



Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Факультет прикладної математики

## Лабораторна робота №1

# Статичний згин твердого тіла

«Чисельні методи математичної фізики»

**Роботу виконав:**

Студент 5 курсу, групи КМ-31мн,  
Цибульник Антон Владиславович

**Роботу приймав:**

Професор кафедри ПМА,  
Ориняк Ігор Володимирович

# Зміст

<b>§1 Постановка задачі</b>	<b>2</b>
<b>§2 Метод початкових параметрів</b>	<b>3</b>
Ідея та опис методу . . . . .	3
Деталізація поставленої задачі . . . . .	4
Візуалізація отриманих результатів . . . . .	7
<b>§3 Метод зважених залишків</b>	<b>8</b>
Ідея та опис методу . . . . .	8
Деталізація поставленої задачі . . . . .	9
Візуалізація отриманих результатів . . . . .	11
Коригування набору базових функцій . . . . .	12
<b>§4 Висновки</b>	<b>14</b>
<b>§5 Програмна реалізація</b>	<b>15</b>

# §1 Постановка задачі

У лабораторній роботі розглядається задача деформування тіла певної протяжності — балки. Опис постановки задачі відповідає так званим крайовим задачам, які розв'язуються одразу для усього одновимірного тіла в цілому (на відміну від задач на початкові умови, де пошук розв'язку відбувається крок за кроком, починаючи з певної початкової точки).

Для балки, що згинається, кожна точка  $s$  балки довжиною  $2L$  характеризується чотирма параметрами: переміщенням  $W(s)$ , кутом згинання  $\theta(s)$ , згинальним моментом  $M(s)$  та внутрішньою поперечною силою  $Q(s)$ . Відтак, деформуванню балки відповідатиме така система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dW(s)}{ds} = \theta(s), \quad \frac{d\theta(s)}{ds} = M(s), \quad \frac{dM(s)}{ds} = Q(s), \quad \frac{dQ(s)}{ds} = \alpha(s), \quad (1.1)$$

де  $\alpha(s)$  є зовнішнім навантаження системи. В межах задачі зовнішнє навантаження задається зосередженою силою — дельта-функцією Дірака  $\delta(s - s_0)$ , яка приймає нульове значення усюди, окрім околу точки  $s_0$ , де її значення сягає нескінченності:

$$\delta(s - s_0) = \begin{cases} 0, & s \neq s_0 \\ \infty, & s = s_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Крім того, в загальному випадку дельта-функція Дірака  $\delta(s)$  володіє такими властивостями:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(s) ds = 1 \quad (1.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(s - s_0) f(s) ds = f(s_0) \quad (1.4)$$

Отже, моделювання зовнішнього навантаження як зосередженої сили в точці  $L/2$  матиме вигляд:

$$\alpha(s) = \delta(s - L/2), \quad (1.5)$$

а граничні умови задаватимуться рівняннями

$$W(0) = 0, \quad W(2L) = 0, \quad \frac{d^2W(0)}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2W(2L)}{ds^2} = 0 \quad (1.6)$$

Наостанок, балка, яка підлягає деформуванню, згідно з умовами задачі має особливість — проміжну опору в точці  $L$ . Тож на додачу до граничних умов (1.6) отримуємо обмеження виду

$$W(L) = 0 \quad (1.7)$$

У подальших викладках буде розглянуто пошук точного аналітичного розв'язку системи рівнянь (1.1) методом початкових параметрів (МПП), а для отримання наближеного аналітичного рішення — метод зважених залишків (МЗЗ).

## §2 Метод початкових параметрів

### Ідея та опис методу

Метод початкових параметрів розглядає довільну систему як такі сутності: елементи; межі між елементами (кінці, вузли), де відбувається спряження дотичних елементів; границі всієї системи. При цьому для системи вводиться поняття потужності  $N$  — кількості параметрів, які визначають стан системи в кожній його точці  $s$ . Виокремлення окреслених вище сутностей системи відбувається поетапно разом із такими супутніми процедурами:

1. Система дробиться на декілька окремих ділянок (елементів), і кожна така ділянка нумерується відповідним чином. Після цього визначаються вхідні та вихідні краї кожного елемента, а також вузли — точки одночасного дотику декількох елементів. Іншими словами, відбувається організація обходу по елементах системи;
2. Нумерація невідомих змінних (параметрів) на кожному із двох країв кожного елемента системи;
3. Складання так званих рівнянь зв'язку для кожного елемента. Ці рівняння зв'язують параметри в кінцевій точці елемента зі значеннями в точці початку елемента. Рівняння зв'язку впливають з фізичних чи геометричних властивостей кожного елемента та системи в цілому;
4. Складання рівнянь спряження в кожному вузлі системи;
5. Складання рівнянь, що відповідають граничним умовам системи.

Для системи потужності  $N$ , що складається з  $K$  елементів, кількість невідомих параметрів системи складає  $2KN$ , адже для кожного елемента визначено невідомі змінні (параметри) на його початку та в його кінці. Відповідно, кількість складених рівнянь згідно з методом початкових параметрів має бути  $2KN$ .

## Деталізація поставленої задачі

У цьому підрозділі буде по чергово розглянуто усі етапи МПП в рамках задачі деформації тіла на площині. Перш за все, з огляду на поставлену крайову задачу (1.1), потужність системи складає  $N = 4$ . Організацію обходу по елементах системи виконаємо таким чином: визначимо  $K = 2$  елементи та, відповідно, один вузол у точці опори  $L$  (Рис. 1).

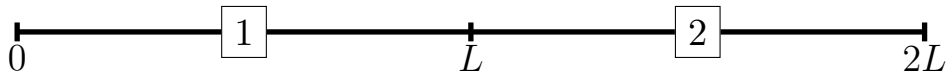


Рис. 1: Балка довжиною  $2L$  як система двох елементів

Дію зовнішнього навантаження (1.5) на систему (1.1) позначено на Рис. 2.

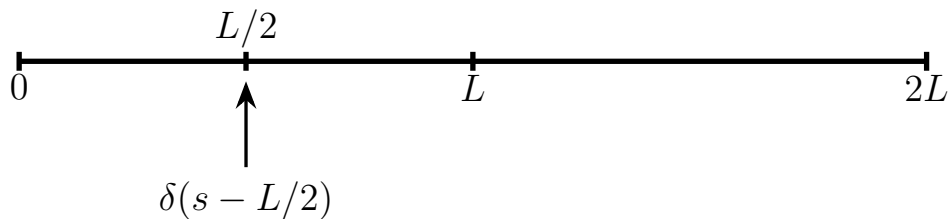


Рис. 2: Балка під дією зосередженої сили

Складемо нумерацію невідомих параметрів переміщення  $W(s)$ , кута згинання  $\theta(s)$ , згинального моменту  $M(s)$  та внутрішньої поперечної сили  $Q(s)$  на початку та в кінці кожного елемента (Табл. 1). В результаті отримаємо  $2KN = 16$  змінних:

	Елемент «1»		Елемент «2»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$W(s)$	$x_1$	$x_5$	$x_9$	$x_{13}$
$\theta(s)$	$x_2$	$x_6$	$x_{10}$	$x_{14}$
$M(s)$	$x_3$	$x_7$	$x_{11}$	$x_{15}$
$Q(s)$	$x_4$	$x_8$	$x_{12}$	$x_{16}$

Таблиця 1: Нумерація невідомих параметрів системи

Визначимо рівняння зв'язку, послідовно розглядаючи фізичні рівняння (1.1) окремо для кожного елемента. Спершу розглянемо елемент «1» на проміжку  $s \in [0, L]$ : враховуючи дію зосередженої сили на другій половині елемента, інтегрування внутрішньої поперечної сили, зважаючи на властивість (1.3) дельта-функції Дірака, буде розписуватися як

$$Q(s) - Q_0 = \int_0^s \delta(u - L/2) du = \gamma = \begin{cases} 0, & s \in [0, L/2] \\ 1, & s \in [L/2, L] \end{cases} \quad (2.1)$$

У подальших викладках буде показано, що відповідні рівняння спряження гарантуватимуть неперервність елемента «1» навіть попри такий розподіл зосередженої сили на різних частинах. Отже, послідовно проінтегруємо й інші фізичні рівняння системи, спираючись на вигляд (2.1):

$$M(s) - M_0 = \int_0^s Q(u) du = \int_0^{L/2} Q_0 du + \int_{L/2}^s (Q_0 + 1) du = Q_0 s + \gamma \left( s - \frac{L}{2} \right) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \theta(s) - \theta_0 &= \int_0^s M(u) du = \int_0^{L/2} (M_0 + Q_0 s) du + \int_{L/2}^s \left( M_0 + Q_0 s + \left( s - \frac{L}{2} \right) \right) du = \\ &= M_0 s + Q_0 \frac{s^2}{2} + \gamma \frac{(s - L/2)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} W(s) - W_0 &= \int_0^s \theta(u) du = \\ &= \int_0^{L/2} \left( M_0 s + Q_0 \frac{s^2}{2} \right) du + \int_{L/2}^s \left( M_0 s + Q_0 \frac{s^2}{2} + \frac{(s - L/2)^2}{2} \right) du = \\ &= \theta_0 s + M_0 \frac{s^2}{2} + Q_0 \frac{s^3}{6} + \gamma \frac{(s - L/2)^3}{6} \end{aligned} \quad (2.4)$$

У матричному вигляді рівняння зв'язку (2.1) – (2.4) для елемента «1» записуватимуться таким чином:

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ \theta(s) \\ M(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s & \frac{s^2}{2} & \frac{s^3}{6} \\ 0 & 1 & s & \frac{s^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{(s-L/2)^3}{6} \\ \frac{(s-L/2)^2}{2} \\ s - \frac{L}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Тепер розглянемо фізичні рівняння для елемента «2» на проміжку  $s \in [L, 2L]$ :

$$Q(s) - Q_L = \int_L^s 0 \, du = 0 \quad (2.6)$$

$$M(s) - M_L = \int_L^s Q(u) \, du = \int_L^s Q_L \, du = Q_L(s - L) \quad (2.7)$$

$$\theta(s) - \theta_L = \int_L^s M(u) \, du = M_L(s - L) + Q_L \frac{(s - L)^2}{2} \quad (2.8)$$

$$W(s) - W_L = \int_L^s \theta(u) \, du = \theta_L(s - L) + M_L \frac{(s - L)^2}{2} + Q_L \frac{(s - L)^3}{6} \quad (2.9)$$

Аналогічним чином матриця рівнянь зв'язку для елемента «2» матиме вид:

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ \theta(s) \\ M(s) \\ Q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s - L & \frac{(s-L)^2}{2} & \frac{(s-L)^3}{6} \\ 0 & 1 & s - L & \frac{(s-L)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & s - L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_L \\ \theta_L \\ M_L \\ Q_L \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Підсумовуючи (2.5) та (2.10), матимемо 8 рівнянь зв'язку системи в термінах нумерації змінних у Табл. 1:

Рівняння зв'язку для елемента «1»	Рівняння зв'язку для елемента «2»
$x_5 = x_1 + x_2 L + x_3 \frac{L^2}{2} + x_4 \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{12}$	$x_{13} = x_9 + x_{10} L + x_{11} \frac{L^2}{2} + x_{12} \frac{L^3}{6}$
$x_6 = x_2 + x_3 L + x_4 \frac{L^2}{2}$	$x_{14} = x_{10} + x_{11} L + x_{12} \frac{L^2}{2}$
$x_7 = x_3 + x_4 L + \frac{L}{2}$	$x_{15} = x_{11} + x_{12} L$
$x_8 = x_4 + 1$	$x_{16} = x_{12}$

Таблиця 2: Рівняння зв'язку системи

Решта 4 рівнянь спряження формуватимуться як рівності відповідних змінних внаслідок збереження неперервності у вузлі системи, однак з урахуванням проміжної опори замість рівняння сил виконуватиметься умова нульового переміщення (1.7) в точці дотику елементів. Ще 4 рівняння відповідатимуть граничним умовам (1.6) системи. Перерахунок рівнянь вказаний у Табл. 3.

Граничні рівняння зліва	Рівняння спряження	Граничні рівняння справа
$x_1 = 0$ $x_3 = 0$	$x_9 = x_5$ $x_{10} = x_6$ $x_{11} = x_7$ $x_9 = 0$	$x_{13} = 0$ $x_{15} = 0$

Таблиця 3: Рівняння зв'язку та спряження системи

## Візуалізація отриманих результатів

Розв'язавши систему та отримавши величини невідомих змінних (Табл. 1), маємо змогу використати рівняння зв'язку (2.5) та (2.10) для отримання аналітичних проміжних значень параметра переміщення при деформації балки довжиною  $2L = 100$  під дією зосередженої сили в точці  $L/2$  і з урахуванням проміжної опори в точці  $L$  (Рис. 3). У Табл. 4 зазначені отримані значення змінних системи.

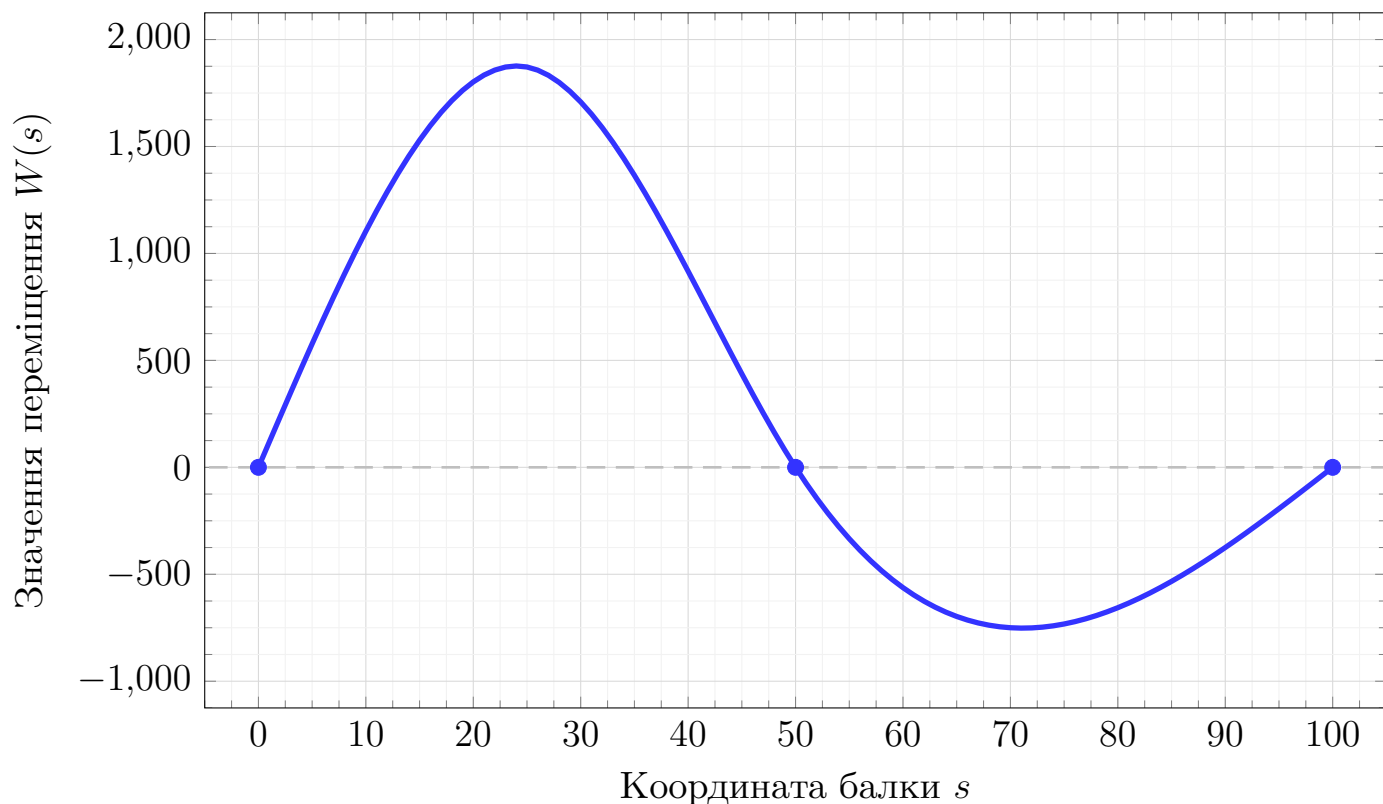


Рис. 3: Крива деформації за методом МПП



	Елемент «1»		Елемент «2»	
	Початок	Кінець	Початок	Кінець
$W(s)$	$x_1 = 0$	$x_5 = 0$	$x_9 = 0$	$x_{13} = 0$
$\theta(s)$	$x_2 = 117.188$	$x_6 = -78.125$	$x_{10} = -78.125$	$x_{14} = 39.063$
$M(s)$	$x_3 = 0$	$x_7 = 4.688$	$x_{11} = 4.688$	$x_{15} = 0$
$Q(s)$	$x_4 = -0.406$	$x_8 = 0.594$	$x_{12} = -0.094$	$x_{16} = -0.094$

Таблиця 4: Значення змінних системи за методом МПП

## §3 Метод зважених залишків

### Ідея та опис методу

Метод зважених залишків оперує рівнянням вигляду

$$G(y) = f(x), \quad (3.1)$$

де  $G(y)$  — деякий заданий лінійний диференціальний оператор над функцією  $y(x)$ , а  $f(x)$  у правій частині є певним зовнішнім навантаженням (дією зовнішніх сил). Припускається, що функція  $y(x)$  має форму суми  $M$  так званих базових функцій  $\phi_i(x)$ , помножених на невідомі коефіцієнти  $a_i$ :

$$y(x) = \sum_{i=1}^M a_i \phi_i(x) \quad (3.2)$$

Зауважимо, що перелік базових функцій задається так, щоб задовольнити нульові граничні умови задачі. Отже, оскільки вигляд (3.2) — лише наближення невідомої функції  $y(x)$ , вводиться поняття залишку диференціального оператора:

$$R(x) = \sum_{i=1}^M a_i G(\phi_i(x)) - f(x) \quad (3.3)$$

Мета методу полягає у мінімізації утвореного залишку  $R(x)$  шляхом пошуку оптимальних значень коефіцієнтів  $a_i$  через почергову процедуру «зваження» з кожною базовою функцією  $\phi_i(x)$ :

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, M} \quad (3.4)$$

Таким чином, кількість рівнянь (3.4) дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів  $a_i$ , що дозволяє розв'язати утворену систему рівнянь та отримати наближене аналітичне рішення згідно з припущенням (3.2).

## Деталізація поставленої задачі

Для того, щоб застосувати метод зважених залишків до заданої задачі деформування, слід виконати деякі модифікації та уточнення системи (1.1). Перш за все, задля введення сутності диференціального оператора систему необхідно звести до диференціального рівняння четвертого порядку відносно параметра переміщення  $W(s)$ .

Наступним кроком є моделювання проміжної точки опори балки як дії зосередженої сили з невідомою інтенсивністю  $z$  — дельта-функції Дірака в точці  $L$ . Відтак, задача з граничними умовами (1.6) описуватиметься таким рівнянням:

$$\frac{d^4 W(s)}{ds^4} = \delta(s - L/2) + z\delta(s - L), \quad (3.5)$$

тоді у введених раніше термінах

$$G(W) = \frac{d^4 W(s)}{ds^4} \quad (3.6)$$

$$f(s) = \delta(s - L/2) + z\delta(s - L) \quad (3.7)$$

Наближений аналітичний вигляд функції переміщення  $W(s)$  покладемо так:

$$W(s) = a_1\phi_1(s) + a_2\phi_2(s), \quad (3.8)$$

де набір з  $M = 2$  базових функцій обрано з експоненціальної сім'ї:

$$\phi_1(s) = e^{-\frac{4s}{2L}} + A_{11}e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{12}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{13}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{14}, \quad (3.9)$$

$$\phi_2(s) = e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{21}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{22}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{23} + A_{24}e^{\frac{s}{2L}}, \quad (3.10)$$

при цьому в силу нульових граничних умов (1.6) коефіцієнти  $A_{ij}$  дорівнюють:

$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{21}$	$A_{22}$	$A_{23}$	$A_{24}$
-2.2834	1.0149	0.4912	-0.2227	-2.9305	2.6637	-0.7915	0.0583

Таблиця 5: Значення коефіцієнтів базових функцій (3.9) й (3.10)

Враховуючи наведену формалізацію системи, залишок матиме вид:

$$R(s) = a_1 \frac{d^4 \phi_1(s)}{ds^4} + a_2 \frac{d^4 \phi_2(s)}{ds^4} - \delta(s - L/2) - z\delta(s - L) \quad (3.11)$$

Тоді з урахуванням умови (1.7) нульового переміщення в точці опори, система рівнянь (3.4) для визначення невідомих коефіцієнтів  $a_1, a_2$  та  $z$  згідно з методом зважених залишків записуватиметься на проміжку від 0 до  $2L$  таким чином:

$$\int_0^{2L} R(s) \phi_1(s) ds = 0, \quad (3.12)$$

$$\int_0^{2L} R(s) \phi_2(s) ds = 0, \quad (3.13)$$

$$W(L) = 0, \quad (3.14)$$

що розписується у систему

$$a_1 \int_0^{2L} \phi_1^{(4)}(s) \phi_1(s) ds + a_2 \int_0^{2L} \phi_2^{(4)}(s) \phi_1(s) ds - z\phi_1(L) - \phi_1(L/2) = 0 \quad (3.15)$$

$$a_1 \int_0^{2L} \phi_1^{(4)}(s) \phi_2(s) ds + a_2 \int_0^{2L} \phi_2^{(4)}(s) \phi_2(s) ds - z\phi_2(L) - \phi_2(L/2) = 0 \quad (3.16)$$

$$a_1\phi_1(L) + a_2\phi_2(L) = 0 \quad (3.17)$$

Позначивши відповідні визначені інтеграли через позначки  $I_{ij}$ , отримані рівняння компактно записуються у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} & -\phi_1(L) \\ I_{12} & I_{22} & -\phi_2(L) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(L/2) \\ \phi_2(L/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Виконавши відповідні обчислення визначених інтегралів та розв'язавши матричне рівняння (3.18), отримуємо такі результати:

$a_1$	$a_2$	$z$
339543.2272	-387324.2929	-0.6980

Таблиця 6: Значення невідомих коефіцієнтів функції (3.8)

## Візуалізація отриманих результатів

Використовуючи знайдені значення коефіцієнтів  $a_1$  та  $a_2$  з Табл. 6 й скориставшись формулою наближеного аналітичного розв'язку (3.8), маємо змогу побудувати неперервні значення переміщення при деформації балки довжиною  $2L = 100$  під дією зосередженої сили в точці  $L/2$  з урахуванням проміжної опори в точці  $L$ .

Порівняльний графік кривих за аналітичним методом МПП та наближеним аналітичним рішенням МЗЗ наведений на Рис 4. Міру несхожості отриманих кривих  $W(x)_{\text{МПП}}$  та  $W(x)_{\text{МЗЗ}}$  визначатимемо так:

$$d(W(x)_{\text{МПП}}, W(x)_{\text{МЗЗ}}) = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \left| \frac{W(x_i)_{\text{МПП}} - W(x_i)_{\text{МЗЗ}}}{W(x_i)_{\text{МПП}}} \right|, \quad I = \{1, 2, \dots, 2L\} \quad (3.19)$$

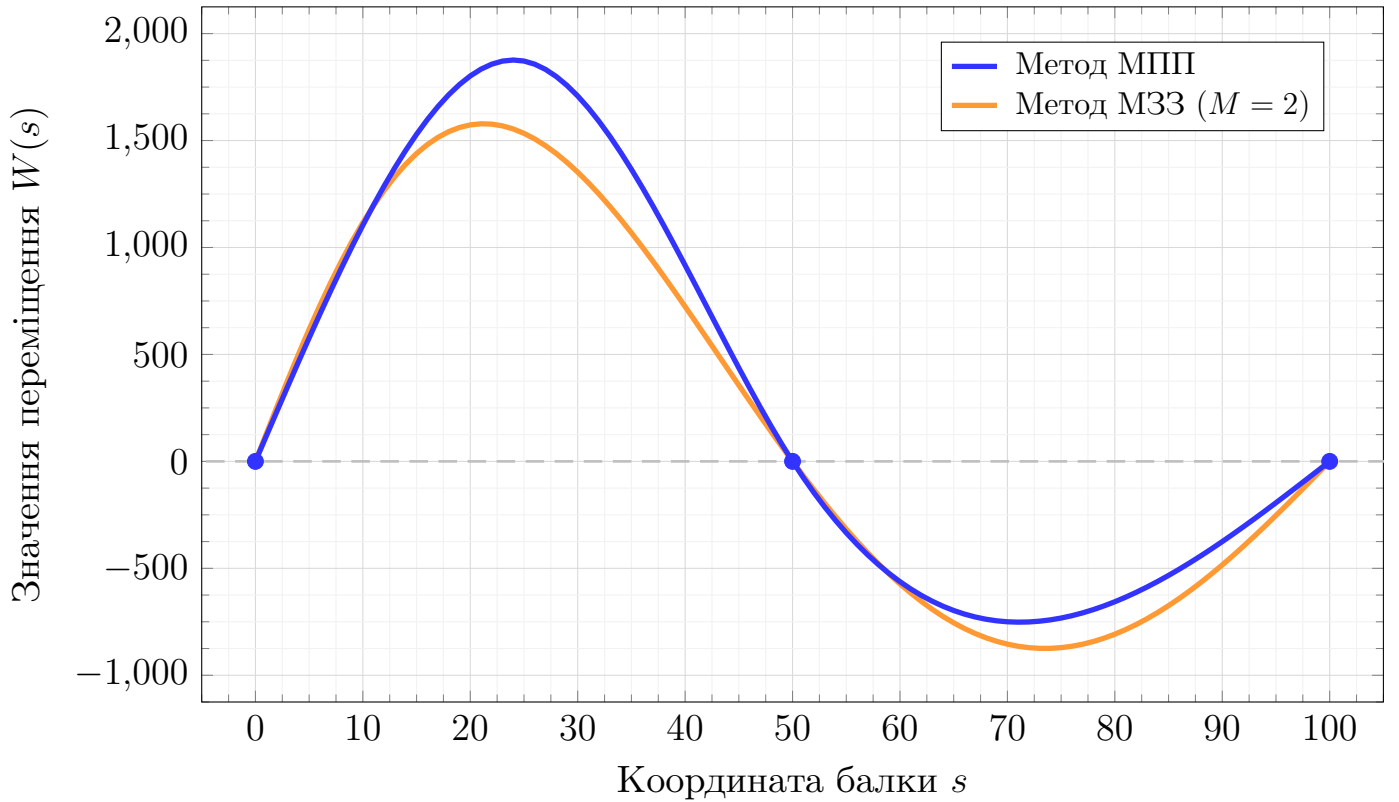


Рис. 4: Порівняльний графік кривих деформації за МПП та МЗЗ при виборі  $M = 2$  базових функцій вигляду (3.9) й (3.10)

Згідно з (3.19), міра несхожості між кривими на Рис. 4 складатиме:

$$d(W(x)_{\text{МПП}}, W(x)_{\text{МЗЗ}}) = 15.86\% \quad (3.20)$$

## Коригування набору базових функцій

Розглянемо почергово дещо доповнені переліки базових функцій з експоненціальної сім'ї. А саме, почнемо з набору  $M = 3$  базових функцій виду:

$$\phi_1(s) = e^{-\frac{4s}{2L}} + A_{11}e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{12}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{13}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{14}, \quad (3.21)$$

$$\phi_2(s) = e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{21}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{22}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{23} + A_{24}e^{\frac{s}{2L}}, \quad (3.22)$$

$$\phi_3(s) = e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{31}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{32} + A_{33}e^{\frac{s}{2L}} + A_{34}e^{\frac{2s}{2L}}, \quad (3.23)$$

які в силу задоволення нульових граничних умов (1.6) матимуть визначені коефіцієнти  $A_{ij}$ . Аналогічним чином провівши процедуру «зваження» за МЗЗ, отримаємо шукані коефіцієнти  $a_1, a_2, a_3$  для представлення функції переміщення у вигляді:

$$W(s) = a_1\phi_1(s) + a_2\phi_2(s) + a_3\phi_3(s) \quad (3.24)$$

Отримана крива проілюстрована на Рис. 5, значення міри несхожості з результатами МПП зображені у Табл. 7. Наступний набір  $M = 4$  базових функцій покладемо як

$$\phi_1(s) = e^{-\frac{4s}{2L}} + A_{11}e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{12}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{13}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{14}, \quad (3.25)$$

$$\phi_2(s) = e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{21}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{22}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{23} + A_{24}e^{\frac{s}{2L}}, \quad (3.26)$$

$$\phi_3(s) = e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{31}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{32} + A_{33}e^{\frac{s}{2L}} + A_{34}e^{\frac{2s}{2L}}, \quad (3.27)$$

$$\phi_4(s) = e^{-\frac{s}{2L}} + A_{41} + A_{42}e^{\frac{s}{2L}} + A_{43}e^{\frac{2s}{2L}} + A_{44}e^{\frac{3s}{2L}}, \quad (3.28)$$

які, своєю чергою, задовольняють нульовим граничним умовам (1.6) та формують функцію переміщення відповідно до (3.2):

$$W(s) = a_1\phi_1(s) + a_2\phi_2(s) + a_3\phi_3(s) + a_4\phi_4(s) \quad (3.29)$$

Усі порівняльні характеристики кривої продемонстровані на Рис. 5 та у Табл. 7. Зауважуємо, що наближений аналітичний розв'язок при  $M = 4$  вже значно точніше апроксимує криву за методом МПП. Наостанок, розглянемо набір таких  $M = 5$  базових функцій, які задовольняють усім умовам МЗЗ:

$$\phi_1(s) = e^{-\frac{4s}{2L}} + A_{11}e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{12}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{13}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{14} \quad (3.30)$$

$$\phi_2(s) = e^{-\frac{3s}{2L}} + A_{21}e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{22}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{23} + A_{24}e^{\frac{s}{2L}} \quad (3.31)$$

$$\phi_3(s) = e^{-\frac{2s}{2L}} + A_{31}e^{-\frac{s}{2L}} + A_{32} + A_{33}e^{\frac{s}{2L}} + A_{34}e^{\frac{2s}{2L}} \quad (3.32)$$

$$\phi_4(s) = e^{-\frac{s}{2L}} + A_{41} + A_{42}e^{\frac{s}{2L}} + A_{43}e^{\frac{2s}{2L}} + A_{44}e^{\frac{3s}{2L}} \quad (3.33)$$

$$\phi_5(s) = 1 + A_{51}e^{\frac{s}{2L}} + A_{52}e^{\frac{2s}{2L}} + A_{53}e^{\frac{3s}{2L}} + A_{54}e^{\frac{4s}{2L}} \quad (3.34)$$

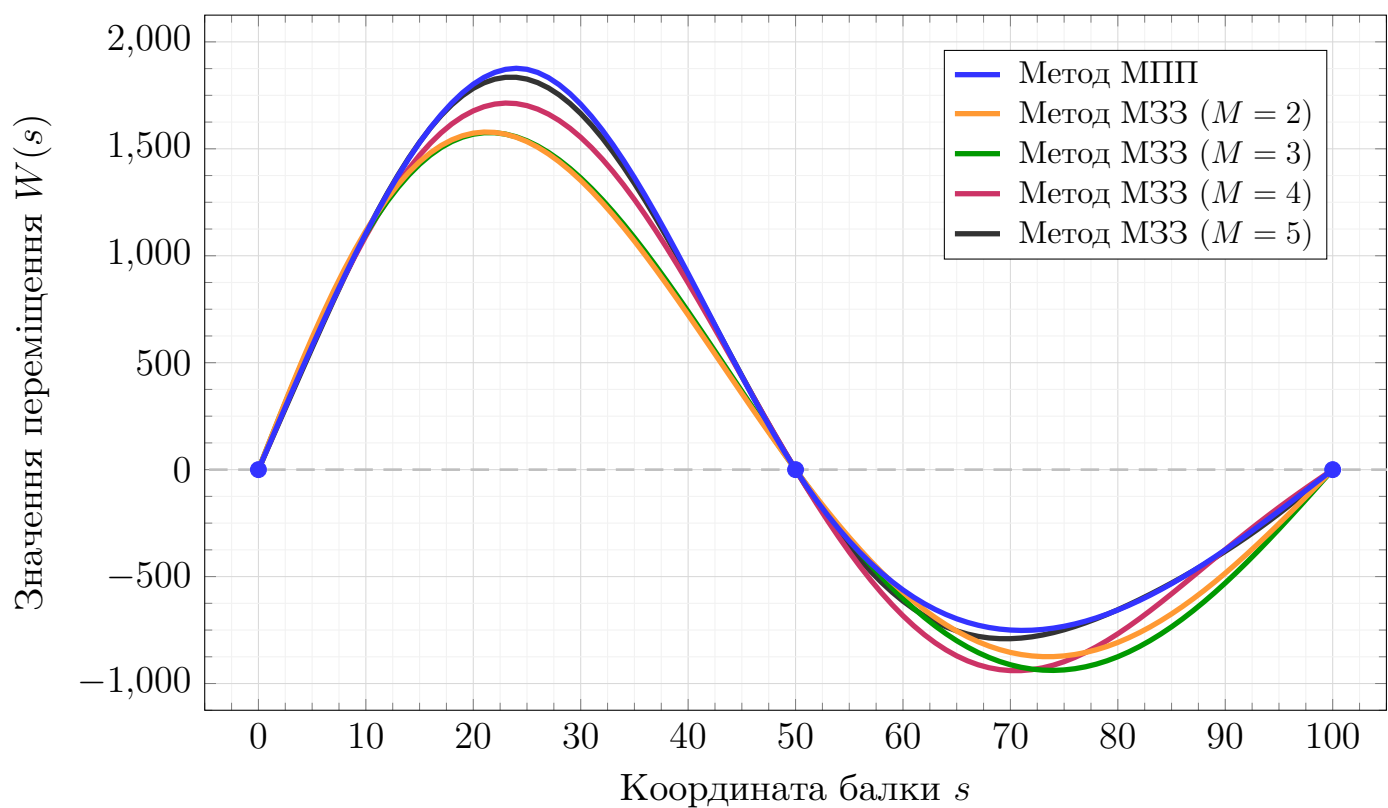


Рис. 5: Порівняльний графік кривих деформації за МПП та МЗЗ при виборі різної кількості  $M$  базових функцій експоненціальної сім'ї

Результати при  $M = 5$  (Табл. 7) мають найменше відхилення від кривої, отриманої за методом МПП — лише 3.12%.

	$d(W(x)_{\text{МПП}}, W(x)_{\text{МЗЗ}})$
$M = 2$	15.86%
$M = 3$	19.26%
$M = 4$	10.22%
$M = 5$	3.12%

Таблиця 7: Значення міри несхожості між кривими за МПП та МЗЗ при виборі різної кількості  $M$  базових функцій експоненціальної сім'ї

## §4 Висновки

У лабораторній роботі було розглянуто крайову задачу деформування тіла протяжності  $2L$  — балки. Балка за умовами задачі має проміжну опору в точці  $L$  та дію зосередженої сили в точці  $L/2$ . Кожна точка  $s$  балки характеризується чотирма параметрами: переміщенням  $W(s)$ , кутом згинання  $\theta(s)$ , згинальним моментом  $M(s)$  та внутрішньою поперечною силою  $Q(s)$ .

Для пошуку аналітичного розв'язку системи диференціальних рівнянь, які описують деформацію балки, було використано метод початкових параметрів: тіло структурно було розділено на два елементи та один вузол. На кожному елементі були складені рівняння зв'язку для невідомих параметрів системи із урахуванням дії зосередженої сили в точці  $L/2$ . Враховуючи проміжну опору, також були складені рівняння спряження у вузлі системи та рівняння, які відповідають граничним умовам. Розв'язавши систему складених рівнянь, вдалося отримати неперервний розв'язок для задачі деформування балки, який відповідає логіці процесу згинання під дією зосередженої сили з проміжною опорою.

Для пошуку наближеного аналітичного розв'язку було використано метод зважених залишків. Було отримано декілька різних наближених кривих, які почергово включали різну кількість базових функцій з експоненціальної сім'ї. Найкраще наближення вдалося отримати при розгляді п'ятох базових функцій — лише 3.12% відхилення.

## §5 Програмна реалізація

В ході дослідження було використано засоби мови програмування Python версії 3.8.10 в інтегрованому середовищі розробки Visual Studio Code версії 1.78.2. Нижче наведені тексти ключових інструментальних програм.

Лістинг 1: Підключення бібліотек та ініціалізація параметрів

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from scipy.integrate import quad
3 import numpy as np
4
5 L = 50
```

Лістинг 2: Реалізація методу початкових параметрів (МПП)

```
1 A = np.zeros((16,16))
2 B = np.zeros((16))
3
4 # field equations 1
5 s = L
6 A[0][4], A[0][0], A[0][1], A[0][2], A[0][3], B[0] = 1, -1, -s, -(s**2)/2, -(s**3)/6,
   ((s-L/2)**3)/6
7 A[1][5], A[1][1], A[1][2], A[1][3], B[1] = 1, -1, -s, -(s**2)/2, ((s-L/2)**2)/2
8 A[2][6], A[2][2], A[2][3], B[2] = 1, -1, -s, (s-L/2)
9 A[3][7], A[3][3], B[3] = 1, -1, 1
10
11 # edge equations left
12 A[4][0] = 1
13 A[5][2] = 1
14
15 # transition equations 1-2
16 A[6][8], A[6][4] = 1, -1
17 A[7][9], A[7][5] = 1, -1
18 A[8][10], A[8][6] = 1, -1
19 A[9][4] = 1
20
21 # field equations 2
22 s = 2*L
23 A[10][12], A[10][8], A[10][9], A[10][10], A[10][11] = 1, -1, -(s-L), -((s-L)**2)/2,
   -((s-L)**3)/6
24 A[11][13], A[11][9], A[11][10], A[11][11] = 1, -1, -(s-L), -((s-L)**2)/2
25 A[12][14], A[12][10], A[12][11] = 1, -1, -(s-L)
26 A[13][15], A[13][11] = 1, -1
27
28 # edge equations right
29 A[14][12] = 1
30 A[15][14] = 1
31
32 A_inv = np.linalg.inv(A)
33 X = np.dot(A_inv, B)
```



```

34 S_tmm = np.arange(0,2*L+1,1)
35 W_tmm = []
36
37 for s in S_tmm:
38     if s <= L/2:
39         W_tmm.append(X[0] + X[1]*s + X[2]*(s**2)/2 + X[3]*(s**3)/6)
40     if L/2 < s <= L:
41         W_tmm.append(X[0] + X[1]*s + X[2]*(s**2)/2 + X[3]*(s**3)/6 + ((s-L/2)**3)/6)
42     if L < s:
43         W_tmm.append(X[8] + X[9]*(s-L) + X[10]*((s-L)**2)/2 + X[11]*((s-L)**3)/6)
44
45 plt.plot(S_tmm, W_tmm, marker="o", color="orange")
46 plt.grid()
47 plt.show()

```

### Лістинг 3: Визначення коефіцієнтів базових функцій (МЗЗ)

```

1 A1 = np.array([
2     [1, 1, 1, 1],
3     [np.exp(-3), np.exp(-2), np.exp(-1), 1],
4     [9, 4, 1, 0],
5     [9*np.exp(-3), 4*np.exp(-2), np.exp(-1), 0],
6 ])
7
8 B1 = np.array([-1, -np.exp(-4), -16, -16*np.exp(-4)])
9
10 A1_inv = np.linalg.inv(A1)
11 a1, b1, c1, d1 = np.dot(A1_inv,B1)
12
13 A2 = np.array([
14     [1, 1, 1, 1],
15     [np.exp(-2), np.exp(-1), 1, np.exp(1)],
16     [4, 1, 0, 1],
17     [4*np.exp(-2), np.exp(-1), 0, np.exp(1)],
18 ])
19
20 B2 = np.array([-1, -np.exp(-3), -9, -9*np.exp(-3)])
21
22 A2_inv = np.linalg.inv(A2)
23 a2, b2, c2, d2 = np.dot(A2_inv,B2)

```

### Лістинг 4: Введення допоміжних функцій (МЗЗ)

```

1 def phi_1(x):
2     return np.exp(-(4*x)/(2*L)) + a1*np.exp(-(3*x)/(2*L)) + b1*np.exp(-(2*x)/(2*L))
3     + c1*np.exp(-x/(2*L)) + d1
4
5 def d4_phi_1(x):
6     return (256*np.exp(-(4*x)/(2*L)) + 81*a1*np.exp(-(3*x)/(2*L)) +
7             16*b1*np.exp(-(2*x)/(2*L)) + c1*np.exp(-x/(2*L))) / (16*L**4)

```

```

8 def phi_2(x):
9     return np.exp(-(3*x)/(2*L)) + a2*np.exp(-(2*x)/(2*L)) + b2*np.exp(-x/(2*L)) + c2
    + d2*np.exp(x/(2*L))
10
11 def d4_phi_2(x):
12     return (81*np.exp(-(3*x)/(2*L)) + 16*a2*np.exp(-(2*x)/(2*L)) +
    b2*np.exp(-x/(2*L)) + d2*np.exp(x/(2*L))) / (16*L**4)

```

### Лістинг 5: Обчислення невідомих коефіцієнтів системи (МЗЗ)

```

1 def integrand_11(x):
2     return (d4_phi_1(x)) * (phi_1(x))
3
4 def integrand_21(x):
5     return (d4_phi_2(x)) * (phi_1(x))
6
7 def integrand_12(x):
8     return (d4_phi_1(x)) * (phi_2(x))
9
10 def integrand_22(x):
11     return (d4_phi_2(x)) * (phi_2(x))
12
13 I11 = quad(integrand_11, 0, 2*L)[0]
14 I21 = quad(integrand_21, 0, 2*L)[0]
15 I12 = quad(integrand_12, 0, 2*L)[0]
16 I22 = quad(integrand_22, 0, 2*L)[0]
17
18 U = np.array([
19     [I11, I21, -phi_1(L)],
20     [I12, I22, -phi_2(L)],
21     [phi_1(L), phi_2(L), 0]
22 ])
23
24 V = np.array([phi_1(L/2), phi_2(L/2), 0])
25
26 U_inv = np.linalg.inv(U)
27 alpha1, alpha2, Z = np.dot(U_inv, V)

```

### Лістинг 6: Візуалізація отриманих результатів (МЗЗ)

```

1 S_wrm = np.arange(0, 2*L+1, 1)
2 W_wrm = np.array([alpha1*phi_1(s) + alpha2*phi_2(s) for s in S_wrm])
3
4 plt.plot(S_wrm, W_wrm, marker="o", color="orange")
5 plt.grid()
6 plt.show()

```