FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Veckans tal

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers

Aug 10, 2019

Variabelseparation - Elektriskt fält inuti sfär

I sfären med radien $r = a$ finns en rymdladdning med tätheten

$$\rho\left(r,\theta,\varphi\right) = \rho_0 \frac{r}{a} \sin\theta\cos\varphi, \tag{1}$$

och på sfären gäller att $\Phi\left(a,\theta,\varphi\right) = \Phi_0$. Bestäm den elektrostatiska potentialen Φ och det elektriska fältet $\vec{E}$ inuti sfären.

Hint.

- Randvillkoret är sfäriskt symmetriskt, medan källan har ett vinkelberoende av formen $\sin\theta\cos\varphi$. Ansätt därför en lösning som består av två delar, vilka var och en har en av dessa egenskaper: $\Phi = f\left(r\right) + g\left(r\right)\sin\theta\cos\varphi$. Notera att randvillkoret ger att $g(a) = 0$.
- En svårighet är att finna de separerade ekvationerna. Notera att Poissons ekvation skall gälla för alla värden på r, θ och φ.
- Undvik singulära lösningar.
- Ekvationen för g har både en partikulär- och en homogenlösning.

Answer.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right) \\ &= -\frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a\left[-3\frac{r^2}{a^2}\sin\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{a}{r} - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)\right]\end{aligned} \tag{2}$$

Solution. Poissons ekvation för det elektriska fältet $\nabla\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ger oss att

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r}{a}\sin\theta\cos\varphi \tag{3}$$

med randvillkoret att $\Phi\left(a,\theta,\varphi\right) = \Phi_0$. Vi ser här att randvillkoret är sfäriskt symmetriskt, men att källan har ett vinkelberoende av formen $\sin\theta\cos\varphi$. Vi ansätter därför en lösning som består av två delar, vilka var och en har en av dessa egenskaper

$$\Phi = f\left(r\right) + g\left(r\right)\sin\theta\cos\varphi. \tag{4}$$

Om vi applicerar Laplace-operatorn på Φ så får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(f' + g'\sin\theta\cos\varphi\right)\right]\\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left(g\cos\theta\cos\varphi\right)\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(-g\sin\theta\cos\varphi\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\left[2r\left(f' + g'\sin\theta\cos\varphi\right) + r^2\left(f'' + g''\sin\theta\cos\varphi\right)\right]\\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[g\cos\varphi\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right] - \frac{g}{r^2}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\\
&= 2\frac{f'}{r} + f'' + \left(2\frac{g'}{r} + g''\right)\sin\theta\cos\varphi + \frac{g}{r^2}\cos\varphi\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \sin\theta - \frac{1}{\sin\theta}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Vi beräknar uttrycket i den sista parentesen

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \sin\theta - \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta} = -2\sin\theta. \tag{6}$$

Alltså kan vi skriva Poissons ekvation som

$$\nabla^2\Phi = 2\frac{f'}{r} + f'' + \left(g'' + 2\frac{g'}{r} - 2\frac{g}{r^2}\right)\sin\theta\cos\varphi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r}{a}\sin\theta\cos\varphi. \tag{7}$$

Eftersom den här ekvationen skall gälla för alla värden på r, θ och φ så ger oss detta ekvationerna

$$\begin{cases} f'' + 2\frac{f'}{r} & = & 0\\ g'' + 2\frac{g'}{r} - 2\frac{g}{r^2} & = & -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r}{a}\end{cases} \tag{8}$$

Vi börjar med att lösa ekvationen för f genom att ansätta en lösning på formen $f = Ar^\nu$, men konstanten A kan vi utelämna för tillfället, så att $f' = \nu r^{\nu-1}$ och $f'' = \nu(\nu-1)r^{\nu-2}$. Detta ger oss ekvationen

$$\nu\left(\nu - 1\right)r^{\nu-2} + 2\nu r^{\nu-2} = 0, \tag{9}$$

som förenklas till

$$\nu^2 + \nu = 0, \tag{10}$$

som har lösningarna $\nu = 0$ och $\nu = -1$. Därför får vi

$$f(r) = A + \frac{B}{r}. \tag{11}$$

Här måste vi sätta $B = 0$, för att undvika att potentialen blir oändlig för $r = 0$, och $A = \Phi_0$ för att vi ska uppfylla randvillkoret $\Phi(a, \theta, \varphi) = \Phi_0$.

Vi går nu över till ekvationen för g och börjar med att bestämma en partikulärlösning på formen $g = Cr^3$. För denna lösning har vi $g' = 3Cr^2$ och $g'' = 6Cr$, vilket ger oss

$$6Cr + 6Cr - 2Cr = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r}{a}, \tag{12}$$

som har lösningen

$$C = -\frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0 a}, \tag{13}$$

och partikulärlösningen är alltså

$$g(r) = -\frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^3}{a}. \tag{14}$$

Vi behöver också bestämma lösningen till den homogena ekvationen, och därför ansätter vi $g(r) = Dr^\nu$, men för ögonblicket utelämnar vi konstanten D. Eftersom $g' = \nu r^{\nu-1}$ och $g'' = \nu(\nu-1)r^{\nu-2}$, så får vi

$$\nu(\nu-1)r^{\nu-2} + 2\nu r^{\nu-2} - 2r^{\nu-2} = 0, \tag{15}$$

vilket ger oss andragradsekvationen

$$\nu^2 + \nu - 2 = 0. \tag{16}$$

Denna har lösningarna

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}. \tag{17}$$

Alltså har vi $\nu = -2$ och $\nu = 1$, så den allmänna lösningen för g blir

$$g(r) = \frac{D}{r^2} + Er - \frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^3}{a}. \tag{18}$$

Vi sätter $D = 0$ eftersom potentialen inte kan bli singulär i $r = 0$. Vårt randvillkor vid $r = a$ säger oss å andra sidan att $g(a) = 0$, vilket ger oss

$$0 = Ea - \frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a^2, \tag{19}$$

så att

$$E = \frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a \tag{20}$$

Alltså är potentialen

$$\Phi\left(r,\theta,\varphi\right)=\Phi_0+\frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a\left(a-\frac{r^3}{a^2}\right)\sin\theta\cos\varphi. \tag{21}$$

Vi kan nu beräkna det elektriska fältet ur

$$\begin{aligned}\vec{E}=-\nabla\Phi&=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)\\&=-\frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a\left[-3\frac{r^2}{a^2}\sin\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{a}{r}-\frac{r^2}{a^2}\right)\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta}-\sin\varphi\hat{\varphi}\right)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

Remarks. Uppgiften illustrerar variabelseparation i tre dimensioner och styrkan med en bra lösningsansats. Lösningen innehåller ganska många steg och uppgiften kan därför klassificeras som svår. Ta gärna en titt på lösningen om du kör fast.