Estatística e Informática

Aula 07 - Variáveis Aleatórias Discretas

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(11-04-2024)

Variáveis Aleatórias Discretas

Variável Aleatória Discreta

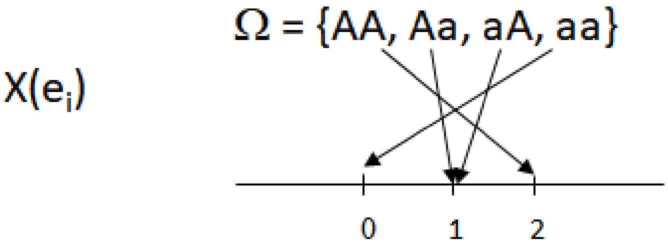
Muitos experimentos produzem resultados não numéricos, portanto, antes de analisá-los é conveniente transformar seus resultados em números.

Para isso deve-se associar a cada resultado elementar (e_i) do espaço amostral (S) um número real, o que é feito por meio de uma regra ou função denominada **variável aleatória (v.a.)**.

Exemplo Considerando o cruzamento de dois organismos heterozigotos para o gene A, $Aa \times Aa$, os possíveis resultados são ilustrados em um espaço amostral com 4 resultados elementares, ou seja:

$$S = \{AA, Aa, aA, aa\}$$

Agora defini-se X, como a variável aleatória, que é o número de alelos dominantes A. Tem-se:



Note que para ser discreta, a variável aleatória (v.a.) deve assumir valores em um conjunto finito ou infinito, porém contável.

Distribuição de Probabilidade

Distribuição de Probabilidade

É uma relação dos distintos valores x_i da variável aleatória X junto às suas respectivas probabilidades $P(x_i)$, com:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

em que: $P(x_i)$ é chamada função de probabilidade, que a cada valor de x_i associa a sua respectiva probabilidade de ocorrência.

Exemplo:

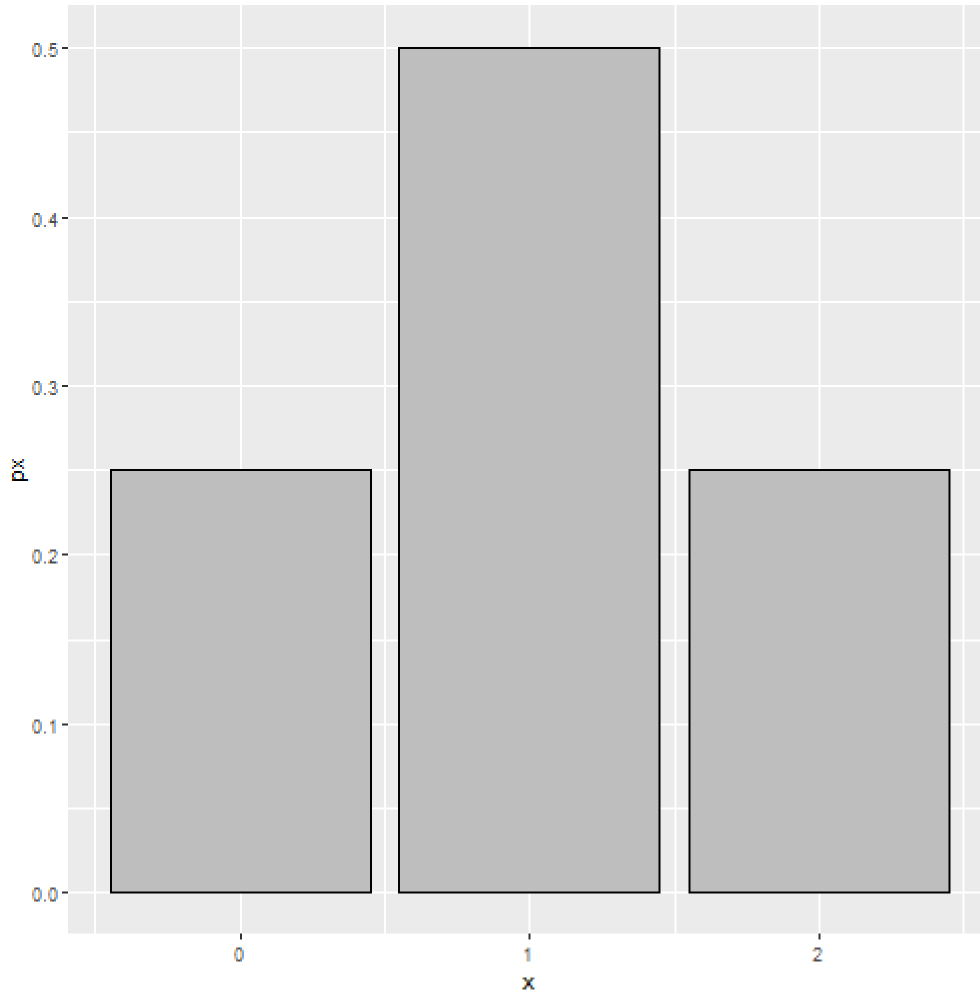
No cruzamento de dois organismos heterozigotos para o gene A, temos:

Genótipos	**AA**	**Aa**	**aa**	Σ
$X = x_i$	2	1	0	-
$P(X = x_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

A distribuição de probabilidade mostra-nos como a probabilidade total (1) é distribuída de acordo com os diferentes valores da variável aleatória X.

Representação Gráfica

```
library(tidyverse)
tibble(x=0:2,
       px = c(1/4, 1/2, 1/4) ) |>
  ggplot(aes(x=x,y=px)) +
  geom_col(color="black",
           fill="gray")
```


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
px
0
1
2
x

Esperança Matemática

Seja uma população finita de n indivíduos, e o evento E denotado pelo número de alelos dominantes A. Calcule a frequência relativa para cada categoria.

Genótipo	x	px
AA	2	0.25
Aa	1	0.50
aa	0	0.25

Lembrando que a média pode ser calculada a partir da frequência relativa:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i$$

Em que k é o número de elementos no espaço amostral associado ao evento aleatório $X = x_i$.

Agora, pergunta-se: qual o número médio de genes A esperado?

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) = \frac{n_1}{n}(x_1) + \frac{n_2}{n}(x_2) + \frac{n_3}{n}(x_3)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(2) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Considerando um modelo de população infinita $(n \to \infty)$ as frequências relativas n_i/n $(i = 1, 2, 3)$ podem se aproximar de limites que são probabilidades $P(X = x_i) = P(x_i)$, onde: $x_i = \{2, 1, 0\}$, e se aproximará de um limite que é chamado **ESPERANÇA DE X** (isto é, o número esperado de genes A em uma população infinita). O resultado pode ser generalizado na seguinte definição:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(x_i)$$

Definição: A média de uma *v.a.* X ou de sua distribuição de probabilidade, também chamada **valor esperado** ou **esperança matemática** ou simplesmente **esperança de** X, será definida como:

$$E(X) = \mu$$

assim:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(x_i) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} = 1$$

Propriedades da Esperança

Dado a variável aleatória X e a constante k as propriedades da esperança matemática são:

$i) E(k) = k;$

$ii) E(kX) = K \times E(X);$

$iii) E(X + k) = E(X) + k$

$iv) E(k + k \cdot X) = k + k \times E(X)$

Variância de uma Variável Aleatória

Definição

A variância de uma v.a. X ou a medida de dispersão de sua distribuição de probabilidade, representada por σ_X^2, é definida por:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Podendo ser calculada como:

$$E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2.P(x_i)$$

ou

$$E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.P(x_i) - [E(X)]^2$$

Exemplo

Qual a variância da distribuição de probabilidade da variável X (número de alelos dominantes) a partir do cruzamento de dois organismos heterozigotos $Aa \times Aa$.

Genótipo	**x**	**px**
AA	2	1/4
Aa	1	1/2
aa	0	1/4

Lembrado que a média $\bar{x} = 1$

$$Var(X) \begin{cases} E[(X-\mu)^2] = (0-1)^2.\,\frac{1}{4} + (1-1)^2.\,\frac{1}{2} + (2-1)^2.\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i.\,P(x_i) - [E(X)]^2 \\ E[(X-\mu)^2] = \left(0^2\frac{1}{4} + 1^2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{4}\right) - 1^2 = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Propriedades da Variância

Dado a variável aleatória X e a constante k as propriedades das variâncias são:

$i) Var(X)$ não pode ser um número negativo;

$ii) Var(X + k) = Var(X)$;

$iii) Var(k \cdot X) = k^2 Var(x)$

$iv) Var(k + k \cdot X) = k^2 Var(x)$

Prova da propriedade (ii)

Para demonstrar essa propriedade, vamos consider uma variável Y , definida por $(X + k)$ e agora podemos definir a variância de Y:

$$Var(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] = \sum_{i=1}^{k}(y_i - \mu_y)^2.P(y_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}([x_i + k] - \mu_{[X+k]})^2.P([x_i + k])$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + k - \mu_x - k)^2.P(x_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2.P(x_i) = Var(X)$$

Prova da propriedade (iii)

Para demonstrar essa propriedade, vamos consider uma variável Y , definida por (kX) e agora podemos definir a variância de Y:

$$Var(Y) = E[(Y-\mu_Y)^2] = \sum_{i=1}^{k}(y_i-\mu_y)^2.P(y_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}([kx_i]-\mu_{[kX]})^2.P(kx_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}(kx_i-k\mu_{[X]})^2.P(x_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}(k[x_i-\mu_X])^2.P(x_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n}k^2(x_i-\mu_X)^2.P(x_i)$$

$$Var(Y) = k^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2.P(x_i)$$

$$Var(Y) = k^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2.P(x_i)$$

$$Var(Y) = k^2Var(X)$$

Demonstração no R

```
X<- 0:2
px<-c(1/4,1/2,1/4)

# Esperança
E_X <- sum(X*px)
E_X
```

```
#> [1] 1
```

```
# Variância
Var_X <- sum(X^2*px) - E_X^2
Var_X
```

```
#> [1] 0.5
```

Dado $k = 5$, temos agora duas variáveis $Y = X + k$ e $Z = k.X$.

1) Pelas propriedades da variância sabemos que:

$$Var(Y) = Var(X) = 0,5$$

Prova:

```
k <- 5
Y <- k+X
Var_Y = sum(Y^2*px) - (sum(Y*px))^2
Var_Y
```

```
#> [1] 0.5
```

2) Pelas propriedades da variância sabemos que:

$$Var(Z) = k^2 Var(X) = 5^2.0,5 = 12,5$$

Prova:

```
Z <- k*X
Var_Z = sum(Z^2*px) - (sum(Z*px))^2
Var_Z
```

```
#> [1] 12.5
```

Exercício

Um revendedor de produtos agropecuários recebe de vários laboratórios certo tipo de antibiótico, que tem custo diferenciado. Levando-se em conta a proporção fornecida e o preço apresentado por cada laboratório, pode-se considerar que o custo de uma dose de antibiótico em reais, escolhida ao acaso, é uma variável aleatória C. Admitindo a seguinte distribuição de probabilidade para C:

c_i	$1,00$	$1,10$	$1,20$	$1,30$	$1,40$
$P(c_i)$	$0,20$	$0,30$	$0,20$	$0,20$	$0,10$

a) Determinar a esperança (média) e a variância da variável aleatória C:

b) Supondo que o revendedor venda cada um desses antibióticos acrescentando 50% sobre o custo, além de um adicional de R$ $0,10$ pelo frete, calcular a média e a variância da nova variável aleatória preço de revenda R.

Resposta

a)
$E(C) = 1,17$ reais

$Var(C) = 0,016$ reais²

b)

$E(R) = 1,855$ reais

$Var(R) = 0,036$ reais²

Distribuições Teóricas de Probabilidade de Variáveis Aleatórias Discretas

Definição

O modelo probabilístico da variável aleatória X, é a forma específica de função de distribuição de probabilidade que reflete o comportamento de X.

1. Distribuição de Bernoulli
2. Distribuição Binomial
3. Distribuição de Poisson

Distribuição de Bernoulli

Distribuição de Bernoulli

Essa distribuição é caracterizada por uma única realização de um experimento aleatório, onde há somente dois resultados possíveis, designados por: **Sucesso (S)** ou **Fracasso (F)**.

Exemplos:

a) testa-se um antibiótico em um indivíduo, a reação (v.a.) ou é positiva (S) ou é negativa (F);

b) uma planta é escolhida, ao acaso, em um pomar e observa-se se essa planta é doente (v.a.) (S) ou não (F).

Assim, para cada experimento, podemos definir uma variável aleatória X: o número de sucessos, que assume apenas dois valores, o valor 1 se ocorre sucesso (S) e o valor 0 (zero) se ocorre fracasso (F), sendo $P(S) = p$, $0 < p < 1$, ou seja:

$$X \begin{cases} 0(F) \\ 1(S) \end{cases}$$

com $P(X = 1) = p$ e $P(X = 0) = 1 - p = q$

Definição

Nestas condições, a variável aleatória X tem a função de probabilidade

X	$P(X)$
1	p
0	q

Com função de probabilidade dada por:

$$P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x}$$

Esperança

$$E(X) = \sum x_i P(x_i)$$

$$E(X) = 0(q) + 1(p)$$

$$E(X) = p$$

Variância

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = (0^2 . q + 1^2 . p) - p^2$$

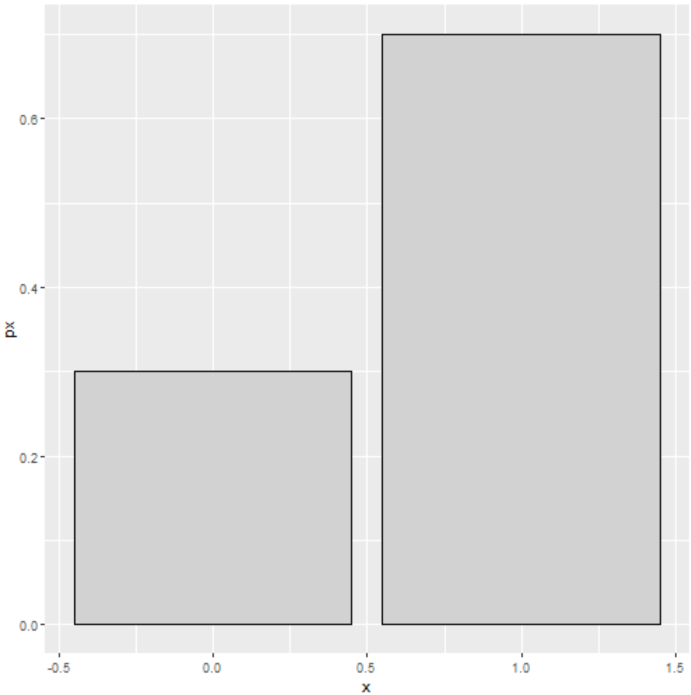
$$Var(X) = p - p^2$$

$$Var(X) = p(1 - p) = p. q$$

Exemplo

Dado $p = 0,7$, construa a distribuição de probabilidade dessa variável e calcule a esperança e a variância dessa distribuição.

```r
p <- 0.7
q <- 1-p
x <- 0:1
px <- c(q,p)
tibble(x,px) |>
  ggplot(aes(x=x,y=px)) +
  geom_col(color="black",
           fill="lightgray")
```



$$E(X) = p = 0,7$$

$$Var(X) = p.q = 0,7.0,3 = 0,21$$

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

Definição

Quando um número fixo n de ensaios de *Bernoulli* são repetidos, supondo que as repetições sejam *independentes* com $P(S) = p$ em cada ensaio, a variável aleatória X representa a contagem (soma) do número de sucessos em n ensaios.

Os possíveis valores de X são os inteiros $0, 1, 2, \ldots, n$. A distribuição de probabilidade de X é chamada **DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL* com n ensaios e probabilidade de sucesso p.

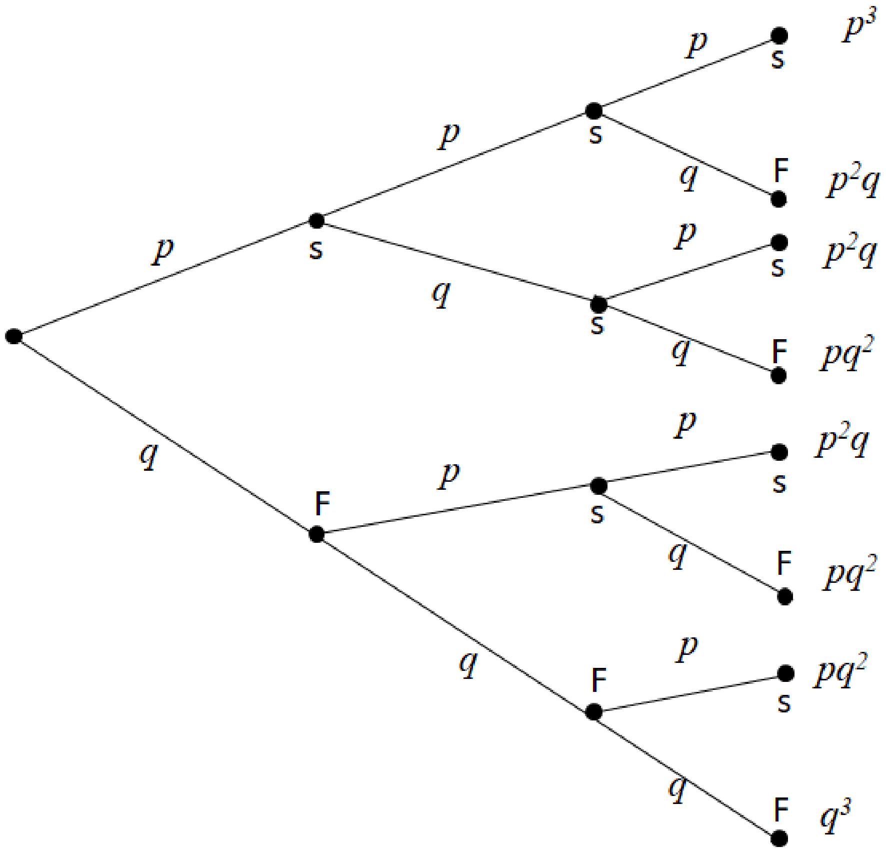
Exemplo: No lançamento de uma moeda, vamos definir como Sucesso o evento *cair a face cara*:

$P(S) = p =$ 

$P(F) = q =$ 

Para deduzir uma fórmula para $P(X = x)$, consideremos o lançamento de 3 moedas ($n = 3$ ensaios), cada um dos quais podendo resultar em S (H - cara) ou F (T - coroa). Há $2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados possíveis, os quais estão relacionados nas colunas de acordo com o número de sucessos (S):

Uma característica interessante dos experimentos considerados é que estamos interessados apenas no número total de sucessos e não na ordem que eles ocorrem. Segue abaixo o diagrama de árvore das probabilidades binomiais no lançamento de 3 moedas, ou seja, $n = 3$ e $P(S) = p$ e $P(F) = q$.



Evento	Valor de *X* (número de *S*)	*Prob. de cada sequência*	*Número de sequências*
	0	q^3	$\binom{3}{0}=1$
	1	pq^2	$\binom{3}{1}=3$
	2	p^2q	$\binom{3}{2}=3$
	3	p^3	$\binom{3}{3}=1$

Obtenção das sequências

Como os ensaios são independentes, com $P(S) = p$ e $P(F) = q$, os fatores: $1, 3, 3, 1$ são obtido por meio do **"teorema da expansão binomial"**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Função de Distribuição Binomial

Assim, a função de distribuição binomial é:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Denotação

$$b(n,p) \text{ onde } \sum_{i=0}^{n} b(n,p) = 1$$

Se X é uma variável aleatória com distribuição Binomial ela apresenta:

Esperança: $E(X) = n \cdot p$ e **Variância**: $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

E se, ao invés de 3 moedas, tivéssemos 4 moedas?

Valor de X (número de S)	0	1	2	3	4
Prob. de cada sequência	q^4	pq^3	p^2q^2	p^3q	p^4
Número de sequências	$1=\binom{4}{0}$	$4=\binom{4}{1}$	$6=\binom{4}{2}$	$4=\binom{4}{3}$	$1=\binom{4}{4}$

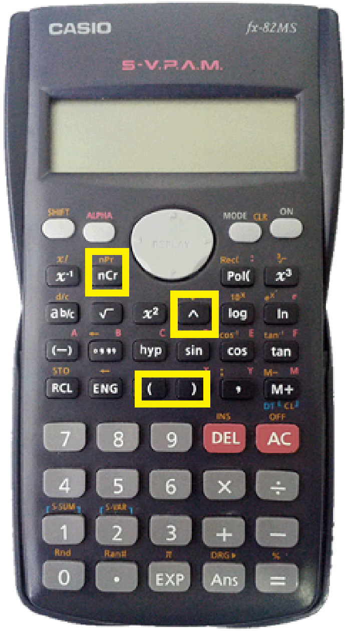
Qual a probabilidade do número de caras ser igual ao número de coroas?

R: Dado que a moeda é honesta, ou seja, $P(H) = \frac{1}{2}$, temos que o $x = 2$ e $n = 4$, aplicando a função de probabilidade Binomial $b(4; 0.5)$:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 0,375$$

Montando a fórmula na calculadora científica



4C2x0.5^2x0.5^(4-2) = 0.375

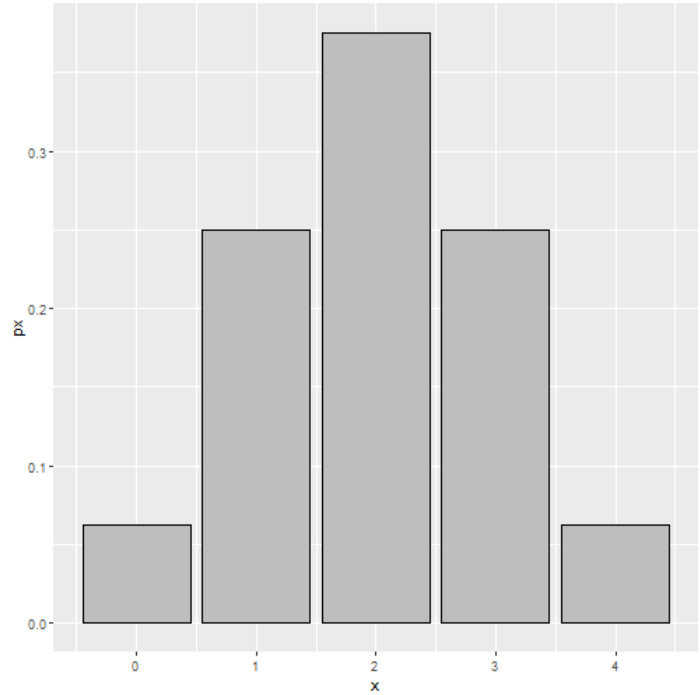
$$\binom{4}{2} \text{x} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 0,375$$

No R podemos utilizar a função `dbinon()` com os argumentos x, n e p a probabilidade de sucesso.

```
n <- 4
x <- 0:n
p<-1/2
px<-dbinom(x,n,p)
tibble(x,px)
```

x	px
0	0.0625
1	0.2500
2	0.3750
3	0.2500
4	0.0625

```
tibble(x,px) %>%
  ggplot(aes(x=x,y=px)) +
  geom_col(color="black",
           fill="gray")
```

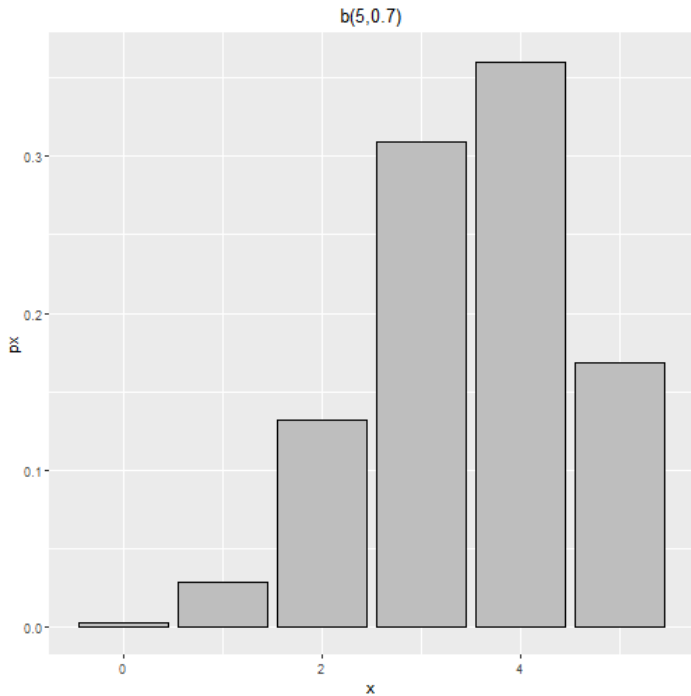


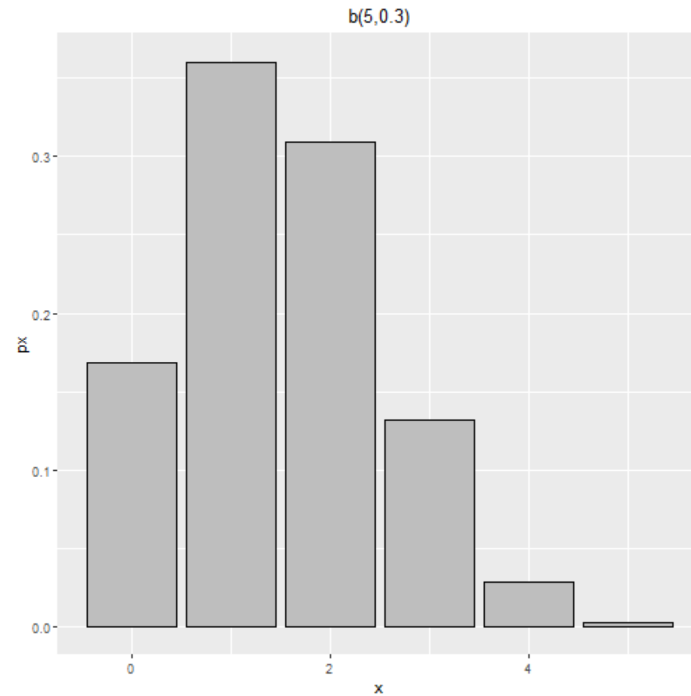
Estudo do parâmetro (p)

A distribuição binomial é **simétrica** se o valor de p em um histograma tem o mesmo valor de q em outro, as probabilidades são exatamente as mesmas, mas dispostas de forma invertida.

A propriedade geral da distribuição binomial: quando p e q são alternados, a distribuição de probabilidades é invertida, então:

$$b(x, n, p) = b(n - x, n, 1 - p)$$





0	1	2	3	4	5
0.00243	0.02835	0.1323	0.3087	0.36015	0.16807

0	1	2	3	4	5
0.16807	0.36015	0.3087	0.1323	0.02835	0.00243

Exercícios

1) Seis moedas são jogadas uma vez (ou, o que representa a mesma coisa), uma moeda é jogada 6 vezes. Achar a probabilidade de obter cara:
a) exatamente 3 vezes;
b) no máximo 3 vezes;
c) pelo menos 3 vezes;
d) pelo menos 1 vez.

Respostas

a) $0,3125$
b) $0,6562$
c) $0,6562$
d) $0,9844$

2) Uma urna contém bolas brancas e pretas na proporção 2 para 3. Chamemos sucesso a probabilidade de tirar uma bola branca. Três bolas são tiradas separadamente e depois de cada tirada a bola é retornada à urna e completamente misturada com as outras, de tal modo que a probabilidade fundamental do sucesso permanece constante durante as tentativas. Achar a probabilidade de $0, 1, 2 e 3$ sucessos. Calcule a esperança e a variância dessa distribuição de probabilidade.

Respostas

$E(X) = 1,2 \, Var(X) = 0,72$

3) Uma urna contém 52 bolas sendo 13 brancas e 39 pretas.
a) Qual a probabilidade de se tirarem 6 bolas brancas, uma a uma, retornando a bola à urna após cada retirada?
b) Calcule a esperança e a variância dessa distribuição de probabilidade.
c) Nas mesmas condições da questão anterior, qual a probabilidade de se terem 5 brancas e 1 preta?

Respostas

a) $0,0002441$;
b) $E(X) = 1,5$ e $Var(X) = 1,125$;
c) $0,0043945$

Distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

O comportamento de variáveis aleatórias, as quais representam o número de ocorrências de eventos em um intervalo de tempo ou no espaço, pode ser descrito pela chamada distribuição de **Poisson**, cuja função de probabilidade é:

Função de Distribuição Poisson é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Onde $e = 2,71828$ e λ é o parâmetro da distribuição que representa o número médio (taxa) de ocorrências do evento por unidade de tempo ou espaço.

Denotação

$$X \sim Po(\lambda) \text{ , onde } \sum_{x=0}^{\infty} Po(\lambda) = 1$$

Definição

A variável aleatória X com distribuição de Poisson apresenta:

Esperança:

$$E(X) = \lambda$$

e **Variância**:

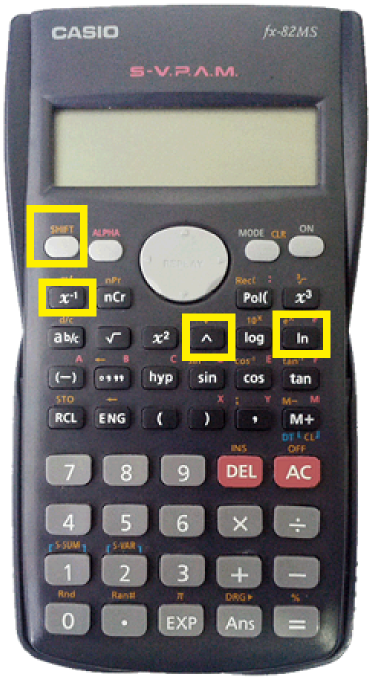
$$Var(X) = \lambda$$

Ou seja, o número médio e a variância de ocorrências de eventos por unidade de tempo (ou espaço) são iguais (λ) e constantes ao longo do tempo (ou espaço).

Exercícios 1) Em uma população, seja X o número de descendentes produzidos por família/geração. Assumindo que Média = $\lambda = 2$, qual a probabilidade de famílias com $X = 4$ descendentes?

$$P(X = 4) = \frac{e^{-2} \cdot 2^4}{4!} = 0,09022$$

Montando a fórmula na calculadora científica

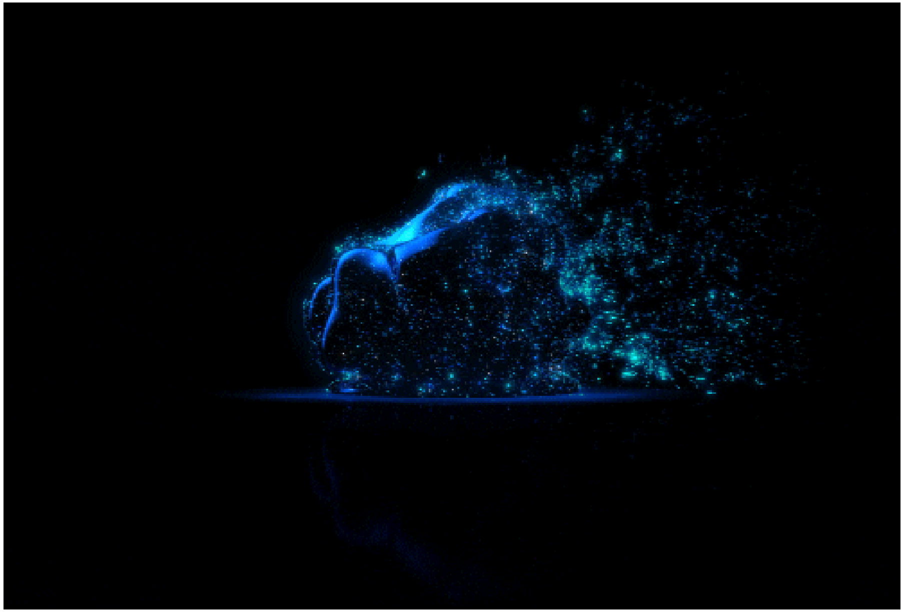


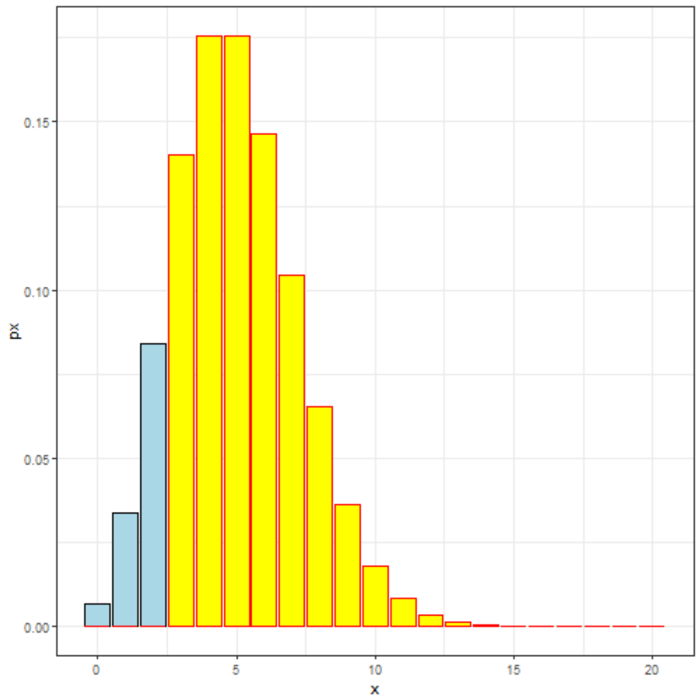
e-2x2^4÷4! = 0.09022

$$\frac{e^{-2} \cdot 2^{4}}{4!} = 0,09022$$

Exercício 2) Suponha que o número de partículas *alfa*, emitidas por minuto seja uma variável aleatória segundo um modelo de Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, isto é, a taxa média de emissão é de 5 partículas a cada minuto.

a) Calcule a probabilidade de haver mais de 2 emissões em um minuto.





Assim temos que:

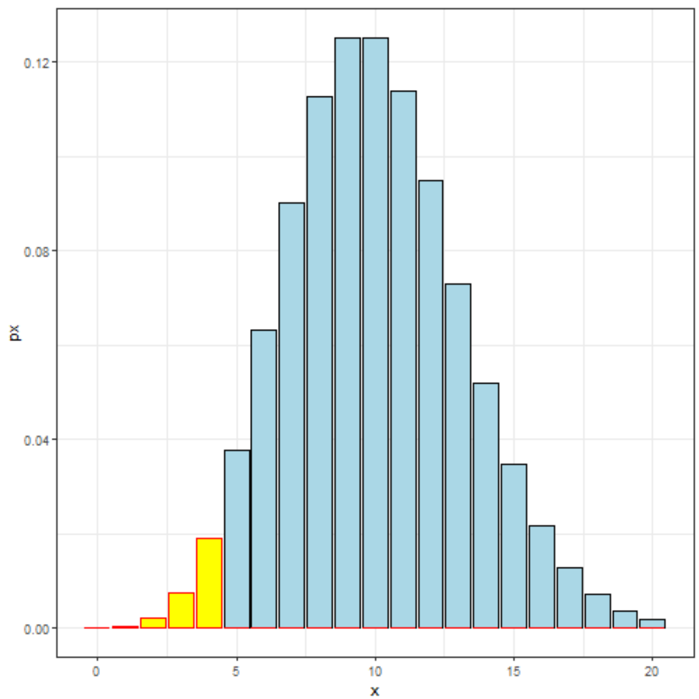
Se $P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, então:

$$P(x > 2) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$P(x > 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$P(x > 2) = 1 - [\frac{e^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5}5^{1}}{1!} + \frac{e^{-5}5^{2}}{2!}] = 0,87535$$

b) Calcule a probabilidade da emissão de até 4 partículas em 2 minutos.

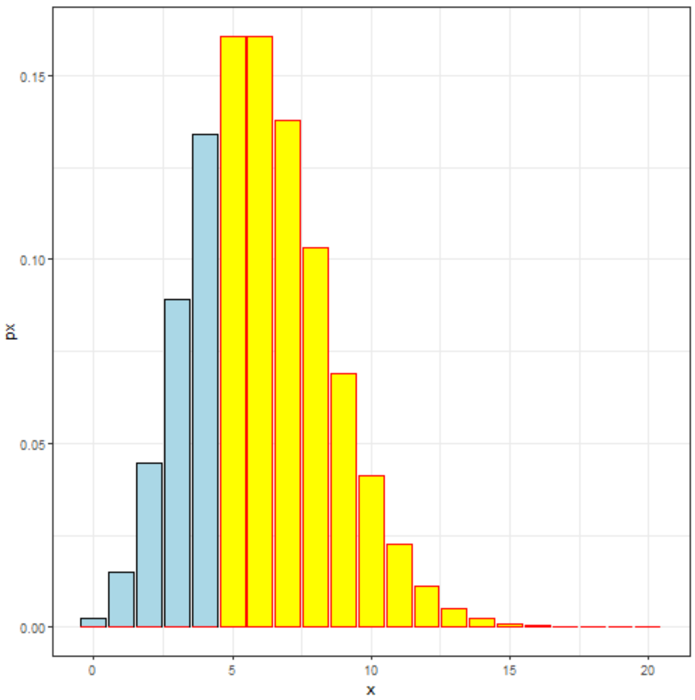


Se o intervalo de tempo é alterado a variável aleatória mantém a mesma distribuição de Poisson, mas com o valor de parâmetro ajustado de forma conveniente.

Por exemplo, se o período de tempo considerado para o exemplo anterior for de dois minutos, teremos que o número de partículas emitidas em dois minutos terá distribuição: $\lambda' = 2 \times 5 = 10$ partículas em dois minutos.

$$P(X \leq 4) = 0,029252$$

Exercício 3) Supondo que o número médio de bactérias por litro de água purificada é 2, qual é a probabilidade que 5 ou mais bactérias sejam encontradas em uma amostra de 3 litros de água?



Se o volume é alterado a variável aleatória mantém a mesma distribuição de Poisson, se o volume for de 3 litros, teremos que o número de bactérias observado terá distribuição: $\lambda' = 3 \times 2 = 6$ bactérias por litro.

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = 0,7149$$

Distribuição de Poisson como aproximação da Distribuição Binomial

Algumas vezes, no uso da distribuição binomial, ocorre que n é muito grande e p é muito pequeno, de modo que q é próximo de 1. Em tais casos, o cálculo torna-se muito difícil. Pode-se, então, fazer uma aproximação da distribuição Binomial pela Poisson.

Função de Distribuição:

$$b(n, p) \sim \frac{e^{-n.p}(n.\,p)^x}{x!}$$

A aproximação é boa, se $n \cdot p = \lambda \leq 7$.

Nestas condições, a variável aleatória X com distribuição Binominal aproximada pela Poisson apresenta:

Esperança:

$$E(X) = n \cdot p$$

e **Variância**:

$$Var(X) = n \cdot p$$

Exercício 4) Sabendo-se que a probabilidade de um ser humano ter reação negativa à uma vacina é de $0,001$, determinar a probabilidade de que, de 2000 pessoas vacinadas, mais do que 4 pessoas tenham reação negativa?

$$n \times p = \lambda = 2000 \times 0,001 = 2$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} Po(2)$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} Po(2) = 0,0526$$

```r
n <- 2000
lambda <- n*0.001
1-ppois(4,lambda)
```

```
#> [1] 0.05265302
```