Estatística e Informática

Aula 06 - Probabilidade

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(20-05-2021)

Revisão sobre Teoria dos Conjuntos

Definições

Conjuntos: é uma coleção de qualquer tipo de objetos – pessoas, animais, plantas, fenômenos, estímulos, respostas, traços genéticos, métodos, ideias e possibilidades lógicas. Dizemos que um conjunto está bem definido quando está claro que um objeto pertence ou não pertence ao conjunto. A ambiguidade não é permitida.

- Conjunto dos números 2,3,5,7.
- Conjunto de alunos dessa sala.
- Conjunto de meses que se iniciam pela letra "J".
- Conjunto de números pares.
- Conjunto de árvores nessa sala.

Elemento (ou membro): é o nome que se dá a cada objeto do conjunto.

Conjunto finito: contém um número finito de elementos. Conjunto dos números 2,3,5,7. Conjunto de alunos dessa sala. Conjunto de meses que se iniciam pela letra J.

Conjunto infinito: contém um número infinito de elementos. Conjunto de números pares.

Conjunto vazio: não contém elementos Conjunto de árvores assistindo essa aula no Google Meet.

Notações e Símbolos

Conjuntos: São representados por letras maiúsculas tais como $A, B, C, \dots$.

Elementos: São representados por letras minúsculas tais como $a, b, c, \dots$.

Conjunto vazio: é representado pelo zero cortado por uma barra, é o símbolo padrão ϕ ou $\{\}$. É aquele desprovido de elementos.

Os elementos de um conjunto são reunidos por chaves. Conjunto dos números 2,3,5,7:

$A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow$ Forma Tabular.

$A = \{x | x \text{ é nº primo menor que } 10\} \rightarrow$ Forma Construção.

Forma de construção: Para conjuntos grandes devemos caracterizar seus elementos por meio de afirmações matemáticas, pois, por exemplo, somos incapazes de relacionar todos os números maiores que 5, uma vez que este conjunto é infinito, assim, introduzimos um elemento variável, x, e definimos como:

$$A = \{x|x > 5\}$$

Lê-se "o conjunto de todo os números x tal que, x seja maior que 5".

Conjunto solução: A teoria dos conjuntos pode ser utilizada para apresentar as soluções de problemas matemáticos. Por exemplo:

$$A = \{x|x^2 = 4\}$$

$$A = \{-2, 2\}$$

$$B = \{t|3t – 4 = 5\}$$

$$B = \{3\}$$

$$C = \{x|x^2 < 4\}$$

$$C = \{x| -2 < x < 2\}$$

Pertinência

Para indicar que um objeto é elemento de um conjunto, usamos o símbolo de pertinência.

$\in$ (peano).

$$a \in T$$

significa que **"a é elemento do conjunto T"** ou **"a pertence a T"**.

O oposto pode ser expresso por $\notin$, significando **"não é elemento"** ou **"não pertence a"**.

$$5 \in \aleph$$

$$\frac{1}{2} \in \Re$$

$$\frac{1}{2} \notin \aleph$$

Continência

Subconjunto: Para um conjunto A contendo somente elementos de um conjunto B, mas não necessariamente todos os membros de B, A é subconjunto de B.

$$A \subset B$$

ou

$$B \supset A$$

E dizemos que **"A está contido em B"** ou **"B contém A"**. A é chamado de **subconjunto** de B ou B é um de **superconjunto** A.

Essa definição de subconjunto nos permite dizer que um conjunto é subconjunto de si mesmo:

$$B \subset B$$

O conjunto vazio é considerado subconjunto de qualquer conjunto, isto é

$$\phi \subset A$$

Igualdade entre conjuntos: Dois conjuntos são ditos iguais, em símbolos:

$$A = B$$

se, e somente se:

$$A \subset B \text{ e } A \supset B$$

.

Os conjuntos contiverem exatamente os mesmos elementos.

Se x for um elemento, então $x \in A$ impclica que $x \in B$ e vice-versa.

de forma análoga, se $x \notin A$ impclica que $x \notin B$

Exemplo

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3\}$$

Conjunto Universo ou universal: Formado por todos os elementos que têm uma característica desejada:

Notação: U ou $\mho$:

$$U \supset A \supset \phi, \forall A$$

.

Conjunto potência ou **conjunto das partes**: Seja A um conjunto finito, define-se o conjunto das partes de A ou conjunto potência como sendo o conjunto cujos elementos são todos os possíveis subconjuntos formados com os elementos de A:

Notação $P(A) = 2^n = a$ on de n é o número de elementos do conjunto A:

Exercício:

Se $B = \{1, 2, 3\}$ qual o conjunto potência de B?

Subconjunto com 0 elementos = ϕ Subconjunto com 1 elementos ={1}; {2}; {3} Subconjunto com 2 elementos= {1, 2}; {1, 3}; {2, 3} Subconjunto com 3 elementos {1, 2, 3}

$$P(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Observe que 3 é diferente de $\{3\}$, pois 3 é um elemento e $\{3\}$ é um conjunto.

Podemos dizer que:

$3 \subset \{1, 2, 3\}$, porém $3 \in \{1, 2, 3\}$

Conjuntos Disjuntos: São aqueles que não têm elementos comum, ou seja, $A \neq B$.

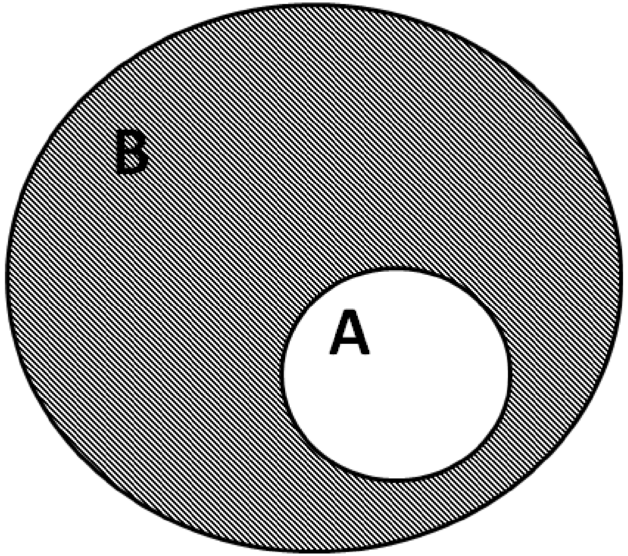
A={1,2,3} e B={4,5,6}, assim *A e B são disjuntos*.
A={1,3} e B={x}, assim *A e B são disjuntos*.
A={2,3} e B={4,3}, assim *A e B não são disjuntos*.

Diagrama de Venn-Euler

Conjuntos de qualquer tipo de elementos são representados por conjunto de pontos. Para simplificação do desenho, são utilizados pontos em um **círculo** ou em um **retângulo**.

Tal representação é chama de **diagrama de Venn-Euler** que são representações geométricas de conjuntos e seus elementos bem como das relações destes conjuntos.

$A \subset B$



Operações com conjuntos

União ou Reunião (OU)

Com dois conjuntos A e B, podemos sempre formar um novo conjunto C, por exemplo, simplesmente pelo agrupamento de seus elementos. Chamamos a esse novo conjunto de união, e escrevemos simbolicamente:

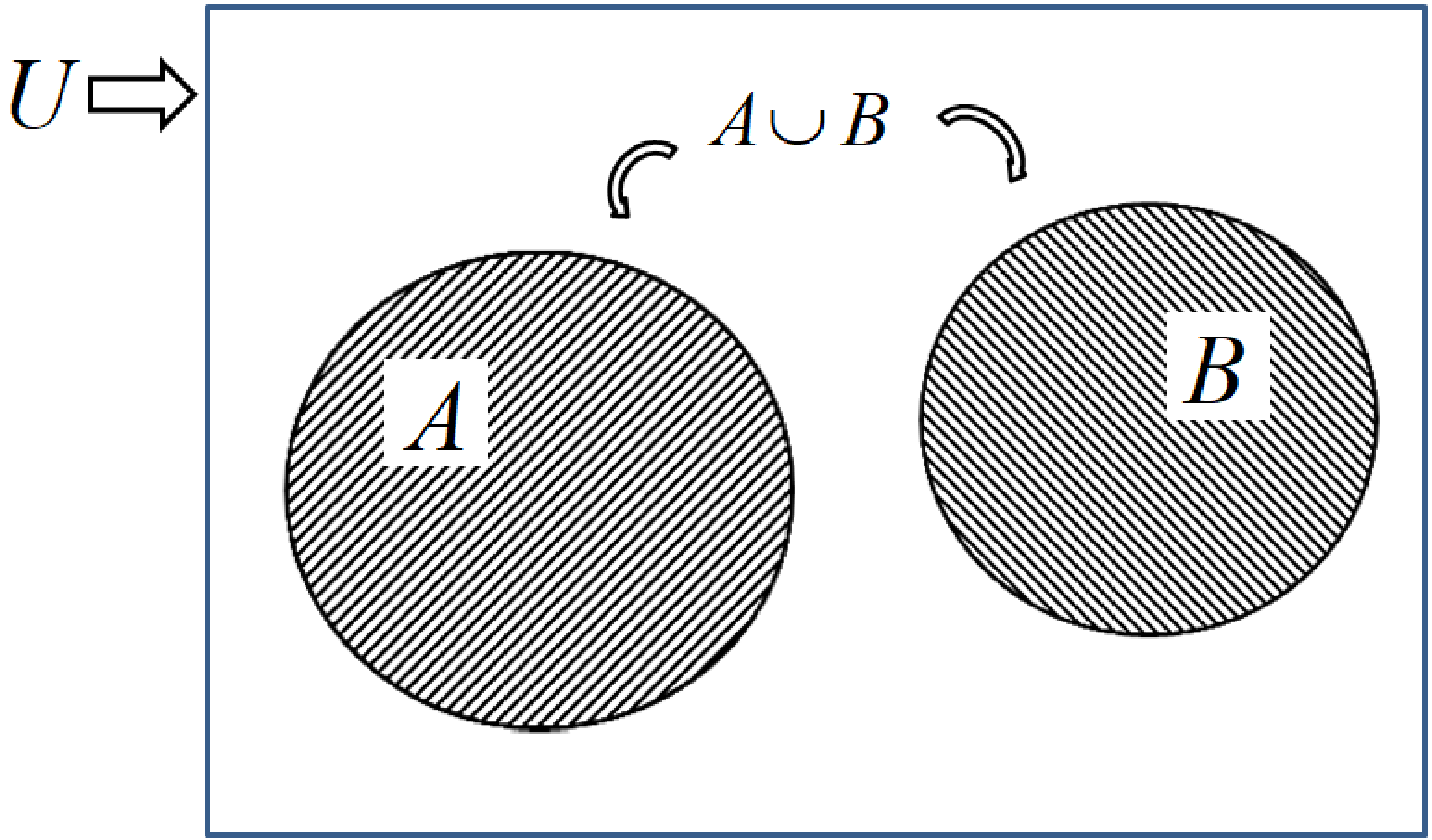
$$C = A \cup B$$

Lemos **"A União B"** ou **"A Reunião B"**, ou seja, o conjunto C contém exatamente os elementos que estão em A ou em B, ou em **ambos**.

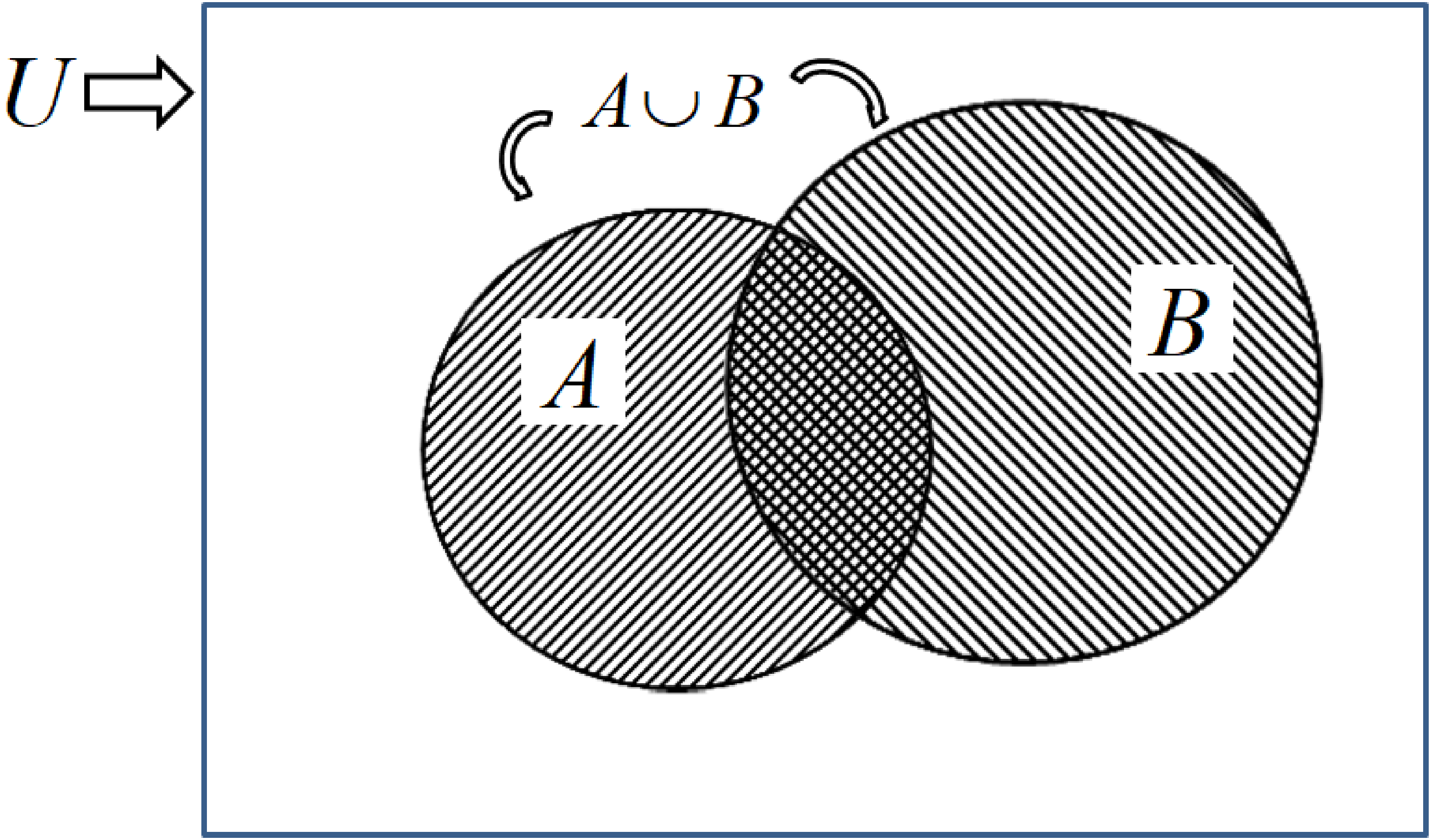
A operação de União assemelha-se à adição. Entretanto, devemos observar que:

$A \cup A = A$ e se $B \subset A$, então:

$$A \cup B = A$$

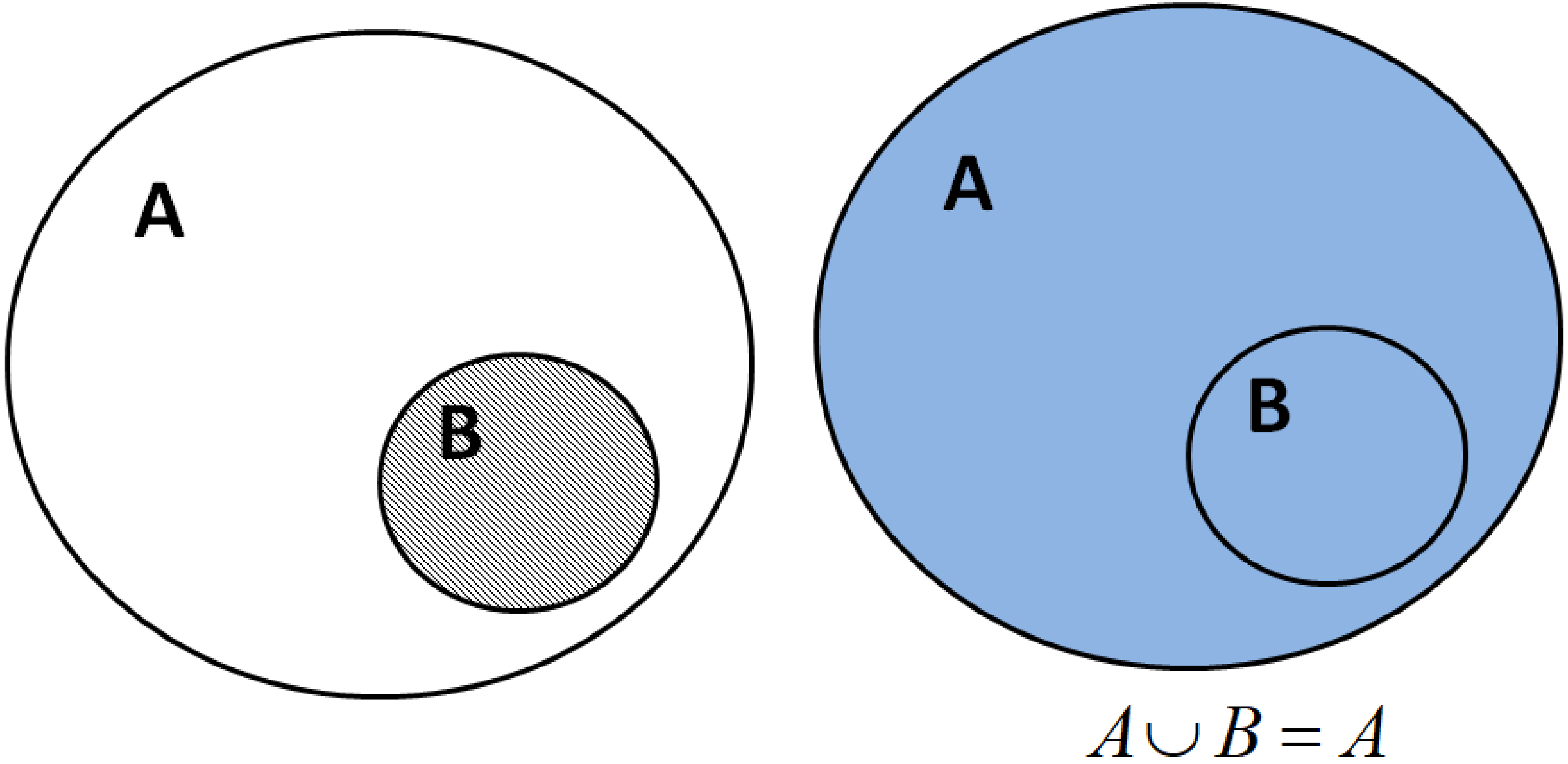


$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } (x \in A, x \in B)\}$$



$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } (x \in A, x \in B)\}$$

$A \cup A = A$ e se $B \subset A$, então: $A \cup B = A$



Propriedades da União

i) Comutativa:

$A \cup B = B \cup A$

ii) Associativa

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup B \cup C)$

iii) $A \cup \phi = \phi \cup A = A, \forall A$

iv) $A \cup U = U \cup A = U, \forall A$

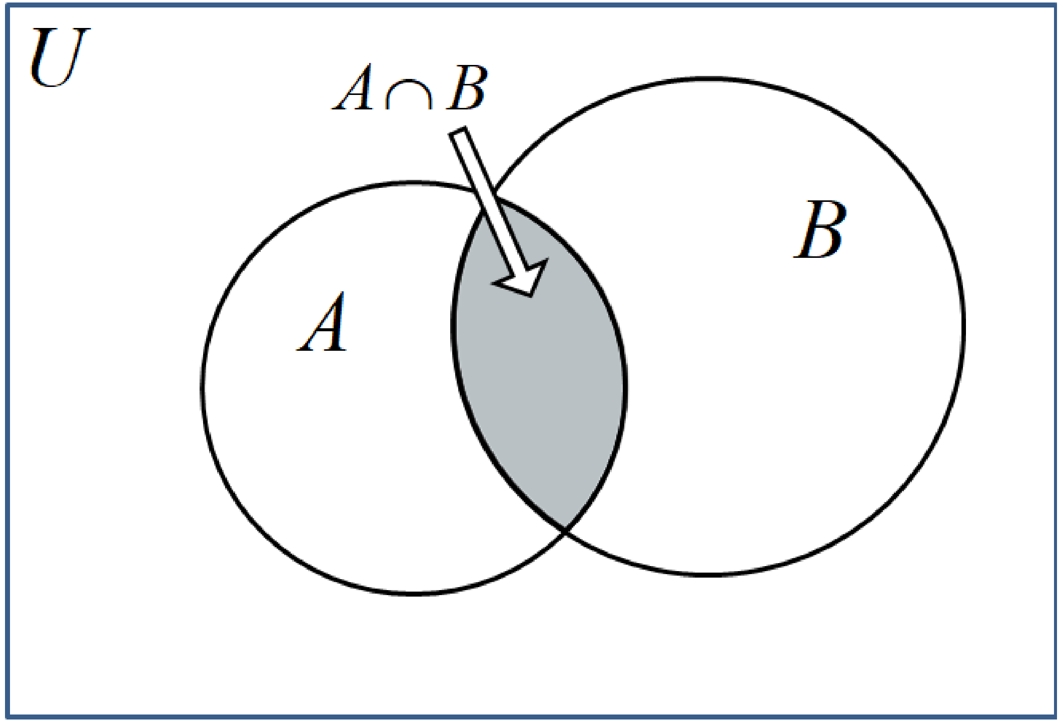
Interseção (E)

Em analogia, imaginemos duas retas que se interceptam, as duas retas podem ser consideradas como conjuntos infinitos de pontos. Os dois conjuntos têm um ponto em comum o ponto de interseção.

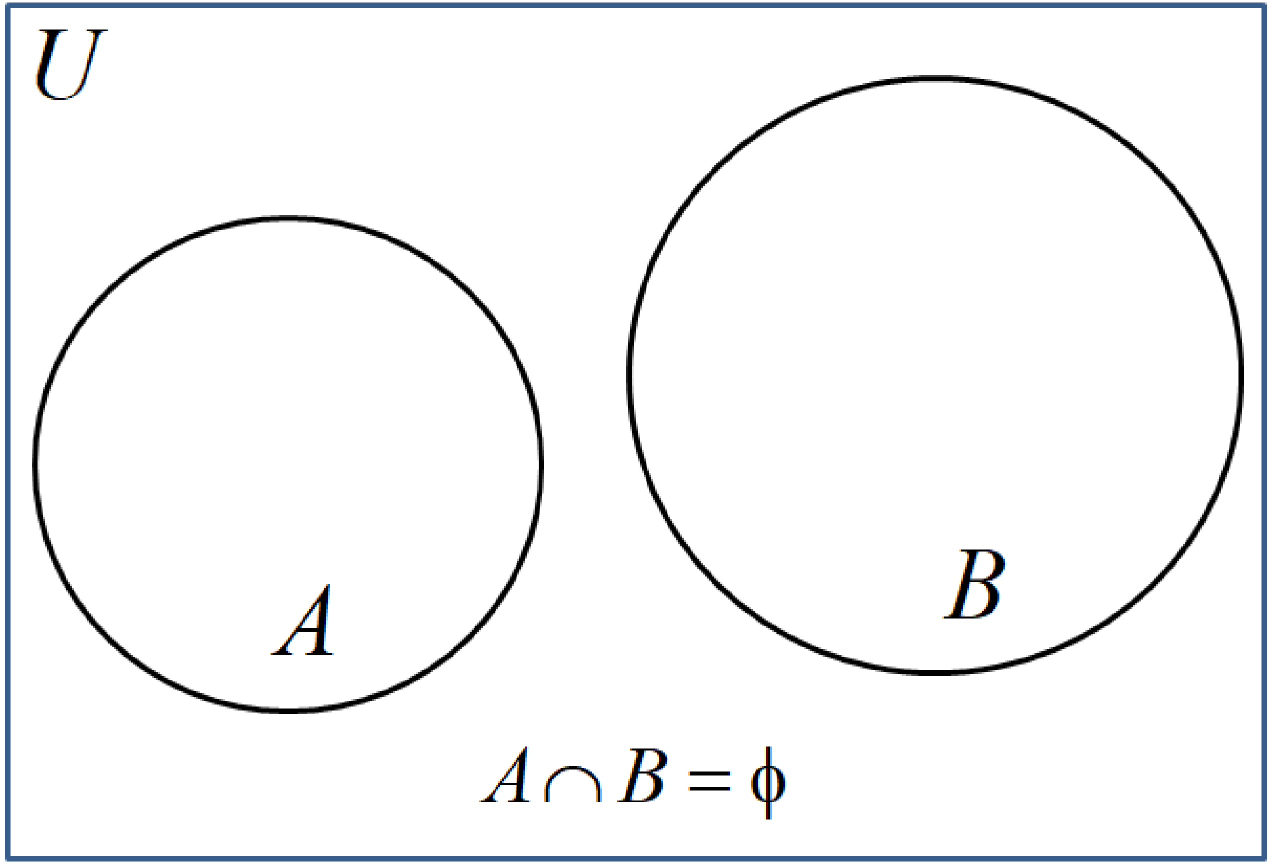
Generalizando, sejam A e B dois conjunto quaisquer, podemos estar interessados em saber se os dois conjuntos estão sobrepostos, isto é, se os dois conjuntos possuem elementos em comum, seja ele vazio ou não, a interseção de A e B escrevemos:

$$D = A \cap B$$

Lemos **"D é igual a A interseção B"**, ou **"A inter B"**.



$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$



Neste caso, quando dois conjuntos não possuem elementos em comum, então D é um conjunto vazio, os dois conjuntos são então chamados de **disjuntos**.

Propriedades da Interseção

i) Comutativa:

$A \cap B = B \cap A$

ii) Associativa

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap B \cap C)$

iii) $A \cap \phi = \phi \cap A = \phi, \forall A$

iv) $A \cap U = U \cap A = A, \forall A$

Operações com conjuntos

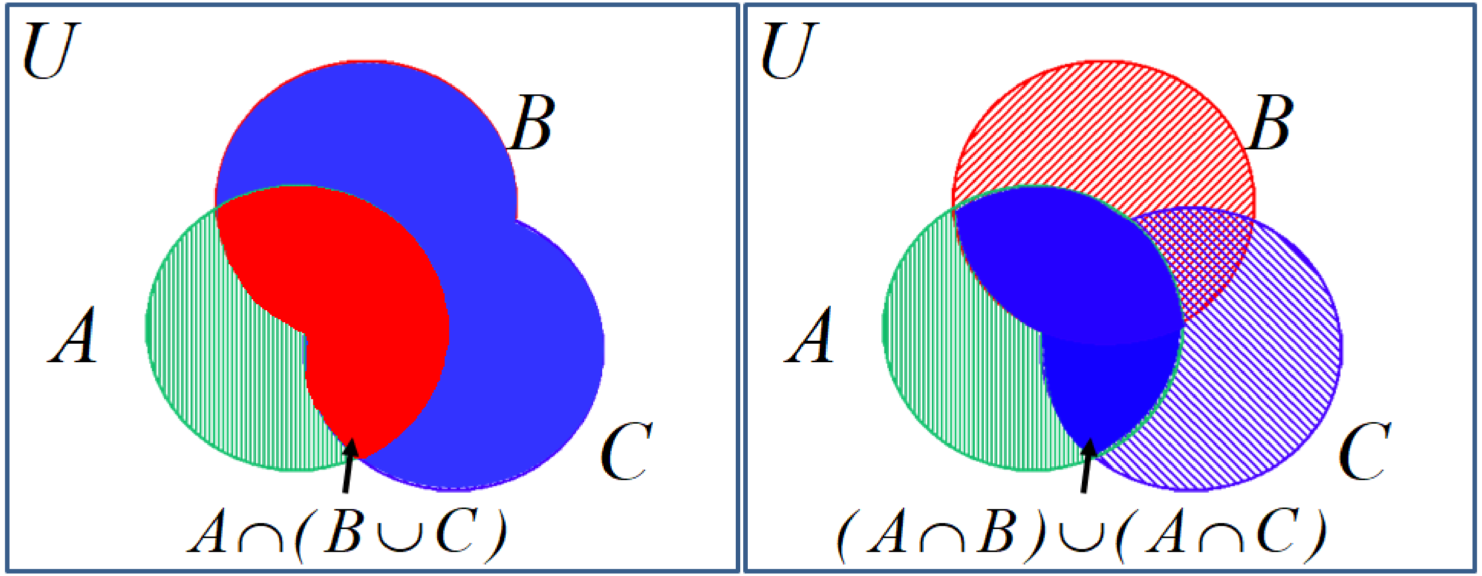
1) Primeira Lei Distributiva

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

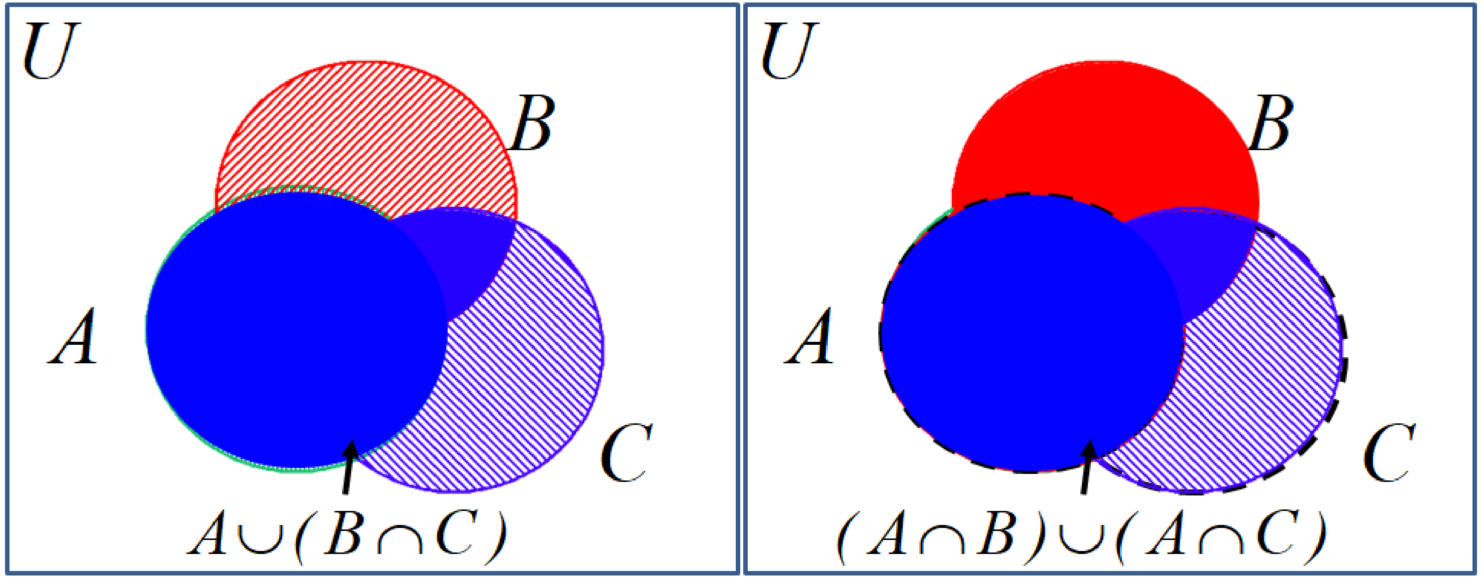
2) Segunda Lei Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1) Primeira Lei Distributiva Dados 3 conjuntos, A, B e C, podemos demonstrar que:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



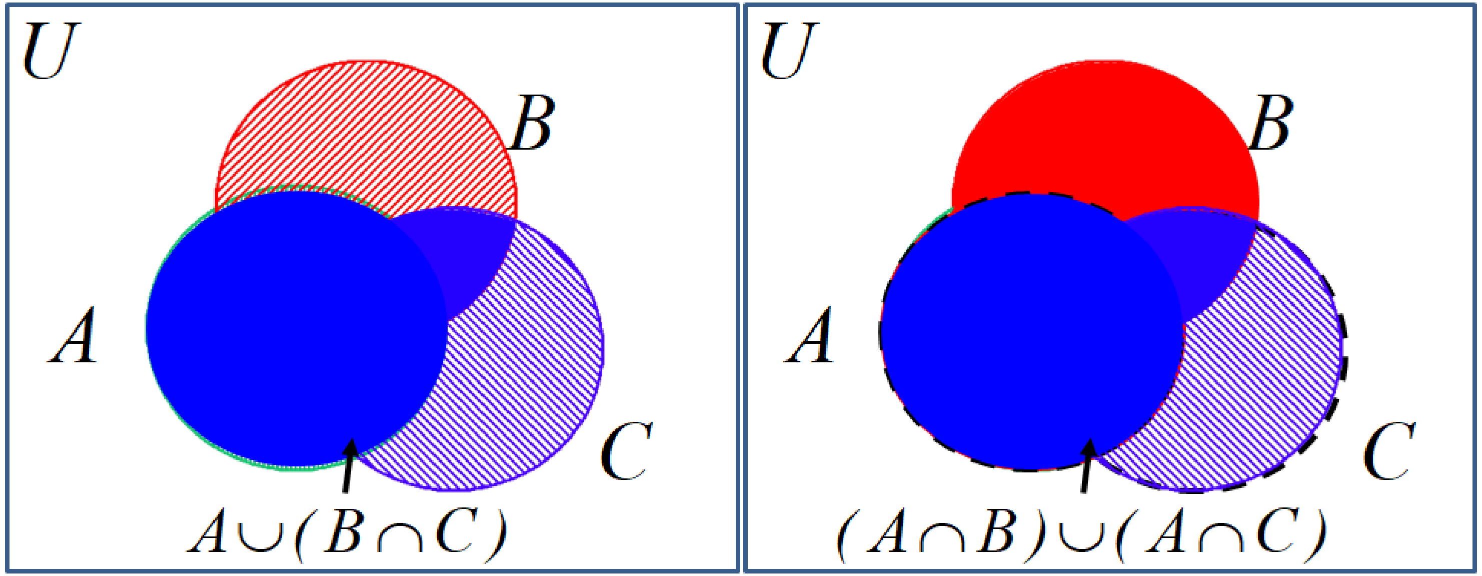
2) Segunda Lei Distributiva Dados 3 conjuntos, A, B e C, podemos demonstrar que:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Conjunto Complementar

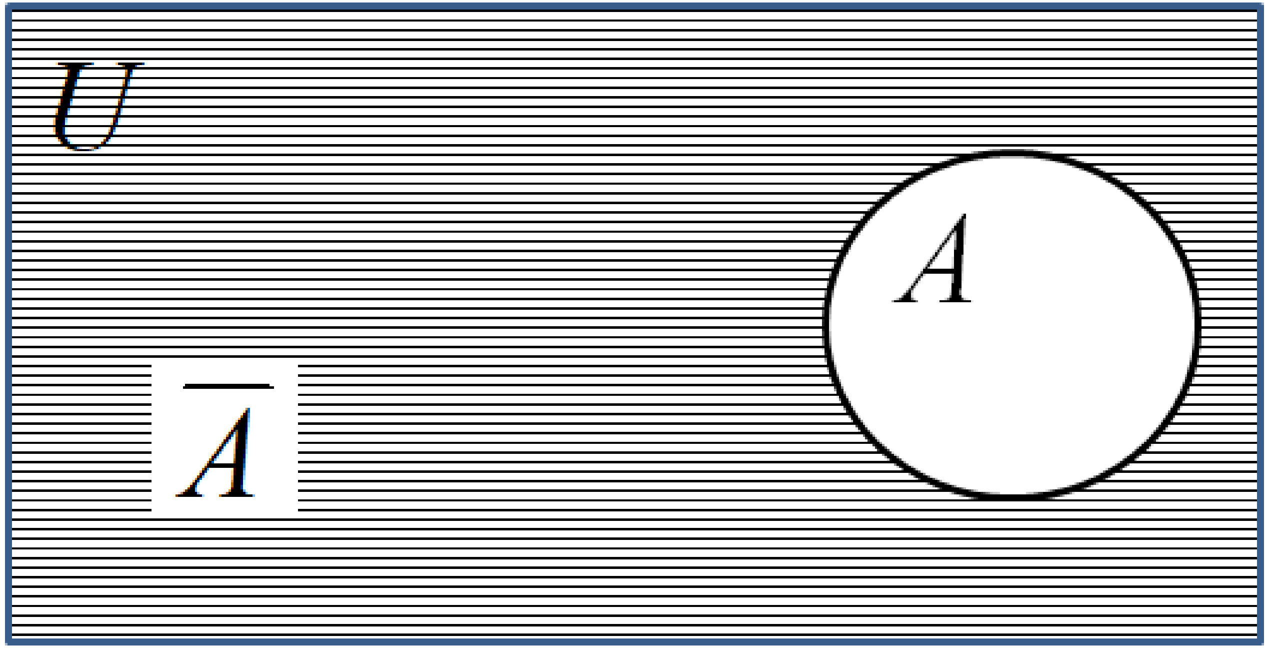
Conjunto Complementar: Seja A um subconjunto de U , isto é $A \in U$. Então estamos interessados nos elementos de U que não pertencem a A. Ele formam um novo conjunto, que é chamado **"o complementar de A em U"**. Representado por: $\bar{A}$ ou A^c.

2) Segunda Lei Distributiva Dados 3 conjuntos, A, B e C, podemos demonstrar que:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Conjunto Complementar

Conjunto Complementar: Seja A um subconjunto de U , isto é $A \in U$. Então estamos interessados nos elementos de U que não pertencem a A. Ele formam um novo conjunto, que é chamado **"o complementar de A em U"**. Representado por: $\bar{A}$ ou A^c.



$$\bar{A} = \{x | x \in U, x \notin A\}$$

Definido a operação de interseção, observe que se A for um subconjunto de um conjunto universo U e $\bar{A}$ o complemento de A, então:

i) $A \cap \bar{A} = \phi, \forall A$

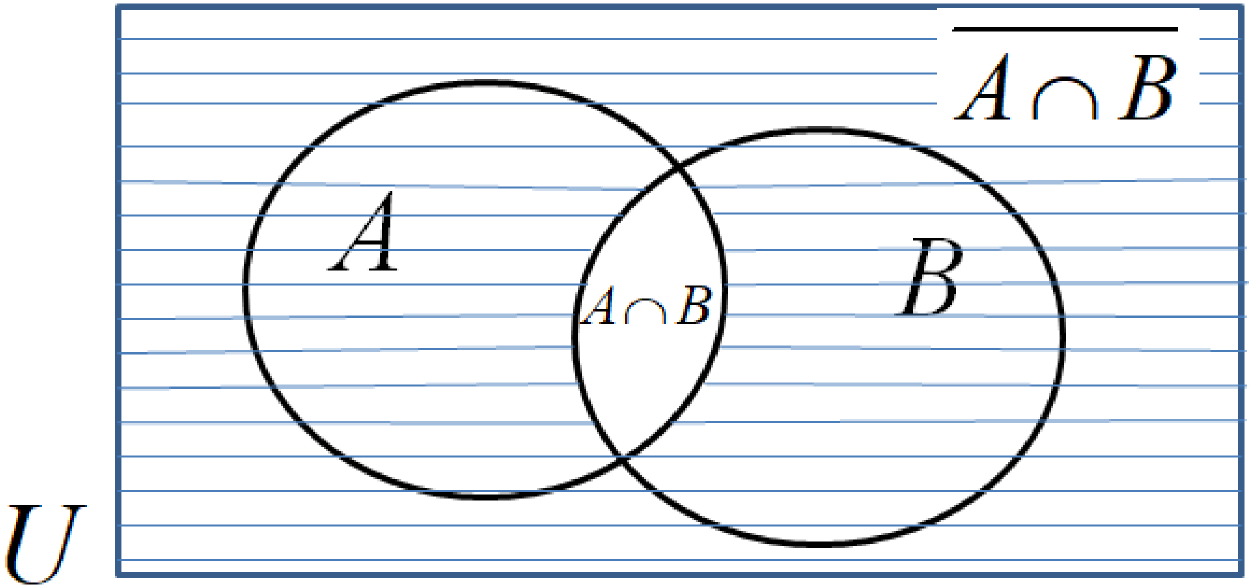
ii) $A \cup \bar{A} = U, \forall A$

Utilize o diagrama de Venn para provar as propriedades:

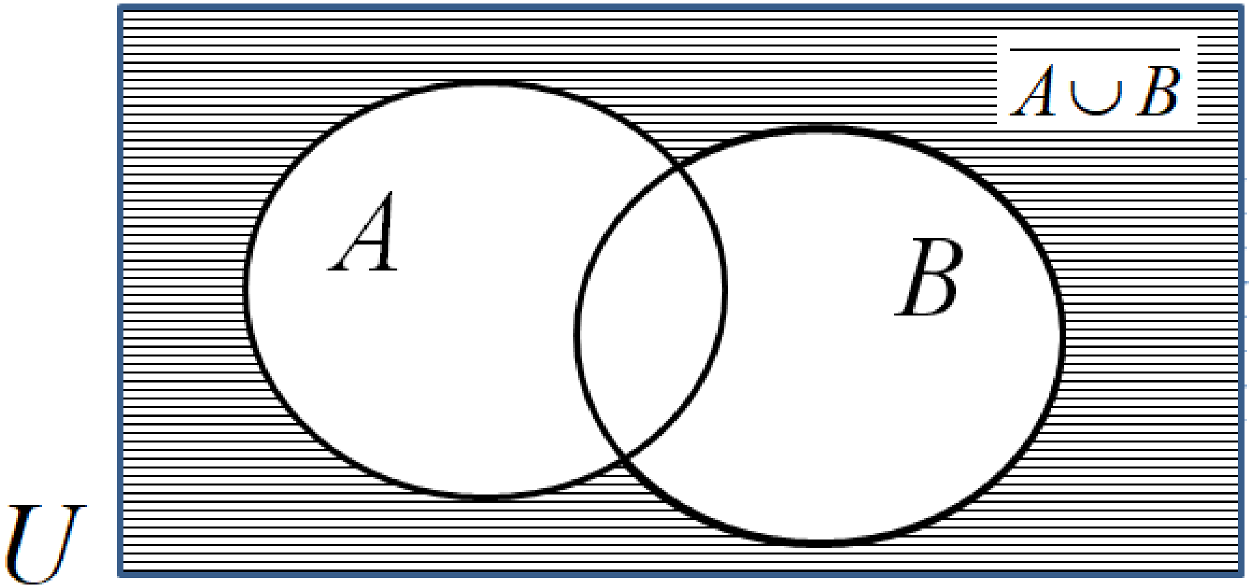
$a)(A \bar{\cap} B) = \bar{A} \cup \bar{B}$

$b)(A \bar{\cup} B) = \bar{A} \cap \bar{B}$

$(A \mathbin{\bar{\cap}} B) = \bar{A} \cup \bar{B}$



$(A \bar{\cup} B) = \bar{A} \cap \bar{B}$



Exercícios

1) Numa escola mista há 30 meninas, 21 crianças ruivas, 13 meninos não ruivos e 4 meninas ruivas. Pergunta-se:

a)Quantos são os meninos ruivos?
b)Quantas são as meninas não ruivas?
c)Quantas crianças há na escola?
d)Quantas crianças são ruivas ou meninas?
e)Quantas crianças não são ruivas ou meninas?
f)Quantas crianças não são, ruivas ou meninas?

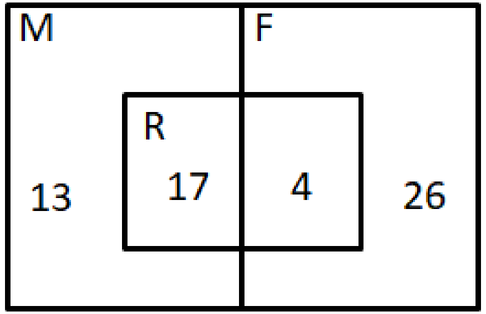
2) Numa comunidade de animais são consumidas 3 espécies de plantas A, B e C. Uma pesquisa apresentou os seguintes resultados:

Alimentos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A e B e C	nenhum dos três
Número de Animais que consomente	100	150	200	20	40	30	10	130

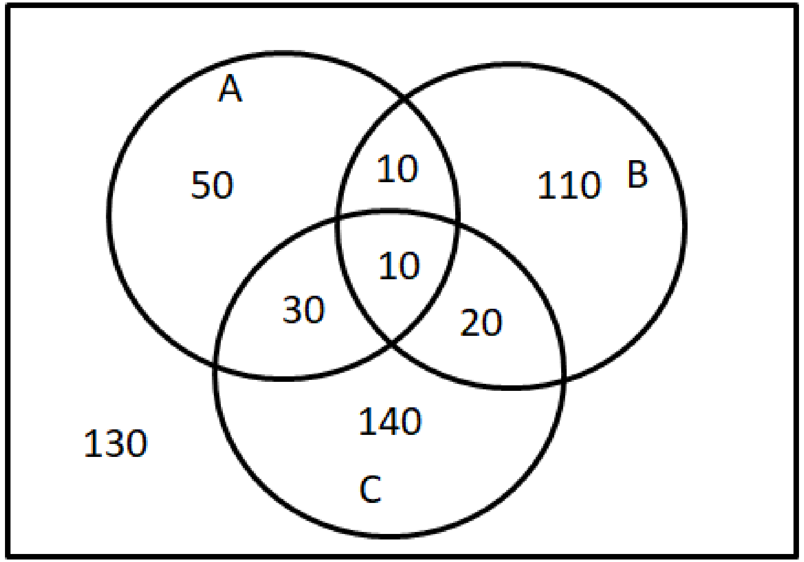
a) Quantos animais foram amostrados?
b) Quantos animais consomem somente 2 espécies de plantas?
c) Quantos animais não consomem a planta B?
d) Quantos animais não consomem A ou não consomem B?

Respostas

1) Respostas
   a) 17
   b) 26
   c) 60
   d) 47
   e) 43
   f) 13



2) Resposta:
   a) 500
   b) 60
   c) 350
   d) 480



Probabilidade

Experimentos: fazer ou observar alguma coisa sob certas condições, resultando em algum estado final de acontecimentos ou resultados. Na prática, os experimentos não são precisamente repetíveis, mesmo sob condições supostamente idênticas.

Fenômeno aleatório: É a situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza, pois envolve a eventualidade (**experimento aleatório**). Apesar do experimento ter sido realizado em condições supostamente controladas, existem fatores afetando os resultados, mas não se conhece ou não se sabe como controlá-los.

Germinação de sementes

TCH

Ganho de peso bovino

Espaço amostral $(\mho$ **ou** $S)$: é o conjunto de todos os resultados possíveis de um certo fenômeno aleatório, é o conjunto de todos os elementos que possuem a característica em estudo representada pela letra ômega $\mho$ ou pelo S.

Assim, no lançamento de um dado, o espaço amostral é:

$$\mho = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é:

$$\mho = \{H, T\}$$

Onde H representa Cara e T representa Coroa.

No lançamento de duas moedas o espaço amostral é:

$$\mho = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Evento simples ou evento elementar (e): É cada resultado possível, ou seja, é o conjunto de resultados possíveis. Assim, para o lançamento de duas modeas, temos:

e_1

e_2

e_3

e_4

Evento (E): Qualquer subconjunto do espaço amostral.

Assim, para o lançamento de um dado, temos os eventos:

a) sair um número par:
R: $E_1 = \{2, 4, 6\}$

b) sair um número menor que 3:
R: $E_2 = \{x | x < 3\} = \{1, 2\}$

c) sair um número menor que 3 ou primo:
R: $E = \{x | x < 3 \text{ ou } x = \text{ primo } \} = \{1, 2, 3, 5\}$

Probabilidade de um evento $(P(E))$

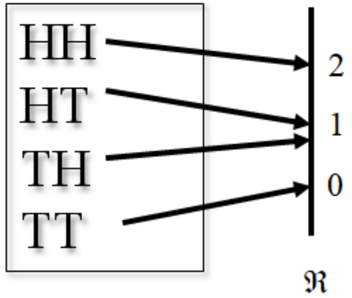
A probabilidade é uma função $P(.)$ que atribuí valores numéricos a um determinado evento (E).

É uma medida numérica de **"quão provável"** é a ocorrência do evento na excussão do experimento, é a proporção de vezes que o evento é esperado ocorrer, quando o experimento é repetido sob idênticas condições.

A determinação das probabilidade de um evento depende da natureza do experimento e do espaço amostral associado.

Supondo o lançamento de duas moedas "não viciadas" (honestas). Temos o espaço amostral:
$\mho = \{HH, HT, TH, TT\}$.

A título de exemplificação, vamos definir uma variável **aleatória (v.a.)** como X que representa o **número de caras**, temos:



X	*Pr (X = x)*
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Ao conjunto $\{x|P(X = x)\}$ denominamos função de probabilidade da variável aleatória X.

Probabilidade como Resultados Elementares Igualmente Prováveis

Resultados elementares igualmente prováveis

Conclusões baseadas em dados empíricos, oriundos de uma observação experimental, são encerradas com incerteza que é expressa em termos de probabilidade. Assim, a atribuição é baseada nas características teóricas da realização do fenômeno.

Definição de Laplace de Probabilidade

> "Quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos igualmente possíveis".

Ao jogarmos uma moeda honesta (**"não viciada"**), não podemos afirmar que cairá Cara (H) ou Coroa (T).

Por assim definimos a Probabilidade de H como:

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo: No lançamento de um dado com os lados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual a probabilidade de cair Cara, $[P(H)]$?.

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{0}{6} = 0$$

Chamamos esse tipo de **Evento Impossível**

Exemplo: No lançamento de um dado com os lados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual a probabilidade de cair um número entre 1 e 6?

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{6}{6} = 1$$

Chamamos esse tipo de **Evento Certo**.

Probabilidade de um Evento

> Assim, a probabilidade de um evento E $[P(E)]$ é um número entre 0 e 1, quanto mais próximo a 1, maior a chance de ocorrência.

A proporção de vezes que um evento simples pode ocorrer pode ser determinada sem executar o experimento.

Portanto, se $\mho$ consiste de k eventos simples $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ que são **igualmente prováveis**, a probabilidade de cada e_i é $\frac{1}{k}$ se E consiste de m desses k elementos, então temos:

$$P(E) = \frac{\text{nº de elementos em E}}{\text{nº de elementos em } \mho} = \frac{m}{k}$$

Portanto $P(.)$ é denominada probabilidade se, e somente se:

$i)$ $0 \leq 0 \leq 1, \forall E \subset \mho$.

$ii)$ $P(\mho) = 1$ assim como, $P(\phi) = 0$

$iii) P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(\cup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)$ com os eventos $E_i s$ **disjuntos**.

Exemplos

1) Descreva o espaço amostral e a probabilidade de sair pelo menos uma face cara no lançamento de uma moeda duas vezes.

2) Em um lote de 20 animais existem 5 doentes, ao escolhermos 4 animais desse lote ao acaso, de modo que a ordem dos elementos seja irrelevante:

a) Qual a probabilidade de 2 animais doentes na amostra?
b) Qual a probabilidade de 4 animais doentes?

Teorema 1

Se ϕ for espaço amostral vazio:

$$P(\phi) = 0$$

Demonstração:

Para qualquer evento A, podemos escrever:

$A = A \cup \phi$, com A e ϕ disjuntos, apresentado na propriedade (iii), temos:

$P(A) = P(A) + P(\phi)$, como cnclusão imediata, temos:

$P(\phi) = 0$, mas se $P(A) = 0$, não é verdadeiro que $A = \phi$, existem situações que atribuiremos $P(E) = 0$ para um evento que pode ocorrer.

Teorema 2

Se $\bar{A}$ for o evento complementar de A, então:

$$P(A) = 1 - P(A)$$

Demonstração:

Podemos escrever:

$\mathfrak{U} = A \cup \bar{A}, \forall A,$

Empregando a propriedade 2 e 3, temos:

$P(\phi) = P(A) + P(\bar{A})$

$1 = P(A) + P(\bar{A})$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$, assim, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Essa propriedade é importante, pois, muitas vezes é mais simples calcularmos a $P(\bar{A})$ do que $P(A)$.

Propriedade da multiplicação (E)

Dados dois eventos A e B de interesse, qual a probabilidade de ocorrência de ambos? Se esses eventos são **independentes**, a probabilidade de ocorrência de ambos é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo: Jogamos duas moedas, honestas, qual a probabilidade de ambas as faces serem cara (H).

$P(H \cap H) = P(H) \cdot P(H)$

$P(H \cap H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(H \cap H) = \frac{1}{4}$

HH
HT
TH
TT

Propriedade da adição (OU)

Se os eventos A e B são **disjuntos**, ou seja:

$A \cap B = \phi$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemplo: Jogamos um dado, qual a probabilidade de sair 5 ou 6 ?

$P(5\ cup6) = P(5) + P(6)$

$P(5\ cup6) = \frac{1}{6} +\ frac16$

$P(5\ cup6) = \frac{1}{3}$