Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Måndagen den 17 augusti 2020 klockan 14.00-18.00, på distans via zoom.
Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. Men kom ihåg att samarbete aldrig är tillåtet. Vi kommer att vara extra uppmärksamma på plagiarism i inlämnade lösningar.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater av

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_r \hat{\mathbf{e}}_r + A_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

dvs vi vet att $A_\theta = 0$. För respektive deluppgift nedan, ge ett exempel på komponenter (A_r, A_φ) som inte bägge är noll och som medför att

(a) Fältet är både konservativt och divergensfritt;

(b) Fältet är virvelfritt, men har en konstant källtäthet $\rho(\vec{r}) = 1$;

(c) Fältet är konservativt, men har överallt en nollskild virveltäthet;

utanför $r = 0$. Ange om fältet är singulärt någonstans och skissa fältlinjer för all tre fallen. *(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

2. Ett vektorfält $\vec{F}$ har potentialen

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{12}\left(\frac{y^4}{2} + x^4\right) - \frac{x^2}{2} & \text{om } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{om } |z| > 1 \end{cases}$$

Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt positivt? Beräkna detta maximala positiva flöde. *(10 poäng)*

3. Betrakta följande vektorfält i cylindriska koordinater

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\rho^2 + 1}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho^2\hat{\mathbf{e}}_\rho.$$

Beräkna storleken av linjeintegralen $\oint_\lambda \vec{A} \cdot d\vec{r}$ där λ är en ellips som ligger i xy-planet, med centrum i origo, storradie a längs y-axeln samt lillradie b längs x-axeln. I vilken riktning skall kurvan vara definierad för att integralen skall vara negativ? *(10 poäng)*

4. Finn temperaturfältet $T(\vec{r})$ i ett sfäriskt skal $(R_1 \leq r \leq R_2)$ i avsaknad av värmekällor. Temperaturen är konstant vid den inre randen $T(r = R_1) = T_1$ medan Newtons avkylningslag gäller vid den yttre randen. Det innebär att normalkomponenten av värmeströmmen är proportionell mot temperaturskillnaden $T(r = R_2) - T_2$, där T_2 är omgivningens temperatur. Kontrollera att värme flödar i den riktning som man kan förvänta sig. Ledning: inför själv eventuella konstanter som behövs. *(10 poäng)*

5. Visa följande vektoridentitet med indexnotation

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

(10 poäng)

6. Betrakta Laplaces ekvation för skalärfältet $\phi(\vec{r})$ i området $r > a$, där a är en positiv konstant. Vi har Neumanns homogena randvillkor på ytan $r = a$ samt ett Dirichletvillkor $\phi = -\phi_0 z$ vid $r \gg a$. Finn både potentialen och det resulterande vektorfältet. *(10 poäng)*