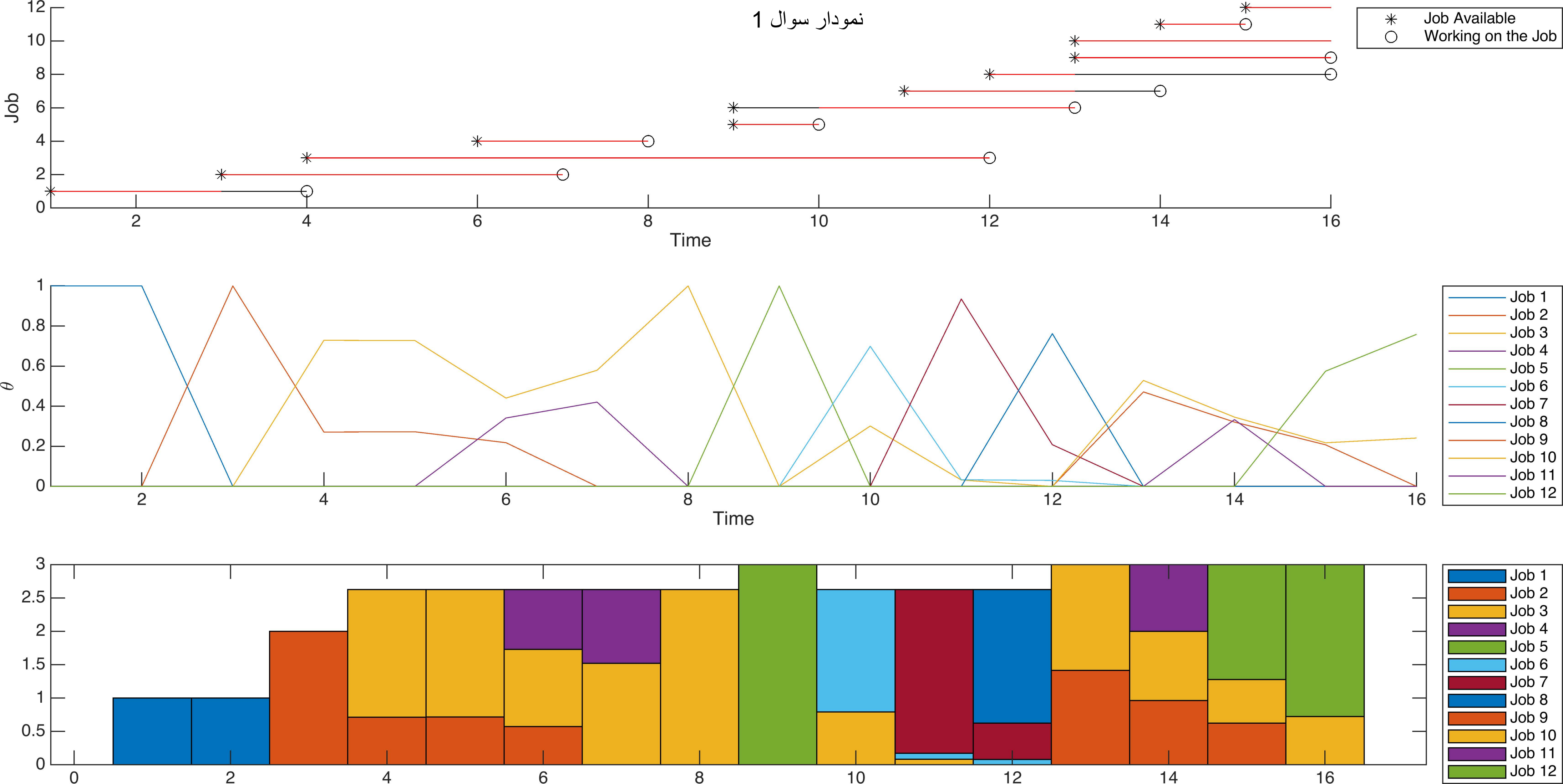

نمودار سوال 1
Job Available
Working on the Job
Job
Time
θ
Time
Job 1
Job 2
Job 3
Job 4
Job 5
Job 6
Job 7
Job 8
Job 9
Job 10
Job 11
Job 12

ارسلان فیروزی ۹۷۱۰۲۲۲۵

((به نام خدا))

ـ۱

$$\text{Minimize} \quad \sum_{r=1}^{T} \phi(S_r)$$

$$S^{min} < S_r < S^{max} \quad , r=1 \dots T$$

$$|S_{r+1} - S_r| < R \quad , r = 1 \dots (T-1) \Longrightarrow \begin{cases} S_{r+1} < R + S_r \\ S_r < R + S_{r+1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\sum_{r=A_i}^{D_i} \theta_{r,i} S_r}_{X} \geq W_i \quad , i = 1 \dots n$$

تبدیل به مسأله بهینه

$$\text{Minimize} \quad \sum_{r=1}^{T} \phi(S_r)$$

$$\text{s.t.} \quad S^{min} < S_r < S^{max}$$

$$S_{r+1} - S_r < R$$

$$S_r - S_{r+1} < R$$

$$\sum_{r=A_i}^{D_i} X_i(r) \geq W_i \quad , i = 1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(r) = S_r \quad , r = 1 \dots T$$

$$X_i(r) \geq 0 \quad , \forall i, r$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.2, 0.9, 0.6)$$

ـ۲ الف)

$$\text{Rate stability} \begin{cases} P_1(0,1,1) + P_2(1,0,1) + P_3(1,1,0) \geq (0.2, 0.9, 0.6) \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1 \\ P_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} P_2 + P_3 \geq 0.2 \\ P_3 + (1 - P_2 - P_3) = 1 - P_2 \geq 0.9 \longrightarrow P_2 \leq 0.1 \\ 1 - P_3 \geq 0.6 \longrightarrow P_3 \leq 0.4 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} P_1 = 0.5 \\ P_2 = 0.1 \\ P_3 = 0.4 \end{cases}$$

بردار سرویس با احتمال ۰٫۵ (۰،۱،۱)، با احتمال ۰٫۱ (۱،۰،۱) و با احتمال ۰٫۴ (۱،۱،۰) انتخاب می‌شود.

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ ب)

قسمت

طبق قضیه مقابل معادله و نابرابری را می‌نویسیم و به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$P_2 + P_3 \geq \frac{3}{4}$$

$$1 - P_2 \geq \frac{3}{4} \rightarrow P_2 \leq \frac{1}{4}$$

$$1 - P_3 \geq \frac{1}{2} \rightarrow P_3 \leq \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{1}{4} \\ P_2 = \frac{1}{4} \\ P_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بردار سرویس با احتمال $\frac{1}{4}$ $(0,1,1)$، با احتمال $\frac{1}{4}$ $(1,0,1)$ و با احتمال $\frac{1}{2}$ $(1,1,0)$ است.

ج) با توجه به احتمال هر بردار سرویس انتظار داریم در هر ۴ تصمیم، یکبار $(0,1,1)$، یکبار $(1,0,1)$ و ۲ بار $(1,1,0)$ باشد $\Leftarrow$ پس بدین صورت تناوبی بردار سرویس تعیین می‌گردد:

1- $(1,1,0)$
2- $(0,1,1)$
3- $(1,0,1)$
4- $(1,1,0)$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.6, 0.5, 0.9)$

د)

$$P_2 + P_3 \geq 0.6$$

$$1 - P_2 \geq 0.5 \rightarrow P_2 \leq 0.5$$

$$1 - P_3 \geq 0.9 \rightarrow P_3 \leq 0.1$$

$$\longrightarrow \begin{cases} P_1 = 0.4 \\ P_2 = 0.5 \\ P_3 = 0.1 \end{cases}$$

الگوریتم باید به این صورت باشد که در هر ۱۰ بردار سرویس، ۴ تا $(0,1,1)$، ۵ تا $(1,0,1)$ و ۱ تا $(1,1,0)$ باشد:

1- $(0,1,1)$
2- $(1,0,1)$
3- $(0,1,1)$
4- $(1,0,1)$
5- $(1,1,0)$
6- $(0,1,1)$
7- $(1,0,1)$
8- $(0,1,1)$
9- $(1,0,1)$
10- $(1,0,1)$

a-4

LP:

$$\text{Minimize } E[c^T x] \quad \text{s.t. } Ax \leq b \longrightarrow \text{Minimize } c_0^T x \quad \text{s.t. } Ax \leq b$$

مسئله بالا یک مسئله LP است

(b

$$\operatorname{Var}[c^T x] = E[(c^T x)^2] - (E[c^T x])^2 = E[x^T c c^T x] - x^T c_0 c_0^T x$$

$$= x^T E[c c^T] x - x^T c_0 c_0^T x = x^T \Sigma x$$

$$\text{Minimize } c_0^T x + \lambda x^T \Sigma x \longrightarrow \nabla f(x) = \lambda \Sigma x + c_0^T$$

$$\text{s.t. } Ax - b \leq 0$$

$$\Sigma \succeq 0 \qquad \nabla^2 f(x) = \lambda \Sigma \succeq 0 \rightarrow \text{محدب} \qquad \lambda \geq 0$$

محدب

چون تابع هدف و قید محدب است، مسئله Convex است

درصورتیکه $\lambda \geq 0$، مسئله محدب است و ما به دنبال کمینه کردن ریسک و هزینه هستیم.

درصورتیکه $\lambda < 0$، مسئله مقعر است:

در این حالت ما به دنبال بیشینه کردن ریسک و کمینه کردن هزینه هستیم. درصورتیکه مسئله Maximization باشد، به دنبال کمینه کردن ریسک و بیشینه کردن تابع هدف اولیه هستیم

$$\nabla^2 f(x) = \lambda \Sigma \preceq 0$$

هم تابع هدف و هم قید مقعر است $\Leftarrow$ مسئله Concave است.

(c

$$\text{Minimize } \beta$$

$$\text{s.t. } P(c^T x \geq \beta) \leq \alpha \qquad c^T x : \mathcal{N}(c_0^T x, x^T \Sigma x)$$

$$Ax \leq b$$

$$\operatorname{Var}(c^T x) = x^T \Sigma x :$$ در (b) محاسبه شد.

$$P(c^T x \geq \beta) = \int_\beta^\infty \frac{1}{\sqrt{x^T \Sigma x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{t - c_0^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}}_{u}\Big)^2} dt \qquad du = \frac{dt}{\sqrt{x^T \Sigma x}}$$

$$= \int_{\frac{\beta - c_0^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - F\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}\right)$$

CDF تابع برای توزیع نرمال: صعودی $\Leftarrow$ 1-CDF نزولی

چون F یک cdf نزولی است:

$$P(C^T x \geq \beta) \leq \alpha \overset{\text{هم ارز}}{\equiv} 1 - F\left(\frac{\beta - C_0^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}\right) \leq \alpha$$

$$F^{-1}(1-\alpha) \leq \frac{\beta - C_0^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}} \longrightarrow \sqrt{x^T \Sigma x} \times \underbrace{F^{-1}(1-\alpha)}_{\text{یک عدد ثابت}} + C_0^T x \leq \beta$$

این برابر است با

$$\sqrt{x^T \Sigma x} = \sqrt{x^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} x}$$

$$= \sqrt{x^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}T} x}$$

$$= \| x^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \|$$

که تابع نرم است

$\Longrightarrow$ چون قید حاصل جمع نرم و یک ترکیب خطی از x است،
قید محدب است
تابع هدف محدب است
مسئله محدب است.

(a - ۵

$$\phi(x) = f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \max\{0, f_i(x)\}^2$$

میدانیم $f_0(x)$ Convex است

برای $\max\{0, f_i\}^2$ اپیگراف آن را در نظر بگیرید: $epi = \{(x,t) \in R^2 \mid \max\{0, f_i\}^2 \leq t\}$

$$\max\{0, f_i\} \leq \sqrt{t}$$

$$\underbrace{f_i \leq \sqrt{t}}_{\text{می دانیم چون } f_i \text{ محدب است، اپیگراف آن محدب است}} \quad و \quad \underbrace{0 \leq \sqrt{t}}_{\text{محدب است}}$$

اشتراک ۲ اپیگراف محدب، محدب است $\Longrightarrow$ $\max\{0, f_i(x)\}^2$ محدب است

جمع توابع محدب، محدب است $\Longrightarrow$ $\phi(x)$ محدب است

(b

$$\Phi(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \max\{0, f_i(\tilde{x})\}^2 \quad , \alpha > 0$$

Dual Problem: $L(x,\lambda) = \underbrace{f_0(x)}_{\text{Convex}} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{f_i(x)}_{\text{Convex}} \longrightarrow L$ Convex

$$g(\lambda) = \inf_{x} L(x,\lambda)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \longrightarrow x^*$$

Dual Problem: maximize $g(\lambda) = L(x^*,\lambda)$

s.t. $\lambda > 0$

x^*: $\nabla f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i = 0$

$\hat{x}$: $\nabla f_0 + \alpha \sum_{i=1}^{m} \max\{2f_i, 0\} \nabla f_i = 0$

$f_i < 0$ $\quad 2f_i \nabla f_i$
$f_i > 0$ $\quad 0$

درصورتیکه $\lambda_i = \max\{0, 2\alpha f_i(\tilde{x})\}$ بگیریم به یک نقطه feasible خواهیم رسید.

(c
$$L(\hat{x}, \max\{0, 2\alpha f_i(\hat{x})\}) = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} 2\alpha \max\{0, f_i(\hat{x})\} f_i(\hat{x})$$

مقدار بهینه مسئله دوال

$$\Longrightarrow f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} 2\alpha \max\{0, f_i(\hat{x})\} f_i(\hat{x}) \leq$$ مقدار بهینه

(a-6
$$f_0(x) + \sigma \max_{i=1\dots m} f_i(x)^+$$

چون $f_i \leq 0$ Convex است $\Longrightarrow$ f_i epi نیز کانوکس است $\longrightarrow$ اشتراک آن epi f_i و تابع ثابت صفر کانوکس است $\Longrightarrow$ $\max\{0, f_i\}$ Convex است و epi Convex دارد

حال اگر max تمام $\max\{0, f_i\}$ را در نظر بگیریم چون اشتراک epi همه آن‌ها است و تک‌تک آن‌ها محدب است، پس $\max_i \max\{0, f_i\}$ محدب است

$$\Longrightarrow \underbrace{f_0(x)}_{\text{محدب}} + \sigma \underbrace{\max f_i(x)^+}_{\text{محدب}}$$ محدب است

(b

$$\text{minimize} \quad f_0(x) + ty$$

$$\text{s.t.} \quad f_i(x) \leq y \,, \quad i = 1, \dots, m$$

$$0 \leq y$$

$$L(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) = f_0(x) + ty + \lambda_1 (f_1(x) - y) + \lambda_2 (f_2(x) - y) + \dots + \lambda_m (f_m(x) - y)$$
$$+ \lambda_{m+1}(-y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = f_0'(x) + \lambda_1 f_1'(x) + \dots + \lambda_m f_m'(x) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = t - (\lambda_1 + \dots + \lambda_m + \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3^* = x_2^* \\ t = \lambda_1 + \dots + \lambda_m + \lambda_{m+1} \end{cases}$$

$$g_3(\lambda_1 \dots \lambda_m) = f_0(x_2^*) + ty + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_2^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y - y \lambda_{m+1}$$

$$\Longrightarrow g_3(\lambda) = f_0(x_2^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_2^*) + y\Big(t - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \lambda_{m+1}\Big) = g_2(\lambda) + y\Big(t - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \lambda_{m+1}\Big)$$

c) مسئله (۳) چون Convex است مقدار بهینه $g_3(\lambda)$ یا همان $g_3(\lambda^*)$ برابر است با مقدار بهینه مسئله (۳).

$$\Longrightarrow g_3(\lambda^*) = g_2(\lambda^*) + y^* \underbrace{\Big(t - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* - \lambda_{m+1}^*\Big)}$$

اگر این ترم مثبت باشد، مقدار بهینه برای y صفر است چون در غیر اینصورت
با توجه به اینکه $y \geq 0$ است، مقداری مثبت به تابع هدف در نقطه بهینه
اضافه می‌شود که این یعنی انتخاب بهتری برای y وجود دارد.
در این حالت $g_3(\lambda^*) = g_2(\lambda^*)$

شرط آن : $t - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* - \lambda_{m+1} > 0 \longrightarrow t > \lambda_{m+1}^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* = 1^T \lambda^*$

$$\longrightarrow t > 1^T \lambda^*$$