

FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers

Aug 10, 2019

Tentatal 2012-10-23: 6

En punktladdning Q är belägen i $\vec{r} = b\hat{z}$, och man söker potentialen från denna laddning innanför sfären $r = a$ (med $a > b$), då randvillkoret är att den elektriska potentialen ϕ är noll på randen $r = a$.

- Visa att denna potential fås genom att introducera en fiktiv spegelladdning $-\frac{a}{b}Q$ i punkten $\vec{r} = \frac{a^2}{b}\hat{z}$.
- Ge ett uttryck för den ytladdningsfördelning som induceras på sfären $r = a$, om man antar att $\phi = 0$ även för $r > a$.
- Kontrollera att den totala inducerade laddningen på sfären är $-Q$.

Hint.

- Man kan direkt teckna potentialen som en superposition av potentialer från två punktladdningar, den verkliga i $b\hat{z}$ plus spegelladdningen enligt uppgiften. Glöm inte $1/\epsilon_0$. Kontrollera att denna potential uppfyller randvillkoret.
- Men det är en nyttig övning att gå hela vägen från Greensfunktionen (inklusive spegelladdning) och utföra volymsintegralen över sfären, där laddningstätheten ges av en deltafunktion $\rho(\vec{r}') = Q\delta^3(\vec{r}' - b\hat{z})$.
- Ytladdningsfördelningen ges av $\epsilon_0 \hat{r} \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \Big|_{r=a}$, där det elektriska fältet är $\vec{E} = -\nabla\phi$.
- Totala inducerade laddningen på ytan fås genom att integrera över sfärens yta.

Answer. Ytladdningsfördelningen blir

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a^2 - b^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{3/2}}$$

Notera gärna att enheten blir lika med laddning per areaenhet, precis som den skall.

Solution. Potentialen kan vi egentligen teckna direkt; dvs utan att skriva ner Greensfunktionen och utföra integralen. Med två punktladdningar på z -axeln, enligt uppgiften, och avstånd till dessa som fås med cosinussatsen (se figur nedan), blir potentialen lika med (glöm inte $1/\epsilon_0$)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta}} - \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta}} \right].$$

Men för att vara noggranna räknar vi ut ovanstående med hjälp av Greensfunktioner. Enligt uppgiftstexten skall spegelladdningar införas så att för en punktladdning i punkten \vec{r}' skall det finnas en spegelladdning med styrkan $-a/r'$ i punkten \vec{r}'' , där $\vec{r}'' = \frac{a^2}{(r')^2} \vec{r}'$. Greensfunktionen blir alltså

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{r'} \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|},$$

och den slutliga lösningen fås genom att integrera

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} dV' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}'),$$

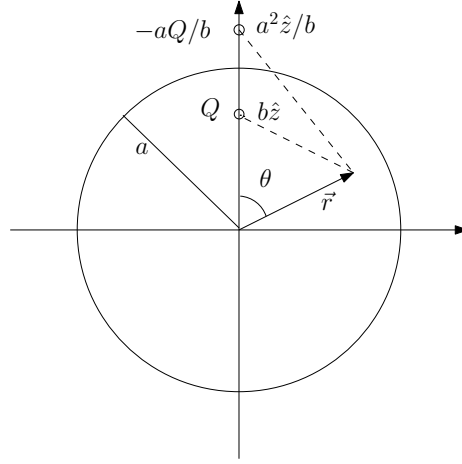
där volymen V' alltså är sfären och laddningsfördelningen i vårt fall är en punktladdning med styrkan Q i punkten $b\hat{z}$, dvs

$$\rho(\vec{r}') = Q\delta^3(\vec{r}' - b\hat{z}).$$

Integralen blir

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} dV' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - b\hat{z}|} - \frac{a}{b} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{b}\hat{z}|} \right],$$

där vi använt att $\vec{r}'' = \frac{a^2}{b}\hat{z}$ när $\vec{r}' = b\hat{z}$.



Avstånden (streckade linjer i figuren) blir

$$\begin{aligned} |\vec{r} - b\hat{z}| &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta} \\ \left| \vec{r} - \frac{a^2}{b}\hat{z} \right| &= \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

och lösningen är alltså

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta}} - \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta}} \right].$$

Vid radien $r = a$ kan vi skriva den andra termens nämnare $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)}$. Notera därför att denna lösning uppfyller det givna randvillkoret $\phi = 0$ på sfärens yta $r = a$.

Ytladdningsfördelningen ges av $\epsilon_0 \hat{r} \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \Big|_{r=a}$. Eftersom potentialen var noll utanför sfären blir $\sigma = -\epsilon_0 E_r^-$. Vi behöver alltså den radiella komponenten av det elektriska fältet

$$E_r(\vec{r}) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r - b \cos \theta}{(r^2 + b^2 - 2br \cos \theta)^{3/2}} - \frac{a}{b} \frac{r - \frac{a^2}{b} \cos \theta}{(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta)^{3/2}} \right].$$

Vid radien $r = a$ får vi

$$E_r|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - b^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{3/2}}.$$

Alltså får vi ytladdningen

$$\sigma = -\epsilon_0 E_r|_{r=a} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a^2 - b^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{3/2}}.$$

Den totala laddningen på sfärens yta ($dS = a^2 \sin \theta d\varphi d\theta$) fås nu genom att integrera

$$\begin{aligned}
Q' &= \int_{r=a} \sigma dS = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a^2 - b^2}{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} a^2 d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{3/2}} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \cos \theta = t & \Rightarrow dt = -\sin \theta d\theta \\ \theta \in [0, \pi] & \Rightarrow t \in [1, -1] \end{array} \right\} = -\frac{Q}{2} (a^2 - b^2) a \int_{-1}^1 \frac{dt}{(a^2 + b^2 - 2abt)^{3/2}} \\
&= -\frac{Q}{2} (a^2 - b^2) a \left[\frac{1}{ab} \frac{1}{(a^2 + b^2 - 2abt)^{1/2}} \right]_{-1}^1 = -\frac{Q}{2} \frac{(a^2 - b^2)}{b} \left[\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right] \\
&= -\frac{Q}{2} \frac{(a^2 - b^2)}{b} \frac{a+b - (a-b)}{a^2 - b^2} = -Q. \tag{2}
\end{aligned}$$

Remarks. Uppgiften illustrerar speglingsmetoden för att lösa Poissons ekvation i specifika geometrier. Notera speciellt hur den införda speglingsladdningen ligger utanför det relevanta området, men ändå ger ett bidrag till fältet. Potentialen kan tecknas direkt utifrån uppgiften, men det kan vara en god idé att faktiskt skriva ner Greensfunktionen och utföra volymsintegralen med en laddningsfördelning som motsvarar en punktladdning i punkten $b\hat{z}$.