Estatística e Informática

Aula 07 - Probabilidade (continuação)

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(20-05-2021)

Probabilidade

Experimentos: fazer ou observar alguma coisa sob certas condições, resultando em algum estado final de acontecimentos ou resultados. Na prática, os experimentos não são precisamente repetíveis, mesmo sob condições supostamente idênticas.

Fenômeno aleatório: É a situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza, pois envolve a eventualidade (**experimento aleatório**). Apesar do experimento ter sido realizado em condições supostamente controladas, existem fatores afetando os resultados, mas não se conhece ou não se sabe como controlá-los.

Germinação de sementes

TCH

Ganho de peso bovino

Espaço amostral ($\mho$ ou S): é o conjunto de todos os resultados possíveis de um certo fenômeno aleatório, é o conjunto de todos os elementos que possuem a característica em estudo representada pela letra ômega $\mho$ ou pelo S.

Assim, no lançamento de um dado, o espaço amostral é:

$$\mho = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é:

$$\mho = \{H, T\}$$

Onde H representa Cara e T representa Coroa.

No lançamento de duas moedas o espaço amostral é:

$$\mho = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Evento simples ou evento elementar (e): É cada resultado possível, ou seja, é o conjunto de resultados possíveis. Assim, para o lançamento de duas modeas, temos:

e_1

e_2

e_3

e_4

Evento (E): Qualquer subconjunto do espaço amostral.

Assim, para o lançamento de um dado, temos os eventos:

a) sair um número par:
R: $E_1 = \{2, 4, 6\}$

b) sair um número menor que 3:
R: $E_2 = \{x | x < 3\} = \{1, 2\}$

c) sair um número menor que 3 ou primo:
R: $E = \{x | x < 3 \text{ ou } x = \text{ primo } \} = \{1, 2, 3, 5\}$

Probabilidade de um evento $(P(E))$

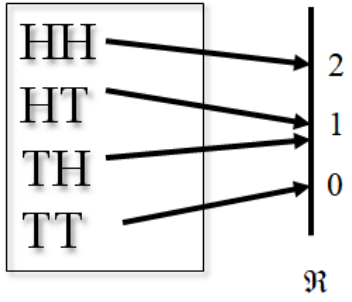
A probabilidade é uma função $P(.)$ que atribuí valores numéricos a um determinado evento (E).

É uma medida numérica de **"quão provável"** é a ocorrência do evento na excussão do experimento, é a proporção de vezes que o evento é esperado ocorrer, quando o experimento é repetido sob idênticas condições.

A determinação das probabilidade de um evento depende da natureza do experimento e do espaço amostral associado.

Supondo o lançamento de duas moedas "não viciadas" (honestas). Temos o espaço amostral: $\mathfrak{U} = \{HH, HT, TH, TT\}$.

A título de exemplificação, vamos definir uma variável **aleatória (v.a.)** como X que representa o **número de caras**, temos:



X	$Pr(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Ao conjunto $\{x | P(X = x)\}$ denominamos função de probabilidade da variável aleatória X.

Probabilidade como Resultados Elementares Igualmente Prováveis

Resultados elementares igualmente prováveis

Conclusões baseadas em dados empíricos, oriundos de uma observação experimental, são encerradas com incerteza que é expressa em termos de probabilidade. Assim, a atribuição é baseada nas características teóricas da realização do fenômeno.

Definição de Laplace de Probabilidade

> "Quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos igualmente possíveis".

Ao jogarmos uma moeda honesta (**"não viciada"**), não podemos afirmar que cairá Cara (H) ou Coroa (T).

Por assim definimos a Probabilidade de H como:

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo: No lançamento de um dado com os lados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual a probabilidade de cair Cara, $[P(H)]$?.

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{0}{6} = 0$$

Chamamos esse tipo de **Evento Impossível**

Exemplo: No lançamento de um dado com os lados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual a probabilidade de cair um número entre 1 e 6?

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{6}{6} = 1$$

Chamamos esse tipo de **Evento Certo**.

Probabilidade de um Evento

> Assim, a probabilidade de um evento E $[P(E)]$ é um número entre 0 e 1, quanto mais próximo a 1, maior a chance de ocorrência.

A proporção de vezes que um evento simples pode ocorrer pode ser determinada sem executar o experimento.

Portanto, se $\mho$ consiste de k eventos simples $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ que são **igualmente prováveis**, a probabilidade de cada e_i é $\frac{1}{k}$ se E consiste de m desses k elementos, então temos:

$$P(E) = \frac{\text{nº de elementos em E}}{\text{nº de elementos em } \mho} = \frac{m}{k}$$

Portanto $P(.)$ é denominada probabilidade se, e somente se:

$i)$ $0 \leq 0 \leq 1, \forall E \subset \mho$.

$ii)$ $P(\mho) = 1$ assim como, $P(\phi) = 0$

$iii) P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(\cup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)$ com os eventos $E_i s$ **disjuntos**.

Exemplos

1) Descreva o espaço amostral e a probabilidade de sair pelo menos uma face cara no lançamento de uma moeda duas vezes.

2) Em um lote de 20 animais existem 5 doentes, ao escolhermos 4 animais desse lote ao acaso, de modo que a ordem dos elementos seja irrelevante:

a) Qual a probabilidade de 2 animais doentes na amostra?
b) Qual a probabilidade de 4 animais doentes?

Teorema 1

Se ϕ for espaço amostral vazio:

$$P(\phi) = 0$$

Demonstração:

Para qualquer evento A, podemos escrever:

$A = A \cup \phi$, com A e ϕ disjuntos, apresentado na propriedade (iii), temos:

$P(A) = P(A) + P(\phi)$, como cnclusão imediata, temos:

$P(\phi) = 0$, mas se $P(A) = 0$, não é verdadeiro que $A = \phi$, existem situações que atribuiremos $P(E) = 0$ para um evento que pode ocorrer.

Teorema 2

Se $\bar{A}$ for o evento complementar de A, então:

$$P(A) = 1 - P(A)$$

Demonstração:

Podemos escrever:

$\mathfrak{U} = A \cup \bar{A}, \forall A,$

Empregando a propriedade 2 e 3, temos:

$P(\phi) = P(A) + P(\bar{A})$

$1 = P(A) + P(\bar{A})$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$, assim, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Essa propriedade é importante, pois, muitas vezes é mais simples calcularmos a $P(\bar{A})$ do que $P(A)$.

Propriedade da multiplicação (E)

Dados dois eventos A e B de interesse, qual a probabilidade de ocorrência de ambos? Se esses eventos são **independentes**, a probabilidade de ocorrência de ambos é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo: Jogamos duas moedas, honestas, qual a probabilidade de ambas as faces serem cara (H).

$P(H \cap H) = P(H) \cdot P(H)$

$P(H \cap H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(H \cap H) = \frac{1}{4}$

HH
HT
TH
TT

Propriedade da adição (OU)

Se os eventos A e B são **disjuntos**, ou seja:

$A \cap B = \phi$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemplo: Jogamos um dado, qual a probabilidade de sair 5 ou 6 ?

$P(5\ cup 6) = P(5) + P(6)$

$P(5\ cup 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$P(5\ cup 6) = \frac{1}{3}$