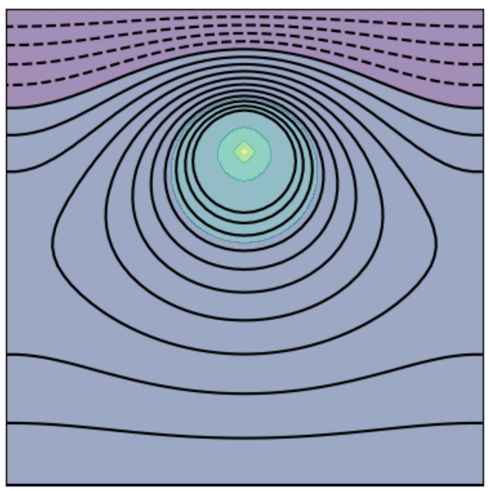
FFM234, Datoruppgift 2: Värmeledning

Christian Forssén

Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige, Email: `christian.forssen@chalmers.se`

Aug 28, 2020



Inledning

I den här datorlaborationen skall vi studera värmeledning genom marken under en kall vinterdag. Vi kommer framförallt att studera ett symmetriskt scenario där det räcker att betrakta ett endimensionellt snitt mellan markytan (med fix temperatur $-10°$ C) ner till ett tjälfritt djup på en meter (med fix temperatur $0°$ C). Vi kommer att betrakta två olika situationer där korrekta lösningar av bägge uppgifterna inom detta endimensionella problem krävs för att bli godkänd på laborationen.

I den frivilliga andra delen av denna laboration betraktar vi ett tvådimensionellt tvärsnitt och modellerar effekten av ett nedgrävt värmerör. En korrekt lösning av denna del kan ge bonuspoäng som räknas mot överbetyg; dock hjälper dessa bonuspoäng ej mot godkänt betyg.

Den fysikaliska processen i bägge fallen beskrivs av värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + u, \tag{1}$$

där T är ett skalärfält som beskriver temperaturen som en funktion av läget och tiden. Parametern $k = \lambda/(c\rho)$ består av materialkonstanterna λ (värmeledningsförmågan), c (värmekapacitiviten) och ρ (materialets densitet). Eventuella värmekällor beskrivs av skalärfältet $u \equiv s/(c\rho)$, där SI-enheten för s är W/m^3. För att ge en entydig lösning måste värmeledningsekvationen kompletteras med begynnelse- och randvillkor för temperaturen, det vill säga vi måste beskriva temperaturfördelningen i den aktuella geometrin vid starttidpunkten, och ge villkor för temperaturen (eller temperaturgradienten) på geometrins rand vid varje tidpunkt.

När $\partial T/\partial t = 0$ har vi uppnått en stationärlösning.

Numerisk behandling av värmeledningsekvationen i en dimension

Det finns analytiska tekniker för att lösa den tidsberoende värmeledningsekvationen, men dessa fungerar enbart i vissa situationer och kräver metoder som ingår i Fourier-analys, och faller därmed utanför ramen för vår kurs. Däremot kan vi konstruera en enkel numerisk metod för att lösa värmeledningsekvationen. Låt oss till att börja med att betrakta en endimensionell modell. Detta motsvarar en situation där vi har temperaturvariatoner endast i en riktning medan fältet inte varierar i de andra två riktningarna, t.ex. beroende på att utsträckningen kan betraktas som oändlig. Värmeledningsekvationen reduceras då till den endimensionella ekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u, \tag{2}$$

där x är avståndet från markytan. Vi delar nu in djupriktningen i m punkter, så att den första och sista punkten ligger på markytan respektive på det största djupet d. Med en linjär diskretisering ligger punkterna på ett avstånd $\delta x = d/(m-1)$ från varandra. Temperaturfältet kommer nu att representeras av dess värden i diskreta punkter $T(x_i, t) \equiv T_i(t)$. En enkel numerisk approximation till Laplacianen $\nabla^2 T$ i punkten x_i kan då skrivas

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\delta x^2}. \tag{3}$$

På samma sätt kan vi approximera tidsderivatan i punkten i med

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{T_i\,(t+\delta t) - T_i\,(t)}{\delta t}. \tag{4}$$

Detta ger oss differensekvationen

$$\frac{T_i\left(t+\delta t\right)-T_i\left(t\right)}{\delta t}=k\frac{T_{i+1}\left(t\right)-2T_i\left(t\right)+T_{i-1}\left(t\right)}{\delta x^2}+u_i\left(t\right), \tag{5}$$

där vi också har diskretiserat källtätheten $u(x_i,t)\equiv u_i(t)$.

Vi kan nu lösa ut $T_i(t+\delta t)$ och beräkna dess värde givet det diskretiserade temperaturfältet vid tiden t:

$$T_i\left(t+\delta t\right)=T_i\left(t\right)+\delta tk\frac{T_{i+1}\left(t\right)-2T_i\left(t\right)+T_{i-1}\left(t\right)}{\delta x^2}+\delta tu_i\left(t\right). \tag{6}$$

Detta ger oss en enkel metod för att lösa (tidsintegrera) värmeledningsekvationen.

Vad som nu återstår att göra är att bestämma en bra storlek på tidssteget δt. Om δt blir för stor blir nämligen vår algoritm instabil. För stabilitet krävs ett tidssteg

$$\delta t=K\frac{\delta x^2}{k}, \tag{7}$$

där K skall vara av storleksordningen 0.25–0.5. Det syns tydligt om algoritmen blir instabil, eftersom temperaturen i så fall snabbt kommer att bli orimligt hög i någon punkt. Vårt uttryck för δt visar också på begränsningen med vår metod. Tidssteget kommer att bli väldigt kort om vi behöver ett kort avstånd mellan våra punkter. Mer sofistikerade metoder används ofta i professionella beräkningar.

Uppgift 1-1: Endimensionell temperaturfördelning med Dirichlets randvillkor

Skriv ett Matlab- (eller Python-) program för att studera temperaturfördelningen i marken givet följande: Vi betraktar området från markytan ner till ett tjälfritt djup på 1.0 meter där temperaturen alltid är 0 °C. Vi är intresserade av uppkomsten av en stationär lösning som uppnås efter en viss tid. Antag att hela marken vid starttidpunkten ($t=0$) håller temperaturen 0 °C förutom ytan vid $x=0$ där tempteraturen är fix -10 °C. I denna första uppgift finns det ingen värmekälla i det aktuella området. Vi antar att vi har Dirichlets randvillkor så att ytan och den djupaste punkten håller sin respektive konstanta temperatur. Vi antar vidare att jorden är leraktig och att de relevanta materialegenskaperna har följande numeriska värden: densiteten $\rho=1500\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, värmeledningsförmåga $\lambda=1.0\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, värmekapacitivitet $c=1000\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ (om ni söker själva i tabeller eller digitala källor så inser ni säkert att markens termiska egenskaper beror ganska mycket på jordens sammansättning).

Lös det tidsberoende problemet numeriskt och finn den stationära lösningen där temperaturfördelningen inte längre ändras nämnvärt. Bestäm även den stationära temperaturfördelningen analytiskt och jämför detta med ert numeriska resultat.

Redovisning.

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar tidsförloppet för temperaturfätet.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Jämför med den analytiska lösningen för att kontrollera er numeriska lösning.
- Redovisa kortfattat härledningen av den analytiska lösningen i rapporten.
- Ni kommer att finna att värme strömmar in genom den ena ändpunken och ut genom den andra. Beräkna (analytiskt eller numeriskt) det totala flödet ut ur området.

Goda råd: Börja med att bestämma hur många punkter ni skall använda, cirka 30 stycken torde räcka. Den första punkten kommer då att ligga på markytan och den sista motsvarar den djupaste punkten. Skapa sedan två vektorer *T_old* och *T_new*, som båda har lika många element som antalet diskretiseringspunkter. *T_old* skall få lagra temperaturen vid den gamla tidpunkten, medan *T_new* kommer att innehålla temperaturen vid den nya tidpunkten, vilken i sin tur beräknas ur Ekv. (6). Vid starten måste du alltså sätta *T_old* till glasrutans temperaturfördelning vid $t = 0$. Detta är enkelt att göra om du använder funktionen `zeros(m)`, som ger dig en flyttalsvektor med m element, som alla är 0, och sedan kan du bara ändra på temperaturen i den första punkten. Beräkna sedan övriga konstanter som du behöver.

Konstruera en loop som tar små tidssteg och beräknar *T_new* ur *T_old* enligt Ekv. (6), men kom ihåg att de första och sista punkterna i *T_new* bestäms av randvillkoren. Fundera på ett bra villkor för att definiera när stationärlösningen har uppnåtts så att loopen avbryts. Tänk på att i slutet av varje tidssteg, när hela *T_new* är beräknad, måste du tilldela *T_old* = *T_new* har eftersom det blir situationen vid starten på nästa tidssteg.

Vi har nu löst värmeledningsekvationen för en dimension med randvillkoret att temperaturen är konstant på randpunkterna. Detta är ett exempel på ett Dirichletvillkor. I ett värmeledningsproblem betyder detta att värmeströmmen genom randen anpassas så som krävs för att den skall behålla samma temperatur. En annan möjlighet skulle vara att randen är isolerad på ett sådant sätt att ingen värme kan tas emot eller avges till omgivningen. Det betyder att värmeströmmen, $-\lambda dT/dx$ är noll på randen, alltså måste dT/dx försvinna där. Sådana randvillkor kallar vi för Neumann-villkor.

Uppgift 1-2: Endimensionell temperaturfördelning med värmekälla

Antag nu att det finns en konstant och homogen värmekälla s inuti marken. Lös värmeledningsekvationen för fallet att $s = 100\,\mathrm{W\,m^{-3}}$. Använd samma begynnelse- och randvillkor som i den första uppgiften. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen.

Redovisning.

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar tidsförloppet för temperaturfältet.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Jämför med den analytiska lösningen för att kontrollera er numeriska lösning.
- Redovisa kortfattat härledningen av den analytiska lösningen i rapporten.
- Ni kommer att finna att värme strömmar ut genom bägge ändpunkterna. Beräkna (analytiskt eller numeriskt) det totala flödet ut ur området.

Del 2: Extra uppgift

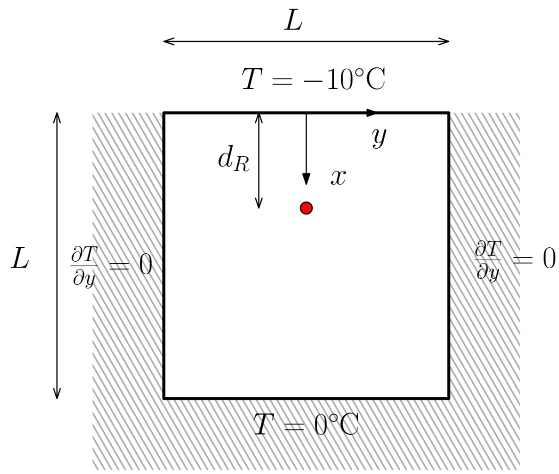
Denna uppgift är ej obligatorisk, men kan ge bonuspoäng som räknas mot att nå betyg 4 eller 5.

Uppgift 2-1: Tvådimensionell temperaturfördelning: värmerör i mark

Vi studerar nu ett tvådimensionellt problem som inte är lika enkelt att lösa analytiskt. Uppgiften är att modellera temperaturfördelningen och värmeflödet som uppstår då det finns ett långt värmerör nedgrävt i horisontell z-led i marken på djupet $d_r = 30$ cm. För denna uppgift tänker oss att rörets utsträckning i z-led är oändlig så att vi inte behöver ta hänsyn till någon rand i denna riktning. Däremot kommer temperaturen nu att variera i horisontell y-led. Vi betraktar ett kvadratiskt tvärsnitt med sidlängderna $L \times L = 1 \times 1$ m. Värmeröret passerar på djupet $x = d_r$ och på mitten i y-led av vårt kvadratiska tvärsnitt (se figur).

Diskretisera det två-dimensionella området genom att skapa ett rutnät med 51 x 51 punkter och konstant steglängd ($\delta x = \delta y = 0.02$ m). Vi antar att värmerörets diameter är cirka 2 cm så att det beskrivs väl av en värmekälla som är nollskild enbart i en ruta i vårt tvådimensionella rutnät. Där är källtätheten $s = 250\text{kW} \cdot \text{m}^{-3}$. Notera att det innebär att för varje meter i z-led avger värmeröret effekten $250 \cdot 10^3 \text{W/m}^3 \cdot 0.02^2 \text{m}^2 \cdot 1.0\text{m} = 100\text{W}$.

Skriv ett Matlab- (eller Python-) program för att studera hur det tvådimensionella temperaturfältet utvecklas med tiden. Vid starttidpunkten ($t = 0$) håller hela plattan temperaturen $0\,^\circ$C förutom markytan som håller temperaturen $-10\,^\circ$C. Vi har en blandning av olika randvillkor. Temperaturen är konstant, dvs Dirichlets randvillkor, vid markytan ($-10\,^\circ$C) och vid den djupa randen



Figur 1: Kvadratiskt marktvärsnitt med randvillkor. Värmekällan ligger på djupet d_R under markytan.

(0 °C). Dessutom antar vi att tvärsnittets utsträckning i y-led är tillräckligt stor så att värmerörets påverkan på temperaturfältet blir försumbar på sidoränderna. Detta skulle innebära att vi inte har någon värmeström i y-led vid dessa två ränderna, vilket i sin motsvarar Neumanns homogena randvillkor.

Finn det stationära temperaturfördelningen genom att lösa värmeledningsekvationen numeriskt och stega fram i tiden tills temperaturfältet inte ändrar sig nämnvärt mellan två tidssteg.

Redovisning.

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar en fältbild med isotermer (nivåkurvor för temperaturfältet) och fältlinjer som visar värmeströmmen ($\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$).
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Beräkna hur mycket värme som flödar ut genom markytan respektive genom bottenytan. Ett möjligt tillämpningsområde för montering av sådana här värmerör skulle vara för issmältning, vilket förstås innebär att vi vill ha så mycket värmeflöde som möjligt genom markytan.

För maximal poängutdelning skall ni även resonera kring följande:

- Faktum är att ovanstående simulering har en uppenbar brist och en duktig fysiker som betraktar er fältbild borde bli något skeptisk till era resultat. Hur skulle ni föreslå att modifiera er numeriska modell för att göra en mer realistisk simulering?

- I en verklig tillämpning skulle det övre marklagret bestå av sand eller grus. Detta material har en högre värmeledningsförmåga än den leraktiga jorden under värmeröret (medan vi kan tänka oss att densiteten samt värmekapacitiviteten är ungefär densamma). Vad skulle detta ha för effekt på värmeflödet genom markytan?

Försök att motivera era svar och demonstrera eventuellt med numeriska simuleringar.

Goda råd: Beteckna temperaturfältet $T(x_i, y_j, t) \equiv T_{i,j}(t)$. Vi kan då generalisera den numeriska formuleringen av värmeledningsekvationen till

$$\begin{aligned} T_{i,j}(t+\delta t) = T_{i,j}(t) + \frac{k\delta t}{\delta x^2}\Big[& T_{i+1,j}(t) - 2T_{i,j}(t) \\ & + T_{i-1,j}(t) + T_{i,j+1}(t) - 2T_{i,j}(t) + T_{i,j-1}(t)\Big] + \delta t u_{i,j}, \end{aligned}$$

där värmekällorna är tidsoberoende.

Man kan approximativt uppfylla randvillkoret att $\partial_y T = 0$ på sidoränderna genom att sätta `T(i,1) = T(i,2)` och `T(i,m) = T(i,m-1)`. Strängt taget så betyder det att derivatan blir 0 någonstans mellan de båda första respektive de båda sista punkterna i y-led, men detta räcker för våra syften. Som överkurs går det att generalisera den här metoden så att derivatan blir 0 precis på randen.

Notera också att den numeriska lösningen i två dimensioner är ännu känsligare för valet av diskretisering. Man märker givetvis när lösningen inte konvergerar. Vad gäller tidssteget kan ni eventuellt behöva använda konstanten $K \lesssim 0.25$, se ekv (7).

Matlab och Python

Programmeringsspråket `Matlab` har ni antagligen redan stiftat bekantskap med. Det finns dock vissa speciella funktioner som är särskilt användbara för att visualisera och hantera vektorfält. Se gärna appendix A i kurskompendiet (*En första kurs i matematisk fysik*, 2017).

För den intresserade rekommenderar vi även det mycket kraftfulla programmeringsspråket `Python` som också diskuteras i kurskompendiet, appendix A. Tillsammans med modulen `numpy`, för matematiska funktioner, och `matplotlib`, för visualisering med matlab-liknande syntax, erbjuder detta ett fullgott alternativ. Att följa andras exempel är ofta en bra start. Se gärna Cookbook / Matplotlib om ni vill testa.

Om rapporten

Rapporten till denna uppgift skall vara mycket begränsad i omfattning. Det är inte nödvändigt att skriva en inledning eller ett metodavsnitt. Men behöver inte heller reproducera själva uppgiftsformuleringen. Istället gäller följande riktlinjer tillsammans med de mer specifika instruktionerna till varje uppgift:

- Uppgiften utförs i par. Rapporten skall skrivas i TeX/LaTeX och varje par lämnar in en gemensam rapport. Detta görs via projektgrupper som finns på PingPong.
- Rapporten skall inte omfatta mer än tre sidor inklusive era figurer (fem sidor om man även redovisar en lösning av det tvådimensionella problemet). Bifoga er källkod i ett appendix (räknas ej med i sidantalet).
- Numeriska värden på erforderliga materialkonstanter (med enheter) måste anges i rapporten.
- För varje deluppgift skall ni:
  - Redovisa era resultat i grafisk form. Figurerna skall vara tydliga. Glöm inte enheter.
  - Diskutera kortfattat era resultat. Är den beräknade stationära temperaturfördelningen rimlig givet de olika randvillkoren? Vad är värmeflödet genom ränderna?
  - Notera att en något mer omfattande diskussion behövs för full poängutdelning på den andra delen.