FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christin Rhen, Chalmers

Aug 10, 2019

Uppgift 7.5.1: Stegfunktioner och deltafunktioner

Konstruera approximationerna till stegfunktionen svarande mot approximationerna av deltafunktionen i ekv. (7.6), (7.7) och (7.8)!

Hint.

- Varje given deltafunktions-approximation kan integreras och ger då en motsvarande stegfunktions-approximation.
- Utför integralen först och låt sedan $\epsilon \to 0$. Glöm inte att skissa funktionerna.
- I fallet med den Gaussiska deltafunktions-approximationen får man en primitiv funktion som innehåller den s.k. felfunktionen $\mathrm{erf}(x)$.

Answer. I samtliga fall har man $\sigma_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} h_\epsilon(y)dy$, där $h_\epsilon(x)$ är approximationen av $\delta(x)$. Svarande mot (7.6) har man en styckvis linjär och kontinuerlig funktion som är 0 för $x < -\frac{\epsilon}{2}$, 1 för $x > \frac{\epsilon}{2}$ och växer linjärt däremellan. Svarande mot (7.7) har man $\sigma_\epsilon(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}(\frac{x}{\epsilon})\right)$ och mot (7.8) har man $\sigma_\epsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tanh(\frac{x}{\epsilon})$.

Solution. Stegfunktionen kan definieras som (ekvation (7.10) i kurskompendiet)

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \ \delta(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Exakt vilket värde $H(0)$ antar varierar i litteraturen. Vanligt är att $H(0)$ är odefinierat eller lika med 1/2.

Varje given deltafunktions-approximation kan alltså integreras enligt ekvation (1) och ger då en motsvarande stegfunktions-approximation. Till exempel kan

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} h_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \begin{cases} 1/\epsilon & |x| < \epsilon/2 \\ 0 & |x| > \epsilon/2 \end{cases} \tag{2}$$

integreras trivialt till (med eget val av integrationskonstant)

$$H(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \begin{cases} 0 & x < -\epsilon/2 \\ \frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2} & -\epsilon/2 < x < \epsilon/2 \\ 1 & x > \epsilon/2 \end{cases} . \tag{3}$$

För den Gaussiska deltafunktions-approximationen $h_\epsilon(x) = \exp\left[-x^2/\epsilon^2\right]/\epsilon\sqrt{\pi}$ får vi stegfunktionen (med eget val av integrationskonstant)

$$H(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]. \tag{4}$$

Här är felfunktionen

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}t \; e^{-t^2}. \tag{5}$$

Slutligen har vi den Lorentzianska approximationen $h_\epsilon(x) = \epsilon\pi^{-1}(x^2 + \epsilon^2)^{-1}$, som även den är rättfram att integrera. Resultatet är (med eget val av integrationskonstant)

$$H(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tanh\left(\tfrac{x}{\epsilon}\right)\right]. \tag{6}$$

Utseendet på dessa funktioner skissas i figurerna 1 och 2 för några olika värden på ϵ.

Remarks. Uppgiften illustrerar hur en stegfunktion resulterar som en primitiv funktion till en deltafunktion. Vi undersöker olika distributioner för vilka integralen kan utföras analytiskt och studerar sedan gränsen då $\epsilon \to 0$.

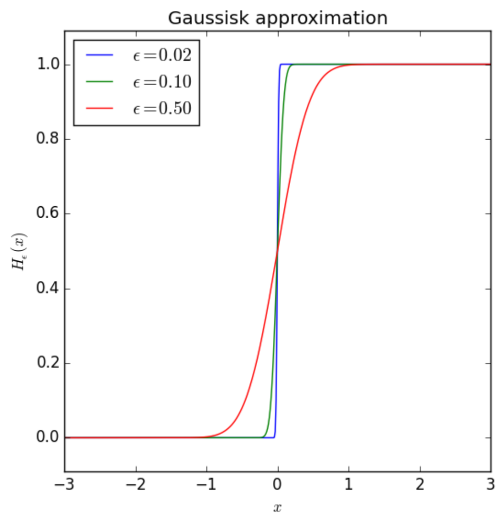

Figure 1: Primitiva funktionen till den Gaussiska approximationen av delta-funktionen i gränsen $\epsilon \to 0$.

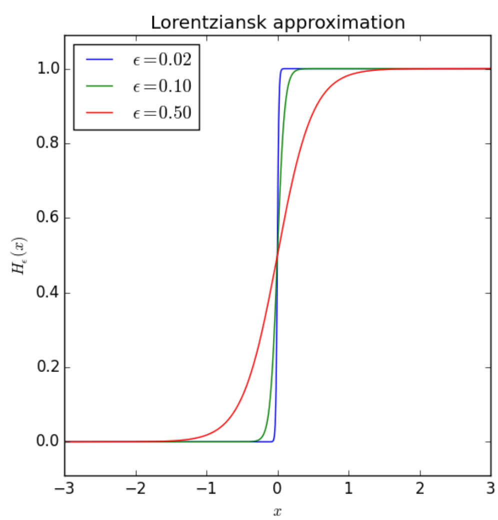

Figure 2: Primitiva funktionen till den Lorentziska approximationen av delta-funktionen i gränsen $\epsilon \to 0$.