FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christian Forssén och Kevin Marc Seja, Institutionen för fysik, Chalmers

Sep 26, 2020

Uppgift 2.4.8

Betrakta vektorfältet

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}),$$

där m är en konstant. (Detta är fältet från en elektrisk dipol.)

Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r,\theta,\varphi) = (2, \pi/4, \pi/6)$.

Hint. Fältlinjer är de kurvor som följer ett vektorfält på så sätt att de i varje punkt har vektorfältet som sin tangentvektor. Fältlinjer kan parametriseras $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ och differentialekvationerna för att bestämma dem är

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E},$$

där C är en godtycklig konstant vilken ju inte påverkar tangentriktningen.

Med cartesiska koordinater gäller ju att förskjutningsvektorn $\mathrm{d}\vec{r}$ kan skrivas $\mathrm{d}\vec{r} = \hat{x}\mathrm{d}x + \hat{y}\mathrm{d}y + \hat{z}\mathrm{d}z$ och vektorekvationen ovan ger tre differentialekvationer (en för varje riktning $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$):

$$\begin{cases} x: & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = CE_x \\ y: & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = CE_y \\ z: & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = CE_z. \end{cases}$$

Men om fältet är mycket enklare att uttrycka i kroklinjiga koordinater är det fördelaktigt att teckna differentialekvationerna i dessa riktningarna istället. Men då får man komma ihåg att förskjutningsvektorn blir

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{u}_i \mathrm{d}u_i,$$

där h_i är koordinatsystemets skalfaktorer.

Answer. $r = 4\sin^2\theta$, $\varphi = \pi/6$.

Solution. I sfäriska koordinater är de tre skalfaktorerna

$$h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r\sin\theta.$$

Förskjutningsvektorn är

$$\mathrm{d}\vec{r} = h_r\hat{r}\ \mathrm{d}r + h_\theta\hat{\theta}\ \mathrm{d}\theta + h_\varphi\hat{\varphi}\ \mathrm{d}\varphi.$$

Vi får de tre separata differentialekvationerna genom att ta skalärprodukten av differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E},$$

med de tre basvektorerna $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$. Vi väljer $C = 4\pi/m$. Detta leder till

$$\underbrace{h_r}_{=1}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2\cos\theta}{r^3} = E_r$$

$$\underbrace{h_\theta}_{=r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sin\theta}{r^3} = E_\theta$$

$$\underbrace{h_\varphi}_{=r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = 0 = E_\phi$$

Ekvationen för φ leder direkt till $\varphi = \text{const.} = \pi/6 = \varphi_0$. De andra två ekvationer kan skrivas som

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2\cos\theta}{r^3},$$
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sin\theta}{r^4}.$$

Vi kombinerar de två ekvationer för att få

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2r}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2r}\tan\theta.$$

Detta leder då till

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\tan\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{2r}.$$

Vi integrerar både sidor med startpunkt i den givna punkten ($r_0 = 2, \theta_0 = \pi/4, \varphi_0 = \pi/6$) som startvärde och får

$$\ln\left|\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{r}{r_0}\right|$$

[Anm.: Vänstersidans integral finns tabulerad.]
Man använder nu räkneregler för logaritmer och resultatet blir

$$\sin^2\theta = \sin^2\theta_0\frac{1}{r_0}r.$$

För det givna startvärdet får man $\sin^2\theta_0 = \frac{1}{2}$, $r_0 = 2$, så att fältlinjerna beskrivs av

$$\sin^2\theta = \frac{1}{4}r \Leftrightarrow r = 4\sin^2\theta$$

och $\varphi = \pi/6 = \text{const.}$ hade vi visat tidigare.

Remarks. Uppgiften illustrerar hur man ställer upp differentialekvationerna för fältlinjer i fallet då vektorfältet enklast beskrivs i ett kroklinjigt koordinatsystem. Den illustrerar också hur en specifik fältlinje kan identifieras från ett randvillkor.