

Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Lördagen den 24 oktober 2020 klockan 08.30-12:30, på distans via zoom.

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna.

Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Betrakta en kubisk volym (sidlängd a) inuti vilken det finns en värmekälla $s = \alpha_s r^2$ (notera att $[s] = \text{Wm}^{-3}$). Material är homogent med värmeledningsförmåga λ . Randvillkoren är sådana att de tillåter en stationärlösning att uppnås. Använd Gauss sats för att beräkna värmeflödet ut ur volymen när temperaturfältet är tidsberoende.
(10 poäng)

Lösning: _____

- Vi vill beräkna $\oint_{\partial V} \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV$ enligt Gauss sats.
- Vi har att $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -\lambda \Delta T$. Vid stationärlösningen gäller $\Delta T = -s/\lambda$.
- Återstår att beräkna

$$\int_V \alpha_s (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3\alpha_s a^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} = \alpha_s \frac{a^5}{4},$$

där vi utnyttjar att vi får tre likvärdiga termer.

- Enheten stämmer eftersom $[\alpha_s] = \text{Wm}^{-5}$ så att svaret får enheten W.

-
2. Använd indexnotation för att visa följande likheter

- (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$
- (b) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$
- (c) $\vec{\nabla} r = \hat{r}$

där \vec{r} är Ortsvektorn och \hat{r} motsvarande enhetsvektor.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

(bevis utan indexnotation kan också ge poäng, dock maximalt 4 poäng).

Lösning: _____

Notera att Ortsvektorn \vec{r} har komponenterna x_i .

- (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \partial_i x_i = 3$.
- (b) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \epsilon_{ijk} \partial_j x_k = 0$, eftersom $\epsilon_{ijk} = 0$ om $j = k$ medan $\partial_j x_k = 0$ om $j \neq k$.
- (c) $\vec{\nabla} r = \partial_i (x_j x_j)^{1/2} = \frac{1}{2} (x_k x_k)^{-1/2} \partial_i (x_j x_j)$. Enligt kedjeregeln är $\partial_i (x_j x_j) = 2x_j \partial_i x_j = 2x_j \delta_{ij} = 2x_i$. Slutligen får vi därför $\vec{\nabla} r = x_i (x_k x_k)^{-1/2}$ vilket vi identifierar med $\vec{r}/r = \hat{r}$.

3. Vad är värdet av integralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet \vec{F} ges av

$$\vec{F} = q \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \sigma \frac{|z|}{a} \hat{\mathbf{z}},$$

där $\vec{r}_0 = \frac{a}{2}(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$? (10 poäng)

Lösning: _____

- Den första termen motsvarar en punktkälla med laddning $4\pi q$ i punkten \vec{r}_0 på avståndet $r_0 = \frac{a}{2}\sqrt{3} < a$. Den är alltså innanför sfären och kommer att ge bidraget $4\pi q$ till integralen.
- Den andra termen är symmetrisk runt z -axeln och har alltid en positiv z -komponent. Detta ger att dess flöde genom ytan är lika stort negativt på den undre halvsfären som positivt på den övre. Summan blir noll.
- Alternativt kan man använda Gauss sats på den andra termen och konstatera att

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma |z|/a) = \frac{\sigma}{a} \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ -1 & z \leq 0, \end{cases}$$

vilket gör att volymsintegralen blir noll.

- Den totala ytintegralen blir alltså $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi q$.

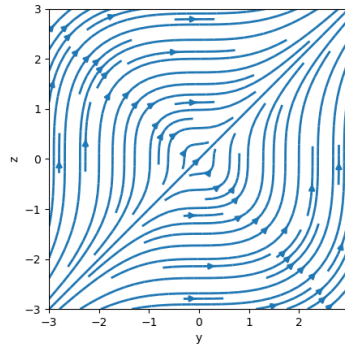
4. Tvärsnittsfiguren nedan visar fältlinjerna för en vektorpotential \vec{A} .

- (a) Vilken av följande vektorpotentialer skulle kunna motsvara fältlinjerna i figuren?

(i) $\vec{A} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + z^2 \hat{\mathbf{y}} + y^2 \hat{\mathbf{z}}$

$$(ii) \vec{A} = y^2 \hat{x} + x^2 \hat{y} + z^2 \hat{z}$$

$$(iii) \vec{A} = z^2 \hat{x} + y^2 \hat{y} + z^2 \hat{z}$$



- (b) Beräkna vektorfältet som erhålls från den vektorpotential som du har valt i deluppgift (a) och härled uttryck för dess fältlinjer.
- (c) Rita specifikt den fältlinje från uppgift (b) som startar i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$.

(10 poäng)

Lösning: _____

- (a) Figuren motsvarar fält (i): $\vec{A} = x^2 \hat{x} + z^2 \hat{y} + y^2 \hat{z}$, vilket vi t.ex. ser genom det faktum att ingen av y - och z -komponenterna är konstant, att de alltid är positiva samt att $A_y = A_z$ då $y = z$.
- (b) $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (2y - 2z) \hat{x}$. Fältlinjer $\vec{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ fås från

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y - z, \\ \frac{dy}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dz}{d\tau} &= 0, \end{aligned}$$

där de två sista direkt ger $y(\tau) = y_0$ och $z(\tau) = z_0$, vilket i sin tur ger $x(\tau) = (y_0 - z_0)\tau + x_0$.

- (c) Det efterfrågade fältlinjen visas enklast i xy -planet vid $z = z_0 = 2$ (!). Den startar ($\tau = 0$) i punkten $(x_0, y_0) = (0, 1)$ och går sedan rakt åt vänster i negativ x -led.

5. Potentialen från en punktdipol ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Betrakta dipolen $\vec{\mu} = \mu \hat{x}$. Beräkna motsvarande kraftfält $\vec{F}(\vec{r})$ och beräkna de tre ytintegralerna

$$\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

för ytorna $S_i \in \{S_x, S_y, S_z\}$ som motsvarar tre olika halvsfärer vilka definieras av S_i : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ för $x > 0$ (för $i = x$), $y > 0$ (för $i = y$), $z > 0$ (för $i = z$).

(Notera att det finns ett tryckfel i föreläsningssanteckningarna och i kursboken när det gäller uttrycket för vektorfältet från en dipol.)

(10 poäng)

Lösning: _____

- Vi gör koordinatbytet $x \rightarrow z'$, $y \rightarrow x'$, $z \rightarrow y'$ så att vi kan skriva $\phi = \frac{\mu \cos \theta'}{4\pi r'^2}$. Låt oss i det följande låta bli att skriva med prim på koordinaterna $r' \theta' \varphi'$.
- Kraftfältet blir

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla} \phi = -\frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{(-2 \cos \theta)}{r^3} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{(-\sin \theta)}{r^3} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right] \\ &= \frac{\mu}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \end{aligned}$$

- Vi börjar med integralen över $S_x = S_{z'}$. Ytelementet är $d\vec{S} = \hat{\mathbf{e}}_r R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Vi kan direkt utföra integralen $\int d\varphi = 2\pi$ och vi får

$$\int_{S_x} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu}{R} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\mu}{R} \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu}{2R}$$

- Notera att fältet är antisymmetriskt runt $y' = 0$ och $x' = 0$ planen ($\cos(\pi/2 - \alpha) = -\cos(\pi/2 + \alpha)$). Detta gör att både

$$\int_{S_y} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_z} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

6. Betrakta Laplaces ekvation för potentialen ϕ inuti en volym V . Volymens inre begränsningsyta är en oändligt lång cylinder med radie a_0 och dess yttre begränsningsyta är en annan oändligt lång cylinder med radie a_1 . De två cylindrarna har samma symmetriaxel. Vi har två Dirichlet-randvillkor: $\phi(\rho = a_0) = \phi_0$ samt $\phi(\rho = a_1) = \phi_1 \cos(2\varphi)$. Finn lösningen $\phi(\vec{r})$.

(10 poäng)

Lösning: _____

- Gör ansatsen $\phi = f(\rho) + g(\rho) \cos(2\varphi)$ då vi noterar att det inte kan finnas något z -beroende och att båda termernas vinkelberoende är egenfunktioner till Laplacianens vinkeldel.
- Denna separabla ansats uppfyller randvillkoren om $f(a_0) = \phi_0$ (i), $f(a_1) = 0$ (ii), $g(a_0) = 0$ (iii), $g(a_1) = \phi_1$ (iv).
- Laplace ekvation för den första termen ger lösningen

$$f(\rho) = C \ln(\rho/a_1) + D,$$

där vi har omdefinierat integrationskonstanten D så att vi får nämnaren a_1 i logaritmen (blir enklare uttryck). Randvillkor (ii) ger då att $D = 0$ medan villkor (i) ger att $C = \frac{\phi_0}{\ln(a_0/a_1)}$.

- Laplaces ekvation på den andra termen, med ansatsen $g(\rho) = A\rho^p$ ger den karakteristiska ekvationen $p^2 - 4 = 0$ och därmed lösningen

$$g(\rho) = A\rho^2 + B\rho^{-2}.$$

Notera gärna att $\rho = 0$ inte är med i volymen. Randvillkor (iii) ger $A = -B/a_0^4$ och därmed ger (iv) att $\phi_1 = -\frac{B}{a_1^2} \left(\frac{a_1^4}{a_0^4} - 1 \right)$.

- Sammantaget, och med lite omskrivningar, blir

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \frac{\ln \rho - \ln a_1}{\ln a_0 - \ln a_1} + \phi_1 \frac{a_1^2}{a_1^4 - a_0^4} \left(\rho^2 - \frac{a_0^4}{\rho^2} \right) \cos(2\varphi).$$

Vi kan notera att termerna har dimensionerna $[\phi_0]$ respektive $[\phi_1]$ vilket lär stämma.