Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет прикладної математики

Лабораторна робота №1

Статична модель страхування від COVID-19

«Методи теорії надійності та ризику»

Роботу виконав:
Студент 5 курсу, групи КМ-31мн,
Цибульник Антон Владиславович

Роботу приймав:
Професор кафедри ПМА,
Норкін Володимир Іванович

2023

Зміст

Постановка задачі

Нехай деяка страхова компанія уклала з N клієнтами містечка з населенням L мешканців договори на захист від захворювання COVID-19 (з госпіталізацією) строком на один рік. Відомо, що щодня у місті в середньому хворіють M людей, а $\alpha \in (0, 1)$ — частина з них, яка потребує госпіталізації.

Вартість стандартного стаціонарного лікування одного пацієнта складає K умовних одиниць. Завдання полягає у пошуку справедливої ціни на річну страховку від COVID-19.

Варіант завдання

Згідно з порядковим номером у групі $n = 3$, параметр загального капіталу компанії на рік U, найменша можлива ймовірність банкрутства ε, значення квантиля q, тестове значення ціни страховки π^*, а також перелічені у попередньому розділі величини визначатимуться так:

N	M	L	K	U	α	ε	q	π^*
$10n$	$10^3 n$	$10^6 n^2$	$10^3 n$	10^4	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$	$1 - \frac{1}{n+1}$	K/N
30	3000	$9 \cdot 10^6$	3000	10^4	0.25	0.25	0.75	100

Таблиця 1: Значення параметрів системи

Хід дослідження

1 Ймовірність мешканця міста захворіти протягом року

Оскільки M — середня кількість хворих на день, то для одного з L мешканців міста ймовірність захворіти протягом одного дня складає M/L. Відтак через незалежність цих подій з дня до дня, ймовірність бути здоровим протягом усього року дорівнює такому добутку ймовірностей: $(1 - \frac{M}{L})^{365}$. Імовірність протилежної події вказуватиме шукану ймовірність мешканця міста захворіти протягом року:

$$p = 1 - \left(1 - \frac{M}{L}\right)^{365} \tag{1.1}$$

2 Ймовірнісний розподіл витрачених компанією грошей протягом року

Перш за все, розглядатимемо події хвороби одного з N клієнтів компанії як серію незалежних експериментів. Тоді розподіл випадкової величини ξ як кількості хворих клієнтів компанії протягом року буде підпорядковуватися біноміальному розподілу з параметрами N та p :

$$\xi \sim Bin(N, p) \tag{2.1}$$

Однак страхова компанія має зобов'язання виключно перед α-часткою хворих осіб, які потребують госпіталізації. Отже, ввівши випадкову величину η як кількість госпіталізованих клієнтів компанії протягом року, отримаємо біноміальний розподіл із такими параметрами:

$$\eta \sim Bin(N, \alpha p) \tag{2.2}$$

Підставляючи значення параметрів згідно з варіантом, отримуємо величини $N = 30$, $p = 0.1146$ та $\alpha = 0.25$. Графік функції розподілу випадкової величини η зображений на Рис. 1.

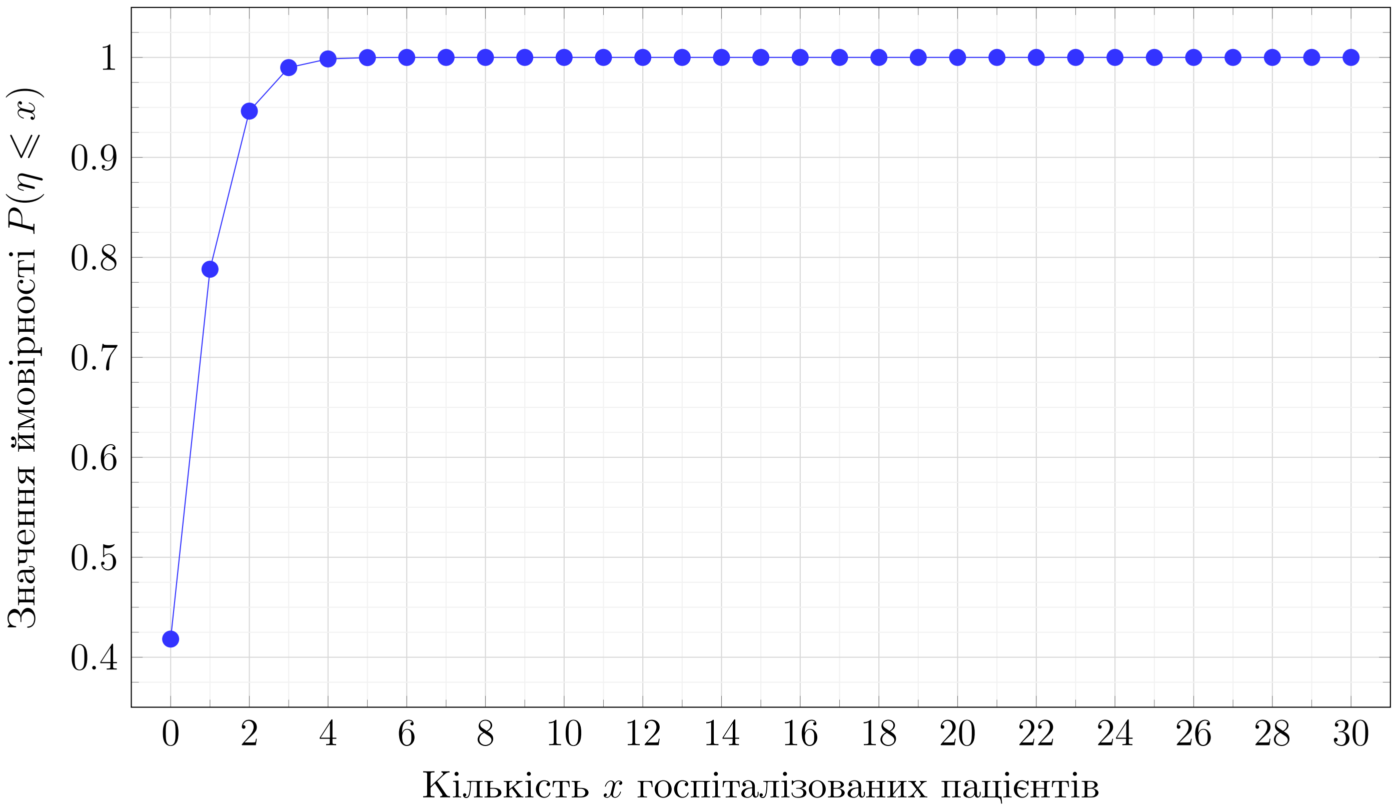

Рис. 1: Функція розподілу випадкової величини $\eta \sim Bin(30, 0.0287)$

З графіка бачимо, що, оскільки ймовірність захворіти p на додачу до відсотка госпіталізованих α є малими, функція розподілу зростає стрімко. Іншими словами, при заданих параметрах спостерігаємо високу ймовірність того, що хворих клієнтів буде небагато.

Повертаючись до завдання підрозділу: враховуючи ціну K стаціонарного лікування від COVID-19, випадкова величина $K\eta$ задаватиме кількість витрачених компанією грошей протягом року. Функція розподілу цієї величини матиме вигляд:

$$F_{K\eta}(y) = P(K\eta \leqslant y) = P\left(\eta \leqslant \frac{y}{k}\right) = F_\eta\left(\frac{y}{K}\right) \tag{2.3}$$

Враховуючи вигляд функції розподілу η, матимемо:

$$F_{K\eta}(y) = \sum_{k=1}^{\lfloor y/K \rfloor} C_N^k (p\alpha)^k (1-p\alpha)^{N-k} \tag{2.4}$$

3 Математичне сподівання, стандартне відхилення та q-квантиль кількості витрачених компанією грошей

Шукані характеристики випадкової величини $K\eta$ задаватимуться так:

$$M(K\eta) = KM\eta = KNp\alpha \tag{3.1}$$

$$\sqrt{D(K\eta)} = \sqrt{K^2 D\eta} = \sqrt{K^2 Np\alpha(1-p\alpha)} \tag{3.2}$$

$$F_{K\eta}(y) = q \implies y = F_{K\eta}^{-1}(q) \tag{3.3}$$

Враховуючи значення необхідних параметрів з Табл. 1, отримуємо:

$M(K\eta)$	$\sqrt{D(K\eta)}$	75%-ий квантиль
2 583	2 743.47	1

Таблиця 2: Числові характеристики випадкової величини $K\eta$

4 Середня кількість витрачених на одного клієнта грошей

Відштовхуючись від того, що $K\eta$ задає кількість витрачених компанією грошей протягом року, тоді $M(K\eta)$ — середня кількість витрачених компанією грошей на усіх своїх клієнтів, а відтак витрати на одного клієнта складатимуть:

$$\frac{M(K\eta)}{N} = Kp\alpha = 86.1 \tag{4.1}$$

5 Ймовірність страхової компанії збанкрутіти протягом року

Задано, що загальний капітал компанії на рік складає U умовних одиниць, а ціна страховки при цьому — π^* умовних одиниць. Із цього випливає, що на додачу до наявного капіталу компанія отримає від N клієнтів ще $N\pi^*$ умовних одиниць. Таким чином, імовірність банкрутства формулюватиметься як імовірність перевищення кількості витрачених компанією грошей протягом року $K\eta$ над сумарними збереженнями компанії $U + N\pi^*$:

$$P\left(K\eta > U + N\pi^*\right) = 1 - P\left(K\eta \leqslant U + N\pi^*\right) = 1 - F_\eta\left(\frac{U + N\pi^*}{K}\right) \tag{5.1}$$

Підставляючи значення з Табл. 1, імовірність банкрутства дорівнюватиме:

$$P\left(K\eta > U + N\pi^*\right) = 0.0015 \tag{5.2}$$

6 Оптимальна ціна страховки при заданій граничній імовірності банкрутства

Аналогічними до попереднього підрозділу міркуваннями приходимо до рівняння пошуку оптимальної ціни страховки $\widehat{\pi}$ при заданій граничній імовірності банкрутства ε :

$$P\left(K\eta > U + N\widehat{\pi}\right) \leqslant \varepsilon \tag{6.1}$$

Таким чином

$$1 - F_\eta\left(\frac{U + N\widehat{\pi}}{K}\right) \leqslant \varepsilon \tag{6.2}$$

В результаті

$$\widehat{\pi} \geqslant \frac{KF_\eta^{-1}(1-\varepsilon) - U}{N} \tag{6.3}$$

Зважаючи на те, що згідно з отриманим результатом (5.2) імовірність банкрутства є вкрай низькою при достатньо малому (відносно ціни стаціонарного лікування) значенні ціни страховки $\pi^* = 100$ умовних одиниць, можна припустити, що навіть при безплатному страхуванні усіх клієнтів компанія матиме достатньо власного капіталу U для того, щоб імовірність банкрутства не перевищувала $\varepsilon = 0.25$.

Тому в рамках дослідження пропонується відійти від заданого у початкових умовах відсотка госпіталізованих $\alpha = 0.25$ та покласти натомість дещо інші умови у припущенні, що абсолютно кожному хворому клієнту буде надане страхування від COVID-19.

Іншими словами, нехай $\alpha = 1$, тоді найменша оптимальна ціна страховки при заданій граничній імовірності банкрутства ε складатиме:

$$\widehat{\pi} \geqslant 166.6 \tag{6.4}$$

7 Залежність імовірності банкрутства від ціни страховки

Наостанок зобразимо на Рис. 2 залежність імовірності банкрутства (5.1) від ціни страховки:

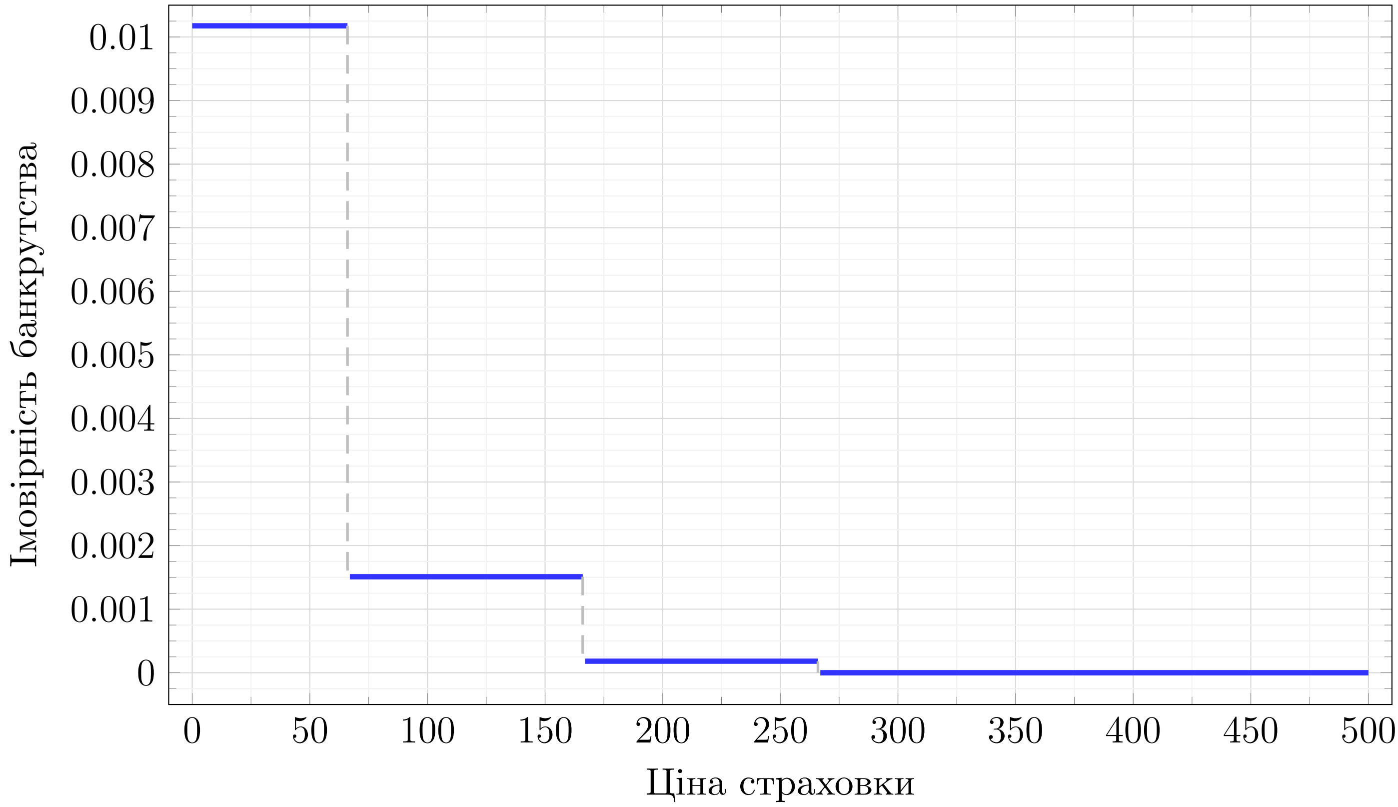

Рис. 2: Залежність імовірності банкрутства від ціни страховки

Програмна реалізація

В ході дослідження було використано засоби мови програмування `Python` версії `3.8.10` в інтегрованому середовищі розробки `Visual Studio Code` версії `1.78.2`. Нижче наведені тексти ключових інструментальних програм.

Лістинг 1: Підключення бібліотек

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import binom
```

Лістинг 2: Ініціалізація параметрів

```
n = 3

L = 10**6 * n**2
M = 10**3 * n
N = 10 * n
K = 10**3 * n
U = 10**4

alpha = 1/(n+1)
epsilon = 1/(n+1)
q = 1 - 1/(n+1)

pi_star = K/N

p = 1 - pow(1-M/L,365)
```

Лістинг 3: Побудова графіку функції розподілу випадкової величини η

```
x = np.arange(0, N+1, 1)
cdf = binom.cdf(x, N, p*alpha)

plt.plot(x, cdf, marker="o", linestyle="-", color="b")
plt.title(f"Binomial CDF (n={N}, p={p*alpha})")
plt.xlabel("Number of Successes")
plt.ylabel("Cumulative Probability")
plt.grid()
plt.show()
```

Лістинг 4: Обчислення основних формул та імовірностей

```
p_bankruptcy = binom.cdf((U + N*pi_star)/K, N, p*alpha)
print("Probability of bankruptcy:", round(1 - p_bankruptcy,4))

pi = (K * binom.ppf(1-epsilon, N, p*alpha) - U)/N
print("Optimal cost of the policy (at least):", pi)

quantile = binom.ppf(q, N, p*alpha)
print("Quantile:", quantile)
```

Лістинг 5: Побудова залежності імовірності банкрутства від ціни страховки

```
x_pi = [pi for pi in range(0,K+1)]
y_bankruptcy = [1-binom.cdf((U + N*pi)/K, N, p*alpha) for pi in range(0,K+1)]

plt.plot(x_pi, y_bankruptcy, linestyle="-", color="b")
plt.title("Bankruptcy probability as a function of policy price")
plt.xlabel("Policy Price")
plt.ylabel("Bankruptcy Probability")
plt.grid()
plt.show()
```