

TP Econometrie - Séries Temporelles

Anna Korba : akorba@enst.fr

Avril 2016

1 TP5

1.1 Rappel

Le modèle des MCO considère que les hypothèses suivantes sont toutes respectées :

- H_1 : le modèle est linéaire en $x_{i,t}$
- H_2 : les valeurs $x_{i,t}$ sont observées sans erreur
- H_3 : $E[u]=0$, l'espérance mathématique de l'erreur est nulle
- H_4 : $E[u^t u] = \sigma^2 I_n$, la variance de l'erreur est constante (homoscédasticité)
- H_5 : $E[u_t u_{t+1}] = 0$, les erreurs sont non corrélées (ou indépendantes)
- H_6 : $Cov(x_{i,t}, u_t)$, l'erreur est indépendante de la variable explicative.

La violation de l'hypothèse H_5 concerne des séries temporelles où les éléments hors diagonale de la matrice de covariance de l'erreur sont différents non nuls. Dans ce cas les estimateurs obtenus par la méthode des MCO sont sans biais mais ne sont plus à variance minimale. Il faut donc identifier des nouveaux estimateurs et des techniques pour détecter une éventuelle autocorrélation des erreurs.

Si $E[u^t u] \neq \sigma^2 I_n$, l'estimateur des moindres carrés généralisés a les mêmes propriétés que l'estimateur MCO : il est sans biais et à variance minimale.

La détection d'une éventuelle dépendance des erreurs ne peut s'effectuer qu'à partir de l'analyse des résidus.

1.2 Test d'autocorrélation

On commence par faire la régression $y_t = \beta_0 + \beta_1 inf_t + \beta_2 def_t + u_t$ pour $t = 1 \dots n$:

```
% i3 | inf, def
y=intdef(:,2);
[n,k]=size(intdef)
X=[ones(n,1),intdef(:, [3,6])];
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*y
u=y-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k)
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=beta./std
```

Les résidus de la régression peuvent être corrélés en série. Le modèle le plus populaire et simple à tester est le modèle AR(1). Nous allons donc tester la présence de corrélations en série du type AR(1).

On suppose que les résidus s'écrivent :

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

Avec $|\rho| < 1$ (condition de stabilité), et les e_t étant indépendants, d'espérance nulle et de variance σ_e^2 .

Dans le modèle AR(1), l'hypothèse nulle est que les erreurs ne sont pas corrélées en série : $H_0 : \rho = 0$.

On va donc faire la régression $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + e_t$ pour $t = 2$, récupérer $\hat{\rho}$, et calculer la statistique de Student $t_{\hat{\rho}}$.

% calcul de u_-(t-1) puis regression de u_-t sur u_-(t-1)

```
u_=[u(2:n)]
u_lag= [u(1:n-1)]
y=u_
X=[u_lag]; %sans constante!
[n,k]=size(X)
rho=inv(X'*X)*X'*y
u=y-X*rho;
sig2=u'*u/(n-k)
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=rho./std
```

Enfin on fait le test de Student sur le coefficient ρ :

```
% test de student :on teste rho=0 et on rejette.
p=tdis_prb(t,n-k)
```

On obtient $t_{\hat{\rho}}=5.7295$ et $p = 4.6122 \cdot 10^{-7}$. On rejette donc fortement $H_0 : \rho=0$.

1.3 Transformation des données

Il faut donc maintenant transformer les données pour appliquer la méthode des moindres carrés généralisés. Si nous retenons l'hypothèse d'une autocorrélation d'ordre 1, le modèle s'écrit :

$$Y = X\beta + u$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

Avec e d'espérance nulle, et de variance constante σ_e^2 . Nous avons alors $Var(u_t) = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} = \sigma_u^2$ et $E[u_t u_{t-i}] = \rho^i \sigma_u^2$. Donc la matrice de covariance des résidus u est :

$$\Omega_u = E[u^t u] = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \rho^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{T-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice telle que $\Omega_u^{-1} = P^T P$ (décomposition de Choleski). Le modèle $PY = PX + Pu$ a ses erreurs indépendantes et homoscédastiques. Une¹ matrice P qui remplit ces conditions est

1. Toute matrice proportionnelle à P marche pour la transformation.

la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & & 0 \\ \dots & & & & 0 \\ 0 & & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquer la transformation $Y \mapsto PY$ revient à calculer la série $y_t - \rho y_{t-1}$ pour $t = 2 \dots T$ et $\sqrt{1-\rho^2}y_1$ pour la première observation. Idem pour X .

```
% transformation des donnees

% a la main:
y=intdef(:,2);
[n,k]=size(intdef)
X=[ones(n,1),intdef(:, [3,6])];

y_=[y(2:n)]
y_lag= [y(1:n-1)]
new_y=[sqrt(1-rho^2)*y(1); y_-rho*y_lag]

X_=[X(2:n,:)]
X_lag= [X(1:n-1,:)]
new_X=[sqrt(1-rho^2)*X(1,:); X_-rho*X_lag]

% avec la matrice P:
P=zeros(n,n);
v= repmat(1,1,n)
P=P+ diag(v,0)
v= repmat(-rho,1,n-1)
P=P+ diag(v,-1)
P(1,1)=sqrt(1-rho^2)

new_y_bis=P*y
new_X_bis=P*X
```

On finit par les MCO sur les données transformées.

```
% Regression MCO sur les donnees transformees

[n,k]=size(new_X)
beta=inv(new_X'*new_X)*new_X'*new_y
u=new_y-new_X*beta;
sig2=u'*u/(n-k)
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=beta./std
```

1.4 Délais distribués

On effectue la régression $i3_t = \beta_0 + \beta_1 inf_{t-1} + \beta_2 inf_{t-2} + \beta_3 def_{t-1} + \beta_4 def_{t-2} + u_t$ pour $t = 1 \dots n$:

```
y=intdef(:,2);
[n,k]=size(intdef)
X=[intdef(:, [3,6])]; %sans constantes car modele dynamique (sinon ca cr e un terme de tendance)

y=intdef(3:n,2);
X_lag= [X(2:n-1,:)]
X_lag2= [X(1:n-2,:)]
X=[X_lag X_lag2]
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*y
u=y-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k)
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=beta./std
```

La représentation des coefficients est donnée figure 1.

Testons la significativité de l'inflation et du déficit (test de Granger de causalité) : $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ puis $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$.

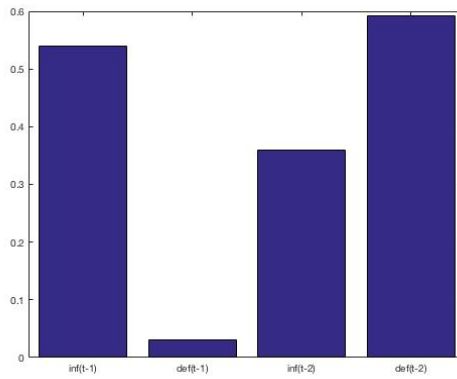


FIGURE 1: Coefficients de la régression

```

%%% test de granger de causalite %%%

% modele non contraint
SSR0=u'*u;

% modele contraint (on enleve l'inflation)
X=X(:,[2,4]);
betal=inv(X'*X)*X'*y;
u1=y-X*betal;
SSR1=u1'*u1;

F=((SSR1-SSR0)/SSR0)*((n-k)/2);
p=fdis_prb(F,2,n-k) % -> on rejette

% modele contraint (on enleve le deficit)
X=[X_lag X_lag2];
X=X(:,[1,3]);
betal=inv(X'*X)*X'*y;
u1=y-X*betal;
SSR1=u1'*u1;

F=((SSR1-SSR0)/SSR0)*((n-k)/2);
p=fdis_prb(F,2,n-k) % -> on rejette

```

On obtient respectivement $p = 1.1491^{-14}$ et $p = 1.4639^{-4}$ donc on rejette fortement H_0 à chaque fois.

2 TP6

2.1 Rappel

- Les processus auto-régressifs AR(p) s'écrivent :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Avec $E[u_t] = 0$, $E[u_t u_s] = \sigma_u^2$ si $t = s$ et 0 sinon (u bruit blanc de variance σ_u^2).

- Les processus moyennes mobiles Ma(q) s'écrivent :

$$y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \psi_q \epsilon_{t-q}$$

Avec ϵ_t un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

- Les processus ARMA(p,q) s'écrivent :

$$y_t - \sum_{k=1}^p \phi_k y_{t-k} = \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \psi_j \epsilon_{t-j}$$

Avec ϵ_t un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

Les fonctions d'autocorrélation (ACF) et autocorrélation partielle (PACF) de ces processus permettent de les identifier puisqu'elles ont les propriétés suivantes :

- Processus auto-régressifs (**AR(p)**) : L'ACF décroît de manière exponentielle. Concernant la **PACF**, les coefficients sont nuls ou non significatifs pour $|h| > p$.
- Processus à Moyennes mobiles (**MA(q)**) : La PACF décroît de manière exponentielle. Concernant l'**ACF**, les coefficients sont nuls ou non significatifs pour $|h| > q$.
- Processus (**ARMA(p,q)**) : L'ACF et la PACF sont décroissantes, mais il elles ne deviennent pas forcément nulles après un certain retard. Il est donc plus difficile d'identifier un modèle ARMA qu'un pur modèle autorégressif ou à moyennes mobiles.

2.2 Simulations de divers processus

Dans ce TP, il y a plusieurs processus à simuler, dont il faut tracer l'autocorrélation et l'autocorrélation partielle. Le code est toujours de la forme :

```
y=zeros(1000,1);
for i=2:1000;
    y(i)=0.6*y(i-1)+randn;
end;

f=figure;
plot(y)
title('AR(1)')
f=figure;
acf=sacf(y,20);
title('acf of AR(1)')
f=figure;
pacf=spacf(y,20);
title('pacf of AR(1)')
```

Que faut-il observer ?

- **AR(1)** : $y_t = \phi_1 y_{t-1} + u_t$. Un seul coefficient significatif pour la PACF.
- **MA(1)** : $y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1}$. Un seul coefficient significatif pour l'ACF.
- **AR(2)** : $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$. Deux coefficients significatifs pour la PACF.
- **ARMA(2,2)** : $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2}$.

2.3 Simulations d'autocorrélation

On crée l'AR(1) en question puis on fait la régression de $y_t = \beta y_{t-1} + u_t$:

```
n=1000
y=zeros(n,1);
u=randn(n,1);
for i=2:1000;
    y(i) = 0.8*y(i-1) + u(i) + 0.8*u(i-1);
end;

% regression de yt sur y_(t-1)
y_=y(2:n);
y_lag=y(1:n-1);
[n,k]=size(y_lag)
beta=inv(y_lag'*y_lag)*y_lag'*y_
```

On trouve $\hat{\beta}=0.88$ donc le coefficient est biaisé. En effet le processus simulé est un processus ARMA(1) donc si on le traite en AR(1), en oubliant l'autocorrélation, cela mènera à des coefficients biaisés.

2.4 AR(1)

On commence par faire la régression $\Delta inf_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta inf_{t-1}$, puis on fait le test de significativité sur $\hat{\beta}_1$:

```
load intdef.raw

[n,k]=size(intdef)

%%%%% AR(1) %%%%%

% delta_inft | delta_inft-1 (avec constante)

inf=intdef(1:n,3);
delta_inft=inf(2:n);
delta_inft_lag=inf(1:n-1);

y=delta_inft
[n,k]=size(y)
X=[ones(n,1) delta_inft_lag]
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*y
u=y-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k)
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=beta./std

% test de significativit
t=t(2)
p=tdis_prb(t,n-k)
```

On obtient $p = 8.4768^{-09}$ donc on rejette fortement $H_0 : \beta_1 = 0$. On calcule ensuite les prévisions, à savoir le vecteur $\Delta inf_{t|t-1}$, puis la RMSE $(\sum_{t=2}^n (\Delta \hat{inf}_{t|t-1} - \Delta inf_t)^2)$:

```
%pr vision
delta_inft_pr=beta(1)*X(:,1)+beta(2)*X(:,2)
diff=delta_inft_pr-y;
RMSE=norm(diff)
```

On trouve RMSE=16.

3 TP 7

On commence par charger les données, tracer la série de la courbe de Phillips, l'ACF et la PACF :

```
load phillips.raw

% On trace inf
y=phillips(:,3);
plot(y)

% On trace ACF et PACF
acf=sacf(y,20)
pacf=spacf(y,20)
```

Le graphe de l'autocorrélation indique que le processus est non-stationnaire, et nous suggère un modèle ARIMA. Pour la PACF, seuls les deux premiers coefficients sont significatifs, et pmax = 2.

Pour confirmer cela, nous allons effectuer le test du porte manteau (exemple : test de Ljung-Box). Le test du porte manteau est un test de non-corrélation de l'échantillon. Vous pouvez télécharger la fonction qstat2 sur cette page : <https://ideas.repec.org/c/boc/bocode/t961403.html> (en copiant la file url dans un nouvel onglet, vous pourrez télécharger le script qstat2.m). Cette fonction prend en paramètres le vecteur de la série et l'ordre du processus AR à tester.

```
%Test du porte manteau
```

```
[qstat,pval]=qstat2(y,1)
```

On obtient $p = 7.1425^{-07}$ donc on rejette fortement l'hypothèse nulle de non-corrélation.

Pour choisir l'ordre p de notre modèle auto-régressif (AR), nous allons utiliser les critères AIC et BIC :

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2.(p+q)}{T}$$

Avec $\hat{\sigma}^2$ la variance estimée des résidus du modèle d'ordre p : $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t$.

Les critères d'information AIC et BIC peuvent être utilisés pour diagnostiquer la qualité du modèle. Ils prennent en compte la variance résiduelle ou inexpliquée du modèle, sa complexité ainsi que le nombre d'observations utilisées. Leur minimisation est un critère pour choisir un modèle plutôt qu'un autre. A noter que le critère AIC est moins précis que le BIC mais reste communément utilisé. Je me suis donc concentrée sur celui-ci.

Voici les tests :

```
% On teste AR1:

y_=y(2:n)
y_lag=y(1:n-1)
X=y_lag
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*y_
u=y_-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k)

AIC1 = log(sig2) + (2.*(1))./n;

% On teste AR2:

y_=y(3:n)
y_lag=y(2:n-1)
y_lag2=y(1:n-2)
X=[y_lag y_lag2]
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*y_
u=y_-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k)

AIC2 = log(sig2) + (2.*(2))./n;
```

On obtient $AIC_2 < AIC_1$ donc on retient l'ordre 2 pour notre modèle AR(p).

3.1 Stationnarité

Découper l'échantillon en deux ou trois parties, calculer les moyennes et variances sur chaque échantillon :

```
%%%% Stationnarité %%%%%%

y1=y(1:floor(n/2))
y2=y(floor(n/2)+1:n)
m1=mean(y1)
m2=mean(y2)
v1=var(y1)
v2=var(y2)

y1=y(1:floor(n/3))
y2=y(floor(n/3)+1:floor(2*n/3))
y3=y(floor(2*n/3)+1:n)
m1=mean(y1)
m2=mean(y2)
m3=mean(y3)
v1=var(y1)
```

```
v2=var(y2)
v3=var(y3)
```

On remarque une grande disparité parmi les moyennes des échantillons, et le découpage en trois parties semble le plus adapté (cf la courbe de Phillips que l'on trace au début de ce TP).

3.2 Test de Dickey-Fuller

Nous allons désormais procéder à des tests de racines unitaires. L'approche la plus simple est de commencer avec un modèle AR(1) :

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + e_t \quad (1)$$

Avec e_t un processus de moyenne nulle sachant les valeurs passées de $y = \mathbb{E}[e_t | y_{t-1}, \dots, y_0] = 0$. Donc y a une racine unitaire si et seulement si $\rho=1$, donc on va tester $H_0 : \rho = 1$ versus $H_1 : \rho < 1$. En effet l'alternative $H_1 : \rho > 1$ est très peu considérée puisque cela voudrait dire que la série y serait explosive. Quand $|\rho| < 1$, y est un processus AR(1) stable, c'est-à-dire de dépendance faible ou asymptotiquement corrélé (en effet $\text{Corr}(y_t, y_{t+h}) = \rho^h \rightarrow 0$ quand $|\rho| < 1$). Une équation plus pratique à étudier est celle obtenue en retirant y_{t-1} des deux cotés dans l'équation précédente :

$$\Delta y_t = \alpha + \theta y_{t-1} + e_t \quad (2)$$

En posant $\theta = \rho - 1$. Seulement sous H_0 , y_{t-1} est I(1) (i.e la série différenciée est stationnaire) et les propriétés asymptotiques de la t-statistique changent : la distribution asymptotique de la t-statistique est connue sous le nom de distribution de Dickey-Fuller. Donc on n'utilisera plus les valeurs critiques "habituelles" mais celles de Dickey-Fuller, et à ce moment-là on procède à un test de Dickey-Fuller.

```
y_=y(2:n)
y_lag=y(1:n-1)
Delta_y=y_-y_lag
[n,k]=size(Delta_y)
X=[ones(n,1) y_lag]
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*Delta_y
u=Delta_y-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k);
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=beta./std
```

On obtient $t_{\hat{\theta}} = -2.9222$. On rejette l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta < 0$ si $t_{\hat{\theta}} < c$, où c est une des valeurs négatives données dans la table de l'énoncé. Donc ici on rejette l'hypothèse nulle au seuil de 5%.

Nous pouvons également tester la présence de racines unitaires dans des modèles dynamiques plus compliqués. Si y suit l'équation (1), avec $\rho=1$, alors Δy_t est non-corrélée en série. Nous pouvons facilement autoriser Δy_t à suivre un modèle auto-régressif en augmentant l'équation (2) avec des retards additionnels. Par exemple :

$$\Delta y_t = \alpha + \theta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + e_t$$

Sous $H_0 : \theta = 0$, Δy_t suit un modèle auto-régressif d'ordre p stable. Nous pouvons alors effectuer le t-test sur $\hat{\theta}$ comme précédemment, les valeurs critiques sont les mêmes, et ce test est appelé le test de Dickey Fuller augmenté.

```
% test augmente
y_=y(2:n)
y_lag=y(1:n-1)
Delta_y=y_-y_lag
```



```

[n,k]=size(Delta_y)
Delta_y_=Delta_y(1:n-4)
Delta_y_lag=Delta_y(2:n-3)
Delta_y_lag2=Delta_y(3:n-2)
Delta_y_lag3=Delta_y(4:n-1)
Delta_y_lag4=Delta_y(5:n)

y_lag_=y(1:n-4)

[n,k]=size(Delta_y_)
X=[ones(n,1) y_lag_ Delta_y_lag Delta_y_lag2 Delta_y_lag3 Delta_y_lag4]
[n,k]=size(X)
beta=inv(X'*X)*X'*Delta_y_
u=Delta_y_-X*beta;
sig2=u'*u/(n-k);
std=sqrt(diag(sig2*inv(X'*X)))
t=beta./std

```

On obtient $t_{\hat{\theta}}=-3.2283$ donc on rejette H_0 à 2.5%.

Plus on inclut de retards dans (2), plus on perd d'observations initiales et cela nuit à la réalisation du test. Mais de l'autre côté, si l'on inclut trop peu de retards, le test sera incorrect asymptotiquement car les valeurs critiques reposent sur la validité du modèle dynamique adopté. Pour des données annuelles, un ou deux retards peuvent suffire ; pour des données mensuelles, nous pouvons inclure douze retards. Mais il n'y a pas de règles à proprement parler pour définir le nombre de retard à inclure.

3.3 Tests de changement de structure

Le test de Chow permet de tester si les coefficients de deux séries linéaires sont égaux. On va appeler point de rupture un point avant lequel les coefficients des MCO prennent une valeur inconnue mais fixe et à partir duquel les coefficients sont à nouveau fixes mais avec une autre valeur. On note τ le point de rupture, avant ce point les coefficients sont les b_i et à partir de ce point les coefficients sont les c_i :

$$\begin{aligned} \text{avant } t_0 : y_t &= b_1 + b_2 y_{t-1} + e_t \\ \text{après } t_0 : y_t &= c_1 + c_2 y_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

Tester $H_0 : b_i = c_i$ pour tout i revient à tester $\gamma_i = 0$ pour tout i dans le modèle suivant :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \gamma_0 D_\tau(t) + \gamma_1 D_\tau(t) y_{t-1}$$

Avec $D_\tau(t) = 1$ si $t \geq \tau$ et 0 sinon. Ici on va prendre $t_0=1981$:

```

% Test de Chow

[n,k]=size(phillips)
t0= 34 %annee 1981
D_tau=[zeros(34,1) ; ones(n-34,1)]
D_tau=D_tau(1:n-1)
y_=y(2:n)
y_lag=y(1:n-1)
X=[ones(n-1,1) y_lag D_tau.*ones(n-1,1) D_tau.*y_lag]
[n,k]=size(X)

%modele non contraint

beta0=inv(X'*X)*X'*y_
u0=y_-X*beta0
SSR0=u0'*u0

%modele contraint

```

```

X=X(:, [1,2])
beta1=inv(X'*X)*X'*y_
u1=y_-X*beta1
SSR1=u1'*u1

F=((SSR1-SSR0)/SSR0)*((n-k)/1)
p=fdis_prb(F,1,n-k)

```

On obtient $F = 0.85$ et $p = 0.35$ donc on ne rejette pas l'hypothèse nulle d'égalité des coefficients.

Dans le cas où le point de rupture n'est pas connue, on peut faire un test QLR. Il s'agit en fait de la F-statistique maximale du test de Chow sur un certain échantillon de points de rupture : $QLR = \max_{\tau \in \{\tau_0, \dots, \tau_1\}} F(\tau)$. Utiliser 15% de trimming revient à prendre $\tau_0 = 0.15T$ et $\tau_1 = 0.85T$.

```

% QLR statistics

[n,k]=size(phillips);
tau0=floor(0.15*n);
tau1=floor(0.85*n);
all_chows= [];

y_=y(2:n)
y_lag=y(1:n-1)
k=4

for t=tau0:tau1;
    D_tau=[zeros(t,1) ; ones(n-t,1)]
    D_tau=D_tau(1:n-1)

    X=[ones(n-1,1) y_lag D_tau.*ones(n-1,1) D_tau.*y_lag]

    beta0=inv(X'*X)*X'*y_
    u0=y_-X*beta0
    SSR0=u0'*u0

    X=X(:, [1,2])
    beta1=inv(X'*X)*X'*y_
    u1=y_-X*beta1
    SSR1=u1'*u1

    F=((SSR1-SSR0)/SSR0)*((n-k)/1)
    all_chows(end+1) = F
end;

QLR=max(all_chows)
[QLR, tau]=max(all_chows)

```

On rejette H_0 à 1% car $QLR > c_{0.001}$ puisqu'on obtient $QLR = 27.2862$ et $c_{0.001} = 7.78$ avec deux restrictions; et la date de rupture est $\tau = 10$.