

Estatística e Informática

Aula 06 - Probabilidade Parte II

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(04-04-2024)

Conceitos Básicos

Ensaio ou Experimento

Fazer ou observar alguma coisa sob certas condições, resultando em algum estado final de acontecimentos ou resultados.

Na prática, os experimentos não são precisamente repetíveis, mesmo sob condições supostamente idênticas.

Experimento aleatório

Pode ser repetido inúmeras vezes e nas mesmas condições e, mesmo assim, apresenta resultados diferentes.



Fenômeno aleatório:

É a situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza, pois envolve a eventualidade, portanto é proveniente de um **experimento aleatório**.

Apesar do experimento ter sido realizado em condições supostamente controladas, existem fatores afetando os resultados, mas não se conhece ou não se sabe como controlá-los.

Germinação de sementes de milho



Ganho de peso bovino



Produção de cana-de-açúcar (TCH)



Espaço amostral ou Universo (S)

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um certo fenômeno aleatório, é o conjunto de todos os elementos que possuem a característica em estudo representada pela letra Ômega Ω ou pelo S .

Assim, no lançamento de um dado, o espaço amostral é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é:

$$S = \{H, T\}$$

Onde H representa Cara e T representa Coroa.

No lançamento de duas moedas o espaço amostral é:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Evento simples, ponto amostral ou evento elementar (e)

É cada resultado possível, ou seja, é o conjunto de resultados possíveis. Assim, para o lançamento de duas moedas, temos:



e_1



e_2



e_3



e_4

Evento (E)

Qualquer subconjunto do espaço amostral.

Assim, para o lançamento de um dado, temos os eventos:

a) sair um número par:

$$\text{R: } E_1 = \{2, 4, 6\}$$

b) sair um número menor que 3:

$$\text{R: } E_2 = \{x | x < 3\} = \{1, 2\}$$

c) sair um número menor que 3 ou primo:

$$\text{R: } E = \{x | x < 3 \text{ ou } x = \text{primo}\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

Probabilidade de um evento - $P(E)$

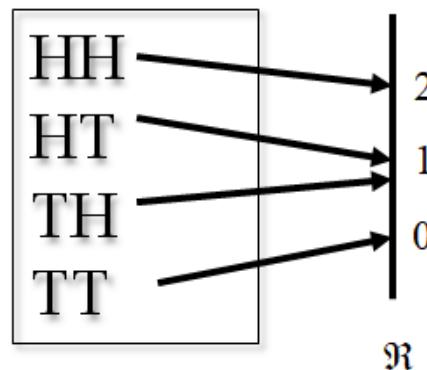
A probabilidade é uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos a um determinado evento (E).

É uma medida numérica de "**quão provável**" é a ocorrência do evento na execução do experimento, é a proporção de vezes que o evento é esperado ocorrer, quando o experimento é repetido sob idênticas condições.

A determinação das probabilidade de um evento depende da natureza do experimento e do espaço amostral associado.

Supondo o lançamento de duas moedas "não viciadas" (honestas). Temos o espaço amostral: $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

A título de exemplificação, vamos definir uma **variável aleatória X** que representa a **contagem do número de caras (H)** no lançamento de duas moedas, ou no lançamento de uma moeda duas vezes, temos:



X	$P(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Ao conjunto $\{x | P(X = x)\}$ denominamos função de probabilidade da variável aleatória X .

Probabilidade: Resultados Elementares Igualmente Prováveis

Resultados elementares igualmente prováveis

Conclusões baseadas em dados empíricos, oriundos de uma observação experimental, são encerradas com incerteza que é expressa em termos de probabilidade. Assim, a atribuição é baseada nas características teóricas da realização do fenômeno.

Definição de Laplace de Probabilidade



Portrait of Pierre-Simon Laplace by Johann Ernst Heinsius (1775). Fonte:
Wikipedia

"Quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos igualmente possíveis". Ao jogarmos uma moeda honesta ("**não viciada**"), não podemos afirmar que cairá Cara (H) ou Coroa (T). Por assim definimos a Probabilidade de H como:

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{1}{2}$$

Exemplos

1) No lançamento de um dado com os lados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual a probabilidade de cair Cara, $P(H)$?

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{0}{6} = 0$$

Chamamos esse tipo de **Evento Impossível**.

2) No lançamento de um dado com os lados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual a probabilidade de cair um número entre 1 e 6?

$$P(H) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{6}{6} = 1$$

Chamamos esse tipo de **Evento Certo**.

Probabilidade de um Evento

Assim, $P(E)$ é a probabilidade de um evento E , ou seja, é um número entre 0 e 1, quanto mais próximo a 1, maior a chance de sua ocorrência. A proporção de vezes que um evento simples pode ocorrer pode ser determinada sem executar o experimento.

Portanto, se S consiste de k eventos simples $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ que são **igualmente prováveis**, a probabilidade de cada e_i é $\frac{1}{k}$ se E consiste de m desses k elementos, então temos:

$$P(E) = \frac{\text{nº de elementos em } E}{\text{nº de elementos em } S} = \frac{m}{k},$$

Portanto $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se, e somente se:

i) $0 \leq P(E) \leq 1, \forall E \subset S.$

ii) $P(S) = 1$, assim como, $P(\emptyset) = 0$

iii) $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \sum_{i=1}^k P(E_i)$ com os eventos E_i **disjuntos (mutuamente excludentes)**.

Exemplos

1) Descreva o espaço amostral e a probabilidade de sair pelo menos uma face cara no lançamento de uma moeda três vezes.

Teorema 1

Se ϕ for espaço amostral vazio:

$$P(\phi) = 0$$

Demonstração:

Para qualquer evento A , podemos escrever:

$A = A \cup \phi$, com A e ϕ disjuntos, apresentado na propriedade (iii), temos:

$P(A) = P(A) + P(\phi)$, como conclusão imediata, temos:

$P(\phi) = 0$, mas se $P(A) = 0$, não é verdadeiro que $A = \phi$, existem situações que atribuiremos $P(E) = 0$ para um evento que pode ocorrer.

Teorema 2

Se \bar{A} for o evento complementar de A , então:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Demonstração:

Podemos escrever:

$$S = A \cup \bar{A}, \forall A,$$

Empregando a propriedade 2 e 3, temos:

$$P(U) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}), \text{ assim, } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Essa propriedade é importante, pois, muitas vezes é mais simples calcularmos a $P(\bar{A})$ do que $P(A)$.

Propriedade da multiplicação (E)

Dados dois eventos A e B de interesse, qual a probabilidade de ocorrência de ambos? Se esses eventos são **independentes**, a probabilidade de ocorrência de ambos é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo: Jogamos duas moedas, honestas, qual a probabilidade de ambas as faces serem cara (H).

$$P(H \cap H) = P(H) \cdot P(H)$$

$$P(H \cap H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(H \cap H) = \frac{1}{4}$$

HH
HT
TH
TT

Propriedade da adição (OU)

Se os eventos A e B são **disjuntos**, ou seja:

$$A \cap B = \phi$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo: Jogamos um dado, qual a probabilidade de sair 5 ou 6 ?

$$P(5 \cup 6) = P(5) + P(6)$$

$$P(5 \cup 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$P(5 \cup 6) = \frac{1}{3}$$

Probabilidade: Frequência Relativa

Probabilidade e Frequência Relativa

Outra maneira de atribuição de probabilidade é por meio da repetição do experimento várias vezes para obtermos informações à respeito da frequência de ocorrência dos diferentes resultados.

Se um experimento é repetido n vezes a frequência relativa (f_i) de um evento E em n ensaios é:

$$f_n(E) = \frac{\text{nº vezes que } E \text{ ocorre em } n \text{ ensaios}}{n}$$

Se as condições dos experimentos não mudam, quando o número n de vezes que o ensaio é realizado tende ao infinito a frequência relativa tende a se estabilizar em um valor numérico único, a **probabilidade do Evento E**.

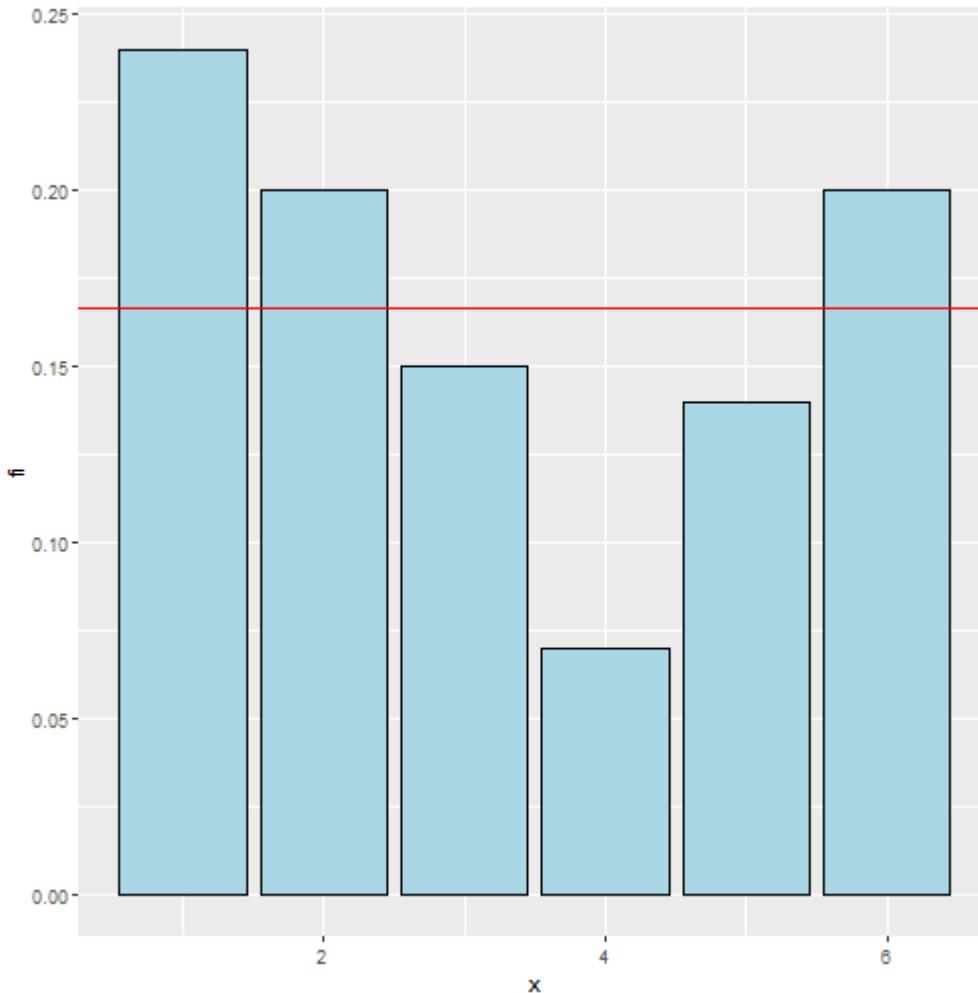
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(E) = P(E)$$

Se jogarmos um dado não viciado, muitas vezes e contarmos as vezes que cada lado sai, o valor da frequência relativa de cada tenderá a $\frac{1}{6} = 0,1667$.



Vamos definir n como o número de vezes que o experimento será realizado (100). Depois disso, vamos simular o lançamento de n dados e calcular a frequência de cada elemento.

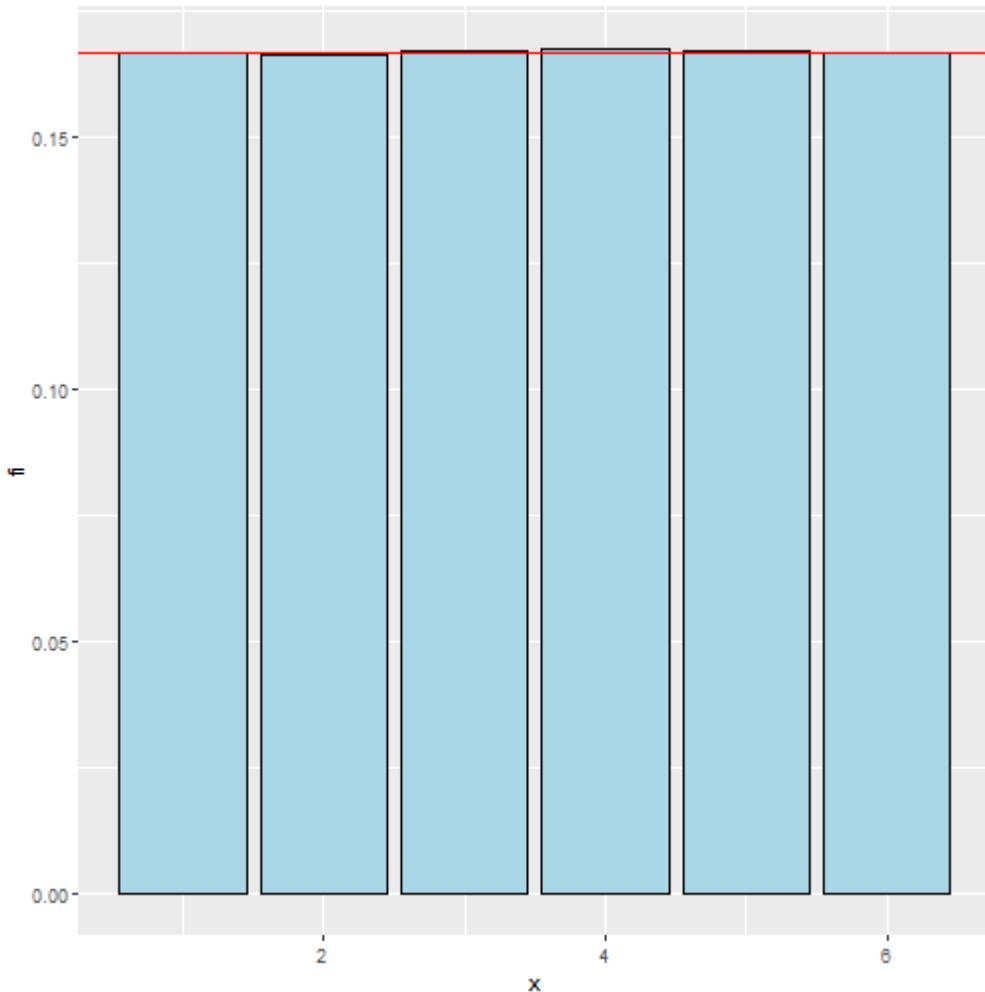
```
# Carregando pacotes
library(tidyverse)
n <- 100
x <- n %>%
  runif(min=.5,max=6.5) %>%
  round()
# Criando a tabela e posterior gráfico
tibble(x) %>%
  group_by(x) %>%
  summarise(
    ni = n(),
    fi = ni/n
  ) %>%
  ggplot(aes(x=x,y=fi)) +
  geom_col(color="black",fill="lightblue") +
  geom_hline(yintercept = 1/6,color="red")
```



Observe que os valores de f_i são diferentes, não houve a convergência para os valores de probabilidade $P(E) = 0, 16667$, linha vermelha no gráfico.

Agora vamos aumentar o n para 1.000.000, e observar a convergência para o valor de $1/6$, linha vermelha no gráfico.

```
n <- 1e6 # 1000000 - 1 milhão
x <- n %>%
  runif(min=.5,max=6.5) %>%
  round()
# Criando a tabela e posterior gráfico
tibble(x) %>%
  group_by(x) %>%
  summarise(
    ni = n(),
    fi = ni/n
  ) %>%
  ggplot(aes(x=x,y=fi)) +
  geom_col(color="black",fill="lightblue") +
  geom_hline(yintercept = 1/6,color="red")
```



Quando $n \rightarrow \infty$ os valores de $f_i \rightarrow P(E) = 0,16667$.

Exemplo

Dada a seguinte tabela, referente ao sexo (F, M) e a cor do cabelo (*Ruivos* e *Não Ruivos*) de crianças em uma escola:

	Ruivo (R)	Não Ruivo (\bar{R})	TOTAL
Feminino (F)	4	26	30
Masculino (\bar{F})	17	13	30
TOTAL	21	39	60

Ao selecionarmos um aluno ao acaso, pergunta-se:

a) Qual a probabilidade do estudante ser *Ruivo*:

$$\text{R: } P(\text{Ruivo}) = \frac{21}{60} = 0,35$$

b) Qual a probabilidade do estudante ser do sexo *Feminino*?

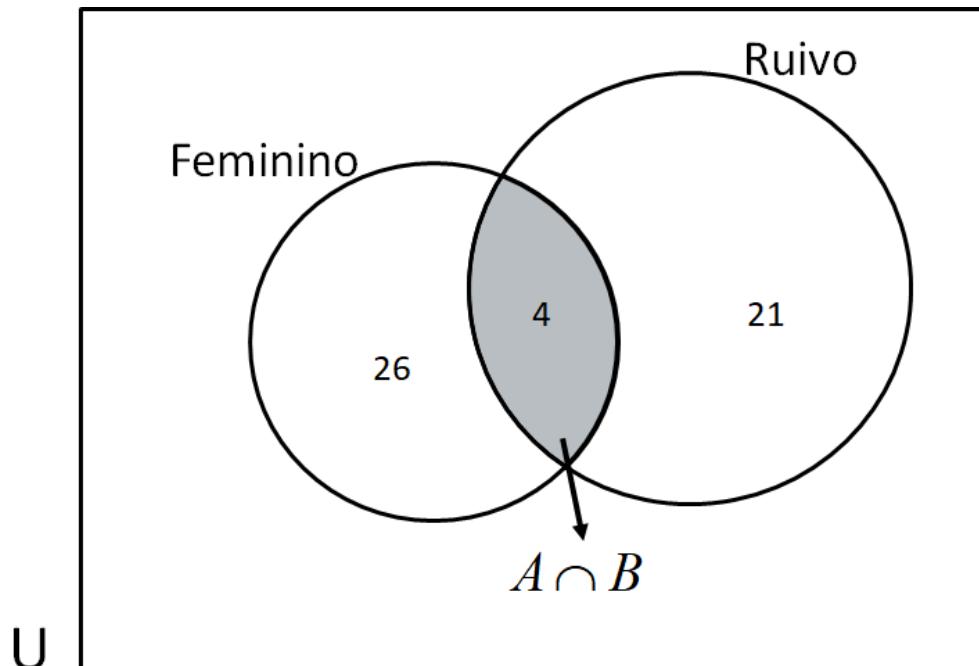
$$\text{R: } P(\text{Feminino}) = \frac{30}{60} = 0,50$$

c) Qual a probabilidade do estudante ser do sexo *Feminino* e *Ruivo*?

$$\text{R: } P(\text{Feminino} \cap \text{Ruivo}) = \frac{4}{60} = 0,06667$$

c) Qual a probabilidade do estudante ser do sexo *Feminino* ou *Ruivo*?

Observe que existe uma região de intersecção entre esses conjuntos, então para calcularmos $P(F \cup R)$ devemos somar $P(F)$ com $P(R)$ e subtraírmos uma vez $P(F \cap R)$.



R:

$$P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R) = \frac{21}{60} + \frac{30}{60} - \frac{4}{60} = \frac{47}{60} = 0,7833$$

Regra de Adição da Probabilidade

No exemplo anterior é simples verificar que somamos duas vezes a interseção dos conjuntos na parcela $P(F) + P(R)$, ou seja, os indivíduos que são do sexo feminino e ruivos $P(F \cap R)$, por isso precisamos descontar 1 vez essa probabilidade da soma.

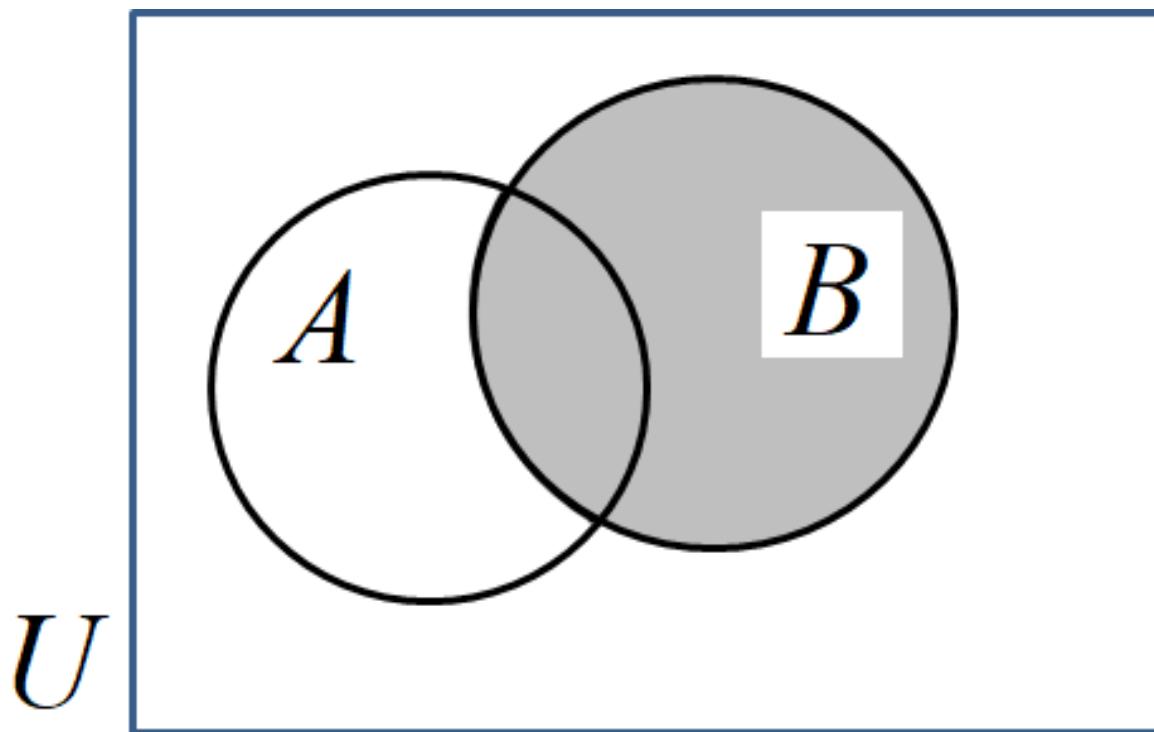
Então temos a regra da adição da probabilidade:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema 3

Se A e B forem dois eventos quaisquer, então,
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

Demonstração: A ideia principal dessa demonstração é decompor $A \cup B$ em dois eventos disjuntos, e em seguida aplicar a propriedade 3 da definição de probabilidade.



Demonstração

$$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$$

Aplicando a função de probabilidade:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}),$$

Assim, temos que:

$$P(B \cap \bar{A}) = P(A \cup B) - P(A) \text{ (i)}$$

Agora podemos definir B como a reunião de dois conjuntos disjuntos.

$$B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$$

Aplicando a função de probabilidade:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}),$$

Assim, temos:

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) \text{ (ii)}$$

A partir de **(i)** e **(ii)** temos:

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Finalmente, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 4

Demonstrar que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Resposta

Inicialmente vamos definir: $D = B \cup C$ (i)

Então,

$$P(A \cup D)$$

Pela lei da adição de probabilidade:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) \text{ (ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), temos:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

Ao termo $P(B \cup C)$ podemos aplicar a lei de adição e temos:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C))$$

Agora devemos aplicar a Primeira lei Distributiva ao termo $A \cap (B \cup C)$ e temos:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

Observe que ao termo $P((A \cap B) \cup (A \cap C))$ podemos aplicar a lei de adição de probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) \\ &\quad - P((A \cap B) \cap (A \cap C))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) \\ &\quad - P((A \cap B) \cap (A \cap C))] \end{aligned}$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} P(A \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exercícios

1) Considere um experimento e os eventos A e B tais que:

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/3 \text{ e } P(A \cap B) = 1/4$$

Responda:

- a) Qual a probabilidade de A não ocorrer?
- b) Qual a probabilidade de B não ocorrer?
- c) Qual a probabilidade de A ou B ocorrer?
- d) Qual a probabilidade de A não ocorrer e B não ocorrer?
- e) Qual a probabilidade de A não ocorrer ou B não ocorrer?
- f) Qual a probabilidade que ocorra apenas o B , e não ocorra o A ?

Respostas

a) = $1/2$

b) = $2/3$

c) = $7/12$

d) = $5/12$

e) = $3/4$

f) = $1/12$

Probabilidade Condicional e Independência

Probabilidade Condicional

Voltando aos dados referentes ao sexo e a cor do cabelo de crianças em uma escola:

	Ruivo (R)	Não Ruivo (\bar{R})	TOTAL
Feminino (F)	4	26	30
Masculino (\bar{F})	17	13	30
TOTAL	21	39	60

Agora, sabendo que foi sorteado uma aluna (F), qual a probabilidade dessa aluna ser ruiva (R)?

$$P(R|F) = \frac{4}{30} = 0,1333$$

Lê-se: "a probabilidade de R dado F".

Observe que a informação prévia "...foi sorteado um aluno do sexo Feminino...", restringiu o espaço amostral de 60 alunos para 30 meninas, como base para a divisão da quantidade de $(F \cap R) = 4$.

Probabilidade Condicional

Assim, para dois eventos quaisquer A e B , sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}(i)$$

Em analogia, sendo $P(A) > 0$, definimos a probabilidade condicional de B dado A como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}(ii)$$

Observe que o termo $(A \cap B)$ está presente em **(i)** e **(ii)**, então, podemos isolá-lo e igualar as duas expressões e, portanto, definimos a **Regra do Produto de Probabilidade**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Independência entre eventos.

Dizemos que dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de A não depende da ocorrência de B e vice-versa. Nessas condições:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

Ou seja,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo

Voltando aos dados referentes ao sexo e a cor do cabelo de crianças em uma escola:, verificar se esses eventos são independentes.

	Ruivo (R)	Não Ruivo (\bar{R})	TOTAL
Feminino (F)	4	26	30
Masculino (\bar{F})	17	13	30
TOTAL	21	39	60

Na independência, a $P(F)$ deve ser igual à $P(F|R)$ e vice- versa.

Podemos verificar:

$$P(F) = P(F|R)$$

$$P(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)}$$

$$\frac{30}{60} = \frac{4/60}{21/60}$$

$0,50 = 0,19$ FALSO, então concluímos que os eventos **NÃO SÃO INDEPENDENTES**, ou seja a cor do cabelo depende do sexo.

Exemplo

Agora, teste a independência para a seguinte condição:

	Ruivo (R)	Não Ruivo (\bar{R})	TOTAL
Feminino (F)	15	18	33
Masculino (\bar{F})	11	13	24
TOTAL	26	31	57

Na independência, a $P(F)$ deve ser igual à $P(F|R)$ e vice-versa.

Podemos verificar:

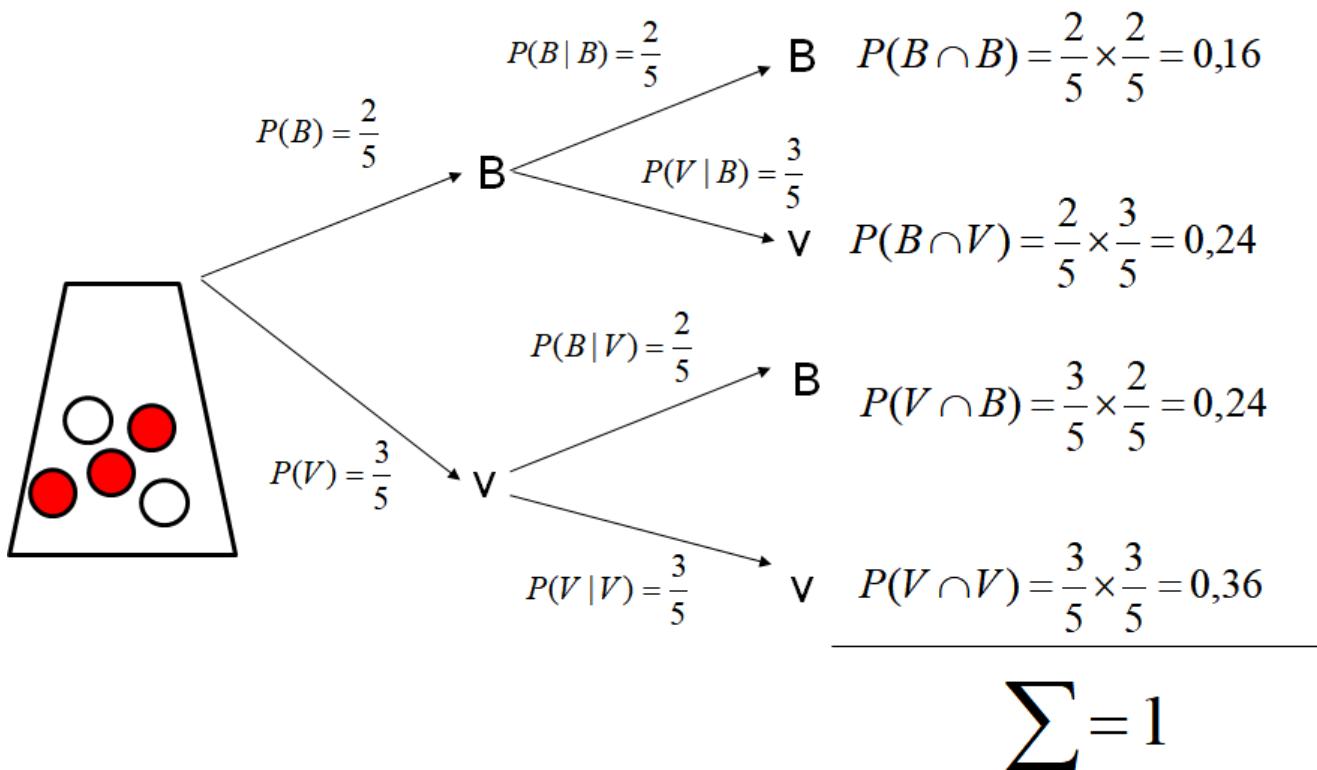
$$P(F) = P(F|R)$$

$$P(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)}$$

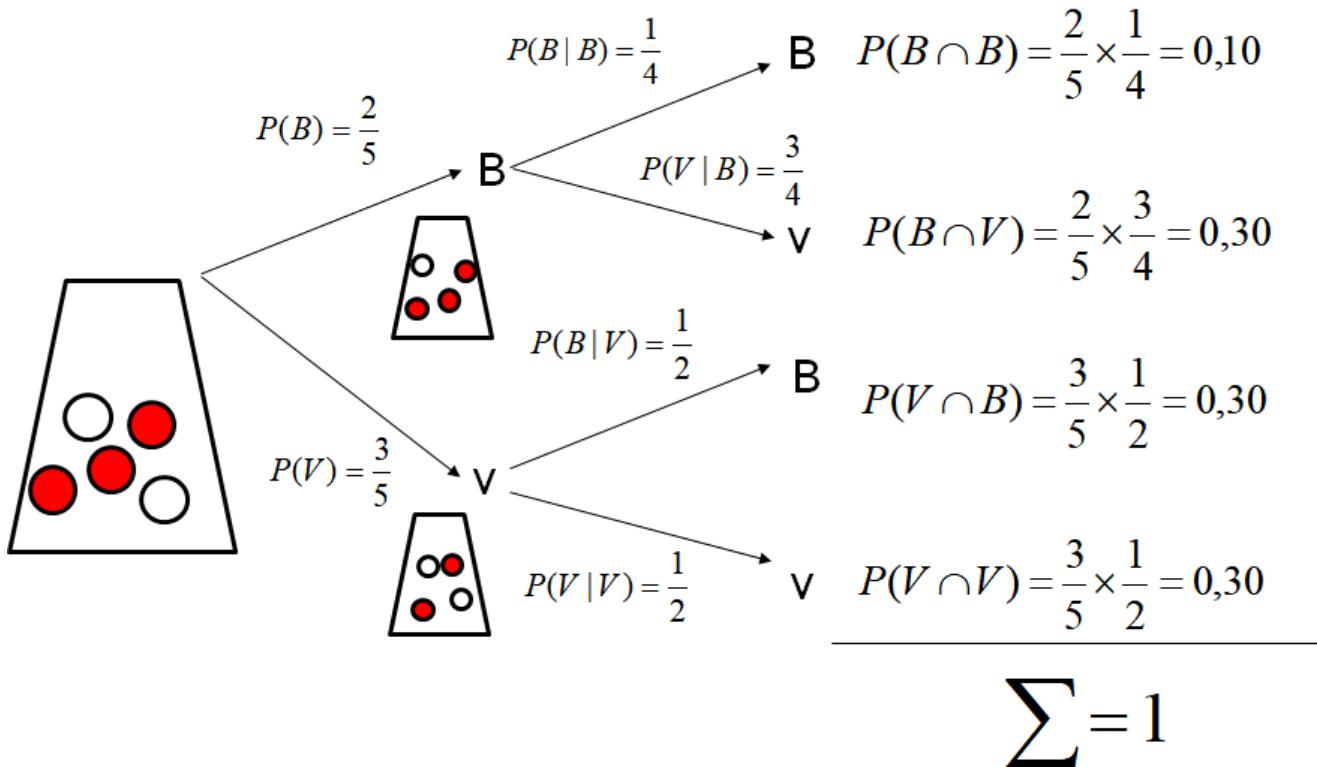
$$\frac{33}{57} = \frac{15/57}{26/57}$$

$0,58 = 0,58$ VERDADEIRO, então concluímos que os eventos **SÃO INDEPENDENTES**, ou seja, a cor do cabelo não depende do sexo.

INDEPENDÊNCIA: Imagine uma urna contendo 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Serão sorteados duas bolas **COM REPOSIÇÃO**, ou seja, sortear-se a primeira bola, anotá-se sua cor, **devolve-se a bola para a urna** e realizá-se o segundo sorteio. Nessas condições o espaço amostral desse ensaio seguido de suas respectivas probabilidades de ocorrência, pode ser dado por:
 $S = \{BB, BV, VB, VV\}$



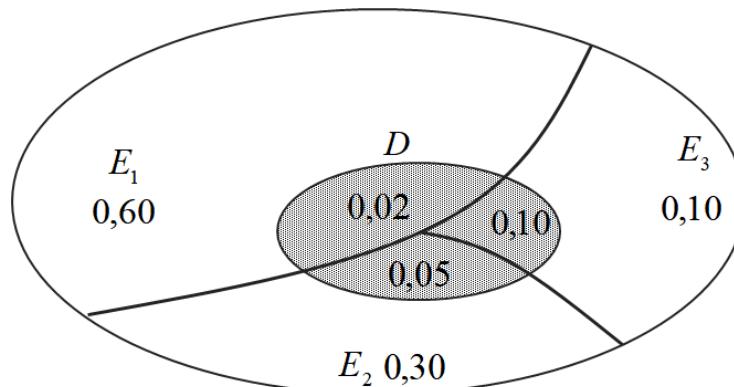
NÃO INDEPENDÊNCIA Na mesma situação anterior onde serão sorteadas duas bolas, mas agora **SEM REPOSIÇÃO**, ou seja, sorteia-se a primeira bola, anotá-se sua cor, contudo, **não se devolve a bola para a urna** e realizá-se o segundo sorteio. Nessas condições o espaço amostral é reduzido de um sorteio para outro e as probabilidades de ocorrência associadas ao espaço amostral $S = \{BB, BV, VB, VV\}$ serão dadas por:



Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Considere a incidência de uma doença em um rebanho em diferentes faixas etárias: *jovens*, *adultos* e *idosos*, E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.



Sabe-se que $P(E_1) = 0,60$, $P(E_2) = 0,30$ e $P(E_3) = 0,10$, além disso, é conhecido que as incidências da doença nas diferentes faixas etárias são:

$$P(D|E_1) = 0,02$$

$$P(D|E_2) = 0,05$$

$$P(D|E_3) = 0,10$$

Toma-se um animal desse rebanho ao acaso e verificamos que ele está doente.

Qual a probabilidade do animal escolhida pertencer à faixa etária E_1 , ou seja ?

$$P(E_1|D) = ?$$

Aplicando a expressão da probabilidade condicional, temos que:

$$P(E_1|D) = \frac{P(E_1 \cap D)}{P(D)} \quad (i)$$

Assim, podemos isolar $P(E_1 \cap D)$ em (i):

$P(E_1 \cap D) = P(E_1|D) \cdot P(D)$, da mesma forma que:

$$P(E_1 \cap D) = P(D|E_1) \cdot P(E_1)$$

Assim, podemos reescrever (i) como:

$$P(E_1|D) = \frac{P(D|E_1) \cdot P(E_1)}{P(D)}$$

O evento Doente (D) pode se escrito como a reunião de 3 eventos disjuntos, ou seja:

$$D = (E_1 \cap D) \cup (E_2 \cap D) \cup (E_3 \cap D)$$

Aplicando a função de probabilidade temos:

$$P(D) = P(E_1 \cap D) + P(E_2 \cap D) + P(E_3 \cap D)$$

Em analogia à passagem anterior:

$$P(D) = P(D|E_1) \cdot P(E_1) + P(D|E_2) \cdot P(E_2) + P(D|E_3) \cdot P(E_3)$$

Assim, podemos reescrever (i) como:

$$P(E_1|D) = \frac{P(D|E_1) \cdot P(E_1)}{P(D|E_1) \cdot P(E_1) + P(D|E_2) \cdot P(E_2) + P(D|E_3) \cdot P(E_3)}$$

O Teorema de Bayes expressa uma probabilidade condicional em termos de outras probabilidades condicionais e marginais.

Essas probabilidades podem ser teoricamente deduzidas a partir de um modelo representado pelo espaço amostral em que esses eventos são definidos, pela expressão:

$$P(E_i|D) = \frac{P(D|E_i) \cdot P(E_i)}{\sum_{j=1}^k P(D|E_j) \cdot P(E_j)}$$

Portanto, para o exemplo temos que a probabilidade da pessoa escolhida ser pertencente à faixa etária E_1 , dado que ele é D é:

$$P(E_1|D) = \frac{0,02 \cdot 0,60}{0,02(0,60) + 0,05(0,30) + 0,10(0,10)}$$

$$P(E_1|D) = \frac{0,012}{0,037}$$

$$P(E_1|D) = 0,3243$$

Aplicando a mesma fórmula podemos calcular:

$$P(E_2|D) = \frac{0,05 \cdot 0,30}{0,02(0,60) + 0,05(0,30) + 0,10(0,10)}$$

$$P(E_2|D) = \frac{0,015}{0,037}$$

$$P(E_2|D) = 0,4054$$

$$P(E_3|D) = \frac{0,10 \cdot 0,10}{0,02(0,60) + 0,05(0,30) + 0,10(0,10)}$$

$$P(E_3|D) = \frac{0,01}{0,037}$$

$$P(E_3|D) = 0,2703$$

Exercícios

1- Considere dois eventos A e B, disjuntos, com: $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,5$

Calcule:

- a) $P(A \cap B)$
- b) $P(A \cup B)$
- c) $P(A | B)$
- d) $P(\bar{A})$
- e) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

2- Se $P(A \cup B) = 0,8$; $P(A) = 0,5$ e $P(B) = x$, determine x para os casos:

- a. A e B serem disjuntos
- b. A e B serem independentes

3- Em uma turma de Bioestatística da FEIS temos 40% de estudantes do sexo masculino. Entre eles, 20% não foi para a excursão em Ubatuba, ao passo que entre as meninas essa porcentagem foi de 50%. Qual a probabilidade de que um aluno selecionado ao acaso seja:

- a. Do sexo Masculino, e não tenha ido à Excursão.
- b. Do sexo Feminino ou não tenha ido à Excursão.

4 - Se $P(B) = 0,4$; $P(A) = 0,7$ e $P(A \cap B) = 0,3$, calcule: $P(A | \bar{B})$

1- Considere dois eventos A e B, disjuntos, com: $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,5$

Calcule:

$$a) P(A \cap B) \quad b) P(A \cup B) \quad c) P(A|B) \quad d) P(\bar{A}) \quad e) P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

a) $P(A \cap B) = 0$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8$

c) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{0,5} = 0$

d) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

e) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$

2- Se $P(A \cup B) = 0,8$; $P(A) = 0,5$ e $P(B) = x$, determine x para os casos:

- a. A e B serem disjuntos
- b. A e B serem independentes

a) $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0,8 = 0,5 + x$$

$$x = 0,8 - 0,5 = 0,3$$

b) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,8 = 0,5 + x - 0,5x$$

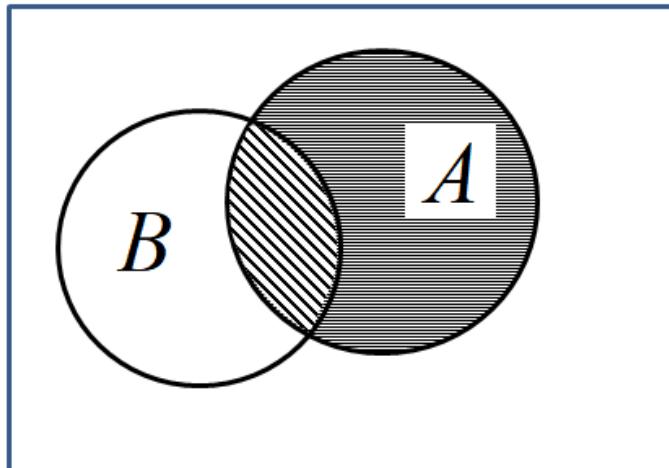
$$0,5x = 0,8 - 0,5$$

$$x = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

3- Em uma turma de Bioestatística da FEIS temos 40% de estudantes do sexo masculino. Entre eles, 20% não foi para a excursão em Ubatuba, ao passo que entre as meninas essa porcentagem foi de 50%. Qual a probabilidade de que um aluno selecionado ao acaso seja:

- a. Do sexo Masculino, e não tenha ido à Excursão.
 - b. Do sexo Feminino ou não tenha ido à Excursão.
- a) Sendo M-Masculino, F-Feminino, E-Evento: não ir à excursão e \bar{E} -ir à excursão:
- $$P(M \cap E) = P(M) \cdot P(E|M)$$
- $$P(M \cap E) = 0,4 \times 0,2 = 0,08 \text{ ou } 8\%$$
- b) $P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E)$
- $$P(F \cup E) = P(F) + P(M) \cdot P(E|M) + P(F) \cdot P(E|F) - P(F) \cdot P(E|F)$$
- $$P(F \cup E) = P(F) + P(M) \cdot P(E|M)$$
- $$P(F \cup E) = 0,6 + 0,4 \times 0,2 = 0,68 \text{ ou } 68\%$$

4 - Se $P(B) = 0,4$; $P(A) = 0,7$ e $P(A \cap B) = 0,3$, calcule:



S

$$A = (B \cap A) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(B \cap A) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(B \cap A)$$

Assim:

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{1 - P(B)}$$

$$P(A | \bar{B}) = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,4} = 0,6667 \text{ ou } 66,7\%$$