Estatística e Informática

Aula 12 - Comparação de Parâmetros

Alan Rodrigo Panosso alan.panosso@unesp.br

Departamento de Engenharia e Ciências Exatas FCAV/UNESP

(06-06-2024)

Comparações de parâmetros de duas populações

Suponha duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2 ou seja, $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$, respectivamente, de uma população com distribuição $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e de população com distribuição $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ ou seja } \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ ou seja } \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1\right)$$

Estatística do teste:

Sendo s_1^2 e s_2^2 as variâncias, respectivamente das amostras n_1 e n_2, o quociente

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$$

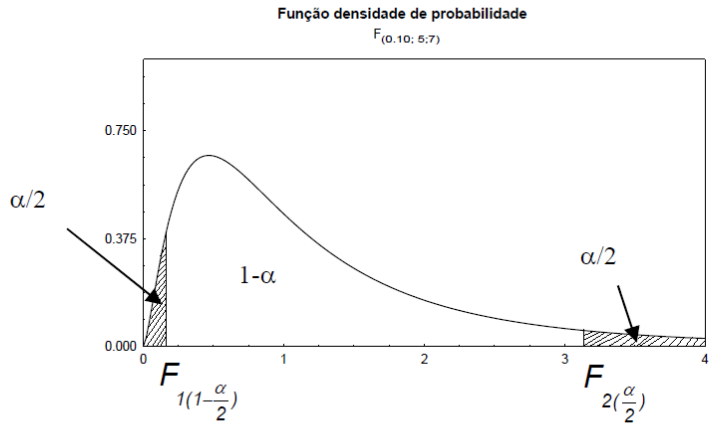
Segue a distribuição de F (Snedecor) com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade (GL), tem a denotação $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tem-se que

$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Construção da região crítica

Fixado α, os pontos críticos serão F_1 e F_2 da distribuição F, tais que:



Se $\alpha = 10\%$, pode-se, utilizando a Tabela da distribuição F, encontrar diretamente $F_2(5\%)$. Para encontrar $F_1(95\%)$ utiliza-se a propriedade:

$F_{(1-\alpha;\ n_1-1,\ n_2-1)} = \frac{1}{F_{(\alpha;\ n_2-1,\ n_1-1)}}$, assim: $F_{(0{,}95;\ n_1-1,\ n_2-1)} = \frac{1}{F_{(0{,}05;\ n_2-1,\ n_1-1)}}$

Exemplo

Se $n_1 - 1 = 5$ e $n_2 - 1 = 7$

$F2_{(0{,}05;\ 5,\ 7)} = 3,97$

$F1_{(0{,}95;\ 5,\ 7)} = \frac{1}{F_{(0{,}05;\ 7,\ 5)}} = \frac{1}{4{,}88} = 0,205$

Assim, $RC = \{0 < F < 0,205 \text{ ou } F > 3,97\}$

Entretanto, o procedimento que se usa na prática é calcular F utilizando sempre a maior variância no numerador $s_1^2 > s_2^2$ portanto $F > 1$, e considerar o ponto crítico $F_{2(\alpha;\ n1-1,\ n2-1)}$.

Amostra: Colhidas amostras aleatórias n_1 e n_2, calcula-se s_1^2 e s_2^2 com $(s_1^2 > s_2^2)$, então:

$$F_{obs} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(n_1-1;n_2-1)}$$

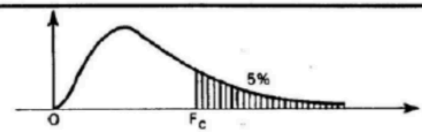
Conclusão: Se $F_{obs} \in RC$, **rejeita-se** H_0, no caso contrário, **não se rejeita** H_0 .

Tabela - Distribuição F-Snedecor

TÁBUA VI

Distribuição de Fisher-Snedecor-1

Valores críticos de F tais que $P(F > F_c) = 0{,}05$



Graus de liberdade do denominador de F : n_2	GRAUS DE LIBERDADE DO NUMERADOR DE F : n_1																						Graus de liberdade do denominador de F : n_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24	30	40	60	120	∞	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,4	245,9	246,5	247,3	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3	1
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42	19,43	19,43	19,44	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	2
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,72	8,70	8,69	8,67	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,86	5,84	5,82	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,62	4,60	4,58	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36	5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67	6
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,22	3,20	3,17	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93	8
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	3,01	2,99	2,96	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71	9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,87	2,85	2,83	2,80	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	10
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,72	2,70	2,67	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40	11
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,62	2,60	2,57	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30	12
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,53	2,52	2,48	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	13
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,46	2,44	2,41	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13	14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42	2,40	2,39	2,35	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07	15
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,34	2,31	2,29	2,26	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	17
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,27	2,25	2,22	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92	18
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26	2,23	2,22	2,18	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88	19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22	2,20	2,18	2,15	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84	20
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81	21
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78	22
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15	2,13	2,11	2,08	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76	23
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,13	2,11	2,09	2,05	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73	24
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,09	2,07	2,04	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09	2,07	2,05	2,02	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69	26
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,08	2,06	2,04	2,00	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67	27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06	2,04	2,02	1,99	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65	28
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05	2,03	2,01	1,97	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64	29
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62	30
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,95	1,92	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51	40
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39	60
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,77	1,75	1,72	1,69	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25	120
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,69	1,67	1,63	1,60	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00	∞
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24	30	40	60	120	∞	

Exemplo. Dois grupo de 8 animais da mesma idade e raças diferentes foram submetidos a um mesmo regime alimentar. Os resultados para ganho de peso foram:

R1:	$2,30$	$2,10$	$1,91$	$1,20$	$1,93$	$1,88$	$1,95$	$2,10$
R2:	$2,30$	$2,15$	$2,00$	$1,28$	$2,15$	$2,20$	$1,91$	$2,06$

Ao nível de 5%, as variâncias dos ganhos de pesos raças diferem entre si?

```
r1<-c(2.30,2.10,1.91,1.20,1.93,1.88,1.95,2.10)
r2<-c(2.30,2.15,2.00,1.28,2.15,2.20,1.91,2.06)
var.test(r1,r2)
```

```
#>
#>      F test to compare two variances
#>
#> data:  r1 and r2
#> F = 1.0362, num df = 7, denom df = 7, p-value =
#> 0.9638
#> alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
#> 95 percent confidence interval:
#>  0.2074474 5.1756306
#> sample estimates:
#> ratio of variances
#>           1.036181
```

Testar as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2_{r1} = \sigma^2_{r2} \\ H_1 : \sigma^2_{r1} \neq \sigma^2_{r2} \end{cases}$$

Calculando os valores de variância para as duas raças:

$s^2_{r1} = 0,10433$

e

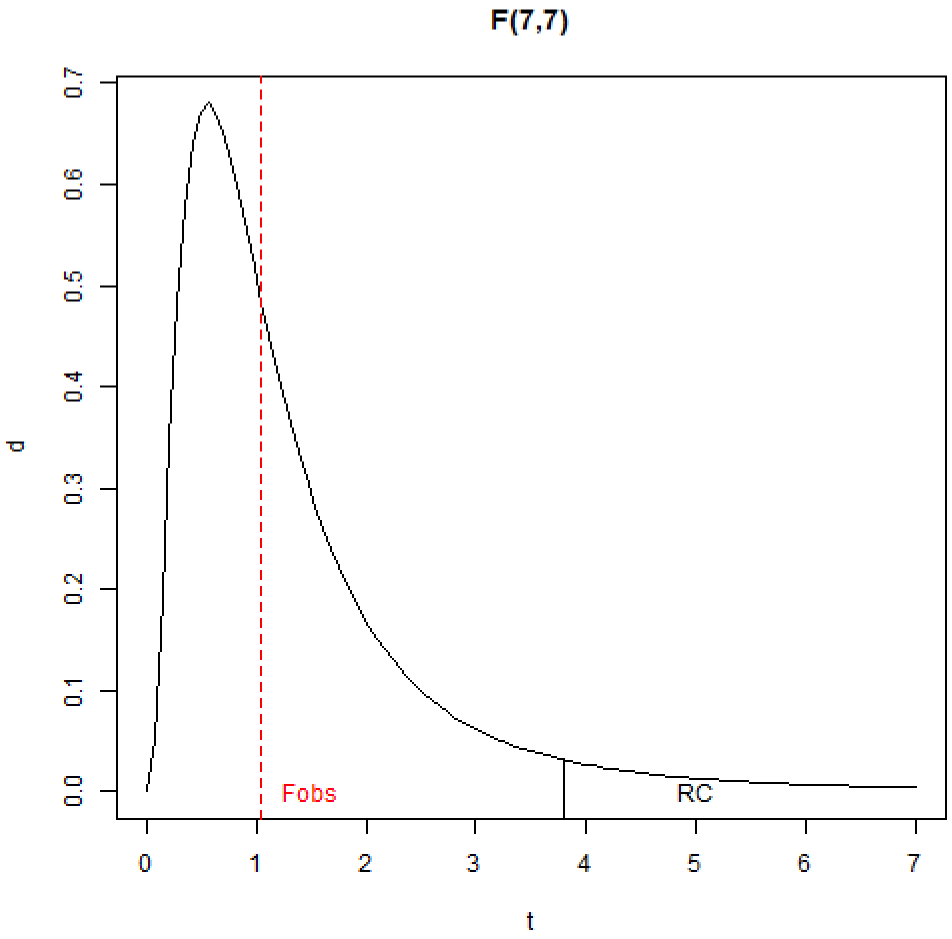
$s^2_{r2} = 0,10068$

sendo que $n_{r1} = n_{r2} = 8$

e $\alpha = 5\%$

A estatística do teste: $\frac{s^2_{r1}}{s^2_{r2}} = \frac{0{,}10433}{0{,}10068} = 1,03618$

$F_{c(0,05;7,7)} = 3,79$ assim, $RC = \{F > 3,79\}$



Como $F_{obs} \notin RC$ não se rejeita H_0, ou seja, as variâncias são estatisticamente iguais ao nível de 5% de significância, ou seja, as variâncias dos ganhos de peso das raças são homocedásticas.

Comparação de duas médias de populações normais: amostras independentes

A análise da hipótese da igualdade de variâncias é crucial para o uso do teste t, na comparação de duas médias, apresentado a seguir.

Com o objetivo de se comparar duas populações examinaremos a situação na qual os dados estão na forma de realizações de amostras aleatórias de tamanhos n_1 e n_2, selecionadas, respectivamente, das populações 1 e 2.

Uma coleção de $n_1 + n_2$ elementos são aleatoriamente divididos em 2 grupos de tamanhos n_1 e n_2, onde cada membro do primeiro grupo recebe o tratamento 1 e do segundo, o tratamento 2. Especificamente, estaremos interessados em fazer inferência sobre o parâmetro:

$\mu_1 - \mu_2$ = (média da população 1) – (média da população 2)

Hipótese: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou seja, $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Estatística do teste: $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Caso 1: variâncias conhecidas

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Caso 2: variâncias desconhecidas e iguais

Preliminarmente, testa-se se as variâncias das duas populações são iguais. Caso a hipótese não seja rejeitada, isto é, que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, a estatística anterior transforma-se em:

$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$, substituimos σ por um estimador, teremos uma expressão muito semelhante à t de Student. Uma estatística para σ^2 é a média ponderada:

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

que, como s_1^2 e s_2^2 são dois estimadores não viciados de σ^2, também é um estimador não viciado de σ^2.

Assim, $t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)GL$

Exemplo. Dois grupo de 8 animais da mesma idade e raças diferentes foram submetidos a um mesmo regime alimentar. Os resultados para ganho de peso foram:

R1:	$2,30$	$2,10$	$1,91$	$1,20$	$1,93$	$1,88$	$1,95$	$2,10$
R2:	$2,30$	$2,15$	$2,00$	$1,28$	$2,15$	$2,20$	$1,91$	$2,06$

Ao nível de 5%, as médias dos ganhos de pesos raças diferem entre si?

```
r1<-c(2.30,2.10,1.91,1.20,1.93,1.88,1.95,2.10)
r2<-c(2.30,2.15,2.00,1.28,2.15,2.20,1.91,2.06)
t.test(r1, r2, alternative = "le", var.equal = TRUE)
```

```
#> 
#>      Two Sample t-test
#> 
#> data:  r1 and r2
#> t = -0.53098, df = 14, p-value = 0.3019
#> alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
#> 95 percent confidence interval:
#>       -Inf 0.1969546
#> sample estimates:
#> mean of x mean of y
#>   1.92125   2.00625
```

Usando os dados do exemplo anterior, testar se há evidência de que as duas raças apresentam o mesmo ganho de peso $(H_0 : \mu_A = \mu_B \text{ vs. } H_1 : \mu_A < \mu_B)$, ao nível de 5%.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{r1} = \mu_{r2} \\ H_1 : \mu_{r1} < \mu_{r2} \end{cases}$$

Calculando os valores de média e desvio-padrão:

$\bar{X} = 1,92125$ e $s_{r1}^2 = 0,10433$ e $\bar{Y} = 2,00625$ e $s_{r2}^2 = 0,10068$

sendo que $n_{r1} = n_{r2} = 8$ e $\alpha = 5\%$

Assim,

$S_P^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{(8-1)0,10433+(8-1)0,10068}{(8-1)+(8-1)} = 0,1025054$

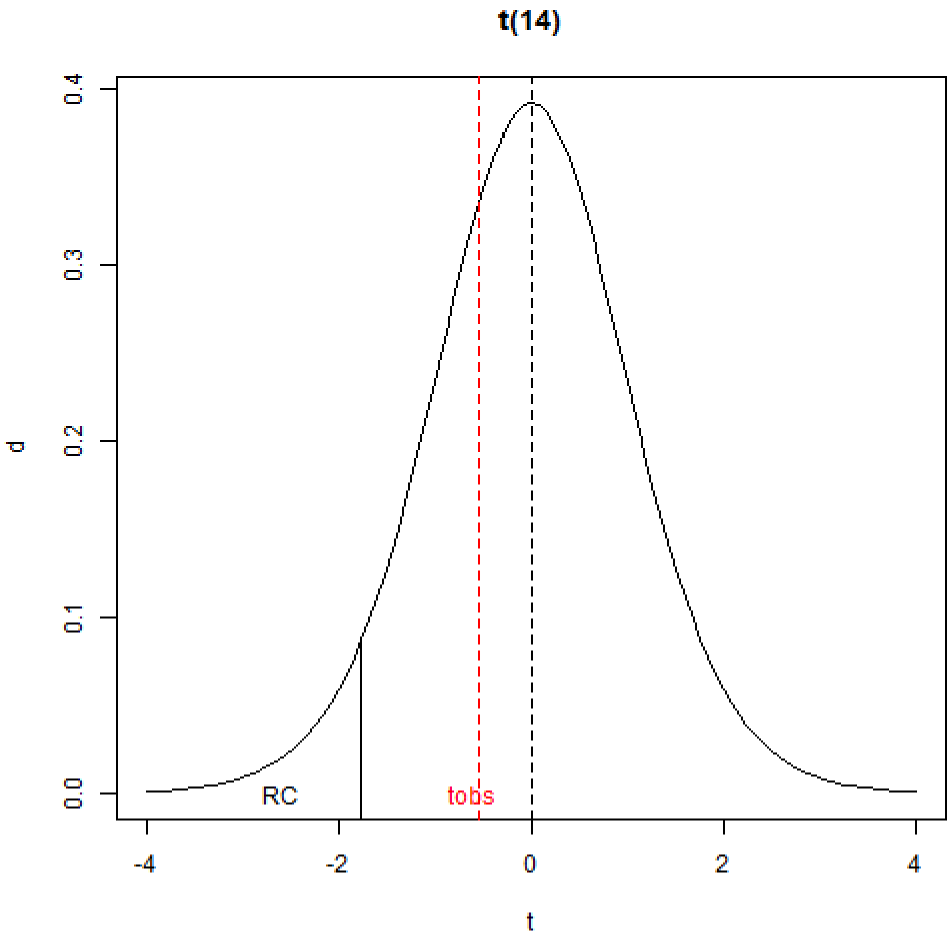
sendo $S_P = 0,3201646$

Portanto,

$t_{obs} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(1,92125-2,00625)}{0,3201646\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = -0,5309908$

Para a construção da **região crítica** do teste: $t_c(14; 0,05) = -1,761$ assim, a região crítica é $RC = \{t \leq -1,76131\}$

Conclusão: Como $t_{obs} \notin RC$, não rejeita-se H_0, não há evidências de que a raça 1 apresenta maior ganho de peso que a raça 2.



Caso 3: variâncias desconhecidas e desiguais (Teste de Smith – Satterthwaite)

Quando a hipótese de igualdade de variâncias for rejeitada, deve-se substituir σ_1^2 e σ_2^2 pelos seus respectivos estimadores s_1^2 e s_2^2 obtendo a estatística:

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

que sob a veracidade de H_0 $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$, aproxima-se de uma distribuição t de Student, com número de graus de liberdade dado aproximadamente por:

$$gl = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Como o número de graus de liberdade assim calculado, geralmente, é **não inteiro**, recomenda-se aproximá-lo para o inteiro imediatamente anterior a este.

Se n_1 e n_2 são ambos grandes $(n \geq 30)$, o teste pode ser baseado na estatística.

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1) \text{ sob } H_0$$

pois permanece válido se σ_1^2 e σ_2^2 são substituídos por seus respectivos estimadores amostrais s_1^2 e s_2^2.

Nota: no caso da inferência originada de amostras grandes, não é necessário assumir que as distribuições das populações originais são normais, porque o teorema central do limite garante que as médias amostrais X e Y são aproximadamente distribuídas como $N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$ e $N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$, respectivamente. Além disso, a suposição de variâncias populacionais iguais $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ que é usada para amostras pequenas, é evitada nessa situação.