FFM232, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fundamental fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Sep 22, 2015

Repetition: Integralsatser

- Gauss sats

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1}$$

- Stokes sats

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{2}$$

Gäller för kontinuerligt deriverbara vektorfält. Vad händer om fältet har en singularitet?

6. Singulära fält

Det finns tre viktiga typer av singulariteter, vilka dyker upp för speciella vektorfält:

- Punktkälla
- Linjeälla
- Virveltråd

Punktkällor

Ett fält av formen
$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r \tag{3}$$
kallas för fältet från en punktkälla med styrkan q. Med lämplig tolkning av konstanten q kan detta t.ex. föreställa det elektriska fältet från en laddning i origo, eller gravitationsfältet från en massa i origo.

Comment 1: Notera att detta fält är singulärt i origo och skissa fältlinjerna.

Detta fält är rotationsfritt
$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$
Rotationsfriheten är också en direkt följd av att $\vec{F} = -\nabla\phi$
$$\phi = \frac{q}{4\pi r} \tag{5}$$
Vektorfältet $\vec{F}$ är också divergensfritt:
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{q}{4\pi r^2}\right) = 0 \quad r > 0 \tag{6}$$

Comment 2: Trots frånvaron av divergens får vi ett resultat skilt från noll om vi beräknar normalytintegralen av $\vec{F}$ över en yta som omsluter origo. Detta görs enklast genom att utföra integralen över en sfär med radien a.

Normalytintegralen för en yta som omsluter origo:
$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi a^2}4\pi a^2 = qrefeq : punktkalla \tag{7}$$
medan Gauss sats skulle ge $\int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = 0$!

Comment 3: En viktig slutsats är att det vore fel att naivt tillämpa Gauss sats på en volym innehållande origo, trots att fältet ser divergensfritt ut. Det beror på att det är singulärt där. Med vår nuvarande kunskap får vi acceptera att vi måste undvika punkter där fält är singulära när vi använder integralsatser.

Anledningen till att vi inte kan använda Gauss sats är
$$\nabla \cdot \vec{F} = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \text{ (bättre definition kommer senare)} \end{cases} \tag{8}$$
Mer allmänt:
$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{om ytan inte omsluter origo.} \\ q & \text{om ytan omsluter origo.} \end{cases} \tag{9}$$

Flöde från punktkälla genom allmän yta. En mer förfinad version av ekv. () för normalytintegralen av fältet från en punktkälla över en godtycklig yta S kan fås genom att dela upp normalytelementet i r-, θ- och φ-ytor

$$\hat{n}\mathrm{d}S = \pm\hat{e}_r h_\theta h_\varphi \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \dots \tag{10}$$

där tecknet beror på om normalen för S är utåtriktad (positiv) eller inåtriktad (negativ). Detta ger

$$\int_S \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2} = \pm\iint \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \Omega \tag{11}$$

där Ω är den rymdvinkel ytan S tar upp sedd från origo. T.ex. blir rymdvinkeln för en yta som omsluter origo

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi. \tag{12}$$

Linjekällor

Ett fält av typen

$$\vec{F} = \frac{k}{2\pi\rho}\hat{e}_\rho \tag{13}$$

svarar fysikaliskt till exempel emot en laddning som är jämnt fördelad längs med en linje (i det här fallet z-axeln). Storheten k motsvarar då laddning/längdenhet. Linjekällan är då källan till ett fält som överallt pekar radiellt ut från z-axeln.

Fältet är divergensfritt $\nabla\cdot\vec{F} = 0$, förutom för $\varrho = 0$.

Det kan erhållas från potentialen

$$\phi = -\frac{k}{2\pi}\log\frac{\varrho}{varrho_0} \tag{14}$$

Med konstant källtäthet fås normalytintegralen för en cylinder med längden L som omsluter linjekällan längs z-axeln

$$\int_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = kL \tag{15}$$

Comment 4: Mer generellt blir normalytintegralen av fältstyrkan över en smal tub nära en godtycklig kurva lika med den inneslutna källan $q(C) = \int_C k(\vec{r})ds$, där C är den del av kurvan som innesluts av tuben.

Ytkälla

På motsvarande sätt kan vi tala om ytkällor i tre dimensioner. Fältet

$$\vec{F} = \frac{\sigma}{2}\mathrm{sign}(z)\hat{z} \tag{16}$$

där σ, i det elektrostatiska fallet, skulle kallas för en ytladdningstäthet.

Närvaron av en ytkälla på ytan S med styrkan σ är liktydigt med att normalkomponenten av $\vec{F}$ har en diskontinuitet enligt $\hat{n} \cdot (\vec{F}_+ - \vec{F}_-) = \sigma$, där $\vec{F}_+$ är fältets värde på den sida dit normalen pekar, och $\vec{F}_-$ dess värde på motsatta sidan.

Källtäthet. Vi har nu sett hur olika singulariteter kan vara källor till ett fält $\vec{F}$. Analogt med detta kan vi tolka $\nabla \cdot \vec{F}$ som en utbredd källa till $\vec{F}$. Därför kallar man ibland $\nabla \cdot \vec{F}$ för källtäthet.

- Singulära källor: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ utom på vissa ställen

Virveltråd

Fältlinjerna till det singulära fältet

$$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi \tag{17}$$

bildar koncentriska cirklar kring z-axeln. Därför säger vi att det finns en virveltråd med styrkan J på z-axeln.

Divergensfritt: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Rotationen av fältet:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \varrho\frac{J}{2\pi\varrho} & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

för $\varrho > 0$.

Samtidigt ger linjeintegralen (för en cirkel med radien a runt z-axeln, $\mathrm{d}\vec{r} = a\hat{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi$)

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{J}{2\pi a} a\mathrm{d}\varphi = J. \tag{19}$$

Generellt gäller detta resultat för en kurva C som omsluter z-axeln ett varv i positiv led, medan integralen blir noll för kurvor som inte omsluter z-axeln.

Det vanligaste exemplet är det statiska magnetiska fältet från en ström. Dvs fältet är $\vec{B}$ och J motsvarar den elektriska strömmen.

Virveltäthet. Vi har nu sett hur en virveltråd kan alstra en virvel i ett vektorfält. Det kan också uppstå virvlar i fält som saknar singulariteter, och för att få ett mått på omfattningen av sådana virvlar inför man virveltätheten $\nabla \times \vec{F}$.

- Singulära virvlar: $\nabla \times \vec{F} = 0$ utom på vissa ställen