2x}{x^2+\epsilon^2} h_\epsilon(x) \left[f'_0 x + \frac{1}{6} f'''_0 x^3 + \ldots \right] = -f'_0 - \frac{\epsilon}{3\pi} \left[x + \frac{\epsilon^2 x}{2\epsilon^2 + 2x^2} - \frac{3\epsilon}{2} \tan^{-1} \frac{x}{\epsilon} \right]_{-\infty}^{\infty} + \ldots . \quad (19)$$

Eftersom att x här är en integrationsvariabel har den inget konstigt för sig, utan går linjärt mot oändligheten. I gränsen $+epsilon \to 0$ går därför de högre ordningens termer mot noll, och vi får igen det väntade resultatet.

För andraderivatan får vi

$$\int \mathrm{d}x\ f(x)h''_\epsilon(x) \approx \int \mathrm{d}x\ \frac{6x^2-2\epsilon^2}{(x^2+\epsilon^2)^2} h_\epsilon(x) \left[f_0 + \frac{1}{2} f''_0 x^2 + \ldots \right] = \frac{3-3}{4\epsilon^2} f(0) + \frac{9-1}{8} f'''_0 \epsilon^2 + \ldots \quad (20)$$

och högre ordningens termer är proportionella mot ϵ.

Att bevisa ekvation (15) för de båda fallen av $h_\epsilon(x)$ lämnas som en övning.