

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 16, 2019

## 12. Tensorer

### Introduktion till tensorbegreppet

- Fysikaliska lagar skall inte bero på i vilket koordinatsystem de beskrivs.
- Detta kan vi åstadkomma genom att skriva dessa lagar som en likhet mellan två objekt vilka vi vet transformerar likadant under en koordinattransformation.
- Vi kommer att kalla sådana objekt för *tensorer*.
- T.ex. är en skalär en tensor av rank-0, en vektor är en tensor av rank-1.
- En invariants hos sådana fysikaliska lagar kan kopplas till en symmetri (t.ex. rotationssymmetri). Invariansen kan kodas in genom att använda "tensorspråket".
- Vi kommer att betrakta transformationer i rummet mellan Cartesiska system. Formalismen kan dock generaliseras till större symmetrier. T.ex. Lorentzinvariants i speciell relativitetsteori vilken involverar rum-tiden (fyra dimensioner); och mer allmänna koordinattransformationer i rum-tiden i allmän relativitetsteori.

Plan:

- Hur beskriva transformation mellan Cartesiska koordinatsystem

- Transformationsegenskaper hos: Skalar, vektor, ... generell tensor
- Visa att diverse objekt verkligen är tensorer
- Fysikaliskt exempel: Tröghetstensorn

## Koordinattransformationer

När vi byter koordinater från ett Cartesiskt högersystem, med koordinater  $x_i$ , till ett annat (med origo i samma punkt), med koordinater  $x'_i$ , relateras

$$x'_i = L_{ij}x_j, \quad (1)$$

där  $\mathbf{L}$  är en ortogonal matris som uppfyller  $\mathbf{L}\mathbf{L}^t = \mathbf{I} = \mathbf{L}^t\mathbf{L}$ . Från detta följer direkt att  $\det(\mathbf{L}^t\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})^2 = \det \mathbf{I} = 1$  vilket ger  $\det \mathbf{L} = \pm 1$ .

Ett allmänt uttryck för determinanten av en  $(3 \times 3)$ -matris är

$$\det \mathbf{M} = \varepsilon^{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \quad (2)$$

### Kommentar

Kontrollera gärna. Detta uttryck ger en summa med sex nollskilda termer (3 positiva och 3 negativa) vilket alltså motsvarar determinanten.

### Rita

$x'y'z'$ -system som är roterat en vinkel  $\alpha$  i  $xy$ -planet relativt ett  $xyz$ -system.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

### Kommentar

Om  $\mathbf{L}$  transformerar ett högersystem till ett högersystem gäller plustecknet,  $\det \mathbf{L} = 1$ . Kolla exemplet ovan att  $\mathbf{L}^t\mathbf{L} = \mathbf{I}$ .

I indexnotation blir villkoret på transformationsmatrisen

$$\delta_{ij} = (L^t L)_{ij} = (L^t)_{ik} L_{kj} = L_{ki} L_{kj}. \quad (4)$$

Notera att vi genom att derivera Ekv. (1) kan skriva matrisen  $\mathbf{L}$  som  $L_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ . Eftersom matrisen är ortogonal gäller den inversa relationen  $x_i = L_{ji}x'_j$ , och vi har därför också  $L_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ .

#### Bevis av invers relation

Starta från transformationen  $x'_i = L_{ij}x_j$  och multiplicera med inversa transformationen  $\mathbf{L}^t$

$$(L^t)_{ki}x'_i = (L^t)_{ki}L_{ij}x_j = \delta_{kj}x_j = x_k, \quad (5)$$

Vi noterar att  $(L^t)_{ki} = L_{ik}$  i vänsterledet så att vi får den inversa relationen  $L_{ik}x'_i = x_k$ . Från detta uttryck byter vi bara namn på indexen:  $i \mapsto j$ ,  $k \mapsto i$  så att

$$x_i = L_{ji}x'_j. \quad (6)$$

## Skalärer och vektorer

En skalär  $s$  (= enklaste exempel på en tensor) kännetecknas av att den tar samma värde i alla koordinatsystem, dvs.  $s' = s$ .

#### Kommentar

Det är viktigt att förstå att det är transformationsregeln som är det viktiga. Det räcker inte med att "s är ett tal".

#### Rita

En punkt P i ovanstående två koordinatsystem och illustrera dess  $x'$ - och  $x$ -koordinat.

Sålunda är  $x$ -koordinaten för en punkt i  $\mathbf{R}^3$  inte en skalär, medan t.ex. temperaturen i en punkt är en skalär.

En vektor  $\vec{v}$  är en uppsättning tal som beter sig likadant som ortvektorns komponenter när vi byter system, dvs.

$$v'_i = L_{ij}v_j \quad (7)$$

#### Kommentar

Det är denna transformationsregel som definierar vilka uppsättningar av tre (eller  $D$ ) tal som får privilegiet att kallas vektor.

## Tensorer

### Kommentar

Nu är det rättframt att gå vidare och definiera objekt, tensorer, som har fler än ett index. En matris kan, som vi redan sett, skrivas som en tensor med två index,  $T_{ij}$ . Men inget hindrar att man har ett godtyckligt antal, säg  $p$ .

Transformationsregeln för en tensor med två index (tänk matris) är

$$T'_{ij} = L_{ik}L_{jl}T_{kl} \left( = L_{ik}T_{kl} (L^t)_{lj} \right), \quad (8)$$

vilket ju motsvarar  $\mathbf{T}' = \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{L}^t$ .

En tensor med  $p$  index (en tensor av rank  $p$ ) skrivs  $T_{i_1 i_2 \dots i_p}$ . och allmänt

$$T'_{i_1 \dots i_p} = L_{i_1 j_1} \dots L_{i_p j_p} T_{j_1 \dots j_p}. \quad (9)$$

Poängen med detta är att man kan multiplicera samman tensorer och vara säker på att resultatet blir en tensor.

### Skalärprodukt

Är  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  en skalär? Hur beter den sig vid ett koordinatbyte?

$$u'_i v'_i = L_{ij} u_j L_{ik} v_k = \delta_{jk} u_j v_k = u_k v_k \quad (10)$$

Resultatet är alltså oberoende av koordinatsystem, dvs det är en skalär. Ovanstående visar att summan av produkterna av två vektorers komponenter blir densamma när vektorerna uttrycks i det primmade respektive det oprimmade koordinatsystemet.

**Produkt av tensorer.** Produkten av två tensorer är också en tensor.

- $c_{ij} = a_i b_j$  är också en tensor.
- $u_i = M_{ij} v_j$  är också en tensor.

### Kommentar

För det andra fallet har vi  $M'_{ij}v'_j = L_{ik}L_{jl}M_{kl}L_{jm}v_m = L_{ik}\delta_{lm}M_{kl}v_m = L_{ik}M_{kl}v_l = L_{ik}u_k$  (där vi i första steget har använt att  $\mathbf{L}$  är ortogonal). Om  $M_{ij}$  och  $v_i$  är tensorer är alltså även  $u_i$  det. Det allmänna beviset går likadant (och innefattar förstås det faktum att skalärprodukten av två vektorer är en skalär).

### Exempel: Kryssprodukt

Är  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$  en tensor? Dvs är resultatet en vektor?

#### Kommentar

I linjär algebrakurserna har ni säkert visat att detta är en vektor.

Räknereglerna ovan ger att vi bara måste visa att  $\varepsilon_{ijk}$  är en tensor. Transformationsreglerna säger:

$$\varepsilon'_{ijk} = L_{il}L_{jm}L_{kn}\varepsilon_{lmn} \quad (11)$$

Vi kommer att visa att  $\varepsilon$  är helt invariant under koordinattransformationer. Men låt oss först visa att  $\varepsilon'_{ijk}$  är antisymmetriskt. Byt plats på två index

$$\varepsilon'_{jik} = L_{jl}L_{im}L_{kn}\varepsilon_{lmn} = L_{jm}L_{il}L_{kn}\varepsilon_{mln} = -L_{il}L_{jm}L_{kn}\varepsilon_{lmn} = -\varepsilon'_{ijk}, \quad (12)$$

där vi först bytte namn på två summationsindex, och sedan bytte plats på dem i  $\varepsilon$ -tensorn och utnyttjade att den är antisymmetrisk.

Den bevisade antisymmetrin betyder ju också att element med två lika index måste vara noll. T.ex.  $\varepsilon'_{iik} = -\varepsilon'_{iik}$ .

$\varepsilon'_{ijk}$  är alltså proportionell mot  $\varepsilon_{ijk}$ . Visa därför en permutation, t.ex.  $ijk = 123$ .

$$\varepsilon'_{123} = L_{1l}L_{2m}L_{3n}\varepsilon_{lmn} = \det \mathbf{L} = +1, \quad (13)$$

för en högertransformation.

Så  $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ , Levi-Civita-tensorn är en *invariant tensor*. Den enda andra invarianta tensorn är Kroneckers delta. Visa själv att  $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ .

**Vektoroperatorn.** Vi behöver också kunna derivera. Låt oss visa det litet triviala påståendet att gradienten av en skalär är en vektor. Vi utgår från skalärfältet  $\phi$  och har alltså att  $\phi' = \phi$ . Vi har  $(\vec{\nabla}\phi)'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i}\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = L_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = L_{ij}(\vec{\nabla}\phi)_j$ . Detta visar att  $\partial_i$  är en vektoroperator, och man kan sedan

använda den för att konstruera andra derivator (divergens, rotation osv.). Samma regler gäller för  $\partial_i$  som för andra tensorer.

### Tröghetstensor

Ett annat klassiskt exempel är tröghetstensor,

$$I_{ij} = \int_V dV \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j), \quad (14)$$

som man räknade ut i stelkroppsdynamik. Den relaterar rörelsemängdsmomentet till rotationsvektorn enligt  $L_i = I_{ij} \omega_j$ . I och med att den innehåller upprepade kryssprodukter är det enklare att härleda den i tensorformalism.

Ett litet volymelement  $dV$  av en stel kropp har massan  $dm = \rho dV$ , och om kroppen roterar med en rotationsvektor  $\omega_i$  har det hastigheten  $v_i = (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k$ . Dess rörelsemängd är  $dp_i = dm v_i = dm \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k$ . Bidraget till rörelsemängdsmomentet från volymelementet är

$$\begin{aligned} dL_i &= \varepsilon_{ijk} x_j dp_k = dm \varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm} \omega_l x_m = dm (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j x_m \omega_l \\ &= dm (r^2 \omega_i - x_i x_j \omega_j) = dV \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j \end{aligned} \quad (15)$$

och totalt blir detta

$$L_i = \int_V dV \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j \equiv I_{ij} \omega_j, \quad (16)$$

där vi alltså definierar tröghetstensor i det sista steget.