Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет прикладної математики

Лабораторна робота №4

Моделювання еволюції капіталу страхової компанії за допомогою ланцюгів Маркова

«Методи теорії надійності та ризику»

Роботу виконав:
Студент 5 курсу, групи КМ-31мн,
Цибульник Антон Владиславович

Роботу приймав:
Професор кафедри ПМА,
Норкін Володимир Іванович

2023

Зміст

Теоретичні відомості про марковські моделі

Нехай $\{U_t\}_{t=\overline{1,T}}$ — послідовність випадкових величин зі значеннями в множині $E = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$. Послідовність $\{U_t\}_{t=\overline{1,T}}$ утворює ланцюг Маркова, якщо $\forall t \geqslant 2 \quad \forall u_1, u_2, \ldots, u_{t+1} \in E$ виконується так звана марковська властивість:

$$P\left(U_{t+1} = u_{t+1} \,|\, U_t = u_t, \ldots, U_1 = u_1\right) = P\left(U_{t+1} = u_{t+1} \,|\, U_t = u_t\right) \tag{0.1}$$

Множину E називають множиною станів ланцюга, а випадкова величина U_t трактується як стан системи в момент часу t. Надалі у ході дослідження по замовчуванню розглядатиметься так званий однорідний ланцюг Маркова, для якого ймовірності переходу $P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right)$ з одного стану $i \in E$ в інший стан $j \in E$ не залежать від t. Матриця P, складена із імовірностей переходу $p_{ij} = P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right)$, називається матрицею перехідних імовірностей:

$$P = \Big(p_{ij}\Big)_{i,j \in E} = \Big(P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right)\Big)_{i,j \in E} \tag{0.2}$$

Ця матриця є стохастичною, тобто

$$\forall i, j \in E : p_{ij} \geqslant 0 \ \text{ та } \ \forall i \in E : \sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \tag{0.3}$$

Окрім матриці P, ланцюг Маркова визначається вектором початкового розподілу ймовірностей:

$$\lambda = \Big(\lambda_i\Big)_{i \in E} = \Big(P\left(U_1 = i\right)\Big)_{i \in E} \tag{0.4}$$

Скінченновимірні розподіли ланцюга Маркова повністю визначаються матрицею перехідних імовірностей P та вектором початкового розподілу ймовірностей λ, тобто $\forall t \geqslant 2 \quad \forall u_1, u_2, \ldots, u_t \in E$:

$$P\left(U_1 = u_1, U_2 = u_2, \ldots, U_{t-1} = u_{t-1}, U_t = u_t\right) = \lambda_{u_1} \cdot p_{u_1 u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_{t-1} u_t} \tag{0.5}$$

Відтак, імовірність переходу зі стану $i \in E$ в момент часу 1 до стану $j \in E$ в моменту часу T виражатиметься через відповідний компонент матриці P, піднесеної до степені T :

$$P\left(U_T = j \,|\, U_1 = i\right) = \left(P^T\right)_{ij} \tag{0.6}$$

Як наслідок, за формулою повної ймовірності безумовна імовірність перебування стану ланцюга в момент часу T матиме вигляд:

$$P\left(U_T = j\right) = \sum_{i \in E} P\left(U_1 = i\right) P\left(U_T = j \,|\, U_1 = i\right) = \sum_{i \in E} \lambda_i \left(P^T\right)_{ij} \tag{0.7}$$

Постановка задачі

Лабораторна робота стосується моделювання еволюції капіталу страхової компанії «Арсенал страхування» за допомогою ланцюгів Маркова. Мета роботи полягає у побудові ланцюга Маркова, стани якого відображають капітал компанії (у тисячах гривень).

Відтак, динаміка такого ланцюга ототожнюватиме еволюцію капіталу страхової компанії. Як підсумок дослідження слід обчислити імовірність банкрутства компанії за певний відрізок часу T, або, іншими словами, імовірність ланцюга Маркова потрапити у стан «0» за вказану кількість кроків.

Хід дослідження

1 Побудова ланцюга Маркова

Нехай $\{U_t\}_{t=\overline{1,T}}$ — ланцюг Маркова, заданий рівнянням еволюції капіталу страхової компанії:

$$U_{t+1} = U_t + (1-a) \cdot b - \xi \cdot b, \tag{1.1}$$

де a — задана частка премій, витрачених на обслуговування договорів страхування, валове значення премії b страхової компанії «Арсенал страхування»

$$b = 1\ 667 \text{ тис. грн.}, \tag{1.2}$$

значення капіталу U_t в початковий момент часу складає

$$U_1 = 576 \text{ тис. грн.}, \tag{1.3}$$

а значення випадкової величини $\xi \in \Omega$ обирається щоразу навмання серед наявної історії рівнів виплат (Рис. 1):

$$\Omega = \{0.20, 0.29, 0.20, 0.21, 0.26, 0.31, 0.36, 0.42, 0.43\} \tag{1.4}$$

Множина станів $E = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$ ланцюга $\{U_t\}_{t=\overline{1,T}}$ відповідатиме значенням капіталу компанії у тисячах гривень, де згідно умов варіанту при $N = 13:$

$$M = 2U_1 + 100N = 2\ 452 \text{ тис. грн.} \tag{1.5}$$

Варто зауважити, що при використанні формули еволюції капіталу (1.1) слід зважати на такі обмеження — капітал компанії не може опускатися нижче нуля (стан «0» вважається дефолтом) чи перебувати вище значення M (надлишок вилучається з резервів, тобто, наприклад, виплачується у вигляді дивідендів). Крім того, капітал має бути виключно цілим числом.

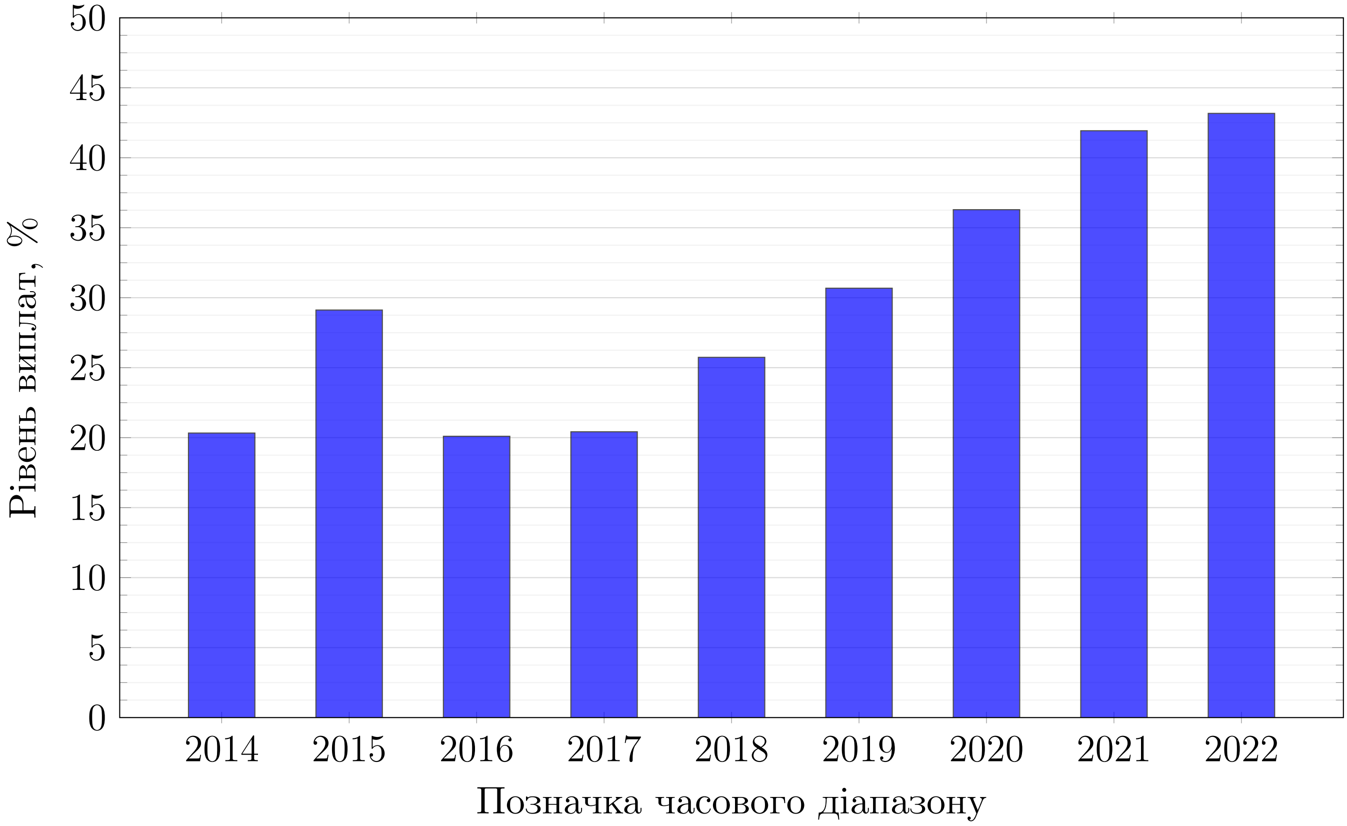

Рис. 1: Рівні виплат страхової компанії «Арсенал страхування»

Іншими словами, із використанням нотації округлення $[\,\cdot\,]$ до найближчого цілого числа, формалізація умов та обмежень стосовно еволюції капіталу компанії виражатиметься таким чином:

$$U_{t+1} = U_t + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] \tag{1.6}$$

Отже, згідно викладок у теоретичному розділі лабораторної роботи, ланцюг Маркова $\{U_t\}_{t=\overline{1,T}}$ визначатиметься матрицею перехідних імовірностей P та вектором початкового розподілу λ.

Оскільки ланцюг стартуватиме із визначеного стану U_1 (1.3), компоненти вектора $\lambda = \left(\lambda_i\right)_{i\in E}$ матимуть вигляд:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & i = U_1 \\ 0, & i \neq U_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Матриця перехідних імовірностей $P = \left(p_{ij}\right)_{i,j\in E}$ також будуватиметься згідно з певними логічними міркуваннями щодо динаміки капіталу компанії. Перш за все, імовірність виходу із дефолтного стану дорівнює нулю:

$$p_{ij} = P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right) = \begin{cases} 0, & i = 0,\ j = \overline{1,M} \\ 1, & i = 0,\ j = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Використовуючи нотацію індикаторної функції $\mathbb{1}\{\cdot\}$, яка довільній події ставить у відповідність число 0 або 1, розглянемо імовірності переходу зі стану, відмінного від дефолтного, у граничний стан, тобто $\forall i = \overline{1, M}$ та $j = M$:

$$\begin{aligned} p_{ij} = P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right) &= P\left(U_t + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] \geqslant M \,|\, U_t = i\right) = \\ &= P\left(i + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] \geqslant M\right) = \\ &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{|\Omega|} \mathbb{1}\left\{i + [(1-a)\cdot b] - [\xi_k \cdot b] \geqslant M\right\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Іншими словами, імовірність переходу в стан $j = M$ тим вища, чим ближче поточний стан до гарничного стану. Аналогічні міркування стосуються імовірності переходу зі стану, відмінного від дефолтного, у дефолтний стан, тобто при $\forall i = \overline{1, M}$ та $j = 0$:

$$\begin{aligned} p_{ij} = P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right) &= P\left(U_t + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] \leqslant 0 \,|\, U_t = i\right) = \\ &= P\left(i + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] \leqslant 0\right) = \\ &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{|\Omega|} \mathbb{1}\left\{i + [(1-a)\cdot b] - [\xi_k \cdot b] \leqslant 0\right\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Наостанок, для усіх інших станів $\forall i = \overline{1, M}$ та $j \neq 0, M$ імовірності переходу обчислюватимуться таким чином:

$$\begin{aligned} p_{ij} = P\left(U_{t+1} = j \,|\, U_t = i\right) &= P\left(U_t + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] = j \,|\, U_t = i\right) = \\ &= P\left(i + [(1-a)\cdot b] - [\xi \cdot b] = j\right) = \\ &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{|\Omega|} \mathbb{1}\left\{i + [(1-a)\cdot b] - [\xi_k \cdot b] = j\right\} \end{aligned} \tag{1.11}$$

2 Модельний приклад побудови ланцюга Маркова

Наведемо невеликий модельний приклад (поза контексту страхової компанії «Арсенал страхування») для демонстрації структури утвореної матриці перехідних імовірнотстей P та вектора початкового розподілу λ.

Припустимо, закон еволюції ланцюга Маркова задається у грошовому еквіваленті до тисяч гривень при $a = 0.1$, $b = 6$, $U_1 = 2$ та $M = 8$. Тоді множиною станів ланцюга буде $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а закон еволюції матиме вид:

$$U_{t+1} = U_t + 5 - [6\xi] \tag{2.1}$$

Відтак, вектор початкового розподілу дорівнюватиме

$$\lambda = (0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0) \tag{2.2}$$

В свою чергу, матриця перехідних імовірностей P для вказаного модельного прикладу (2.1) при історії рівнів капіталу з множини Ω (1.4) отримає форму:

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$
$i=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$i=1$	0	0	0	0.2	0.45	0.35	0	0	0
$i=2$	0	0	0	0	0.2	0.45	0.35	0	0
$i=3$	0	0	0	0	0	0.2	0.45	0.35	0
$i=4$	0	0	0	0	0	0	0.2	0.45	0.35
$i=5$	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.75
$i=6$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$i=7$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$i=8$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Таблиця 1: Матриця перехідних імовірностей P модельного прикладу (2.1)

3 Обчислення ймовірності розорення компанії

Повертаючись до даних по страховій компанії «Арсенал страхування», то, враховуючи валове значення премії b (1.2), задану частку премій $a = 0.1$, витрачених на обслуговування договорів страхування, значення капіталу в початковий момент часу U_1 (1.3), історію рівнів виплат ξ з множини Ω (1.4) та граничне значення капіталу M (1.5), отримуємо закон еволюції ланцюга Маркова

$$U_{t+1} = U_t + 1500 - [1667 \cdot \xi] \tag{3.1}$$

на множині станів $E = \{0, 1, 2, \ldots, 2452\}$. При цьому, згідно із формулою (0.7), імовірність банкрутства компанії за, наприклад, $T = 10$ років буде обчислюватися як імовірність потрапляння ланцюга Маркова в стан «0» за відповідну кількість кроків. Відтак, зважаючи на вигляд вектора початкового розподілу λ (1.7), шукана імовірність обчислюватиметься через побудовану матрицю перехідних імовірностей P :

$$P\left(U_{10} = 0\right) = \sum_{i \in E} P\left(U_1 = i\right) P\left(U_{10} = 0 \,|\, U_1 = i\right) = \left(P^{10}\right)_{U_1 0} \tag{3.2}$$

У Табл. 3 продемонстровані обчислення імовірності банкрутства при різних значеннях частки премії a.

Частка премій	Роки T роботи компанії	Імовірність банкрутства
$a = 0.1$	10	0.0
	50	
	100	
$a = 0.3$	10	0.0
	50	
	100	
$a = 0.5$	10	0.0
	50	
	100	
$a = 0.7$	10	0.14
	50	0.45
	100	0.56
$a = 0.9$	10	1.0
	50	
	100	

Таблиця 2: Імовірності банкрутства для компанії «Арсенал страхування»

Програмна реалізація

В ході дослідження було використано засоби мови програмування Python версії 3.8.10 в інтегрованому середовищі розробки Visual Studio Code версії 1.78.2. Нижче наведені тексти ключових інструментальних програм.

Лістинг 1: Підключення бібліотек

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Лістинг 2: Ініціалізація та візуалізація параметрів

```
N = 13
b = 1667 # insurance premium at the initial time (2022)
u1 = 576 # initial (2022) capital of the company

years = np.arange(2014,2023,1)
annual_payout_levels = np.array([20.33, 29.12, 20.1, 20.42, 25.74, 30.68, 36.29,
    41.93, 43.17])/100

plt.title("Annual payout levels")
plt.ylabel("Payout level")
plt.xlabel("Year")
plt.plot(years, annual_payout_levels, color="blue")
plt.plot(years, annual_payout_levels, "o", color="blue")
plt.show()
```

Лістинг 3: Імплементація побудови матриці перехідних імовірнсотей P

```
def generate_matrix_P(M, a, b, annual_payout_levels):
    P = np.zeros((M+1,M+1))

    P[0][0] = 1.0
    for i in range(1,len(P)):
        for j in range(len(P[0])):
            if j == M:
                P[i][j] = len(np.where(
                    i + round(b*(1-a)) - (b*annual_payout_levels).round() >= M
                    )[0]) / len(annual_payout_levels)
            elif j == 0:
                P[i][j] = len(np.where(
                    i + round(b*(1-a)) - (b*annual_payout_levels).round() <= 0
                    )[0]) / len(annual_payout_levels)
            else:
                P[i][j] = len(np.where(
                    i + round(b*(1-a)) - (b*annual_payout_levels).round() == j
                    )[0]) / len(annual_payout_levels)

    return P
```

Лістинг 4: Зведення матриці до степеня T

```python
def P_to_power_T(P, T):
    return np.linalg.matrix_power(P, T)
```

Лістинг 5: Обчислення імовірностей банкрутства

```python
a = 0.7 # share of premiums spent on servicing insurance contracts
M = 2452

P = generate_matrix_P(M, a, b, annual_payout_levels)

for T in range(10, 101, 10):
    P_to_power = P_to_power_T(P, T)
    print("Default probability at time T =", T, round(P_to_power[u1][0],2))
```