Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 14 augusti 2017 klockan 14.00-18.00 i Maskinsalarna.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 b(y\hat{x} + x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

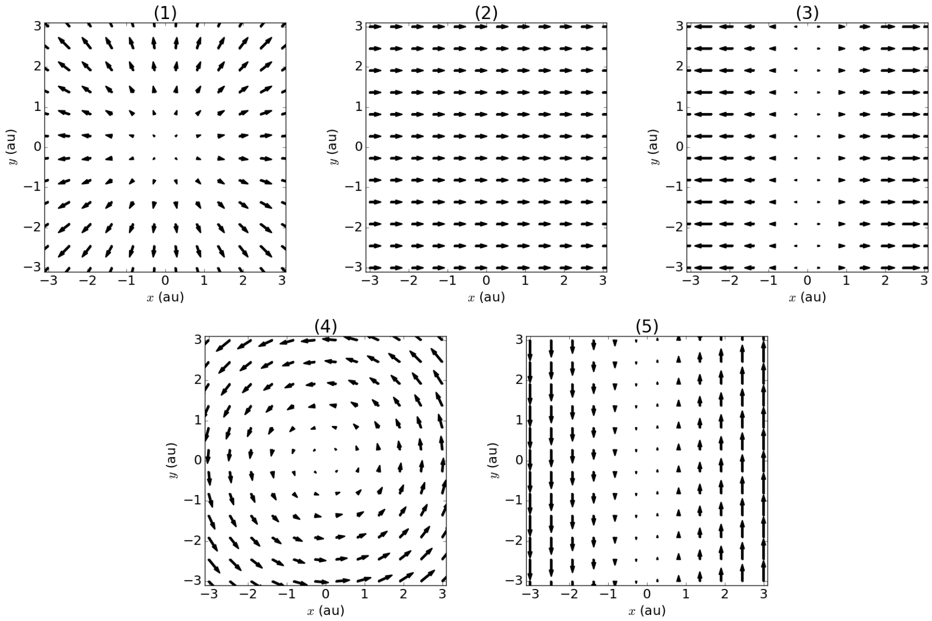
   (b) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x - \pi) \sin x dx$.

   (c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\phi(\hat{r}) = \sin^2\theta/r^3$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ är maximal. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten ifråga, det spelar ingen roll, bara det framgår vilket.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. (a) Vad blir följande derivator på vektorfältet $\vec{A} = r\hat{r}$:
(i) $\nabla \cdot \vec{A}$; (ii) $\nabla \times \vec{A}$; (iii) $\Delta \vec{A}$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$; (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$? *(5 poäng)*

   (b) Fem olika tvådimensionella vektorfält visualiseras i figurerna (1)–(5). Ange för samtliga huruvida *divergensen* och *rotationen* (z-komponenten) är noll, positiv eller negativ. *(5 poäng)*



3. (a) Förenkla uttrycket $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl}$
(4 poäng)

   (b) Kroneckers delta är en invariant tensor. Vad menas med detta? *(2 poäng)*

   (c) Använd transformationsegenskaper för att visa att Kroneckers delta är en invariant tensor. *(4 poäng)*
Ledning: En tensor skall uppfylla transformationsregeln $T'_{ij} = L_{il}L_{jm}T_{lm}$, där $\mathbf{L}$ är transformationsmatrisen som också relaterar ortsvektorerna i de två koordinatsystemen $x'_i = L_{ij}x_j$.

4. Beräkna integralen

$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

där S är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ för $z > 0$ och fältet ges av

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax\hat{x} + ay\hat{y} + x^2\hat{z}\right) + \frac{q}{4\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right),$$

med konstanter a, F_0 och q. *(10 poäng)*

5. Temperaturfördelningen på ytan av en sfär med radien R ges av

$$T(r = R, \theta, \varphi) = T_0 + T_1 \cos\theta.$$

Bestäm den statiska temperaturfördelningen inuti sfären. Det finns inga värmekällor i området $r < R$. *(10 poäng)*

6. Betrakta en punktladdning med laddning q i punkten $z = a$ utanför en metallisk sfär med radien R (sfärens centrum ligger i origo och $a > R$). Inuti sfären och på dess rand gäller $\phi(r \leq R, \theta, \varphi) = 0$.

   (a) Ge ett uttryck för den elektrostatiska potentialen längs den negativa z-axeln, dvs finn $\phi(x = 0, y = 0, z)$ för $z < 0$. *(5 poäng)*

   (b) Beräkna den inducerade ytladdningen på sfären som en funktion av vinkeln θ (från z-axeln). *(3 poäng)*

   (c) Vad blir den totala inducerade ytladdningen på sfären (dvs integrerad över hela ytan)? *(2 poäng)*