Travaux dirigés analyse convexe

Exercice 1 *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont le gradient est L-lipschitzien, c'est-à-dire que $\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L\|y - x\|$ pour tous x, y. Ici, nous considérerons la norme Euclidienne.

1. Montrer que pour tous x, y, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \leq L\|y - x\|^2$.
2. On définit $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que
$$f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)\,.$$
3. En déduire que
$$f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x\rangle dt$$
4. En utilisant la première question, montrer que
$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2\,.$$
5. On définit la fonction
$$g_x : y \mapsto f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$
Montrer que g_x a un unique minimiseur $\hat{x}$ et calculer ce minimiseur.
6. Montrer que $f(\hat{x}) \leq f(x) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x)\|^2$.
7. Proposer un algorithme pour minimiser la fonction f.

Exercice 2 *(Étude d'une fonction indicatrice convexe)*
Soit $\iota_{\mathbb{R}_+}$ l'indicatrice convexe de $\mathbb{R}_+$ définie par
$$\iota_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que $\iota_{\mathbb{R}_+}$ est bien une fonction convexe.
2. Montrer que si $x < 0$, alors $\partial\iota_{\mathbb{R}_+}(x) = \emptyset$.
3. Montrer que si $x \geq 0$, alors
$$\partial\iota_{\mathbb{R}_+}(x) = \{q \in \mathbb{R} \ : \ \forall z \geq 0, q(z - x) \leq 0\}.$$
Cela montre que $\partial\iota_{\mathbb{R}_+}(x)$ est le cône normal à $\mathbb{R}_+$ en x.

4. En déduire que
$$\partial \iota_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ \mathbb{R}_- & \text{si } x = 0 \\ \{0\} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
5. Soit $\operatorname{prox}_{\iota_{\mathbb{R}_+}}(x) = \arg\min_y \iota_{\mathbb{R}_+}(y) + \frac{1}{2}(x-y)^2$ l'opérateur proximal de $\iota_{\mathbb{R}_+}$.
   Montrer que $\operatorname{prox}_{\iota_{\mathbb{R}_+}}(x) = \max(0, x)$.

Exercice 3 *(Vitesse de convergence de la descente de gradient)*
Soit fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable avec un gradient L-lipschitzien. On suppose que f a au moins un minimiseur x_*. On considère l'algorithme du gradient défini de manière récursive par
$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k).$$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$,
$$\frac{L}{2}\|x_k - z\|^2 = \frac{L}{2}\|x_{k+1} - z\|^2 + \frac{L}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle - \langle \nabla f(x_k), z - x_k\rangle.$$
2. Montrer que
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_\star - x_k\rangle + \frac{L}{2}\|x_k - x_*\|^2 - \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_*\|^2 .$$
3. En déduire que pour tout $k \geq 1$,
$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \leq k f(x_*) + \frac{L}{2}\|x_0 - x_*\|^2 .$$
4. Montrer que
$$f(x_k) - f(x_*) \leq \frac{L\|x_0 - x_\star\|^2}{2k} .$$