Estatística e Informática

Aula 05 - Probabilidade - Parte I

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Ciências Exatas FCAV/UNESP

(28-03-2024)

Conceitos Básicos

Teoria dos Conjuntos

Definições

Conjuntos: é uma coleção de qualquer tipo de objetos – pessoas, animais, plantas, fenômenos, estímulos, respostas, traços genéticos, métodos, ideias e possibilidades lógicas. Dizemos que um conjunto está bem definido quando está claro que um objeto pertence ou não pertence ao conjunto. A ambiguidade não é permitida.

- Conjunto dos números $2, 3, 5, 7$.
- Conjunto de estudantes presentes na sala de aula.
- Conjunto de meses que se iniciam pela letra J.
- Conjunto dos números pares.
- Conjunto de árvores presentes na sala de aula.

Elemento (ou membro): é o nome que se dá a cada objeto do conjunto.

Conjunto finito: contém um número finito de elementos.

- Conjunto dos números $2, 3, 5, 7$.
- Conjunto de estudantes presentes na sala de aula.
- Conjunto de meses que se iniciam pela letra J.

Conjunto infinito: contém um número infinito de elementos. Conjunto de números pares.

Conjunto vazio: não contém elementos Conjunto de árvores dentra da sala de aula.

Notações e Símbolos

Conjuntos: São representados por letras maiúsculas tais como $A, B, C, \ldots$

Elementos: São representados por letras minúsculas tais como $a, b, c, \ldots$

Conjunto vazio: é representado pelo zero cortado por uma barra. É aquele desprovido de elementos.

$$\phi$$

ou

$$\{\}$$

Formas de apresentação

Forma Tabular: Os elementos de um conjunto são reunidos por chaves. Conjunto dos números 2,3,5,7:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

Forma de construção: Para conjuntos grandes devemos caracterizar seus elementos por meio de afirmações matemáticas, pois, por exemplo, somos incapazes de relacionar todos os números maiores que 5, uma vez que este conjunto é infinito, assim, introduzimos um elemento variável, x, e definimos como $Z = \{x | x > 5\}$, lê-se "o conjunto de todo os números x tal que, x seja maior que 5".

Para o exemplo anterior, temos:

$$A = \{x | x \text{ é nº primo menor que } 10\}$$

> **OBS:** Um número primo é um número natural maior que 1 que só pode ser dividido por 1 e por ele mesmo, sem deixar resto.

Conjunto solução: A teoria dos conjuntos pode ser utilizada para apresentar as soluções de problemas matemáticos. Por exemplo:

$A = \{x | x^2 = 4\}$ então, $A = \{-2, 2\}$

$B = \{t | 3t - 4 = 5\}$ então, $B = \{3\}$

$C = \{x | x^2 < 4\}$ então $C = \{x | -2 < x < 2\}$

Pertinência

Para indicar que um objeto é elemento de um conjunto, usamos o símbolo de pertinência $\in$, lido como "pertence a" ou "está em".

$$a \in T$$

significa que **"a é elemento do conjunto T"** ou **"a pertence a T"**.

O oposto pode ser expresso por $\notin$, significando **"não é elemento"** ou **"não pertence a"**.

$$5 \in \aleph$$

$$\frac{1}{2} \in \Re$$

$$\frac{1}{2} \notin \aleph$$

Continência

Subconjunto: Para um conjunto A contendo somente elementos de um conjunto B, mas não necessariamente todos os membros de B, então A é **subconjunto** de B.

$$A \subset B$$

ou B é **superconjunto** de A.

$$B \supset A$$

E dizemos que **"A está contido em B"** ou **"B contém A"**.

Essa definição de subconjunto nos permite dizer que um conjunto é subconjunto de si mesmo:

$$B \subset B$$

O conjunto vazio é considerado subconjunto de qualquer conjunto, isto é

$$\phi \subset A$$

Igualdade entre conjuntos: Dois conjuntos são ditos iguais, em símbolos:

$$A = B$$

se, e somente se:

$$A \subset B \text{ e } A \supset B$$

Os conjuntos contiverem exatamente os mesmos elementos.

Se x for um elemento, então $x \in A$ implica que $x \in B$ e vice-versa.

de forma análoga, se $x \notin A$ implica que $x \notin B$

Exemplo

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3\}$$

OBS: O número de elementos do conjunto não é considerado para a aoperação de igualdade entre eles.

Conjunto Universo ou universal: Formado por todos os elementos que têm uma característica desejada:

Notação: U ou $\mathfrak{U}$:

$$U \supset A \supset \phi, \forall A$$

> Lê-se: O universo contém o conjunto A, que por sua vez contém o conjunto vazio, qualquer que seja o conjunto A

Conjunto potência ou **conjunto das partes**: Seja A um conjunto finito, define-se o conjunto das partes de A ou conjunto potência como sendo o conjunto cujos elementos são todos os possíveis subconjuntos formados com os elementos de A:

Notação $P(A) = 2^n = a$ on de n é o número de elementos do conjunto A:

Exercício:

Se $B = \{1, 2, 3\}$ qual o conjunto potência de B?

Subconjunto desprovido de elementos = ϕ
Subconjunto com 1 elementos ={1}; {2}; {3}
Subconjunto com 2 elementos= {1, 2}; {1, 3}; {2, 3}
Subconjunto com 3 elementos é o próprio conjunto B = {1, 2, 3}

$$P(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\},$$
$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Observe que " 3 " é diferente de " $\{3\}$ " , pois 3 é um elemento e $\{3\}$ é um conjunto.

Podemos dizer que:

$\{3\} \subset \{1, 2, 3\}$, porém $3 \in \{1, 2, 3\}$

Assim como podem dizer que $\{3\} \in P(B)$

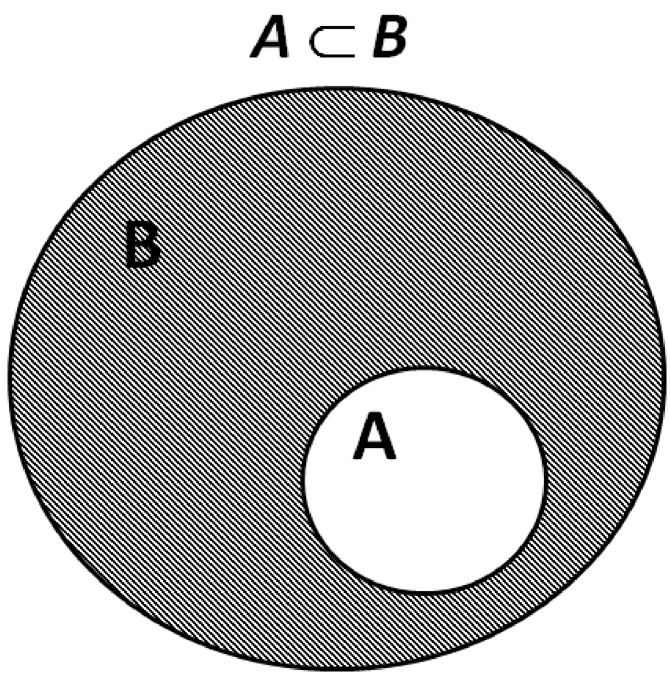
Conjuntos Disjuntos: São aqueles que não têm elementos comum, ou seja, $A \neq B$.

A={1,2,3} e B={4,5,6}, assim *A e B são disjuntos*.
A={1,3} e B={x}, assim *A e B são disjuntos*.
A={2,3} e B={4,3}, assim *A e B não são disjuntos*.

Diagrama de Venn-Euler

Conjuntos de qualquer tipo de elementos são representados por conjunto de pontos. Para simplificação das relações, são utilizados pontos em um **círculo** ou em um **retângulo**.

Tal representação é chama de **Diagrama de Venn-Euler** que são representações geométricas de conjuntos e seus elementos bem como das relações destes conjuntos.



Operações com conjuntos

União ou Reunião (OU)

Com dois conjuntos A e B, podemos sempre formar um novo conjunto simplesmente pelo agrupamento de seus elementos. Chamamos a esse novo conjunto de união, e escrevemos simbolicamente:

$$A \cup B$$

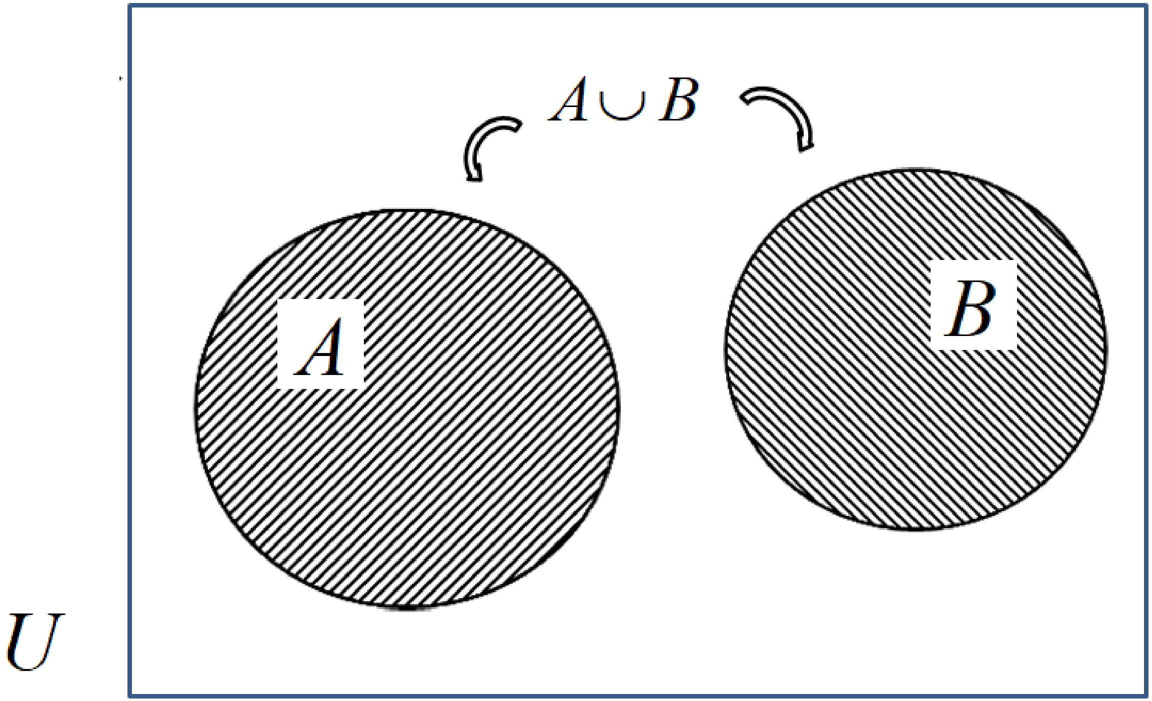
Lemos **"A União B"** ou **"A Reunião B"**, ou seja, esse novo conjunto contém exatamente os elementos que estão em A, ou os elementos que estão em B, ou os elementos que estão **ambos**.

A operação de União assemelha-se à adição. Entretanto, devemos observar que:

i) $A \cup A = A$

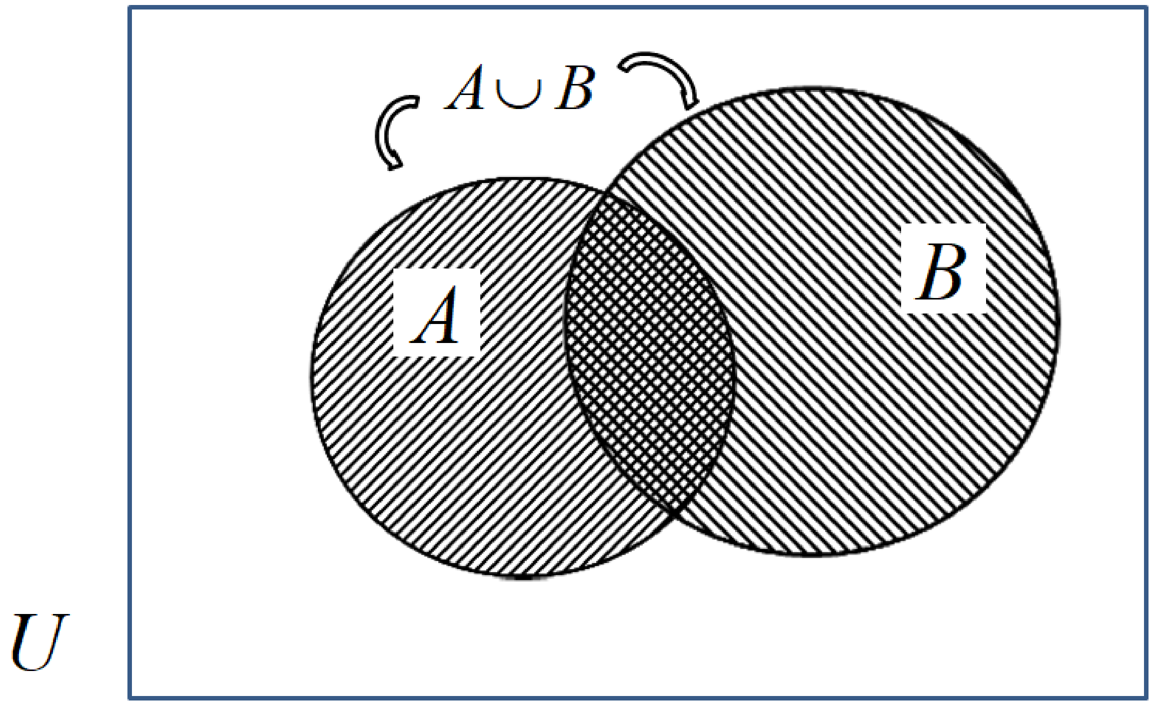
ii) $B \subset A$, então: $A \cup B = A$

Diagrama de Venn da união de dois conjuntos disjuntos:



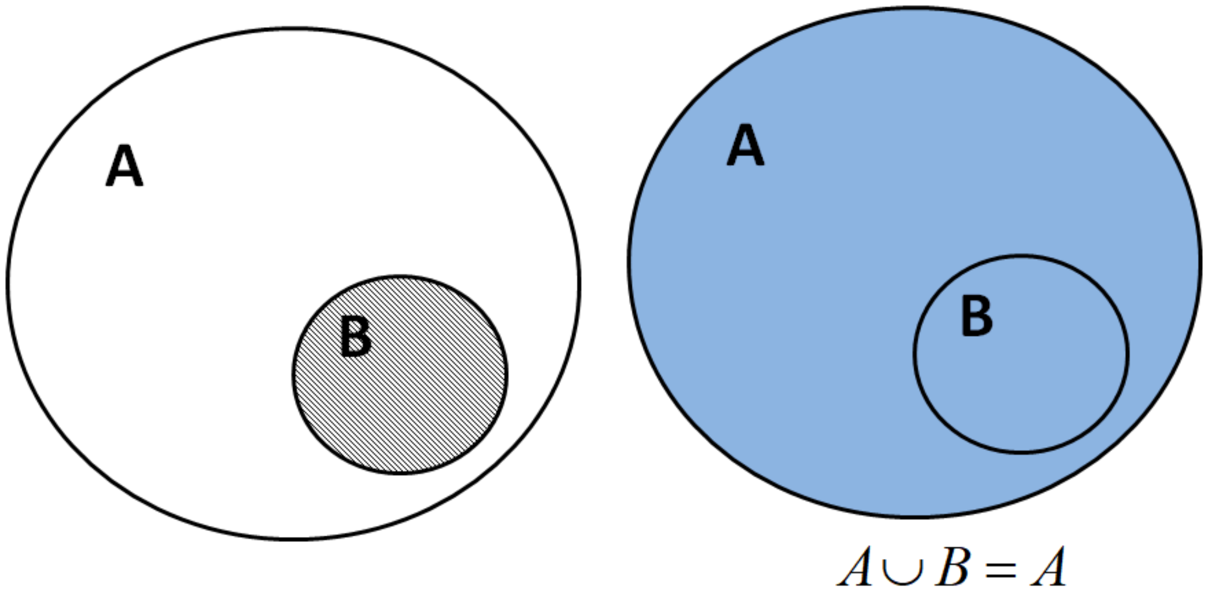
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in B)\}$$

Diagrama de Venn da união de dois conjuntos não disjuntos:



$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in B)\}$$

$A \cup A = A$ e se $B \subset A$, então: $A \cup B = A$



Propriedades da União

i) Comutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$

ii) Associativa:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup B \cup C)$$

iii) União com o vazio:

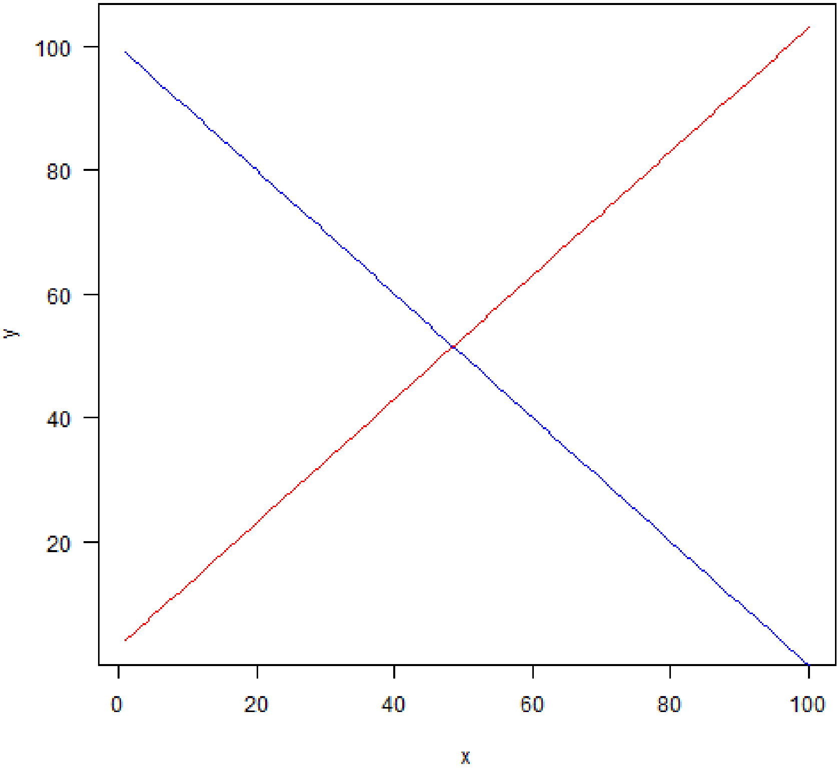
$$A \cup \phi = \phi \cup A = A, \forall A$$

iv) União com o Universo:

$$A \cup U = U \cup A = U, \forall A$$

Interseção (E)

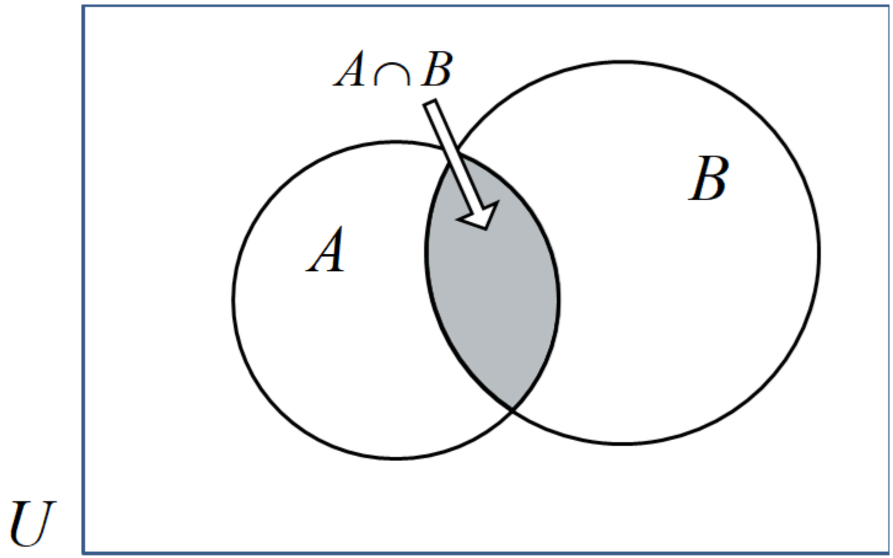
Em analogia, imaginemos duas retas que se interceptam, as duas retas podem ser consideradas como conjuntos infinitos de pontos. Os dois conjuntos têm um ponto em comum o ponto de interseção.



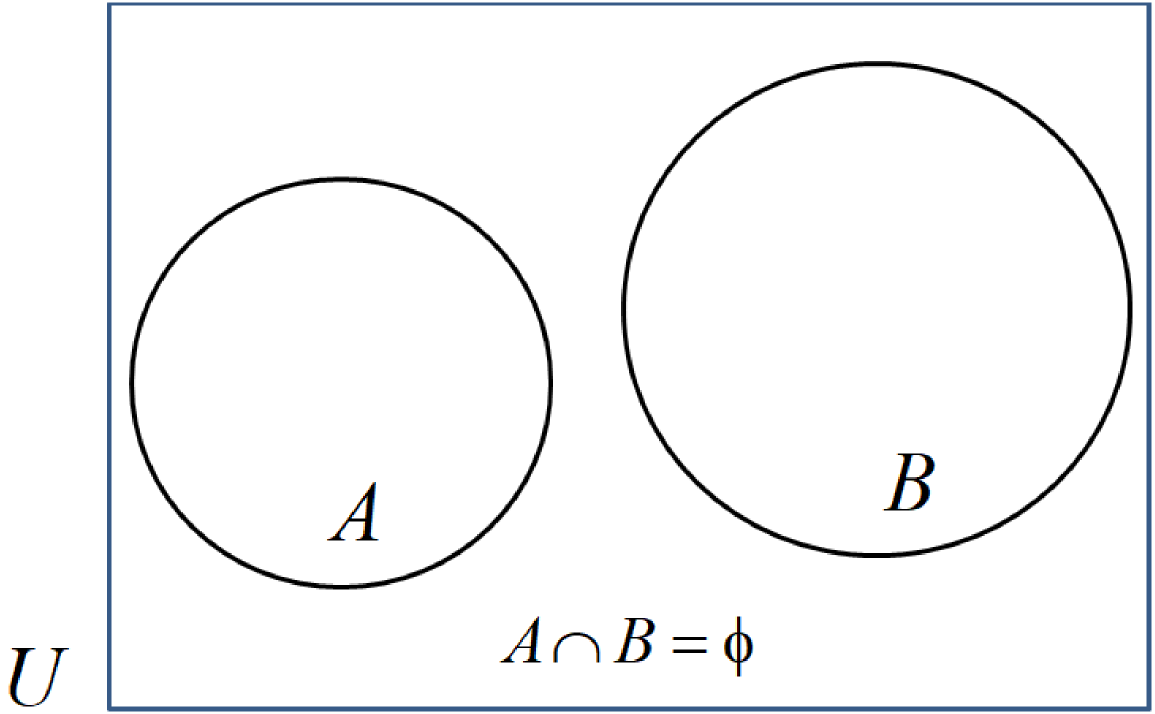
Generalizando, sejam A e B dois conjunto quaisquer, podemos estar interessados em saber se os dois conjuntos estão sobrepostos, isto é, se os dois conjuntos possuem elementos em comum, seja ele vazio ou não, a interseção de A e B escrevemos:

$$A \cap B$$

Lemos **"A interseção B"**, ou **"A inter B"**.



$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Neste caso, quando dois conjuntos não possuem elementos em comum, então D é um conjunto vazio, os dois conjuntos são então chamados de **disjuntos**.

Propriedades da Interseção

i) Comutativa:

$$A \cap B = B \cap A$$

ii) Associativa:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap B \cap C)$$

iii) Interseção com o vazio:

$$A \cap \phi = \phi \cap A = \phi, \forall A$$

iv) iii) Interseção com o universo:

$$A \cap U = U \cap A = A, \forall A$$

Operações com conjuntos

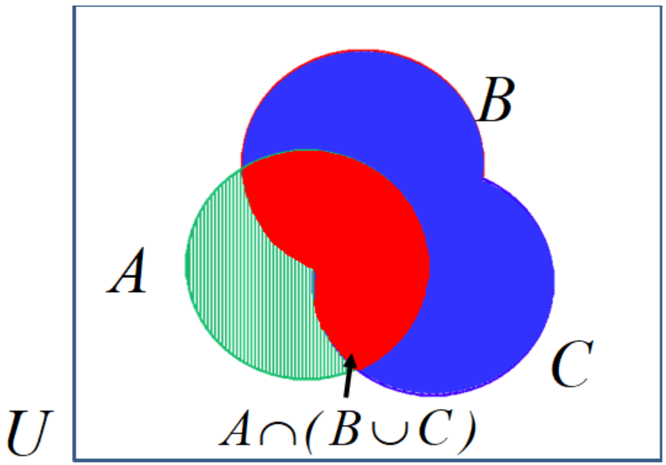
1) Primeira Lei Distributiva:

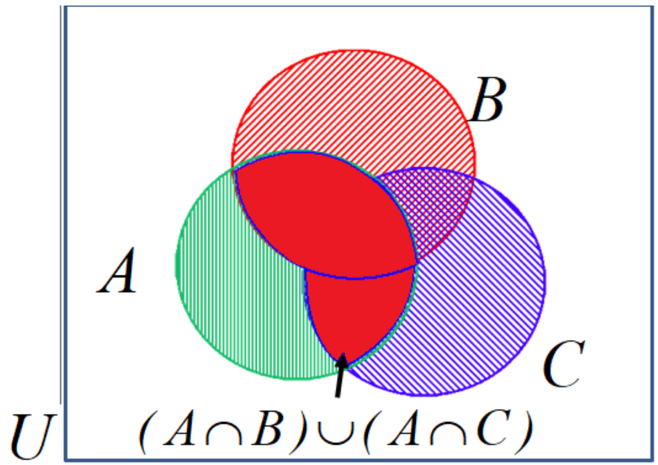
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2) Segunda Lei Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1) Primeira Lei Distributiva

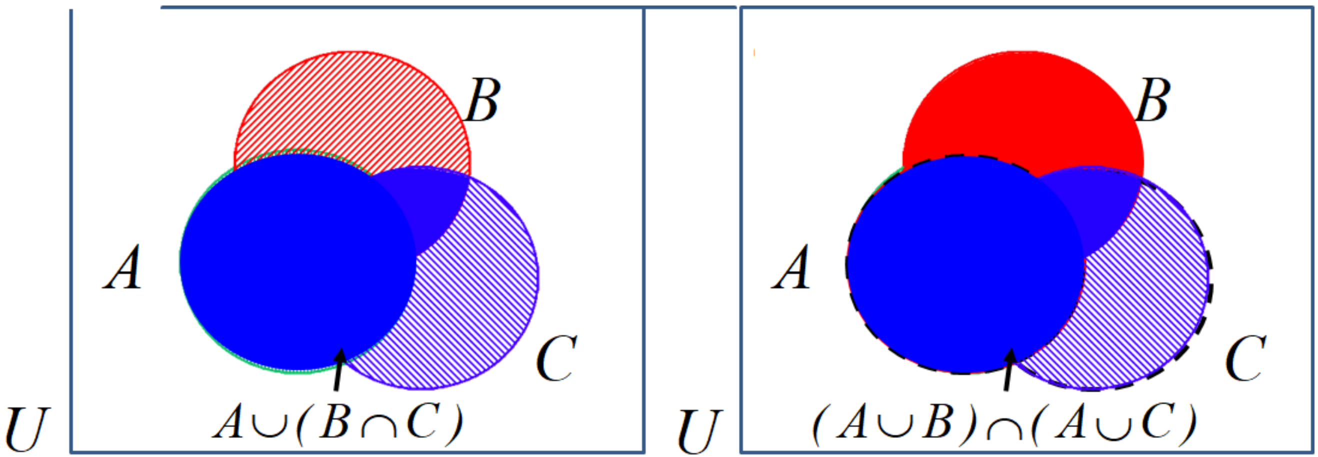




Dados 3 conjuntos, A, B e C, podemos demonstrar que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2) Segunda Lei Distributiva

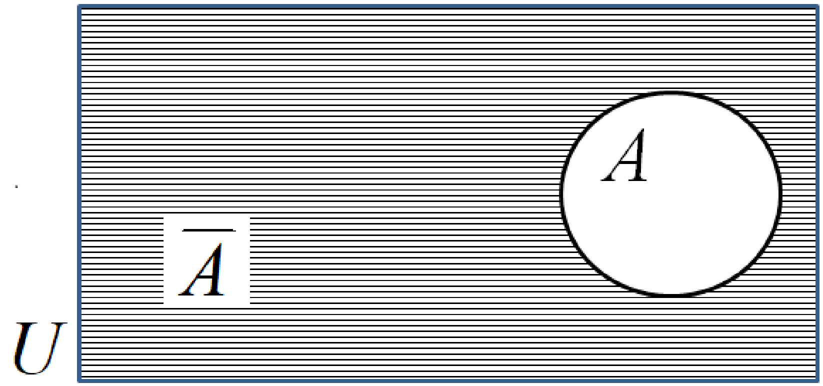


Dados 3 conjuntos, A, B e C, podemos demonstrar que:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Conjunto Complementar

Conjunto Complementar: Seja A um subconjunto de U, isto é $A \subset U$. Então estamos interessados nos elementos de U que não pertencem a A. Eles formam um novo conjunto, que é chamado **"o complementar de A em U"**. Representado por: $\bar{A}$ ou A^c.



$$\bar{A} = \{x | x \in U, x \notin A\}$$

Definido a operação de interseção, observe que se A for um subconjunto de um conjunto universo U e $\bar{A}$ o complemento de A, então:

i) $A \cap \bar{A} = \phi, \forall A$

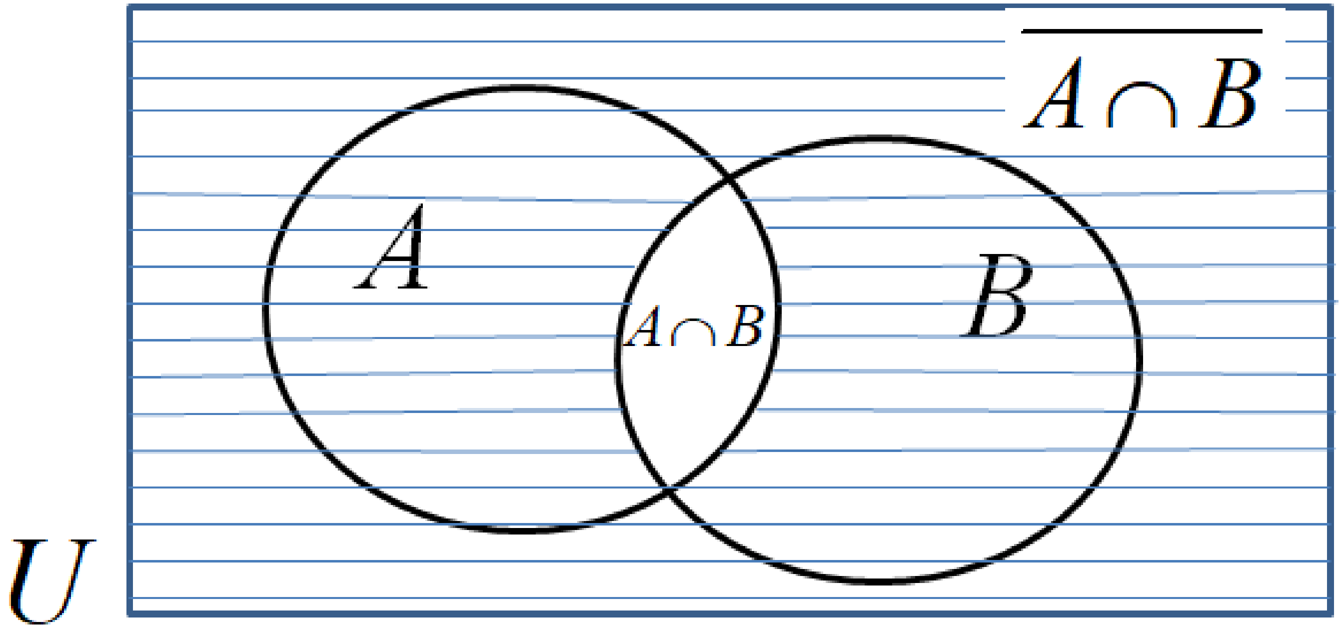
ii) $A \cup \bar{A} = U, \forall A$

Utilizando o diagrama de Venn pode-se provar as propriedades:

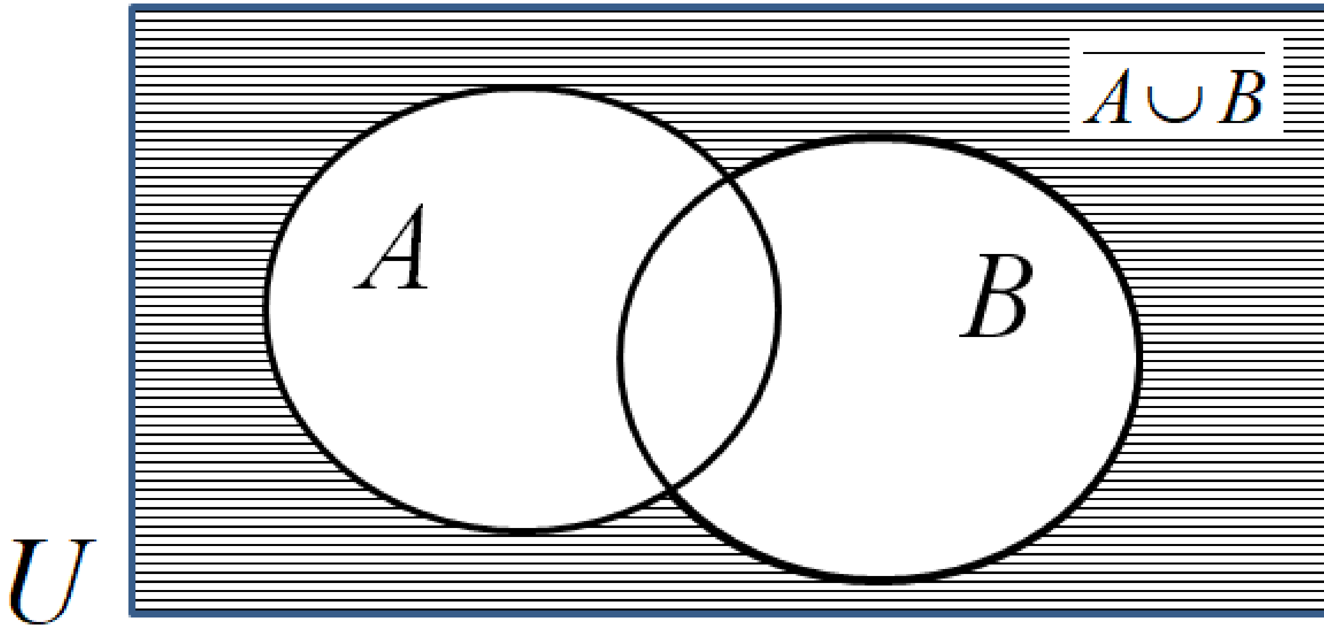
$a)(A \bar{\cap} B) = \bar{A} \cup \bar{B}$

$b)(A \bar{\cup} B) = \bar{A} \cap \bar{B}$

$(A \bar{\cap} B) = \bar{A} \cup \bar{B}$



$(A \bar{\cup} B) = \bar{A} \cap \bar{B}$



Exercícios

1) Em uma sala de aula há 30 meninas, 21 crianças ruivas, 13 meninos não ruivos e 4 meninas ruivas. Pergunta-se:

a) Quantos são os meninos ruivos?
b) Quantas são as meninas não ruivas?
c) Quantas crianças há na escola?
d) Quantas crianças são ruivas ou meninas?
e) Quantas crianças não são ruivas ou meninas?
f) Quantas crianças não são, ruivas ou meninas?

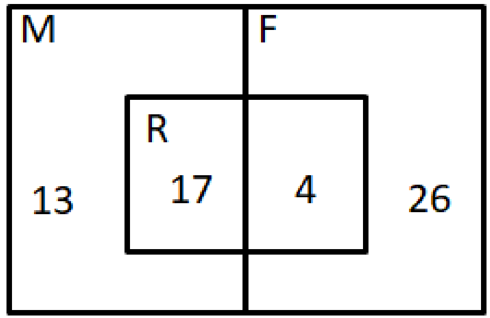
2) Em uma comunidade de animais são consumidas 3 espécies de plantas A, B e C. Uma pesquisa apresentou os seguintes resultados:

Alimentos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A e B e C	nenhum dos três
Número de Animais que consomem	100	150	200	20	40	30	10	130

a) Quantos animais foram amostrados?
b) Quantos animais consomem somente 2 espécies de plantas?
c) Quantos animais não consomem a planta B?
d) Quantos animais não consomem A ou não consomem B?

Respostas

1) Respostas
   a) 17
   b) 26
   c) 60
   d) 47
   e) 43
   f) 13



2) Resposta:
   a) 500
   b) 60
   c) 350
   d) 480