Tarea 3

Jorge Vasquez Arriaga

1. En cada inciso, determina si el conjunto es numerable o no numerable:

I. $X_1 = \{\ A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$

Afirmación I: X_1 es un conjunto numerable
consideremos $\phi : X_1 \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
como la función indicadora, $\mathcal{X}_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$$\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1 \quad si \quad n \in A \\ \\ 0 \quad si \quad n \notin A \end{cases}$$

sabemos que dicha función es una biyección entre la potencia de los naturales y las sucesiones de ceros y unos, sin embargo aquí estamos restringiendo el dominio a solo subconjuntos finitos, y como es una restriccion de una función biyectiva entonces dicha función sera biyectiva
ahora bien la imagen seran las sucesiones a las que a partir de un numero natural fijo los siguientes términos son solo ceros, definamos $S_0 = \Big\{(x_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N}\, (\forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}\ x_n = 0)\Big\}$
las sucesiones de S contiene términos infinitos, sin embrago podemos hacer una nueva biyección entre S_0 y S_0^N donde S_0^N son las sucesiones con términos finitos, ya que para cada sucesión existe N para la cual los siguientes términos son ceros, estos ceros los podemos omitir
es decir sea $s_n \in S$ mandamos s_n a la sucesión $s_n^N \in s_0^N$ de N terminos, donde N es el natural al partir del cual los demás términos son ceros en s_0, y los N términos son los mismos que s_0, esta es una función biyectiva pues si tenemos una sucesión $s_n^N \in S_0^N$, la podemos mandar a S_0 añadiendo ceros en los términos posteriores al N-ésimo
ahora bien tenemos sucesiones finitas de ceros y unos, notemos que cada sucesión la podemos ver como un numero binario, es decir si la sucesión $s_0 = s_0^N(1), s_0^N(2), ..., s_0^N(N)$ lo representamos con el número donde el primer digito es $s_0^N(1)$, el segundo $s_0^N(2)$, el n-ésimo $s_0^N(n)$ donde $n \leq N$, denotamos $N_{\{0,1\}}$ a este conjunto, por como definimos esta función es inyectiva, ya que cada sucesión corresponde con un número binario
ahora como los números binarios los podemos convertir a binarios y viceversa, es decir hay una biyección, de lo cual podemos concluir que la afirmación es cierta pues $X_1 \sim S_0 \sim S_0^N \leq N_{\{0,1\}} \sim \mathbb{N}$, es decir X_1 es numerable.

II. $X_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f \text{ es biyectiva}\}$

Afirmación II: X_2 es un conjunto no numerable

procedamos por contradicción, supongamos que el conjunto es numerable, entonces existe una función g $g : \mathbb{N} \to X_2$ tal que g es biyectiva, es decir exite un etiquetado tal que, $g(1) = f_1$, $g(2) = f_2, ..$

sabemos que f_i es biyectiva, por lo que podemos escribir su regla de correspondencia como $f_i(1) = a_{i1}$, $f_i(2) = a_{i2}, ...$ donde cada a_{ij} es distinta con $j \in \mathbb{N}$, en general $f_i(j) = a_{i,j}$

consideremos la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por la siguiente correpondecia

$h(1) = min\,\{x \in \mathbb{N} : x \neq f_1(1) \wedge x \neq h(x)(\forall x < 1)\}$

$h(2) = min\,\{x \in \mathbb{N} : x \neq f_2(2) \wedge x \neq h(x)(\forall x < 2)\}$

en general $h(i) = min\,\{x \in \mathbb{N} : x \neq f_i(i) \wedge x \neq h(x)(\forall x < i)\}$

veamos que h no pertence a ningún f_i pues no tienen la misma regla correspondencia, ya que por construcción de h $h(i) \neq f_i(i)(\forall i \in \mathbb{N})$ ahora es inyectiva ya que por construcción $h(i) \neq h(x)(\forall x < i$ es decir a cada natural le corresponde un natural diferente

observación: queremos ver que es sobreyectiva, tenemos que probar que $rango(f) = \mathbb{N}$, sin embargo puede pasar que $a_0 = a_{ii}(\forall i \geq n_0 \in \mathbb{N})$ de lo cual no siempre podemos asegurar que exista $i \in \mathbb{N}$ tal que $h(i) = a_0$, si este fuera el caso podemos definir $h_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por la siguiente regla de correspondencia

$$h_k(i) = \begin{cases} h(i) & si \quad i < a_0 \\ \\ h(i+1) & si \quad i = a_0 \\ \\ a_0 & si \quad i = a_0 + 1 \\ \\ h(i) & si \quad i > a_0 + 2 \end{cases}$$

lo que hacemos con h_k es intercambiar el orden entre f_{a_0} y f_{a_0+1}, por lo que la función conserva las propiedades de h, sigue siendo inyectiva y diferente de cualquier f_i, pero ahora contiene en su rango a n_0

ahora vemos que en cualquiera de los casos se puede construir una función sobreyectiva, supongamos que existe $b \in \mathbb{N}$ tal que para ningun $a \in \mathbb{N}$ se tiene que $h(a) = b$, si sucede esto quiere decir que b nunca es mínimo o que $b = f_i(i)(\forall i \geq n_0 \in \mathbb{N})$

sabemos que b sera mínimo despues de las primeras b evaluaciones en h, entonces lo que puede ocurrir es que $b = f_i(i)(\forall i \geq n_0 \in \mathbb{N})$, pero por la observación podemos construir una nueva función $h_k(i)$ la cual contiene en su rango a b, por lo que existe una función sobreyectiva

de lo anterior, probamos que podemos construir una función inyectiva y sobreyectiva es decir biyectiva, que no esta en el dominio de la función g, lo cual es una contradicción, ya que supisimos que g era biyectiva.

Por lo tanto X_2 es un conjunto no numerable