Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 och FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 29 oktober 2018 klockan 14.00-18.00, Maskinsalar.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är ytintegralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z^2\hat{z}$ och S är ytan till enhetssfären ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) med normalvektor $\hat{r}$?

   (b) Skissa nivåytorna $\phi = -1, 0, 1$ för skalärpotentialen $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ i området $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Skissa också den fältlinje (inkl riktning) som går genom punkten $(x, y) = (1, 1)$.

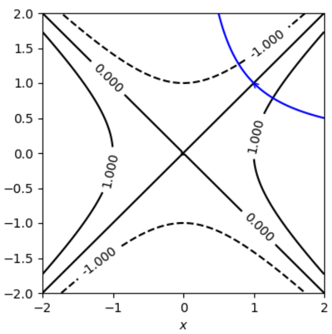
   (c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ (notera att fältet är symmetriskt runt $z = 0$, dvs det som strömmar in i nedre halvplanet kommer att strömma ut i det övre).

   (b)



   (c) Kom ihåg skalningsegenskapen hos deltafunktioner (kan visas genom variabelsubstitution i integralen $x' = 4x$). Detta ger

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos(0) = \frac{1}{4}.$$

2. Ett vektorfält $\vec{F}$ är givet i sfäriska koordinater som

$$\vec{F} = \frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}.$$

Bestäm a så att fältet blir virvelfritt (ignorera singulariteten i $r \to 0$). Bestäm potentialen ϕ. *(10 poäng)*

Lösning:

Rotationen blir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ \frac{a\cos\theta}{r^3} & \frac{\sin\theta}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta}{r^4}(a-2)\hat{\varphi}.$$

Fältet är alltså virvelfritt (konservativt) då $a = 2$.

Skalärpotentialen får vi ur sambandet $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$. Generella lösningar till respektive differentialekvation kan tecknas direkt:

$$\begin{aligned} \partial_r\phi = -\frac{a\cos\theta}{r^3} \quad &\Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{a\cos\theta}{2r^2} + f_1(\theta,\varphi), \\ \frac{1}{r}\partial_\theta\phi = -\frac{\sin\theta}{r^3} \quad &\Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{\cos\theta}{r^2} + f_2(r,\varphi), \\ \partial_\varphi\phi = 0 \quad &\Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = f_3(r,\theta). \end{aligned}$$

Med $a = 2$ ser vi att de första två ekvationerna bara blir konsistenta då $f_1(\theta,\varphi) = f_2(r,\varphi) \equiv g(\varphi)$, och att den tredje ekvationen i sin tur ger att lösningen måste vara oberoende av φ så att $g(\varphi) = C$.

Svar: $\phi = \frac{\cos\theta}{r^2} + C$.

3. Använd indexnotation för att visa följande gradientlikheter

   (a) $\vec{\nabla}(r^2) = 2\vec{r}$

   (b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

   (c) $\vec{\nabla}\cdot(r^2\hat{r}) = 4r$

   där r är längden på ortsvektorn $\vec{r}$.
   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)
   (bevis utan indexnotation kan också ge poäng, dock maximalt 6 poäng).

   Lösning:

(a) $\partial_i r_j r_j = 2\delta_{ij} r_j = 2r_i$, vilket motsvarar vektorn $2\vec{r}$.

(b) $\partial_i \left(r_j r_j\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{2\delta_{ij} r_j}{\left(r_k r_k\right)^{3/2}} = -\frac{r_i}{r^3}$,
vilket motsvarar vektorn $-\vec{r}/r^3 = -\hat{r}/r^2$.

(c) $\partial_i \left(r_j r_j\right)^{1/2} r_i = 2\frac{1}{2}\delta_{ik} r_k \left(r_m r_m\right)^{-1/2} r_i + 3\left(r_j r_j\right)^{1/2} = \left(r_j r_j\right)^{1/2} + 3\left(r_j r_j\right)^{1/2} = 4\left(r_j r_j\right)^{1/2}$,
vilket motsvarar $4r$.

---

4. Maxwells ekvationer är

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

(a) Använd Faradays induktionslag, $U = -d\Phi/dt$, för att visa Maxwells andra ekvation $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Notera att Φ är det magnetiska flödet genom en yta $\vec{S}$ (normalytintegral för magnetfältet $\vec{B}$) och U är den inducerade spänningen längs randen ∂S (vägintegral för det elektriska fältet $\vec{E}$). *(5 poäng)*

(b) Använd Maxwells ekvationer för att visa att kontinuitetsekvationen $\partial\rho/\partial t = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}$ är uppfylld för $\rho(\vec{r}, t) =$ elektrisk laddningstäthet och $\vec{\jmath}(\vec{r}, t) =$ elektrisk strömtäthet. *(5 poäng)*

Lösning:

Se kurskompendium, avsnitt 11.2.

5. Ett cylindriskt skal kan betraktas som oändligt långt med innerradie ρ_0 och ytterradie ρ_1. Det värms från insidan med en linjevärmekälla som ger upphov till Neumannrandvillkoret $\hat{\rho} \cdot \vec{q}\,|_{\rho=\rho_0} = w_0/\rho_0$, där $[w_0] = \mathrm{Wm}^{-1}$. Skalets konstanta värmekonduktivitet är λ. På utsidan kyls skalet av enligt

$$\hat{\rho} \cdot \vec{q}\,|_{\rho=\rho_1} = \alpha\left(T(\rho_1) - T_0\right),$$

där α och T_0 är konstanter med rätt enheter.

Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i cylinderskalet, dvs för $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$. *(10 poäng)*

Lösning:

Vid stationärlösningen gäller Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i hela området. Problemets geometri avslöjar att $T = T(\rho)$ så att

$$\Delta T = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(\rho) = C\log(\rho) + D.$$

Notera att lösningen även kan skrivas $C\log(\rho/\rho_C)$, vilket egentligen är snyggare då ρ_C blir en integrationskonstant med dimension längd. Vi fortsätter dock med ovanstående och kontrollerar dimensionen på slutet.

Vi konstaterar att värmeströmmen ges av temperaturgradienten enligt

$$\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T = -\frac{\lambda C}{\rho}\hat{\rho}.$$

Randvillkoret vid $\rho = \rho_0$ ger alltså att $C = -w_0/\lambda$ så att $\vec{q} = \frac{w_0}{\rho}\hat{\rho}$.

Randvillkoret vid $\rho = \rho_1$ ger därefter

$$\frac{w_0}{\rho_1} = \alpha\left(-\frac{w_0}{\lambda}\log(\rho_1) + D - T_0\right),$$

eller

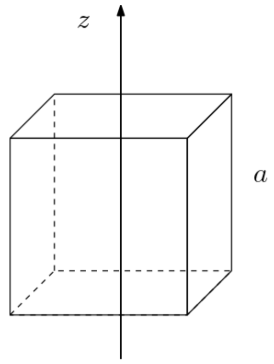
$$D = \frac{w_0}{\alpha\rho_1} + T_0 + \frac{w_0}{\lambda}\log\rho_1.$$

Efter insättning och förenkling blir svaret

$$T(\rho) = \frac{w_0}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{\alpha\rho_1} + \log\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)\right] + T_0.$$

Vi konstaterar att $[w_0] = \mathrm{Wm}^{-1}$, $[\alpha] = \mathrm{WK}^{-1}\mathrm{m}^{-2}$ och $[\lambda] = \mathrm{WK}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ så att dimensionen på svaret blir Kelvin.

6. Betrakta fältet $\vec{F} = \frac{\sqrt{b^4+\rho^4}}{\rho}\hat{\rho}$ och beräkna normalytintegralen $\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}$, där ∂V är ytan till en kub med utåtriktad normal och sidlängd a centrerad vid z-axeln. Vi har att $a \gg b$ och söker ett approximativt uttryck för normalytsintegralen (explicita korrektioner till och med ordning $\frac{b^2}{a^2}$ skall inkluderas).



Lösning:

Vi konstaterar att fältet är singulärt längs $\rho = 0$. Här redovisas tre alternativa lösningsstrategier. Det enklaste för denna uppgift är att utföra ytintegralen direkt (alternativ 1). Men det kan vara illustrativt att kika på lösningarna med Gauss sats där man måste hantera singulariteten, som i detta fall inte är en linjekälla.

Alternativ 1:

Vi utför ytintegralen över de sex sidorna till kuben. Vi noterar först att flödesintegralen är noll över topp- och bottenytorna med normalriktning i z-led eftersom $\pm\hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0$. De övriga fyra ytorna kommer att ge lika stora bidrag pga symmetrin. Vi studerar enbart ytintegralen över ytan S_1 med $x = a/2$ och normalriktning $\hat{x}$

$$I_1 \equiv \int_{S_1} \frac{\sqrt{b^4 + \rho^4}}{\rho} \hat{\rho} \cdot d\vec{S}.$$

Vi har att $\hat{\rho} \cdot d\vec{S} = \hat{\rho} \cdot \hat{x} dydz = \frac{a/2}{\rho} dydz$. Integranden kan Taylorutvecklas och vi konstaterar att $\rho \sim a \gg b$ på ytan:

$$\frac{\sqrt{b^4 + \rho^4}}{\rho} = \rho \sqrt{1 + \frac{b^4}{\rho^4}} = \rho \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right].$$

Vi får alltså att

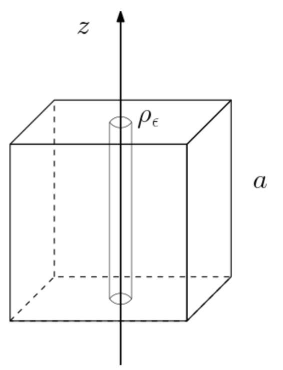
$$I_1 = \iint \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right] \frac{a}{2} dydz = \frac{a^3}{2} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \right],$$

där vi har utnyttjat att $\rho \sim a$ på ytan. Den sökta integralen blir

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4I_1 = 2a^3 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \right].$$

Alternativ 2:

Bilda en sluten yta från kuben genom att införa en cylinderyta S_ϵ (vars radie $\rho_\epsilon \ll b$) som omsluter z-axeln (notera att normalriktningen är $-\hat{\rho}$) samt två små hål där cylinderytan möter topp- och bottensidorna av kuben. Vi kallar denna nya, slutna yta för $\partial V_\epsilon + S_\epsilon$ och den innesluter en volym V_ϵ som är lika med kubens volym minus den lilla cylindervolymen. På denna yta kan vi utan problem använda Gauss sats och vi finner att



$$\oint_{\partial V_\epsilon + S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{V_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial V_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{V_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV - \int_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \tag{5}$$

Vi noterar också att

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{\rho_\epsilon \to 0} \oint_{\partial V_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

så det som återstår är att räkna ut HL av ekv. (5) i gränsen $\rho_\epsilon \to 0$.

Beräkna divergensen då $\rho \neq 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho F_\rho) = \frac{2\rho^2}{\sqrt{b^4 + \rho^4}} = 2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^4}{\rho^4}}} = 2 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right].$$

Låt oss dela upp volymsintegralen i HL av ekv. (5) i två områden: Det första (V_1) är ett cylinderskal från $\rho = \rho_\epsilon$ till $\rho = a$; det andra (V_2) är resterande hörnområden som behövs så att $V_1 + V_2 = V_\epsilon$. Vi får att

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho_\epsilon \to 0} \int_{V_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV &= \int_{z=0}^{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{a} \frac{2}{\sqrt{1 + b^4/\rho^4}} \rho d\rho d\varphi dz \\
&= 4\pi a \int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^4 + b^4}} = 4\pi a \left[\frac{1}{2} \sqrt{\rho^4 + b^4} \right]_0^a = 2\pi a^3 \left[1 - \frac{b^2}{a^2} + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right].
\end{aligned}$$

Volymen V_2 sträcker sig över ett område (med volymen $a^3 - \pi a^3$) där vi har att $\rho \geq a \gg b$. Vi får därför att

$$\int_{V_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 2(a^3 - \pi a^3) \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \right],$$

så att

$$\lim_{\rho_\epsilon \to 0} \int_{V_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 2a^3 \left[1 - \pi \frac{b^2}{a^2} + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \right].$$

Ytintegralen i HL av ekv. (5) blir

$$\int_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\int_{z=0}^{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{b^2}{\rho_\epsilon} \sqrt{1 + \frac{\rho_\epsilon^4}{b^4}} \rho_\epsilon d\varphi dz = -2\pi b^2 a \sqrt{1 + \frac{\rho_\epsilon^4}{b^4}}.$$

Slutligen finner vi att

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{\rho_\epsilon \to 0} \left(\int_{V_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV - \int_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right) = 2a^3 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right].$$

Alternativ 3:

Analysera singulariteten då $\rho \to 0$

$$F_\rho = \frac{b^2}{\rho} \sqrt{1 + \frac{\rho^4}{b^4}} = \frac{b^2}{\rho} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right],$$

vilket ger att singulariteten beter sig som en linjekälla med styrka $2\pi b^2$. Inför ett sådant singulärt fält $\vec{F}_\mathrm{s} \equiv \frac{2\pi b^2}{2\pi \rho} \hat{\rho}$ och studera

$$\vec{F} = \vec{F} - \vec{F}_\mathrm{s} + \vec{F}_\mathrm{s} \equiv \vec{F}_\mathrm{ns} + \vec{F}_\mathrm{s},$$

där singulariteten har subtraherats bort i $\vec{F}_\mathrm{ns}$ så att dess bidrag till ytintegralen kan behandlas som vanligt med Gauss sats

$$\oint_{\partial V} \vec{F}_\mathrm{ns} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\mathrm{ns} dV = 2a^3 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \right]$$

(enligt divergensutträkningen ovan). Bidraget från den singulära termen (vanlig linjekälla) blir

$$\oint_{\partial V} \vec{F}_\mathrm{s} \cdot d\vec{S} = 2\pi b^2 a,$$

och svaret blir som ovan

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V} \vec{F}_\mathrm{ns} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial V} \vec{F}_\mathrm{s} \cdot d\vec{S} = 2a^3 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{b^4}{\rho^4} \right) \right].$$