Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Tisdagen den 20 december 2016 klockan 08.30-12.30 i M-huset.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Värmeledningsekvationen lyder

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = s$$

Svara nu på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Förklara vad symbolerna c, ρ, T, λ och s står för och ge deras SI-enheter.

(b) Ge en fysikalisk tolkning av Dirichlets respektive Neumanns randvillkor för temperturfältet på randen till ett område.

(c) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Antag att temperaturfördelningen vid $t = 0$ är $T(x) = T_0\frac{x(d-x)}{d^2}$. Bestäm den stationära temperaturfördelningen givet att ingen värme passerar genom begränsningsytorna för $t > 0$.

Lösning:

(a) c: värmekapacitivitet [J/(kg K)]; ρ: densitet [kg/m^3]; T: temperatur [K]; λ: värmeledningsförmåga [J/(m s K)]; s: värmekälltäthet [J/(m^3 s)].

(b) Dirichlets randvillkor betyder konstant temperatur på randen som t.ex. när omgivningen kan betraktas som en oändligt stor reservoar. Neumanns randvillkor innebär att gradienten av temperaturfältet är konstant, dvs att värmeflödet in eller ut genom ytan är konstant. Ett homogent Neumannvillkor innebär en perfekt isolering.

(c) Stationär lösning med givna randvillkor kan bara fås i avsaknad av värmekällor. Isoleringen gör att den totala värmeenergin är bevarad och temperaturen blir konstant $T(x) = T_0/6$.

2. Rita en tydlig fältbild i xy-planet för det tvådimensionella hastighetsfältet

$$\vec{v} = -v_0 x\hat{x} + v_0 y\hat{y}.$$

Området skall inkludera både positiva och negativa värden på x och y. Finns det några källor och/eller virvlar?

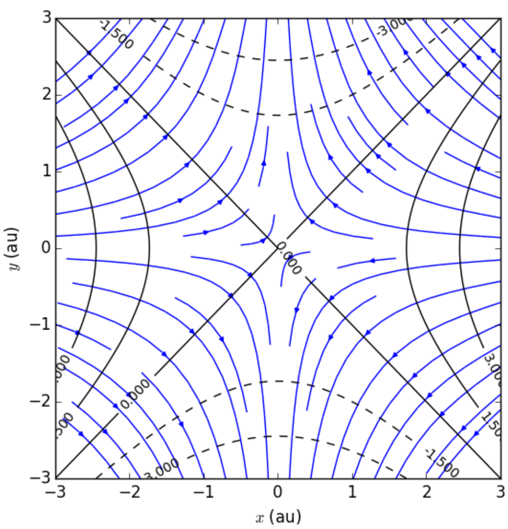
Lösning:

Hastighetsfältet är divergensfritt ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) vilket innebär att det finns en potential. Denna blir

$$\phi(x, y) = \frac{A}{2}(x^2 - y^2).$$

där A är en positiv konstant. Divergensfrihet innebär avsaknad av källor. Hastighetsfältet är också rotationsfritt ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) vilket innebär avsaknad av virvlar.

En fältbild (potential och fältlinjer) visas nedan. Notera att det finns områden där hastigheten är noll. Vi noterar också att fältlinjerna blir parallella med x- och y-axlarna när vi kommer tillräckligt nära. Vi kan därför tänka oss dessa som fasta väggar och att vårt hastighetsfält beskriver strömmen vid ett hörn.



---

3. (a) Använd transformationsegenskaper för att visa att gradienten av en skalär är en vektor.
Ledning: En vektor skall uppfylla transformationsregeln $v'_i = L_{ij} v_j$,

där $\mathbf{L}$ *är transformationsmatrisen som också relaterar ortsvektorerna i de två koordinatsystemen* $x_i' = L_{ij}x_j$. *För en skalär gäller* $s' = s$.

(b) Visa att följande samband gäller för produkten av två Levi-Civita tensorer med ett summationsindex $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Lösning:

(a) Vi försöker uttrycka gradienten av skalären i det primade koordinatsystemet i termer av samma uttryck i det oprimade.

$$(\nabla\phi)_i' = \frac{\partial}{\partial x_i'}\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = L_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = L_{ij}(\nabla\phi)_j,$$

vilket visar att $(\nabla\phi)_j$ transformerar som en vektor. Här har vi utnyttjat kedjeregeln, transformationen $x_i' = L_{ij}x_j$, samt att $\phi' = \phi$ eftersom det är en skalär.

(b) Cyklisk permutation ger

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{1}$$

Det inses lätt att $i \neq j$ och $l \neq m$. Vidare inses att paret ij måste vara lika med lm eller ml. Betrakta t.ex. $i, j \in [1, 2]$. Då kommer enbart $k = 3$ termen från summan att bidra och vi har följande möjligheter

$$\begin{array}{lll} ijk & lmk & \text{Resultat} \\ 123 & 123 & = 1 \\ 123 & 213 & = -1 \\ 213 & 123 & = -1 \\ 213 & 213 & = 1, \end{array} \tag{2}$$

vilket motsvarar exakt kombinationen av deltafunktioner i Ekv (1) ovan.

---

4. Beräkna integralen

$$\int_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

där S är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ för $z > 0$ och fältet ges av

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax\hat{x} + ay\hat{y} + x^2\hat{z}\right),$$

med konstanter a och F_0.

Lösning:

- Ytan är en halvsfär med radien a.
- Fältet är reguljärt med divergensen $\nabla \cdot \vec{F} = 2F_0/a$.
- Vi sluter ytan genom att lägga till en pottenplatta S_1 med normalen $-\hat{z}$. Gauss sats ger oss att
$$\oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = \frac{4\pi F_0 a^2}{3}.$$
- Integralen över bottenplattan räknas enklast ut i cylinderkoordinater ($x = \rho \cos\varphi$)
$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{F_0}{a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} (\rho \cos\varphi)^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi F_0 a^2}{4}.$$
- och svaret blir därför
$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{19\pi F_0 a^2}{12}.$$

---

5. Betrakta en platta med tjockleken a i y-led, oändlig utsträckning i positiv x-led samt i $\pm z$-led (se figur). Notera att den oändliga utsträckningen i z-led gör att problemet effektivt sett blir tvådimensionellt. Inuti plattan gäller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. Dessutom gäller randvillkoren
$$\begin{aligned} &\phi(x, y = 0) = \phi(x, y = a) = 0 \\ &\phi(x, y)|_{x\to\infty} = 0 \\ &\phi(x = 0, y) = \phi_0 \sin(\pi y/a). \end{aligned}$$
Finn lösningen $\phi(x, y)$.
Ledning: använd variabelseparation, dvs skriv $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$.
Lösning:

Insättning av ansatsen i Laplaces ekvation och division med $\phi(x, y)$ ger
$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0.$$
Eftersom detta skall vara sant i hela området måste $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = C = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$, där C är en konstant. Resultat blir två ordinära differentialekvationer
$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 Y.$$

Vi kunde ha valt motsatt tecken, dvs $-k^2$ i HL på den första ekvationer och $+k^2$ på den andra, men just detta val ger lösningarna

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky).$$

Då kan vi få korrekta randvillkor genom att sätta $A = D = 0$, $B * C = \phi_0$, samt $k = \pi/a$. Detta ger nämligen lösningen

$$\phi(x, y) = \phi_0 e^{-\pi x/a} \sin(\pi y/a).$$

---

6. Betrakta en cirkelskiva i xy-planet med radien a. Inne i området gäller Poissons ekvation för någon allmän laddningsfördelning. På randen gäller Dirichlets homogena randvillkor $\phi(\rho = a) = 0$. Visa att följande funktion

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,') = -\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'}{\vec{\rho} - \frac{a^2}{(\rho')^2}\vec{\rho}\,'} \right| + \frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho'}{a}$$

är en Greensfunktion för denna situation. I uppgiften ingår alltså att inse vad det är som skall verifieras. Även ett tydligt resonemang kring detta kan ge delpoäng.

Lösning:

För att verifiera att detta är korrekt Greensfunktion skall vi visa att

- Den löser Poissons ekvation för en punktkälla med styrkan 1 i punkten $\vec{\rho}\,'$ inne i cirkelskivan, dvs $\Delta G(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,') = -\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,')$, inne i området. Notera att Laplacianen verkar på $\vec{\rho}$-koordinaten.
- Den uppfyller randvillkoren, dvs $G(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')\big|_{\rho=a} = 0 \ \forall \vec{\rho}\,'$.

För att visa att randvillkoren är uppfyllda för den givna Greensfunktionen bör man rita en figur och visa att kvoten av de avstånden i den första logaritmen är lika med ρ'/a. Detta är enkelt för fallet då $\vec{\rho}$ är parallell eller antiparallell med $\vec{\rho}\,'$. För det allmänna fallet använder man cosinussatsen.

Vad gäller Laplacianen så noterar vi att derivatan är diskontinuerlig i punkten $\vec{\rho} = \vec{\rho}\,'$. Utanför denna gäller att $G(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')\big|_{\rho=a} = 0$. Lösningen motsvarar potentialen för en linjekälla med styrka 1 genom $\vec{\rho}\,'$.
