

FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,
Sverige

Oct 16, 2018

9. Lösningar av Poissons ekvation

Vi vet att Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}),$$

har entydiga lösningar om

$$\phi|_{\partial V} = f(\vec{r})$$

Dirichlets randvillkor

$$(\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V} \cdot \vec{n} = g(\vec{r})$$

Neumans randvillkor

där f och g är funktioner på randen ∂V .

Lösning av Poissons ekvation

Vi kommer att betrakta fyra olika lösningsmetoder:

1. Greensfunktionsmetoden. Generell metod, men det är ofta svårt att finna analytiska uttryck för Greensfunktionen.

2. Spegling. Ger uttryck för Greensfunktionen i vissa speciella geometrier och homogena randvillkor.

3. Variabelseparation. Kraftfull analytisk metod. Riktigt användbar i kombination med Fourieranalys.

4. Numeriska metoder.

- De tre förstnämnda är analytiska metoder som vi introducerar för att ge en fysikalisk förståelse av lösningarna.

- De numeriska metoderna är förstås viktigast för praktiska tillämpningar. Se datoruppgift.

3. Variabelseparation

- Bygger på att man löser ekvationerna stegvis för en variabel i taget.
- Problemet skall *passa bra* ihop med ett visst koordinatsystem.

Exempel: Laplaces ekvation på en cirkelskiva

- $\Delta\phi = 0$, på $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} < a$.
- Betrakta fallet där randvillkoret enbart innehåller ett vinkelberoende $\phi(\vec{r})|_{\partial V} = h(\varphi)$

Laplaceoperatorn är

$$\Delta = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Målet är att lösa ekvationen, samtidigt som vi uppfyller randvillkoret, genom att separera beroendet på variabeln φ och ϱ genom en ansats av formen

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$$

Exempel. Antag att randvillkoret är

$$\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi,$$

där m är ett heltal.

Vi ansätter att hela lösningen har just detta beroende av φ , så att

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho) \cos m\varphi$$

Funktionen $\cos m\varphi$ uppfyller

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos m\varphi = -m^2 \cos m\varphi,$$

dvs, den är en egenfunktion till $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ med egenvärdet $-m^2$.

Insättning:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) \cos m\varphi - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) \cos m\varphi = 0,$$

och om detta skall gälla överallt på cirkelskivan måste man ha

$$\varrho \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) - m^2 f(\varrho) = 0.$$

Den partiella differentialekvationen har nu reducerats till en ordinär differentialekvation för funktionen $f(\varrho)$

- Ansatz: $f(\varrho) = A\varrho^p$
- Löser ekvationen med $p^2 - m^2 = 0$, dvs. $p = \pm m$, där minustecknet väljs bort på grund av singulariteten i origo.
- Slutsats:

$$\phi(\varrho, \varphi) = \phi_0 \left(\frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi,$$

är en lösning till Laplaces ekvation på cirkelskivan med randvillkoret $\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$.

Exempel 2: Laplaces ekvation på en cirkelskiva med allmänt Dirichlet randvillkor

OBS!

Detta exempel inkluderar Fourieranalys som ej ingår i kursen. Anteckningarna är endast med för bättre koppling till motsvarande material i andra kurser och för att antyda den mer generella användningen av variabelseparationsmetoden.

Med randvillkoret

$$\phi(a, \varphi) = h(\varphi),$$

ansätter vi lösningen $\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$.

Laplacianen blir

$$\Delta\phi = \Delta(f(\varrho)g(\varphi)) = g(\varphi) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) + \frac{f(\varrho)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Detta ger den *separerade* ekvationen

$$\frac{f(\varrho)g(\varphi)}{\varrho^2} \left[\frac{\varrho^2}{f(\varrho)} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{g(\varphi)} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

där den första termen i hakparantesen enbart beror på ϱ och den andra bara på φ . Därmed måste bägge vara konstanta (för att gälla för alla ϱ, φ). Vi sätter den första till $-\lambda$ och den andra till $+\lambda$.

Studera vinkelekvationen först

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = \lambda g(\varphi),$$

dvs vi kan tolka g som en egenfunktion till $\partial^2/\partial \varphi^2$. Lösningen är

$$g(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi),$$

med *egenvärdet* $\lambda = -m^2$. Funktionen måste uppfylla randvillkoret $g(0) = g(2\pi)$ vilket ger att $m = 0, 1, 2, \dots$ (notera att $m = 0$ är meningslös för sinus-termen).

Den kvarvarande, radiella ekvationen blir nu

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) = 0.$$

- $m = 0$, vilket innebär att $g(\varphi) = A$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = B \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = B/\varrho.$$

Med lösningen $f(\varrho) = A + B \ln(\varrho)$, där den andra termen motsvarar en punktkälla i två dimensioner (vi skippar denna).

Alltså är $\phi(\vec{r}) = A$ (konstant) en lösning om randvillkoret är $h(\varphi) = A$ (konstant).

- $m > 0$, ansätt lösning $f(\varrho) = C\varrho^p$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho^p \right) - \frac{m^2}{\varrho^2} \varrho^p = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 \varrho^{p-2} - m^2 \varrho^{p-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \pm m$$

Med lösningen $f(\varrho) = A\varrho^m + \frac{B}{\varrho^m}$, där den andra termen är singulär i origo (vi skippar denna).

Med randvillkoret från ovan $h(\varphi) = \cos m\varphi$, $f(a) = \phi_0$ får vi lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi,$$

som ovan.

För ett mer allmänt randvillkor kan man (Fourier)-utveckla

$$h(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi),$$

vilket ger lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \cos(m\varphi) + b_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \sin(m\varphi).$$

OBS: ingår ej i denna kurs att kunna göra en sådan Fourierutveckling.

Kommentar

Separationsmetoden kan förstås användas med fler än två variabler. Vill man t.ex. använda den i sfäriska koordinater, hittar man egenfunktioner i tur och ordning i φ , θ och r . Se veckans tal. Eller så hittar man direkt egenfunktioner på S^2 , s.k. klotytefunktioner (se kvantmekanik).

1. Greensfunktionsmetoden

Vi tecknar Poissons ekvation i hela \mathbb{R}^3 ,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

En lösningsstrategi som vi har betraktat tidigare är att:

- Beräkna bidraget till potentialen i punkten \vec{r} givet en punktladdningen med styrkan $q = 1$ belägen i punkten \vec{r}' .
- Superpositionsprincipen ger potentialen som en summa/integral över källtätheten gånger ovanstående "Greensfunktion".

Vi har redan visat att

$$G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

där vi förtydligar att detta gäller på \mathbb{R}^3 . Eftersom en punktkälla i punkten $\vec{r} = \vec{r}'$ med styrkan $q = 1$ beskrivs av källtätheten $\rho(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$, inser vi att Greensfunktionen löser följande differentialekvation

$$\Delta G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1)$$

på hela \mathbb{R}^3 .

Kommentar 1: Notera att Laplaceoperatorn verkar på variabeln \vec{r} (inte \vec{r}'). Dvs., $\Delta = \Delta_{\vec{r}} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Lösningen till Poissons ekvation i \mathbb{R}^3 med en allmän källa ρ blir en superposition

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Exempel: linjekälla

Betrakta en linjekälla, $\rho(\vec{r}) = k\delta^2(\vec{\rho})$, i \mathbb{R}^3 .

Vi skall integrera över linjekällan och introducerar koordinaten

$$\vec{r}' = \vec{\rho}' + z'\hat{z} = \rho'\hat{\rho} + z'\hat{z},$$

där vi noterar att det inte behövs något "prim" på z -riktningen.

Vi sätter in i

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' \frac{k\delta^2(\vec{\rho}')}{4\pi|\vec{r} - (\rho'\hat{\rho} + z'\hat{z})|}.$$

Integralen $\int dS'$ över x' och y' kan enkelt utföras tack vare deltafunktionen. Resultatet:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k}{4\pi|\vec{r} - z'\hat{z}|}$$

som är identiskt med den direkta konstruktionen från kap. 6.

Greensfunktioner för en begränsad volym med randvillkor. Låt oss göra denna metod mer generell. Studera Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

- ... inuti en (begränsad) volym V .
- ... med homogena randvillkor, dvs. $f = 0$ eller $g = 0$ på randen ∂V .
- ... för en allmän källtäthet $\rho(\vec{r})$.

Lösningen kan skrivas

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}'),$$

där Greensfunktionen löser Ekv. (1) *inuti volymen* V och med det *givna randvillkoret*.

Att detta är en lösning visas genom insättning:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') = \int_{V'} dV' \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= - \int_{V'} dV' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

- Notera att \vec{r} -beroendet bara sitter i Greensfunktionen.
- Notera att Greensfunktionen G på ett område V bestäms av formen på området och av randvillkoren på ∂V .
- Genom att $G(\vec{r}, \vec{r}')$ uppfyller det homogena randvillkoret kommer ovanstående superposition också att uppfylla det.

2. Spegling

- Vi såg att lösningen $\phi(\vec{r})$ erhålls enkelt om man har tillgång till Greensfunktionen. Men denna är ofta svår att finna.
- För vissa geometrier erbjuder *speglingsmetoden* ett väldigt elegant sätt att konstruera Greensfunktionen.

Rita: Fältnbilder tre olika konfigurationer med punktladdningar

Skissa fältnbilder för tre olika fall:

- En punktladdning $+q$ (belägen i det övre halvplanet, $z > 0$);
- Två punktladdningar $+q$ och $-q$ (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre);
- Två punktladdningar $+q$ och $+q$ (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre).

Betrakta speciellt potentialen vid speglingsytan $z = 0$.

Fundera: Poissons ekvation

Det första fallet ger en potential ϕ som löser Poissons ekvation

$$\Delta\phi = -q\delta^{(3)}(\vec{r}_0),$$

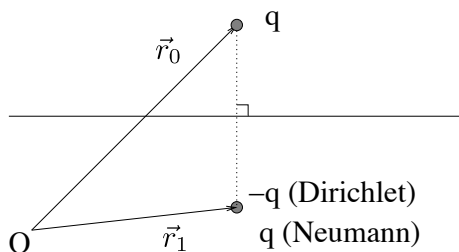
i hela \mathbb{R}^3 . Vilken differentialekvation löser det andra respektive det tredje fallet om vi begränsar oss till övre halvplanet?

Betrakta halvrymden $\{\vec{r}: z > 0\}$ med ett homogent randvillkor på planet $z = 0$:

- Dirichlets randvillkor: $\phi = 0$, eller
- Neumanns, $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$.

Kommentar 2: Detta är ett bra tillfälle att repetera begreppen ekvipotentialytor och fältlinjer (till vektorfältet $-\vec{\nabla}\phi$). Se till att förstå att ett randvillkor $\phi = 0$ (Dirichlet) betyder att randen är en ekvipotentialyta, och att $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$ betyder att fältlinjerna är parallella med randen.

Betrakta nu en punktladdning belägen i det övre halvplanet. Vi kan införa en spegelladdning i det område som vi inte är intresserade av ($z < 0$). Den påverkar alltså inte källdensiteten i det fysikaliska området ($z > 0$), men hjälper till att uppfylla randvillkoren.



Med $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $\vec{r}_1 = (x_0, y_0, -z_0)$ och:

- $q_1 = q$ uppfylls Neumanns randvillor
- $q_1 = -q$ uppfylls Dirichlets randvillor

dvs potentialen från den två punktladdningarna

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \pm \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

I det förra fallet är fältlinjerna parallella med $z = 0$ planet, i det senare fallet ligger ekvipotentialytan $\phi = 0$ i $z = 0$ planet.

Vi kan alltså konstruera Greensfunktioner för övre halvplanet med dessa två randvillkor. Med Dirichlets homogena randvillkor blir alltså Greensfunktionen

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|},$$

där $\vec{r}' = (x', y', z')$ och $\vec{r}'' = (x', y', -z')$, med $z' > 0$.

Notera att $G(\vec{r}, \vec{r}')$ uppfyller $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ i det övre halvrummet.

Intressant nog fungerar speglingsmetoden även för cirklar i två dimensioner och sfärer i tre dimensioner (i det senare fallet dock endast för Dirichlets randvillkor). Se demonstrationsuppgift.

