FFM232, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fundamental fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Sep 4, 2015

2. Kroklinjiga koordinater

Allmänt behöver vi tre parametrar u_1, u_2, u_3 för att beskriva en godtycklig punkt i rummet. Jämför med *generaliserade koordinater* i analytisk mekanik. Vi kan då skriva ortsvektorn som $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$.

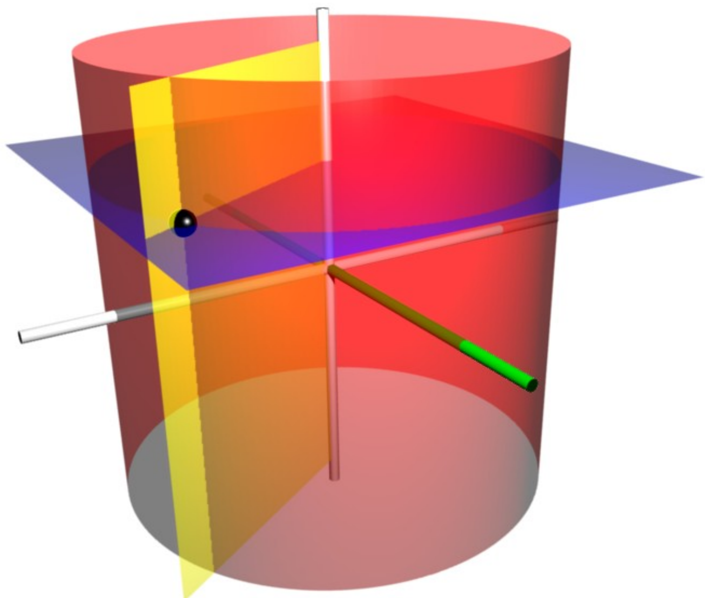
Koordinatyta. för koordinat i: alla lösningar till $u_i =$ konstant.

Koordinatkurva. den kurva som fås om en koordinat tillåts variera och de andra hålls konstanta.

Om vi då håller en av parametrarna, säg u_1, fix och låter u_2 och u_3 variera, så får vi en två-dimensionell yta, vilken vi kallar u_1-ytan. På samma sätt kan vi då definiera ytor för de andra koordinaterna. Två koordinatytor, till exempel de för koordinaterna u_2 och u_3, skär varandra längs en en-dimensionell kurva. Längs denna kurva kommer då bara koordinaten u_1 att variera, så denna kurva är en koordinatkurva för u_1.

Exempel: I de cylindriska koordinaterna ρ, ϕ, z kan vi skriva ortsvektorn som $\vec{r} = \rho \cos\phi \hat{x} + \rho \sin\phi \hat{y} + z\hat{z}$.

Koordinatytorna för ρ, ϕ, z är då en cylinder med z-axeln som symmetriaxel och med radien ρ, ett plan som utgår från z-axeln och bildar en vinkel ϕ med x-axeln, samt ett plan parallellt med xy-planet och med z-koordinaten z.



Koordinatlinjerna för ρ, ϕ, z blir då en stråle som utgår från z-axeln och bildar vinkeln ϕ med x-axeln, en cirkel med radien ρ och en linje parallell med z-axeln.

Enhetsvektorer

Om vi nu studerar en liten förskjutning av ortsvektorn, $\mathrm{d}\vec{r}$, så kan vi i och med att ortsvektorn är en funktion av u_1, u_2, u_3 skriva denna som

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3. \tag{1}$$

Tänk nu på att den partiella derivatan $\partial\vec{r}/\partial u_1$ är definierad som derivatan då vi håller u_2 och u_3 fixa. Därför måste $\partial\vec{r}/\partial u_1$ vara en tangentvektor till koordinatkurvan för u_1. Vi kan då definiera en enhetsvektor för u_1 som

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \tag{2}$$

där

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| \tag{3}$$

kallas för skalfaktorn. På samma sätt kan vi bestämma skalfaktorer och enhetsvektorer till u_2 och u_3. Förskjutningsvektorn $\mathrm{d}\vec{r}$ kan vi nu skriva som

$$\mathrm{d}\vec{r} = h_1\hat{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\hat{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\hat{e}_3\mathrm{d}u_3. \tag{4}$$

Alternativ definition. Ett alternativ till att använda de normerade tangentvektorerna som enhetsvektorer är att använda normalvektorerna till koordinatytorna. Betrakta t.ex.

$$u_1 = u_1(x, y, z) = \text{konstant}. \tag{5}$$

Detta motsvarar en nivåyta till ett skalärfält. Normalvektorn ges alltså av ∇u_1. Det gäller alltid att

$$\nabla u_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}. \tag{6}$$

När vi inskränker oss till ortogonala system gäller dessutom att $\nabla u_i \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$.

Exempel: I cylindriska koordinater är $\vec{r} = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z)$. Vi kan då beräkna

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\rho \sin\phi, \rho\cos\phi, 0)\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)\,. \tag{9}$$

Skalfaktorerna blir då

$$h_\rho = \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)^{1/2} = 1, \tag{10}$$

$$h_\phi = \left(\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi\right)^{1/2} = \rho, \tag{11}$$

$$h_z = 1. \tag{12}$$

Enhetsvektorerna blir

$$\hat{\rho} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)\,, \tag{13}$$

$$\hat{\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)\,, \tag{14}$$

$$\hat{z} = (0, 0, 1)\,. \tag{15}$$

Förskjutningsvektorn kan då skrivas som

$$\mathrm{d}\vec{r} = \hat{\rho}\mathrm{d}\rho + \rho\hat{\phi}\mathrm{d}\phi + \hat{z}\mathrm{d}z. \tag{16}$$

I fortsättningen skall vi begränsa oss till koordinatsystem med ortogonala enhetsvektorer, dvs

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{17}$$

där vi passat på att introducera Kroneckers delta, δ_{ij}.

Vi skall också anta att enhetsvektorerna bildar ett högersystem

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \tag{18}$$

Visa att enhetsvektorerna i de cylindriska koordinaterna uppfyller dessa villkor.

Vi kan nu härleda några användbara samband som båglängden längs en kurva

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = h_1^2 \mathrm{d}u_1^2 + h_2^2 \mathrm{d}u_2^2 + h_3^2 \mathrm{d}u_3^2. \tag{19}$$

Ett ytelement $\mathrm{d}S$ på koordinatytan u_1 är en rektangel som genereras av $\mathrm{d}u_2$ och $\mathrm{d}u_3$. Rektangelns sidor har då längderna $h_2\mathrm{d}u_2$ och $h_3\mathrm{d}u_3$. Rektangelns area är därför

$$\mathrm{d}S = h_2 h_3 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3, \tag{20}$$

och på samma sätt kan vi beräkna ytelementen på koordinatytorna för u_2 och u_3. Analogt kan vi beräkna volymelementet som genereras av $\mathrm{d}u_1$, $\mathrm{d}u_2$ och $\mathrm{d}u_3$, vilket blir

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3. \tag{21}$$

Exempel: Bågelementet i cylindriska koordinater blir

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{22}$$

Ett ytelement på ρ-ytan skrives

$$\mathrm{d}S = \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z, \tag{23}$$

på ϕ-ytan

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\rho \mathrm{z} \tag{24}$$

och på z-ytan

$$\mathrm{d}S = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi. \tag{25}$$

Volymselementet kan vi skriva som

$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z. \tag{26}$$

Vektoroperatorer i kroklinjiga koordinater

Gradient. Betrakta ett skalärt fält f. Om vi förflyttar oss en sträcka $\mathrm{d}\vec{r}$ så förändras f

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{27}$$

Förflyttningen kan vi i de nya koordinaterna skriva som

$$\mathrm{d}\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 \mathrm{d}u_1 + h_2 \hat{e}_2 \mathrm{d}u_2 + h_3 \hat{e}_3 \mathrm{d}u_3. \tag{28}$$

Om vi skriver f som en funktion av u_1, u_2 och u_3 får vi

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}h_1\mathrm{d}u_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}h_2\mathrm{d}u_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}h_3\mathrm{d}u_3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{e}_3\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \end{aligned} \tag{29}$$

Då kan vi identifiera uttrycket inom parentesen som gradienten i de nya koordinaterna u_1, u_2, u_3

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{e}_3. \tag{30}$$

Exempel: I cylindriska koordinater blir gradienten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{31}$$