Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-технічний інститут

Комп'ютерний практикум №6

Розв'язання задачі Коші методами Рунге-Кутта та Адамса-Башфорта

предмет «Методи обчислень»

Роботу виконав:
Студент 3 курсу ФТІ, групи ФІ-91
Цибульник Антон Владиславович

Приймала:
Стьопочкіна Ірина Валеріївна

2022

Завдання

Методами Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса-Башфорта четвертого порядку розв'язати задачу Коші. На початку інтервалу у необхідній кількості точок значення для методу Адамса-Башфорта визначити методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Варіант завдання

Рівняння має вигляд:

$$\frac{dy}{dt} = (1 - x^2)y + F(x) \tag{1}$$

Покладемо крок $h = 0.1$. Нехай розв'язок відомий та визначається згідно варіанту так: $y = \operatorname{tg} x$. Знаючи точний розв'язок, визначимо початкові умови: при $x_0 = 0$ значення $y_0(x_0) = \operatorname{tg} x_0 = 0$. Аналогічним чином довизначимо доданок $F(x)$, підставививши точний розв'язок у рівняння (1). Остаточно отримаємо:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y), \text{ де } f(x, y) = (1 - x^2)(y - \frac{\sin x}{\cos x}) + \frac{1}{\cos^2 x} \tag{2}$$

Теоретичні відомості

Метод Рунге-Кутта

Числове розв'язання задачі полягає у побудові деякої таблиці наближених значень $y_1, y_2, \ldots, y_n$ розв'язку $y(x)$ у заданих точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Метод Рунге-Кутта відносять до однокрокових методів, тобто таких, які використовують для наближеного обчислення поточного значення лише попередні елементи. На практиці найчастіше використовують формули метода Рунге-Кутта четвертого порядку (наявні чотири коефіцієнти). Вони мають такий вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1) \\ k_3 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

Метод Адамса-Башфорта

Суть методу аналогічна до попереднього, проте метод Адамса-Башфорта відносять до багатокрокового, а отже, для наближеного обчислення поточного значення будуть використовуватися й попередні елементи (наприклад, для для методу четверного порядку – попередні чотири значення):

$$y_{i+1} = y_i + h(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3}))$$

Відповідно, перші декілька значень y_i знайдемо за методом Рунге-Кутта, а вже далі матимемо можливість запустити й метод Адамса-Башфорта.

Програмний код та проміжні результати

Програмний код методів наближеного обчислення

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

h = 0.1
move_to = np.pi/2

def f(x,y):
    return (1-x**2)*(y-np.sin(x)/np.cos(x)) + 1/pow(np.cos(x),2)

def define_k(x,y,h):
    k1 = h*f(x,y)
    k2 = h*f(x+0.5*h,y+0.5*k1)
    k3 = h*f(x+0.5*h,y+0.5*k2)
    k4 = h*f(x+h,y+k3)

    return k1,k2,k3,k4

def Runge_Kutta_method(x,n):
    y = [0]
    for i in range(n):
        k1,k2,k3,k4 = define_k(x[i],y[i],h)
        y.append(y[i]+(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6)
    x = np.append(x,move_to)

    return x,y

def Adams_Bashforth_method(x):
    x,y = Runge_Kutta_method(x,3)
    for i in range(3,x.size-1):
        y.append(y[i]+h*(55*f(x[i],y[i]) - 59*f(x[i-1],y[i-1]) + 37*f(x[i-2],y[i-2])
            - 9*f(x[i-3],y[i-3]))/24)

    return x,y

x = np.arange(0,move_to,h)
x,y_Runge_Kutta = Runge_Kutta_method(x,x.size)

plt.figure(figsize=(14, 4.5))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.grid()
plt.ylim(0,30)

plt.plot(x,y_Runge_Kutta, color = "blue", label = "approximate")
```

```python
plt.plot(np.arange(0,move_to,0.01), np.tan(np.arange(0,move_to,0.01)), color =
    "green", label = "tg(x)")
plt.legend(fontsize = "large")

x,y_Adams_Bashforth = Adams_Bashforth_method(x)

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.grid()
plt.ylim(0,30)

plt.plot(x,y_Adams_Bashforth, color = "blue", label = "approximate")
plt.plot(np.arange(0,move_to,0.01), np.tan(np.arange(0,move_to,0.01)), color =
    "green", label = "tg(x)")
plt.legend(fontsize = "large")
```

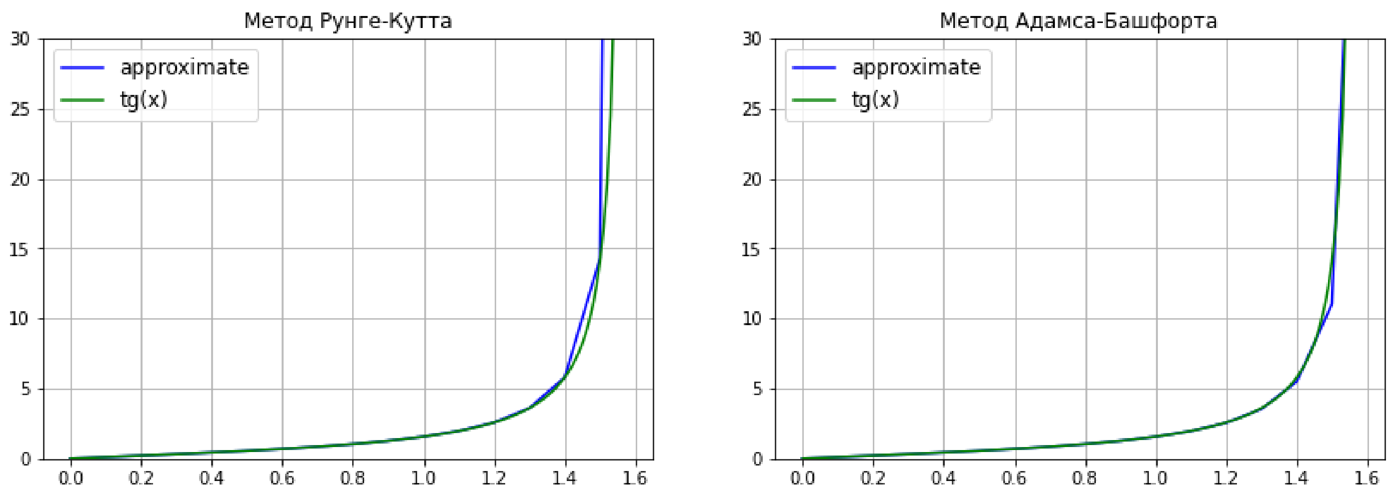

Рис. 1: Результати наближених обчислень

Порівняльний аналіз похибок

```python
Runge_Kutta_error = []
Adams_Bashforth_error = []

for i in range(x.size-1):
    Runge_Kutta_error.append(abs(np.tan(x[i]) - y_Runge_Kutta[i]))
    Adams_Bashforth_error.append(abs(np.tan(x[i]) - y_Adams_Bashforth[i]))

plt.figure(figsize=(14, 4.5))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.grid()
plt.plot(x[:-3], Runge_Kutta_error[:-2], color = "purple")

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.grid()
plt.plot(x[:-3], Adams_Bashforth_error[:-2], color = "red")
```

Рис. 2: Графіки похибок обчислень

Контрольні запитання

1. *Яким чином визначають початкові точки для методів Адамса?*

   Спершу для визначення початкових точок використовують однокрокові методи (наприклад, у цій лабораторній роботі було використано метод Рунге-Кутта). А далі – настає етап власне багатокрокових методів Адамса.

2. *Що таке однокрокові та багатокрокові методи розв'язання звичайних диференційних рівнянь?*

   До однокрокових відносять методи, які використовують для наближеного обчислення поточного значення лише і тільки елементи з одного попереднього кроку. Натомість багатокрокові схеми – залежно від порядку – для аналогічної задачі використовують певну кількість елементів із декількох попередніх кроків.