FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Aug 18, 2020

9. Lösningar av Poissons ekvation

Vi vet att Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}),$$

har entydiga lösningar om

$$\phi|_{\partial V} = f(\vec{r}) \qquad \text{Dirichlets randvillkor}$$
$$(\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V} \cdot \vec{n} = g(\vec{r}) \qquad \text{Neumans randvillkor}$$

där f och g är funktioner på randen ∂V.

Lösning av Poissons ekvation

Vi kommer att betrakta fyra olika lösningsmetoder:

1. Greensfunktionsmetoden. Generell metod, men det är ofta svårt att finna analytiska uttryck för Greensfunktionen.

2. Spegling. Ger uttryck för Greensfunktionen i vissa speciella geometrier och homogena randvillkor.

3. Variabelseparation. Kraftfull analytisk metod. Riktigt användbar i kombination med Fourieranalys.

4. Numeriska metoder.

- De tre förstnämnda är analytiska metoder som vi introducerar för att ge en fysikalisk förståelse av lösningarna.

- De numeriska metoderna är förstås viktigast för praktiska tillämpningar. Se datoruppgift.

3. Variabelseparation

- Bygger på att man löser ekvationerna stegvis för en variabel i taget.
- Problemet skall *passa bra* ihop med ett visst koordinatsystem.

Exempel: Laplaces ekvation på en cirkelskiva

- $\Delta\phi = 0$, på $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} < a$.
- Betrakta fallet där randvillkoret enbart innehåller ett vinkelberoende
$$\phi(\vec{r})|_{\partial V} = h(\varphi)$$

Laplaceoperatorn är

$$\Delta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Målet är att lösa ekvationen, samtidigt som vi uppfyller randvillkoret, genom att separera beroendet på variabeln φ och ϱ genom en ansats av formen
$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$$

Exempel. Antag att randvillkoret är

$$\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi,$$

där m är ett heltal.

Vi ansätter att hela lösningen har just detta beroende av φ, så att

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)\cos m\varphi$$

Funktionen $\cos m\varphi$ uppfyller

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\cos m\varphi = -m^2 \cos m\varphi,$$

dvs, den är en egenfunktion till $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ med egenvärdet $-m^2$.

Insättning:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho\frac{\mathrm{d}f(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\right)\cos m\varphi - \frac{m^2}{\varrho^2}f(\varrho)\cos m\varphi = 0,$$

och om detta skall gälla överallt på cirkelskivan måste man ha

$$\varrho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho\frac{\mathrm{d}f(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\right) - m^2 f(\varrho) = 0.$$

Den partiella differentialekvationen har nu reducerats till en ordinär differentialekvation för funktionen $f(\varrho)$

- Ansatz: $f(\varrho) = A\varrho^p$
- Löser ekvationen med $p^2 - m^2 = 0$, dvs. $p = \pm m$, där minustecknet väljs bort på grund av singulariteten i origo.
- Slutsats:

$$\phi(\varrho,\varphi) = \phi_0\left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \cos m\varphi,$$

är en lösning till Laplaces ekvation på cirkelskivan med randvillkoret $\phi(a,\varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$.

Exempel 2: Laplaces ekvation på en cirkelskiva med allmänt Dirichlet randvillkor

OBS!

Detta exempel inkluderar Fourieranalys som ej ingår i kursen. Anteckningarna är endast med för bättre koppling till motsvarande material i andra kurser och för att antyda den mer generella användningen av variabelseparationsmetoden.

Med randvillkoret

$$\phi(a,\varphi) = h(\varphi),$$

ansätter vi lösningen $\phi(\varrho,\varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$.

Laplacianen blir

$$\Delta\phi = \Delta\left(f(\varrho)g(\varphi)\right) = g(\varphi)\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right) + \frac{f(\varrho)}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Detta ger den *separerade* ekvationen

$$\frac{f(\varrho)g(\varphi)}{\varrho^2}\left[\frac{\varrho^2}{f(\varrho)}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{g(\varphi)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\right]=0,$$

där den första termen i hakparantesen enbart beror på ϱ och den andra bara på φ. Därmed måste bägge vara konstanta (för att gälla för alla ϱ, φ). Vi sätter den första till $-\lambda$ och den andra till $+\lambda$.

Studera vinkelekvationen först

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}=\lambda g(\varphi),$$

dvs vi kan tolka g som en egenfunktion till $\partial^2/\partial\varphi^2$. Lösningen är

$$g(\varphi)=A\cos(m\varphi)+B\sin(m\varphi),$$

med *egenvärdet* $\lambda=-m^2$. Funktionen måste uppfylla randvillkoret $g(0)=g(2\pi)$ vilket ger att $m=0,1,2,\dots$ (notera att $m=0$ är meningslös för sinus-termen).

Den kvarvarande, radiella ekvationen blir nu

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right)-\frac{m^2}{\varrho^2}f(\varrho)=0.$$

- $m=0$, vilket innebär att $g(\varphi)=A$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}=B \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}=B\varrho.$$

Med lösningen $f(\varrho)=A+B\ln(\varrho)$, där den andra termen motsvarar en punktkälla i två dimensioner (vi skippar denna).

Alltså är $\phi(\vec{r})=A$ (konstant) en lösning om randvillkoret är $h(\varphi)=A$ (konstant).

- $m>0$, ansätt lösning $f(\varrho)=C\varrho^p$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho^p\right)-\frac{m^2}{\varrho^2}\varrho^p=0 \quad\Rightarrow\quad p^2\varrho^{p-2}-m^2\varrho^{p-2}=0 \quad\Rightarrow\quad p=\pm m$$

Med lösningen $f(\varrho)=A\varrho^m+\frac{B}{\varrho^m}$, där den andra termen är singulär i origo (vi skippar denna).

Med randvillkoret från ovan $h(\varphi)=\cos m\varphi$, $f(a)=\phi_0$ får vi lösningen

$$\phi(\vec{r})=\phi_0\left(\frac{\varrho}{a}\right)^m\cos m\varphi,$$

som ovan.

För ett mer allmänt randvillkor kan man (Fourier)-utveckla

$$h(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi),$$

vilket ger lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \cos(m\varphi) + b_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \sin(m\varphi).$$

OBS: ingår ej i denna kurs att kunna göra en sådan Fourierutveckling.

Kommentar

Separationsmetoden kan förstås användas med fler än två variabler. Vill man t.ex. använda den i sfäriska koordinater, hittar man egenfunktioner i tur och ordning i φ, θ och r. Se veckans tal. Eller så hittar man direkt egenfunktioner på S^2, s.k. klotytefunktioner (se kvantmekanik).

1. Greensfunktionsmetoden

Vi tecknar Poissons ekvation i hela $\mathbb{R}^3$,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

En lösningsstrategi som vi har betraktat tidigare är att:

- Beräkna bidraget till potentialen i punkten $\vec{r}$ givet en punktladdningen med styrkan $q = 1$ belägen i punkten $\vec{r}\,'$.
- Superpositionsprincipen ger potentialen som en summa/integral över källtätheten gånger ovanstående "Greensfunktion".

Vi har redan visat att

$$G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|},$$

där vi förtydligar att detta gäller på $\mathbb{R}^3$. Eftersom en punktkälla i punkten $\vec{r} = \vec{r}\,'$ med styrkan $q = 1$ beskrivs av källtätheten $\rho(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,')$, inser vi att Greensfunktionen löser följande differentialekvation

$$\Delta G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,'), \tag{1}$$

på hela $\mathbb{R}^3$.

Kommentar 1: Notera att Laplaceoperatorn verkar på variabeln $\vec{r}$ (inte $\vec{r}\,'$). Dvs., $\Delta = \Delta_{\vec{r}} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Lösningen till Poissons ekvation i $\mathbb{R}^3$ med en allmän källa ρ blir en superposition

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Exempel: linjekälla

Betrakta en linjekälla, $\rho(\vec{r}) = k\delta^2(\vec{\rho})$, i $\mathbb{R}^3$.

Vi skall integrera över linjekällan och introducerar koordinaten

$$\vec{r}\,' = \vec{\rho}\,' + z'\hat{z}' = \rho'\hat{\rho}' + z'\hat{z},$$

där vi noterar att det inte behövs något "prim" på z-riktningen.

Vi sätter in i

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}\,')G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}\,')\mathrm{d}V' = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' \frac{k\delta^2(\vec{\rho}\,')}{4\pi|\vec{r} - (\rho'\hat{\rho}' + z'\hat{z})|}.$$

Integralen $\int dS'$ över x' och y' kan enkelt utföras tack vare deltafunktionen. Resultatet:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k}{4\pi|\vec{r} - z'\hat{z}|}$$

som är identiskt med den direkta konstruktionen från kap. 6.

Greensfunktioner för en begränsad volym med randvillkor. Låt oss göra denna metod mer generell. Studera Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

- ... inuti en (begränsad) volym V.
- ... med homogena randvillkor, dvs. $f = 0$ eller $g = 0$ på randen ∂V.
- ... för en allmän källtäthet $\rho(\vec{r})$.

Lösningen kan skrivas

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} \mathrm{d}V' \, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,'),$$

där Greensfunktionen löser Ekv. (1) *inuti volymen* V och med det *givna randvillkoret*.

Att detta är en lösning visas genom insättning:

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int_{V'} \mathrm{d}V' \, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,') = \int_{V'} \mathrm{d}V' \, \Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,') \\ &= -\int_{V'} \mathrm{d}V' \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,') = -\rho(\vec{r}). \qquad (2)\end{aligned}$$

- Notera att $\vec{r}$-beroendet bara sitter i Greensfunktionen.
- Notera att Greensfunktionen G på ett område V bestäms av formen på området och av randvillkoren på ∂V.
- Genom att $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ uppfyller det homogena randvillkoret kommer ovanstående superposition också att uppfylla det.

2. Spegling

- Vi såg att lösningen $\phi(\vec{r})$ erhålls enkelt om man har tillgång till Greensfunktionen. Men denna är ofta svår att finna.
- För vissa geometrier erbjuder *speglingsmetoden* ett väldigt elegant sätt att konstruera Greensfunktionen.

Rita: Fältbilder tre olika konfigurationer med punktladdningar

Skissa fältbilder för tre olika fall:

- En punktladdning $+q$ (belägen i det övre halvplanet, $z > 0$);
- Två punktladdningar $+q$ och $-q$ (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre);
- Två punktladdningar $+q$ och $+q$ (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre).

Betrakta speciellt potentialen vid speglingsytan $z = 0$.

Fundera: Poissons ekvation

Det första fallet ger en potential ϕ som löser Poissons ekvation

$$\Delta\phi = -q\delta^{(3)}(\vec{r}_0),$$

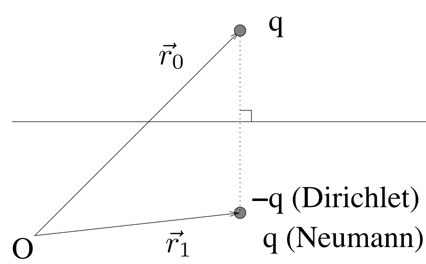
i hela $\mathbb{R}^3$. Vilken differentialekvation löser det andra respektive det tredje fallet om vi begränsar oss till övre halvplanet?

Betrakta halvrymden $\{\vec{r} : z > 0\}$ med ett homogent randvillkor på planet $z = 0$:

- Dirichlets randvillkor: $\phi = 0$, eller
- Neumanns, $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$.

Kommentar 2: Detta är ett bra tillfälle att repetera begreppen ekvipotentialytor och fältlinjer (till vektorfältet $-\vec{\nabla}\phi$). Se till att förstå att ett randvillkor $\phi = 0$ (Dirichlet) betyder att randen är en ekvipotentialyta, och att $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$ betyder att fältlinjerna är parallella med randen.

Betrakta nu en punktladdning belägen i det övre halvplanet. Vi kan införa en spegelladdning i det område som vi inte är intresserade av ($z < 0$). Den påverkar alltså inte källtätheten i det fysikaliska området ($z > 0$), men hjälper till att uppfylla randvillkoren.



Med $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $\vec{r}_1 = (x_0, y_0, -z_0)$ och:

- $q_1 = q$ uppfylls Neumanns randvillor
- $q_1 = -q$ uppfylls Dirichlets randvillor

dvs potentialen från den två punktladdningarna

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \pm \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

I det förra fallet är fältlinjerna parallella med $z = 0$ planet, i det senare fallet ligger ekvipotentialytan $\phi = 0$ i $z = 0$ planet.

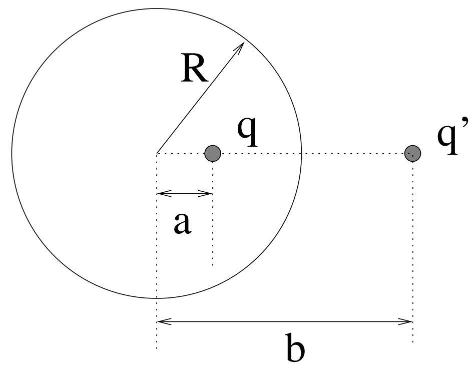
Vi kan alltså konstruera Greensfunktioner för övre halvplanet med dessa två randvillkor. Med Dirichlets homogena randvillkor blir alltså Greensfunktionen

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,''|},$$

där $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ och $\vec{r}\,'' = (x', y', -z')$, med $z' > 0$.

Notera att $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ uppfyller $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ i det övre halvrummet.

Intressant nog fungerar speglingsmetoden även för cirklar i två dimensioner och sfärer i tre dimensioner (i det senare fallet dock endast för Dirichlets randvillkor). Se demonstrationsuppgift.


R
q
q'
a
b