# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

**Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers**

Aug 10, 2019

## Kurvintegral längs komplicerad ellips

Beräkna integralen

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{1}$$

där

$$\vec{F} = \left[x^2 - a\left(y+z\right)\right]\hat{x} + \left(y^2 - az\right)\hat{y} + \left[z^2 - a\left(x+y\right)\right]\hat{z}, \tag{2}$$

och $\Gamma$ är den kurva som utgör skärningen mellan cylindern

$$\left(x-a\right)^2 + y^2 = a^2, \quad z \geq 0, \tag{3}$$

och sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R > 2a, \tag{4}$$

där $a$ är en konstant med dimensionen längd.

**Answer.** $\pi a^3$.

**Solution.** Vi kan först konstatera att skärningen mellan cylinder och sfär är en ellips vars exakta form är något komplicerad att fastställa. Eftersom kurvan $\Gamma$ är en sluten kurva är det lockande att använda Stokes sats, så vi beräknar rotationen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - a\left(y+z\right) & y^2 - az & z^2 - a\left(x+y\right) \end{vmatrix} \\ &= \left(-a+a\right)\hat{x} + \left(-a+a\right)\hat{y} + a\hat{z} = a\hat{z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Alltså är rotationen av $\vec{F}$ en rent vertikal vektor.

Vi kan nu använda Stokes sats

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{6}$$

Lägg märke till att ytan skall orienteras så att den följer högerhandsregeln. Detta betyder att om vi följer kurvan $\Gamma$ moturs så skall normalen $\hat{n}$ till $S$ peka uppåt.

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S a\hat{z} \cdot \hat{n}\mathrm{d}S = a \int_S \hat{z} \cdot \hat{n}\mathrm{d}S. \tag{7}$$

Skalärprodukten i den sista integralen betyder att vi projicerar ner arean $S$ på ett plan vinkelrät mot $\hat{z}$, det vill säga på $xy$-planet. I detta planet är skärningen cylinderns tvärsnittsyta, en cirkel med radien $a$, och integralen blir cirkelarean $\pi a^2$. Alltså blir integralen till slut

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = a\pi a^2 = \pi a^3. \tag{8}$$