Estatística e Informática

Aula 03 - Somatório e Análise Combinatória

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(29-04-2021)

SOMATÓRIO

Definições

Conjunto de dados: Uma variável de interesse (altura, idade ou peso, por exemplo) será representada pelas letras maiúsculas X, Y, Z e os valores específicos assumidos por estas variáveis (dados ou observações) pelas letras minúsculas x, y e z, respectivamente.

Para distinguir um valor do outro, utilizamos um subscrito i, ou seja, uma variável auxiliar que representa a posição do valor específico dentro do conjunto de dados.

Assim temos:

$$Altura : X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ \text{com}\ i = 1, 2, .., n.$$

$$Idade : Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, (i = 1, 2, .., n).$$

$$Peso : Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}, (i = 1, 2, .., n).$$

Assim, observamos que um valor típico da variável *Altura*, por exemplo, será designado por x_i e o valor final desta amostra por x_n, sendo que n representa o tamanho da amostra, o **número de observações** ou de **realizações** da variável.

Somatória

Ao realizar a análise de uma variável quantitativa (numérica) é necessário somarmos todos os seus valores valores.

Essa operação é frenquetemente utilizada na estatística, assim, utilizaremos uma notação compacta para representar a soma de todos os valores de uma variável de interesse.

Assim, dado a variável X a soma de todos seus valores será dada pela letra grega sigma maiúscula Σ:

Dados $X = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, a soma desses 5 valores:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

será representada pela notação:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

onde i atua como o índice, ou seja, a cada *iteração* ele muda e representa um dos valores 5 de X

Dado $X = \{3, 0, 5, 9, 7\}$ e $Y = \{2, 3, 9, 1, 2\}$, calcular:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3 + 0 + 5 + 9 + 7 = 24$$

Ao invés da soma ser com os índices i de 1 a n, podemos ter, por exemplo:

$$\sum_{i=2}^{4} y_i = 3 + 9 + 1 = 13$$

Observe que:

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

uma vez que:

$$3^2 + 0^2 + 5^2 + 9^2 + 7^2 \neq (3 + 0 + 5 + 9 + 7)^2$$

$$9 + 0 + 25 + 81 + 49 \neq (24)^2$$

$$164 \neq 576$$

Qual a soma da multiplicação entre duas variáveis:

Dado $X = \{3, 0, 5, 9, 7\}$ e $Y = \{2, 3, 9, 1, 2\}$, calcular:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 + x_5 \cdot y_5$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 3 \cdot (2) + 0 \cdot (3) + 5 \cdot (9) + 9 \cdot (1) + 7 \cdot (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 6 + 0 + 45 + 9 + 14 = 74$$

No R

```
X=c(3,0,5,9,7)
Y=c(2,3,9,1,2)
sum(X*Y)
```

```
## [1] 74
```

No Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y		OU			XY	
2	3	2					6	=A2*B2
3	0	3					0	=A3*B3
4	5	9					45	=A4*B4
5	9	1					9	=A5*B5
6	7	2					14	=A6*B6
7		**74**					**74**	
8		=SOMARPRODUTO(A2:A6;B2:B6)					=SOMA(G2:G6)	

Propriedades da Somatória

i) A somatória de uma constante (k) é igual a nk.

$$\sum_{i=1}^{n} k = k + k + \cdots + k = n \cdot k$$

ii) A somatória dos produtos de uma constante k e uma variável X é igual ao produto da constante pela soma dos valores da variável.

$$\sum_{i=1}^{n} kx_i = kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n = k \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = k \sum_{i=1}^{n} x_i$$

iii) A somatória da adição de duas variáveis é igual à adição das somas dessas duas variáveis:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \cdots + x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exercícios

iv) Calcular, portanto $\sum_{i=1}^{n} (k \cdot x_i + k) = ?$

v) Dado a média sendo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Provar que:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

Resposta

iv) Calcular, portanto $\sum_{i=1}^{n}(k \cdot x_i + k) = ?$

$$\sum_{i=1}^{n}(k \cdot x_i + k) = \sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} k$$

$$\sum_{i=1}^{n}(k \cdot x_i + k) = \sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} k$$

$$\sum_{i=1}^{n}(k \cdot x_i + k) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot k$$

Resposta

v) Dado: $\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

ANÁLISE COMBINATÓRIA E MÉTODOS DE NUMERAÇÃO

Probabilidade e Análise Combinatória

A Probabilidade permite analisar ou calcular as chances de obter determinado resultado diante de um experimento que dizemos aleatório. Por exemplo, qual a chance do número 5 sair no lançamento de um dado. Ou no lançamento de 4 moedas, sair pelo menos uma face **Cara**.

A partir disso, a probabilidade é determinada pela razão entre o número de eventos possíveis e número de eventos favoráveis, sendo apresentada pela seguinte expressão:

$$P(E) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}}$$

onde $P(E)$ é a probabilidade de ocorrência do evento E.

Vamos imaginar a segunte situação: um rebanho é composto por 100 animais, temos 20 indivíduos doentes e 80 sadios.

Qual a probabilidade de, em uma amostra aleatória simples de 5 animais, selecionarmos 2 animais doentes e 3 animais sadios?

Para respondermos essa quetão precisaremos calcular:

nº de resultados favoráveis

Ou seja, de quantas maneiras poderemos escolher 3 animais do total de 80 sadios e 2 animais dos 20 doentes.

nº total de resultados possíveis

De quantas maneiras poderemos escolher 5 animais (independentemente de serem sadios ou doentes) em um total de 100 animais.

Análise Combinatória

Portanto, para calcularmos a probabilidade do evento (escolher 3 animais sadios e 2 doentes), faz-se necessário relembrarmos os conceitos de métodos de numeração e análise combinatória (Permutações, Arranjos e Combinações).

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem, também chamado de princípio multiplicativo, postula que:

> "quando um evento é composto por n etapas sucessivas e **independentes**, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, o número total de possibilidades do evento ocorrer é dado pelo produto $(x) \cdot (y)$".

Em resumo, no princípio fundamental da contagem, multiplica-se o número de opções entre as escolhas que lhe são apresentadas.

Exemplos

1. Em um restaurante, há 5 aperitivos no menu, 10 entradas principais e 4 sobremesas. De quantas maneiras uma refeição pode ser solicitada se um aperitivo, um prato principal e uma sobremesa forem escolhidos?

2. Quantos códigos numéricos de 5 dígitos são possíveis se:
   (a) não há restrições?
   (b) o primeiro dígito não pode ser 0?
   (c) nenhuma repetição é permitida?
   (d) além de números você pode utilizar todas as letras do teclado (maiúsculas e minúsculas - 52 ao todo) e mais 33 símbolos especiais e sem qualquer restrição quanto à repetição.

3. Um dos métodos utilizados para roubo de senhas e invasão de contas é o método de Ataque de Força-bruta (Brute-force attack). Nessa técnica são testadas combinações de números, letras e caracteres especiais até que a senha seja descoberta. Levando-se em consideração que um programa espião pode testar em média 435 milhões senhas por segundo:
   (a) qual o tempo máximo em segundos ele levaria para decodificar uma senha composta na condição (d) do exercício anterior? (a) qual o tempo máximo em dias ele levaria para decodificar uma senha composta na condição (d) do exercício anterior, mas com 9 dígitos?

Permutações

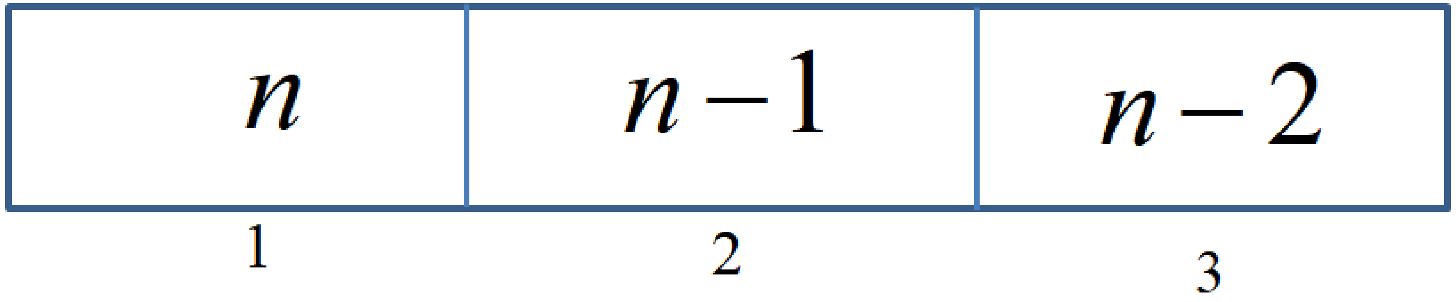
Quando estamos preocupados em responder "de quantas maneiras um evento pode ocorrer", utilizamos o conceito de permutação para essa tarefa. Digamos que temos n objetos diferentes, de quantas maneiras podemos **dispor** (**permutar**) esses objetos?

Dado o conjunto de letras $L = a, b, c$, de quantas maneiras podemos permutá-las?

a, b, c
a, c, b
b, a, c
b, c, a
c, a, b
c, b, a

Equivale em colocar os elementos dentro de caixas com n compartimentos em alguma ordenação. E como consequência do princípio da multiplicação, as possibilidades de inserção dentro dentro de uma caixa são multiplicadas pelas possibilidades da caixa seguinte, e assim sucessivamente, ou seja:

Permutações



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (2) \cdot (1)$$

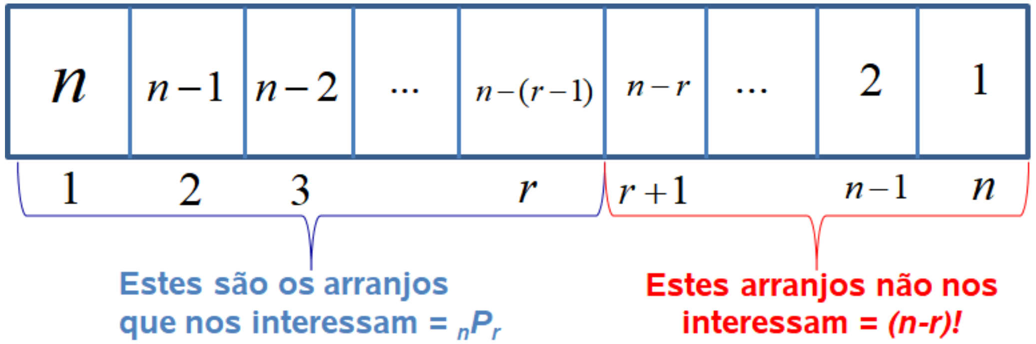
$$3! = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Exemplos:

1. Quantos números de 7 algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7?
2. Quantos números de 7 algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7 de modo que em todos os números formados, o algarismo 6 seja imediatamente seguido pelo algarismo 7?
3. Três (03) chineses, 04 americanos e 05 italianos serão dispostos em fila (dispostos em linha reta, respeitando o distanciamento social e todos usando máscaras) de modo que as pessoas da mesma nacionalidade estejam sempre juntas. De quantas maneiras a fila poderá ser formada, de modo que o primeiro da fila sempre seja um italiano?

Arranjos

O arranjo é uma extensão do conceito de fatorial de modo que, se temos n e vamos tomar r elementos desses n (sempre com $0 < r < n$), de quantas maneiras poderemos **dispor** os r elementos amostrados? Nesse caso, **a ordem** com a qual os elementos serão dispostos **IMPORTA** para a contagem.



$$A_p^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

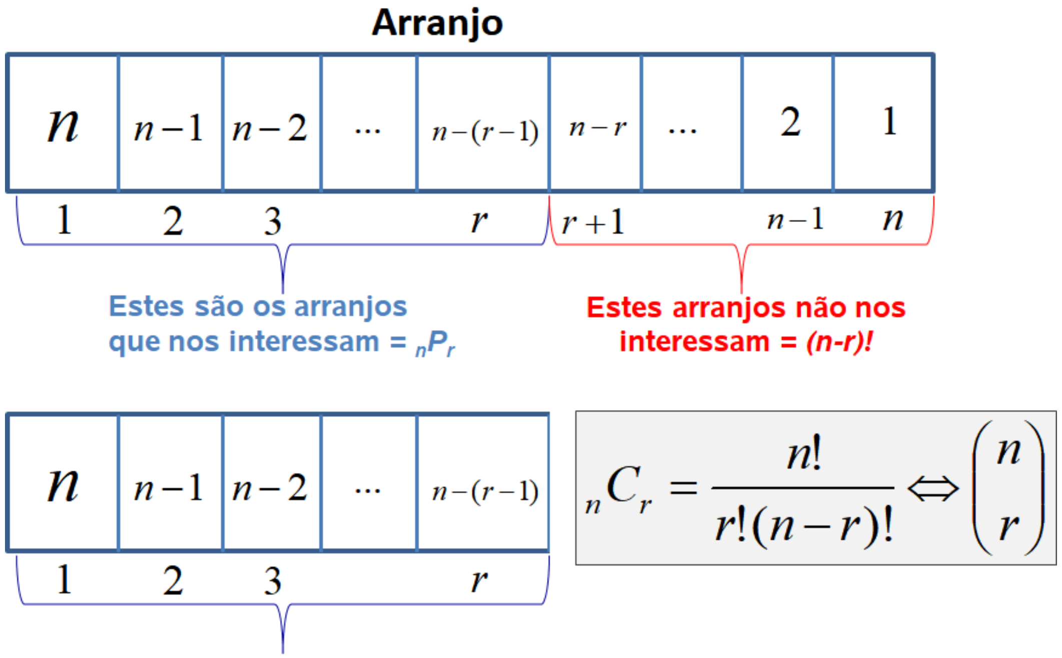
1) A senha de uma conta bancária é formada de 6 números ou de 4 números dentre os números de 0 a 9, dependendo do banco. Os gerentes sempre aconselham utilizar todos os números distintos (sem repetição),

Quantas senhas podem ser formadas no banco do Banco do Brasil, que utiliza 6 números, e no banco Santander que utiliza 4 números, seguindo o conselho dos gerentes?

2) Quantos números de 4 algarismos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que haja pelo menos dois dígitos iguais?

Combinações

Semelhante aos arranjo, nas **Combinações** temos n elementos e vamos amostrar r elementos ($0<r<n$), e estamos interessados em contar de quantas maneiras poderemos **combinar** os r elementos amostrados, nesse caso **a ordem** com a qual os elementos são amostrados **NÃO IMPORTA** para a contagem.



Assim, teremos que descontar dos Arranjos de r elementos as permutações desses r elementos, para isso, basta dividirmos os Arranjos por $r!$ ou seja $C_r^n = \binom{r}{x}$.

Combinações

Voltando para o exemplo do rebanho composto por 100 animais, onde temos 20 indivíduos doentes e 80 sadios, vamos calcular a probabilidade de em uma amostra de 5 animais selecionarmos 2 animais doentes e 3 animais sadios:

$\text{nº de resultados favoráveis}$

Ou seja, de quantas maneiras poderemos escolher 2 animais do total de 20 doentes e 3 animais dos 80 sadios

$$C_2^{20} \cdot C_3^{80} = \binom{20}{2} \cdot \binom{80}{3}$$

$$C_2^{20} \cdot C_3^{80} = \frac{20!}{2!(20-2)!} \cdot \frac{80!}{3!(80-3)!}$$

$$C_2^{20} \cdot C_3^{80} = 190 \cdot 82160$$

$$C_2^{20} \cdot C_3^{80} = 15610400$$

nº total de resultados possíveis

Devemos calcular agora de quantas maneiras poderemos escolher 5 animais (independente de serem sadios ou doentes) em um total de 100 animais.

$C_5^{100} = \binom{100}{5}$

$C_5^{100} = \frac{100!}{5!(100-5)!}$

$C_5^{100} = 75287520$

Finalmente, a probabilidade do evento, amostrar 2 indivíduos doentes e 3 sadios será:

$$P(E) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}} = \frac{15610400}{75287520} = 0,20734 \text{ ou } 20,73\%$$

Agora que temos uma fórmula, podemos calcular a probabilidade de na amostragem de 5 animais tomarmos:

a) nenhum animal doente (todos sadios).
b) 01 doente e 04 sadios.
c) 02 doentes e 03 sadios.
d) 03 doentes e 01 sadio.
e) todos doentes.

Distribuição de Probabilidade

Essa fórmula que acbamos de encontrar decreve uma ditribuição discreta de probabilidade, conhecida na estatística como **Distribuição Hipergeométrica**.

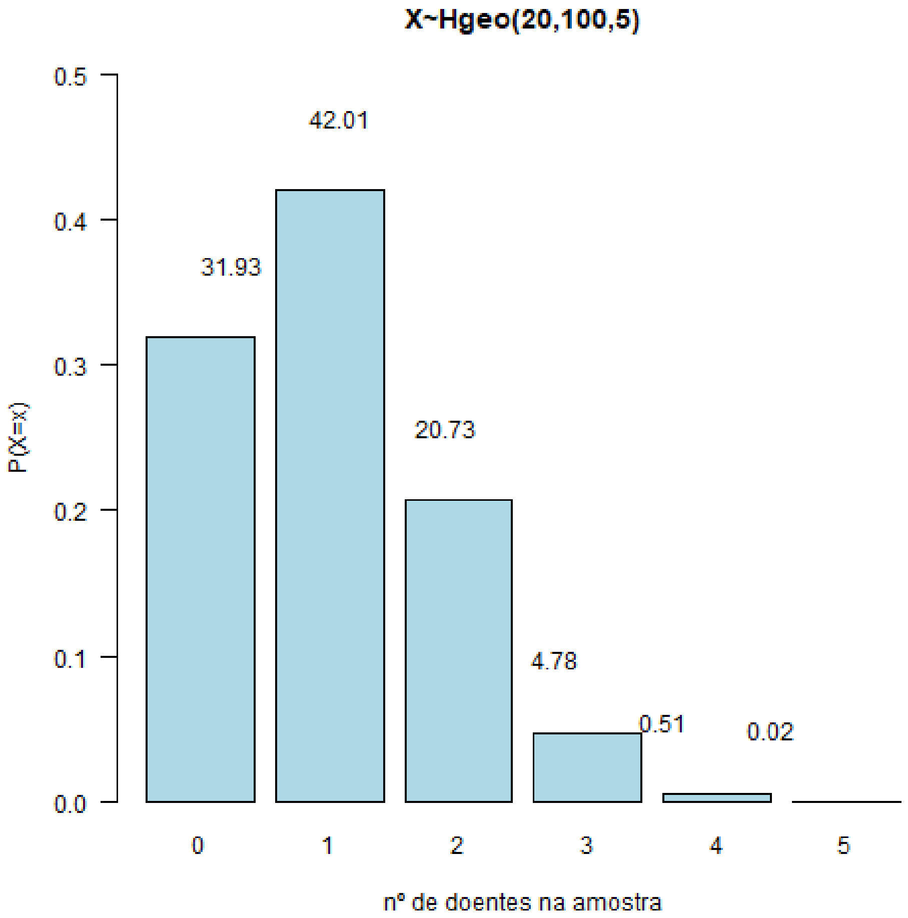
Considere uma população com N objetos nos quais M são classificados como do tipo A e $N-M$ são classificados como do tipo B. Tomamos uma amostra ao acaso, sem reposição e não ordenada de r objetos. Seja X a variável que conta o número de objetos classificados como do tipo A na amostra. Então a distribuição de probabilidade de X será dada por:

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{r-x}}{\binom{N}{r}}$$

Assim, vamos construir essa distribuição no R para termos todas as probabilidades.

```
N = 100 # Número total de elementos na população
M = 20 # número total de elementos de interesse (doentes) na população
r = 5 # tamanho da amostra.
x=0:r # os possiveis valores de doentes na amostra.
px<-dhyper(x,M,N-M,r) # função que faz a distribuição hipergeométrica
barplot(px,names=x,col="lightblue",las=1,ylim=c(0,0.5),
        xlab="n° de doentes na amostra",ylab="P(X=x)",main="X~Hgeo(20,100,5)")
text(1:length(x),px+.05,round(px*100,2))
```

Distribuição Hipergeométrica




```
## # A tibble: 6 x 2
##       x       px
##   <int>    <dbl>
## 1     0 0.319
## 2     1 0.420
## 3     2 0.207
## 4     3 0.0478
## 5     4 0.00515
## 6     5 0.000206
```

OBS: O número de doentes da amostra de 5 animais pode variar de 0 a 5, ao conjunto dessas possibilidades denominamos espaço amostral (letras ω ou S), com a soma de suas probabilidades é sempre igual a 1:

$$\sum_{x=0}^{r} P(x_i) = 1$$

No Excel, temos:

	A	B	C
1	N	100	
2	M	20	
3	r	5	
4		P(X=x)	FÓRMULA
5	0	0.319	=DIST.HIPERGEOM.N(A5;B3;B2;B1;0)
6	1	0.420	=DIST.HIPERGEOM.N(A6;B3;B2;B1;0)
7	2	0.207	=DIST.HIPERGEOM.N(A7;B3;B2;B1;0)
8	3	0.048	=DIST.HIPERGEOM.N(A8;B3;B2;B1;0)
9	4	0.005	=DIST.HIPERGEOM.N(A9;B3;B2;B1;0)
10	5	0.000	=DIST.HIPERGEOM.N(A10;B3;B2;B1;0)