Estatística e Informática

Aula 12 - Comparação de Parâmetros

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(06-06-2024)

Comparações de parâmetros de duas populações

Suponha duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2 ou seja, $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$, respectivamente, de uma população com distribuição $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e de população com distribuição $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ ou seja } \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ ou seja } \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1\right)$$

Estatística do teste:

Sendo s_1^2 e s_2^2 as variâncias, respectivamente das amostras n_1 e n_2, o quociente

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$$

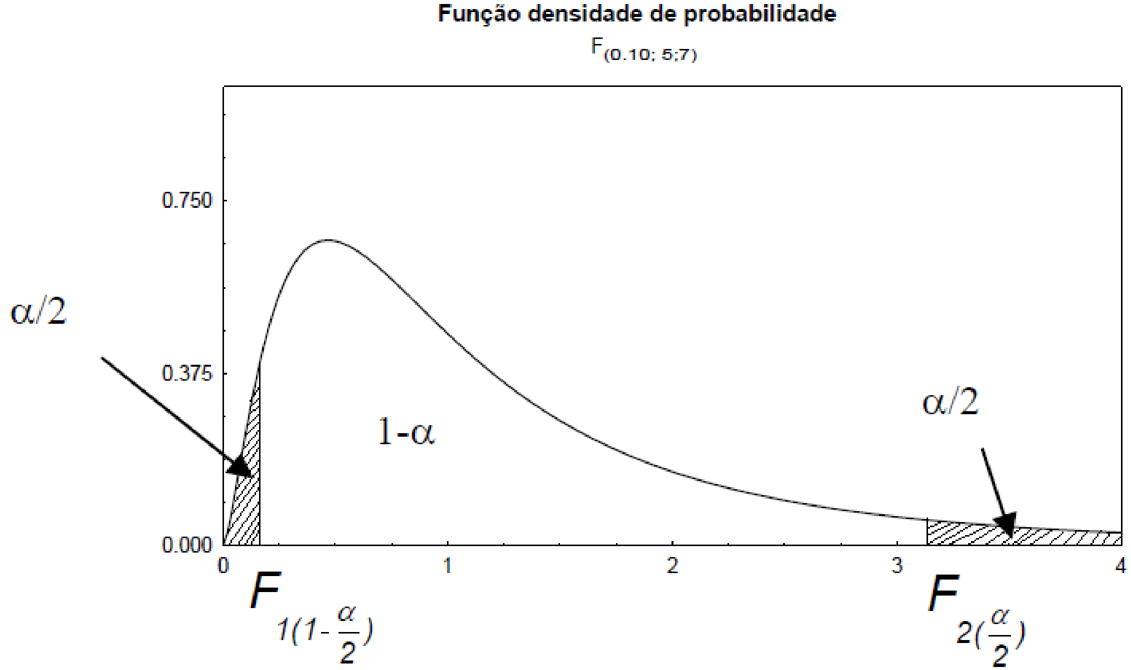
Segue a distribuição de F (Snedecor) com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade (GL), tem a denotação $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tem-se que

$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Construção da região crítica

Fixado α, os pontos críticos serão F_1 e F_2 da distribuição F, tais que:



Se $\alpha = 10\%$, pode-se, utilizando a Tabela da distribuição F, encontrar diretamente $F_2(5\%)$. Para encontrar $F_1(95\%)$ utiliza-se a propriedade:

$$F_{(1-\alpha;\ n_1-1,\ n_2-1)} = \frac{1}{F_{(\alpha;\ n_2-1,\ n_1-1)}}, \text{ assim: } F_{(0{,}95;\ n_1-1,\ n_2-1)} = \frac{1}{F_{(0{,}05;\ n_2-1,\ n_1-1)}}$$

Exemplo: Construir a região crítica para o caso abaixo:

Se $n_1 - 1 = 5$ e $n_2 - 1 = 7$ dado $\alpha = 10\%$

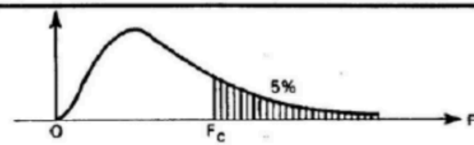
$F2_{(0{,}05;\ 5,\ 7)} = 3,97$ olhamos na tabela

Tabela - Distribuição F-Snedecor

TÁBUA VI

Distribuição de Fisher-Snedecor-1

Valores críticos de F tais que $P(F > F_c) = 0{,}05$



Graus de liberdade do denominador de F : n_2	GRAUS DE LIBERDADE DO NUMERADOR DE F : n_1																						Graus de liberdade do denominador de F : n_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24	30	40	60	120	∞	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,4	245,9	246,5	247,3	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3	1
2	18.51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42	19,43	19,43	19,44	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	2
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,72	8,70	8,69	8,67	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,86	5,84	5,82	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,62	4,60	4,58	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36	5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67	6
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,22	3,20	3,17	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93	8
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	3,01	2,99	2,96	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71	9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,87	2,85	2,83	2,80	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	10
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,72	2,70	2,67	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40	11
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,62	2,60	2,57	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30	12
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,53	2,52	2,48	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	13
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,46	2,44	2,41	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13	14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42	2,40	2,39	2,35	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07	15
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,34	2,31	2,29	2,26	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	17
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,27	2,25	2,22	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92	18
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26	2,23	2,22	2,18	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88	19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22	2,20	2,18	2,15	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84	20
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81	21
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78	22
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15	2,13	2,11	2,08	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76	23
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,13	2,11	2,09	2,05	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73	24
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,09	2,07	2,04	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09	2,07	2,05	2,02	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69	26
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,08	2,06	2,04	2,00	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67	27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06	2,04	2,02	1,99	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65	28
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05	2,03	2,01	1,97	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64	29
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62	30
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,95	1,92	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51	40
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39	60
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,77	1,75	1,72	1,69	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25	120
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,69	1,67	1,63	1,60	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00	∞
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24	30	40	60	120	∞	

F1 precisamos calcular:

$$F1_{(0{,}95;\ 5,\ 7)} = \frac{1}{F_{(0{,}05;\ 7,\ 5)}} = \frac{1}{4{,}88} = 0,205$$

Assim, $RC = \{0 < F < 0,205 \text{ ou } F > 3,97\}$

Entretanto, o procedimento que se usa na prática é calcular F utilizando sempre a maior variância no numerador $s_1^2 > s_2^2$ portanto $F > 1$, e considerar o ponto crítico $F_{2(\alpha;\ n1-1,\ n2-1)}$.

Amostra: Colhidas amostras aleatórias n_1 e n_2, calcula-se s_1^2 e s_2^2 com $(s_1^2 > s_2^2)$, então:

$$F_{obs} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(n_1-1;n_2-1)}$$

Conclusão: Se $F_{obs} \in RC$, **rejeita-se** H_0, no caso contrário, **não se rejeita** H_0 .

Exemplo. Dois grupo de 8 animais da mesma idade e raças diferentes foram submetidos a um mesmo regime alimentar. Os resultados para ganho de peso foram:

R1:	$2,30$	$2,10$	$1,91$	$1,20$	$1,93$	$1,88$	$1,95$	$2,10$
R2:	$2,30$	$2,15$	$2,00$	$1,28$	$2,15$	$2,20$	$1,91$	$2,06$

Ao nível de 5%, as variâncias dos ganhos de pesos raças diferem entre si?

```r
r1<-c(2.30,2.10,1.91,1.20,1.93,1.88,1.95,2.10)
r2<-c(2.30,2.15,2.00,1.28,2.15,2.20,1.91,2.06)
var.test(r1,r2)
```

```
#>
#>      F test to compare two variances
#>
#> data:  r1 and r2
#> F = 1.0362, num df = 7, denom df = 7, p-value = 0.9638
#> alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
#> 95 percent confidence interval:
#>  0.2074474 5.1756306
#> sample estimates:
#> ratio of variances
#>           1.036181
```

Testar as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_{r1}^2 = \sigma_{r2}^2 \\ H_1 : \sigma_{r1}^2 \neq \sigma_{r2}^2 \end{cases}$$

Calculando os valores de variância para as duas raças:

$s_{r1}^2 = 0,10433$

e

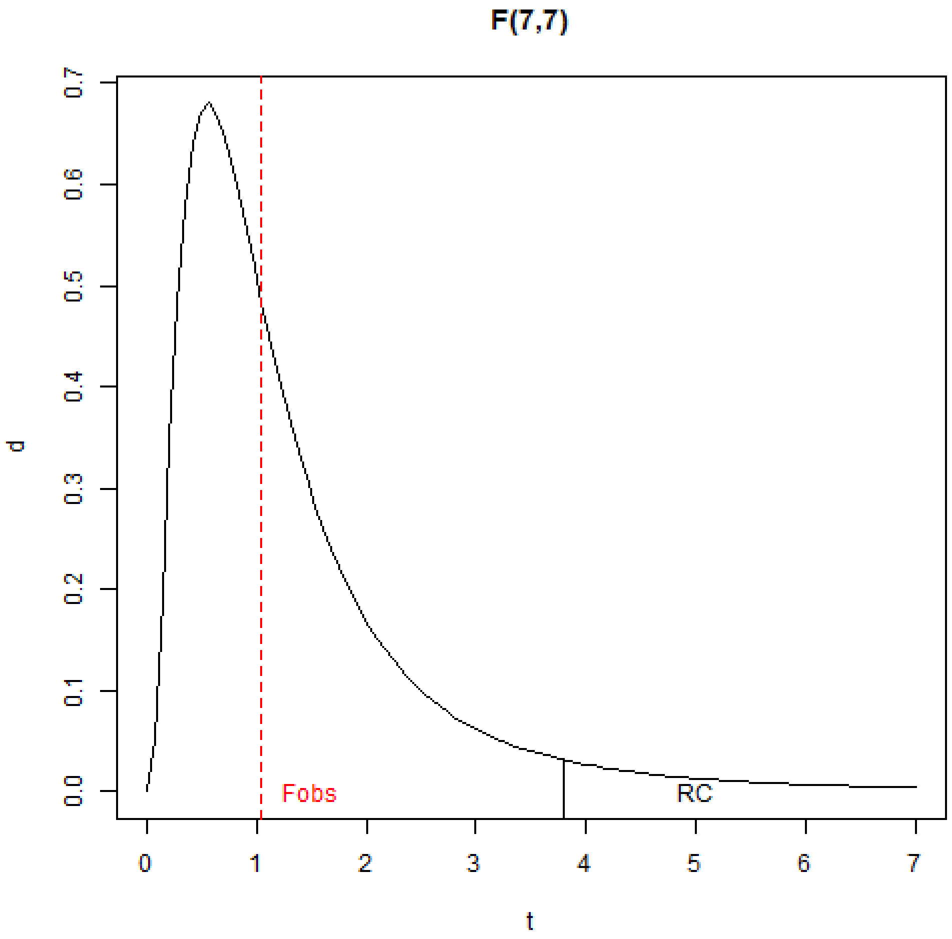
$s_{r2}^2 = 0,10068$

sendo que $n_{r1} = n_{r2} = 8$

e $\alpha = 5\%$

A estatística do teste: $\frac{s_{r1}^2}{s_{r2}^2} = \frac{0{,}10433}{0{,}10068} = 1,03618$

$F_{c(0,05;7,7)} = 3,79$ assim, $RC = \{F > 3,79\}$



Como $F_{obs} \notin RC$ não se rejeita H_0, ou seja, as variâncias são estatisticamente iguais ao nível de 5% de significância, ou seja, as variâncias dos ganhos de peso das raças são homocedásticas.

Comparação de duas médias de populações normais: amostras independentes

A análise da hipótese da igualdade de variâncias é crucial para o uso do teste t, na comparação de duas médias, apresentado a seguir.

Com o objetivo de se comparar duas populações examinaremos a situação na qual os dados estão na forma de realizações de amostras aleatórias de tamanhos n_1 e n_2, selecionadas, respectivamente, das populações 1 e 2.

Uma coleção de $n_1 + n_2$ elementos são aleatoriamente divididos em 2 grupos de tamanhos n_1 e n_2, onde cada membro do primeiro grupo recebe o tratamento 1 e do segundo, o tratamento 2. Especificamente, estaremos interessados em fazer inferência sobre o parâmetro:

$\mu_1 - \mu_2$ = (média da população 1) – (média da população 2)

Hipótese: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou seja, $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Estatística do teste: $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Caso 1: variâncias conhecidas

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Caso 2: variâncias desconhecidas e iguais

Preliminarmente, testa-se se as variâncias das duas populações são iguais. Caso a hipótese não seja rejeitada, isto é, que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, a estatística anterior transforma-se em:

$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$, substituimos σ por um estimador, teremos uma expressão muito semelhante à t de Student. Uma estatística para σ^2 é a média ponderada:

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

que, como s_1^2 e s_2^2 são dois estimadores não viciados de σ^2, também é um estimador não viciado de σ^2.

Assim, $t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)GL$

Exemplo. Dois grupo de 8 animais da mesma idade e raças diferentes foram submetidos a um mesmo regime alimentar. Os resultados para ganho de peso foram:

R1:	$2,30$	$2,10$	$1,91$	$1,20$	$1,93$	$1,88$	$1,95$	$2,10$
R2:	$2,30$	$2,15$	$2,00$	$1,28$	$2,15$	$2,20$	$1,91$	$2,06$

Ao nível de 5%, as médias dos ganhos de pesos raças diferem entre si?

```r
r1<-c(2.30,2.10,1.91,1.20,1.93,1.88,1.95,2.10)
r2<-c(2.30,2.15,2.00,1.28,2.15,2.20,1.91,2.06)
t.test(r1, r2, alternative = "le", var.equal = TRUE)
```

```
#>
#>      Two Sample t-test
#>
#> data:  r1 and r2
#> t = -0.53098, df = 14, p-value = 0.3019
#> alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
#> 95 percent confidence interval:
#>       -Inf 0.1969546
#> sample estimates:
#> mean of x mean of y
#>   1.92125   2.00625
```

Usando os dados do exemplo anterior, testar se há evidência de que as duas raças apresentam o mesmo ganho de peso $(H_0 : \mu_A = \mu_B \text{ vs. } H_1 : \mu_A < \mu_B)$, ao nível de 5%.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{r1} = \mu_{r2} \\ H_1 : \mu_{r1} < \mu_{r2} \end{cases}$$

Calculando os valores de média e desvio-padrão:

$\bar{X} = 1,92125$ e $s_{r1}^2 = 0,10433$ e $\bar{Y} = 2,00625$ e $s_{r2}^2 = 0,10068$

sendo que $n_{r1} = n_{r2} = 8$ e $\alpha = 5\%$

Assim,

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{(8-1)0,10433 + (8-1)0,10068}{(8-1)+(8-1)} = 0,1025054$$

sendo $S_P = 0,3201646$

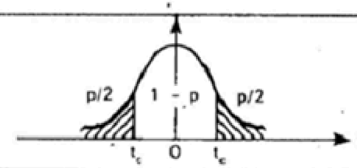
Portanto,

$$t_{obs} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(1,92125-2,00625)}{0,3201646\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = -0,5309908$$

TÁBUA V

Distribuição de Student: St(n)

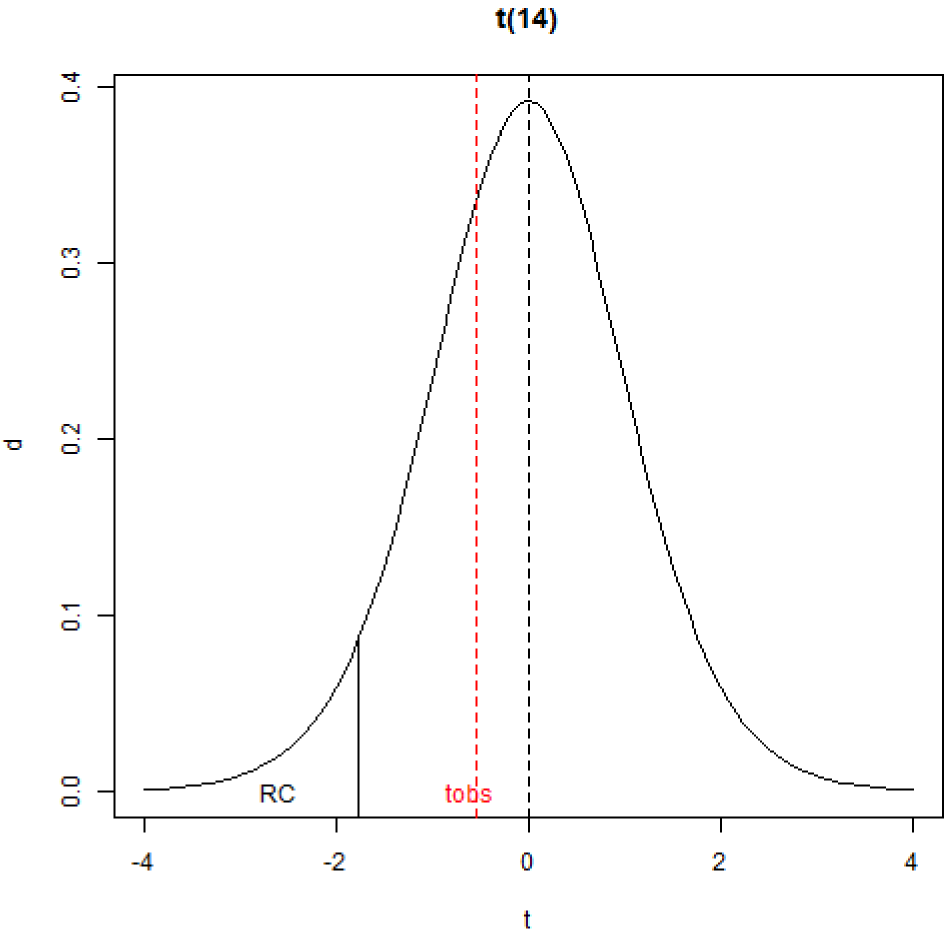
Valores críticos de t tais que $P(-t_C < t < t_C) = 1 - p$



Graus de liberdade	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	Graus de liberdade
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,657	318,309	636,619	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,598	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,998	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,756	3,365	4,032	5,893	6,869	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	3,025	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,248	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,166	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,684	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646	30
35	0,126	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591	35
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	0,126	0,254	0,387	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373	120
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	∞
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	

Para a construção da **região crítica** do teste: $t_c(14; 0,05) = -1,761$ assim, a região crítica é $RC = \{t \leq -1,76131\}$

Conclusão: Como $t_{obs} \notin RC$, não rejeita-se H_0, não há evidências de que a raça 1 apresenta maior ganho de peso que a raça 2.



Caso 3: variâncias desconhecidas e desiguais (Teste de Smith – Satterthwaite)

Quando a hipótese de igualdade de variâncias for rejeitada, deve-se substituir σ_1^2 e σ_2^2 pelos seus respectivos estimadores s_1^2 e s_2^2 obtendo a estatística:

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

que sob a veracidade de H_0 $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$, aproxima-se de uma distribuição t de Student, com número de graus de liberdade dado aproximadamente por:

$$gl = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Como o número de graus de liberdade assim calculado, geralmente, é **não inteiro**, recomenda-se aproximá-lo para o inteiro imediatamente anterior a este.

Se n_1 e n_2 são ambos grandes $(n \geq 30)$, o teste pode ser baseado na estatística.

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \text{ sob } H_0$$

pois permanece válido se σ_1^2 e σ_2^2 são substituídos por seus respectivos estimadores amostrais s_1^2 e s_2^2.

Nota: no caso da inferência originada de amostras grandes, não é necessário assumir que as distribuições das populações originais são normais, porque o teorema central do limite garante que as médias amostrais X e Y são aproximadamente distribuídas como $N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$ e $N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$, respectivamente. Além disso, a suposição de variâncias populacionais iguais $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ que é usada para amostras pequenas, é evitada nessa situação.