

FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,
Sverige

Sep 17, 2018

2. Kroklinjiga koordinater

Allmänt behöver vi tre parametrar u_1, u_2, u_3 för att beskriva en godtycklig punkt i rummet. Jämför med *generaliserade koordinater* i analytisk mekanik. Vi kan då skriva Ortsvektorn som $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$.

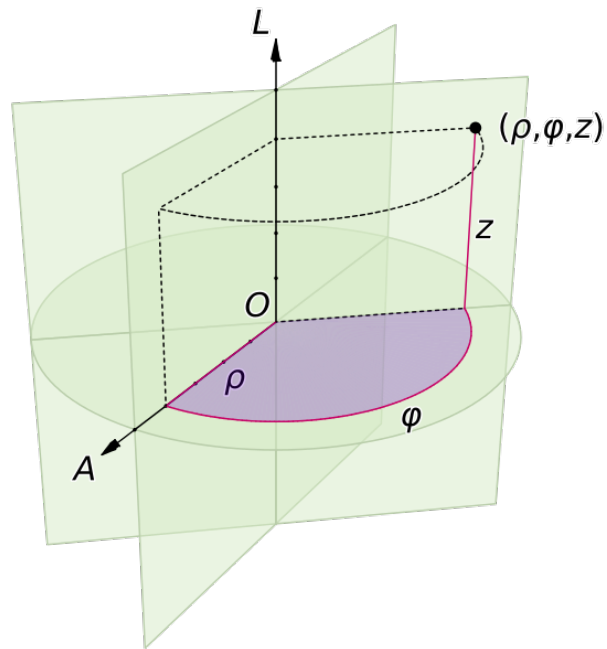
Koordinatyta. för koordinat i : alla lösningar till $u_i = \text{konstant}$.

Koordinatkurva. den kurva som fås om en koordinat tillåts variera och de andra hålls konstanta.

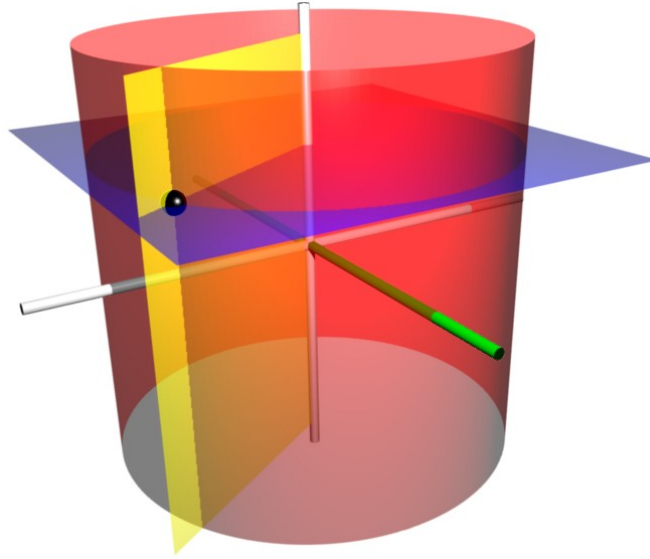
Om vi då håller en av parametrarna, säg u_1 , fix och låter u_2 och u_3 variera, så får vi en två-dimensionell yta, vilken vi kallar u_1 -ytan. På samma sätt kan vi då definiera ytor för de andra koordinaterna. Två koordinatytor, till exempel de för koordinaterna u_2 och u_3 , skär varandra längs en en-dimensionell kurva. Längs denna kurva kommer då bara koordinaten u_1 att variera, så denna kurva är en koordinatkurva för u_1 .

Exempel: cylindriska koordinater

I de cylindriska koordinaterna ρ, ϕ, z kan vi skriva Ortsvektorn som $\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{x} + \rho \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$.



Koordinatytorna för ρ, ϕ, z är då en cylinder med z -axeln som symmetriaxel och med radien ρ , ett plan som utgår från z -axeln och bildar en vinkel ϕ med x -axeln, samt ett plan parallellt med xy -planet och med z -koordinaten z .



Koordinatlinjerna för ρ, ϕ, z blir då en stråle som utgår från z -axeln och bildar vinkeln ϕ med x -axeln, en cirkel med radien ρ och en linje parallell med z -axeln.

Enhetsvektorer

Om vi nu studerar en liten förskjutning av Ortsvektorn, $d\vec{r}$, så kan vi i och med att Ortsvektorn är en funktion av u_1, u_2, u_3 skriva denna som

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (1)$$

Tänk nu på att den partiella derivatan $\partial \vec{r} / \partial u_1$ är definierad som derivatan då vi håller u_2 och u_3 fixa. Därför måste $\partial \vec{r} / \partial u_1$ vara en tangentvektor till koordinatkurvan för u_1 . Vi kan då definiera en enhetsvektor för u_1 som

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad (2)$$

där

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| \quad (3)$$

kallas för skalfaktorn. På samma sätt kan vi bestämma skalfaktorer och enhetsvektorer till u_2 och u_3 . Förskjutningsvektorn $d\vec{r}$ kan vi nu skriva som

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du_1 + h_2 \hat{e}_2 du_2 + h_3 \hat{e}_3 du_3. \quad (4)$$

Alternativ definition. Ett alternativ till att använda de normerade tangentvektorerna som enhetsvektorer är att använda normalvektorerna till koordinatytorna. Betrakta t.ex.

$$u_1 = u_1(x, y, z) = \text{konstant.} \quad (5)$$

Detta motsvarar en nivåyta till ett skalärfält. Normalvektorn ges alltså av $\vec{\nabla} u_1$. Det gäller alltid att

$$\vec{\nabla} u_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}. \quad (6)$$

När vi inskränker oss till ortogonala system gäller dessutom att $\vec{\nabla} u_i \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$. Notera dock att dessa vektorer i allmänhet kan ha *olika* längd. Faktum är att följande samband gäller för ortogonala system

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \vec{\nabla} u_i. \quad (7)$$

Exempel: Enhetsvektorer för cylindriska koordinater

I cylindriska koordinater är $\vec{r} = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$. Vi kan då beräkna

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \quad (10)$$

Skalfaktorerna blir då

$$h_\rho = (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^{1/2} = 1, \quad (11)$$

$$h_\phi = (\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi)^{1/2} = \rho, \quad (12)$$

$$h_z = 1. \quad (13)$$

Enhetsvektorerna blir

$$\hat{\rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (14)$$

$$\hat{\phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad (15)$$

$$\hat{z} = (0, 0, 1). \quad (16)$$

Förskjutningsvektorn kan då skrivas som

$$d\vec{r} = \hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\phi} d\phi + \hat{z} dz. \quad (17)$$

I fortsättningen skall vi begränsa oss till koordinatsystem med ortogonala enhetsvektorer, dvs

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad (18)$$

där vi passat på att introducera Kroneckers delta, δ_{ij} .

Vi skall också anta att enhetsvektorerna bildar ett högersystem

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad (19)$$

Visa att enhetsvektorerna i de cylindriska koordinaterna uppfyller dessa villkor.

Vi kan nu härleda några användbara samband som båglängden längs en kurva

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2. \quad (20)$$

Betrakta ovanstående båglängd för fallet då $du_2 = du_3 = 0$. Det står då klart att vi kan tolka $h_1 du_1$ som båglängden ds_1 , dvs som en infinitesimal förflyttning i u_1 -riktningen. Notera därför att $h_i du_i$ alltid måste ha enheten längd.

Ett ytelement $d\vec{S}_1$ på koordinatytan u_1 är en rektangel som genereras av du_2 och du_3 . Rektangelns sidor har då längderna $h_2 du_2$ och $h_3 du_3$. Ytelementet blir

$$d\vec{S}_1 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3, \quad (21)$$

och på samma sätt kan vi beräkna ytelementen på koordinatyterna för u_2 och u_3 .

Analogt kan vi beräkna volymelementet som genereras av du_1 , du_2 och du_3 , vilket blir

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (22)$$

Exempel: båg- yt- och volymselement i cylindriska koordinater

Bågelementet i cylindriska koordinater blir

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (23)$$

Ett ytelement på ρ -ytan skrives

$$d\vec{S}_\rho = \hat{e}_\rho \rho d\phi dz, \quad (24)$$

på ϕ -ytan

$$d\vec{S}_\phi = \hat{e}_\phi d\rho dz \quad (25)$$

och på z -ytan

$$d\vec{S}_z = \hat{e}_z \rho d\rho d\phi. \quad (26)$$

Volymelementet kan vi skriva som

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (27)$$

Vektoroperatorer i kroklinjiga koordinater

Gradient. Betrakta ett skalärt fält ϕ . Om vi förflyttar oss en sträcka $d\vec{r}$ så förändras ϕ

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}. \quad (28)$$

Samtidigt, om vi skriver ϕ som en funktion av u_1, u_2 och u_3 får vi

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\phi}{\partial u_3} du_3 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} h_1 du_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} h_2 du_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} h_3 du_3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{e}_3 \right) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (29)$$

Förflyttningen $d\vec{r}$ (ovan) kan vi i de nya koordinaterna skriva som [se ekv. (4)]

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du_1 + h_2 \hat{e}_2 du_2 + h_3 \hat{e}_3 du_3. \quad (30)$$

Då kan vi identifiera uttrycket inom parentesen som gradienten i de nya koordinaterna u_1, u_2, u_3

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{e}_3. \quad (31)$$

Gradient i cylindriska koordinater: I cylindriska koordinater blir gradienten

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (32)$$

Exempel: skalärfält och dess gradient i olika koordinatsystem

Ett skalärfält är givet i Cartesiska koordinater

$$\beta = x^2 + y^2. \quad (33)$$

Motsvarande skalärfält i plana polärkoordinater blir

$$\beta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2. \quad (34)$$

Gradienten i Cartesiska koordinater blir

$$\vec{\nabla}\beta = \hat{x} \partial_x \beta + \hat{y} \partial_y \beta = 2(x\hat{x} + y\hat{y}). \quad (35)$$

Medan i plana polärkoordinater blir den

$$\vec{\nabla}\beta = \hat{e}_r\partial_r + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\beta = 2r\hat{e}_r. \quad (36)$$

Eftersom $x\hat{x} + y\hat{y} = r\hat{e}_r$ är det uppenbart att detta är samma vektor!

Exempel: Tentauppgift 2010-08-26: 1b

För vilka värden på α, β, γ har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater ξ och η , givna av

$$\xi = x^2 - y^2 \quad (37)$$

$$\eta = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \quad (38)$$

ortogonala basvektorer?

Lösning. Vi kan konstruera basvektorer på två sätt:

- $\hat{e}_i \propto \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$
- $\hat{e}_i \propto \vec{\nabla} u_i$

Det första sättet innebär att vi behöver räkna ut storheterna $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ och $\frac{\partial y}{\partial u_i}$, dvs vi behöver veta $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Vi skulle behöva invertera det givna koordinatsambandet.

Det andra sättet kräver istället $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ och $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ (samt motsvarande för η) och detta blir enkelt med de givna koordinatstransformationerna. Vi får

$$\vec{\nabla}\xi = 2x\hat{x} - 2y\hat{y} \quad (39)$$

$$\vec{\nabla}\eta = (2\alpha x + \beta y)\hat{x} + (\beta x + 2\gamma y)\hat{y} \quad (40)$$

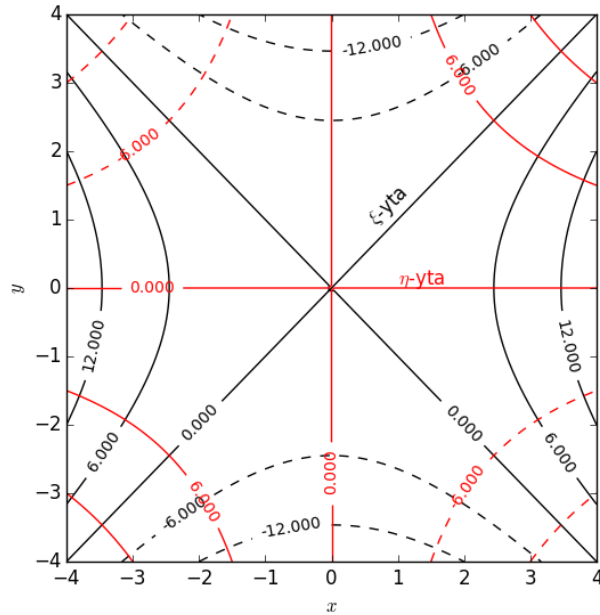
För att koordinatsystemet skall vara ortogonalt behöver vi

$$\hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 0. \quad (41)$$

Från uttrycken för dessa gradienter ovan får vi

$$\vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 2x(2\alpha x + \beta y) - 2y(\beta x + 2\gamma y) = 4\alpha x^2 - 4\gamma y^2. \quad (42)$$

För att få $\vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 0$ måste vi ha $\alpha = \gamma = 0$, medan β är godtyckligt.



Exempel: Fältlinjer i kroklinjiga koordinater

Låt oss konstruera och rita fältlinjerna till en så kallad virveltråd

$$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (43)$$

som alltså är uttryckt i cylindriska koordinater. Notera att detta fält är singulärt längs hela z -axeln vid $\rho = 0$, men vi kommer här enbart att betrakta $\rho > 0$.

Lösning. Vi kan rita fältlinjerna på två sätt:

- Det första alternativet är förstås att finna ett explicit uttryck för fältlinjerna genom att formulera och lösa differentialekvationerna. Sedan kan vi definiera dessa kurvor som en funktion i Matlab (eller Python) och rita upp dem explicit för några olika startpunkter.
- Det andra alternativt är att utnyttja funktionen 'streamline' i Matlab ('streamplot' i Python) och mata in vektorfältet på ett rutnät av olika

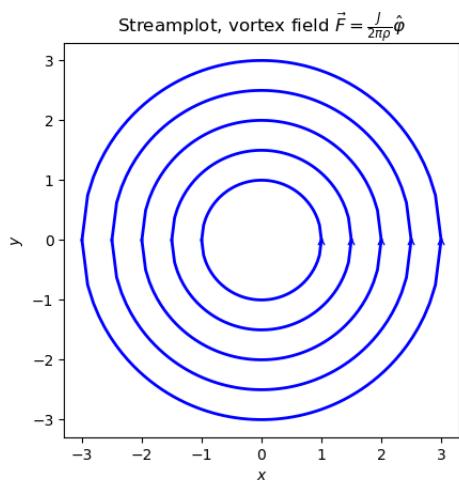
koordinatpunkter. Notera dock att detta alternativ bygger på att vi transformerar till ett Cartesiskt koordinatsystem.

Vi börjar med att konstruera fältlinjerna i cylindriska koordinater. Här noterar vi att förskjutningsvektorn ges av $d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$. Vi tecknar nu ekvationen $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = C\vec{F}$, med $C = 2\pi/J$, på komponentform

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\tau} &= 0 &\Rightarrow \rho(\tau) &= \rho_0, \\ \rho \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{\rho} &\Rightarrow \varphi(\tau) &= \frac{\tau}{\rho_0^2} + \varphi_0, \\ \frac{dz}{d\tau} &= 0 &\Rightarrow z(\tau) &= z_0.\end{aligned}$$

Ur detta ser man att fältlinjerna blir cirklar i xy -planet vid $z = z_0$ och med radie ρ_0 . De genomlöps moturs eftersom vinkeln φ ökar med ökande τ .

Vi kan teckna ekvationen för fältlinjerna i Cartesiska koordinater som sambandet $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ och rita upp dessa för några olika val av ρ_0 . I figuren nedan är fältlinjerna ritade som funktioner $y = \pm\sqrt{\rho_0^2 - x^2}$ för $\rho_0 = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$.



Nu tittar vi på det andra alternativet och använder tillgänglig funktionalitet i Matlab (eller Python). Här krävs dock att vektorfältets Cartesiska komponenter räknas ut. Från transformationen mellan cylindriska och

Cartesiska koordinater ser vi direkt att

$$\frac{2\pi}{J} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\phi} = \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}).$$

Koordinaterna är relaterade enligt $\rho^2 = x^2 + y^2$ och $\cos \varphi = x/\rho$, $\sin \varphi = y/\rho$, vilket ger

$$\frac{2\pi}{J} \vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y\hat{x} + x\hat{y}).$$

I både Matlab och Python kan vi skapa ett rutnät av x, y -koordinater och tillhörande F_x, F_y komponenter som vi sedan ritar med 'streamline' ('streamplot' i Python). Se nedan för kod och figur med Matlab:

```
% Make an x,y grid
[X,Y] = ndgrid(linspace(-2.5,2.5,100),linspace(-2.5,2.5,100));
R=sqrt(X.^2+Y.^2);

% Plot streamlines for corresponding vector field
v_x = - Y ./ R.^2; % Note that -Y/R = -sin(phi)
v_y = X ./ R.^2;   % Note that X/R = cos(phi)

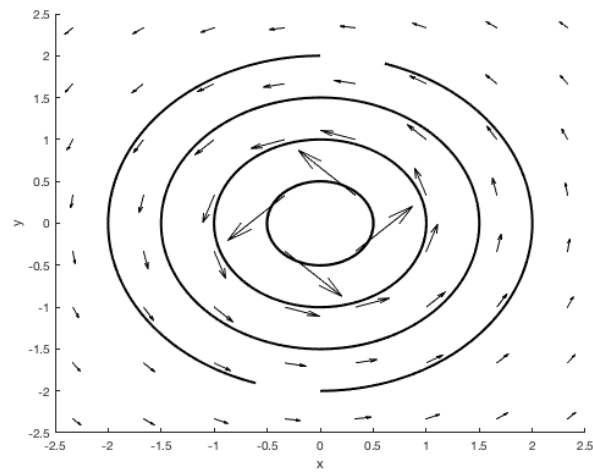
% In Matlab we have to provide start points for streamlines.
start1_y=-2.0:0.5:-0.5;
start_y=[start1_y, -start1_y];
start_x=[zeros(size(start_y))];

% Fine tuning might be needed to get a nice set of streamlines.
strm=streamline(X', Y', v_x', v_y', start_x, start_y,[0.01]);
set(strm,'LineWidth',2,'Color','k')

hold on

% Matlab streamlines have no arrows. Combine with quiver.
% Use fewer grid points to avoid too many arrows in the plot.
[Xc,Yc] = ndgrid(linspace(-3,3,10),linspace(-3,3,10));
Rc=sqrt(Xc.^2+Yc.^2);
v_xc = - Yc ./ Rc.^2; % Note that -Y/R = -sin(phi)
v_yc = Xc ./ Rc.^2;   % Note that X/R = cos(phi)
qvr=quiver(Xc', Yc', v_xc', v_yc', 'Color','k');

xlabel('x')
ylabel('y')
xlim([-2.5,2.5])
ylim([-2.5,2.5])
```



Och samma exempel med Python:

```
import sys
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

w = 3
Y, X = np.mgrid[-w:w:100j, -w:w:100j]
R = np.sqrt(X**2+Y**2)
U = -Y / R**2 # Note that -Y/R = -sin(phi)
V = X / R**2 # Note that X/R = cos(phi)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)

strm = ax.streamplot(X, Y, U, V, linewidth=2)

ax.set_title(r'Streamplot, vortex field ' + \
             r'$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$')
ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')

ax.set_aspect('equal')

plt.savefig('streamlines-vortex.png')
```

