Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 17 augusti 2015 klockan 14.00-18.00 i M-huset.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator: Christian Forssén (031–772 3261.
Jourhavande lärare: Tobias Wenger (073–038 1453).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Värmeledningsekvationen lyder

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s$$

Svara nu på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Förklara vad symbolerna c, ρ, T, λ och s står för och ge deras SI-enheter.

(b) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Motsvarande begränsningsytor hålls vid konstanta temperaturer T_0 respektive T_d och det finns inga källor inne i plattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i plattans inre.

(c) Lösningen till värmeledningsekvationen med en godtycklig källfördelning kommer att vara en funktion av $\vec{r}$ och t, dvs $T(\vec{r}, t)$. Ge ett uttryck för denna allmänna lösning i termer av en så kallad Greensfunktion. Teckna också den värmeledningsekvation vars lösning är just Greensfunktionen.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Svara på följande tre delfrågor:

   (a) Vad är värdet av integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F}$ är fältet från en virveltråd med styrkan j riktad i positiv φ-led på cirkeln $\rho = b$, $z = 0$ och C är kurvan $(x, y, z) = b(1 + \cos\alpha, 0, \sin\alpha)$, där parametern α går från 0 till 2π? ($\rho\varphi z$ är de vanliga, cylindriska koordinaterna.)

   (b) För vilka värden på talen α, β och γ har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater ξ och η, givna av

   $$\xi = x^2 - y^2,$$
   $$\eta = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

   ortogonala basvektorer?

   (c) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \tanh^2 x dx$.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

   $$\vec{F} = \begin{cases} A|\vec{r} - a\hat{\mathbf{z}}|^{-3}(\vec{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + B\hat{\mathbf{x}}, & z > 0, \\ Cz\hat{\mathbf{z}}, & z \leq 0, \end{cases}$$

   där A, B, C och a är konstanter. Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över en sfär med radien $2a$ och centrum i origo. *(10 poäng)*

4. Betrakta vektorfältet $\vec{v} = x^2\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}$ i xy-planet.

   (a) Räkna ut divergensen och rotationen av $\vec{v}$.

   (b) Undersök om vektorfältet $\vec{v}$ har en potential. Räkna isf ut denna.

   (c) Räkna ut flödet av $\vec{v}$ genom den raka linjen λ mellan de två punkterna $(x = 1, y = 0)$ och $(x = 1, y = 1)$.

   (10 poäng)

5. På en sfär med radien a befinner sig en elektrisk ytladdning $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Bestäm den elektrostatiska potentialen och det elektriska fältet för alla punkter på z-axeln. Åskådliggör fältet i någon graf och kontrollera att eventuella diskontinuiteter stämmer. *(10 poäng)*

6. Ett elektriskt fält kan, i ett område utan laddningar och strömmar, skrivas
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\hat{\mathbf{x}}\cos\left(k(z-ct)\right),$$
där E_0 och k är konstanter och c är ljushastigheten. Vad är våglängden och periodtiden för denna vågrörelse? Bestäm det magnetiska fältet (eventuella möjliga tidsoberoende delar kan sättas till noll).
Maxwells ekvationer lyder:
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0},\\ \nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0,\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0,\\ \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \mu_0\vec{j}.\end{aligned}$$

(10 poäng)