Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 26 oktober 2015 klockan 14.00-18.00 på Hörsalsvägen.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. Till detta tillkommer eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. (a) Beräkna tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{F_0}{a}(-y\hat{x}+x\hat{y}$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (b\cos t, c\sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

   (b) Visa att $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ (för ett godtyckligt fält ϕ) mha indexnotation.

   (c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$, där μ är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/2)$. Rita också denna fältlinje i rummet tillsammans med xyz-axlarna och indikera riktningen på vektorfältet vid några punkter längs fältlinjen. *(10 poäng)*

3. Beräkna integralen
$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$
där S är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ för $z > 0$ och fältet ges av
$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax\hat{x} + ay\hat{y} + (x^2 + y^2)\hat{z}\right),$$
med konstanter a och F_0. *(10 poäng)*

4. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}.$$
(10 poäng)

5. Lös Laplaces ekvation inuti en (oändligt lång) cylinder med radien a. Vid ytan gäller ett Dirichlet randvillkor
$$\phi(\vec{r})\big|_{|\vec{\rho}|=a} = \phi_0 + \phi_1\cos p\varphi,$$
där p är ett heltal och (ρ, φ, z) är cylindriska koordinater. *(10 poäng)*

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt W. Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie a. Vid ytan gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet
$$\frac{\partial T}{\partial r} = \text{konstant}.$$
Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant $T(\vec{r}) = T_0$ vid $t = 0$ och att materialets värmekonduktivitet är λ (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen). *(10 poäng)*