Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 26 oktober 2015 klockan 14.00-18.00 på Hörsalsvägen.

Lösningsskiss: Christian Forssén

1. (a) Kurvan är en ellips i xy-planet som genomlöps moturs. Skriv $\mathrm{d}\vec{r} = -b\sin t\hat{x}\mathrm{d}t + c\cos t\hat{y}\mathrm{d}t$ och integrera över parametern t. Svaret blir $2\pi\frac{bc}{a}F_0$.

   (b)
$$[\nabla \times \nabla\phi]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi$$
   Till exempel för $i = 1$

ijk	∂_j	∂_k	faktor
123	2	3	$+1$
132	3	2	-1

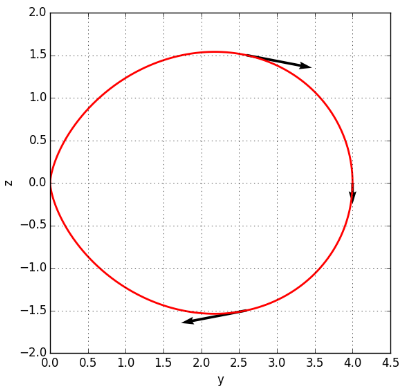
   vilket betyder att $[\nabla \times \nabla\phi]_1 = (\partial_2\partial_3 - \partial_3\partial_2)\,\phi = 0$.

   (c) Kom ihåg skalningsegenskapen hos deltafunktioner (kan visas genom variabelsubstitution i integralen $x' = 2x$). Detta ger
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2}.$$

2. Fältlinjer bestäms ur sambandet $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E}$. Här väljer vi $C = 4\pi/m$ och vi använder sfäriska koordinater så att $\mathrm{d}\vec{r} = \hat{r}\mathrm{d}r + r\hat{\theta}\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\hat{\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

   I detta fall får vi den separabla differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2r}{\tan\theta}$ med lösningen $r = A\sin^2\theta$. Integrationskonstanten bestäms från den givna punkten till $A = 4$.

   Detta är fältet från en dipol. Just denna fältlinje ligger i zy-planet ($x = 0$) med start och slut i origo. I punkten $\theta = \pi/2$, dvs $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ pekar vektorfältet i riktningen $\hat{\theta} = -\hat{z}$. Se figur.



3.
   - Ytan är en halvsfär med radien a.
   - Fältet är reguljärt med divergensen $\nabla \cdot \vec{F} = 2F_0/a$.
   - Vi sluter ytan genom att lägga till en pottenplatta S_1 med normalen $-\hat{z}$. Gauss sats ger oss att

$$\oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = \frac{4\pi F_0 a^2}{3}.$$

   - Integralen över bottenplattan räknas enklast ut i cylinderkoordinater

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{F_0}{a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi F_0 a^2}{2}.$$

   - och svaret blir därför

$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{11\pi F_0 a^2}{6}.$$

4. Kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\jmath},$$

härleds förslagsvis med hjälp av Gauss sats (se avsnitt 4.2 i kompendiet med den konserverade storheten *laddning* istället för *massa*).

Från Amperes lag (utan tidsberoende) har vi

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Med ytterligare en term (förskjutningsströmmen) i Amperes lag

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath},$$

stämmer kontinuitetsekvationen vilket man ser efter insättning.

5. - Randvillkoret antyder två sorters vinkelberoende: $\cos(p\varphi)$ och 1. Vi ansätter därför en variabelseparerad lösning (utan z-beroende)

$$\phi(\rho,\varphi) = f(\rho) + g(\rho)\cos(p\varphi).$$

   - Laplaces ekvation i cylindriska koordinater ger lösningarna

$$f(\rho) = A\log(\rho) + B, \quad g(\rho) = C\rho^{-p} + D\rho^{p},$$

   men vi stryker de singulära termerna då vi varken har någon linjekälla ($\log\rho$-termen skulle motsvarat en sådan), eller någon annan singulär källa.

   - Randvillkoren säger att $f(a) = \phi_0$ och $g(a) = \phi_1$. Detta ger att $B = \phi_0$ och $Da^p = \phi_1$.
   - Svaret blir alltså

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \left(\frac{\rho}{a}\right)^p \cos(p\varphi).$$

6. - Vi har en punktkälla med värmeeffekten W och ett Neumann randvillkor vid ytan till sfären. Temperaturfältet skall alltså uppfylla Poissons ekvation inuti sfären

$$\Delta T = -s/\lambda, \quad \text{med } s = W\delta^3(\vec{r}).$$

   - Lösningen är $T = T(r) = \frac{W/\lambda}{4\pi r} + T_1$, vilket man kan se genom att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i området $0 < r < a$ (dvs där källtermen är noll) och sedan identifiera punktkälltermen. Integrationskonstanten T_1 är fortfarande obestämd.
   - Värmeströmmen är $\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\hat{r}\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{W}{4\pi r^2}\hat{r}$. Detta är bra eftersom vi därmed kan verifiera att

$$\int_{|\vec{r}|=a} \vec{q}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = W.$$

   Dvs värmeeffekt från källan är lika med värmeström per tidsenhet ut genom ytan.

   - Den totala värmeenergin i sfären ges av integralen $H = \int_V c\rho T \mathrm{d}V$. För en konstant temperaturfördelning (som vid $t = 0$) blir detta $H_0 = c\rho T_0 \frac{4\pi a^3}{3}$. För vår stationära lösning gäller

$$H = c\rho T_1 \frac{4\pi a^3}{3} + c\rho \underbrace{4\pi \int_0^a \frac{W}{4\pi\lambda} r \mathrm{d}r}_{=\frac{Wa^2}{2\lambda}}.$$

- Värmeenergin skall vara bevarad vilket ger T_1. Svaret blir

$$T(r) = \frac{W}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2a}\right) + T_0$$