Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Tisdagen den 20 december 2016 klockan 8.30-12.30 i Maskinsalarna.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Värmeledningsekvationen lyder

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s$$

Svara nu på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Förklara vad symbolerna c, ρ, T, λ och s står för och ge deras SI-enheter.

(b) Ge en fysikalisk tolkning av Dirichlets respektive Neumanns randvillkor för temperturfältet på randen till ett område.

(c) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Antag att temperaturfördelningen vid $t = 0$ är $T(x) = T_0 \frac{x(d-x)}{d^2}$. Bestäm den stationära temperaturfördelningen givet att ingen värme passerar genom begränsningsytorna för $t > 0$.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Rita en tydlig fältbild i xy-planet för det tvådimensionella hastighetsfältet

$$\vec{v} = -v_0 x\hat{x} + v_0 y\hat{y}.$$

Området skall inkludera både positiva och negative värden på x och y. Finns det några källor och/eller virvlar? *(10 poäng)*

3. (a) Använd transformationsegenskaper för att visa att gradienten av en skalär är en vektor. *(5 poäng)*
Ledning: En vektor skall uppfylla transformationsregeln $v'_i = L_{ij}v_j$, där $\mathbf{L}$ är transformationsmatrisen som också relaterar ortsvektorerna i de två koordinatsystemen $x'_i = L_{ij}x_j$. För en skalär gäller $s' = s$.

(b) Visa att följande samband gäller för produkten av två Levi-Civita tensorer med ett summationsindex $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. *(5 poäng)*

4. Beräkna integralen

$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

där S är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ för $z > 0$ och fältet ges av

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax\hat{x} + ay\hat{y} + x^2\hat{z}\right),$$

med konstanter a och F_0. *(10 poäng)*

5. Betrakta en platta med tjockleken a i y-led, oändlig utsträckning i positiv x-led samt i $\pm z$-led (se figur). Notera att den oändliga utsträckningen i z-led gör att problemet effektivt sett blir tvådimensionellt. Inuti plattan gäller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. Dessutom gäller randvillkoren

$$\phi(x, y = 0) = \phi(x, y = a) = 0$$
$$\phi(x, y)|_{x\to\infty} = 0$$
$$\phi(x = 0, y) = \phi_0 \sin(\pi y/a).$$

Finn lösningen $\phi(x, y)$. *(10 poäng)*
Ledning: använd variabelseparation, dvs skriv $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$.

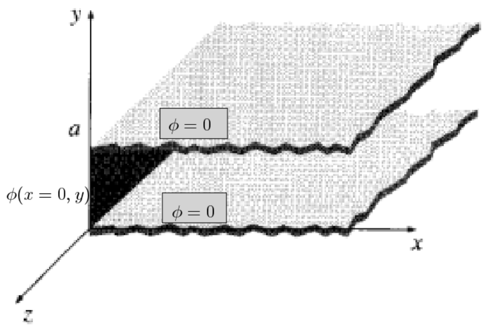

Figure 1: Uppgift 5: Plattor med randvillkor.

6. Betrakta en cirkelskiva i xy-planet med radien a. Inne i området gäller Poissons ekvation för någon allmän laddningsfördelning. På randen gäller Dirichlets homogena randvillkor $\phi(\rho = a) = 0$. Visa att följande funktion
$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = -\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}'}{\vec{\rho} - \frac{a^2}{(\rho')^2}\vec{\rho}'} \right| + \frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho'}{a}$$
är en Greensfunktion för denna situation. I uppgiften ingår alltså att inse vad det är som skall verifieras. Även ett tydligt resonemang kring detta kan ge delpoäng. *(10 poäng)*