

# Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

**Tid och plats:** Måndagen den 24 oktober 2016 klockan 14.00-18.00 i M-huset.

**Lösningsskiss:** Christian Forssén och Tobias Wenger

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

- (a) Skissa nivåytor och fältlinjer för en punktkälla, dvs  $\phi = \frac{1}{4\pi r}$  och  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi r^2} \hat{r}$ .
- (b) Beräkna integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \cos(x) dx$ , (notera derivatan).
- (c) Teckna följande tre uttryck med indexnotation: (i)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ , (ii)  $\mathbf{M}\vec{a}$ , (iii)  $\mathbf{M}\mathbf{N}$ , där  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  är vektorer och  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  är  $3 \times 3$  matriser.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

Lösning: \_\_\_\_\_

- (a) Nivåytorna blir sfärer (cirklar i genomskärning vilket isf bör påpekas) medan fältlinjerna blir strålar ut från origo (dvs tiktade i positiv  $\hat{r}$ -led).
- (b) 0.
- (c) (i)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k$ , (ii)  $\mathbf{M}\vec{a} = M_{ij} a_j$ , (iii)  $\mathbf{M}\mathbf{N} = M_{ik} N_{kj}$ .

---

2. Maxwells ekvationer är

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

- (a) Använd Faradays induktionslag,  $U = -d\Phi/dt$ , för att visa Maxwells andra ekvation  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Notera att  $\Phi$  är det magnetiska flödet genom en yta  $\vec{S}$  och  $U$  är den inducerade spänningen längs randen  $\partial S$ . (5 poäng)

- (b) Använd Maxwells ekvationer för att visa att kontinuitetsekvationen  $\partial\rho/\partial t = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$  är uppfylld för  $\rho(\vec{r}, t)$  = elektrisk laddningsdensitet och  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  = elektrisk strömtäthet. (5 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

Se kurskompendium, avsnitt 11.2.

3. Ett klot med radien  $R$  har ett litet klot med radien  $r_0$  urkarvad ur sig (se figur). Båda kloten är centrerade i origo. Området mellan radierna  $r_0$  och  $R$  har en konstant massdensitet  $\rho_0$ . Notera att gravitationsfält är kontinuerliga (till skillnad från elektriska fält som ju har diskontinuiteter vid ytladdningar). Gravitationspotentialen uppfyller Poissons ekvation (vi antar att vi använder smarta enheter så att Newtons konstant  $G = 1$ )

$$\Delta\Phi(r) = \rho(r). \quad (5)$$

Notera att tecknet i Poissons ekvation är motsatt mot vad man har för elektriska fält, detta beror på att två massor attraherar varandra.

- (a) Beräkna gravitationsfältet  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi(r)$ . Skissa den radiella komponenten  $F_r(r)$  som en funktion av  $r$ . (7 poäng)
- (b) Om man betraktar fältet i en punkt  $\vec{r}$  där  $r = |\vec{r}| > R$  så ser fältet ut som fältet från en punktkälla. Vilken massa (styrka) har en punktkälla som producerar samma fält? (2 poäng)
- (c) Hur rör sig en liten testmassa som placeras (utan initialhastighet) i gravitationsfältet i området  $r < r_0$ ? (1 poäng)

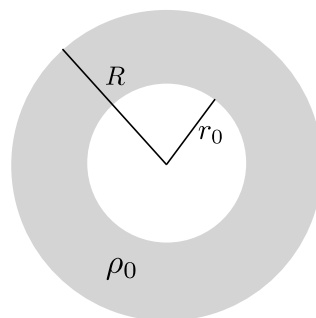


Figure 1: Klotet till gravitationsuppgiften.

Lösning: \_\_\_\_\_

Sfärisk geometri med konstant källfördelning, perfekt för att lösa med Gauss sats. Med  $F_r(r) = -\nabla\Phi(r)$  skriver vi Poissons ekvations som

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi(r)) = \rho(r) \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\rho(r) \quad (7)$$

och om vi integrerar båda sidor över klotet  $V$  som har radien  $r$ , får vi

$$\int \nabla \cdot \vec{F} dV = - \int \rho(r) dV \quad (8)$$

och om vi applicerar Gauss sats på vänsterledet får vi

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{- \int \rho(r) dV}_{\text{Total innesluten massa}} \quad (9)$$

Eftersom  $V$  är en klot har vi att  $d\vec{S} = \hat{r}r^2 \sin\theta$  och geometrin säger oss att på konstant radie är  $F_r(r)$  konstant så vi kan enkelt beräkna ytintegralen och få fram

$$4\pi r^2 F_r(r) = - \int \rho(r) dV. \quad (10)$$

Rummet delas nu enkelt in i 3 olika delar med olika masstäthet

$$r < r_0, \quad \rho(r) = 0 \quad (11)$$

$$r_0 \leq r \leq R, \quad \rho(r) = \rho_0 \quad (12)$$

$$r > R, \quad \rho(r) = 0. \quad (13)$$

Eftersom ingen laddning innesluts i område 1 ser vi direkt att

$$F_r^{(1)}(r) = 0. \quad (14)$$

I område 2 finns en konstant masstäthet, vi behöver därför bara vet hur stor volym som innesluter massa. Det inses relativt lätt att volymen som innesluter massa är klotet med radie  $r$  (med  $r$  i område 2) minus den innersta tomma klotets volym (den innesluter ju ingen massa). Vi får då

$$4\pi r^2 F_r^{(2)}(r) = -\rho_0 \left( \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi r_0^3}{3} \right) \quad (15)$$

ur vilket vi enkelt löser ut

$$F_r^{(2)}(r) = - \left( r - \frac{r_0^3}{r^2} \right) \frac{\rho_0}{3}. \quad (16)$$

I område 3 innesluter vi all den massa som finns så vi behöver endast multiplicera  $\rho_0$  med den total volymen av skalet (dvs klotet med radie  $R$  minus klotet med radie  $r_0$ ).

$$4\pi r^2 F_r^{(3)}(r) = -\rho_0 \left( \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi r_0^3}{3} \right) \quad (17)$$

$$F_r^{(3)}(r) = -\frac{\rho_0(R^3 - r_0^3)}{3} \frac{1}{r^2}. \quad (18)$$

Slutsvaret för gravitationsfältet blir

$$F_r(r) = \begin{cases} F_r^{(1)}(r) = 0, & r \leq a \\ F_r^{(2)}(r) = -\left(r - \frac{r_0^3}{r^2}\right) \frac{\rho_0}{3}, & a < r \leq R \\ F_r^{(3)}(r) = -\frac{\rho_0(R^3 - r_0^3)}{3} \frac{1}{r^2}, & r > R \end{cases} \quad (19)$$

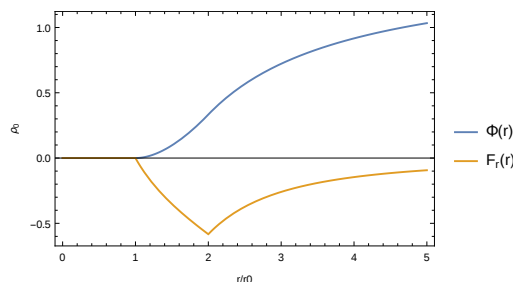


Figure 2: Skiss av gravitationsfältet (även potentialen visas, den efterfrågas dock inte i uppgiften). Här har vi satt  $R = 2r_0$ .

Vi kan läsa av fältet från den ekvivalenta punktkällan genom att komma ihåg att fältet från en punktkälla är  $F_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$ . Genom att jämföra med vårt fält i området  $r > R$  ser vi att vi har "styrkan"  $q = -\frac{4\pi}{3}(R^3 - r_0^3)\rho_0$ . Utanför volymen ser fältet alltså ut som att det skapats av en (attraktiv) punktkälla med kroppens totala massa.

En liten testmassa som placeras i området  $r < r_0$  kommer att påverkas av kraften  $F_r^{(1)}(r) = 0$  och kommer således inte röra på sig alls. Den beter sig som om det inte fanns någon massa runtomkring (alla krafter som påverkar den tar ut varandra pga den sfäriska symmetrin). \_\_\_\_\_

4. Betrakta de tre vektorfälten:  $\vec{F}_1 = \rho \hat{e}_\theta$ ,  $\vec{F}_2 = z \hat{e}_z$  och  $\vec{F}_3 = z \hat{e}_\rho$ .

- (a) Vilket av dessa tre fält kan skrivas i termer av en vektorpotential?  
(2 poäng)
- (b) Ange en explicit form för en vektorpotential,  $\vec{A}$ , som ger detta fält. (4 poäng)
- (c) Samma som (b) men med det extra (gauge-)villkoret att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  (detta kan alltså vara samma vektorpotential som du redan har konstruerat). (4 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

- (a) Endast fält  $\vec{F}_1$  är divergensfri. Det kan alltså skrivas i termer av en vektorpotential. För de andra gäller att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 = 1$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_3 = z/\rho$ .
- (b) Vektorpotentialen  $\vec{A}$  skall uppfylla  $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta &= F_\rho = 0 \\ \partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z &= F_\theta = \rho \\ \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho A_\theta) - \partial_\theta A_\rho) &= F_z = 0 \end{aligned}$$

En enkel lösning till detta är att sätta  $A_\theta = A_z = 0$  och  $A_\rho = \rho z$ .  
Dvs  $\vec{A} = \rho z \hat{e}_\rho$ .

- (c) Tyvärr är ovanstående lösning inte divergensfri ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 2z$ ). Men vi kan utnyttja gaugeinvariansen  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$  och välja  $\Lambda$  så att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Lambda = \Delta \Lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ .

Utgående från vårt svar på uppgift (b) väljer vi  $\Lambda = -z^3/3$  vilket ger  $\vec{\nabla} \Lambda = -z^2 \hat{e}_z$  och finner den divergensfria vektorpotentialen

$$\vec{A} = \rho z \hat{e}_\rho - z^2 \hat{e}_z. \quad (20)$$

- 
5. I en mycket lång homogen cylinder med radien  $R$  kan temperaturfördelningen skrivas  $T = T(\rho, \theta)$  i cylindriska koordinater, dvs temperaturen kan antas vara  $z$ -oberoende. Den stationära temperaturfördelningen i cylindern uppfyller Laplaces ekvation

$$\Delta T(\rho, \theta) = 0. \quad (21)$$

- (a) Beräkna temperaturfördelning i hela cylindern givet Dirichlet randvillkoret  $T(R, \theta) = T_0 + T_1 \cos \theta$ . (6 poäng)

- (a) Beräkna värmeflödet genom den halvan av cylinderytan som beskrivs av  $\rho = R$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  (streckade halvan i Figur 3.). Kommentera kort svaret och ange om värmen flödar in eller ut och ange även enheten på det beräknade värmeflödet. (Värmeströmtätheten beräknas med  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T(\rho, \theta)$ , där  $\lambda$  är en materialberoende konstant som antas vara känd.) (4 poäng)

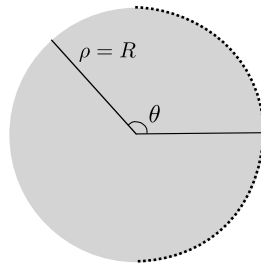


Figure 3: Cylindern i genomskärning. Cylindern antas vara mycket lång och därmed blir lösningen z-oberoende.

Lösning: \_\_\_\_\_

Vi börjar med att ansätta en allmän lösning på formen

$$T(\rho, \theta) = f(\rho) + g(\rho) \cos \theta \quad (22)$$

där vi har en term som följer randvillkorets vinkelberoende och en term som endast har ett radiellt beroende. Stoppa vi in denna ansatsen i Laplace ekvation (kom ihåg polär Laplaceoperator) får vi

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (g(\rho) \cos \theta) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (g(\rho) \cos \theta) = 0 \quad (23)$$

vilket vi kan skriva om till

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) = \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{g(\rho)}{\rho^2} \right) \cos \theta = 0 \quad (24)$$

där vi inser att båda termerna måste separat vara noll (pga att de har olika vinkelberoende). Vi får då de två ekvationerna

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{g(\rho)}{\rho^2} \right) = 0 \quad (26)$$

Lösningen för  $f(\rho)$  kan enkelt integreras fram till att vara

$$f(\rho) = A \log \rho + B. \quad (27)$$

Här måste  $A = 0$  då denna term har ett singulärt beteende i  $\rho = 0$ . För att lösa ut  $g(\rho)$  antar vi  $g(\rho) = C\rho^p$  och sätter in i ekvationen

$$C\rho^{p-2}(p^2 - 1) = 0 \quad (28)$$

vilket löses av  $p = \pm 1$ . Dvs vi ska anta

$$g(\rho) = C_1\rho + C_2/\rho \quad (29)$$

men vi ser genast att  $C_2$  ska vara noll då den termen har singulärt beteende i  $\rho = 0$  (det är också fältet från en linjekälla i  $z = 0$  och någon sådan har vi ju inte). Slutligen har vi att beteendet för  $T(\rho, \theta)$  ska vara

$$T(\rho, \theta) = B + C_1\rho \cos \theta \quad (30)$$

och genom att matcha till randvilkoret ser vi att

$$T(R, \theta) = T_0 + T_1 \cos \theta = B + C_1 R \cos \theta \quad (31)$$

dvs,  $B = T_0$  samt  $C_1 = T_1/R$ . Slutlösningen för temperaturfördelningen är

$$T(\rho, \theta) = T_0 + \frac{T_1\rho}{R} \cos \theta. \quad (32)$$

Vi ska även beräkna värmeffödet genom den högra ytan av cylindern. Normalen till denna yta pekar i  $\hat{\rho}$ -led och vi behöver bara räkna denna komponenten utav värmeströmmen

$$q_\rho = -\lambda \frac{\partial T(\rho, \theta)}{\partial \rho} = -\frac{\lambda T_1}{R} \cos \theta. \quad (33)$$

Vi betraktar en sträcka  $z_1 - z_0 = L$  av cylindern. Det totala värmeffödet fås av integralen

$$\begin{aligned} \int_S \vec{q} \cdot d\vec{S} &= \int_S \vec{q} \cdot \hat{\rho} \rho d\theta dz = L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q_\rho R d\theta \\ &= -\lambda T_1 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = -\lambda T_1 L [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -2\lambda T_1 L. \end{aligned}$$

Vi kan dela med  $L$  för att få värmeffödet per längdenhet. Mängden värme som flödar *in* är alltså  $2\lambda T_1$  genom den högra delen utav cylindern, mätt i effekt per längdenhet (W/m i SI-enheter).

6. Betrakta Poissons ekvation  $\Delta\phi = -\rho$  i det endimensionella området  $\{x : 0 \leq x \leq L\}$  med Dirichlets homogena randvillkor. För detta problem är Greensfunktionen

$$G(x, x') = \begin{cases} \left(1 - \frac{x'}{L}\right)x & 0 \leq x < x', \\ \left(1 - \frac{x}{L}\right)x' & x' \leq x \leq L. \end{cases}$$

- (a) Använd denna Greensfunktion för att beräkna potentialen för två punktladdningar i det givna området (med de givna randvillkoren): En laddning  $+q$  i punkten  $L/2 + \varepsilon/2$  och en laddning  $-q$  i punkten  $L/2 - \varepsilon/2$  där  $\varepsilon$  är en kort sträcka. (6 poäng)
- (b) Verifiera att den givna Greensfunktionen verkligen är korrekt. I uppgiften ingår alltså att inse vad det är som skall verifieras. Även ett tydligt resonemang kring detta kan ge delpoäng. (4 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

Situationen motsvarar en slags endimensionell dipol med randvillkor  $\phi(0) = \phi(L) = 0$ . Laddningsfördelning kan skrivas

$$\rho(x') = +q\delta(x' - L/2 - \varepsilon/2) - q\delta(x' - L/2 + \varepsilon/2), \quad (34)$$

och lösningen kan skrivas i termer av den givna Greensfunktionen

$$\phi(x) = \int_0^L G(x, x')\rho(x')dx. \quad (35)$$

Pga Greensfunktionens utseende får vi betrakta tre separata områden:

**För  $x < L/2 - \varepsilon/2$ :** Här är  $G = (1 - x'/L)x$  för bidragen från bägge punktkällorna och vi får

$$\phi(x) = q \left(1 - \frac{L/2 + \varepsilon/2}{L}\right)x - q \left(1 - \frac{L/2 - \varepsilon/2}{L}\right)x = -q\frac{\varepsilon}{L}x. \quad (36)$$

**För  $x > L/2 + \varepsilon/2$ :** Här är  $G = (1 - x/L)x'$  för bidragen från bägge punktkällorna och vi får

$$\phi(x) = q \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - q \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{L}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = q\frac{\varepsilon}{L}(L - x). \quad (37)$$



**För**  $L/2 - \varepsilon/2 < x < L/2 + \varepsilon/2$ : Olika  $G$  för de två punktkällorna.

$$\begin{aligned}\phi(x) &= q \left( 1 - \frac{L/2 + \varepsilon/2}{L} \right) x - q \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= q \left( x - \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{L} \right).\end{aligned}$$

Potentialen kan med fördel skissas upp. Då ser man att den avtar linjärt från noll vid  $x = 0$  till  $-q\varepsilon/2$  vid  $x = L/2 - \varepsilon/2$  för att sedan öka linjärt till  $+q\varepsilon/2$  på den korta sträckan  $\varepsilon$  och sedan avta linjärt till noll igen vid  $x = L$ .

**Verifiera Greensfunktionen** För att verifiera att detta är korrekt Greensfunktion skall vi visa att

- Den löser Poissons ekvation för en punktkälla med styrkan 1 i  $x'$ , dvs  $\Delta G(x, x') = -\delta(x - x')$ , inne i området  $\{x : 0 \leq x \leq L\}$ . Notera att Laplacianen verkar på  $x$ -koordinaten, dvs  $\Delta = d^2/dx^2$  i vårt en-dimensionella fall.
- Den uppfyller randvillkoren, dvs  $G(0, x') = G(L, x') = 0 \forall x'$ .

Det är enkelt att visa att randvillkoren är uppfyllda för den givna Greensfunktionen (notera att  $x = 0$  och  $x = L$  ligger i de två olika områdena).

Vad gäller Laplacianen så noterar vi att derivatan är diskontinuerlig i punkten  $x = x'$ . Utanför denna gäller

$$\frac{d}{dx}G(x, x') = G'(x, x') = \begin{cases} \left(1 - \frac{x'}{L}\right) & 0 \leq x < x', \\ -\frac{x'}{L} & x' < x \leq L, \end{cases}$$

och foljdaktligen att  $\frac{d^2}{dx^2}G(x, x') = G''(x, x') = 0, \forall x \neq x'$ . Detta motsvarar ett av de nödvändiga villkoren som en deltafunktion skall uppfylla, nämligen att  $\delta(x - x') = 0, \forall x \neq x'$ . Det andra villkoret gäller integralen över en deltafunktion. Här visar vi att

$$\int_0^L (-G''(x, x')) dx = 1.$$

Integralen får enbart ett bidrag från området med diskontinuiteten

$$\begin{aligned}\int_0^L (-G''(x, x')) dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \int_{x' - \Delta x}^{x' + \Delta x} (-G''(x, x')) dx \\ &= G'_-(x', x') - G'_+(x', x') \\ &= 1 - \frac{x'}{L} - \left(-\frac{x'}{L}\right) = 1,\end{aligned}$$

där  $G'_-$  och  $G'_+$  betecknar förstaderivatan till vänster, respektive till höger, om diskontinuiteten vid  $x = x'$ . Detta avslutar vårt bevis.

---