# Estatística e Informática

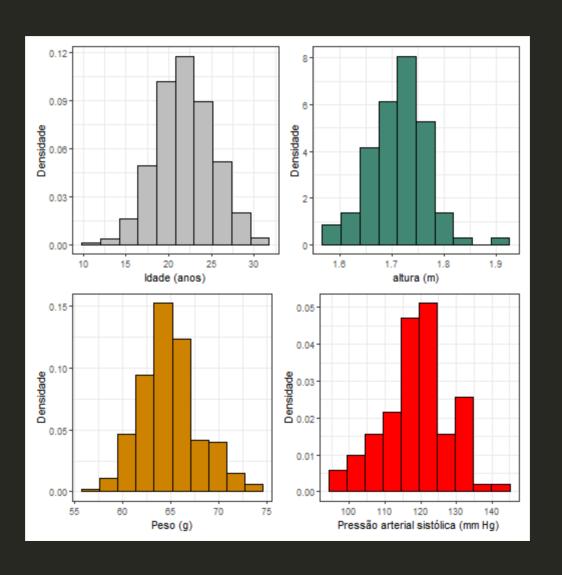
Aula 03 - Distribuição de Frequência

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Ciências Exatas FCAV/UNESP

(14-03-2024)

# Distribuição de frequência de uma variável



## Distribuição de frequência de uma variável

Quando analisamos uma variável aleatória (qualitativa ou quantitativa), devese conhecer a distribuição de frequência dessa variável por meio de suas possíveis realizações (observações).

Nesse sentido, o objetivo dessa aula será apresentar as principais formas e visualização gráfica de variáveis quali e quantitativas.

**Exemplo:** Considerando os dados\_turmas.xlsx amostrados das turmas de Estatísticas temos:

	Α	В	С	D	Е	F	
1	id	sexo	cor_cabelo	cons_alcool	altura	idade_anos	
2	1	F	CC	4	1.68	19	
3	2	F	CE	1	1.59	20	
4	3	F	CC	2	1.7	49	
5	4	F	CE	3	1.5	20	
6	5	M	CE	4	1.76	23	
7	6	M	CC	2	1.6	28	
8	7	M	CC	1	1.84	19	

Sexo			Cabelos			C.A.		
M	Masculino		С	Castanhos		1	Não	
F	Feminino		CC	Cast. Claros		2	Pouco	
			CE	Cast. Escuros		3	Socialmente	
			Р	Pretos		4	Mais que social	

#### Tamanho da População (N)

O tamanho da população N é o número total dos elementos alvos da pesquisa. Muitas vezes não conhecemos esse valor.

Em nosso exemplo, poderíamos entender como N o número de todos os alunos da Unesp que estão no segundo ano de sua graduação.

#### Tamanho da amostra (n)

É o número total de registros de sua base de dados, ou seja o número total de elementos amostrados da população.

O comando glimpse permite que veriquemos o tamanho do banco de dados em linhas (Rows - n) e colunas (Columns - variáveis).

Onde chr representa variáveis do tipo **strings**, ou seja textos e dbl representa variáveis numéricas.



library(tidyverse)

#> \$ cor\_cabelo <chr> "CC", "CE", "CC", "CE", "CE", "CE", "CC", "CC

### Exemplo da base de dados das turmas

Construir uma tabela de frequências para a variável sexo contendo as frequências absolutas  $(n_i)$ , as frequências relativas  $(f_i)$  e a porcentagem (perc) para as categoria existentes.

Após isso, realizar a visualização de dados com gráficos de Colunas, Barras e Setores (Pizza ou *Pie*).

# Frequência Absoluta $\left(n_i ight)$

É definida como o número de observações no conjunto de dados pertencentes à uma categoria ou classe da variável em estudo.

Então, consideramos 1 para F e 2 para M, temos:

$$n_1 = 15$$

$$n_2=29$$

Assim temos a primeira regra da análise de nossa base de dados, a soma da frequência absoluta das classes (k) da variável cetegória é igual a n.

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_i$$

Onde k é o número de categorias da variável em questão, no caso do sexo, temos duas categorias (M e F).

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 = 15 + 29 = 44$$

### Frequência Relativa $(f_i)$

É definida como a proporção de cada categoria em relação ao **Total de observações** (n), ou seja:

$$f_i = rac{n_i}{n}$$

Portanto temos que,

$$f_1=rac{15}{44}=0,3409$$

e

$$f_2=rac{29}{55}=0,6591$$

Assim, temos que a soma das frequências relativas sempre será igual a 1:

$$\sum_{i=1}^k f_i = f_1 + f_2 = 0,3409 + 0,6591 = 1$$

onde k é o número de categorias da variável sexo, ou seja, 2, nesse caso.

### Porcentagem de frequência (perc ou %)

Definida como o resultado da multiplicação da frequência relativa (proporção) por 100.

$$perc_1 = f_1 imes 100 = 0,3409 imes 100 = 34,09\% \ perc_2 = f_2 imes 100 = 0,6591 imes 100 = 65,91\%$$

Para essa tarefa, vamos utilizar o R. Precisaremos, então, fazer algumas operações nos dados das turmas e vamos usar o operador PIPE (%>%), cujo atalho é CTRL + SHIFT + M.

Vamos utilizar a função n() para contar cada ocorrência das diferentes categorias da variável sexo.

- group\_by() agrupa a variável sexo por suas diferentes categorias.
- summarise() cria o resumo dos dados, ou seja, contará o valor de cada categoria usando a função n() e salvará na coluna ni.
- mutate() é a função utilizada para calcular  $f_i$  e suas respectivas procentagens  $prec_i$  a partir da coluna  $_i$ .

A partir da tabela de frequência, poderemos criar representações gráficas que nos auxiliarão na apresentação e interpretação do comportamento dos dados.

Essa etapa é a denominada de Visualização de Dados.

# VISUALIZAÇÃO DE DADOS

(Variáveis Qualitativas)

# Visualização dos dados

Os tipos de gráficos podem variar de acordo com o tipo de variável, geralmente, para as variáveis qualitativas utilizamos os gráficos de Barras, Colunas ou de Setores (Pizza ou Pie).

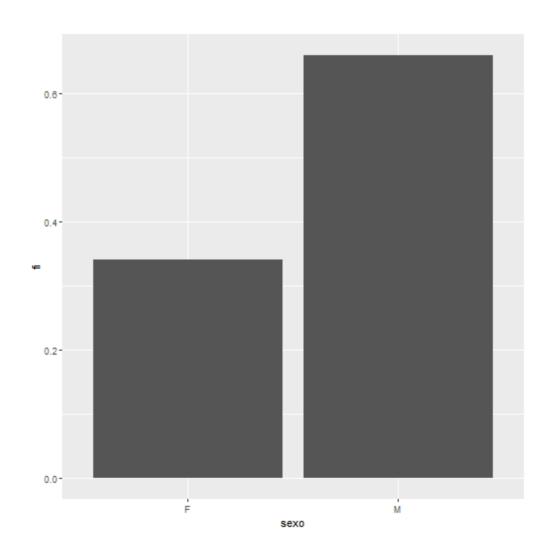
Para isso, vamos utilizar a funções do pacote ggplot2 que é carregado junto com o pacote tidyverse.

O ggplot funciona na forma de camadas represetações gráficas e de formatações, que são adicionadas de acordo com a necessidade do usuário por meio do operador de adição + digitado ao final da cada linha.

#### Gráfico de Colunas para Sexo

Deve ser utilizado para variáveis categóricas (qualitativas ordinais ou nominais).

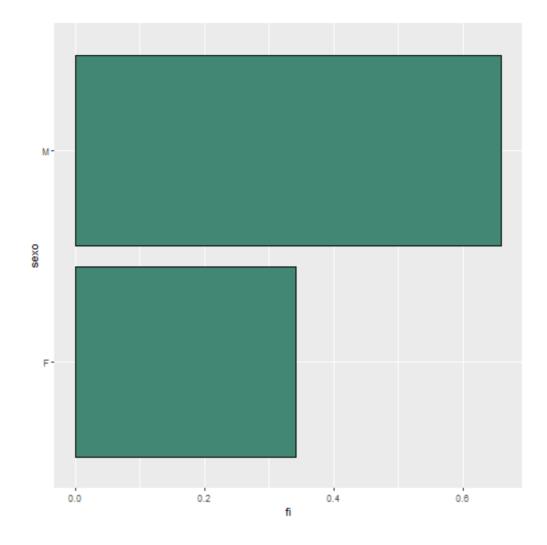
# Gráfico de Colunas para Sexo



## Gráfico de Barras para Sexo

Semelhante ao gráfico de colunas, contudo, com as barras na horizontal, facilita a leitura do nome das categorias.

• o argumento fill = "aquamarine4" permite que possamos alterar a cor do preenchimeto (*fill*) da barra e o argumento color="black" permite a alteração da cor o contorno das barras.

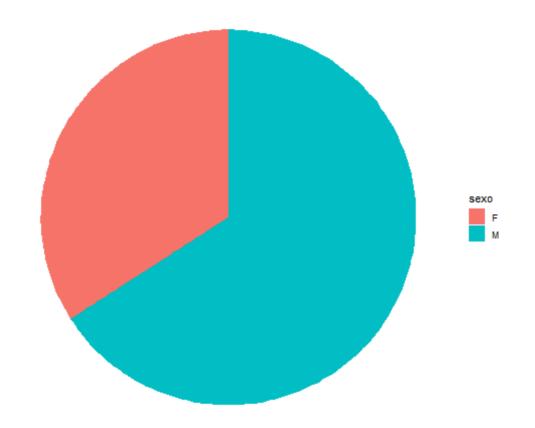


Outras cores são possíveis tente algumas das cores no R.

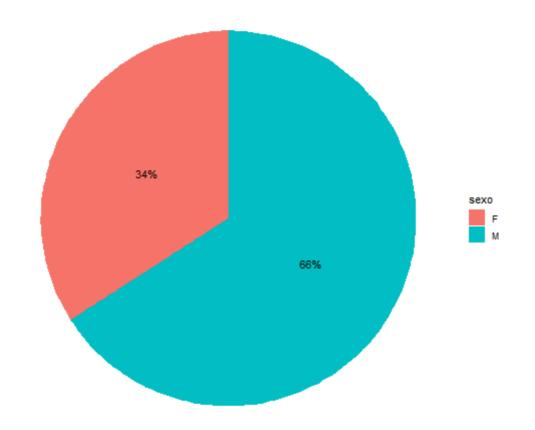
## Gráfico de Setores para Sexo

Também conhecido como gráfico de Pizza (ou torta em inglês - *pie*), ele representa cada valor de frequência relativa das diferentes categorias da variável em uma circunferência.

- A função geom\_bar() associada à coord\_polar() permite a transformação do gráfico de barras no gráfico de pizza.
- A função theme\_void() retira elementos como linhas e nomes e números da representação gráfica.



#### Adicionando os valores de fi no gráfico

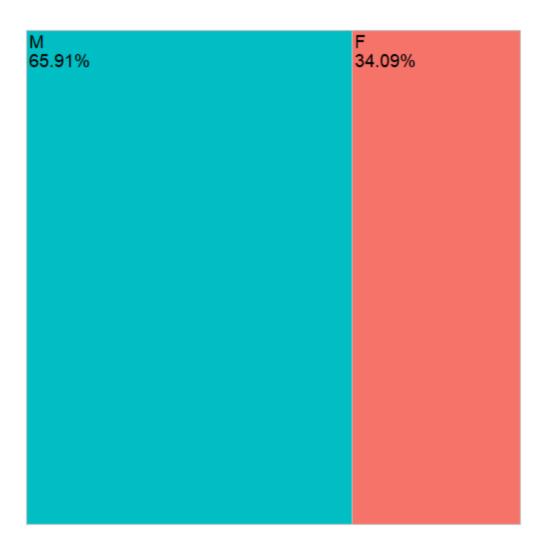


### Treemap

É uma técnica de visualização de dados que exibe hierarquias utilizando retângulos aninhados.

Cada retângulo representa uma hierarquia de dados e é subdividido em retângulos menores que representam subcategorias.

Treemaps pode responder perguntas sobre os dados como: "Quais são as proporções de categorias para o total?"



# Tabela de Frequência para a variável Cor de cabelo

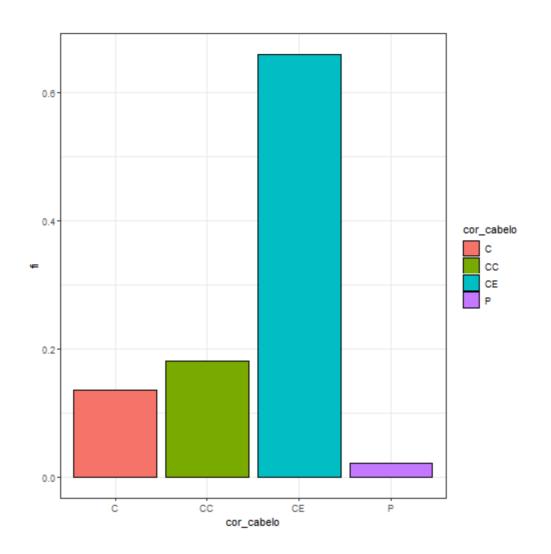
Vamos, mais uma vez, utilizar o R para conseguirmos as tabelas e a representação gráfica.

1 0.0227 2.27

#> 4 P

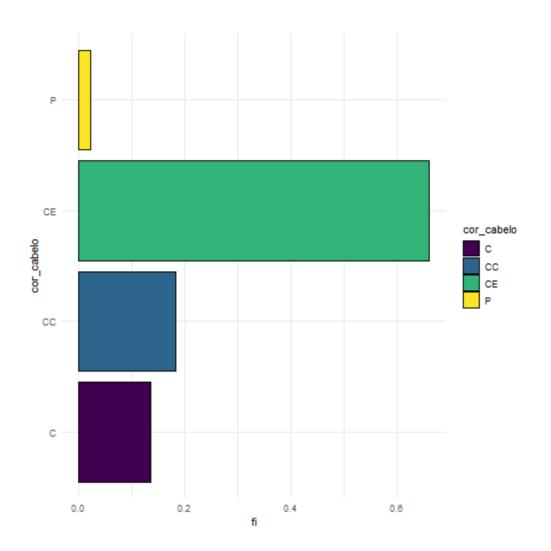
## Gráfico de Colunas para Cor de cabelo

- ao passarmos o argumento fill=cor\_cabelo dentro da função aes() estamos pedindo o mapeamento das cores de cabelo a partir de cores de preeenchimento diferentes.
- aes () representa a estética do gráfico, ou seja, quem é x, quem é y e quem deve ser mapeado.
- a função theme\_bw() muda o padrão de cores e de linhas do gráfico. Existem outros padrões como theme\_classic, theme\_minimal entre outros.

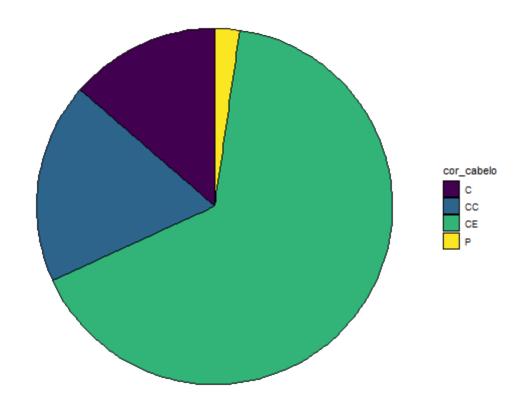


## Gráfico de Barras para Cor de cabelo

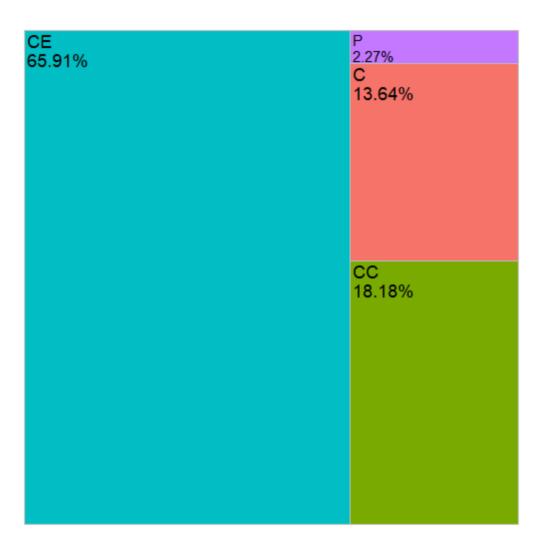
• utilize a função scale\_fill\_manual() para alterar as cores dos preenchimentos, se necessário.



### Gráfico de Setores para cor\_cabelo



#### Treemap para cor dos cabelos



# VISUALIZAÇÃO DE DADOS

(Variáveis Quantitativas)

# Tabela de frequência e visualização para Idade em anos (discreta)

Quando a variável for quantitativa discreta, os mesmos gráficos de variáveis qualitativas podem ser utilizados. Porém, também recomendamos a utilização dos gráficos boxplot, histograma e Função distribuição acumulada.

Pra a variável idade\_anos vamos criar a tabela de frequência;

```
dados_turmas %>%
  group_by(idade_anos) %>%
  summarise(ni=n()) %>%
  mutate(fi = ni/sum(ni),
      perc = fi*100)
```

idade_anos	ni	fi	perc
18	6	0.1363636	13.636364
19	14	0.3181818	31.818182
20	9	0.2045455	20.454545
21	3	0.0681818	6.818182
22	3	0.0681818	6.818182
23	5	0.1136364	11.363636
24	1	0.0227273	2.272727
27	1	0.0227273	2.272727
28	1	0.0227273	2.272727
49	1	0.0227273	2.272727

# Tabela de frequência para variável Altura (Quantitativa Contínua)

Quando a variável quantitativa for contínua, recomenda-se a utilização dos gráficos histograma e Função de distribuição acumulada.

Devemos, inicialmente construir a tabela de frequência da variável altura. Porém, os valores de uma variável contínua não se repetem, mesmo que isso aparentemente ocorra na base de dados.

Em teoria suas realizações podem assumir qualquer valor dentro da reta dos números reais, portanto, ao mensurar uma variável contínua, obtém-se apenas uma aproximação de seu verdadeiro valor dada pelo instrumento de medida.

Para exemplificar, vamos criar 5 classes de alturas a partir da função cut().

classes_altura	ni	fi	perc
(1.5,1.58]	4	0.0909091	9.090909
(1.58,1.66]	7	0.1590909	15.909091
(1.66,1.75]	12	0.2727273	27.272727
(1.75,1.83]	14	0.3181818	31.818182
(1.83,1.91]	7	0.1590909	15.909091

#### **Amplitude Total**

Para melhor entendermos como a função cut() funciona, será necessário conhecermos mais algumas medidas para a construção do histograma. Vamos iniciar com a Amplitude total  $(\Delta)$ , definida como a diferença entre o valor máximo menos o valor mínimo da variável.

$$\Delta = M$$
á $ximo - M$ í $nimo$ 

Para os dados de altura temos,  $\Delta=1,91~m-1,50~m=0,41~m$ 

No R podemos calcular a amplitude total com as funções do pacote base, para isso devemos, primeiramente, extrair de dados\_turmas a variável (coluna) altura por meio do operador de acesso de listas \$.

```
altura <- dados_turmas %>%
  pull(altura)
```

Agora vamos encontrar o máximo e o mínimo e calcular a diferença.

```
D <- max(altura) - min(altura)
D
```

#> [1] 0.41 41 / 72

#### Número de intervalos de classes (k)

Definiremos k como sendo o número de **sub-intervalos** da Amplitude Total. Uma boa representação apresenta um k **NUNCA** inferior a 5 ou superior a 15, pois com um pequeno número de classes, perde-se informação, e com um grande número de classes, o objetivo de resumir os dados fica prejudicado.

#### Amplitude de classe $(\Delta_i)$

É o tamanho de cada um dos k=5 sub-intervalos, dado pela amplitude total dividida pelo número de intervalos.

$$\Delta_i = rac{\Delta}{k}$$

Para os dados de altura:

$$\Delta_i=rac{\Delta}{k}=rac{0.41\ m}{5}=0,082\ m$$

#### Assim, temos

```
Di = D/k
Di
```

```
#> [1] 0.082
```

Cada um dos 5 intervalos terá uma amplitude de 0,086 m. Ou seja, o cálculo dos limites das classes é feito a partir da adição ao valor Mínimo o valor de  $\Delta_i$  k vezes:

```
limites <- min(altura)+ 0:k * Di
limites
```

```
#> [1] 1.500 1.582 1.664 1.746 1.828 1.910
```

Obervem que foi essa a metodologia utilizada pela função cut() para calcular os limites de classes, e essa é a metodologia clássica para lidar com dados contínuos e os agrupar em classes.

classes_altura	ni	fi	perc
(1.5,1.58]	4	0.0909091	9.090909
(1.58,1.66]	7	0.1590909	15.909091
(1.66,1.75]	12	0.2727273	27.272727
(1.75,1.83]	14	0.3181818	31.818182
(1.83,1.91]	7	0.1590909	15.909091

#> [1] 1.500 1.582 1.664 1.746 1.828 1.910

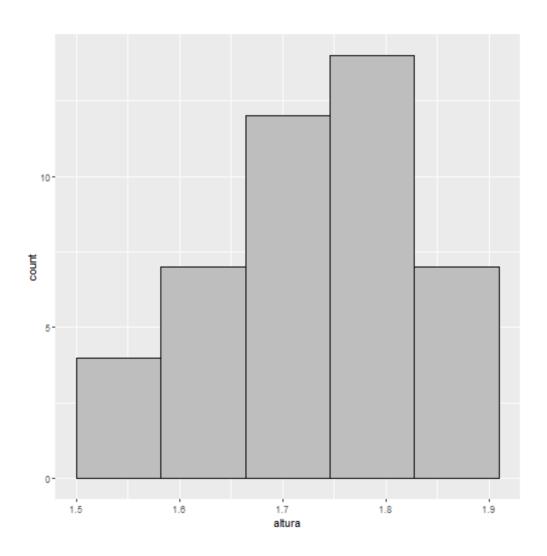
## Gráfico histograma (frequências absolutas)

A partir da tabela anterior, pode-se construir o gráfico de frequência de cada classe de valor de altura, denominado **Histograma**.

O código acima gera um histograma com 5 barras onde o eixo y será a frequência absoluta, ou seja, a contagem (..count..) de quantos valores de altura estão dentro de uma determinada classe.

A opção breaks = limites deixa o histograma igual ao observado na tabela anterior.

# Histograma da altura (m)

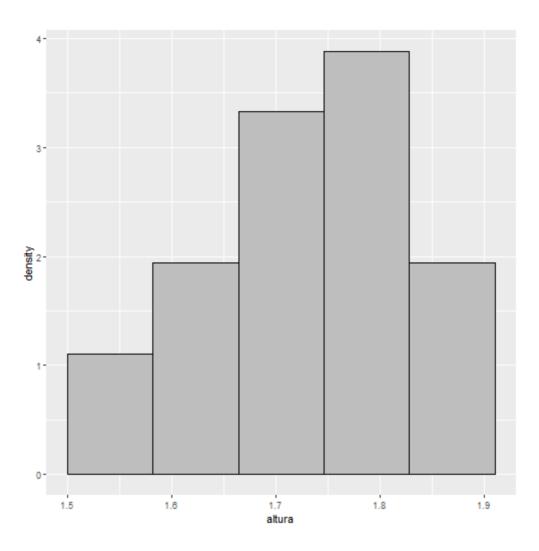


## Gráfico histograma (frequências relativas)

Ao longo de nosso curso, vamos estudar que a frequência relativa  $f_i$  é uma estimativa empírica da probabilidade  $P(X=x_i)$ , assim é interessante que a área total da figura do histograma seja igual a 1, correspondendo à soma total das frequências relativas  $(f_i)$ .

Então, para construção do histograma, sugere-se usar no eixo das ordenadas os valores de  $fi/\Delta_i$  (denominado densidade de frequência), ou seja, da medida que indica qual a concentração por unidade da variável.

Para isso utilizamos y=..density...



## Densidade de frequência $\left(d_{i} ight)$

Agora vamos atualizar a tabela com o valor de densidade de frequência, dado por:

$$d_i = rac{f_i}{\Delta_i}$$

classes_altura	ni	fi	perc	di
(1.5,1.58]	4	0.0909091	9.090909	1.108648
(1.58,1.66]	7	0.1590909	15.909091	1.940133
(1.66,1.75]	12	0.2727273	27.272727	3.325942
(1.75,1.83]	14	0.3181818	31.818182	3.880266
(1.83,1.91]	7	0.1590909	15.909091	1.940133

#### Medidas Acumuladas

As medidas acumuladas são interessantes para compor algumas vizualizações:

 $N_i$ : Frequência Absoluta Acumulada.

 $F_i$ : Frequência Relativa Acumulada.

*Perc*: Porcentagem de Frequência Acumulada.

# Tabela de Frequência para Altura

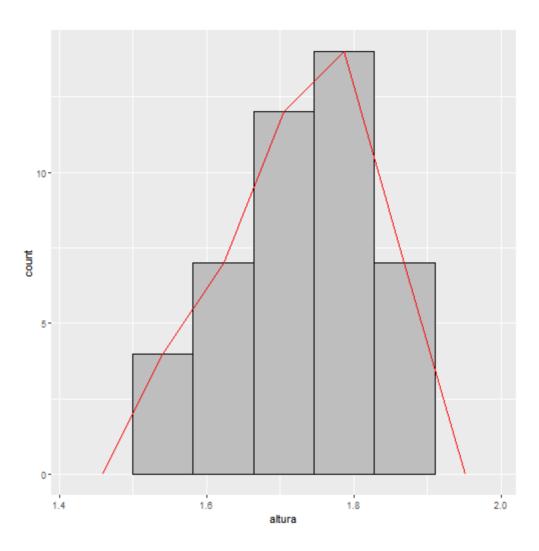
classes_altura	ni	fi	perc	di	Ni	Fi	Perc
(1.5,1.58]	4	0.0909091	9.090909	1.108648	4	0.0909091	9.090909
(1.58,1.66]	7	0.1590909	15.909091	1.940133	11	0.2500000	25.000000
(1.66,1.75]	12	0.2727273	27.272727	3.325942	23	0.5227273	52.272727
(1.75,1.83]	14	0.3181818	31.818182	3.880266	37	0.8409091	84.090909
(1.83,1.91]	7	0.1590909	15.909091	1.940133	44	1.0000000	100.000000

#### Histograma e Polígono de Frequência

Obtemos o polígono de frequências unindo por uma poligonal (segmentos de retas) os pontos correspondentes às frequências, das classes, centradas nos pontos médios de cada classe.

Para se obter as interseções do polígono com o eixo horizontal, cria-se em cada extremo do histograma uma classe com frequência nula.

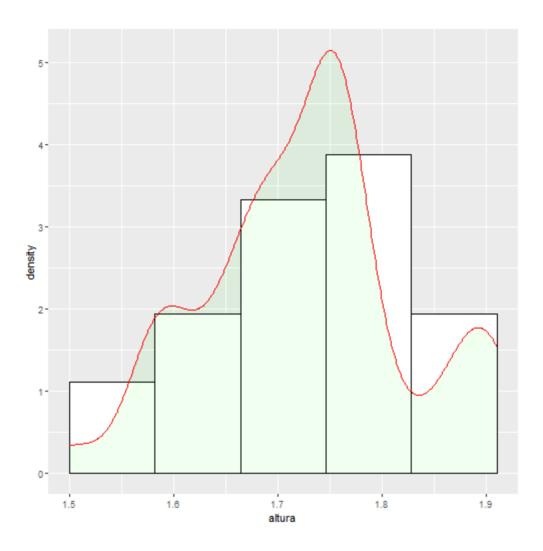
#### No R:



### Histograma e Estimativas de densidade suavizadas

Calcula e desenha a estimativa da densidade, que é uma versão suavizada do histograma. Esta é uma alternativa útil para dados contínuos que vêm de uma distribuição suave subjacente.

- Observe que o histograma foi construído com as frequências absolutas  $(n_i)$ , ou seja, y=..density... Utilizamos a função geom\_density().
- O argumento alpha=0.05 controla a transparência do preenchimento.



#### Função de Distribuição Acumulada

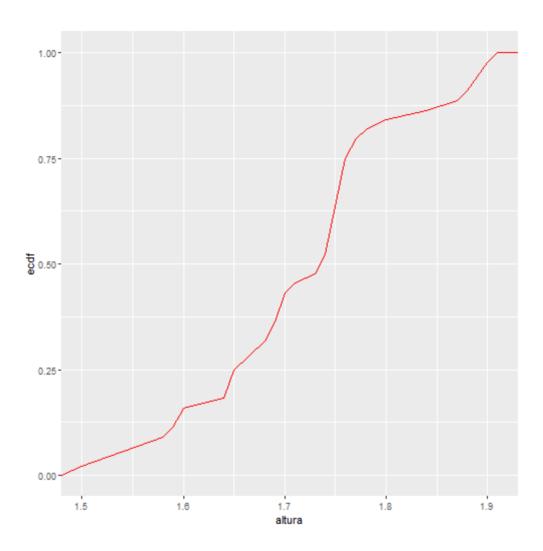
A função de distribuição acumulada descreve como probabilidades são associadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma variável aleatória. Em outras palavras, ela representa a probabilidade de uma variável aleatória ser menor ou igual a um valor real qualquer  $\boldsymbol{x}$ .

$$F(x) = P(X \le x) \in [0,1].$$

Para uma variável aleatória contínua (altura):

$$\int\limits_{-\infty}^{x}f(x_{i})dx$$

```
dados_turmas %>%
  ggplot(aes(x=altura))+
  stat_ecdf(geom = "line",color="red")
```

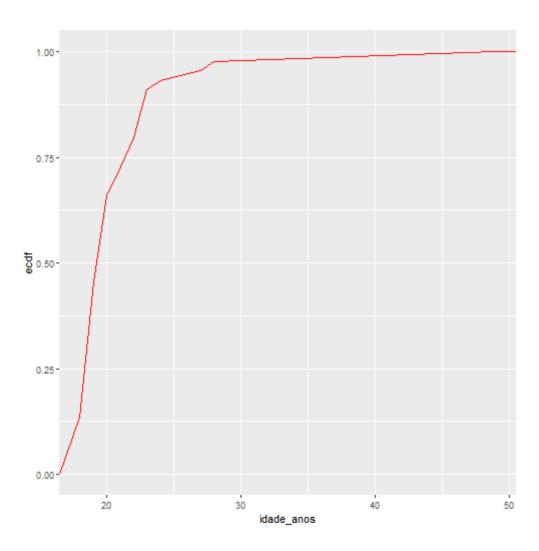


#### Função de Distribuição Acumulada

No caso da variável aleatória discreta (idade\_anos):

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

```
dados_turmas %>%
    ggplot(aes(x=idade_anos))+
    stat_ecdf(geom = "line",color="red")
```

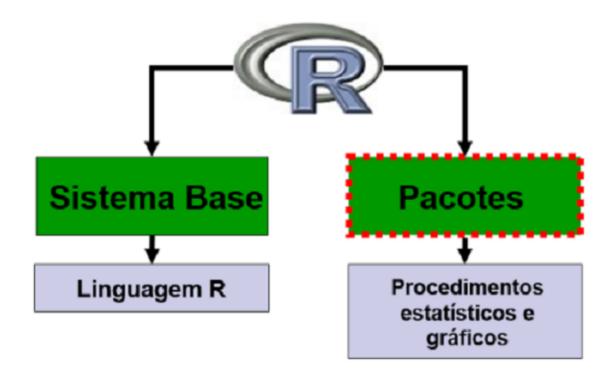


### Prática para Casa: Instalação de Pacotes no R



#### Pacote em R

Um pacote é uma coleção de funções, exemplos e documentação. A funcionalidade de um pacote é frequentemente focada em uma metodologia estatística especial" (**Everitt & Hothorn**).



Pacotes no R são coleções de funções, exemplos e documentações, que devem ser previamente instalados e alocados no ambiente pela função library.

#### Pacotes básicos

Liste os pacotes carregados no ambiente com:

```
(.packages())

#> [1] "treemapify" "patchwork" "lubridate" "forcats" "stringr"

#> [6] "dplyr" "purrr" "readr" "tidyr" "tibble"

#> [11] "ggplot2" "tidyverse" "stats" "graphics" "grDevices"

#> [16] "utils" "datasets" "methods" "base"
```

O retorno da função é uma lista de nomes, caracteres (ou strings), na forma de um *objeto* denominado **vetor**. Observe que cada pacote (elemento) é referenciado dentro do vetor por um índice, um número inteiro [i] apresentado entre colchetes [i].

Carregue um pacote chamando a função library.

```
library(MASS)
```

Agora, liste novamente os pacotes e observe a diferença no retorno da função.

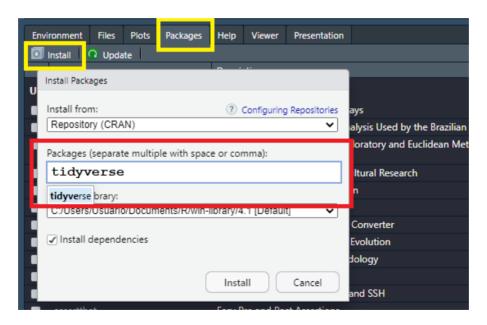
```
(.packages())
   [1] "MASS"
                  "treemapify" "patchwork"
                                        "lubridate"
                                                     "forcats"
#>
   [6] "stringr"
                  "dplyr"
                             "purrr"
                                        "readr"
                                                     "tidyr"
#> [11] "tibble" "ggplot2" "tidyverse" "stats"
                                                     "graphics"
                             "datasets" "methods"
                                                     "base"
#> [16] "grDevices" "utils"
```

Observe que o pacote MASS agora está no ambiente de trabalho.

#### Instalando pacotes

Para a realização de procedimentos estatístico e manipulação de arquivos durante o curso, serão necessários vários pacotes que não fazem parte do base do R, que deverão ser instalados.

Utilizando a opção Packages\Install\nome do pacote



#### Instale os pacotes:

- tidyverse
- agricolae

Os pacotes também podem ser instalados a partir das linhas de comandos:

```
install.packages("tidyverse")
install.packages("agricolae")
```

Agora podemos carregar esses pacotes em nosso ambiente de trabalho.

```
library(tidyverse)
library(agricolae)
```

Vamos agora criar uma "Pipe Line" para visualização de um banco de dados

```
mtcars %>%
  glimpse()
#> Rows: 32
#> Columns: 11
```

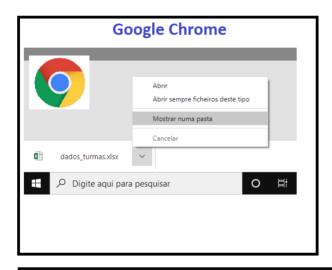
#> \$ mpg <dbl> 21.0, 21.0, 22.8, 21.4, 18.7, 18.1, 14.3, 24.4, 22.8, 19.2, 1 #> \$ cyl <dbl> 6, 6, 4, 6, 8, 6, 8, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4 #> \$ disp <dbl> 160.0, 160.0, 108.0, 258.0, 360.0, 225.0, 360.0, 146.7, 140.8 #> \$ hp <dbl> 110, 110, 93, 110, 175, 105, 245, 62, 95, 123, 123, 180, 180, #> \$ drat <dbl> 3.90, 3.90, 3.85, 3.08, 3.15, 2.76, 3.21, 3.69, 3.92, 3.92, 3

#> \$ wt <dbl> 2.620, 2.875, 2.320, 3.215, 3.440, 3.460, 3.570, 3.190, 3.150 #> \$ qsec <dbl> 16.46, 17.02, 18.61, 19.44, 17.02, 20.22, 15.84, 20.00, 22.96 

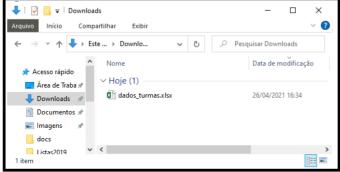
## Carregando os dados no R

Para carregar o banco de dados da turma no R, siga os passos: 1.Faça o Download dos dados turmas.xlsx.

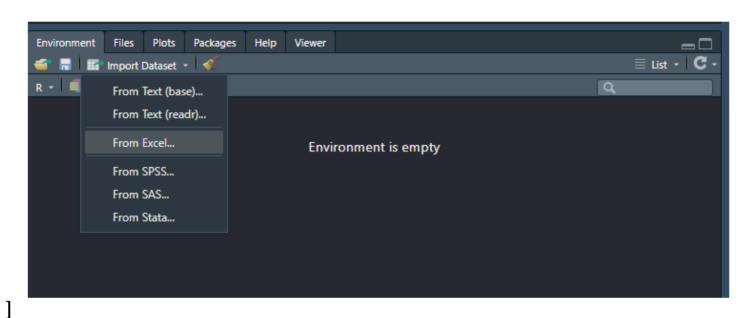
2. Salve em uma pasta data dentro de um projeto do R previamente criado.



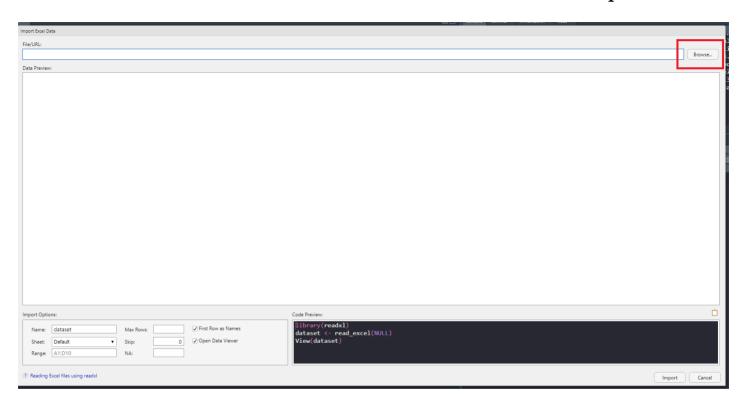




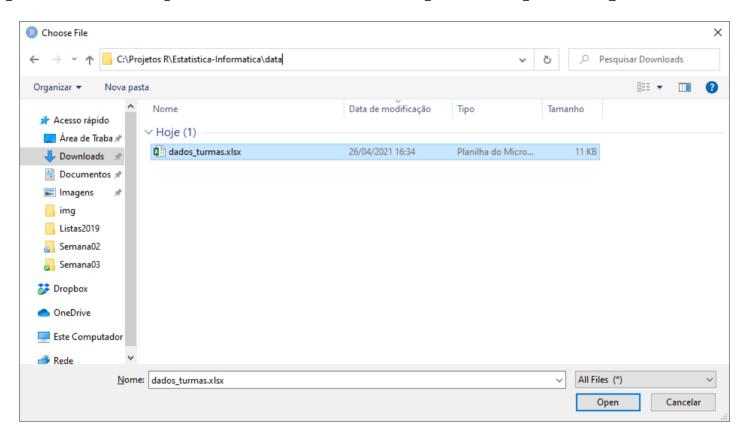
3.Na aba **Environment** do RStudio selecione **Import Dataset/From Excel...** como apresentado abaixo.



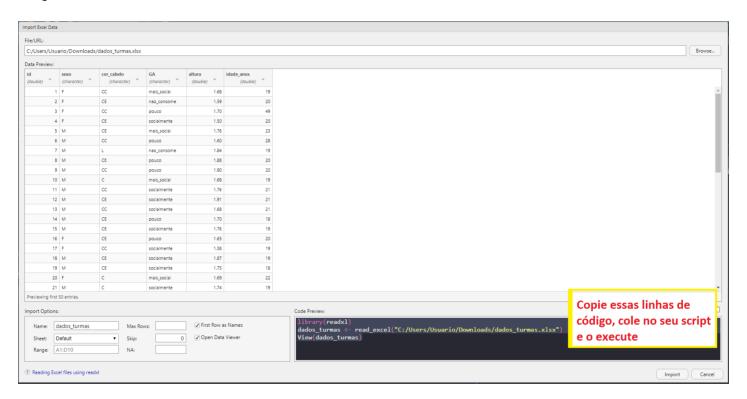
4. Selecione **Browse** (destacado em vermelho no canto direito superior).



5.Na próxima janela busque o arquivo da base de dados **dados\_turmas.xlsx** que salvamos na pasta "*data*", selecione o arquivo e clique em **Open**.



6.Na janela serão apresentados os dados, **NÃO CLIQUE EM IMPORT**, ao invés disso, **selecione e copie o código** para a importação dos dados. Após isso **CLIQUE EM CANCEL**.



7.Cole o código no seu script do R e o execute. Os dados serão salvos no objeto dados\_turmas. Se necessário, instale o pacote readxl com as opções da aba **Packages/Install** ou com o comando install.packages("readxl").

```
library(readxl)
dados_turmas <- read_excel("data/dados_turmas.xlsx")
View(dados_turmas)</pre>
```

