

Probabilidad y Estadística

Probabilidad

Universidad Tecnológica Izúcar de Matamoros
UTIM

Dr. Alejandro Rodriguez

8 de febrero de 2022

Temas de Probabilidad

- Conjuntos
- Probabilidad Básica y Condicional
- Distribuciones Discretas de Probabilidad
- Distribuciones Continuas de Probabilidad
- Distribuciones Muestrales

Probabilidad

Probabilidad

El término **probabilidad** se refiere al estudio de azar y la incertidumbre en cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir.

Probabilidad

Probabilidad

El término **probabilidad** se refiere al estudio de azar y la incertidumbre en cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir.

En palabras simples, fenómenos aleatorios son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser posible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento.

Espacio muestral

title

Definir los conceptos y notación de conjuntos: -Universo -Vacío
-Subconjunto

Describir el proceso de construcción del diagrama de Venn Euler.

Explicar las operaciones entre conjuntos: - Unión - Intersección -
Complemento - Diferencia

Conjuntos o espacio muestral

Espacio muestral

El **espacio muestral** de un experimento denotado por E , es el **conjunto** de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Conjuntos o espacio muestral

Espacio muestral

El **espacio muestral** de un experimento denotado por E , es el **conjunto** de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Ejemplos:

- 1 El espacio muestral asociado a lanzar un dado, $E = 1,2,3,4,5,6$

Conjuntos o espacio muestral

Espacio muestral

El **espacio muestral** de un experimento denotado por E , es el **conjunto** de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Ejemplos:

- 1 El espacio muestral asociado a lanzar un dado, $E = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- 2 El espacio asociado a preguntar a un cliente si le gusta o no nuestro producto es $E = S, N$ (S – sí; N – no)

Conjuntos o espacio muestral

Espacio muestral

El **espacio muestral** de un experimento denotado por E , es el **conjunto** de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Ejemplos:

- 1 El espacio muestral asociado a lanzar un dado, $E = 1,2,3,4,5,6$
- 2 El espacio asociado a preguntar a un cliente si le gusta o no nuestro producto es $E = S, N$ (S – sí; N – no)
- 3 El espacio asociado a indagar si 3 clientes que entraron a una tienda compraron un producto es $E = SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN$.

Conjuntos: Suceso o evento

Suceso o evento

Un **suceso** o **evento** es cualquier recopilación (**subconjunto**) de resultados contenidos en el espacio muestral E . Un evento es *simple* si consiste en exactamente un resultado y *compuesto* si consiste en más de un resultado.

Conjuntos: Suceso o evento

Suceso o evento

Un **suceso** o **evento** es cualquier recopilación (**subconjunto**) de resultados contenidos en el espacio muestral E . Un evento es *simple* si consiste en exactamente un resultado y *compuesto* si consiste en más de un resultado.

Dado que los sucesos son subconjuntos del espacio muestral, son muy útiles los diagramas de Venn para su representación:

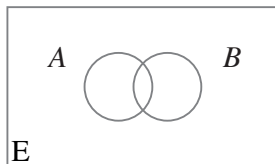


Figura: Ejemplo de un diagrama de diagramas de Venn. E . Espacio muestral, A y B representan conjuntos o subconjuntos.

Propiedades de conjunto

- 1 El complemento de un evento A , denotado por A' , es el conjunto de todos los resultados en \mathbf{E} que no están contenidos en A .

Propiedades de conjunto

- 1 El complemento de un evento A , denotado por A' , es el conjunto de todos los resultados en \mathbf{E} que no están contenidos en A .
- 2 La unión de dos eventos A y B , denotados por $A \cup B$ y leídos “ A o B ”, es el evento que consiste en todos los resultados que están en A o en B o en ambos eventos (de tal suerte que la unión incluya resultados donde tanto A como B ocurren, así también resultados donde ocurre exactamente uno), es decir, todos los resultados en por lo menos uno de los eventos.

Propiedades de conjunto

- 1 El complemento de un evento A , denotado por A' , es el conjunto de todos los resultados en \mathbf{E} que no están contenidos en A .
- 2 La unión de dos eventos A y B , denotados por $A \cup B$ y leídos “ A o B ”, es el evento que consiste en todos los resultados que están en A o en B o en ambos eventos (de tal suerte que la unión incluya resultados donde tanto A como B ocurren, así también resultados donde ocurre exactamente uno), es decir, todos los resultados en por lo menos uno de los eventos.
- 3 La intersección de dos eventos A y B , denotada por $A \cap B$ y leída “ A y B ”, es el evento que consiste en todos los resultados que están tanto en A como en B .

Unión

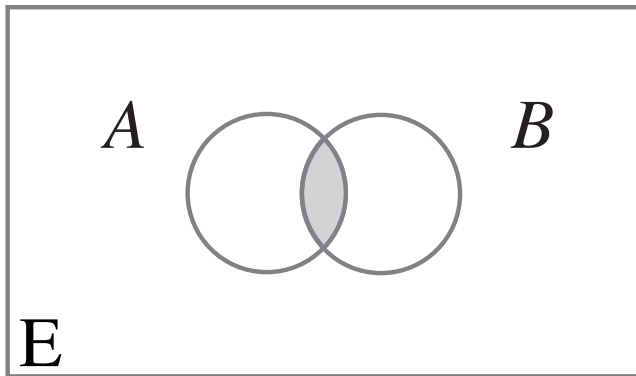


Figura: Unión: La región sombreada es $A \cup B$.

Intersección

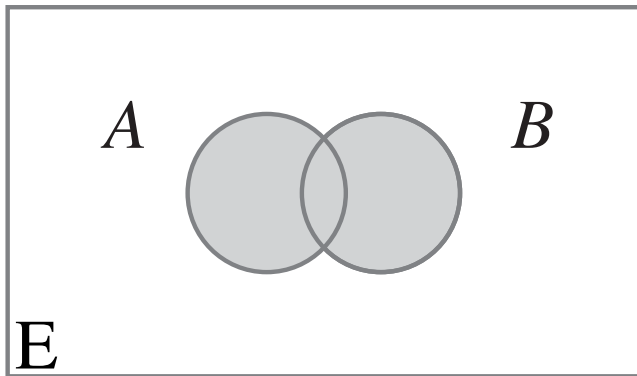


Figura: Intersección: La región sombreada es $A \cap B$

Complemento

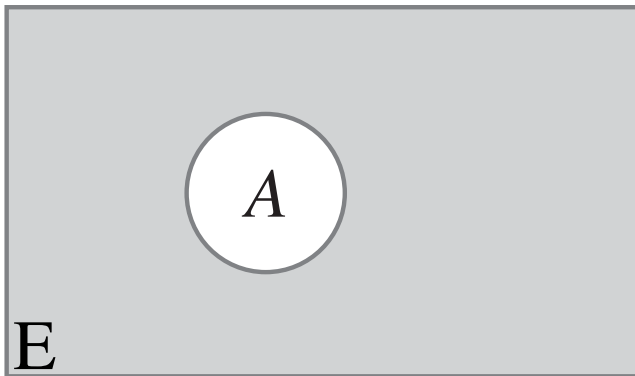


Figura: Complemento: La región sombreada es A' .

Mutuamente excluyentes

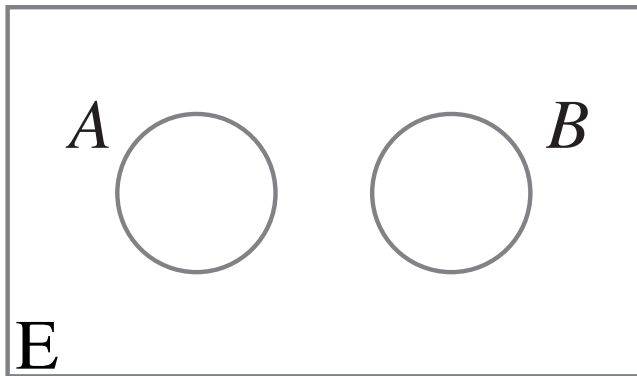


Figura: Eventos mutuamente excluyentes.

Mutuamente excluyentes

TO BE CONTINUE

Probabilidad

Probabilidad

El término **probabilidad** se refiere al estudio de azar y la incertidumbre en cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir.

En palabras simples, fenómenos aleatorios son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser posible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento.

Cálculo de probabilidad

Cálculo de probabilidad

La noción de probabilidad tiene cuatro acepciones básicas:

- Empírica (práctica, relacionada con la frecuencia relativa)
- Clásica (teórica, relacionada con casos equiprobables)
- Axiomática (basada en un modelo matemático)
- Intuitiva (relacionada con experiencias o mediciones subjetivas)

Método empírico

J. J. Bernoulli, observando los resultados del lanzamiento de una moneda un número grande de veces, notó que el número de caras y cruces tendía a igualarse. Es decir, que la frecuencia relativa de la obtención de caras se acercaba más al número de cruces, cuanto mayor era el número de lanzamientos, dicho de otra manera, las frecuencias relativas se parecían cada vez más a 0.5. De aquí la definición empírica de Probabilidad:

Probabilidad

Probabilidad de un suceso es el número al que tiende la frecuencia relativa asociada al suceso a medida que el número de veces que se realiza el experimento crece.

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{N}$$

Método empírico

Ejemplo

En una línea de envasado de cereales se tienen los siguientes registros de envases defectuosos:

Semana	1	2	3	4	Total
Envases recibidos	1200	1350	1150	1100	4800
Envases rechazados	4	6	4	5	19

Determine la probabilidad de encontrar un envase defectuoso.

Método empírico

Ejemplo

En una línea de envasado de cereales se tienen los siguientes registros de envases defectuosos:

Semana	1	2	3	4	Total
Envases recibidos	1200	1350	1150	1100	4800
Envases rechazados	4	6	4	5	19

Determine la probabilidad de encontrar un envase defectuoso.

Solución:

Evidentemente la frecuencia relativa de ocurrencia de este suceso es igual a $19/4800 = 0,004$ o lo que es lo mismo de un 0.4 %.

Probabilidad Clásica (Definición de Laplace)

Enfoque clasico

Es el *número de casos favorables al evento* (es decir, resultados posibles del evento o prueba que hacen que ocurra el evento) *entre el número de casos posibles* (o sea todos los resultados posibles del experimento), *pero considerando que cada uno de los casos posibles tiene igual probabilidad de ocurrir.*

$$P(E) = \frac{n(E)}{N}$$

$n(E)$: número de casos favorables a E

N : número de casos posibles

Probabilidad Clásica (Definición de Laplace). Ejemplo

Ejemplo: El evento que consiste en obtener un mismo número de ambos dados al lanzar dos dados tiene probabilidad

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Probabilidad Clásica (Definición de Laplace). Ejemplo

Ejemplo: El evento que consiste en obtener un mismo número de ambos dados al lanzar dos dados tiene probabilidad

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Combinaciones: 36

Método Subjetivo o Intuitivo

Hay otro tipo de probabilidades como la llamada probabilidad **subjetiva** o **intuitiva** que es una cierta evaluación personal de la probabilidad, en lugar de ser teórica o experimental. Por ejemplo, si se desea opinar acerca de las posibilidades de que llueva en mayo en Izúcar de Matamoros, uno puede opinar, de acuerdo a la experiencia propia, acorde con los años en que ha residido en un lugar, por ejemplo que mañana es posible que la probabilidad de lluvia sea de un 20 %, muy distinta a la que pudiera decir la misma persona si le preguntan en junio, un mes en el que comienzan las lluvias por esta región de Izúcar. No obstante, en ciertos estudios y situaciones los criterios de los expertos pueden utilizarse y manejarse incluso utilizando métodos estadísticos.

Técnicas de conteo

Técnicas de conteo

Para utilizar el enfoque clásico de la probabilidad (a priori), es necesario conocer el número total de resultados de una muestra o experimento.

Las **técnicas de conteo** generalmente se utilizan como un medio para determinar el número total de resultados y son empleadas cuando realizar el conteo de forma manual se hace complicado.

Técnicas de conteo

Para utilizar el enfoque clásico de la probabilidad (a priori), es necesario conocer el número total de resultados de una muestra o experimento.

Las **técnicas de conteo** generalmente se utilizan como un medio para determinar el número total de resultados y son empleadas cuando realizar el conteo de forma manual se hace complicado.

Técnicas de conteo

Las **Técnicas de conteo** son una serie de métodos de probabilidad para contar el número posible de arreglos dentro de un conjunto o varios conjuntos de objetos

- Diagrama de Árbol
- Regla multiplicativa
- Permutación
- Combinación

Diagrama de Árbol

Un diagrama de árbol es una representación gráfica de los posibles resultados de un experimento que tiene varios pasos.

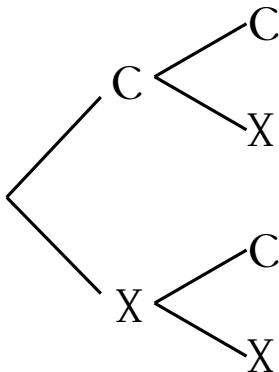


Figura: Lanzamiento de una moneda, dos veces consecutivas.

Diagrama de Árbol

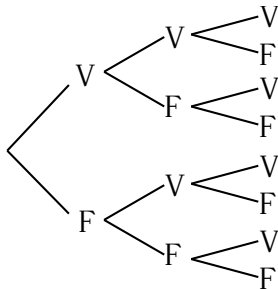


Figura: Posibles respuestas de V o F, en un examen de tres preguntas.

Regla multiplicativa

Regla multiplicativa

Si una operación puede realizarse en n_1 formas, y si por cada una de éstas una segunda operación puede llevarse a cabo en n_2 formas, entonces las dos operaciones pueden realizarse juntas en $n_1 n_2$ formas.

Ejemplo

¿Cuántos puntos muestrales hay en un espacio muestral cuando se lanza un par de dados una sola vez?

Regla multiplicativa

Regla multiplicativa

Si una operación puede realizarse en n_i formas, y si por cada una de éstas una segunda operación puede llevarse a cabo en n_2 formas, entonces las dos operaciones pueden realizarse juntas en $n_1 n_2$ formas.

Ejemplo

¿Cuántos puntos muestrales hay en un espacio muestral cuando se lanza un par de dados una sola vez? **Solución:** El primer dado puede caer en cualquiera de $n_1 = 6$ formas. Para cada una de éstas el segundo puede, también, caer en $n_2 = 6$ formas. Por tanto el par de dados pueden caer:

$$n_1 n_2 = (6)(6) = 36$$

Definición de Factorial!

Definición de Factorial!

El **factorial de un entero positivo** n se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n .

Por ejemplo:

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Propiedades del de Factorial!

$$0! = 1$$

$$(1 + 4)! = 5! = 120$$

$$(6 - 2)! = 4! = 24$$

Propiedades del de Factorial!

Propiedades del de Factorial!

$$\frac{5!}{7!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{\cancel{5!}}{7 \times 6 \times \cancel{5!}} = \frac{1}{7 \times 6} = \frac{1}{42}$$

Otro ejemplo:

Propiedades del de Factorial!

Propiedades del de Factorial!

$$\frac{5!}{7!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{\cancel{5!}}{7 \times 6 \times \cancel{5!}} = \frac{1}{7 \times 6} = \frac{1}{42}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4 \times 3 = 12$$

Permutación y Combinación

Considérese un grupo de **n individuos u objetos distintos**.

- ¿Cuántas maneras existen de seleccionar un subconjunto de tamaño k del grupo?

Permutación y Combinación

Considérese un grupo de n **individuos u objetos distintos**.

- ¿Cuántas maneras existen de seleccionar un subconjunto de tamaño k del grupo?

Ejemplos

- Si un equipo de ligas menores tiene 15 jugadores registrados, ¿cuántas maneras existen de seleccionar 9 jugadores para una alineación inicial?
- Si en su librero tiene 10 libros de misterio no leídos y desea seleccionar 3 para llevarlos consigo en unas vacaciones cortas, ¿cuántas maneras existen de hacerlo?

Permutación y Combinación

Una respuesta a la pregunta general que se acaba de plantear requiere distinguir entre dos casos.

- El orden de selección importa.
- El orden de selección **NO** importa.

Permutación y Combinación

Una respuesta a la pregunta general que se acaba de plantear requiere distinguir entre dos casos.

- El orden de selección importa.
- El orden de selección **NO** importa.

Ejemplos

- Con Jorge como lanzador y Daniela como receptor se obtiene una alineación diferente de aquella con Daniela como receptor y Jorge como lanzador.
- La selección del libro que va a leer no es importante.

Permutación y Combinación. Definición.

Definición

Un subconjunto ordenado se llama **permutación**. El número de permutaciones de tamaño k que se puede formar con los n individuos u objetos en un grupo será denotado por $P_{k,n}$.

Permutación y Combinación. Definición.

Definición

Un subconjunto ordenado se llama **permutación**. El número de permutaciones de tamaño k que se puede formar con los n individuos u objetos en un grupo será denotado por $P_{k,n}$.

Un subconjunto no ordenado se llama **combinación**. Una forma de denotar el número de combinaciones es $C_{k,n}$, pero en su lugar se utilizará una notación que es bastante común en libros de probabilidad: $\binom{n}{k}$, que se lee “*de n se eligen k* ”.

Permutación

Ejemplo

Supongamos que tenemos un conjunto de cuatro individuos: a , b , c y d . De ellos solo dos van a ser elegidos para los puestos de *presidente* y *vicepresidente* en cierta junta directiva.

¿Cuántas maneras existen para seleccionar estos dos cargos?

Permutación

Ejemplo

Supongamos que tenemos un conjunto de cuatro individuos: a , b , c y d . De ellos solo dos van a ser elegidos para los puestos de *presidente* y *vicepresidente* en cierta junta directiva.

¿Cuántas maneras existen para seleccionar estos dos cargos?

ab	ac	ad
ba	bc	bd
ca	cb	cd
da	db	dc

Total: 12 formas.

NOTA: Uno está tentado a decir combinaciones sin embargo, el orden importa, por lo que son **permutaciones**.

Permutación

Ejemplo

Supongamos que tenemos un conjunto de cuatro individuos: a , b , c y d . De ellos solo dos van a ser elegidos para los puestos de *presidente* y *vicepresidente* en cierta junta directiva.

¿Cuántas maneras existen para seleccionar estos dos cargos?

Permutación

Ejemplo

Supongamos que tenemos un conjunto de cuatro individuos: a , b , c y d . De ellos solo dos van a ser elegidos para los puestos de *presidente* y *vicepresidente* en cierta junta directiva.

¿Cuántas maneras exciten para seleccionar estos dos cargos?

ab	ac	ad
ba	bc	bd
ca	cb	cd
da	db	dc

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4 \times 3 = 12$$

Permutación. Ejemplo

Ejemplo

Existen diez asistentes de profesor disponibles para calificar exámenes en un curso. El examen se compone de cuatro preguntas y el profesor desea seleccionar un asistente diferente para calificar cada pregunta (sólo un asistente por pregunta). ¿De cuántas maneras se pueden elegir los asistentes para calificar?

Permutación. Ejemplo

Ejemplo

Existen diez asistentes de profesor disponibles para calificar exámenes en un curso. El examen se compone de cuatro preguntas y el profesor desea seleccionar un asistente diferente para calificar cada pregunta (sólo un asistente por pregunta). ¿De cuántas maneras se pueden elegir los asistentes para calificar?

n = tamaño del grupo = 10

k = tamaño del subconjunto = 4

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} =$$

Permutación. Ejemplo

Ejemplo

Existen diez asistentes de profesor disponibles para calificar exámenes en un curso. El examen se compone de cuatro preguntas y el profesor desea seleccionar un asistente diferente para calificar cada pregunta (sólo un asistente por pregunta). ¿De cuántas maneras se pueden elegir los asistentes para calificar?

n = tamaño del grupo = 10

k = tamaño del subconjunto = 4

$$\begin{aligned}
 P_{k,n} &= \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = \\
 &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040
 \end{aligned}$$

Técnicas de conteo

Combinación

Combinación

Definición

Un subconjunto no ordenado se llama **combinación**. Una forma de denotar el número de combinaciones es $C_{k,n}$, pero en su lugar se utilizará una notación que es bastante común en libros de probabilidad: $\binom{n}{k}$, que se lee “*de n se eligen k* ”.

Combinación

Definición

Un subconjunto no ordenado se llama **combinación**. Una forma de denotar el número de combinaciones es $C_{k,n}$, pero en su lugar se utilizará una notación que es bastante común en libros de probabilidad: $\binom{n}{k}$, que se lee “*de n se eligen k* ”.

Considérense ahora las combinaciones (es decir, subconjuntos ordenados). Tomando el ejemplo anterior, el de los cuatro individuos

a, b, c y d .

Supóngase que dos de los cuatro individuos tienen que ser seleccionados para que asistan a una conferencia. El orden de selección no es importante; lo que importa es cuáles dos son seleccionados.

Combinación

Considérense ahora las combinaciones (es decir, subconjuntos ordenados). Tomando el ejemplo anterior, el de los cuatro individuos

$$a, b, c \text{ y } d.$$

Supóngase que dos de los cuatro individuos tienen que ser seleccionados para que asistan a una conferencia. El orden de selección no es importante; lo que importa es cuáles dos son seleccionados. Nos percatamos que el orden de selección no es importante, da lo mismo seleccionar a ***ab*** que a ***ba***.

$$ab \Leftrightarrow ba$$

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd$$

Combinación

Combinación

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{k,n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Del ejemplo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2! \times \cancel{2!}} = \\ &= \frac{4 \times 3}{2} = 12/2 = 6\end{aligned}$$

Combinación

Combinación

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{k,n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Del ejemplo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2! \times \cancel{2!}} = \\ &= \frac{4 \times 3}{2} = 12/2 = 6\end{aligned}$$

ab, ac, ad, bc, bd, cd

title

content...

title

title

content...

title

title

content...