

Döntéelméleti modellek gyakorlat

Berta Árpád

October 31, 2023

Az alábbi gyakorlati jegyzet soha nem lesz készen, folyamatosan fejlődik. Amely részeket ritkábban vagy nem érintünk a gyakorlaton, azok lassabban fejlődnek, akár hibákat is tartalmazhatnak. Érdemes időnként, de leginkább számonkérés előtt felkeresni a legújabb változatát. Az anyag nagyrészt a következő könyv válogatott fejezeteire épül:

Temesi József: *A döntéelmélet alapjai* (2002, Aula kiadó)

Contents

1	Bevezetés - Többtényezős döntések	3
1.1	Egy jellemző döntési feladat - lakásvásárlási probléma	3
1.2	Alapfogalmak	3
2	Bevezetés - Lineáris programozás	4
3	Bevezetés - Döntési folyamat:	5
4	Bevezetés - Döntéstámogató rendszerek (DSS):	5
5	Bevezetés - Csoportos döntések:	5
6	Eliminációs módszerek	6
6.1	Dominancia módszer	7
6.2	Kielégítésre törekvő módszer	7
6.3	Diszjunkt módszer	7
7	Elemi döntési módszerek (determinisztikus modellekre)	7
7.1	Lexikografikus módszer	9
7.2	Maximin módszer (pesszimista döntéshozó)	9
7.3	Maximax módszer (optimista döntéshozó)	9
7.4	Súlyozásos módszer	9
8	Értékelő függvények	10
8.1	Preferenciareláció tulajdonságai	10
8.2	Értékelő függvény létezése	11

8.3	Értékelő függvények dekompozíciós alakjai	12
8.4	Additív értékelő függvények	12
8.4.1	Preferencia-függetlenség:	12
8.4.2	Kétdimenziós eset	13
8.5	Kvázi additív értékelő függvények	13
8.6	Multiplikatív értékelő függvények	15
8.7	Értékelő függvények megkonstruálása	15
8.7.1	Többtenyezős értékelőfüggvény	16
8.7.2	Egydimenziós értékelőfüggvény	16
9	Döntés bizonytalanság mellett (sztochasztikus modellek)	17
9.1	Dominancia módszer	18
9.2	Döntés a pénzérték alapján	18
9.3	Döntés a valószínűségérték alapján	19
9.4	Döntés a várható pénzérték alapján	19
9.5	Döntés az elmulasztott nyereség alapján	19
9.6	Döntés a várható elmulasztott nyereség alapján	19
9.7	Döntés a rendelkezésre álló információ alapján	19
9.8	A tökéletes információ várható pénzértéke	20
9.9	Döntés nem tökéletes információ alapján	20
9.10	Döntés döntési fa eljárás alapján	21
10	Multi-attribute utility theory — Hasznosság függvény	23
10.1	Axiómarendszerek (Neumann-Morgenstern 1947)	24
10.1.1	1. Axióma	24
10.1.2	2. Axióma	24
10.1.3	2'. Axióma - Függetlenségi axióma (Fishburn 1970)	25
10.1.4	3. Axióma - Folytonossági axióma	25
10.1.5	4. Axióma	25
10.1.6	5. Axióma - Redukciós szabály	25
10.2	Hasznosság függvény létezése és előállítása	25
10.2.1	Létezési tétel:	25
10.2.2	Fontos tulajdonság:	25
10.2.3	Bizonyítás:	25
10.2.4	Következmények:	26
10.3	Egydimenziós hasznosság függvények előállítása - bizonyossági egyenértékes módszer	27
10.4	Kockázati magatartás	29
10.5	Többtenyezős hasznosság függvény létezése és előállítása	30
10.5.1	Függetlenségi tesztek	30
10.6	Additív és multiplikatív hasznosságfüggvény	31
10.7	Előállítás	32
10.8	A hasznossági elmélet felvetéseinek magatartáselméleti kritikái	32

1 Bevezetés - Többszempontú döntések

1.1 Egy jellemző döntési feladat - lakásvásárlási probléma

Új városba költözéskor lakóingatlanhoz szeretnénk jutni. Ehhez feltesszük, hogy rendelkezünk egy alaptőkével, amely elegendő több lehetséges lakás (alternatívák) közül egy lakás megvásárlásához. A lakás kiválasztásához több különböző szempontot (kritériumot) kell figyelembe vennünk és ezek alapján a legjobbat kiválasztani. Ilyen például a lakás ára, mérete, beosztása, esztétikuma, külleme, a lakókönyv közbiztonsági -, levegőtisztasági szintje, kiszolgáló létesítmények (bolt, piac, kocsmák, szórakozóhely), parkolási, biciklitárolási, megközelíthetőségi lehetőségek, a lakásból érzékelhető kilátás és a táj szerkezete.

Feladat: egyetlen cselekvési alternatíva kijelölése (pl: legjobb lakás).

További példák:

- politikai, üzleti, termelési döntések (közgazdaságtan)
- ajánlórendszerek, szakértői rendszerek (adatbányászat)
- Temesi jegyzet 12-13 o.

1.2 Alapfogalmak

Alternatívák: egy döntési szituáció lehetséges megoldása, lehetséges cselekvések. Ezek strukturált halmaza: *döntési tér* (v. döntési felület). Megadásuk nem feltétlenül matematikai módon történik. Példa: a szóba jöhető lakások halmaza.

Kritériumok: az alternatívák azon jellemzői, amelyeket figyelembe szeretnénk venni a döntési feladatban. Ezek alapján döntünk az alternatívák közül. *Metakritériumok* olyan kritérium, amely alapján a kritériumok közül tudunk választani (vagy rangsorolni).

Többszempontú döntési problémák: véges (megszámlálható) sok alternatíva, véges sok kritérium. Feladat: egyetlen cselekvési alternatíva kijelölése (pl: legjobb lakás), vagy az alternatívák rangsorolása. Nincs egzakt, minden környezetben és probléma-típusra általánosan elfogadott algoritmus (ezek megismerése a félév anyaga). Nehézség: lehetnek szubjektív elemei. Teljes döntési folyamatot le kell fedni.

Döntéshozó: felelős a döntés meghozásáért. Több személy is lehet (egyéni \leftrightarrow csoportos döntések). Esetek többségében feltehető, hogy a döntéshozó racionális döntést hoz, optimalizáló szemléletű (Pareto-optimális alternatívák közül választ). Többek között ezt a feltevést járja körbe és cáfolja Herbert A. Simon és Daniel Kahneman (esszék) \rightarrow *korlátozott racionalitás*: kielégítő szemlélet (ez inkább az általános). Döntéshozó az objektív adatok ismeretén felül *preferenciákkal* rendelkezik, ezek alapján dönt.

2 Bevezetés - Lineáris programozás

Többcélú programozási feladat: Fontos kiemelni, hogy amennyiben a feladatunk feltételrendszer és célok különválasztásából és egy matematikai programozási modell feladat felírásából tevődik össze, akkor hagyományos módon többcélú programozási feladatról beszélünk (feladat típusától függően akár LP, vagy hozzárendelési feladat, vagy szállítási feladat). A változók folytonos és egész értékűek és a hozzájuk megadott korlátokkal testesítik meg a döntési szempontrendszerünk. Ilyen esetben a legjobb döntés kiválasztását célfüggvény vezérli és matematikai feladatként megoldható (**így nem a többtényezős döntési problémákra ismertetett eljárásokkal foglalkozunk ilyen esetben**).

Probléma:

- több alternatív (akár szélsőségesen eltérő struktúrájú) optimum lehet és ezek (alternatívák) közül választani kell \rightarrow valamilyen pótlólagos információra van szükség.
- az esetek döntő többségében nehéz (sőt lehetetlen) a döntési problémát egyetlen célfüggvény kiértékelésére leegyszerűsíteni.

Egy példa feladat: Többféle termék előállításának mennyiségéről kell döntenünk. Döntésünket elsősorban a korlátozottan rendelkezésünkre álló erőforrások (nyersanyag-, munkaerő- és költségkorlátok), illetve a termelés technológiai szabványai befolyásolják. Az elérendő cél a maximális profit, minimális környezeti kár okozásával, illetve lehető legnagyobb társadalmi fejlődés elérésével.

Optimum-fogalom: Amennyiben több célfüggvény is van \rightarrow új optimum-fogalom kell. *Pareto-optimum* több cél egyidejű teljesülése úgy, hogy nem lehet olyan újabb lehetséges megoldást megadni, ami minden szempontból nem rosszabb az előzőnél, és egy szempont szerint jobb az előzőnél. Ezeknek a halmaza viszont általában végtelen sok elemből áll \rightarrow nem alkalmas a döntési probléma megoldására. Kompromisszumos megoldást kell keresni. Lehetőségek (mindegyik egyetlen cfgv-re vezeti vissza a megoldást):

- súlyozásos módszer: célfüggvényekhez fontossági súlyokat rendelünk, súlyokkal képzett összegként áll elő az egyetlen cfgv (nehéz a súly megadása)
- lexikografikus módszer: legfontosabb cfgv lesz a cfgv (melyik a legfontosabb?)
- korlátok módszere: egy cfgv-t kiválasztunk a többit beépítjük a feltételrendszerbe (mi lesz a korlát?)

- kompromisszumprogramozás elve: kiszámoljuk minden cfgv szerinti legjobb értéket és azt az alternatívát (megoldást) választjuk, ami ehhez a legközelebb van (mi a távolságfüggvény?)

3 Bevezetés - Döntési folyamat:

1. döntési helyzet keletkezése → konfliktus (fel kell oldani, dönteni kell)
2. döntési probléma megfogalmazása és formalizálása
 - (a) a döntési cél megfogalmazása
 - (b) alternatívák kijelölése
 - (c) kritériumok meghatározása
3. módszer választás (nehéz)
4. megoldás: egyetlen cselekvési lehetőség kiválasztása (vagy alternatívák egyértelmű rangsorolása)
5. kiértékelés, elemzés (helyes volt-e a döntésünk?)

4 Bevezetés - Döntéstámogató rendszerek (DSS):

Célja a döntési folyamat automatizálása, döntési feladat megoldásának a segítése. Hagyományosan célorientált (domain specifikus) rendszerek.

Megkülönböztetünk:

- Passzív DSS: felügyeli a döntési folyamatot, de nem ajánl fel semmilyen döntési lehetőséget (kritikai rendszerek)
- Aktív DSS: felügyeli a döntési folyamatot, konkrét javaslatot ad a döntésre
- Kooperatív DSS: a döntési folyamat közben is lehetőség van az egyes paraméterek módosítására, az eljárás újradefiniálásra

Eszközök: egyes folyamatok automatizálása, vizualizáció, szűrés -, súlyozás -, preferencia -, hasznosság alapú módszerek (minden a félév során megismert eljárás), ajánlórendszerek, gépi tanulás, adatbányászat, szövegbányászat, tudásalapú -, szakértői rendszerek, többcélú programozás, megerősítéses tanulás, ...

5 Bevezetés - Csoportos döntések:

Akkor beszélünk csoportos döntésről, ha a döntés nem egyetlen döntéshozótól függ, hanem több döntéshozó van → elosztott döntés.

- vertikális: a folyamat egyes részeit osztjuk szét különböző döntéshozókhoz, mindenki az adott részfeladatban *egyedül* dönt. A döntések közötti kapcsolatot kell megadnunk, a részdöntésekre pedig a hagyományos DSS-eket alkalmazhatjuk.
- horizontális: egy döntési kérdésben több döntéshozó dönt \rightarrow szavazási eljárások. DSS vezérli a szavazást, vagy egy aktív DSS is lehet egy döntéshozó.

Szavazási eljárások A szavazás során egy olyan *társadalmi jóléti függvényt* keresünk, amely méltányosan összegzi az alternatívák feletti preferenciákat \rightarrow helyes rendezést ad az alternatívákra. Helyes rendezés alatt olyan csoportos döntést értünk, ami az alábbi tulajdonságokat egyidejűleg kielégíti:

Megkövetelt tulajdonságok:

- Univerzális értelmezési tartomány: minden lehetséges bemenetre tud rendezést adni.
- Gyenge Pareto elv: ha valamely alternatívát minden döntéshozó egyértelműen jobban preferál egy másiknál, akkor az a végső döntésben is jobban fog szerepelni.
- Bináris függetlenség: felteszi, hogy minden alternatíva pár esetében csak és kizárólag az a két alternatíva befolyásolja a döntéshozókat a preferenciarendezésben.
- Diktátor mentesség: nincs olyan döntéshozó, akinek a döntése dominálja az összes többiét.

Arrow-tétel: Nem létezik olyan társadalmi jóléti függvény amelyben ez a négy feltétel egyidejűleg teljesülne. \rightarrow nincs egy tökéletes szavazási eljárás.

6 Eliminációs módszerek

Formalizáljuk a lakásvásárlási példánkat. Tegyük fel, hogy hosszas gondolkodás után sikerült kritériumaink közül elhagyni azokat, amelyek kevésbé fontos szempontok, így végül a vizsgálataink során az alábbi jellemzők maradnak:

- X_1 : ára (millió forint) (kritérium: minél olcsóbb)
- X_2 : mérete (m^2) (kritérium: $70m^2$ -hez közeli)
- X_3 : esztétikuma (kritérium: minél jobb)
- X_4 : környék jósága (kritérium: minél jobb)
- X_5 : bicikli tárolási lehetőség (kritérium: minél jobb)

A fenti szempontok szerint nekiálltunk lakást keresni és végül a következő négy lehetséges lakásjelöltre tudtuk redukálni a döntési terünket:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	25	98	lepukkant	közepes	lakáson belül
A_2	50	56	új	kiemelkedően jó	fedett
A_3	45	120	újszerű	kifejezetten rossz	nyitott udvaron
A_4	52	56	új	kiemelkedően jó	fedett

6.1 Dominancia módszer

Dominált alternatíva: olyan alternatíva, ami egyik kritérium szerint sem jobb, és legalább egy szempont szerint rosszabb egy másik alternatívánál. A nem dominált alternatívák egyben Pareto-optimális megoldások.

A módszer lényege ezek kiszűrése (eliminációs módszer). Amennyiben dominált alternatívát választana egy döntéshozó, akkor az nem számítana racionális döntésnek.

A példában az A_4 egy dominált alternatíva: egyik szempont szerint sem jobb az A_2 -nél, és az X_1 kritérium szerint rosszabb.

6.2 Kielégítésre törekvő módszer

Minden célhoz meghatározunk egy *kielégítési szintet*. Ez lényegében azt jelenti, hogy mi az a szint (**szükségességi feltétel**), az adott szempontból, ami felett (v. alatt) elfogadnánk az adott alternatívát. Például: közepes közbiztonsági szint felett már elgondolkozunk a lakás megvásárlásán. Ezek alapján kiküszöbölhetőek azok az alternatívák, amik valamilyen szempontból már nem elfogadhatóak a számunkra. Azok az alternatívák maradnak, amelyek minden kielégítési szintnek megfelelnek. Tehát minden szempontból megbízható. Ugyanakkor általában nem feltétlenül ilyet keresünk, sőt a legjobb alternatívát is kiszórhatja, ami egyébként éppen a határérték alatt van egy szempont szerint. A módszer alkalmazásakor nem az egyetlen legjobb alternatívát keressük, hanem megpróbáljuk szűkíteni az alternatívák halmazát (eliminációs módszer).

6.3 Diszjunkt módszer

Az előző módszer kifordítva. Nem egy minden szempontból megbízható alternatívát keresünk, hanem olyat ami valamilyen (akár több) szempontból kiemelkedő. Módszer: minden szemponthoz meghatározzuk azt a szintet (**elegendősségi feltétel**), amelynél ha egy alternatíva jobb értékkel bír, akkor bent marad az alternatívák halmazában. Ha egy szempont szerint sem kiemelkedő, akkor elvetjük. Ebben az esetben is szűkítjük az alternatívák halmazát és nem egyetlen legjobbat keresünk (eliminációs módszer).

Példa: 30 millió forint alatti ingatlanokat kiemelkedően jó értékűnek tartjuk. A 70 m²-hez képest legfeljebb 15 m²-rel eltérő ingatlanokat kiemelkedően jó alapterületűnek tartjuk. ...

7 Elemi döntési módszerek (determinisztikus modellekre)

Problémák az eddigi ábrázolással:

- nem számszerű értékek,
- normalizálatlan (nem ismert a globális range),
- kritériumonként eltérően maximalizálni vagy minimalizálni szeretnénk,
- a lakás mérete esetében pedig általában inkább egy megfelelő értéket szoktunk keresni és nem minél nagyobb vagy minél kisebb méretű lakást (tegyük fel, hogy **70 m²**-es a számunkra optimális lakásméret).

Szubjektív értékelések számszerűsítése: Ezt majd részletesen fogjuk vizsgálni az értékelőfüggvények tárgyalásakor. Most bemondásos alapon határozzuk meg az értékeket:

	lepukkant	felújításra szorul	újszerű	új
	0.2	0.3	0.6	0.9
	kifejezetten rossz	közepes	kifejezetten jó	
	0.12	0.56	0.97	
nincs	lakáson belül	nyitott udvaron	fedett	
0.0	0.1	0.5	0.9	

A lakás méretének egyirányú skálára való felfűzése több lehetséges módon is történhet. A legegyszerűbb ha a keresett optimális értéktől vett euklideszi távolságot vesszük. Ha nagyobb irányba térünk el, akkor az a túlzott fűtési költségek miatt kedvezőtlen, ha pedig kisebb méret irányába, akkor pedig a kevés hely miatt kedvezőtlen. Ebben az esetben feltesszük, hogy mind a két irány azonos súllyal ront a lakás "jóságán".

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	25	28	0.3	0.56	0.1
A_2	50	14	0.9	0.97	0.9
A_3	45	50	0.6	0.12	0.5
A_4	52	14	0.9	0.97	0.9

Skála meghatározása: szakértőktől, vagy ha nem jutunk semmilyen információhoz, akkor az ismert értékek maximuma és minimuma alapján.

Normalizálás:

$$\text{maximum feladat: } r_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}$$

$$\text{minimum feladat: } r_{ij} = \frac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}$$

Maximum és minimum meghatározása:

- az ismert értékekből kijelölve
- szakértői segítséggel

	X_1 $max = 100,$ $min = 10$	X_2 $max = 70,$ $min = 0$	X_3	X_4	X_5
A_1	0.83	0.6	0.3	0.56	0.1
A_2	0.56	0.8	0.9	0.97	0.9
A_3	0.61	0.29	0.6	0.12	0.5
A_4	0.53	0.8	0.9	0.97	0.9

7.1 Lexikografikus módszer

A célok között fontossági sorrendet állítunk fel. Ezután választjuk a legfontosabb szempontot, megnézzük, hogy eldönti-e az alternatívák választását. Ha egy kiemelkedik akkor azt választjuk, ha nem akkor folytatjuk a második legfontosabb döntéssel mindaddig, míg egyetlen alternatíva nem marad.

Pl: legfontosabb szempont, hogy a biciklitárolási lehetőség, második pedig a lakás ára. Ebben az esetben a legfontosabb cél szerint két alternatíva marad, de a lakás ára alapján már egyértelműen lehet dönteni a fennmaradó két alternatíva közül.

7.2 Maximin módszer (pesszimista döntéshozó)

Az értékek azonos, normalizált skálán vannak. Minden alternatívához megkeresi a felvett leggyengébb értéket és azok közül kiválasztja a legjobbat.

A példában az utolsó alternatíva legrosszabb értéke 0.53, az A_1 -é 0.1, az A_2 -é 0.56, míg az A_3 -é 0.12, így ezeknek a maximuma 0.56, ezért az A_2 alternatívát választjuk.

7.3 Maximax módszer (optimista döntéshozó)

Minden alternatívához megkeresi a felvett legjobb értéket és ezek közül kiválasztja a legjobbat.

A példában az A_1 alternatíva maximális értéke 0.83, az A_2 -é és az A_4 -é 0.97, míg az A_3 -é 0.61. Mivel több alternatíva maradt ezért közülük az eddigi kritériumok letakarásával a következő maximális érték mentén próbálunk dönteni, mindaddig, míg nem lesz egyértelmű legjobb alternatíva. Az ár szerint már egyértelmű döntést tudunk hozni: A_2 .

7.4 Súlyozásos módszer

Minden kritériumhoz meghatározunk egy súlyt és elvárjuk, hogy a súlyok összege 1 legyen. Majd a súlyozott összegek alapján a maximális értékű alternatívát választjuk.

Például legyen a döntéshozó akarata alapján az X_1 -hez tartozó súly 0.5, míg az X_2 , X_3 , X_4 -hez 0.1, illetve az X_5 -höz 0.2. A súlyok összege 1, tehát megfelelő súlyozást adott meg a döntéshozó. Ezek alapján kiszámoljuk az egyes alternatívákhoz kapcsolódó súlyozott összegeket. Az A_1 alternatíva esetében $0.5 \cdot 0.83 + 0.1 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.56 + 0.2 \cdot 0.1$, ami 0.581. Az A_2 esetében ugyanez 0.727, az A_3 esetében 0.506, míg A_4 esetében 0.712. Mivel a maximális értéket az A_2 veszi fel, ezért ezt az alternatívát választjuk.

A skálák meghatározásának nehézségére és az egyes kritériumok értékeinek becslésére megoldás: értékelő függvény alkalmazása.

8 Értékelő függvények

Preferencia reláció: Adott értékelésre váró alternatívák A halmaza (akár véges vagy végtelen számosságú). Ebből vegyünk egy (a, b) rendezett elempárt és definiáljunk felettük egy "legalább olyan jó, mint" relációt (\succeq). Tehát $a \succeq b$ akkor és csak akkor, ha a legalább olyan jó mint b .

(Nagyon sok más preferencia alapú döntési módszer létezik, ezekből egy az értékelő függvény alapú)

Értékelő függvény: $v : A \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow a \succeq b$

8.1 Preferenciareláció tulajdonságai

További relációk bevezetése:

- **indifferencia:** teljesül $a \succeq b$ és $b \succeq a$ is $\Rightarrow a \sim b$
- **nem összehasonlíthatóság:** nem teljesül se $a \succeq b$ és se $b \succeq a \Rightarrow a ? b$
- **szigorú preferencia:** teljesül $a \succeq b$, de $b \succeq a$ nem teljesül $\Rightarrow a \succ b$ (a egyértelműen jobb, mint b)

Definícióból adódó fontos tulajdonságaik:

- **preferencia reláció reflexív:** $a \succeq a$, tehát a legalább olyan jó, mint a mindenképpen teljesül
- **indifferencia reflexív:** $a \sim a$, a mindenképpen indifferens a -hez.
- **indifferencia szimmetrikus:** $b \sim a \Rightarrow a \sim b$

Ahhoz, hogy v -t megkonstruáljuk a \succeq -nak gyenge rendezésnek kell lennie. **Gyenge rendezés:** reflexív, tranzitív és teljes. **Kikötjük, hogy \succeq legyen gyenge rendezés.**

- A reflexivitás a definíció alapján teljesül.
- Emellé felvesszük, hogy \succeq **tranzitív**, tehát $a \succeq b$ és $b \succeq c$ estén teljesülnie kell $a \succeq c$ (ez nehéz!! foci **körbeverés** példa, racionális döntéshozó).
- A teljességhez teljesülnie kell, hogy $\forall (a, b) \in A : a \succeq b$ vagy $b \succeq a$. **Nem adhatunk "nemtudom" választ, nincs ?, minden elemre meg kell adni a preferenciát.**

Következmények: \sim is tranzitív lesz. Tehát a \sim **ekvivalencia reláció** (reflexív, tranzitív, szimmetrikus). Ennek köszönhetően \sim **indifferencia osztályok**at generál A felett (azok az alternatívák, amik ugyanolyan jók, azonos indifferencia osztályba sorolhatók).

Az **indifferencia osztályok halmaza megszámlálható:** ez azt jelenti, hogy az alternatívák véges sok osztályba sorolhatóak. Ennek a következménye, hogy a természetes számokat felhasználhatjuk az osztályok jelölésére.

Felmerül a kérdés, hogy milyen az, ha az indifferencia osztályok halmaza nem megszámlálható? Például, amennyiben tökéletesen osztható javak tartoznak az indifferencia osztályokba, melyeknek tovább osztásával újabb osztályok hozhatóak létre.

Minden adott v létezéséhez.

8.2 Értékelő függvény létezése

Ha a \succeq reláció gyenge rendezés az A halmaz elemeire vonatkozóan, és az indifferencia osztályok halmaza megszámlálható $\Rightarrow \exists v : A \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $\forall (a, b) \in A$ teljesül, hogy

- $a \succeq b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$, (vagy
- $a \succ b \Leftrightarrow v(a) > v(b)$, és $a \sim b \Leftrightarrow v(a) = v(b)$.)

(Bizonyítás Fishburn (1970), de nem kell itt, mert nem konstruktív)

Tulajdonságok:

1. A v értéke általában a $[0,1]$ intervallumra skálázódik és a 0 jelenti a legrosszabb preferencia értéket és az 1 a legjobb. Közbeeső értékek megegyeznek a preferenciarendezés értékeivel.
2. Számszerű értéket ad arra, hogy egyik alternatívát jobban preferáljuk a másiknál. Növekvő preferencia sorrend \rightarrow az értékelő függvény **monoton növekvő** (ez eltérhet, de azt nem vizsgáljuk).
3. **Stratégiaiailag ekvivalens** értékelő függvények: az alternatívákhoz ugyan azt a preferencia sorrendet határozza meg.
4. Racionális a döntéshozó \Rightarrow létezik értékelő függvény.

A fenti tétel, túl szigorú az indifferencia osztályok megszámlálhatóságáról. Ha gyengítjük a feltételt akkor is megkaphatjuk v létezését.

Legyen a feltételünk az, hogy $\exists B$ az indifferencia osztályok egy részhalmaza, amelyre teljesül:

- B megszámlálható,
- $\forall A_1, A_2$ indifferencia osztály részhalmazra: $\exists C \in B$, hogy ha $A_1 \succ A_2$ akkor $A_1 \succ C \succ A_2$ (tehát sűrű a \succ rendezésre).

Ekkor teljesül v létezése. Összefoglalva ez annyit jelent, hogy ha létezik olyan véges indifferencia osztályok részhalmaza, amihez megadható olyan rendezés, ami egyértelműen rendezni tudja az ezen a részhalmazon túli indifferencia osztályokat is, akkor létezik hozzá értékelő függvény. (Ez egy jó dolog!)

Speciális eset: A n dimenziós vektortér. Tehát $\forall a \in A$ alternatíva $x_1^{(a)}, \dots, x_n^{(a)}$ komponenssel (tulajdonság) jellemzett és a \succeq reláció egy gyenge rendezés az A halmaz elemeire. Ebben az esetben az alábbi két feltétel teljesülése esetén garantált v létezése:

- monotonitási (dominancia) feltétel: ha a tulajdonságoként mindenben legalább olyan jó, mint b , de legalább 1 tulajdonságban szigorú preferencia áll fenn a javára akkor $a \succ b$.
- folytonossági feltétel: $\forall a, b, c \in A$, ahol $a \succ b \succ c \Rightarrow \exists k \in (0, 1) : b \sim k \cdot a + (1 - k) \cdot c$

Továbbiakban ezt a speciális esetét vizsgáljuk.

8.3 Értékelő függvények dekompozíciós alakjai

Def: Preferencia struktúra **dekomponálható**, ha $\exists v_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, v_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}$ és $\exists v : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy $\forall a', a'' \in A : a' \succeq a'' \Leftrightarrow$

$$v(x_1^{(')}, \dots, x_n^{(')}) = v[v_1(x_1^{(')}), \dots, v_n(x_n^{(')})] \geq v(x_1^{(')}, \dots, x_n^{(')}) = v[v_1(x_1^{(')}), \dots, v_n(x_n^{(')})] \quad (1)$$

Speciális dekomponálható preferencia struktúrák:

- additív alak: $v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] = k_1 \cdot v_1(x_1) + \dots + k_n \cdot v_n(x_n)$
- multiplikatív alak: $v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] = \frac{1}{K} \cdot [\prod_{i=1}^n (1 + K \cdot k_i \cdot v_i(x_i)) - 1]$
- kvázi additív alak: $v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_{ij} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \dots + k_{1..n} \cdot v_1(x_1) \cdot \dots \cdot v_n(x_n)$

8.4 Additív értékelő függvények

Legyen $a = (x_1, \dots, x_n) \in A$. Ekkor a preferencia struktúra **additív** \Leftrightarrow teljesül:

- $v(a) = k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + \dots + k_n \cdot v_n(x_n)$, ahol $k_i > 0$ skálázó konstansok, összegük 1.

8.4.1 Preferencia-függetlenség:

Példa: $T = (\text{édesség}, \text{évszak})$

	édesség	évszak
A_1	fagyi	nyár
A_2	fagyi	tél
A_3	süti	nyár
A_4	süti	tél

Tegyük fel, hogy valaki nyáron a fagyit, télen a sütit részesíti előnyben akkor: $(\text{fagyi}, \text{nyár}) \succeq (\text{süti}, \text{nyár}) \Rightarrow (\text{süti}, \text{tél}) \succeq (\text{fagyi}, \text{tél})$. Ekkor azt mondjuk, hogy az édesség preferenciafüggő az évszaktól. **Ez fordítva nem feltétlenül mondható ki.** NEM SZIMMETRIKUS. Pl: $(\text{nyár}, \text{fagyi}) \succeq (\text{tél}, \text{fagyi})$, de $(\text{nyár}, \text{süti}) \succeq (\text{tél}, \text{süti})$. Tehát az évszak preferenciafüggetlen az édességtől.

Példa: $T = (\text{íz}, \text{édesség}, \text{évszak})$

	íz	édesség	évszak
A_1	vanília	fagyi	nyár
A_2	csoki	fagyi	nyár
A_3	vanília	fagyi	tél
A_4	csoki	fagyi	tél
A_5	vanília	süti	nyár
A_6	csoki	süti	nyár
A_7	vanília	süti	tél
A_8	csoki	süti	tél

Ebben az esetben viszont feltesszük azt, hogy függetlenül az évszaktól és az édesség típusától a csokisat preferáljuk a vaníliással szemben. Tehát: $(\text{csoki}, \text{süti}) \succeq (\text{vanília}, \text{süti}) \Rightarrow (\text{csoki}, \text{fagyi}) \succeq (\text{vanília}, \text{fagyi})$ és $(\text{csoki}, \text{nyár}) \succeq (\text{vanília}, \text{nyár}) \Rightarrow (\text{csoki}, \text{tél}) \succeq (\text{vanília}, \text{tél})$. Ekkor az íz preferenciafüggetlen a többi kritériumtól.

Definíció: Legyen $T = (X_1, \dots, X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ tényezőrészhalmaz, $C^* \subseteq T$ komplementerhalmaz. Ekkor C preferencia független C^* -tól \Leftrightarrow ha $\forall x_C, y_C \in X_C$: egy tetszőleges $x_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $x_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy:

$$(x_C, x_{C^*}^0) \succeq (y_C, x_{C^*}^0) \Rightarrow (x_C, x_{C^*}) \succeq (y_C, x_{C^*}) \quad (2)$$

Kölcsönös preferencia függetlenség: ez az előző definícióval szemben a teljes tényezőhalmazra vonatkozik. Méghozzá akkor és csak akkor teljesül ha, minden $C \subseteq T$ preferencia független C^* -tól.

A kölcsönös preferencia függetlenség az additív preferencia struktúra létezésének a szükséges és elégséges feltétele (kivéve kétdimenziós esetben).

8.4.2 Kétdimenziós eset

$$T = (X_1, X_2)$$

Egyszerűsítési feltétel: kielégíthető, ha $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$ és $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$ -re teljesül:

$$(x_1, z_2) \succeq (z_1, y_2) \text{ és } (z_1, x_2) \succeq (y_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \quad (3)$$

Ennek a feltételnek a teljesülése és a fent megadott kölcsönös preferenciafüggetlenség teljesülése elegendő és szükséges feltétele az additív értékelőfüggvény létezésének. Túl szigorú feltétel.

Thomsen feltétel: kielégíthető, ha $\forall x_1, y_1, z_1 \in X_1$ és $\forall x_2, y_2, z_2 \in X_2$ -re teljesül:

$$(x_1, z_2) \sim (z_1, y_2) \text{ és } (z_1, x_2) \sim (y_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad (4)$$

Ennek a feltételnek a teljesülése és a fent megadott kölcsönös preferenciafüggetlenség teljesülése elégséges és szükséges feltétele az additív értékelőfüggvény létezésének. Ez már jó.

Visszatérve nem kétdimenziós esetre, ott azért elegendő a kölcsönösen preferenciafüggetlenség, mert azokban az esetekben ez **páronként teljesíti az egyszerűsítési feltételt, ami pedig garantálja a páronkénti Thomsen feltételt.**

8.5 Kvázi additív értékelő függvények

Legyen $a = (x_1, \dots, x_n) \in A$. Ekkor a preferencia struktúra **kvázi additív** \Leftrightarrow teljesül:

$$\begin{aligned} v(a) = & \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i(x_i) + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_{ij} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{l>j}^n k_{ijl} \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_l(x_l) + \dots \\ & + k_{1..n} \cdot v_1(x_1) \cdot \dots \cdot v_n(x_n). \end{aligned} \quad (5)$$

A kvázi additív alak jó tulajdonságai:

1. Legyen $\sum_i k_i = 1$ és $k_{ij} = 0, \dots, k_{1..n} = 0$. Ekkor pontosan az additív alakot fogjuk kapni.

2. Legyen $k_i > 0$ és $k_{ij} = K \cdot k_i \cdot k_j, \dots, k_{1..n} = K^{n-1} \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_n$. Ekkor a kvázi additív alak a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}
 v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] &= \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i(x_i) + \\
 &+ K \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_i \cdot k_j \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \\
 &+ K^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{l>j}^n k_i \cdot k_j \cdot k_l \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_l(x_l) + \\
 &+ \dots + K^{n-1} \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_n \cdot v_1(x_1) \cdot \dots \cdot v_n(x_n).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ezt tekintsük egy egyenletnek, megszorozzuk mindkét oldalról K majd hozzáadunk 1-et:

$$\begin{aligned}
 1 + K \cdot v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] &= 1 + K \cdot \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i(x_i) + \\
 &+ K^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_i \cdot k_j \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) + \\
 &+ K^3 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{l>j}^n k_i \cdot k_j \cdot k_l \cdot v_i(x_i) \cdot v_j(x_j) \cdot v_l(x_l) + \\
 &+ \dots + K^n \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_n \cdot v_1(x_1) \cdot \dots \cdot v_n(x_n)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Ekkor szorzattá alakítható (ha nem hiszed, próbáld ki a kéttényezős esetet!), majd átrendezhető:

$$\begin{aligned}
 1 + K \cdot v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] &= [1 + K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1)] \cdot \dots \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot v_n(x_n)] \\
 v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] &= \frac{1}{K} ([1 + K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1)] \cdot \dots \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot v_n(x_n)] - 1)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Ez a szorzat megfelel a multiplikatív alakkal.

Def: Egy $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ **mérhető** $\Leftrightarrow v$ tükrözi **(1)** az A -beli elemek sorrendjét és **(2)** az elemek különbségeinek a sorrendjét.

A mérhető v létezésének vizsgálata nehézkes (itt most nem térünk ki rá).

Differenciaképzés: \circ .

Mérhetőség feltétele: v mérhető, ha $\forall a, b, c, d \in A : a \circ b \succeq^* c \circ d \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d)$

Definíció: Legyen $T = (X_1, \dots, X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ gyenge differencia-független $C^* \subseteq T$ -től \Leftrightarrow ha $\forall w_C, x_C, y_C, z_C \in X_C : \text{valamely } w_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $w_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy: $(w_C, w_{C^*}^0) \circ (x_C, w_{C^*}^0) \succeq^* (y_C, w_{C^*}^0) \circ (z_C, w_{C^*}^0) \Rightarrow (w_C, w_{C^*}) \circ (x_C, w_{C^*}) \succeq^* (y_C, w_{C^*}) \circ (z_C, w_{C^*})$

Kvázi additivitási tétel Tegyük fel, hogy

- létezik v mérhető értékelő függvény
- a legkevésbé preferált $a^0 : v(a^0) = 0$ és a legjobban preferált $a^1 : v(a^1) = 1$
- hasonlóan $\forall i \in 1, \dots, n : \text{a legkevésbé preferált } x_i^0 : v_i(x_i^0) = 0 \text{ és a legjobban preferált } x_i^1 : v_i(x_i^1) = 1.$

Ha $\forall i \in 1, \dots, n : X_i$ tényező gyenge-differenciafüggetlen a komplementerhalmazától, akkor v **felírható kvázi additív alakban**.

8.6 Multiplikatív értékelő függvények

Legyen $a = (x_1, \dots, x_n) \in A$. Ekkor a preferencia struktúra **multiplikatív** \Leftrightarrow teljesül:

$$v(a) = \frac{1}{K}([1 + K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1)] \cdot \dots \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot v_n(x_n)] - 1) \quad (9)$$

A multiplikatív alak létezéséhez (kettőnél nagyobb dimenziós esetben) a kölcsönös preferenciafüggetlenség helyett elegendő a következő feltétel: $\exists i$ index, amelyre $C = \{X_i\}$ tényezőréshalmaz gyenge differencia független a komplementerétől és ugyanez az i index mellett teljesül, hogy $\forall j = 1, \dots, n, j \neq i : C' = \{X_i, X_j\}$ preferenciafüggetlen a komplementerétől. Ez könnyebben teljesül az additív alak létezési feltételénél, de szigorúbb a kvázi-additív alakénál.

K skálázási konstans meghatározása 2D ($n = 2$) esetben:

$$v(a) = k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + K \cdot k_1 \cdot v_1(x_1) \cdot k_2 \cdot v_2(x_2) \quad (10)$$

Fejezzük ki K -t a k_i -kből, legyen $K = \frac{1 - (k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}$. Ekkor:

$$\begin{aligned} v(a) &= k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + \\ &\quad \frac{1 - (k_1 + k_2)}{\cancel{k_1} \cdot \cancel{k_2}} \cdot \cancel{k_1} \cdot v_1(x_1) \cdot \cancel{k_2} \cdot v_2(x_2) \\ &= k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2) + [1 - (k_1 + k_2)] \cdot v_1(x_1) \cdot v_2(x_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Ahol az alábbi 3 eset állhat elő:

1. eset: $k_1 = 0$ és $k_2 = 0 \Rightarrow v(a) = v_1(x_1) \cdot v_2(x_2), K \rightarrow \infty$. Konjukció, ÉS operátor.
2. eset: $k_1 = 1$ és $k_2 = 1 \Rightarrow v(a) = v_1(x_1) + v_2(x_2) - v_1(x_1) \cdot v_2(x_2), K = -1$. Diszjunkció, VAGY operátor.
3. eset: $k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow v(c) = k_1 \cdot v_1(x_1) + k_2 \cdot v_2(x_2), K = 0$. Átlag művelet. (Additív alak)

A k_i -k tekinthetők az adott tényezőhöz tartozó súlyozásként, a K pedig azért felelős többek között, hogy az értékelés a $[0, 1]$ intervallumba skálázódjon. A fentiek alapján a K a $[-1, \infty]$ intervallumról vesz fel értéket. Ez határérték vizsgálatokkal kettőnél több tényezős esetben is belátható.

8.7 Értékelő függvények megkonstruálása

Jelölések:

A	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
a_1	$v_1(x_1^{(1)})$	$v_2(x_2^{(1)})$	$v_3(x_3^{(1)})$	$v_4(x_4^{(1)})$	$v_5(x_5^{(1)})$
a_2	$v_1(x_1^{(2)})$	$v_2(x_2^{(2)})$	$v_3(x_3^{(2)})$	$v_4(x_4^{(2)})$	$v_5(x_5^{(2)})$
a_3	$v_1(x_1^{(3)})$	$v_2(x_2^{(3)})$	$v_3(x_3^{(3)})$	$v_4(x_4^{(3)})$	$v_5(x_5^{(3)})$

Ezekből meg szeretnénk kapni a $v(a_1), v(a_2), v(a_3)$ -kat. Ez így többtényezős alak, ha az egyes $v_i(x_i^{(j)})$ -ket tekintjük, akkor pedig az egytényezős értékelő függvényeket vizsgáljuk.

8.7.1 Többszempélyű értékelőfüggvény

Hipotézisek alakra vonatkozó tesztek:

- Kölcsönös preferenciafüggetlenség (2D esetben Thompson feltétel) vagy a páronkénti Thompson feltétel teljesülése \Rightarrow additív alak
- Kölcsönös gyenge differenciafüggetlenség és kritériumpárokra nézve kölcsönös preferenciafüggetlenség \Rightarrow multiplikatív forma
- Kölcsönös gyenge differenciafüggetlenség \Rightarrow kvázi additív forma
- Minden más esetben \Rightarrow egyéb formák

Konstruálás:

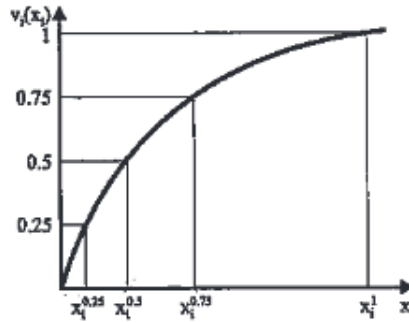
1. Többszempélyű értékelőfüggvény létezésének verifikálása. Pl: teljesül-e a preferencia struktúrára a gyenge rendezés tulajdonságai. Ha nem teljesül, akkor rossz a preferencia struktúra, megkérjük a döntéshozót, hogy racionális preferencia struktúrát állítson fel.
2. Megfelelő alakú függvényforma kiválasztása. Főleg a (gyenge differencia, és preferencia, Thompson) függetlenségi tesztek alapján történik. Mivel ezek közül csak a preferencia függetlenség ellenőrizhető intuitíven, ezért általában multiplikatív alak használata javasolt.
3. Az összetevő egydimenziós értékelő függvények megkonstruálása. (8.7.2.-ban bemutatottak alapján)
4. Konstansok kiválasztása: Kellő mennyiségű preferencia információ alapján felírunk egy konstansokra vonatkozó független egyenletrendszer, megoldjuk. (Konkrét megvalósítással nem foglalkozunk, hasonló a multiplikatív konstansok beállításához.)
5. Konzisztencia ellenőrzés, elemzés. (Döntéshozóval együtt, kérdezéssel módszerrel)

8.7.2 Egydimenziós értékelőfüggvény

1. **A döntéshozó direkt értékelést ad.** Általában nem tud, nehéz, nem lesz konzisztens. (Az elemi módszereknél ezzel próbálkoztunk).
2. **Lineáris értékelő függvény:** meghatározzuk az adott tényező szélső értékeit és a közöttük lévő részt egyszerűen behúzzuk egy egyenlőséggel.
Ennek a módszernek az alapján lehetséges bármely más görbe használata is (például szigmoid).
3. **Felező módszer:** Az eljárást minden $X_k \in X$ tényezőre végrehajtjuk:
 - (a) Adjunk meg egy egyértelmű rendezést a lehetséges tényező értékek felett.
 - (b) Válasszuk ki a legkevésbé kívánatos x_k^0 és a leginkább kívánatos x_k^1 tényezőértéket. A valószínűségeket rögzítsük: $v(x_k^0) = 0$, $v(x_k^1) = 1$
 - (c) Amíg nem találjuk meg a x_k^0 és a x_k^1 középpontját, vegyünk egy tetszőleges $x'_k \in X_k$ tényezőértéket és kérdezzük meg a döntéshozót, hogy értékelje a x_k^0 -ból és a x_k^1 -ből való elmozdulást a vizsgált tényezőérték esetében. Ha a két elmozdulás között eltérés van, akkor

vegyünk egy további tényezőértéket abból az intervallumból, ahol a középpont várhatóan megtalálható lesz. Ha megvan akkor $v(x_k^{0.5}) = v(x'_k) = 0.5$ és ekkor léphetünk a következő lépésre.

- (d) Az előző lépés alkalmazása a x_k^0 és a $x_k^{0.5}$ közötti $x_k^{0.25}$ és a $x_k^{0.5}$ és a x_k^1 közötti $x_k^{0.75}$ középpont megtalálásaért.
- (e) Konzisztencia ellenőrzés: a kapott $x_k^{0.25}$ és $x_k^{0.75}$ középpontja valóban a $x_k^{0.5}$?
- (f) Ismételjük a (c) lépéstől, a részletezni kívánt intervallumon, addig míg elegendő pont nem lesz a görbe illesztéséhez. A görbének rendelkeznie kell a korábban vizsgált tulajdonságokkal (folytonosság, monotonitás)



9 Döntés bizonytalanság mellett (sztochasztikus modellek)

Sztochasztikus döntési modell esetében a vizsgálat értékeink kibővülnek a természet egyes állapotainak valószínűségével (s_k). **Kockázatos döntések.**

Feladat: Tegyük fel, hogy rendelkezünk 35 millió forinttal, melyet szeretnénk úgy befektetni, hogy a lehető legnagyobb hozamunk legyen a következő 5 évre. Bizonytalan eseményként vizsgáljuk az infláció alakulását.

A feladat egyszerűsége kedvéért két lehetőség közül választunk: ingatlan befektetés (a_1) vagy infláció követő állampapír (a_2). Mindkét esetben a teljes összeget elköltjük a befektetésre. A feladat során az infláció alakulása alapján vizsgáljuk, hogy mennyi pénzünk lesz a vizsgált az időszak végére.

Az államkötvény esetében tegyük fel, hogy 0.25% kamatprémiumot fizet az infláción felül (az adott évben mindig az egyvel korábbi év inflációjára számoljuk ezt). Az éves lakbér legyen az adózás után az ingatlan vásárlási értékének a 3.4%-a (1.2 millió forint). Tegyük fel, hogy a lakbér adózáson kívül nincs további költsége az ingatlan üzemeltetésének. Továbbá az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a megkapott kamatot illetve lakbért nem fektetjük be újra.

Az infláció lehetséges alakulása:

	2022	2023	2024	2025	2026
s_1	14.5%	18.4%	9%	9%	7%
s_2	14.5%	17.4%	6%	4.5%	3.5%

Az államkötvény esetén 9 év utána az eredeti összeget kapnánk vissza, viszont mivel jelen esetben a 5 év után visszaváltjuk (a jelenlegi visszaváltási feltételt feltételezve) ezért az eredeti összeg 1%-kal csökkentett értékét kapjuk (az 5. év forduló nap előtti utolsó nap visszaváltva az utolsó évi kamat mínusz 1%-kal számolhatunk). A lakást ugyanígy 5 év múlva értékesítjük, így ebben az esetben

is további hozamhoz juthatunk. Amennyiben az infláció tartósan magas marad (s_1), akkor ehhez jó eséllyel a magas kamatkörnyezet, drága lakáshitelek és a történelmi példák alapján a lakásárak oldalazására lehet számítani. Tehát ebben az esetben ugyanannyiért tudjuk eladni, mint amennyiért megvettük. A másik esetben (s_2), ha az infláció a vizsgált 5 év végére mérséklődik, akkor az első évek oldalazása után egy hirtelen 50%-os emelkedés várható.

Az ingatlant továbbá olyan szerződéssel szeretnénk bérbe adni, amelyben garantáltan az előző évi infláció mértékében növekvő lakbért várunk el. A második esetben (s_2) sikerül ilyen bérlőt találnunk, akinek megfelel a feltétel. Viszont amennyiben tartósan magas marad az infláció, akkor nem sikerül ilyen szerződést kötnünk és nem nőnek a lakásárak sem. Így ebben az esetben végig a kezdő 3.4%-kal számolunk.

Ezeket összegezve az infláció lehetséges alakulása mellett az éves bevételeink a befektetés százalékában:

		2023	2024	2025	2026	2027	összesen
s_1	a_1	3.40%	3.40%	3.40%	3.40%	3.40%	17.00%
s_2	a_1	3.89%	4.57%	4.84%	5.06%	55.24%	73.60%
s_1	a_2	14.75%	18.65%	9.25%	9.25%	6.25 %	58.15%
s_2	a_2	14.75%	17.65%	6.25 %	4.75%	2.75 %	46.15%

Melyik befektetést válasszuk?

Cselekvési lehetőségek	Események	
	$s_1 =$ tartósan magas infláció	$s_2 =$ enyhülő infláció
$a_1 =$ ingatlan vásárlás	40.95	60.76
$a_2 =$ PMÁP	55.35	51.15

$P(s_1) = 0.55, P(s_2) = 0.45$ szubjektív valószínűségi értékek (becslések).

9.1 Dominancia módszer

Amennyiben egy alternatíva minden esemény bekövetkezése esetén jobb értékekkel rendelkezik, mint egy másik, akkor dominálja azt és a dominált alternatíva elhagyható.

A fenti példában nincs ilyen alternatíva.

9.2 Döntés a pénzürték alapján

A döntésben csak a nyereségértékeket vesszük figyelembe a valószínűségeket nem.

Pesszimista, maximin kritérium: sorminimumok maximuma $\rightarrow a_2$

Optimista, maximax kritérium: sormaximumok maximuma $\rightarrow a_1$

De pénzürték alapján ezen enyhíteni szoktak \rightarrow optimizmus együttható: *Hurwick-féle* α , a döntéshozó α arányban optimista és $1 - \alpha$ arányban pesszimista. Legyen például $\alpha \leftarrow 0.8$, ekkor a példánkban:

$$H_{a_1} \leftarrow 0.8 \cdot 60.76 + 0.2 \cdot 40.95 = 56.798$$

$$H_{a_2} \leftarrow 0.8 \cdot 55.35 + 0.2 \cdot 51.15 = 54.51$$

A döntést a $\max\{H_{a_1}, H_{a_2}\}$ alapján hozzuk, így az a_1 -et választjuk.

9.3 Döntés a valószínűségérték alapján

Maximum likelihood kritérium: azt választjuk, amelynek a legnagyobb a bekövetkezési valószínűség mellett legnagyobb a pénzürték.

Tehát a $P(s_1)$ -nek a legnagyobb a valószínűsége, így az a_2 -t választjuk.

9.4 Döntés a várható pénzürték alapján

Alternatívánként vesszük a természet állapotaihoz tartozó várható pénzürtéket és azok valószínűségét.

Kiszámoljuk az állapotok becsült valószínűségekkal súlyozott összegeit és kiválasztjuk közülük a maximálisat.

$$VP(a_1) = 0.55 \cdot 40.95 + 0.45 \cdot 60.76 = 49.8645$$

$$VP(a_2) = 0.55 \cdot 55.35 + 0.45 \cdot 51.15 = 53.46$$

Az a_2 -t választjuk.

9.5 Döntés az elmulasztott nyereség alapján

Ebben az esetben se vesszük figyelembe a valószínűségeket. Ugyanakkor a pénzürték helyett itt az adott esemény által elérhető maximális nyereségtől való eltérést vesszük. Ezek alapján a táblázatunk a következőképpen néz ki:

Cselekvési lehetőségek	Események	
	$s_1 = \text{tartósan}$ magas infláció	$s_2 = \text{enyhülő}$ infláció
$a_1 = \text{ingatlan}$	19.81	0
$a_2 = \text{PMÁP}$	5.41	9.61

Pesszimista döntéshozó: A döntést az alternatívánkénti (soronkénti) maximális értékek minimuma fogja adni. Tehát az a_2 -t választjuk.

9.6 Döntés a várható elmulasztott nyereség alapján

Az előzővel teljesen azonosan, azt leszámítva, hogy az elmulasztott nyereség táblázatából vesszük az értékeket és itt a minimálisat választjuk.

$$VE(a_1) = 0.55 \cdot 19.81 + 0.45 \cdot 0 = 10.8955$$

$$VE(a_2) = 0.55 \cdot 5.41 + 0.45 \cdot 9.61 = 7.3$$

Az a_2 -t választjuk.

9.7 Döntés a rendelkezésre álló információ alapján

Azonos a 9.4 szekcióban bemutatottakkal, várható pénzürtéket számolunk. Annyival bővül, hogy itt kihangsúlyozzuk azt, hogy a valószínűségeket *rendelkezésre álló információnak* tekintjük. Tehát azok szubjektív valószínűségek.

$$VPRI(a_1) = 0.55 \cdot 40.95 + 0.45 \cdot 60.76 = 49.8645$$

$$VPRI(a_2) = 0.55 \cdot 55.35 + 0.45 \cdot 51.15 = 53.46$$

$$VPRI = \max\{VPRI(a_1), VPRI(a_2)\} = 53.46$$

9.8 A tökéletes információ várható pénzértéke

Ha élne egy jós, aki meg tudná mondani, hogy milyen lesz az infláció, akkor ennek az információnak mekkora a várható pénzértéke? (Mennyit érdemes fizetni a tökéletes információért cserébe?) Feltéve: a jós által mondott esemény biztosan bekövetkezik.

Első lépésben meg kell vizsgálni, hogyha az általunk ismert eseményeket állítja a jós, akkor azokat biztosan bekövetkező eseményként vizsgálva mekkora a várható pénzérték. Itt azért szerepel továbbra is egy valószínűségi súlyozás, mert így ad teljes eseményteret a két eset. Ennek olyan jelentése van, hogy szerintünk ekkora valószínűséggel mondja a jós, hogy s_i esemény következik be biztosan. Ez megegyezik a korábbi valószínűséggel ugyanis a két esemény bekövetkezéséről továbbra is ez a véleményünk. Amennyiben a jós bevonása ezen változtatna, akkor ez természetesen módosulhat.

Lehetséges előrejelzés:

- ha s_1 lesz a jós szerint \rightarrow optimális cselekvés: a_2 és a $VP(a_1) = 0.55 \cdot 55.35 = 30.4425$
- ha s_2 lesz a jós szerint \rightarrow optimális cselekvés: a_1 és a $VP(a_2) = 0.45 \cdot 60.76 = 27.342$

A tökéletes információ várható pénzértéke ennek a két lehetőségnek az összege:

$$VPTI = 30.4425 + 27.342 = 57.7845$$

”Mennyit fizessünk a jósnak?” kérdésre a válasz: $VPTI - VPRI = 57.7845 - 53.46 = 4.3245$ (ez egy maximum érték, ennél többet nem ér az információ)

9.9 Döntés nem tökéletes információ alapján

Mivel ténylegesen tökéletes információval rendelkező jósok nem léteznek, ezért helyettük érdekesebb kockázatelemző, előrejelző céget keresni. Ami a következő állításokat teheti:

- z_1 : azt állítják (előrejelzik), hogy az infláció magasan marad.
- z_2 : azt állítják, hogy az infláció mérséklődik.

Tegyük fel, hogy a cégről ismert **az előrejelzési pontossága**, korábbi évek előrejelzéseinek a pontossága alapján:

- $P(z_1|s_1) = 0.8$
- $P(z_2|s_1) = 1 - P(z_1|s_1) = 0.2$
- $P(z_2|s_2) = 0.7$
- $P(z_1|s_2) = 0.3$

Ezek a **beválási valószínűségek (likelihoodok)**. Akár meg is egyezhetnének a s_1 és s_2 -re, de általában a változás bekövetkezést nehezebb előre jelezni. Ez az információ a feladatok többségében elérhető, ennek elérhetősége az előfeltétele a feladat végrehajtásának. Az előző fejezetben például a jósnak 1 volt a találati értéke és 0 a tévesztési score-ja mindkét esetben.

Az ilyen feladatok esetében a $P(s_1) = 0.55, P(s_2) = 0.45$ saját véleményen alapuló valószínűségi értékeket tekintjük **a priori valószínűségeknek**.

A Bayes-tétellel kiszámolható a posteriori valószínűségeket: $P(s_1|z_1)$, $P(s_2|z_1)$, $P(s_1|z_2)$, $P(s_2|z_2)$

$$P(s_1|z_1) = \frac{P(z_1|s_1) \cdot P(s_1)}{\sum_i P(z_1|s_i) \cdot P(s_i)}$$

: a többi hasonlóan

$$P(z_1) = \sum_i P(z_1|s_i) \cdot P(s_i) = 0.8 \cdot 0.55 + 0.3 \cdot 0.45 = 0.575 \quad (12)$$

$$P(z_2) = \sum_i P(z_2|s_i) \cdot P(s_i) = 0.2 \cdot 0.55 + 0.7 \cdot 0.45 = 0.425$$

$$P(s_1|z_1) = \frac{0.44}{0.575} = 0.7652, P(s_2|z_1) = \frac{0.135}{0.575} = 0.2348$$

$$P(s_1|z_2) = \frac{0.11}{0.425} = 0.2588, P(s_2|z_2) = \frac{0.315}{0.425} = 0.7412$$

Ezekből pedig kifejezhető az adott alternatíva, adott előrejelzés melletti várható pénzürtéke:

$$VP(a_1|z_1) = \sum_i v(s_i, a_1) \cdot P(s_i|z_1) = 40.95 \cdot 0.7652 + 60.76 \cdot 0.2348 = 45.601388$$

$$VP(a_2|z_1) = \sum_i v(s_i, a_2) \cdot P(s_i|z_1) = 55.35 \cdot 0.7652 + 51.15 \cdot 0.2348 = \mathbf{54.36384}$$

$$VP(a_1|z_2) = \sum_i v(s_i, a_1) \cdot P(s_i|z_2) = 40.95 \cdot 0.2588 + 60.76 \cdot 0.7412 = \mathbf{55.633172}$$

$$VP(a_2|z_2) = \sum_i v(s_i, a_2) \cdot P(s_i|z_2) = 55.35 \cdot 0.2588 + 51.15 \cdot 0.7412 = 52.23696$$

A nem tökéletes információ várható pénzürtéke: Ajánlatot kapunk az eddig vizsgált előrejelző cégtől: 1.5 millió forintért előrejelzést adnak az inflációra. A kérdés megéri-e ennyiért elfogadni az ajánlatot. Mennyit ér a nem tökéletes információ?

Lehetséges előrejelzés:

- $z_1 \rightarrow$ optimális cselekvés: a_2 és a $VP(a_2) = VP(a_2|z_1) \cdot P(z_1) = 54.36384 \cdot 0.575 = 31.259208$
- $z_2 \rightarrow$ optimális cselekvés: a_1 és a $VP(a_1) = VP(a_1|z_2) \cdot P(z_2) = 55.633172 \cdot 0.425 = 23.6440981$

Nem teljes információhoz tartozó pénzürték: $VPNTI = \sum_j VP(a_j) = 31.259208 + 23.6440981 = 54.903$

A "Mennyit fizessünk legfeljebb az előrejelző cégnek?" kérdésre a választ az alábbiak alapján tudjuk megkapni: $VPNTI - VPRI = 54.90 - 53.46 = 1.44$. Ami egy maximális érték arra, amennyiért megéri őket alkalmazni. Mivel ez feletti ajánlat érkezett, ezért elutasítjuk.

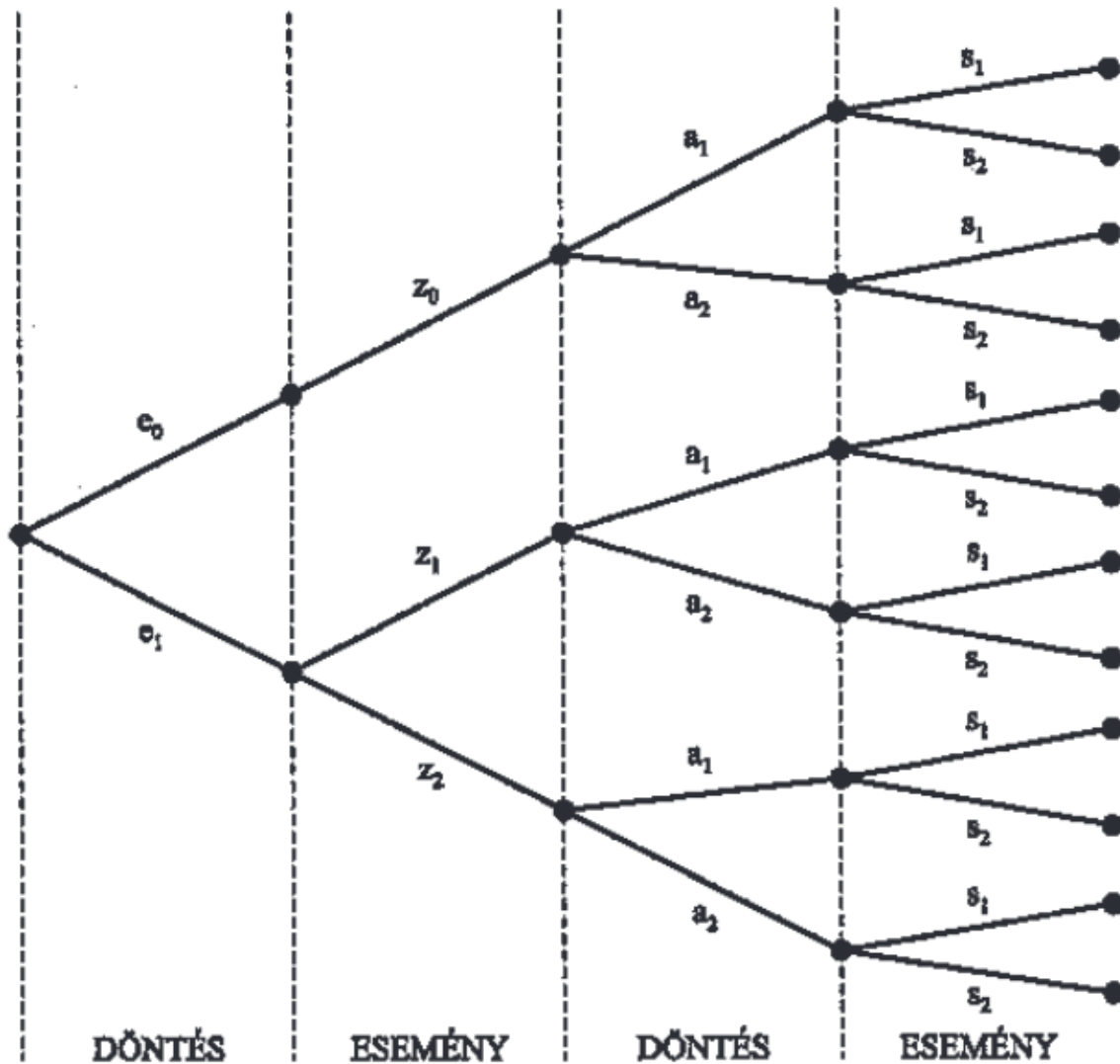
9.10 Döntés döntési fa eljárás alapján

Kiértékelési eljárásnak fogható fel. A döntési fa struktúra itt egy absztrakciós szintként jelenik meg, ami segíti a 9.9 fejezetben bemutatott "információ értéke" döntési feladat áttikenthetőségét. (Az itt tárgyaltak kizárólag a nevében egyeznek meg a döntési fa - gépi tanulási eljárással.)

A kérdés, amire a megoldást keressük egyrészt az, hogy melyik alternatívát válasszuk, másrészt pedig az, hogy igénybe vegyünk-e (a példában megadott mértékű) d költségű előrejelzést. Tehát a feladat itt nem az információ értékének a kiszámítása, hanem a döntési folyamat egyes lépéseinek és egészének a várható pénzürtékének a számítása, melyeket maximalizálni szeretnénk. Így ez megadja az optimális döntéseket az adott szituációkban.

Jelölésben, új cselekvési alternatívákat vezetünk be:

- e_0 : nem veszünk igénybe előrejelzést (ekkor z_0 üres esemény fog megtörténni, $P(z_0) = 1$)
- e_1 : igénybe vesszük az eddig vizsgált előrejelező céget (ennek a műveletnek d költsége van)



Előkészületek:

- a fát a gyökérből indulva rajzoljuk meg, minden lehetséges döntésnek és lehetséges eseménynek külön ágat húzunk be (fenti ábra).
- az eseményekhez tartozó valószínűségeket be tudjuk helyettesíteni az egyes ágakra. Egy esemény minél mélyebben van, annál több dologtól függ. A lentebbi ágakon a felette lévőekkel alkot feltételes valószínűséget. Pl: egy lentebbi ágon $P(s_1|z_1)$ van, míg felül $P(z_1)$ van (tehát ez utóbbi nem függ az s_i -től).
- a levelekhez be tudjuk írni az egyes választások pénzértékét a táblázatból (előrejelzés esetében már itt $d = 1.5$ millió forinttal terhelt pénzértékeket).

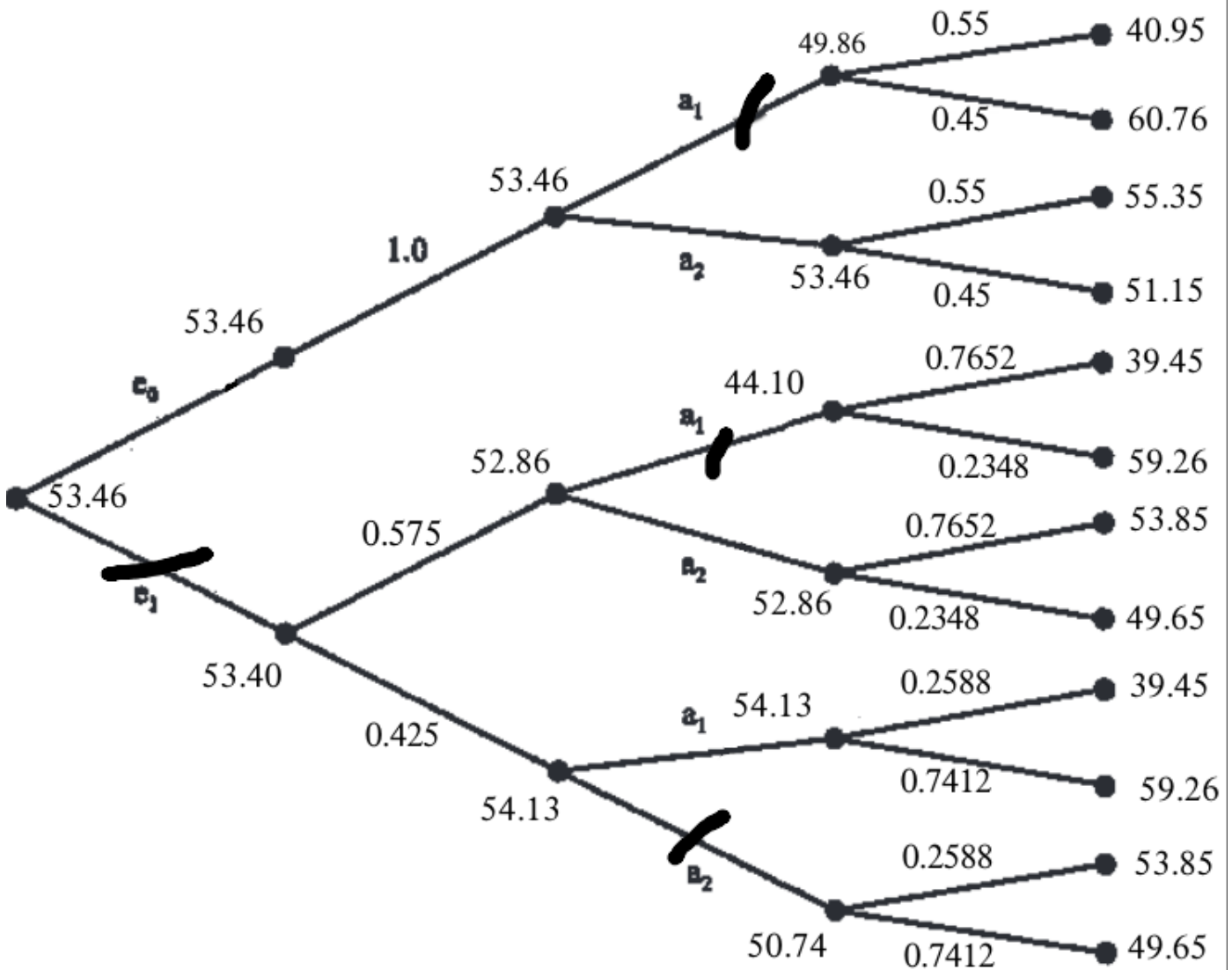
Eljárás: a levélből elindulva, felfelé propagálva kiszámoljuk az egyes csúcsokat (K az aktuális csúcs):

- az események esetében kiszámoljuk a csúcshoz tartozó várható pénzürtéket:

$$VP_K = \sum_{i \in K} ag_i \cdot gyerek_i$$

- döntési elágazás: kiválasztjuk a $\max_{i \in K} \{gyerek_i\}$ és a nem maximális értékhez tartozó ágot levágjuk. Ez lesz a csúcs várható pénzürtéke.

Végül a gyökérben egyetlen, a feladat várható pénzürtéke marad és az ahhoz tartozó optimális döntések.



10 Multi-attribute utility theory — Hasznosság függvény

A MAUT egy általános összefoglaló neve a többtényezős hasznosság elméletnek, több tárgyalásban ebbe beleértik az értékelő függvényeket is (azt is hasznosságként kezelik). Az alapfeltevése az, hogy minden döntéshozó megpróbál optimalizálni egy olyan függvényt, amely aggregálja az összes véleményét az adott kérdésben. Ez azt feltételezi, hogy a döntéshozó racionális és optimalizáló szemléletű. (Ennek kritikájáról hallhattunk Ha-Joon Chang és Daniel Kahneman könyve nyomán tartott előadásokban)

A hasznosságelméletben az alternatívák lehetséges bizonytalan kimenetelű játékként foghatóak fel. Egy ilyen játék egyszerűbben az alábbi módon írható fel: $\alpha \cdot c_1$ (pl. c_1 : "nyer") és $(1 - \alpha) \cdot c_2$

(pl c_2 :”veszít”). Ezeket a keverési arányokat a görög ábécé első betűivel jelöljük a továbbiakban $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Lottery Döntés bizonytalanság esetében a becsült valószínűségi értékkel terhelt (vagy keverési aránnyal megadott) kimeneteleket, alternatívákat **kockázatos lehetőségeknek (risky prospect), lotteryknek** nevezzük és a_p vagy a_q -vel jelöljük. A lotteryk halmaza A^p . A elemei kifejezhetőek A^p -ből. A^p halmaza lehet bővebb, mint a valós A halmaza, hiszen olyan további tetszőleges játékok definiálhatók, amelyek α keverési aránya nem szerepel a ténylegesen alternatíváink között.

Példa lotteryre: kérdés a döntéshozóhoz: Melyik játékban venne részt szívesebben? (Vagy másképp megfogalmazva: mi a preferenciája?) 90%-os eséllyel nyer 12 dollárt és 10%-os eséllyel nem nyer semmit. Vagy 1%-os eséllyel nyer 1 millió dollárt, 99%-os eséllyel nem nyer semmit.

Az előző fejezetben olyan speciális esetet néztünk, ahol mindkét alternatívára azonos esemény volt hatással. Ez most ennél általánosabb, az egyes alternatívákhoz független események és így független valószínűségek tartozhatnak.

Preferenciarendezés: lotteryk felett definiáljuk. Az így megadott preferencia struktúra felhasználható a hasznosságfüggvény megkonstruálásához.

Várható hasznosságfüggvény: $u : A^p \rightarrow \mathbb{R}$

Döntési szabály megalkotása \rightarrow Bernoulli elv: A döntéshozó preferenciarendezését a lotterykhez tartozó várható pénzérték által kijelölt sorrend határozza meg. Tehát Bernoulli szerint A^p elemeihez meghatározzuk a várható értékét, majd azt az alternatívát választjuk, amelyiknek legnagyobb a várható hasznossága: $u(a_{p_k}) = \sum_{s_k \in S} P(s_k) \cdot v(c_{jk}) \rightarrow$ ezek közül azt az alternatívát választjuk, ahol maximális ez az érték. (Bernoulli elv röviden: $VPRI = \max(u(a_{p_k}))$, várható pénzérték alapján döntünk).

Példa: $u(a_p) = 0.9 \cdot 12 + 0.1 \cdot 0 = 10.8$ és $u(a_q) = 0.9 \cdot 1000000 + 0.1 \cdot 0 = 900000$. Ezek közül az a_q lotteryhez tartozó érték a maximális így ezt preferáljuk. (Ebben az esetben nem alkalmaztuk a u értékelő függvényt, de ha az értékeket normalizáljuk, és ezt tekintenénk értékelésnek, akkor is ezen eredményre jutnánk a döntés szempontjából.)

10.1 Axiómarendszerek (Neumann-Morgenstern 1947)

10.1.1 1. Axióma

A kockázatos lehetőségek A^p halmazán értelmezett \succeq preferencia reláció gyenge rendezés (reflexivitás, tranzitivitás, teljesség). Hasonló indokok miatt kell ezt megkövetelnünk, mint amit már az értékelő függvényeknél láthattunk.

10.1.2 2. Axióma

$a_p \succ a_q \rightarrow \forall \alpha \in (0, 1) : a_p \succ (\alpha \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot a_q) \succ a_q$. Szigorú preferencia tulajdonságából származó tulajdonság. Ha egy lotteryt mindenféleképpen jobban preferálunk egy másiknál, akkor akármilyen kombinációjukat vesszük, annál is jobban preferált lesz.

10.1.3 2'. Axióma - Függatlenségi axióma (Fishburn 1970)

$a_p \succ a_q \rightarrow \forall \alpha \in (0, 1) : (\alpha \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot a_r) \succ (\alpha \cdot a_q, (1 - \alpha) \cdot a_r)$. A könnyebb igazolhatóság végett a 2.axióma helyett ezt az axiómát használjuk. (Teljesülése esetén nem lehet komplementaritás a két lottery között.)

10.1.4 3. Axióma - Folytonossági axióma

$a_p \succ a_q \succ a_r \rightarrow \exists \alpha, \beta \in (0, 1) : (\alpha \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot a_r) \succ a_q \succ (\beta \cdot a_p, (1 - \beta) \cdot a_r)$. Azt mondja ki, hogy létezik a vizsgált legjobb és legrosszabb érték olyan keverése, ami jobb illetve rosszabb a középső értéknél. Ez általánosságban igaz, akkor sérülhet, ha a legjobb és a középső érték nagyon közel van egymáshoz és a legrosszabb viszont nagyon rossz: a_p nyerünk 100 dollárt, a_q nyerünk 99 dollárt, a_r életfogytiglanig börtönbe kerülünk.

10.1.5 4. Axióma

$\forall \alpha \in [0, 1] : (\alpha \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot a_q) \sim ((1 - \alpha) \cdot a_q, \alpha \cdot a_p)$. Lényegtelen a sorrend a kombináció esetén.

10.1.6 5. Axióma - Redukciós szabály

$\forall \alpha \in (0, 1) : a_r \sim (\alpha \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot a_q) \rightarrow \forall \beta \in (0, 1) : (\beta \cdot a_r, (1 - \beta) \cdot a_s) \sim (\alpha \cdot \beta \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot \beta \cdot a_q, (1 - \beta) \cdot a_s)$.

Bonyolultan megfogalmazott játékban ugyanakkora esélye van a győzelemnek, mint a vele ekvivalens könnyű játékban. Akkor sérül ez az axióma, ha a döntéshozó "élvezetét leli" az összetett játékban vagy éppen a leegyszerűsített játékot egyértelműen jobban preferálja, mint a vele ekvivalens összetettebb játékot. Tehát ezzel az axiómával megköveteljük, hogy a preferencia struktúrában az ekvivalens játékok legyenek indifferensek a döntéshozó szerint.

10.2 Hasznosság függvény létezése és előállítása

10.2.1 Létezési tétel:

Ha az A^p elemeire teljesülnek az 1.,2',3.,4.,5. axiómák akkor létezik $U : A^p \rightarrow \mathbb{R}$ hasznosságfüggvény.

10.2.2 Fontos tulajdonság:

az A^p értelmezett \succeq preferencia struktúrára és a $u : A^p \rightarrow \mathbb{R}$ hasznosságfüggvényre teljesül:

1. $a_p \succeq a_q \Leftrightarrow u(a_p) \geq u(a_q)$
2. és $\forall \alpha \in (0, 1) : u(\alpha \cdot a_p, (1 - \alpha) \cdot a_q) = \alpha \cdot u(a_p) + (1 - \alpha) \cdot u(a_q)$

10.2.3 Bizonyítás:

1. Feltétel: bizonyossági egyenérték Bármely biztos kimenethez (c , valószínűsége 1 a többi 0) megadható olyan lottery, amelyet a legjobb (c_{max}) és a legrosszabb (c_{min}) kimenetből kevertünk össze.

Tehát $\exists \beta : c \sim (\beta \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot c_{min}) \equiv a_p$. Ekkor azt mondjuk, hogy $(\beta \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot c_{min})$ lotterynek a *bizonyossági egyenértéke* c .

2. Feltétel: helyettesítés Az összes kockázatos kimenetel esetén a kimenetelt ($\forall c_i \in X$) bizonyossági egyenértékesként véve helyettesíthető (indifferens) a bizonyossági egyenértékhez tartozó kockázatos kimenetellel (a_{p_i}):

$$(\alpha_1 \cdot c_1, \dots, \alpha_n \cdot c_n) \sim (\alpha_1 \cdot a_{p_1}, \dots, \alpha_n \cdot a_{p_n})$$

3. Feltétel: redukálhatóság Ez azonos az 5. Axiómával. Amit felhasználunk belőle az az, hogy egy összetett lottery lecserélhető egy egyszerű lotteryre.

4. Feltétel: összehasonlíthatóság

$$a_p \sim (\alpha \cdot c_{max}, (1 - \alpha) \cdot c_{min}) \text{ és } a_q \sim (\gamma \cdot c_{max}, (1 - \gamma) \cdot c_{min}) \Rightarrow a_p \succeq a_q \Leftrightarrow \alpha \geq \gamma.$$

A feltételek teljesülése esetén az Axiómák is teljesülnek.

1. Axióma esetén a gyenge rendezés a 4. feltétel miatt teljesül.
2. Axióma: Legyen két lottery $a_p \sim (\alpha_1 \cdot c_{max}, (1 - \alpha_1) \cdot c_{min})$ és $a_q \sim (\alpha_2 \cdot c_{max}, (1 - \alpha_2) \cdot c_{min})$ (1.-3. feltétel), melyre teljesül hogy $a_p \succ a_q \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2$ (4. feltétel). Ekkor teljesül (3. feltétel), hogy

$$\forall \beta \in (0, 1) :$$

$$\begin{aligned} & (\beta \cdot a_p, (1 - \beta) \cdot a_q) = \\ & = [(\beta \cdot \alpha_1 \cdot c_{max}, \beta \cdot (1 - \alpha_1) \cdot c_{min}), \\ & \quad ((1 - \beta) \cdot \alpha_2 \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot (1 - \alpha_2) \cdot c_{min})] = \\ & = [(\beta \cdot \alpha_1 + \alpha_2 - \beta \cdot \alpha_2) \cdot c_{max}, \\ & \quad (\beta - \beta \cdot \alpha_1 + 1 - \beta - \alpha_2 + \beta \cdot \alpha_2) \cdot c_{min}] = \\ & = [(\alpha_2 + \beta \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)) \cdot c_{max}, (1 - (\alpha_2 + \beta \cdot (\alpha_1 - \alpha_2))) \cdot c_{min}] \end{aligned} \tag{13}$$

Ekkor a c_{max} -hoz tartozó szorzókra teljesül: $\alpha_1 > (\alpha_2 + \beta \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)) > \alpha_2$ a 4. feltétel alapján, hogy maguk után vonják a $a_p \succ (\beta \cdot a_p, (1 - \beta) \cdot a_q) \succ a_q$ feltételt. A 2'. Axióma ehhez hasonlóan belátható.

3. Axióma: bevezetünk egy harmadik középső lotteryt, a különböző kombinációkra alkalmazzuk az előzőekben bemutatott átalakítást (3. feltétel alapján) végül a szorzóknak és a 4. feltételnek köszönhetően teljesül a 3. Axióma. (Részletek a Temesi könyvben)
4. Axióma: triviális.
5. Axióma: 3. feltétel.

10.2.4 Következmények:

A feltételekből megkonstruálható a hasznosságfüggvény: Az első feltételnek köszönhetően garantált, hogy $\forall c \in X : c \sim (\beta \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot c_{min})$. Ekkor legyen $v : X \rightarrow \mathbb{R} : v(c) = \beta$

Az első három feltételnek köszönhetően garantált, hogy $\forall a_p \in A^p : a_p \sim (\alpha \cdot c_{max}, (1 - \alpha) \cdot c_{min})$. Ekkor legyen $u : A^p \rightarrow \mathbb{R} : u(a_p) = \alpha$

Az így megadott u teljesíti a létezési feltételeket:

- Az Axiómákat már láttuk.
- $a_p \succeq a_q \Leftrightarrow u(a_p) = \alpha \geq u(a_q) = \gamma$ a 4. feltétel alapján teljesül.
- Belátható:

$$\begin{aligned}
 \forall \beta \in (0, 1) : u(\beta \cdot a_p, (1 - \beta) \cdot a_q) &= \\
 &= u((\alpha_q + \beta \cdot (\alpha_p - \alpha_q)) \cdot c_{max}, (1 - (\alpha_q + \beta \cdot (\alpha_p - \alpha_q))) \cdot c_{min}) \\
 &= \alpha_q + \beta \cdot \alpha_p - \beta \cdot \alpha_q = \beta \cdot \alpha_p + (1 - \beta) \cdot \alpha_q = \\
 &= \beta \cdot u(a_p) + (1 - \beta) \cdot u(a_q)
 \end{aligned} \tag{14}$$

u olyan alakú, hogy megfelel a Bernoulli-elvnek: az előzőek következménye: $u(a_{p_j}) = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot v(c_{j_k})$ és, ha $\beta_k = P(s_k)$ -val, akkor az pontosan megegyezik a Bernoulli-elvvel.

10.3 Egydimenziós hasznosság függvények előállítása - bizonyossági egyenértékes módszer

1. Keressük meg a c_{min} -t és a c_{max} -ot. Nem feltétlenül a vizsgált lottery-kben szereplő értékekből választunk, hanem akár lehet valamilyen további érték, pl a döntéshozó által kijelölt értékek. Annyi megkötést teszünk, hogy az ismert maximális c_i -nél nagyobb vagy egyenlő c_{max} -ot és az ismert minimális c_i -nél kisebb vagy egyenlő c_{min} -t kell választani.
2. Ismételjük minden ismert kimenetelre (c_i): vegyük az adott kimenetelt bizonyossági egyenértékként (biztos állapot) és keressük meg a hozzá tartozó lotteryt, ami a c_{min}, c_{max} kombinációjából épül fel. Tehát keresünk egy olyan játékot, amelyért cserébe a döntéshozó lemondana c_i -ről. Ennek megtalálása a döntéshozónak feltett kérdések alapján történik és lehetőleg a biztonságosabb játékok felől haladunk a kockázatosabbak felé mindaddig, amíg a döntéshozó azt nem mondja, hogy nem vállalja a cserét (*STOP* játék). Ekkor még az utolsó elfogadott játék és a *STOP* játék között további játékok kereshetőek, ha pontosítani szeretnénk az α értékét. Például: biztos c_1 nyereményt odaadna-e egy olyan játékért cserébe, amiben $(\alpha \cdot c_{max}, (1 - \alpha) \cdot c_{min})$ nyerne? Ha nem, akkor növeljük α értékét és kérdezzük meg újra, amíg igent mond. Legrosszabb esetben $\alpha = 1$ esetben igent fog mondani, ugyanis a maximális értéket, mint biztos nyeremény minden biztos értékért cserébe elfogadna.

$$\forall c \sim (\beta \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot c_{min})$$

3. Helyettesítsük be a feladatban megadott lotteryk (c) értékei helyére az előző pontban kapott lotteryket.

$$a_p = (\alpha \cdot c_1, (1 - \alpha) \cdot c_2)$$

$$a_p = (\alpha \cdot (\beta \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot c_{min}), (1 - \alpha) \cdot (\gamma \cdot c_{max}, (1 - \gamma) \cdot c_{min}))$$

4. Az így kapott összetett lotteryket a redukciós szabály segítségével hozzuk egyszerűbb alakra:

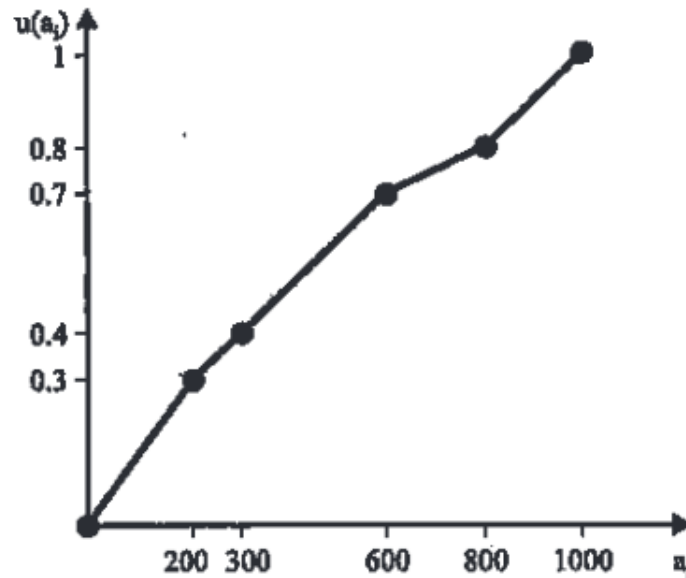
$$a_p = (\alpha \cdot (\beta \cdot c_{max}, (1 - \beta) \cdot c_{min}), (1 - \alpha) \cdot (\gamma \cdot c_{max}, (1 - \gamma) \cdot c_{min}))$$

$$a_p = ((\alpha \cdot \beta + (1 - \alpha) \cdot \gamma) \cdot c_{max}, (\alpha \cdot (1 - \beta) + (1 - \alpha) \cdot (1 - \gamma)) \cdot c_{min})$$

$$u(a_p) = \alpha \cdot \beta + (1 - \alpha) \cdot \gamma$$

5. Az így kapott egyszerű lotteryk összehasonlíthatóak, ezek felett könnyedén megadható a preferencia rendezés.

A döntéshozóval történt egyeztetés, dialógus során keletkező válaszok fogják meghatározni a hasznosságfüggvényt.



Példa a hasznosságfüggvényre, ami dialógus során keletkezik.

Jelölés: $a_p = (\alpha : c_1, c_2) \equiv (\alpha \cdot c_1, (1 - \alpha) \cdot c_2)$

Feladat: Legyen $a_p = (0.5 : 800, 200)$, $a_q = (0.6 : 600, 300)$ két referencia lottery. Döntsük el, hogy melyiket válasszuk.

- Legyen $c_{min} = 0$ és a $c_{max} = 1000$
- Az első érték 800, kérdezzük meg a döntéshozót, hogy biztos 800 dolláros nyereség mellett, belevágna-e egy olyan játékba, ahol 20% eséllyel nyerne 1000 dollárt és 80% eséllyel semmit. A döntéshozó megmondja, hogy mi a véleménye erről a játékról. Érdemes egy közepes (50% - 50%) eséllyel kezdeni, majd a döntéshozó válasza alapján növelni vagy csökkenteni az esélyt. Ebből megkapható az adott kimenetelhez tartozó hasznossági érték. Legyen például: $800 \sim (0.7 : 1000, 0)$, $200 \sim (0.1 : 1000, 0)$, $600 \sim (0.5 : 1000, 0)$, $300 \sim (0.2 : 1000, 0)$,
- Összetett lotteryk: $a_p = (0.5 : (0.7 : 1000, 0), (0.1 : 1000, 0))$, $a_q = (0.6 : (0.5 : 1000, 0), (0.2 : 1000, 0))$, a redukciós szabály segítségével hozzuk egyszerűbb alakra: $a_p : (0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.1) \rightarrow a_p = (0.4 : 1000, 0)$, $a_q : (0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2) \rightarrow a_q = (0.38 : 1000, 0)$.
- $a_p \succ a_q$ mivel $0.4 > 0.38$

Rajzoljuk meg a hasznosságfüggvényt és döntsük el, hogy milyen a döntéshozó kockázati magatartása. (Kockázat kereső)

Az információ ára fejezetnél ismertetett példa hasznosságfüggvény előállítására

Cselekvési lehetőségek	Események	
	$s_1 = \text{magas infláció (5\%)}$	$s_2 = \text{alacsony infláció (2\%)}$
$a_1 = \text{egy bank részvény}$	12	9
$a_2 = \text{MÁP}$	9.995	10.295

$P(s_1) = 0.55, P(s_2) = 0.45$ szubjektív valószínűségi értékek (becslések). A feladat két lotteryje, amiről el kell dönteni, hogy a döntéshozó melyiket válassza az a következő: $a_p = (0.55 \cdot 12, 0.45 \cdot 9)$
 $a_q = (0.55 \cdot 9.995, 0.45 \cdot 10.295)$

Keressük meg c_{max} és c_{min} -t. Legyen $c_{min} = 9$, $c_{max} = 12$. (Megjegyzés, nem feltétlenül a feladatban ismert minimum és maximum a c_{min} és a c_{max} , hanem a feladattól függően ettől eltérő is lehetséges. Itt az egyszerűség kedvéért választottuk így.)

Ebből már meg is kaptuk a két bizonyossági egyenértéket: $9 \sim (0 : 12, 9)$ és $12 \sim (1 : 12, 9)$.

Vegyük egyesével a maradék két értéket 9.995 és 10.295-et biztos eseményként és kérdezzük meg a döntéshozót, hogy emellett a mekkorát kockáztatna a c_{max} eléréséért, ismerve a c_{min} esetleges veszteséget.

Például: Tegyük fel, hogy biztosan nyerünk 9.995 dollárt. Általában egyesével kérdezzük, hogy játszana-e a biztos esemény helyett ha például: 10% eséllyel nyerne c_{max} -ot vagy, ha 20% eséllyel nyerne max-ot, ... addig, amíg el nem dönti, hogy mekkora kockázatot vállalna az adott esetben. Például legyen: $9.995 \sim (0.9 : 12, 9)$, ekkor csak akkor kockáztatná meg a biztos 9.995-at, ha 90%-os eséllyel nyerne c_{max} -ot. Legyen $10.295 \sim (0.95 : 12, 9)$

$$a_p = (0.55 : (1 : 12, 9), (0 : 12, 9)) = (0.55 \cdot 12, 0.45 \cdot 9)$$

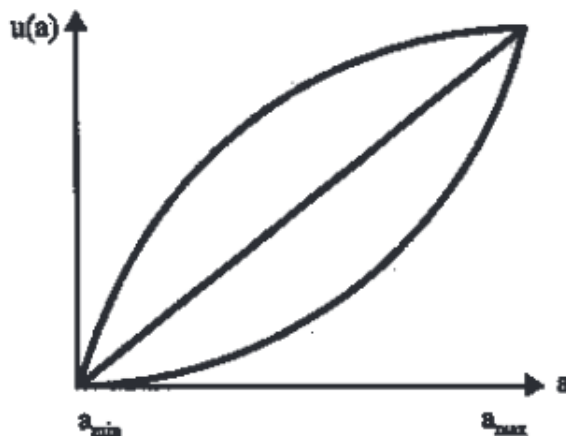
$$a_q = (0.55 : (0.9 : 12, 9), (0.95 : 12, 9)) = (0.55 \cdot 0.9 + 0.45 \cdot 0.95) \cdot 12, (0.55 \cdot 0.1 + 0.45 \cdot 0.05) \cdot 9$$

$$u(a_p) = 0.55 < u(a_q) = 0.9225. \text{ Tehát a második alternatívát választjuk.}$$

Rajzoljuk meg a hasznosságfüggvényt és döntsük el, hogy milyen a döntéshozó kockázati magatartása. 9.995 esetén a játék várható pénzértéke $VP(0.9 : 12, 9) = 11.7$, míg 10.295 esetén $VP(0.95 : 12, 9) = 11.85$. Mivel mindkét várható pénzérték magasabb, mint az érte odaadott biztos nyeresemény ezért kockázat kerülő magatartása van a döntéshozónak.

10.4 Kockázati magatartás

Jelölés: $CE(a_p)$ az a_p lotteryhez tartozó készpénz egyenértékes.



- g : semleges kockázati magatartás. A döntéshozó ugyanúgy viselkedik sztochasztikus esetben, mint determinisztikus esetben: várható pénzérték alapján dönt. $CE(a_p) = VP(a_p)$

- h : kockázat kerülő magatartás. A hasznossági függvénye konkáv, bizonyossági egyenértéke szigorúan a várható pénzértéké alatt található: $CE(a_p) < VP(a_p)$
- f : kockázat kereső magatartás. A hasznossági függvénye konvex, bizonyossági egyenértéke szigorúan a várható pénzértéké felett található: $CE(a_p) > VP(a_p)$
- lehetnek kevert stratégiák is.

10.5 Többtenyezős hasznosság függvény létezése és előállítása

Többtenyezős hasznosság függvény az értékelő függvényhez hasonlóan a dekompozíciós alakok vizsgálatát jelenti. Feltehetjük, hogy tényezőnként ismerjük az egydimenziós hasznosság függvényeket (pl: bizonyossági egyenértékes módszer alapján), így már csak a skálázási konstansok beállítása és a megfelelő függvényalak kiválasztása a feladatunk. Az alak létezésének a vizsgálatához itt is függetlenségi tesztekre lesz szükségünk.

10.5.1 Függetlenségi tesztek

Jelölés: A^p kockázatos kimenetek halmaza: $a_p = \{c, \alpha\} \in A^p$ vagy $a_p = \{x_i, \alpha_i, x_i \in X_i\}$

Értékfüggetlenség Legyen $T = (X_1, \dots, X_m)$ tényezőhalmaz. T tényezőrészhalmozai *érték-függetlenek* \Leftrightarrow ha $\forall a_p, a_q \in A^p$ (amelyek együttes eloszlásai rendre α, β):

$$a_p \sim a_q \Leftrightarrow \forall i = 1..m : \alpha_i = \beta_i \quad (15)$$

Ez nehezen teljesülő feltétel, de az additív alak létezésének a feltétele.

Hasznosságfüggetlenség Legyen $T = (X_1, \dots, X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ tényezőrészhalmoz, $C^* \subseteq T$ komplementerhalmaz. Ekkor C hasznosság független C^* -től \Leftrightarrow ha $\forall a_p, a_q \in A_C^p$: egy tetszőleges $x_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $x_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy:

$$(a_p, x_{C^*}^0) \succeq (a_q, x_{C^*}^0) \Rightarrow (a_p, x_{C^*}) \succeq (a_q, x_{C^*}) \quad (16)$$

Hasonló a preferenciafüggetlenséghez, itt lotteryk közötti függőségeket vizsgáljuk.

Preferenciafüggetlenség Legyen $T = (X_1, \dots, X_m)$ tényezőhalmaz, $C \subseteq T$ tényezőrészhalmoz, $C^* \subseteq T$ komplementerhalmaz. Ekkor C preferencia független C^* -től \Leftrightarrow ha $\forall x'_C, x''_C \in X_C$: egy tetszőleges $x_{C^*}^0 \in X_{C^*}$ esetén teljesül minden más $x_{C^*} \in X_{C^*}$ -re, hogy:

$$(x'_C, x_{C^*}^0) \succeq (x''_C, x_{C^*}^0) \Rightarrow (x'_C, x_{C^*}) \succeq (x''_C, x_{C^*}) \quad (17)$$

Determinisztikus esethez teljesen hasonlóan.

Értékfüggetlenség \Rightarrow Hasznosságfüggetlenség \Rightarrow Preferenciafüggetlenség.

Értékfüggetlenség \Rightarrow additív forma

Kölcsönös hasznosságfüggetlenség \Rightarrow multiplikatív forma

Minden tényező ($\{X_i\} = C$) legyen hasznosságfüggetlen a komplementeréhez képest \Rightarrow kvázi additív forma

Minden más esetben \Rightarrow egyéb formák

10.6 Additív és multiplikatív hasznosságfüggvény

A közös alak: kvázi additív hasznosságfüggvény (kifejezhető belőle az additív és a multiplikatív hasznosságfüggvény)

$$\begin{aligned}
 u(c) = & \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(x_i) + \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_{ij} \cdot u_i(x_i) \cdot u_j(x_j) + \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{l>j}^n k_{ijl} \cdot u_i(x_i) \cdot u_j(x_j) \cdot u_l(x_l) + \dots \\
 & + k_{1..n} \cdot u_1(x_1) \cdot \dots \cdot u_n(x_n)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ha $k_{ij}, k_{ijl}, \dots, k_{1..n}$ egyenlő nullával, akkor megkapjuk belőle az **additív alakot**:

$$u(c) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(x_i) \tag{19}$$

Megkapható a multiplikatív forma, ha $k_{ij} = K \cdot k_i \cdot k_j, k_{ijl} = K^2 \cdot k_i \cdot k_j \cdot k_l, \dots, k_{1..n} = K^{n-1} \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_n$:

$$\begin{aligned}
 u(c) = & \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(x_i) + \\
 & K \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) + \\
 & K^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{l>j}^n k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) \cdot k_l \cdot u_l(x_l) + \dots \\
 & + K^{n-1} \cdot k_1 \cdot u_1(x_1) \cdot \dots \cdot k_n \cdot u_n(x_n)
 \end{aligned} \tag{20}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt K -val, majd adjunk hozzá mindkét oldalhoz 1-et:

$$\begin{aligned}
 1 + K \cdot u(c) = & 1 + K \cdot \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(x_i) + \\
 & K^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) + \\
 & K^3 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{l>j}^n k_i \cdot u_i(x_i) \cdot k_j \cdot u_j(x_j) \cdot k_l \cdot u_l(x_l) + \dots \\
 & + K^n \cdot k_1 \cdot u_1(x_1) \cdot \dots \cdot k_n \cdot u_n(x_n)
 \end{aligned} \tag{21}$$

Ezután a jobboldal szorzattá alakítható az alábbi módon:

$$1 + K \cdot u(c) = [1 + K \cdot k_1 \cdot u_1(x_1)] \cdot [1 + K \cdot k_2 \cdot u_2(x_2)] \cdot \dots \cdot [1 + K \cdot k_n \cdot u_n(x_n)] \tag{22}$$

Amiből átrendezéssel már kifejezhető a **multiplikatív alak**:

$$u(c) = \frac{1}{K} \cdot \left[\prod_{i=1}^n (1 + K \cdot k_i \cdot u_i(x_i)) - 1 \right] \tag{23}$$

K skálázási konstans meghatározása 2D ($n = 2$) esetben: Legyen a kiindulási multiplikatív alak olyan alak, amit az additív konstansainak a módosítása során kaptunk a (20) pontban

$$\begin{aligned}
 u(c) = & k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2) + \\
 & K \cdot k_1 \cdot u_1(x_1) \cdot k_2 \cdot u_2(x_2)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Fejezzük ki K -t a k_i -kből, ezért legyen $K = \frac{1 - (k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}$. Ekkor:

$$\begin{aligned} u(c) &= k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2) + \\ &\quad \frac{1 - (k_1 + k_2)}{\cancel{k_1} \cdot \cancel{k_2}} \cdot \cancel{k_1} \cdot u_1(x_1) \cdot \cancel{k_2} \cdot u_2(x_2) \\ &= k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2) + [1 - (k_1 + k_2)] \cdot u_1(x_1) \cdot u_2(x_2) \end{aligned} \quad (25)$$

Ahol az alábbi 3 eset állhat elő:

1. eset: $k_1 = 0$ és $k_2 = 0 \Rightarrow u(c) = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2), K \rightarrow \infty$. Konjunkció, ÉS operátor.
2. eset: $k_1 = 1$ és $k_2 = 1 \Rightarrow u(c) = u_1(x_1) + u_2(x_2) - u_1(x_1) \cdot u_2(x_2), K = -1$. Diszjunkció, VAGY operátor.
3. eset: $k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow u(c) = k_1 \cdot u_1(x_1) + k_2 \cdot u_2(x_2), K = 0$. Átlag művelet.

A k_i -k tekinthetők az adott tényezőhöz tartozó súlyozásként, a K pedig azért felelős többek között, hogy a hasznosság a $[0, 1]$ intervallumba skálázódjon. A fentiek alapján a K a $[-1, \infty]$ intervallumról vesz fel értéket. Ez határérték vizsgálatokkal kettőnél több tényezős esetben is belátható.

10.7 Előállítás

1. Többtényezős hasznosságfüggvény létezésének verifikálása. Feltételek teljesülése.
2. Az összetevő egydimenziós értékelő függvények megkonstruálása, bizonyossági egyenértékes módszer alapján
3. Megfelelő alakú függvényforma kiválasztása és abból többtényezős hasznosság konstruálása. Főleg a függetlenségi tesztek alapján történik.
4. Konstansok kiválasztása: Kellő mennyiségű preferencia információ alapján felírunk egy konstansokra vonatkozó független egyenletrendszert, megoldjuk. (Konkrét megvalósítással nem foglalkozunk, hasonló a multiplikatív konstansok beállításához.)
5. Konzisztencia ellenőrzés, elemzés. (Döntéshozóval együtt, kérdezéssel módszerrel)

10.8 A hasznossági elmélet felvetéseinek magatartáselméleti kritikái

Temesi jegyzet, Daniel Kahneman - Gyors és lassú gondolkodás