Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik
(FFM234 eller FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 29 oktober 2018 klockan 14.00-18.00, Maskinsalar.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM234 eller FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Skriv din kurskod på tentamensomslaget (FFM234 gäller från läsåret 17/18, FFM232 gäller för äldre studenter).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är ytintegralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z^2\hat{z}$ och S är ytan till enhetssfären $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ med normalvektor $\hat{r}$?

   (b) Skissa nivåytorna $\phi = -1, 0, 1$ för skalärpotentialen $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ i området $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Skissa också den fältlinje (inkl riktning) som går genom punkten $(x, y) = (1, 1)$.

   (c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell delta-funktion.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Ett vektorfält $\vec{F}$ är givet i sfäriska koordinater som

$$\vec{F} = \frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}.$$

   Bestäm a så att fältet blir virvelfritt (ignorera singulariteten i $r \to 0$). Bestäm potentialen ϕ. *(10 poäng)*

3. Använd indexnotation för att visa följande gradientlikheter

   (a) $\vec{\nabla}(r^2) = 2\vec{r}$

   (b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

   (c) $\vec{\nabla} \cdot (r^2\hat{r}) = 4r$

   där r är längden på ortsvektorn $\vec{r}$.
   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)
   (bevis utan indexnotation kan också ge poäng, dock maximalt 6 poäng).

4. Maxwells ekvationer är

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{\jmath} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

   (a) Använd Faradays induktionslag, $U = -d\Phi/dt$, för att visa Maxwells andra ekvation $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Notera att Φ är det magnetiska flödet genom en yta $\vec{S}$ (normalytintegral för magnetfältet $\vec{B}$) och U är den inducerade spänningen längs randen ∂S (vägintegral för det elektriska fältet $\vec{E}$). *(5 poäng)*

(b) Använd Maxwells ekvationer för att visa att kontinuitetsekvationen $\partial\rho/\partial t = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}$ är uppfylld för $\rho(\vec{r},t)$ = elektrisk laddningstäthet och $\vec{\jmath}(\vec{r},t)$ = elektrisk strömtäthet. *(5 poäng)*

5. Ett cylindriskt skal kan betraktas som oändligt långt med innerradie ρ_0 och ytterradie ρ_1. Det värms från insidan med en linjevärmekälla som ger upphov till Neumannrandvillkoret $\hat{\rho}\cdot\vec{q}\,|_{\rho=\rho_0} = w_0/\rho_0$, där $[w_0] = \mathrm{Wm}^{-1}$. Skalets konstanta värmekonduktivitet är λ. På utsidan kyls skalet av enligt
$$\hat{\rho}\cdot\vec{q}\,\big|_{\rho=\rho_1} = \alpha\left(T(\rho_1) - T_0\right),$$
där α och T_0 är konstanter med rätt enheter.

Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i cylinderskalet, dvs för $\rho_0 \le \rho \le \rho_1$. *(10 poäng)*

6. Betrakta fältet $\vec{F} = \frac{\sqrt{b^4+\rho^4}}{\rho}\hat{\rho}$ och beräkna normalytintegralen $\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}$, där ∂V är ytan till en kub med utåtriktad normal och sidlängd a centrerad vid z-axeln. Vi har att $a \gg b$ och söker ett approximativt uttryck för normalytsintegralen (explicita korrektioner till och med ordning $\frac{b^2}{a^2}$ skall inkluderas).