

Оцінювання характеристик частково спостережуваного ланцюга Маркова на двійкових послідовностях

А. В. Цибульник І. І. Ніщенко

Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених

2023

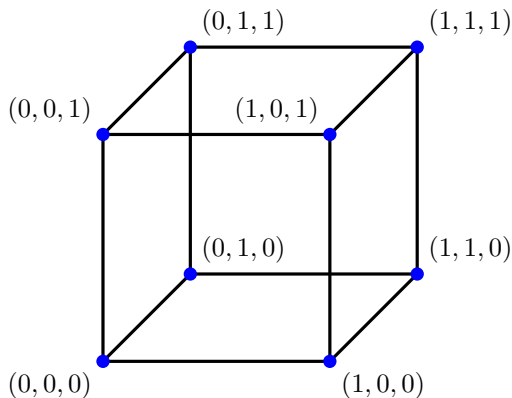
План доповіді

- 1 Моделювання об'єкту дослідження
- 2 Постановка задачі
- 3 Результати чисельного експерименту

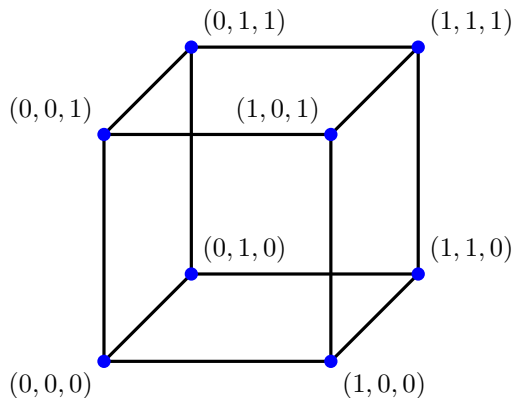
План доповіді

- 1 Моделювання об'єкту дослідження
- 2 Постановка задачі
- 3 Результати чисельного експерименту

Моделювання об'єкту дослідження

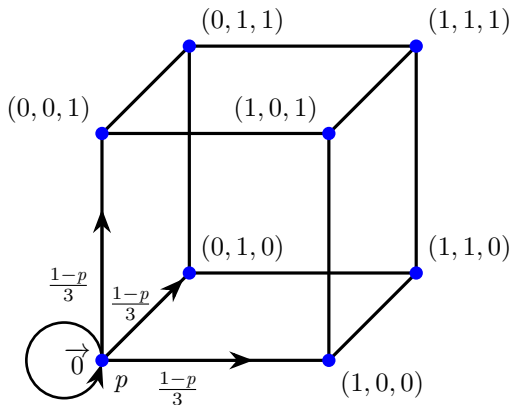


Моделювання об'єкту дослідження



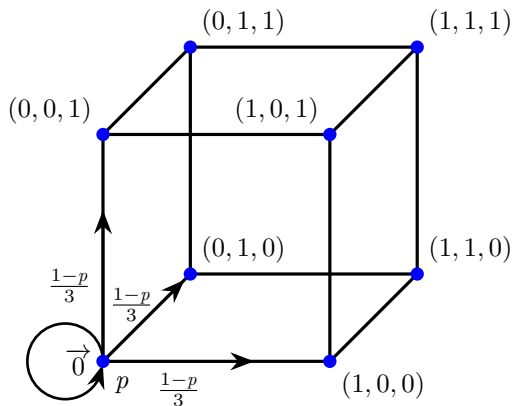
	x^t
$t = 1$	$(0, 1, 1)$
$t = 2$	$(0, 1, 0)$
$t = 3$	$(1, 1, 0)$
$t = 4$	$(1, 0, 0)$

Моделювання об'єкту дослідження



	x^t
$t = 1$	$(0, 1, 1)$
$t = 2$	$(0, 1, 0)$
$t = 3$	$(1, 1, 0)$
$t = 4$	$(1, 0, 0)$

Моделювання об'єкту дослідження



	x^t	y^t
$t = 1$	$(0, 1, 1)$	$(1, 1)$
$t = 2$	$(0, 1, 0)$	$(1, 0)$
$t = 3$	$(1, 1, 0)$	$(2, 0)$
$t = 4$	$(1, 0, 0)$	$(1, 0)$

Моделювання об'єкту дослідження

	x^t	y^t
$t = 1$	010011101101	(1, 4)
$t = 2$	011011101101	(2, 4)
$t = 3$	011011111101	(2, 4)
$t = 4$	011011111111	(2, 5)

Моделювання об'єкту дослідження

Твердження

Послідовність $\{(X^t, Y^t)\}_{t=\overline{1, T}}$ утворює приховану марковську модель (π, A, B) , де

$$B_{xy} = P(Y^t = y \mid X^t = x) = \prod_{k=1}^L \mathbb{1} \left(y_k = \sum_{i \in I_k} x_i \right)$$

План доповіді

- 1 Моделювання об'єкту дослідження
- 2 Постановка задачі
- 3 Результати чисельного експерименту

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Метод максимальної правдоподібності:

$$P(Y = y | p) = \sum_{x \in E^T} P(X = x, Y = y | p) \longrightarrow \max$$

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Метод максимальної правдоподібності:

$$P(Y = y | p) = \sum_{x \in E^T} P(X = x, Y = y | p) \longrightarrow \max$$

Відтак

$$\hat{p} = \operatorname{argmax}_p \sum_{x \in E^T} L_{p,x,y}$$

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Ітераційний алгоритм Баума-Велша:

$$Q(p^{(n)}, p) = \sum_{x \in E^T} L_{p^{(n)}, x, y} \cdot \ln L_{p, x, y} \longrightarrow \max$$

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Ітераційний алгоритм Баума-Велша:

$$Q(p^{(n)}, p) = \sum_{x \in E^T} L_{p^{(n)}, x, y} \cdot \ln L_{p, x, y} \longrightarrow \max$$

Тож починаючи з деякого $p^{(0)}$

$$p^{(n+1)} = \operatorname{argmax}_p Q(p^{(n)}, p)$$

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Формула переоцінки параметра p :

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{x \in E} \alpha_t(x) B_{xy^{t+1}} \beta_{t+1}(x)}{\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{x \in E} \alpha_t(x) \beta_t(x)},$$

де

$$\alpha_t(x) = P(Y^1 = y^1, \dots, Y^t = y^t, X^t = x | p^{(n)})$$

$$\beta_t(x) = P(Y^{t+1} = y^{t+1}, \dots, Y^T = y^T | X^t = x, p^{(n)})$$

Постановка задачі

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;

Алгоритм Вітербі: пошук такої послідовності прихованих станів $\hat{X}^1, \hat{X}^2, \dots, \hat{X}^T$, яка найкращим чином описує наявні спостереження:

$$\hat{X} = \operatorname{argmax}_{x \in E^T} P(X = x \mid Y = y, \hat{p})$$

Постановка задачі

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Постановка задачі

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

	x^t	y^t	$y_{I_*}^t$
$t = 1$	010011101101	(1, 4)	3
$t = 2$	011011101101	(2, 4)	3
$t = 3$	011011111101	(2, 4)	4
$t = 4$	011011111111	(2, 5)	4

Постановка задачі

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Твердження

Змістовною і незміщеною оцінкою потужності множини I_ є статистика*

$$|\widehat{I_*}| = \frac{N}{1-p} \left(1 - \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{1}(Y_{I_*}^t = Y_{I_*}^{t+1}) \right)$$

Постановка задачі

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Визначення компонент множини I_* :

$$\hat{I} = \operatorname{argmin}_{1 \leq k \leq C_N^{|\hat{I}_*|}} d \left(\widehat{Y}_{I_k}, Y_{I_*} \right),$$

Постановка задачі

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Визначення компонент множини I_* :

$$\hat{I} = \operatorname{argmin}_{1 \leq k \leq C_N^{|\hat{I}_*|}} d \left(\widehat{Y}_{I_k}, Y_{I_*} \right),$$

де

$$d_S \left(\widehat{Y}_{I_k}, Y_{I_*} \right) = \sum_{t=1}^T \left(\widehat{Y}_{I_k}^t - Y_{I_*}^t \right)^2$$
$$d_J \left(\widehat{Y}_{I_k}, Y_{I_*} \right) = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \min \left(\widehat{Y}_{I_k}^t, Y_{I_*}^t \right)}{\sum_{t=1}^T \max \left(\widehat{Y}_{I_k}^t, Y_{I_*}^t \right)}$$

Постановка задачі

- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .

	x^t	\tilde{x}^t	y^t	q
$t = 1$	010011101101	000011101101	(0, 4)	(q_1, q_2)
$t = 2$	011011101101	010011101101	(1, 4)	(q_1, q_2)
$t = 3$	011011111101	111011111111	(3, 5)	(q_1, q_2)
$t = 4$	011011111111	011011111100	(2, 3)	(q_1, q_2)

Постановка задачі

- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .

	x^t	\tilde{x}^t	y^t	q
$t = 1$	010011101101	000011101101	(0, 4)	(q_1, q_2)
$t = 2$	011011101101	010011101101	(1, 4)	(q_1, q_2)
$t = 3$	011011111101	111011111111	(3, 5)	(q_1, q_2)
$t = 4$	011011111111	011011111100	(2, 3)	(q_1, q_2)

$$\forall i \in I_1 : \quad \tilde{X}_i^t = \begin{cases} 1 - X_i^t, & \text{з ймовірністю } q_1 \\ X_i^t, & \text{з ймовірністю } 1 - q_1 \end{cases}$$

Постановка задачі

- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .

Твердження

Якщо множини I_1, \dots, I_L є попарно неперетинними, то утворена послідовність $\{(X^t, Y^t)\}_{t=\overline{1, T}}$ є прихованою марковською моделлю (π, A, B^q) , де

$$B_{xy}^q = P(Y^t = y \mid X^t = x) = \prod_{k=1}^L P(\xi_{01}^k(x) + \xi_{11}^k(x) = y_k),$$

$$\xi_{01}^k(x) \sim \text{Bin}\left(|I_k| - \sum_{i \in I_k} x_i, q_k\right), \quad \xi_{11}^k(x) \sim \text{Bin}\left(\sum_{i \in I_k} x_i, 1 - q_k\right), \quad k = \overline{1, L}$$

Постановка задачі

- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{x \in E} \alpha_t(x) B_{xy^{t+1}}^{q^{(n)}} \beta_{t+1}(x)}{\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{x \in E} \alpha_t(x) \beta_t(x)}$$

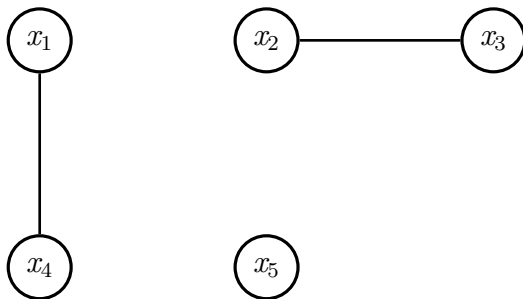
$$q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} \cdot \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{x \in E} \beta_t(x) \sum_{x' \in E} \alpha_{t-1}(x') A_{x'x}^{(n)} \sum_{i \in I_k} P_{x,i}^{q^{(n)}}}{|I_k| \sum_{t=1}^T \sum_{x \in E} \alpha_t(x) \beta_t(x)}$$

План доповіді

- 1 Моделювання об'єкту дослідження
- 2 Постановка задачі
- 3 **Результати чисельного експерименту**

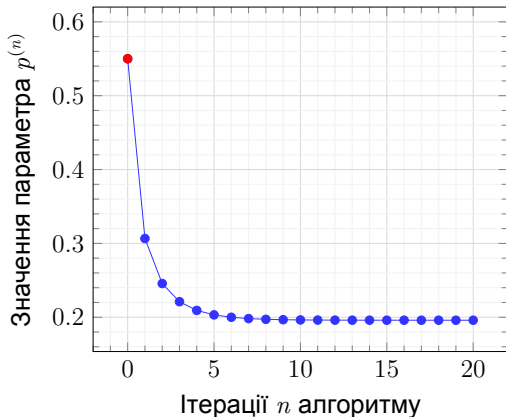
Результати чисельного експерименту

Було згенеровано прихований ланцюг Маркова протягом $T = 200$ моментів часу, $N = 5$ та $p = 0.2$. Множина спостережуваних індексів: $I = \{I_1, I_2\} = \{(2, 3), (1, 4)\}$.



Результати чисельного експерименту

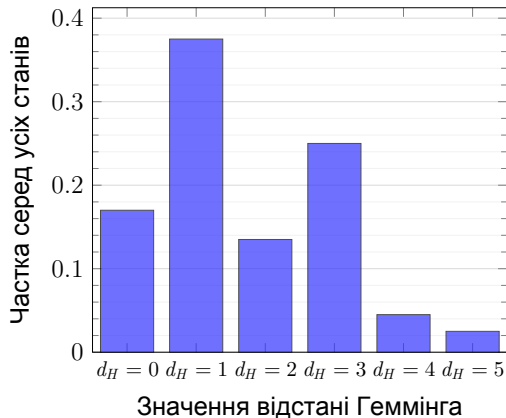
- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;



p	0.2	0.0041
\hat{p}	0.1959	

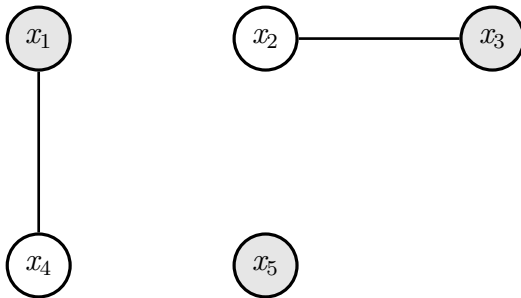
Результати чисельного експерименту

- 1 Оцінити параметр p та декодувати послідовність станів прихованого ланцюга;



Результати чисельного експерименту

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;



Результати чисельного експерименту

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Таблиця: Збіжність змістовної оцінки

T	200	400	600	800	1000
\hat{p}	0.1959	0.1823	0.1882	0.2099	0.2092
$ \hat{I}_* $	2	2	2	3	3

Результати чисельного експерименту

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Таблиця: Збіжність змістовної оцінки

T	200	400	600	800	1000
\hat{p}	0.1959	0.1823	0.1882	0.2099	0.2092
$ \widehat{I_*} $	2	2	2	3	3

$$|\widehat{I_*}| = \max_{1 \leq t \leq T} Y_{I_*}^t$$

Результати чисельного експерименту

- 2 Відтворити елементи «множини неявних індексів» I_* ;

Таблиця: Збіжність змістовної оцінки

T	200	400	600	800	1000
\hat{p}	0.1959	0.1823	0.1882	0.2099	0.2092
$ \widehat{I_*} $	2	2	2	3	3

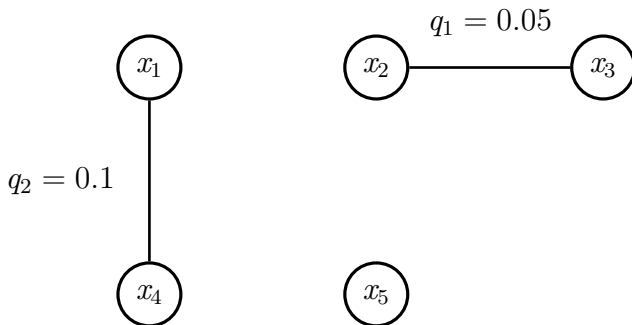
Отримані результати

$$|\widehat{I_*}| = \max_{1 \leq t \leq T} Y_{I_*}^t$$

I_*	(1, 3, 5)
\widehat{I}_S	(1, 2, 5)
\widehat{I}_J	(1, 2, 3)

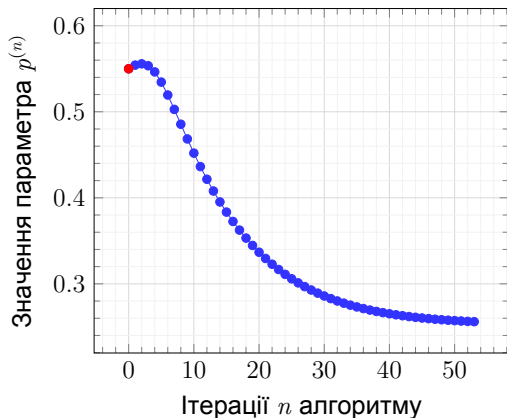
Результати чисельного експерименту

- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .



Результати чисельного експерименту

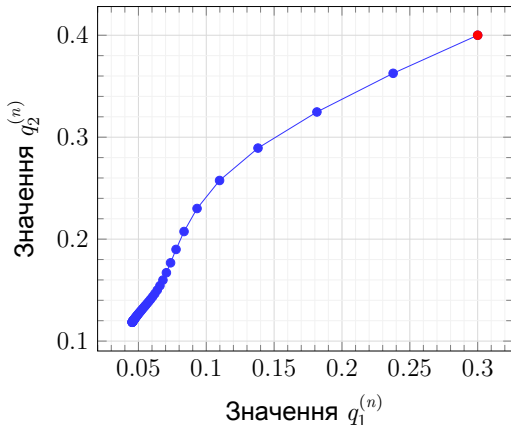
- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .



p	0.2	0.0559
\hat{p}	0.2559	

Результати чисельного експерименту

- 3 Оцінити невідомий параметр моделі p при ймовірностях спотворення q_1, q_2, \dots, q_L .



q_1	0.05	0.0046
\hat{q}_1	0.0454	

q_2	0.1	0.0184
\hat{q}_2	0.1184	