Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Lördagen den 26 oktober 2019 klockan 08.30-12.30 i SB.

Lösningsskiss: Christian Forssén.

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Vad är ytintegralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z^2 \hat{z}$ och S är ytan till enhetssfären $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ med normalvektor $\hat{r}$?

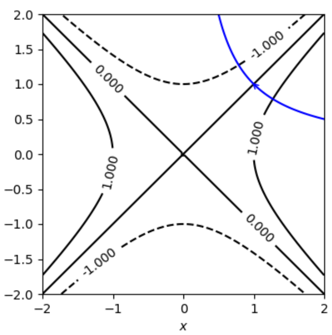
(b) Skissa nivåytorna $\phi = -1, 0, 1$ för skalärpotentialen $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ i området $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Skissa också den fältlinje (inkl riktning) som går genom punkten $(x, y) = (1, 1)$.

(c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion. *(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

Lösning:

(a) $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ (notera att fältet är symmetriskt runt $z = 0$, dvs det som strömmar in i nedre halvplanet kommer att strömma ut i det övre).

(b)



(c) Kom ihåg skalningsegenskapen hos deltafunktioner (kan visas genom variabelsubstitution i integralen $x' = 4x$). Detta ger

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos(0) = \frac{1}{4}.$$

---

2. En oändligt lång metallcylinder med radie ρ_0 och symmetriaxeln längs z-axeln genom $x = y = 0$ har en temperatur som ges av

$$T(\rho, \varphi, z) = T_0 \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \sin\varphi,$$

i cylindriska koordinater. *Konstanten* $T_0 > 0$. Betrakta punkten P: $\rho = \rho_0/2$, $\varphi = \pi/4$, $z = 0$.

(a) I vilken riktning ökar temperaturen som mest i punkten P?

(b) Hur stor är temperaturökningen per längdenhet i riktningen $\vec{n} = \hat{e}_\rho + \hat{e}_z$ i punkten P?

(10 poäng)

Lösning:

Gradienten blir

$$\vec{\nabla} T = T_0 \frac{\rho}{\rho_0^2} \left(2 \sin\varphi \hat{e}_\rho + \cos\varphi \hat{e}_\varphi\right),$$

vilket i punkten P blir

$$\vec{\nabla} T\Big|_P = \frac{T_0}{\sqrt{2}\rho_0} \left(\hat{e}_\rho + \frac{1}{2}\hat{e}_\varphi\right),$$

(a) Gradienten pekar i riktningen $\hat{e}_\rho + \frac{1}{2}\hat{e}_\varphi$, eller normaliserat $\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\hat{e}_\rho + \frac{1}{2}\hat{e}_\varphi\right)$.

(b) Temperaturökningen per längdenhet i den givna riktningen räknas ut med $\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T\Big|_P$, där vi måste ha en normaliserad riktningsvektor. Vi har att $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_\rho + \hat{e}_z\right)$ vilket ger

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T\Big|_P = \frac{T_0}{2\rho_0}.$$

Avslutningsvis noterar vi att alla riktningar ovan är dimensionslösa och att gradienten har enheten $[T_0]/m$.

---

3. Visa att $V = \frac{1}{3}\oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S}$, där V är den inneslutna volymen och ytan ∂V har utåtriktad normal. Bekräfta detta samband för en sfär genom att explicit utföra integralen för detta fall. *(10 poäng)*

Lösning:

Vi använder Gauss sats med vektorfältet $\vec{F} = \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ vars divergens $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$

$$\oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{r} dV = 3V,$$

vilket ger det sökta sambandet.

För ytan till en sfär med radien R får vi

$$\frac{1}{3}\oint_{\partial V} \vec{r}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{3}\oint_{\partial V} R\hat{r}\cdot\hat{r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= \frac{1}{3}R^3\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3} = V.$$

---

4. En punktladdning q befinner sig på avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? ($\vec{E}$-fältet är noll inne i metallen.) *(10 poäng)*

Lösning:

- Vektorfältet är noll inuti metallen, vilket innebär att potentialen är konstant. Vi väljer att sätta $\phi = 0$, vilket gör att ytan ($z = 0$) blir en ekvipotentialyta med $\phi = 0$.
- Detta Dirichlet randvillkor kan uppfyllas genom att införa en spegelladdning $-q$ i punkten $-a\hat{z}$. Den elektriska potentialen (för $z > 0$) ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-a\hat{z}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}+a\hat{z}|}.$$

- Det elektriska fältet ges av

$$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-a\hat{z}}{|\vec{r}-a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+a\hat{z}}{|\vec{r}+a\hat{z}|^3}\right].$$

- Vid ytan är $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ och $|\vec{r}-a\hat{z}| = |\vec{r}+a\hat{z}| = \sqrt{a^2+\rho^2}$. Därför blir vektorfältet vid ytan $\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2a\hat{z}}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$.
- Ytladdningen motsvaras av en diskontinuitet i fältet

$$\sigma = \epsilon_0\hat{n}\cdot(\vec{E}_+ - \vec{E}_-).$$

  Här är $\hat{n} = \hat{z}$ och $\vec{E}_- = 0$ vilket ger $\sigma = \frac{-qa}{2\pi(\rho^2+a^2)^{3/2}}$.
- Den totala inducerade laddningen fås genom att integrera över ytan

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{\rho=0}^{\infty}\sigma\rho d\rho = \ldots = -q,$$

  vilket man egentligen kan inse från det givna randvillkoret.

5. Tröghetstensorn för någon stel kropp i ett Cartesiskt koordinatsystem (xyz) ges av

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix},$$

där η är ett reellt tal och I_0 är en konstant med enheten (massa $\times$ längd^2). Ett roterat koordinatsystem $(x'y'z')$ ges av transformationen:

$$x' = z; \quad y' = y; \quad z' = -x.$$

Använd tensorers transformationsegenskaper för att visa vad tröghetstensorn blir i detta roterade koordinatsystem. *(10 poäng)*

Lösning:

Den givna koordinattransformationen kan skrivas med indexnotation $x'_i = L_{ij} x_j$. Elementen i transformationsmatrisen får vi genom att derivera $L_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$, vilket ger

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notera gärna att $\det(\mathbf{L}) = +1$, dvs det är fortfarande ett högersystem. Med tensorers transformationsegenskaper får vi att tröghetstensorn i det roterade koordinatsystemet är $I'_{ij} = L_{ik} L_{jl} I_{kl} = L_{ik} I_{kl} (L^t)_{lj}$, eller explicit som en matrismultiplikation

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= I_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\eta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+\eta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1+\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Svaret är rimligt eftersom den givna transformationen motsvarar en rotation 90° moturs runt y-axeln. Vi hamnar i ett nytt koordinatsystem som fortfarande sammanfaller med kroppens huvudtröghetsaxlar, men där två av axlarna har bytt plats jämfört med det ursprungliga systemet.

6. Betrakta en oändligt lång, rektangulär stav med $-b \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, samt $-\infty < z < \infty$. Notera att den oändliga utsträckningen i z-led gör att problemet effektivt sett blir tvådimensionellt. Inuti plattan gäller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. Dessutom gäller randvillkoren

$$\begin{aligned}\phi(x, y = 0) &= \phi(x, y = a) = 0\\ \phi(x = -b, y) &= \phi(x = b, y) = \phi_0\end{aligned}$$

Lösningen $\phi(x, y)$ kan skrivas som en oändlig summa av termer

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X(n\pi x/a) Y(n\pi y/a).$$

Identifiera funktionerna X och Y samt finn ett villkor för koefficienterna C_n med hjälp av randvillkoren vid $x = \pm b$. *(10 poäng)*

Lösning:

Enligt ledningen gör vi ansatsen

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X(n\pi x/a) Y(n\pi y/a),$$

och ser direkt att $Y(n\pi y/a) = \sin(n\pi y/a)$ uppfyller randvillkoren $\phi(x, y = 0) = \phi(x, y = a) = 0$. Vi opererar med Laplacianen på term n och får

$$C_n \sin(n\pi y/a) \left(X''(n\pi x/a) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X(n\pi x/a) \right).$$

Laplaces ekvation uppfylls separat för varje term (och därmed för summan) med lösningen

$$X(k_n x) = A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x},$$

där vi har definierat $k_n \equiv n\pi/a$. Vi ser att geometrin och randvillkoren är helt symmetriska runt $x = 0$ så vi måste ha att $\phi(x, y) = \phi(-x, y)$. Detta ger att $A_n = B_n$ och vi kan förenkla

$$X(k_n x) = A_n \left(e^{k_n x} + e^{-k_n x}\right) = 2A_n \cosh(k_n x).$$

Vi absorberar amplituden i C_n och kan slutligen identifiera lösningen

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a).$$

Det sista som återstår är att uppfylla randvillkoret $\phi(x = b, y) = \phi_0$ (kom ihåg att problemet, och vår lösning, är symmetrisk runt $x = 0$ så vi kommer automatiskt att uppfylla villkoret vid $x = -b$). Detta ger det extra villkoret på koefficienterna i lösningen ovan

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi b/a) \sin(n\pi y/a) = \phi_0.$$

Anmärkning: Lösningen till ovanstående fås mha Fourieranalys och inkluderas nedan för att göra svaret på problemet helt slutgiltigt

$$C_n = \begin{cases} 0, & \text{jämna } n \\ \phi_0 \frac{4}{n\pi} \frac{1}{\cosh(n\pi b/a)} & \text{udda } n. \end{cases}$$

Notera dock att detta sista steg inte ingick i problemet.
