Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет прикладної математики

Лабораторна робота №1

Моделювання газових трубопровідних систем

«Моделювання складних систем»

Роботу виконав:
Студент 5 курсу, групи КМ-31мн,
Цибульник Антон Владиславович

Роботу приймав:
Професор кафедри ПМА,
Ориняк Ігор Володимирович

2023

Зміст

§1 Постановка задачі

У лабораторній роботі розглядається моделювання газових трубопровідних систем. Газопроводи проєктуються шляхом виокремлення ділянок зі сталою заданою температурою, а відтак кожна точка s системи описується параметром тиску $p(s)$ та масового потоку $Q(s)$.

Основні рівняння для тисків та потоків у припущенні заданої постійної температури на ділянці трубопровода записуються таким чином:

$$\frac{dQ(s)}{ds} = 0, \tag{1.1}$$

$$p(s)\frac{dp(s)}{ds} = -\mu Q^2(s), \tag{1.2}$$

де коефіцієнт μ прямо пропорційній заданій температурі на ділянці T та обернено пропорційний опору ділянки трубопровода R :

$$\mu \propto \frac{T}{R} \tag{1.3}$$

Розв'язками диференціальних рівнянь (1.1)-(1.2) слугують вирази

$$Q(s) = const \tag{1.4}$$

$$p^2(s) + 2\mu Q^2(s)s = const \tag{1.5}$$

Відтак, для газопроводів виникає додаткова проблема нелінійності основного розв'язку. Однак систему можна лінеаризувати. Перш за все, проблема нелінійності тиску $p(s)$ у рівнянні (1.5) вирішується шляхом заміни змінних — рівняння розв'язується не відносно значення тиску, а відносно квадрату тиску:

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}) = p^2(s) \tag{1.6}$$

По друге, потік $Q^2(s)$ представимо як суму якогось основного припущення про поточне значення потоку (пробне/базове значення) та малої поправки до нього:

$$Q(s) = Q_{trial} + Q_\Delta(s), \tag{1.7}$$

відтак

$$Q^2(s) = \big(Q_{trial} + Q_\Delta(s)\big)^2 = Q_{trial}^2 + 2Q_{trial}Q_\Delta(s) + Q_\Delta^2(s), \tag{1.8}$$

де значення $Q_\Delta^2(s)$ відкидається в силу своєї мализни:

$$Q^2(s) = \big(Q_{trial} + Q_\Delta(s)\big)^2 \approx Q_{trial}^2 + 2Q_{trial}Q_\Delta(s) \tag{1.9}$$

Отже, вираз (1.9) задає лінеаризований вигляд потоку відносно поправочного значення $Q_\Delta(s)$. Таким чином, поклавши деяке початкове (базове) значення потоку, маємо змогу знайти розподіл потоків та тисків у газопровідній системі.

Ітеруючи процес, коригування базового значення потоку на ітерації $i+1$ на основі знайденого поправочного значення на ітерації i відбуватиметься з кроком η таким чином:

$$Q_{trial}^{i+1} = Q_{trial}^{i} + \eta Q_{\Delta}^{i}(s) \tag{1.10}$$

§2 Метод початкових параметрів

Ідея та опис методу

Метод початкових параметрів (МПП) розглядає довільну систему як такі сутності: елементи; межі між елементами (кінці, вузли), де відбувається спряження дотичних елементів; границі всієї системи. При цьому для системи вводиться поняття потужності N — кількості параметрів, які визначають стан системи в кожній його точці s. Виокремлення окреслених вище сутностей системи відбувається поетапно разом із такими супутніми процедурами:

1. Система дробиться на декілька окремих ділянок (елементів), і кожна така ділянка нумерується відповідним чином. Після цього визначаються вхідні та вихідні краї кожного елемента, а також вузли — точки одночасного дотику декількох елементів. Іншими словами, відбувається організація обходу по елементах системи;

2. Нумерація невідомих змінних (параметрів) на кожному із двох країв кожного елемента системи;

3. Складання так званих рівнянь зв'язку для кожного елемента. Ці рівняння зв'язують параметри в кінцевій точці елемента зі значеннями в точці початку елемента. Рівняння зв'язку випливають з фізичних чи геометричних властивостей кожного елемента та системи в цілому;

4. Складання рівнянь спряження в кожному вузлі системи;

5. Складання рівнянь, що відповідають граничним умовам системи.

Для системи потужності N, що складається з K елементів, кількість невідомих параметрів системи складає $2KN$, адже для кожного елемента визначено невідомі змінні (параметри) на його початку та в його кінці. Відповідно, кількість складених рівнянь згідно з методом початкових параметрів має бути $2KN$.

Урахування особливостей системи

У контексті задачі моделювання газових трубопроводів, система характеризуватиметься $N = 2$ параметрами: тиском та потоком. Рівняння зв'язку задаватимуться диференціальними співвідношеннями (1.4)-(1.5) з урахуванням лінеаризованих виразів для тиску (1.6) та потоку (1.9).

Рівняння спряження сусідніх елементів складатимуться з міркувань неперервності тисків у точці дотику. У вузлах дотику M елементів, окрім рівності тисків, буде справедливими силове рівняння балансу потоків згідно з визначеними на першому етапі МПП знаками обходу:

$$\sum_{j=1}^{M} Q_j^{in}(s) = \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out}(s) \tag{2.1}$$

§3 Пошук розв'язку системи №1

Деталізація поставленої задачі

Нехай газопровідна система задана таким чином: задано рівносторонній трикутник з вершинами A, B та C. Довжина кожної сторони $L = 5\,\text{м}$. Усі вершини з'єднані трубами. У точці A тиск $p_A = 20\,\text{Па}$, в точці B тиск $p_B = 6\,\text{Па}$, в точці C тиск $p_C = 10\,\text{Па}$. Опір кожної сторони складає $R = 1\,\text{у.о.}$ ($\mu = 1\,\text{у.о.}$). Слід знайти розподіл потоків $Q(s)$ на кожній трубі системи.

Виконаємо перший крок методу початкових параметрів — реалізуємо організацію обходу по елементах системи (Рис. 1).

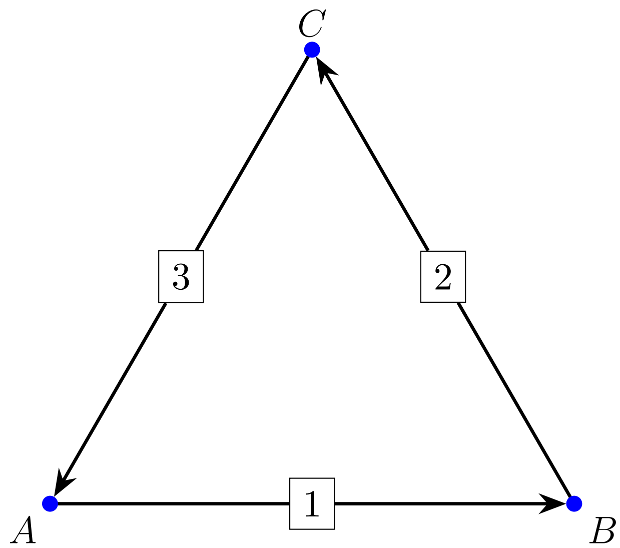

Рис. 1: Організація обходу по елементах системи №1

Отже, трубопровідна система потужності $N = 2$ розділена на $K = 3$ елементи та, відповідно, три точки спряження. Тож наступним етапом проведемо нумерацію $2KN = 12$ змінних (параметрів системи) на початку та в кінці кожного елемента (Табл. 1).

	Елемент «1»		Елемент «2»		Елемент «3»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$	x_1	x_3	x_5	x_7	x_9	x_{11}
$Q_\Delta(s)$	x_2	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}
Q^i_{trial}	α^i_2	α^i_4	α^i_6	α^i_8	α^i_{10}	α^i_{12}

Таблиця 1: Нумерація параметрів системи №1

Далі почергово складемо $2KN = 12$ рівнянь для введених змінних. Почнемо з рівнянь зв'язку: початок довільного елемента покладемо в точці s_0, а набір базових значень потоків на ітерації i вважатимемо заданим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{s}) \\ Q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\,\mu\, Q^i_{trial}(s_0)\, s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{s_0}) \\ Q_\Delta(s_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -|Q^i_{trial}(s_0)|\, Q^i_{trial}(s_0)\, s \\ Q^i_{trial}(s_0) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Рівняння спряження гарантуватимуть неперервність тисків у точці дотику сусідніх елементів. На додачу до граничних умов задачі, остаточний перелік рівнянь системи наведено у Табл. 2, Табл. 3 та Табл. 4.

Рівняння зв'язку для елемента «1»	Рівняння спряження елементів «1» – «3»	Гранична умова
$x_3 = x_1 - 2\,\mu\,\lvert\alpha^i_2\rvert\, x_2\, L - \lvert\alpha^i_2\rvert\, \alpha^i_2\, L$ $\alpha^i_4 + x_4 = \alpha^i_2 + x_2$	$x_1 = x_{11}$	$x_1 = 400$

Таблиця 2: Перший блок рівнянь системи №1

Рівняння зв'язку для елемента «2»	Рівняння спряження елементів «1» – «2»	Гранична умова
$x_7 = x_5 - 2\,\mu\,\lvert\alpha^i_6\rvert\, x_6\, L - \lvert\alpha^i_6\rvert\, \alpha^i_6\, L$ $\alpha^i_8 + x_8 = \alpha^i_6 + x_6$	$x_5 = x_3$	$x_5 = 36$

Таблиця 3: Другий блок рівнянь системи №1

Рівняння зв'язку для елемента «3»	Рівняння спряження елементів «2» – «3»	Гранична умова
$x_{11} = x_9 - 2\,\mu\,\lvert\alpha^i_{10}\rvert\,x_{10}\,L - \lvert\alpha^i_{10}\rvert\,\alpha^i_{10}\,L$ $\alpha^i_{12} + x_{12} = \alpha^i_{10} + x_{10}$	$x_9 = x_7$	$x_9 = 100$

Таблиця 4: Третій блок рівнянь системи №1

Візуалізація отриманих результатів

Задавши початковий набір базових значень потоків на ітерації $i = 0$ рівними

$$\alpha^0_{2j} = 5,\ j = \overline{1,6}, \tag{3.2}$$

проведемо 1000 ітерацій пошуку розв'язку системи рівнянь (наведеної у Табл. 2 – Табл. 4) для уточнення значення потоку згідно з формулою (1.10), при цьому крок поправки задамо рівним $\eta = 0.01$. Значення поправочних потоків для кожного з елементів наведено на рисунках нижче:

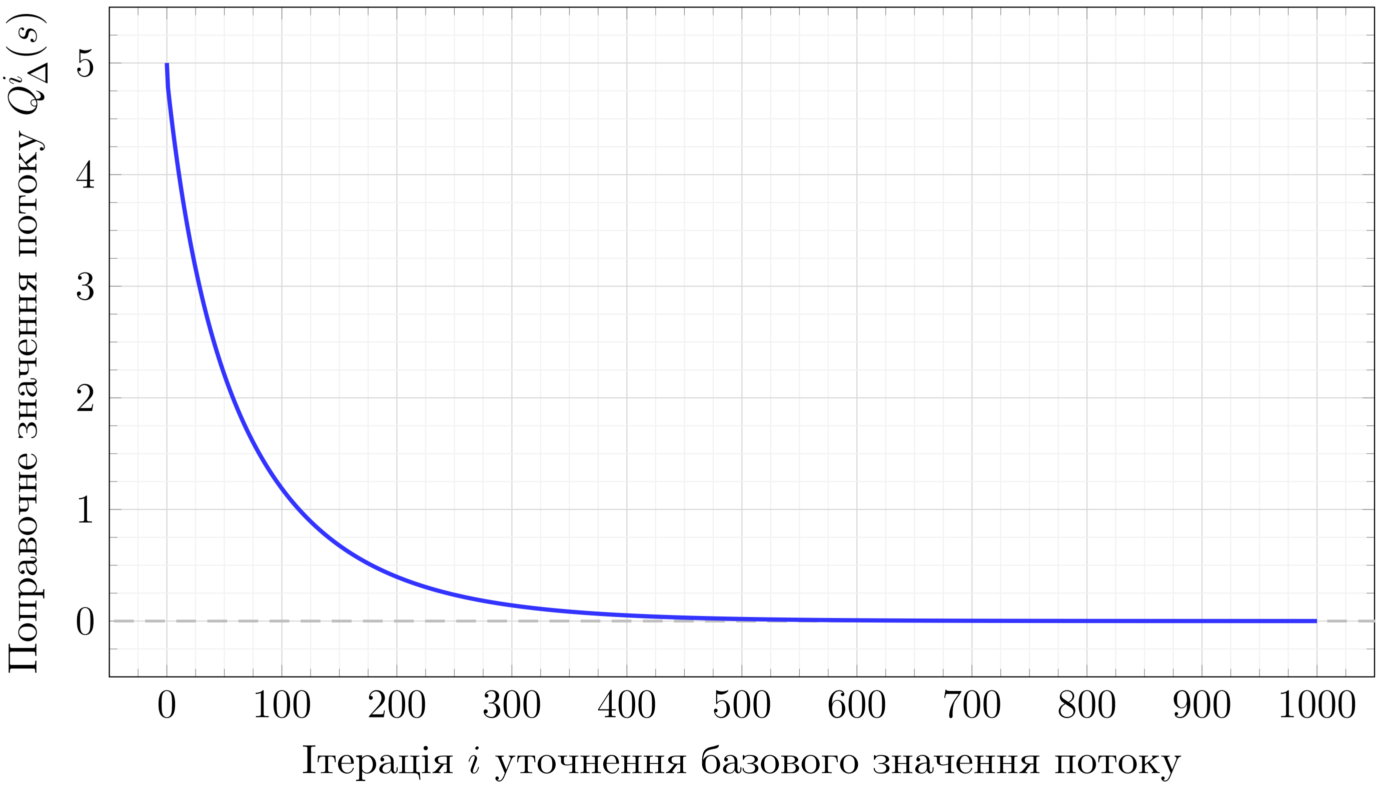

Рис. 2: Поправочне значення потоку на елементі «1» від ітерації до ітерації

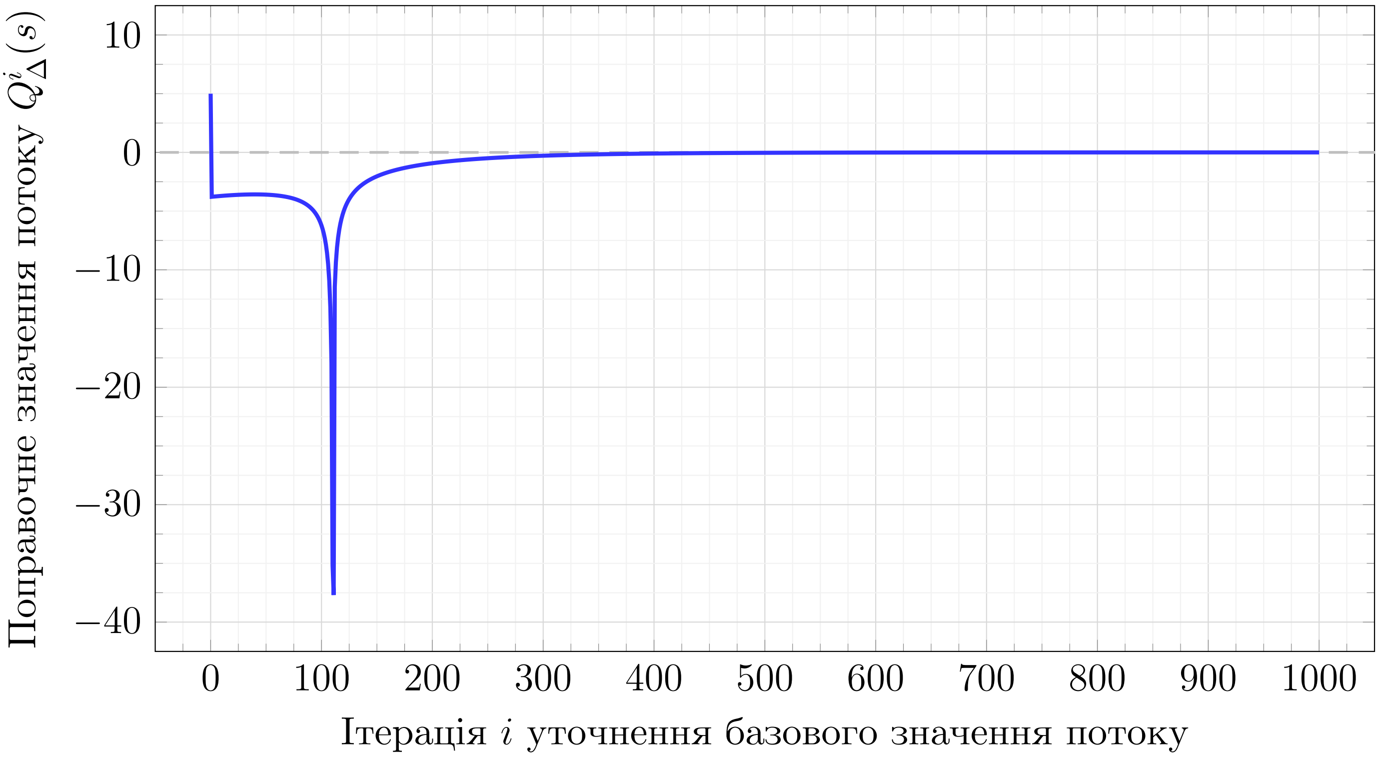

Рис. 3: Поправочне значення потоку на елементі «2» від ітерації до ітерації

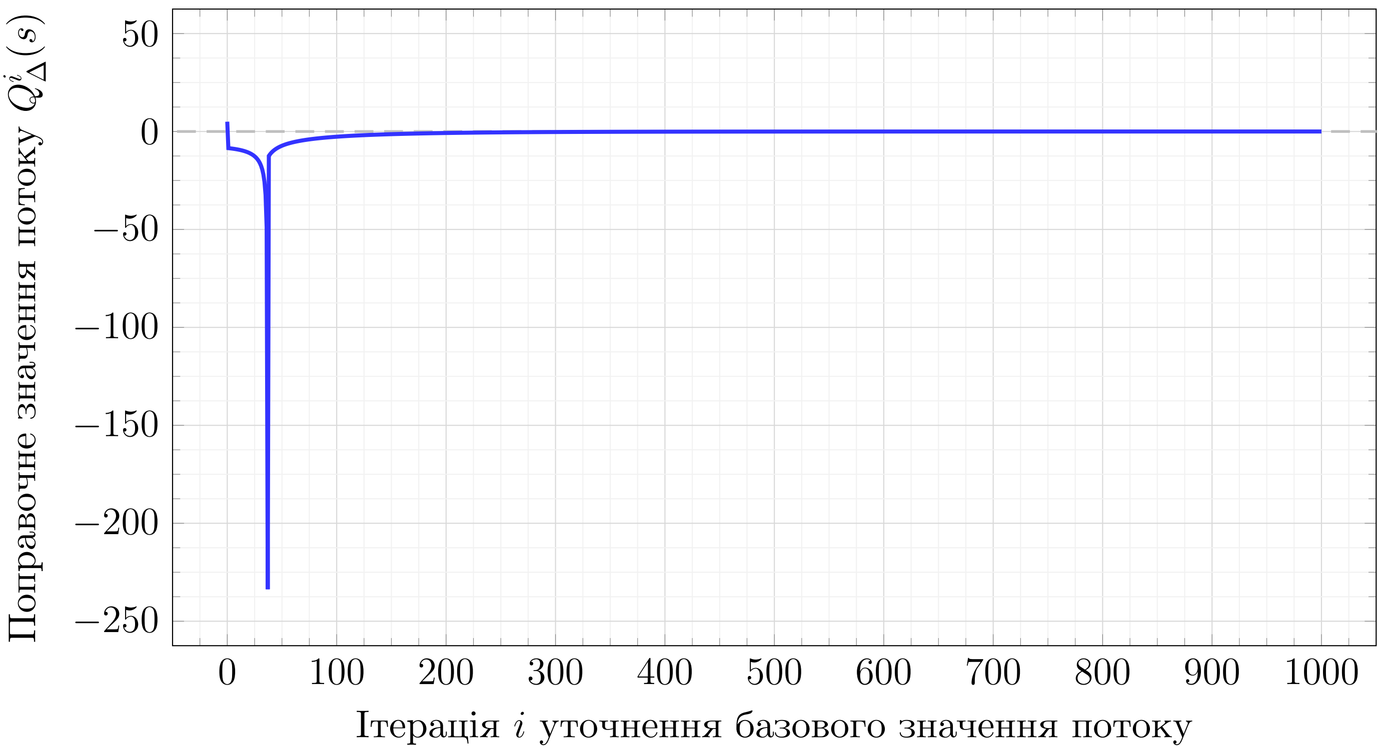

Рис. 4: Поправочне значення потоку на елементі «3» від ітерації до ітерації

Бачимо, що поправочні значення збігаються до нуля. В результаті, після 1000 ітерацій отримуємо такий розподіл тисків та потоків системи:

	Елемент «1»		Елемент «2»		Елемент «3»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$	400	36	36	100	100	400
$Q_\Delta(s)$	0.00012		-0.00023		-0.00022	
Q_{trial}^{1000}	8.53217		-3.57748		-7.74575	

Таблиця 5: Значення шуканих параметрів системи №1

Від'ємні значення потоків сигналізують про те, що на Рис. 1 на відповідній ділянці трубопроводу слід обрати протилежний напрямок обходу. І справді, це відповідає фізичній логіці системи — наприклад, від точки найбільшого тиску A тиск саме відтікатиме від неї по обидвох трубам тощо. Крім того, переконуємося, що згідно з отриманими результатами рівняння зв'язку для тисків (Табл. 2 – Табл. 4) виконуються з точністю до 10^{-4} :

$$36 = 400 - 2 \cdot 1 \cdot 8.53217 \cdot 0.00012 \cdot 5 - 8.53217 \cdot 8.53217 \cdot 5 \tag{3.3}$$

$$100 = 36 + 2 \cdot 1 \cdot 3.57748 \cdot 0.00023 \cdot 5 + 3.57748 \cdot 3.57748 \cdot 5 \tag{3.4}$$

$$400 = 100 + 2 \cdot 1 \cdot 7.74575 \cdot 0.00022 \cdot 5 + 7.74575 \cdot 7.74575 \cdot 5 \tag{3.5}$$

§4 Пошук розв'язку системи №2

Деталізація поставленої задачі

Модифікуємо попередню газопровідну систему таким чином: нехай в центрі заданого трикутника поставили точку D_0, яка найкоротшим шляхом з'єднана з кожною стороною. Опір новоутворених з'єднань $R = 3$ у.о. ($\mu = 1/3$ у.о.). Слід знайти оновлений розподіл потоків $Q(s)$ на кожній трубі системи, а також тиск в точці D_0.

Аналогічним чином виконаємо перший крок методу початкових параметрів — реалізуємо організацію обходу по елементах системи (Рис. 5). Таким чином, розділимо трубопровідну систему потужності $N = 2$ на $K = 9$ елементів та чотири вузли. Наступним етапом проведемо нумерацію $2KN = 36$ змінних (параметрів системи) на початку та в кінці кожного елемента (Табл. 6 – Табл. 8).

Відповідно, для отримання чисельних розв'язків слід скласти $2KN = 36$ рівнянь: 18 рівнянь зв'язку будуть складені аналогічним чином згідно виразу (3.1) для кожного з дев'яти елементів системи (так само, як в Табл. 2 – Табл. 4).

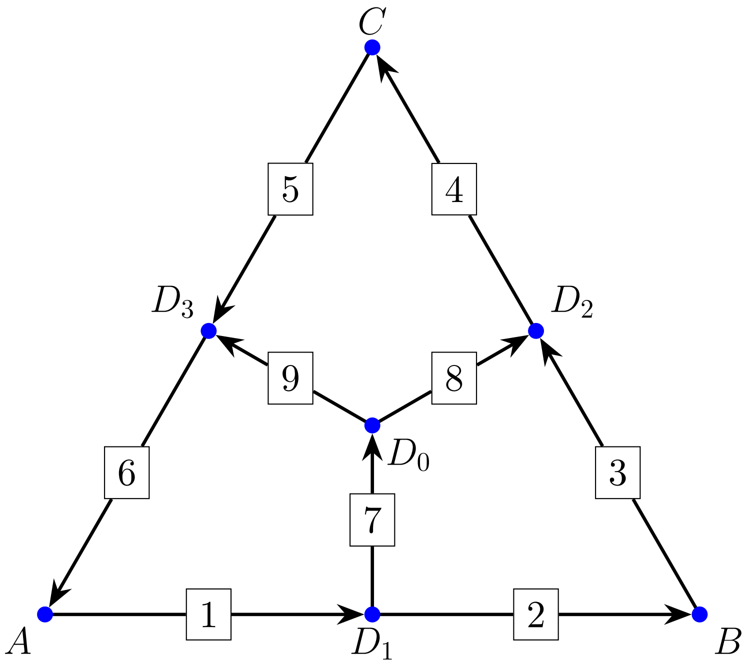

Рис. 5: Організація обходу по елементах системи №2

На додачу до ще 3-ох рівнянь спряження тисків в точках A, B, C та 3-ох граничних умов для цих точок, система включатиме 12 рівнянь вузлів в точках D_0, D_1, D_2 й D_3 згідно з міркуваннями неперервності тиску та збалансованості потоків (2.1).

	Елемент «1»		Елемент «2»		Елемент «3»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$ $Q_\Delta(s)$	x_1 x_2	x_3 x_4	x_5 x_6	x_7 x_8	x_9 x_{10}	x_{11} x_{12}
Q^i_{trial}	α^i_2	α^i_4	α^i_6	α^i_8	α^i_{10}	α^i_{12}

Таблиця 6: Нумерація першого блоку параметрів системи №2

	Елемент «4»		Елемент «5»		Елемент «6»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$ $Q_\Delta(s)$	x_{13} x_{14}	x_{15} x_{16}	x_{17} x_{18}	x_{19} x_{20}	x_{21} x_{22}	x_{23} x_{24}
Q^i_{trial}	α^i_{14}	α^i_{16}	α^i_{18}	α^i_{20}	α^i_{22}	α^i_{24}

Таблиця 7: Нумерація другого блоку параметрів системи №2

	Елемент «7»		Елемент «8»		Елемент «9»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$	x_{25}	x_{27}	x_{29}	x_{31}	x_{33}	x_{35}
$Q_\Delta(s)$	x_{26}	x_{28}	x_{30}	x_{32}	x_{34}	x_{36}
Q^i_{trial}	α^i_{26}	α^i_{28}	α^i_{30}	α^i_{32}	α^i_{34}	α^i_{36}

Таблиця 8: Нумерація третього блоку параметрів системи №2

Таким чином, рівняння у вузлі точки D_0 матимуть вид:

$$x_{27} = x_{29}, \tag{4.1}$$

$$x_{27} = x_{33}, \tag{4.2}$$

$$\alpha^i_{28} + x_{28} = \alpha^i_{34} + x_{34} + \alpha^i_{30} + x_{30}, \tag{4.3}$$

рівняння у вузлі точки D_1 :

$$x_3 = x_5, \tag{4.4}$$

$$x_3 = x_{25}, \tag{4.5}$$

$$\alpha^i_4 + x_4 = \alpha^i_{26} + x_{26} + \alpha^i_6 + x_6, \tag{4.6}$$

рівняння у вузлі точки D_2 :

$$x_{11} = x_{13}, \tag{4.7}$$

$$x_{11} = x_{31}, \tag{4.8}$$

$$\alpha^i_{12} + x_{12} + \alpha^i_{32} + x_{32} = \alpha^i_{14} + x_{14}, \tag{4.9}$$

та рівняння у вузлі точки D_3 :

$$x_{19} = x_{21} \tag{4.10}$$

$$x_{19} = x_{35} \tag{4.11}$$

$$\alpha^i_{36} + x_{36} + \alpha^i_{20} + x_{20} = \alpha^i_{22} + x_{22} \tag{4.12}$$

Візуалізація отриманих результатів

Як і раніше, задамо набір базових значень потоків на ітерації $i = 0$:

$$\alpha^0_{2j} = 5,\ \ j = \overline{1, 18} \tag{4.13}$$

Аналогічним чином проведемо 1000 ітерацій пошуку розв'язку системи рівнянь для уточнення значення потоку згідно з формулою (1.10) при кроці $\eta = 0.01$. Значення поправочних потоків вибірково продемонстровані на Рис. 6 – Рис. 8.

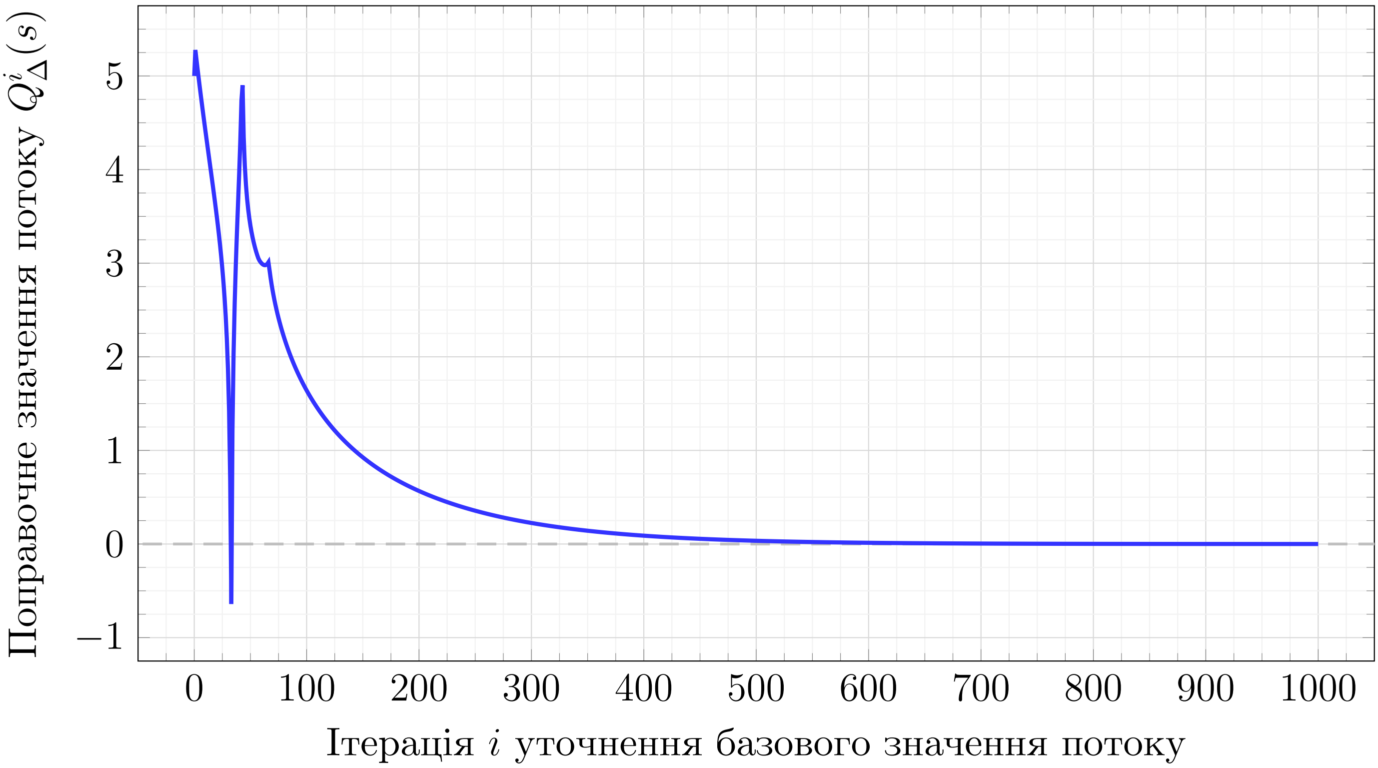

Рис. 6: Поправочне значення потоку на елементі «1» від ітерації до ітерації

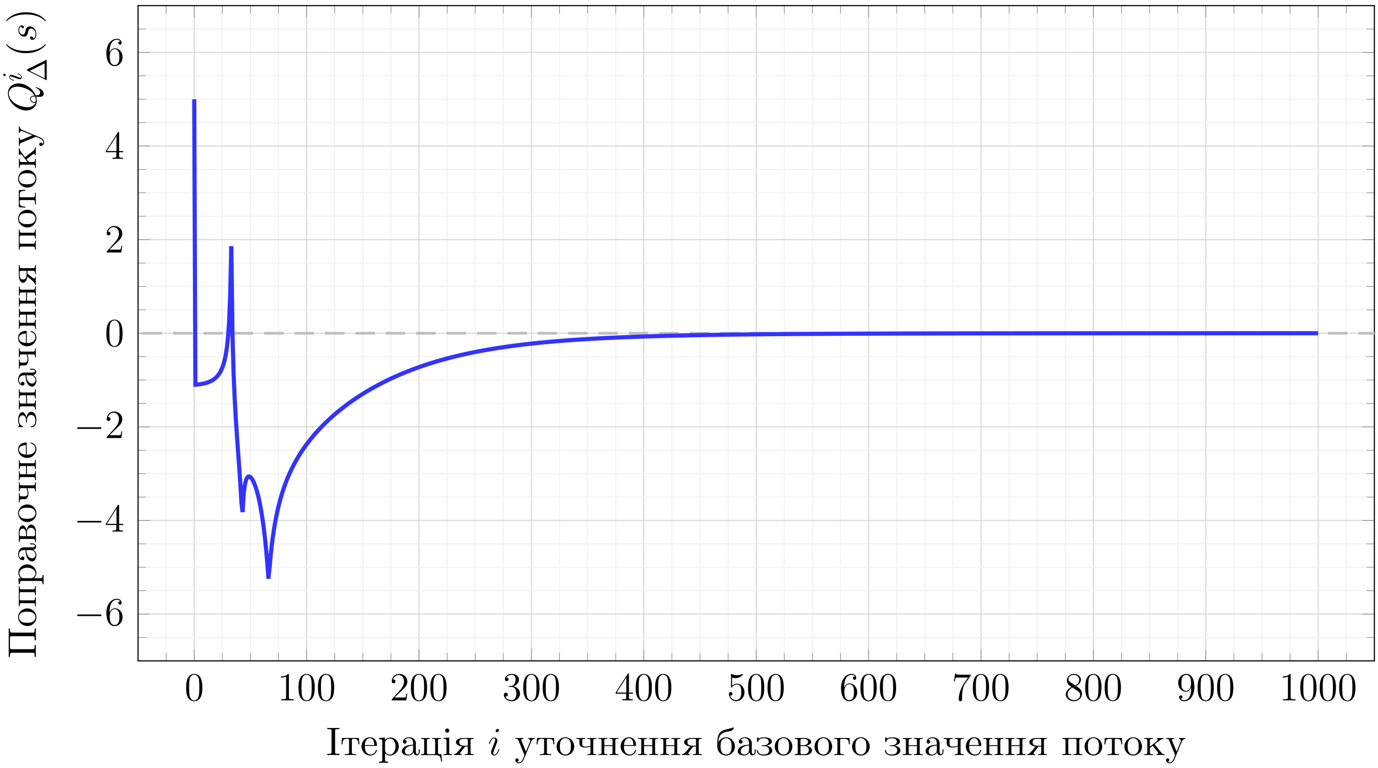

Рис. 7: Поправочне значення потоку на елементі «4» від ітерації до ітерації

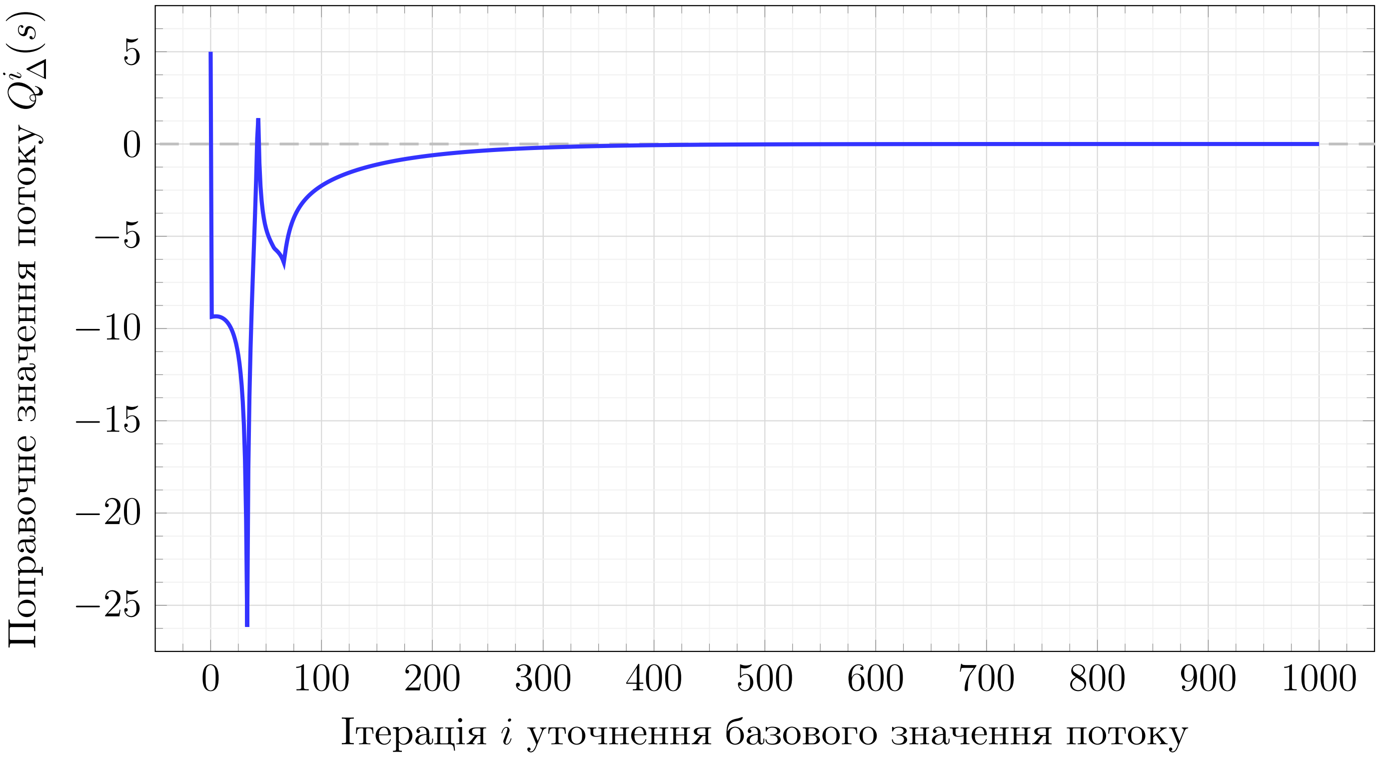

Рис. 8: Поправочне значення потоку на елементі «9» від ітерації до ітерації

Аналогічний характер збіжності до нуля властивий і для усіх інших елементів системи №2. В результаті, після 1000 ітерацій отримуємо розподіл тисків та потоків системи, зазначений на Табл. 9 – Табл. 11.

	Елемент «1»		Елемент «2»		Елемент «3»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$	400	170.91	170.91	36	36	100.94
$Q_\Delta(s)$	0.00026		−0.00005		−0.00031	
Q_{trial}^{1000}	9.57232		7.34619		−5.09630	

Таблиця 9: Значення першого блоку параметрів системи №2

Від'ємні значення потоків, як і у випадку системи №1, сигналізують про те, що на Рис. 5 на відповідній ділянці трубопроводу слід обрати протилежний напрямок обходу.

	Елемент «4»		Елемент «5»		Елемент «6»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$	100.94	100	100	184.28	184.28	400
$Q_\Delta(s)$	-0.00014		-0.00033		-0.00019	
Q^{1000}_{trial}	0.61282		-5.80592		-9.28892	

Таблиця 10: Значення другого блоку параметрів системи №2

	Елемент «7»		Елемент «8»		Елемент «9»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$\mathbf{p}(\mathbf{s})$	170.91	161.68	161.68	100.94	161.68	184.28
$Q_\Delta(s)$	0.00009		-0.00004		-0.00008	
Q^{1000}_{trial}	2.22634		5.70934		-3.48278	

Таблиця 11: Значення третього блоку параметрів системи №2

Згідно з отриманими результатами рівняння зв'язку, рівняння спряження та рівняння вузлів виконуються з точністю до 10^{-4}. Зокрема, наведемо справедливість рівнянь для потоків у вузлах D_0 та D_1 :

$$0.00009 + 2.22634 = (-0.00004 + 5.70934) + (-0.00008 - 3.48278), \tag{4.14}$$
$$0.00026 + 9.57232 = (0.00009 + 2.22634) + (-0.00005 + 7.34619), \tag{4.15}$$

та аналогічним чином у вузлах D_2 та D_3 :

$$(-0.00031 - 5.09630) + (-0.00004 + 5.70934) = (-0.00014 + 0.61282) \tag{4.16}$$
$$(-0.00033 - 5.80592) + (-0.00008 - 3.48278) = (-0.00019 - 9.28892) \tag{4.17}$$

Наостанок, порівняємо розподіли тисків та потоків для випадку системи №1 (Рис. 1) та для випадку системи №2 (Рис. 5). Наприклад, для порівняльного аналізу обчислимо масовий потік, спрямований у точку B : значення потоку у початковій конфігурації трубопроводів є сумою потоків на відрізках AB та CB і складає 12.10965, в той час як після модифікацій газопроводу масовий потік у точці B є сумою потоків на проміжках D_1B та D_2B й дорівнює 12.44249.

Іншими словами, різниця складає $\delta_B = 0.33284$ на користь системи №2. Отже, модифікації трубопроводу призвели до більш оптимального розподілу тисків та потоків у системі.

§5 Висновки

У лабораторній роботі було розглянуто моделювання газової трубопровідної системи, при цьому кожна точка s системи описувалася параметром тиску $p(s)$ та масового потоку $Q(s)$. Для пошуку аналітичного розв'язку системи було використано метод початкових параметрів. Таким чином, як для варіанта системи №1 на Рис. 1, так і для варіанта системи №2 на Рис. 5 газопровідна система структурно була розділена на елементи, точки спряження та відповідні вузли.

Диференціальні рівняння, які описують фізику системи, мали особливість — нелінійність розв'язку відносно параметрів системи. Тим не менш, вдалося застосувати дві модивікації, які дозволили лінеаризувати розв'язок, а саме: розв'язування рівнянь не відносно значення тиску, а відносно значення квадрату тиску; розклад квадрату потоку на суму складових так званого базового та поправочного значення з подальшою ітеративною процедурою уточнення.

В результаті вдалося показати, що ітеративна процедура демонструє збіжність поправочного значення до нуля. Отже, отримані розподіли тиску та потоків систем із високою точністю коректно відображають моделі газових трубопровідних систем, розглянутих у цій лабораторній роботі.

Крім того, було виявлено, що модифікації системи №1 до вигляду системи №2 шляхом додавання додаткового центрального вузла оптимізували розподіли тисків та потоків, що вказує про інженерну доцільність такого роду видозміни.

§6 Програмна реалізація

В ході дослідження було використано засоби мови програмування Python версії 3.8.10 в інтегрованому середовищі розробки Visual Studio Code версії 1.78.2. Нижче наведені тексти ключових інструментальних програм.

Лістинг 1: Підключення бібліотек

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Лістинг 2: Основний функціональний блок методу початкових параметрів

```
def transition_matrix_method(D,K,C,triangle):
    A = np.zeros((D,D))
    B = np.zeros((D))

    if triangle == "ABC":
        L, alpha = 5, 1

        # field equations AB
        A[0][2], A[0][0], A[0][1], B[0] = 1, -1, 2*alpha*abs(C[1])*L,
            -abs(C[1])*C[1]*L
        A[1][3], A[1][1], B[1] = 1, -1, C[1] - C[3]

        # field equations BC
        A[2][6], A[2][4], A[2][5], B[2] = 1, -1, 2*alpha*abs(C[5])*L,
            -abs(C[5])*C[5]*L
        A[3][7], A[3][5], B[3] = 1, -1, C[5] - C[7]

        # field equations CA
        A[4][10], A[4][8], A[4][9], B[4] = 1, -1, 2*alpha*abs(C[9])*L,
            -abs(C[9])*C[9]*L
        A[5][11], A[5][9], B[5] = 1, -1, C[9] - C[11]

        # edge equations
        A[6][0], B[6] = 1, 20*20
        A[7][4], B[7] = 1, 6*6
        A[8][8], B[8] = 1, 10*10

        # transition equations A
        A[9][10], A[9][0] = 1, -1

        # transition equations B
        A[10][4], A[10][2] = 1, -1

        # transition equations C
        A[11][8], A[11][6] = 1, -1
```

```
    if triangle == "ABCD":
        # field equations
        for i,j in zip(range(0,2*K-1,2),range(0,D,4)):
            if i < 12:
                alpha, L = 1, 2.5
                A[i][2+j], A[i][0+j], A[i][1+j], B[i] = 1, -1, 2*alpha*abs(C[1+j])*L,
                    -abs(C[1+j])*C[1+j]*L
                A[i+1][3+j], A[i+1][1+j], B[i+1] = 1, -1, C[1+j] - C[3+j]
            else:
                alpha, L = 1/3, 5*np.sqrt(3)/6
                A[i][2+j], A[i][0+j], A[i][1+j], B[i] = 1, -1, 2*alpha*abs(C[1+j])*L,
                    -abs(C[1+j])*C[1+j]*L
                A[i+1][3+j], A[i+1][1+j], B[i+1] = 1, -1, C[1+j] - C[3+j]

        # edge equations
        A[18][0], B[18] = 1, 20*20
        A[19][8], B[19] = 1, 6*6
        A[20][16], B[20] = 1, 10*10

        # transition equations A
        A[21][22], A[21][0] = 1, -1

        # transition equations B
        A[22][8], A[22][6] = 1, -1

        # transition equations C
        A[23][16], A[23][14] = 1, -1

        # node equations D0
        A[24][32], A[24][28] = 1, -1
        A[25][32], A[25][26] = 1, -1
        A[26][27], A[26][33], A[26][29], B[26] = 1, -1, -1, C[29] + C[33] - C[27]

        # node equations D1
        A[27][20], A[27][18] = 1, -1
        A[28][20], A[28][34] = 1, -1
        A[29][35], A[29][19], A[29][21], B[29] = 1, 1, -1, C[21] - C[19] - C[35]

        # node equations D2
        A[30][12], A[30][10] = 1, -1
        A[31][12], A[31][30] = 1, -1
        A[32][11], A[32][31], A[32][13], B[32] = 1, 1, -1, C[13] - C[31] - C[11]

        # node equations D2
        A[33][24], A[33][2] = 1, -1
        A[34][24], A[34][4] = 1, -1
        A[35][3], A[35][25], A[35][5], B[35] = 1, -1, -1, C[5] + C[25] - C[3]

    A_inv = np.linalg.inv(A)
    X = np.dot(A_inv,B)
    return X
```

Лістинг 3: Ітеративна процедура та візуалізація результатів для системи №1

```
triangle = "ABC"
iterations = 1000
eta = 0.01

N = 2
K = 3
D = 2*N*K

C = np.zeros((D))
for i in range(1,len(C),2):
    C[i] = 5

Qs = [[C[i] for i in range(len(C)) if i % (2*N) == 1]]

for cycle in range(iterations):
    X = transition_matrix_method(D,K,C,triangle)
    Qs.append([X[i] for i in range(len(X)) if i % (2*N) == 1])
    for i in range(1,len(C),2):
        C[i] = C[i] + eta*X[i]

for j in range(len(Qs[0])):
    plt.plot([Qs[i][j] for i in range(len(Qs))], marker="o", color="blue")
    plt.show()
```

Лістинг 4: Ітеративна процедура та візуалізація результатів для системи №2

```
triangle = "ABCD"
iterations = 1000
eta = 0.01

N = 2
K = 9
D = 2*N*K

C = np.zeros((D))
for i in range(1,len(C),2):
    C[i] = 5

Qs = [[C[i] for i in range(len(C)) if i % (2*N) == 1]]

for cycle in range(iterations):
    X = transition_matrix_method(D,K,C,triangle)
    Qs.append([X[i] for i in range(len(X)) if i % (2*N) == 1])
    for i in range(1,len(C),2):
        C[i] = C[i] + eta*X[i]

for j in range(len(Qs[0])):
    plt.plot([Qs[i][j] for i in range(len(Qs))], marker="o", color="blue")
    plt.show()
```