

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 8, 2019

## 9. Lösningar av Poissons ekvation

Vi vet att Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}),$$

har entydiga lösningar om

$$\phi|_{\partial V} = f(\vec{r})$$

Dirichlets randvillkor

$$(\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V} \cdot \vec{n} = g(\vec{r})$$

Neumans randvillkor

där  $f$  och  $g$  är funktioner på randen  $\partial V$ .

### Lösning av Poissons ekvation

Vi kommer att betrakta fyra olika lösningsmetoder:

**1. Greensfunktionsmetoden.** Generell metod, men det är ofta svårt att finna analytiska uttryck för Greensfunktionen.

**2. Spegling.** Ger uttryck för Greensfunktionen i vissa speciella geometriner och homogena randvillkor.

**3. Variabelseparation.** Kraftfull analytisk metod. Riktigt användbar i kombination med Fourieranalys.

**4. Numeriska metoder.**

- De tre förstnämnda är analytiska metoder som vi introducerar för att ge en fysikalisk förståelse av lösningarna.

- De numeriska metoderna är förstås viktigast för praktiska tillämpningar. Se datoruppgift.

### 3. Variabelseparation

- Bygger på att man löser ekvationerna stegvis för en variabel i taget.
- Problemet skall *passa bra* ihop med ett visst koordinatsystem.

#### Exempel: Laplaces ekvation på en cirkelskiva

- $\Delta\phi = 0$ , på  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} < a$ .
- Betrakta fallet där randvillkoret enbart innehåller ett vinkelberoende  

$$\phi(\vec{r})|_{\partial V} = h(\varphi)$$

Laplaceoperatorn är

$$\Delta = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Målet är att lösa ekvationen, samtidigt som vi uppfyller randvillkoret, genom att separera beroendet på variabeln  $\varphi$  och  $\varrho$  genom en ansats av formen

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$$

**Exempel.** Antag att randvillkoret är

$$\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi,$$

där  $m$  är ett heltal.

Vi ansätter att hela lösningen har just detta beroende av  $\varphi$ , så att

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho) \cos m\varphi$$

Funktionen  $\cos m\varphi$  uppfyller

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos m\varphi = -m^2 \cos m\varphi,$$

dvs, den är en egenfunktion till  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  med egenvärdet  $-m^2$ .

Insättning:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) \cos m\varphi - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) \cos m\varphi = 0,$$

och om detta skall gälla överallt på cirkelskivan måste man ha

$$\varrho \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) - m^2 f(\varrho) = 0.$$

Den partiella differentialekvationen har nu reducerats till en ordinär differentialekvation för funktionen  $f(\varrho)$

- Ansatz:  $f(\varrho) = A\varrho^p$
- Löser ekvationen med  $p^2 - m^2 = 0$ , dvs.  $p = \pm m$ , där minustecknet väljs bort på grund av singulariteten i origo.
- Slutsats:

$$\phi(\varrho, \varphi) = \phi_0 \left( \frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi,$$

är en lösning till Laplaces ekvation på cirkelskivan med randvillkoret  $\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$ .

### Exempel 2: Laplaces ekvation på en cirkelskiva med allmänt Dirichlet randvillkor

#### OBS!

Detta exempel inkluderar Fourieranalys som ej ingår i kursen. Anteckningarna är endast med för bättre koppling till motsvarande material i andra kurser och för att antyda den mer generella användningen av variabelseparationsmetoden.

Med randvillkoret

$$\phi(a, \varphi) = h(\varphi),$$

ansätter vi lösningen  $\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$ .

Laplacianen blir

$$\Delta\phi = \Delta(f(\varrho)g(\varphi)) = g(\varphi) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) + \frac{f(\varrho)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Detta ger den *separerade* ekvationen

$$\frac{f(\varrho)g(\varphi)}{\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2}{f(\varrho)} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{g(\varphi)} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

där den första termen i hakparantesen enbart beror på  $\varrho$  och den andra bara på  $\varphi$ . Därmed måste bägge vara konstanta (för att gälla för alla  $\varrho, \varphi$ ). Vi sätter den första till  $-\lambda$  och den andra till  $+\lambda$ .

Studera vinkelekvationen först

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = \lambda g(\varphi),$$

dvs vi kan tolka  $g$  som en egenfunktion till  $\partial^2/\partial \varphi^2$ . Lösningen är

$$g(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi),$$

med *egenvärdet*  $\lambda = -m^2$ . Funktionen måste uppfylla randvillkoret  $g(0) = g(2\pi)$  vilket ger att  $m = 0, 1, 2, \dots$  (notera att  $m = 0$  är meningslös för sinus-termen).

Den kvarvarande, radiella ekvationen blir nu

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) = 0.$$

- $m = 0$ , vilket innebär att  $g(\varphi) = A$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = B \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = B/\varrho.$$

Med lösningen  $f(\varrho) = A + B \ln(\varrho)$ , där den andra termen motsvarar en punktkälla i två dimensioner (vi skippar denna).

Alltså är  $\phi(\vec{r}) = A$  (konstant) en lösning om randvillkoret är  $h(\varphi) = A$  (konstant).

- $m > 0$ , ansätt lösning  $f(\varrho) = C\varrho^p$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho^p \right) - \frac{m^2}{\varrho^2} \varrho^p = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 \varrho^{p-2} - m^2 \varrho^{p-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \pm m$$

Med lösningen  $f(\varrho) = A\varrho^m + \frac{B}{\varrho^m}$ , där den andra termen är singulär i origo (vi skippar denna).

Med randvillkoret från ovan  $h(\varphi) = \cos m\varphi$ ,  $f(a) = \phi_0$  får vi lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left( \frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi,$$

som ovan.

För ett mer allmänt randvillkor kan man (Fourier)-utveckla

$$h(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi),$$

vilket ger lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \cos(m\varphi) + b_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \sin(m\varphi).$$

OBS: ingår ej i denna kurs att kunna göra en sådan Fourierutveckling.

### Kommentar

Separationsmetoden kan förstås användas med fler än två variabler. Vill man t.ex. använda den i sfäriska koordinater, hittar man egenfunktioner i tur och ordning i  $\varphi$ ,  $\theta$  och  $r$ . Se veckans tal. Eller så hittar man direkt egenfunktioner på  $S^2$ , s.k. klotytefunktioner (se kvantmekanik).

## 1. Greensfunktionsmetoden

Vi tecknar Poissons ekvation i hela  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

En lösningsstrategi som vi har betraktat tidigare är att:

- Beräkna bidraget till potentialen i punkten  $\vec{r}$  givet en punktladdningen med styrkan  $q = 1$  belägen i punkten  $\vec{r}'$ .
- Superpositionsprincipen ger potentialen som en summa/integral över källtätheten gånger ovanstående "Greensfunktion".

Vi har redan visat att

$$G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

där vi förtydligar att detta gäller på  $\mathbb{R}^3$ . Eftersom en punktkälla i punkten  $\vec{r} = \vec{r}'$  med styrkan  $q = 1$  beskrivs av källtätheten  $\rho(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ , inser vi att Greensfunktionen löser följande differentialekvation

$$\Delta G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1)$$

på hela  $\mathbb{R}^3$ .

**Kommentar 1:** Notera att Laplaceoperatorn verkar på variabeln  $\vec{r}$  (inte  $\vec{r}'$ ). Dvs.,  $\Delta = \Delta_{\vec{r}} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ .

Lösningen till Poissons ekvation i  $\mathbb{R}^3$  med en allmän källa  $\rho$  blir en superposition

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

### Exempel: linjekälla

Betrakta en linjekälla,  $\rho(\vec{r}) = k\delta^2(\vec{\rho})$ , i  $\mathbb{R}^3$ .

Vi skall integrera över linjekällan och introducerar koordinaten

$$\vec{r}' = \vec{\rho}' + z'\hat{z} = \rho'\hat{\rho} + z'\hat{z},$$

där vi noterar att det inte behövs något "prim" på  $z$ -riktningen.

Vi sätter in i

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' \frac{k\delta^2(\vec{\rho}')}{4\pi|\vec{r} - (\rho'\hat{\rho} + z'\hat{z})|}.$$

Integralen  $\int dS'$  över  $x'$  och  $y'$  kan enkelt utföras tack vare deltafunktionen. Resultatet:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k}{4\pi|\vec{r} - z'\hat{z}|}$$

som är identiskt med den direkta konstruktionen från kap. 6.

**Greensfunktioner för en begränsad volym med randvillkor.** Låt oss göra denna metod mer generell. Studera Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

- ... inuti en (begränsad) volym  $V$ .
- ... med homogena randvillkor, dvs.  $f = 0$  eller  $g = 0$  på randen  $\partial V$ .
- ... för en allmän källtäthet  $\rho(\vec{r})$ .

Lösningen kan skrivas

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}'),$$

där Greensfunktionen löser Ekv. (1) *inuti volymen*  $V$  och med det *givna randvillkoret*.

Att detta är en lösning visas genom insättning:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') = \int_{V'} dV' \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= - \int_{V'} dV' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

- Notera att  $\vec{r}$ -beroendet bara sitter i Greensfunktionen.
- Notera att Greensfunktionen  $G$  på ett område  $V$  bestäms av formen på området och av randvillkoren på  $\partial V$ .
- Genom att  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  uppfyller det homogena randvillkoret kommer ovanstående superposition också att uppfylla det.

## 2. Spegling

- Vi såg att lösningen  $\phi(\vec{r})$  erhålls enkelt om man har tillgång till Greensfunktionen. Men denna är ofta svår att finna.
- För vissa geometrier erbjuder *speglingsmetoden* ett väldigt elegant sätt att konstruera Greensfunktionen.

### Rita: Fältnbilder tre olika konfigurationer med punktladdningar

Skissa fältnbilder för tre olika fall:

- En punktladdning  $+q$  (belägen i det övre halvplanet,  $z > 0$ );
- Två punktladdningar  $+q$  och  $-q$  (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre);
- Två punktladdningar  $+q$  och  $+q$  (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre).

Betrakta speciellt potentialen vid speglingsytan  $z = 0$ .

### Fundera: Poissons ekvation

Det första fallet ger en potential  $\phi$  som löser Poissons ekvation

$$\Delta\phi = -q\delta^{(3)}(\vec{r}_0),$$

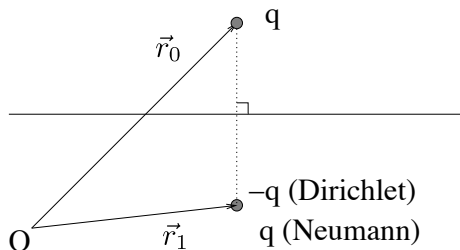
i hela  $\mathbb{R}^3$ . Vilken differentialekvation löser det andra respektive det tredje fallet om vi begränsar oss till övre halvplanet?

Betrakta halvrymden  $\{\vec{r}: z > 0\}$  med ett homogent randvillkor på planet  $z = 0$ :

- Dirichlets randvillkor:  $\phi = 0$ , eller
- Neumanns,  $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ .

**Kommentar 2:** Detta är ett bra tillfälle att repetera begreppen ekvipotentialytor och fältlinjer (till vektorfältet  $-\vec{\nabla}\phi$ ). Se till att förstå att ett randvillkor  $\phi = 0$  (Dirichlet) betyder att randen är en ekvipotentialyta, och att  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$  betyder att fältlinjerna är parallella med randen.

Betrakta nu en punktladdning belägen i det övre halvplanet. Vi kan införa en spegelladdning i det område som vi inte är intresserade av ( $z < 0$ ). Den påverkar alltså inte källdensiteten i det fysikaliska området ( $z > 0$ ), men hjälper till att uppfylla randvillkoren.



Med  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  och  $\vec{r}_1 = (x_0, y_0, -z_0)$  och:

- $q_1 = q$  uppfylls Neumanns randvillor
- $q_1 = -q$  uppfylls Dirichlets randvillor

dvs potentialen från den två punktladdningarna

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \pm \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

I det förra fallet är fältlinjerna parallella med  $z = 0$  planet, i det senare fallet ligger ekvipotentialytan  $\phi = 0$  i  $z = 0$  planet.

Vi kan alltså konstruera Greensfunktioner för övre halvplanet med dessa två randvillkor. Med Dirichlets homogena randvillkor blir alltså Greensfunktionen

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|},$$

där  $\vec{r}' = (x', y', z')$  och  $\vec{r}'' = (x', y', -z')$ , med  $z' > 0$ .

Notera att  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  uppfyller  $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  i det övre halvrummet.

Intressant nog fungerar speglingsmetoden även för cirklar i två dimensioner och sfärer i tre dimensioner (i det senare fallet dock endast för Dirichlets randvillkor). Se demonstrationsuppgift.



