Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 eller FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 7 januari 2019 klockan 08.30-12.30 i SB.

Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Skissa nivåytor och fältlinjer för en linjekälla $\vec{F} = \frac{1}{2\pi\rho}\hat{\rho}$

   (b) Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\delta(-2x-\pi)dx$.

   (c) Teckna följande tre uttryck med indexnotation: (i) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, (ii) $\mathbf{M}\vec{a}$, (iii) $\mathbf{MN}$, där $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ är vektorer och $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ är 3×3 matriser.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.) Lösning:

   (a) Nivåytorna blir cylindrar med z-axeln som symmetriaxel. Fältlinjerna är räta linjer i xy-planen, riktade radiellt ut från z-axeln.

   (b) $-1/2$

   (c) (i) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k$, (ii) $\mathbf{M}\vec{a} = M_{ij}a_j$, (iii) $\mathbf{MN} = M_{ik}N_{kj}$.

---

2. Ett koordinatsystem uvz är definerat genom

$$x = a\cosh u\cos v;\quad y = \lambda\sinh u\sin v;\quad z = z,$$

   där $a > 0$, $u \geq 0$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Bestäm konstanten λ så att koordinatsystemet blir ortogonalt och beräkna systemets skalfaktorer. Visa också om systemet är ett höger- eller ett vänstersystem. *(10 poäng)*

   Lösning:

   Tangenttbasvektorerna blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} &= (a\sinh u\cos v, \lambda\cosh u\sin v, 0)\,,\\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} &= (-a\cosh u\sin v, \lambda\sinh u\cos v, 0)\,,\\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} &= (0,0,1)\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

För att dessa basvektorer skall vara ortogonala följer att $\lambda = \pm a$. Systemet är ett högersystem om $\lambda = +a$ (vänstersystem om $\lambda = -a$). Dessutom får vi skalfaktorerna: $h_u = h_v = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$, $h_z = 1$.

---

3. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}.$$

(10 poäng)

Lösning:

Kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\jmath},$$

härleds förslagsvis med hjälp av Gauss sats (se avsnitt 4.2 i kompendiet med den konserverade storheten *laddning* istället för *massa*).

Från Amperes lag (utan tidsberoende) har vi

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Med ytterligare en term (förskjutningsströmmen) i Amperes lag

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath},$$

stämmer kontinuitetsekvationen vilket man ser efter insättning.

4. Beräkna normalytintegralen av

$$\vec{F} = F_0 \frac{a^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[x\hat{x} + y\hat{y} + \left(z + \frac{z}{a} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{a^2} \right) \hat{z} \right]$$

över ytan $S: x^2 + y^2 = (z - 3a)^2$, $0 \leq z \leq 3a$. F_0 och a är konstanter. *(10 poäng)*

Lösning:

Fältet kan skrivas $\vec{F} = F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{F_0 z}{a}\hat{z}$. Den första termen motsvarar en punktkälla i origo med styrka $4\pi F_0 a^2$. Den andra termen, $\vec{F}_1 \equiv \frac{F_0 z}{a}\hat{z}$, är inte singulär och har divergensen $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 = F_0/a$. Ytan är en kon med spetsen i $z = 3a$ som är öppen i planet $z = 0$. Bidraget från punktkällan blir därför lika med halva dess styrka: $2\pi F_0 a^2$ (eftersom ytan upptar rymdvinkeln 2π).

Vi använder Gauss sats för att räkna ut bidraget från den icke-singulära delen. Slut ytan med en bottenplatta vid $z = 0$, på vilken $\vec{F}_1(z = 0) = 0$. Detta ger bidraget $\pi 9 a^2 F_0$.

Totalt får vi $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 11\pi a^2 F_0$.

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ för ett temperaturfält inuti området $V : r \leq a$ med randvillkoret $T|_{r=a} = T_0 + T_1 \cos\theta$, där T_0, T_1 är positiva konstanter med enhet $[T_0] = [T_1] = K$. *(10 poäng)*

   Lösning:

   Ansatsen $T(\vec{r}) = T_0 + f(r)\cos\theta$ ger Laplaces ekvation

$$\Delta T = \frac{\cos\theta}{r^2}\left[r^2 f''(r) + 2rf'(r) - 2f(r)\right] = 0,$$

   med lösningar $f_1(r) = A_1 r$ och $f_2(r) = A_2 r^{-2}$ (ansätt $f(r) = Ar^p$). Den andra lösningen motsvarra en punktkälla i origo, dvs den löser egentligen Poissons ekvation $\Delta T = q\delta^3(\vec{r})$, och är därför inte relevant i vår situation. Den första lösningen uppfyller RV om $A_1 = T_1/a$ så vi får svaret:

$$T(\vec{r}) = T_0 + T_1 \frac{r}{a}\cos\theta.$$

6. En elektrisk punktladdning q befinner sig avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? (Fältet är noll inuti metallen.) *(10 poäng)*

   Lösning:

- Vektorfältet är noll inuti metallen, vilket innebär att potentialen är konstant. Vi väljer att sätta $\phi = 0$, vilket gör att ytan ($z = 0$) blir en ekvipotentialyta med $\phi = 0$.
- Detta Dirichlet randvillkor kan uppfyllas genom att införa en spegelladdning $-q$ i punkten $-a\hat{z}$. Den elektriska potentialen (för $z > 0$) ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + a\hat{z}|}.$$

- Det elektriska fältet ges av

$$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r} - a\hat{z}}{|\vec{r} - a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + a\hat{z}}{|\vec{r} + a\hat{z}|^3}\right].$$

- Vid ytan är $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ och $|\vec{r} - a\hat{z}| = |\vec{r} + a\hat{z}| = \sqrt{a^2 + \rho^2}$. Därför blir vektorfältet vid ytan $\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2a\hat{z}}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$.
- Ytladdningen motsvaras av en diskontinuitet i fältet

$$\sigma = \epsilon_0\hat{n}\cdot(\vec{E}_+ - \vec{E}_-).$$

  Här är $\hat{n} = \hat{z}$ och $\vec{E}_- = 0$ vilket ger $\sigma = \frac{-qa}{2\pi(\rho^2+a^2)^{3/2}}$.
- Den totala inducerade laddningen fås genom att integrera över ytan

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\infty} \sigma\rho d\rho = \ldots = -q,$$

  vilket man egentligen kan inse från det givna randvillkoret.