FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christin Rhen och Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers

Aug 10, 2019

Uppgift 2.4.14

Ett kroklinjigt koordinatsystem u, v, w ges av sambanden

$$\begin{aligned} u &= r(1-\cos\theta), \\ v &= r(1+\cos\theta), \\ w &= \varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

där r, θ, φ är sfäriska koordinater. Visa att systemet är ortogonalt och beräkna dess skalfaktorer. Hur ser gradientoperatorn ∇ och ortvektorn $\vec{r}$ ut i u, v, w-systemet?

Answer. Skalfaktorer:

$$\begin{aligned} h_u &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}} \\ h_v &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{v}} \\ h_w &= \sqrt{uv} \end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla = \frac{2}{\sqrt{u+v}}\left(\sqrt{u}\hat{u}\frac{\partial}{\partial u} + \sqrt{v}\hat{v}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sqrt{uv}}\hat{w}\frac{\partial}{\partial w}$$

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \frac{\sqrt{u+v}}{2}(\sqrt{u}\hat{u} + \sqrt{v}\hat{v})$$

Solution.

Enhetsvektorer Enhetsvektorer ges av (långt upp på sida 12 i kurskompendiet)

$$\vec{e}_i = h_i \nabla u_i. \tag{2}$$

Här är u, v, w en funktion av sfäriska koordinater, så vi använder den sfäriska gradienten (kurskompendium ekvation 2.14):

$$\begin{aligned}
\hat{u} \propto \nabla u &= \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u \\
&= (1-\cos\theta)\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}, && (3)\\
\hat{v} \propto \nabla v &= (1+\cos\theta)\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}, && (4)\\
\hat{w} \propto \nabla w &= \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}. && (5)
\end{aligned}$$

Ortogonalitet Det är lättast att kontrollera om ett nytt system är ortogonalt om vi har dess basvektorer uttryckta i ett annat, mer välkänt, system. Därför låter vi här $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ fortsätta vara en funktion av sfäriska koordinater och basvektorer, och räknar ut skalärprodukterna mellan dem. Vi ser direkt att $\hat{u} \cdot \hat{w} = \hat{v} \cdot \hat{w} = 0$. För $\hat{u}$ och $\hat{v}$:

$$\begin{aligned}
\hat{u} \cdot \hat{v} &\propto (1-\cos\theta)(1+\cos\theta) - \sin^2\theta \\
&= 1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0. && (6)
\end{aligned}$$

Alltså är u, v, w-systemet ortogonalt.

Skalfaktorer och enhetsvektorer Från ekvation (2) inser vi att skalfaktorerna h_i är inversen av $|\nabla u_i|$. För enkelhetens skull fortsätter vi räkna i termer av sfäriska koordinater, och översätter till u, v, w i slutet. Notera att $u + v = 2r$. Vi får

$$\begin{aligned}
h_u &= \left((1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right)^{-1/2} = (2 - 2\cos\theta)^{-1/2} \\
&= \sqrt{\frac{u+v}{4u}}, && (7)\\
h_v &= \left((1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right)^{-1/2} = (2 + 2\cos\theta)^{-1/2} \\
&= \sqrt{\frac{u+v}{4v}}, && (8)\\
h_w &= \sqrt{r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{uv}. && (9)
\end{aligned}$$

Kombinerar vi skalfaktorerna (i sfäriska koordinater) och de onormerade enhetvektorerna uträknade ovan så får vi

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}}\hat{\theta}, && (10)\\
\hat{v} &= \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}}\hat{r} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}}\hat{\theta}, && (11)\\
\hat{w} &= \hat{\varphi}. && (12)
\end{aligned}$$

Gradientoperator För ortogonala koordinatsystem gäller att (kurskompendium ekvation 2.13)

$$\nabla\phi = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}, \tag{13}$$

där ϕ är ett godtyckligt skalärfält. I vårt u, v, w-system blir detta

$$\nabla\phi = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}. \tag{14}$$

Sätter vi in skalfaktorerna vi beräknat ovan är det lätt att identifiera gradientoperatorn

$$\nabla = \hat{u}\sqrt{\frac{4u}{u+v}}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{v}\sqrt{\frac{4v}{u+v}}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{\sqrt{uv}}\frac{\partial}{\partial w}. \tag{15}$$

Notera att den inversa skalfaktorn alltid kommer före partialderivatan! Skriver man dem i fel ordning ska plötsligt även skalfaktorn deriveras, och det blir fel.

Ortsvektor I sfäriska koordinater är ortsvektorn

$$\vec{r} = r\hat{r}. \tag{16}$$

Vi har redan noterat att $r = (u+v)/2$; vi behöver nu också uttrycka $\hat{r}$ som en funktion av $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$.

En smart linjärkombination av enhetsvektorerna (12):

$$\sqrt{2-2\cos\theta}\,\hat{u} + \sqrt{2+2\cos\theta}\,\hat{v} = 2\hat{r}, \tag{17}$$

som översatt till nya koordinater betyder att

$$\hat{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\hat{v}\right) = \sqrt{\frac{u}{u+v}}\hat{u} + \sqrt{\frac{v}{u+v}}\hat{v}. \tag{18}$$

Vi får alltså ortsvektorn

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r}\\ &= \frac{u+v}{2}\left(\sqrt{\frac{u}{u+v}}\hat{u} + \sqrt{\frac{v}{u+v}}\hat{v}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{u+v}\left(\sqrt{u}\hat{u} + \sqrt{v}\hat{v}\right).\end{aligned} \tag{19}$$