FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers

Aug 10, 2019

Uppgift 2.4.8

Betrakta vektorfältet

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}),$$

där m är en konstant. (Detta är fältet från en elektrisk dipol.)

Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/6)$.

Hint. Fältlinjer är de kurvor som följer ett vektorfält på så sätt att de i varje punkt har vektorfältet som sin tangentvektor. Fältlinjer kan parametriseras $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ och differentialekvationerna för att bestämma dem är

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E},$$

där C är en godtycklig konstant vilken ju inte påverkar tangentriktningen.

Med cartesiska koordinater gäller ju att förskjutningsvektorn $\mathrm{d}\vec{r}$ kan skrivas $\mathrm{d}\vec{r} = \hat{x}\mathrm{d}x + \hat{y}\mathrm{d}y + \hat{z}\mathrm{d}z$ och vektorekvationen ovan ger tre differentialekvationer (en för varje riktning $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$):

$$\begin{cases} x: & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = CE_x \\ y: & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = CE_y \\ z: & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = CE_z. \end{cases}$$

Men om fältet är mycket enklare att uttrycka i kroklinjiga koordinater är det fördelaktigt att teckna differentialekvationerna i dessa riktningarna istället. Men då får man komma ihåg att förskjutningsvektorn blir

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i\hat{u}_i\mathrm{d}u_i,$$

där h_i är koordinatsystemets skalfaktorer.

Answer. $r = 4\sin^2\theta$, $\varphi = \pi/6$.

Solution. Att göra

Remarks. Uppgiften illustrerar hur man ställer upp differentialekvationerna för fältlinjer i fallet då vektorfältet enklast beskrivs i ett kroklinjigt koordinatsystem. Den illustrerar också hur en specifik fältlinje kan identifieras från ett randvillkor.