Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет прикладної математики

Лабораторна робота №1

Аналіз та обробка експертних даних

«Інтелектуальний аналіз даних»

Роботу виконав:
Студент 5 курсу, групи КМ-31мн,
Цибульник Антон Владиславович

Роботу приймав:
Доцент кафедри ПМА,
Андрійчук Олег Валентинович

2023

Зміст

Постановка задачі

Нехай групі з M експертів надано завдання виконати порівняльний аналіз N альтернатив. На основі отриманих матриць мультиплікативних парних порівнянь цієї групи експертів у лабораторній роботі слід провести агрегацію відповідних матриць та реалізувати процедуру зворотного зв'язку з використанням спектрального коефіцієнта узгодженості (Double Entropy) для подальшого підвищення узгодженості наявних експертних даних. Кожен крок оптимізації буде промаркований відповідним підпунктом у наступному розділі.

Хід дослідження

1 Ініціалізація експертних даних

В рамках роботи було згенеровано $M = 5$ індивідуальних матриць мультиплікативних парних порівнянь кожного експерта групи над $N = 5$ альтернативами. Відповідні зворотно-симетричні матриці наведені нижче:

	1	2	3	4	5
1	1	5	8	5	5
2	1/5	1	2	2	2
3	1/8	1/2	1	2	3
4	1/5	1/2	1/2	1	3
5	1/5	1/2	1/3	1/3	1

Матриця E_1 експерта №1

	1	2	3	4	5
1	1	7	6	7	7
2	1/7	1	3	3	2
3	1/6	1/3	1	3	3
4	1/7	1/3	1/3	1	3
5	1/7	1/2	1/3	1/3	1

Матриця E_2 експерта №2

	1	2	3	4	5
1	1	3	5	6	3
2	1/3	1	2	3	3
3	1/5	1/2	1	2	2
4	1/6	1/3	1/2	1	3
5	1/3	1/3	1/2	1/3	1

Матриця E_3 експерта №3

	1	2	3	4	5
1	1	5	2	2	4
2	1/5	1	3	2	2
3	1/2	1/3	1	2	2
4	1/2	1/2	1/2	1	3
5	1/4	1/2	1/2	1/3	1

Матриця E_4 експерта №4

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	3	1
2	1/2	1	3	3	2
3	1/3	1/3	1	2	2
4	1/3	1/3	1/2	1	3
5	1	1/2	1/2	1/3	1

Матриця E_5 експерта №5

При цьому коефіцієнти компетентності експертів задані так:

$$w = (0.56,\ 0.51,\ 0.46,\ 0.26,\ 0.64) \tag{1.1}$$

2 Обчислення коефіцієнта узгодженості CR для кожного експерта

Коефіцієнт узгодженості CR (consistency ratio) надає можливість визначити рівень того, наскільки експерт суперечить сам собі, вказуючи ті чи інші порівняльні оцінки в матрицю мультиплікативних порівнянь. Перш за все, аналізуючи задані у попередньому підпункті матриці E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 експертів, визначимо максимальне дійсне значення власного числа для кожної з цих матриць:

$$\lambda_{max} = (\lambda^1_{max},\ \lambda^2_{max},\ \lambda^3_{max},\ \lambda^4_{max},\ \lambda^5_{max}) = (5.387,\ 5.547,\ 5.379,\ 5.549,\ 5.559) \tag{2.1}$$

Відтак, значення коефіцієнта CR для кожного експерта визначатиметься як

$$CR_i = \frac{CI_i}{RI},\ i = \overline{1, M}, \tag{2.2}$$

де значення CI (consistency index) обчислюється через відповідні власні числа (2.1):

$$CI_i = \frac{\lambda^i_{max} - N}{N - 1},\ i = \overline{1, M}, \tag{2.3}$$

а коефіцієнт RI (ratio index) задається за заданою кількістю альтернатив N :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0.0	0.0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Таблиця 1: Значення коефіцієнта RI

Таким чином, коефіцієнти узгодженості CR для групи експертів матимуть такі значення:

$$CR = (CR_1, CR_2, CR_3, CR_4, CR_5) = (0.086, 0.122, 0.085, 0.123, 0.125) \tag{2.4}$$

Індекси узгодженості вважаються прийнятними, якщо їхні значення лежать в межах 10% [1]. Оскільки матриці експертів генерувалися випадковим чином, отримані коефіцієнти (2.4) можна вважати низькими.

3 Обчислення вектора пріоритетів альтернатив для кожного експерта

Існує декілька різних способів [2] обчислення вектора ваг (пріоритетів) альтернатив для індивідуальних матриць мультиплікативних парних порівнянь. У лабораторній роботі буде використано такий алгоритм дій: підсумовувати елементи кожного стовпця та отримати обернені величини цих сум. Відповідні нормалізовані вектори ваг альтернатив для матриць експертів, заданих на стр. 2, наведені нижче:

$$\vartheta_1 = (0.60, 0.14, 0.09, 0.10, 0.07) \tag{3.1}$$
$$\vartheta_2 = (0.65, 0.11, 0.10, 0.07, 0.07) \tag{3.2}$$
$$\vartheta_3 = (0.51, 0.20, 0.12, 0.08, 0.09) \tag{3.3}$$
$$\vartheta_4 = (0.45, 0.15, 0.16, 0.15, 0.09) \tag{3.4}$$
$$\vartheta_5 = (0.35, 0.26, 0.14, 0.12, 0.13) \tag{3.5}$$

4 Обчислення агрегованого вектора альтернатив для групи експертів

Агрегований результуючий вектор альтернатив для групи експертів обчислено шляхом поелементного усереднення відповідних векторів альтернатив (3.1)-(3.5) кожного експерта за допомогою зваженого середнього геометричного, де в якості ваг виступають відповідні коефіцієнти компетентностей експертів (1.1):

$$\vartheta = \left(\left[\prod_{i=1}^{M} \vartheta_i^{w_i} \right]^{1 \Big/ \sum\limits_{k=1}^{M} w_k} \right)_{j=\overline{1,N}} \tag{4.1}$$

Таким чином, нормалізований агрегований вектор ваг матиме такий вигляд:

$$\vartheta = (0.51, 0.18, 0.12, 0.10, 0.09) \tag{4.2}$$

5 Побудова спектрів значень ваг альтернатив

Спектри значень ваг альтернатив побудовані як гістограми компонент кожної альтернативи у векторах (3.1)-(3.5) на проміжку значень $[0, 1]$. Для порівняльного аналізу на кожен утворений спектр червоним кольором нанесена вага відповідної альтернативи в агрегованому векторі альтернатив (4.2):

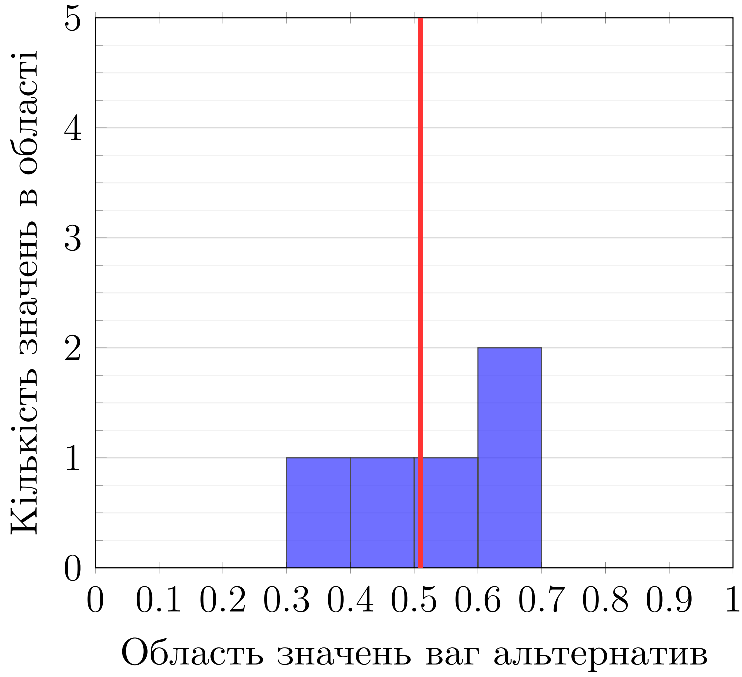

Рис. 1: Спектр альтернативи №1

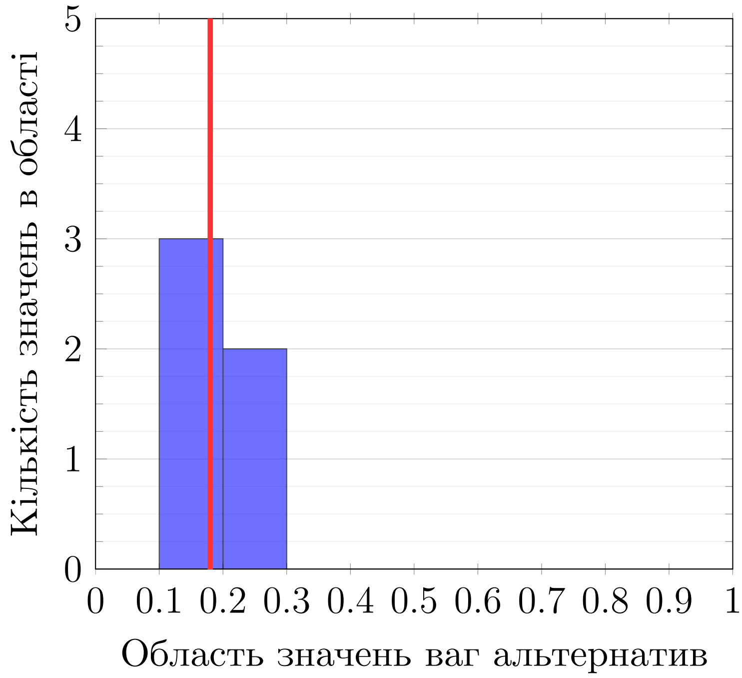

Рис. 2: Спектр альтернативи №2

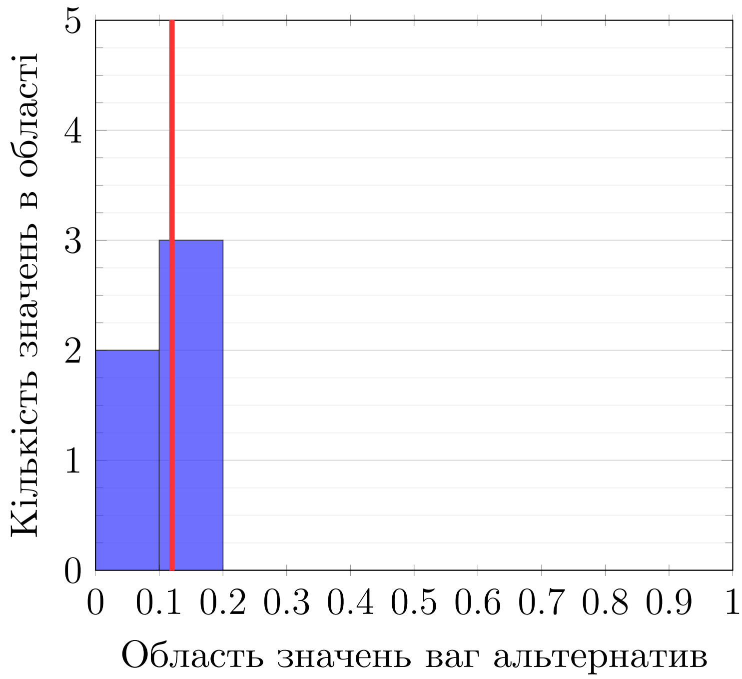

Рис. 3: Спектр альтернативи №3

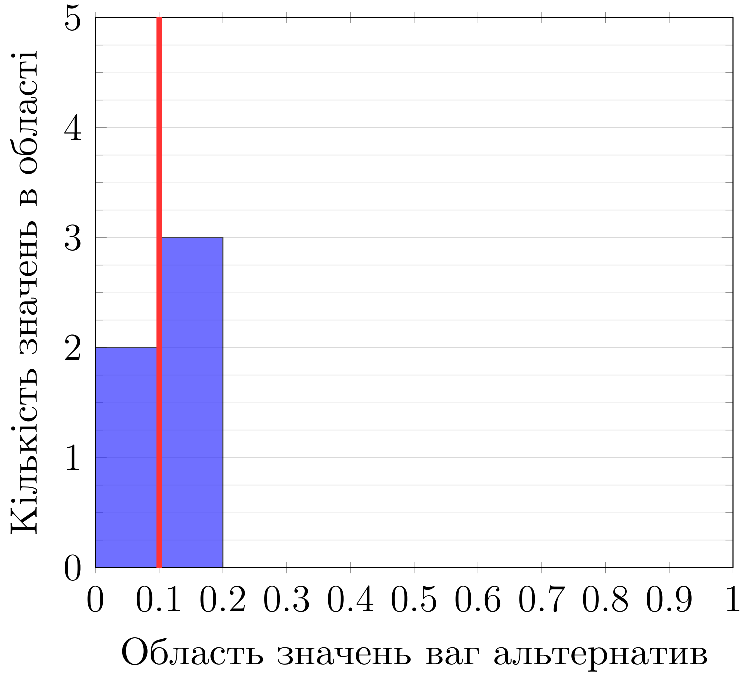

Рис. 4: Спектр альтернативи №4

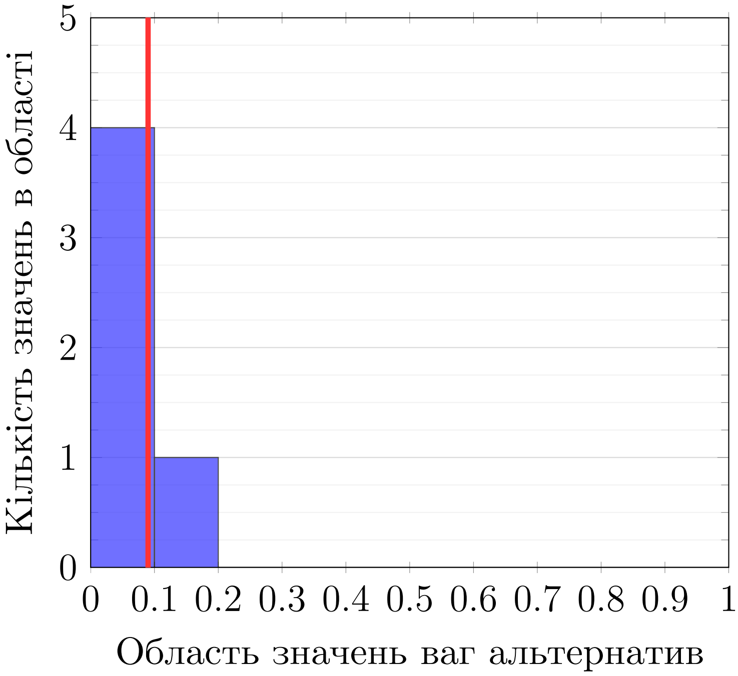

Рис. 5: Спектр альтернативи №5

6 Обчислення групової узгодженості (Double Entropy)

Коефіцієнт Double Entropy характеризує дисперсію спектру альтернативи у двох показниках: розкид відстані між ненульовими стовпчиками спектру $i_1, i_2, \ldots, i_k$:

$$d_j = i_{j+1} - i_j,\ j = \overline{1, k-1} \tag{6.1}$$

$$d_k = \begin{cases} (n-1) + (i_1 - i_k) + \left[\frac{n-1}{k-1}\right], & \text{k} > 1 \\ n, & \text{k} = 1 \end{cases}, \tag{6.2}$$

які після шкалювання нормуючим множником $d = \sum\limits_{j=1}^{k} d_j$ отримують значення

$$p_j = \frac{d_j}{d},\ j = \overline{1, k}, \tag{6.3}$$

та, крім того, дисперсія спектру визначається розкидом висот $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ненульових стовпців спектру:

$$q_j = \frac{r_j}{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j},\ j = \overline{1, k}, \tag{6.4}$$

Використовуючи отримані характеристики p та q, вводиться поняття ентропії неузгодженості

$$H(P) = -\sum_{j=1}^{k} p_j \ln p_j \tag{6.5}$$

та поняття ентропії непередбачуваності

$$H(Q) = -\sum_{j=1}^{k} q_j \ln q_j \tag{6.6}$$

Після процедури шкалювання [3, додаток «Supplemental Material»] цих величин у проміжку $[0, 1]$, отримані індекси $H^*(P)$ та $H^*(Q)$ дозволяють обчислити коефіцієнт групової узгодженості щодо альтернативи:

$$\kappa(P, Q) = 1 - \frac{H^*(P) + H^*(Q)}{2} \tag{6.7}$$

Виконавши процедуру обчислення коефіцієнта Double Entropy (6.7) на основі спектрів на Рис. 1 – Рис. 5, отримуємо такі індекси узгодженості для кожної альтернативи:

$$\kappa(P, Q) = (0.086,\, 0.791,\, 0.791,\, 0.791,\, 0.845) \tag{6.8}$$

Чим ближче коефіцієнт $\kappa(P, Q)$ до одиниці, ти більш узгодженою є група експертів щодо тієї чи іншої альтернативи. Бачимо, що стосовно альтернативи №1 група експертів має найменш узгоджену ситуацію. При цьому, провівши аналіз спектру альтернативи (Рис. 5), виявляємо, що найбільш відмінною є оцінка експерта №5.

7 Обчислення ідеальної транзитивної матриці

На основі визначеного в підрозділі 4 агрегованого результуючого вектору ваг альтернатив ϑ, побудуємо так звану ідеальну транзитивну матрицю парних порівнянь:

	1	2	3	4	5
1	1	2.92	4.39	5.05	5.56
2	0.34	1	1.51	1.73	1.91
3	0.22	0.66	1	1.15	1.26
4	0.19	0.57	0.86	1	1.10
5	0.18	0.52	0.78	0.91	1

Ідеальна транзитивна матриця T

яка обчислюється таким чином:

$$T_{ij} = \left(\frac{\vartheta_i}{\vartheta_j}\right)_{i,j=\overline{1,N}} \tag{7.1}$$

Наступним кроком обчислимо абсолютні відстані між матрицею E_5 експерта №5 та ідеальною матрицею мультиплікативних порівнянь T :

	1	2	3	4	5
1	0	0.92	1.39	2.05	4.56
2	0.15	0	1.49	1.26	0.09
3	0.10	0.33	0	0.84	0.73
4	0.13	0.24	0.36	0	0.89
5	0.82	0.02	0.28	0.41	0

Покомпонентна різниця матриць E_5 та T

Бачимо, що компонент e_{15} матриці E_5 має найбільш відмінне значення по модулю відносно матриці T. Тож запропонуємо експертові №5 збільшити свою оцінку e_{15} задля підвищення узгодженості. Припустимо при цьому, що експерт відмовився змінювати свою оцінку, тож замінимо вручну елемент e_{15} на значення оцінки t_{15}, округлене до цілочисельного значення.

Повторивши цикл обчислення коефіцієнта узгодженості Double Entropy (6.7) на основі оновлених експертних даних, отримаємо такі значення:

	1	2	3	4	5
$\kappa(P,Q)_{old}$	0.086	0.791	0.791	0.791	0.845
$\kappa(P,Q)_{new}$	0.086	0.791	0.791	0.791	1.0

Ітерація оновлення коефіцієнта Double Entropy

8 Проведення процедури зворотного зв'язку

Отримавши оновлений вектор коефіцієнта групової узгодженості, знову проведемо цикл оптимізації, запропонувавши змінити елемент матриці того експерта, який має найбільш віддалений показник спектру найменш узгодженої альтернативи групи згідно зі значеннями оновленого вектора коефіцієнтів Double Entropy. Проводитимо процедуру оптимізації та переоцінки доти, доки усі коефіцієнти групової узгодженості не будуть перевищувати 75% :

	1	2	3	4	5
$\kappa(P,Q)_0$	0.086	0.791	0.791	0.791	0.845
$\kappa(P,Q)_1$	0.086	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_2$	0.086	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_3$	0.086	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_4$	0.086	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_5$	0.086	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_6$	0.672	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_7$	0.672	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_8$	0.672	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_9$	0.672	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_{10}$	0.705	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_{11}$	0.705	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_{12}$	0.705	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_{13}$	0.705	0.791	0.791	0.791	1.0
$\kappa(P,Q)_{14}$	0.845	0.791	0.791	0.791	1.0

14 ітерацій оновлення коефіцієнта Double Entropy

Висновки

На основі аналізу згенерованих матриць мультиплікативних парних порівнянь групи з $M = 5$ експертів над $N = 5$ альтернативами було встановлено декілька результатів. Перш за все, виявлено, що рівень індивідуальної узгодженості експертів CR є прийнятним в межах певного невеликого відхилення. Подальший аналіз спектрів значень альтернатив продемонстрував, що альтернатива №1 є найменш узгодженою серед групи експертів. В якості критерію оптимальності було використано коефіцієнти Double Entropy щодо групової узгодженості по альтернативах.

Провівши процес переоцінки відповідних компонент матриці експерта, який має найбільш віддалений показник спектру по найменш узгодженій альтернативі групи, вдалося отримати вищі значення коефіцієнтів групової узгодженості. Наостанок, після проведення процедури зворотного зв'язку було визначено, що за 14 ітерацій циклу оптимізації експертних даних можна досягнути бажаного рівня узгодженості — вище 75%.

Перелік посилань

1. *Putra M. S. D.*, *Andryana S.* Fuzzy Analytical Hierarchy Process Method to Determine the Quality of Gemstones // Advances in Fuzzy Systems. — 2018. — Жовт. — С. 1—6. — DOI: 10.1155/2018/9094380. — URL: https://doi.org/10.1155/2018/9094380.
2. *Saaty T. L.* Decision making for leaders: The Analytic Hierarchy Process for decisions in a complex world. — 1990.
3. *Olenko A.*, *Tsyganok V.* Double Entropy Inter-Rater Agreement Indices // Applied Psychological Measurement. — 2015. — Лип. — Т. 40, № 1. — С. 37—55. — DOI: 10.1177/0146621615592718. — URL: https://doi.org/10.1177/0146621615592718.