FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christin Rhen, Chalmers

Aug 10, 2019

Uppgift 9.4.10: Vektorfält från Greensfunktion

På en sfär med radien a befinner sig en ytkälla med tätheten $\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta$, där θ är vinkeln från en punkt på sfären. Bestäm vektorfältet för en punkt på symmetriaxeln.

Hint.

- Betrakta punkter $\vec{r} = z\hat{z}$, dvs längs symmetriaxeln.
- Teckna Greensfunktionen $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = (4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|)^{-1}$ och fundera på hur avståndet kan uttryckas när $\vec{r} = z\hat{z}$.
- Ytkällan motsvarar en laddningsfördelning $\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta\delta(r-a)$.
- Resultatet blir en ganska krånglig integral där variablsubstitutionen $t = z^2 + a^2 - 2za\cos\theta'$ kan komma väl till pass.
- Notera sedan att man får olika fall beroende på tecknen på $(z+a)$ och $(z-a)$.

Answer.

$$\vec{F} = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{3}\hat{z}, & |z| < a \\ \frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3}\hat{z}, & |z| > a \end{cases} \tag{1}$$

Solution. Eftersom att punkten $\vec{r}$ befinner sig på ytkällans symmetriaxel, kan vi definiera ett kartesiskt koordinatsystem så att denna symmetriaxel sammanfaller med z-axeln. Då blir θ samma vinkel som den vi normalt kallar θ i sfäriska koordinater, och $\vec{r} = z\hat{z}$.

Vektorfältet $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, där potentialen $\phi(\vec{r})$ ges av

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathrm{R}^3} G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')\mathrm{d}V'. \tag{2}$$

Eftersom att vi är i tre dimensioner är Greensfunktionen $G(\vec{r}, \vec{r}') = [4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|]^{-1}$. Den angivna laddningstätheten är en ytkälla, så $\rho(\vec{r}\,') = \delta(r' - a)\sigma_0 \cos\theta'$. Vi betraktar $\vec{r} = z\hat{z}$ och får alltså

$$\phi(z\hat{z}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(r' - a)\sigma_0 \cos\theta'}{4\pi\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta'}} r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' \tag{3}$$

$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2} \int_0^\pi \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2za\cos\theta'}} \mathrm{d}\theta'. \tag{4}$$

Vi gör nu variabelsubstitutionen

$$\begin{aligned} t &= z^2 + a^2 - 2za\cos\theta', \\ \mathrm{d}t &= 2za\sin\theta'\mathrm{d}\theta', \\ \theta' = 0 &\to t = (z-a)^2, \\ \theta' = \pi &\to t = (z+a)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Nämnaren i integranden blir nu $\sqrt{t}$, och $\sin\theta'$ i täljaren blir en del av $\mathrm{d}t$. Det kvarvarande $\cos\theta'$ i täljaren får vi genom att lösa ut $\cos\theta'$ ur definitionen av t.

Integralen är nu

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{4z^2} \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{z^2 + a^2 - t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t \tag{6}$$

$$= \frac{\sigma_0}{4z^2} \left[(z^2 + a^2) \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t - \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{\sqrt{t}}{2} \mathrm{d}t \right] \tag{7}$$

$$= \frac{\sigma_0}{4z^2} \left[(z^2 + a^2) \Big[\sqrt{t} \Big]_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} - \frac{1}{3} \Big[t^{3/2} \Big]_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \right] \tag{8}$$

$$= \frac{\sigma_0}{4z^2} \left[(z^2 + a^2) \Big[|z+a| - |z-a| \Big] - \frac{1}{3} \Big[|z+a|^3 - |z-a|^3) \Big] \right]. \tag{9}$$

Kom ihåg att för alla reella tal x så är $\sqrt{x^2} = |x|$. Vi får alltså fyra fall – $|z| > a$ och $|z| < a$ kombinerat med $z > 0$ och $z < 0$ – som måste behandlas var för sig.

Inuti sfären. Eftersom att $a > z$ så är $|z + a| = z + a$ och $|z - a| = a - z$, oavsett om z är positiv eller negativ. Två av de fyra fallen kan alltså studeras samtidigt.

Insättning av absolutbeloppen ovan i ekvation (9) ger, efter en smula algebra, att $\phi(\vec{r}) = \sigma_0 z/3$. Vektorfältet blir då

$$\vec{F} = -\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\sigma_0}{3}\hat{z}. \tag{10}$$

Utanför sfären. Här måste positiva och negativa z studeras var för sig.

När $z > a > 0$ är $|z + a| = z + a$ och $|r - a| = r - a$. Substitution i (9) och förenkling av resultatet ger att $\phi(\vec{r}) = \sigma_0 a^3/3z^2$. Vektorfältet blir

$$\vec{F} = -\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2\sigma_0 a^3}{3z^3}\hat{z}, \quad z > 0. \tag{11}$$

När $|z| > a$ men $z < 0$ så blir $|z + a| = -(z + a)$ och $|z - a| = -(z - a)$. Den här gången blir $\phi(\vec{r}) = -\sigma_0 a^3/3z^2$ och

$$\vec{F} = -\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{2\sigma_0 a^3}{3z^3}\hat{z}, \quad z < 0. \tag{12}$$

Notera att alla kvantiteter utom z i (11) och (12) är konstanter; de ändrar alltså aldrig tecken. Därför kan vi kombinera dessa två ekvationer, och uttrycka fältet överallt utanför sfären som

$$\vec{F} = -\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3}\hat{z}. \tag{13}$$

Kontroll: ytladdning. Notera att vårt fält, betraktat längs symmetriaxeln, har en diskontinuitet vid $z = \pm a$. Denna motsvarar ytladdningen. T.ex., vid $\theta = 0$ (dvs $z = +a$) har vi enligt uppgiftsformuleringen en ytladdning med styrkan σ_0. Detta kan vi verifiera genom att räkna ut

$$\hat{z} \cdot \left(\vec{F}_+ - \vec{F}_-\right)_{z=a} = \frac{2\sigma_0}{3} - \frac{-\sigma_0}{3} = \sigma_0. \tag{14}$$