Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 eller FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 19 augusti 2019 klockan 14.00-18.00 i SB.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där fältet $\vec{F} = F_0 \frac{x}{b} \hat{y}$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\sin t, \cos t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

   (b) Beräkna vektorn $\varepsilon_{ijk} M_{ij}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

   $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Betrakta skalärfältet $\phi(\vec{r}) = \cos\theta / r^2$. För vilken enhetsvektor $\hat{n}$ är riktningsderivatan av detta fält i riktningen $\hat{n}$ i punkten $(x, y, z) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ maximal och positiv? (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga.)

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) $-\pi F_0 b$

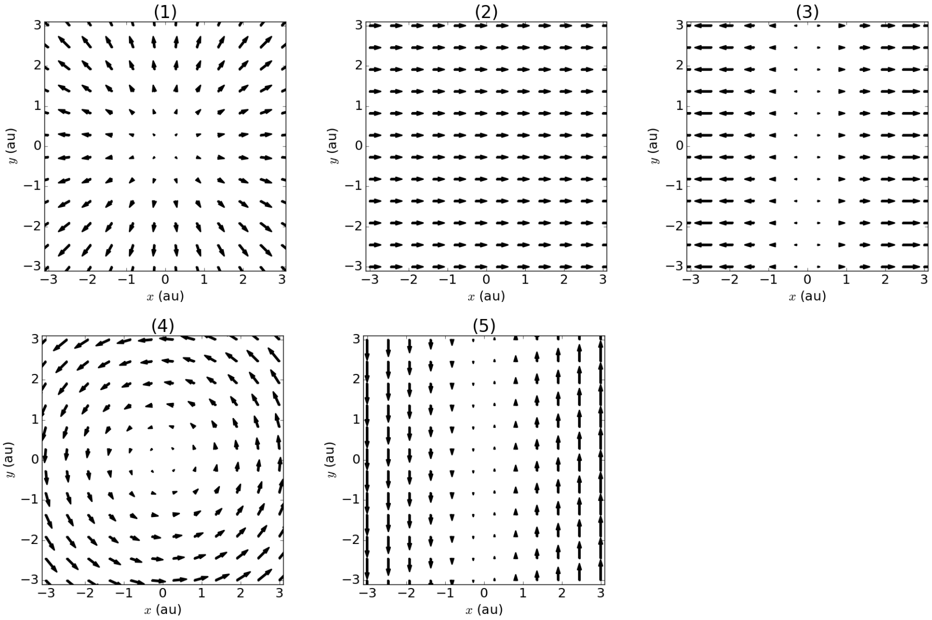
   (b) $(0, c - a, 0)$

   (c) $\hat{n} = -\hat{\theta}$ (eller $\hat{n} = \hat{z}$)

---

2. (a) Vad blir följande derivator på vektorfältet $\vec{A} = r\hat{r}$:
   (i) $\nabla \cdot \vec{A}$; (ii) $\nabla \times \vec{A}$; (iii) $\Delta \vec{A}$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$; (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$? *(5 poäng)*

   (b) Para ihop de fem tvådimensionella vektorfälten: (i) $\vec{A} = \hat{x}$; (ii) $\vec{A} = x\hat{x}$; (iii) $\vec{A} = x\hat{y}$; (iv) $\vec{A} = r\hat{r}$; (v) $\vec{A} = x\hat{y} - y\hat{x}$; med visualiseringarna i figurerna (1)–(5). Ange för samtliga huruvida *divergensen* och *rotationen* (z-komponenten) är noll, positiv eller negativ i det uppritade området. *(5 poäng)*



Lösning:

(a) (i) $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 r) = 3$; (ii) $\nabla \times \vec{A} = 0$; (iii) $\Delta\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(3) - \nabla \times (0) = 0$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ (alltid sant); (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times (0) = 0$.

(b) Divergens och rotation kan uppskattas baserat på fältens utseenden. Alternativt kan explicita uttryck för fälten ansättas.

	$\nabla \cdot \vec{A}$	$\nabla \times \vec{A}$
Fält (1) ser ut som $\vec{A} = r\hat{r}$.	> 0	0
Fält (2) ser ut som $\vec{A} = \hat{x}$.	0	0
Fält (3) ser ut som $\vec{A} = x\hat{x}$.	> 0	0
Fält (4) ser ut som $\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$.	0	> 0
Fält (5) ser ut som $\vec{A} = x\hat{y}$.	0	> 0

3. Ett vektorfält $\vec{F}$ har potentialen

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt positivt? Beräkna detta maximala positiva flöde. *(10 poäng)*

Lösning:

Flödet kan vi skriva

$$\Phi(S) = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = -\int_V \Delta\phi dV,$$

där vi har använt oss av Gauss sats ($S = \delta V$). Potentialen skrivs enkelt i sfäriska koordinater $\phi = r^4 - 3r^2$ och Laplace-operatorn ger $-\Delta\phi = 18 - 20r^2$. Denna funktion utgör alltså integranden för volymsintegralen och är positiv om $r < 3/\sqrt{10}$. Störst flöde fås alltså om vi integrerar över ytan på en sfär med radien $r = 3/\sqrt{10}$. Det maximala, totala flödet blir

$$\int d\Omega \int_0^{3/\sqrt{10}} (18 - 20r^2) r^2 dr = 4\pi \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{54}{25}.$$

---

4. Betrakta värmeledning genom en glasruta med materialkonstanterna λ (värmeledningsförmågan), c (värmekapacitiviten) och ρ (densitet). Glasrutans bredd och höjd är betydligt större än dess tjocklek d. Härled den stationära temperaturfördelningen då

$$T(x, t = 0) = T_0 \frac{x(d - x)}{d^2}$$

där T_0 är en konstant (enhet: K). Glasrutan är perfekt isolerad så att ingen värme passerar genom glasets begränsningsytor vid $x = 0$ och $x = d$. *(10 poäng)*

Lösning:

- Vid stationärlösningen blir värmeledningsekvationen $d^2T/dx^2 = 0$.
- Neumanns randvillkor: $dT/dx = 0$ vid $x = 0$ och $x = d$. Vi kan integrera differentialekvationen ovan och får stationärlösningen $T(x) = \text{konstant}$.
- Värmeenergin inuti glasrutan är konstant eftersom den är perfekt isolerad. Detta ger

$$\int_0^d T(x,t)dx = \text{konstant} = \int_0^d T(x, t = 0)dx = \frac{T_0}{d^2} \left[\frac{x^2 d}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^d = \frac{T_0 d}{6}$$

- Stationärlösningen blir alltså $T(x) = T_0/6$.

5. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ i $\mathbf{R}^3$. Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. *(10 poäng)*
Ledning: Dipolmomentet μ har enheten (laddning $\times$ längd).

Lösning:

Vi lägger punktdipolen i origo. En dipol $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ motsvarar en laddning $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$ i punkten $(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$ och en laddning $-q = -\frac{\mu}{\varepsilon}$ i origo. Källtätheten kan skrivas

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r} - \varepsilon\hat{z}) - \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Alternativt kan vi lägga punktladdningarna i $z = \pm\varepsilon/2$. Det blir samma fält för $r/\varepsilon \gg 1$.

Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir (notera permeabiliteten från Maxwells första ekvation)

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r}.$$

Nu vill vi studera hur detta uttryck kan skrivas vid stora avstånd. Vi kan skriva $|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}| = \sqrt{\varrho^2 + (z-\varepsilon)^2}$, och om ε är litet $(\varepsilon/\varrho, \varepsilon/z \ll 1)$ blir detta $\sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$. Därför får vi

$$\frac{1}{|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}).$$

Här har vi använt Taylorutvecklingarna $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ samt $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$.
Potentialen blir

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu\cos\theta}{4\pi r^2} \qquad (1)$$

Mer generellt kan man skriva den elektrostatiska potentialen från en dipol $\vec{\mu}$:

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}.$$

I vårt fall var alltså $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ dipolmomentet (som alltså ges av produkten av laddningen $\frac{\mu}{\varepsilon}$ och separationsvektorn $\varepsilon\hat{z}$).

6. Antag att man på ytan S av en sfär med radien a och centrum i origo mäter upp det elektriska fältet $\vec{E}$ och finner att

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}\left(\frac{x}{a^2}\hat{x} + \frac{y}{b^2}\hat{y} + \frac{z}{c^2}\hat{z}\right),$$

där ϵ_0 ρ_0, b och c är konstanter. Visa att denna information tillsammans med en av Maxwells ekvationer är tillräcklig för att bestämma den totala laddningen Q inuti sfären. Beräkna Q.

(10 poäng)

Lösning:

- Den totala laddningen inuti sfären (med volym V och begränsningsyta $\partial V = S$)

$$Q = \int_V \rho dV = \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

  där vi har använt ME1 och Gauss sats.

- Följdaktligen räcker det att känna till E-fältet på sfärens yta. Vi får

$$Q = \rho_0 \oint_S \left(x\hat{\mathbf{x}} + \frac{a^2}{b^2}y\hat{\mathbf{y}} + \frac{a^2}{c^2}z\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot d\vec{S}$$

- Rotationssymmetri ger att

$$\oint_S x\hat{\mathbf{x}} \cdot d\vec{S} = \oint_S y\hat{\mathbf{y}} \cdot d\vec{S} = \oint_S z\hat{\mathbf{z}} \cdot d\vec{S},$$

  så vi räknar enbart ut

$$\oint_S z\hat{\mathbf{z}} \cdot d\vec{S} = 2\pi a^3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = 2\pi a^3 \left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{4\pi a^3}{3}$$

  eftersom $d\vec{S} = \hat{r} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, $\hat{r} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{a}$ och $z = a\cos\theta$.

- Sammantaget finner vi att

$$Q = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right)$$

Notera att dimensionen stämmer eftersom ρ_0 har enheten laddning / volym.