ارسلان فیروزی - ۹۷۱۰۲۲۲۵ ((به نام خدا))

۱-

$$\underset{x}{\text{minimize}} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \quad , \quad \phi(x) = \frac{|x|}{C-|x|}$$

$$-C < x < C$$

$$\text{s.t.} \quad \underset{m\times n}{A} x = b \qquad C > 0$$

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) + \overset{1\times m}{\lambda} (Ax-b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{C-|x_i|} + \lambda(Ax-b)$$

Dual Problem $\rightarrow$ maximize: $g(\lambda) = \inf_{x} L(x, \lambda)$

قیود محدب است

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{cases} \frac{C}{(C-x)^2} & 0<x<C \\ -\frac{C}{(C+x)^2} & -C<x\leq 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{2C}{(C-x)^3} & 0<x<C \\ +\frac{2C}{(x+C)^3} & -C<x<0 \end{cases} > 0$$

$\Leftarrow$ objective function محدب است

چون مسئله محدب است $\longrightarrow g(\lambda) = L(x^*, \lambda)$

$$x^* \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} L = 0 \xrightarrow{0<x_i} \frac{C}{(x_i-C)^2} + \lambda_{1\times m} \underset{m\times 1}{A^i} = 0$$

ستون iام A^i

$$\Longrightarrow (x_i-C)^2 = \frac{-C}{\lambda_{1\times m} A^i_{m\times 1}} \xrightarrow{0<x} x_i = C - \sqrt{\frac{-C}{\lambda A^i}}$$

به طور مشابه $\xrightarrow{x\leq 0} x_i = -C + \sqrt{\frac{C}{\lambda A^i}}$

Dual Problem :

$$\text{maximize: } \sum_{i=1}^{n} \left(-1 + \frac{C}{C - \left| \underbrace{\frac{\lambda A_i}{|\lambda A_i|}}_{\text{sign}(\lambda A_i)} \left(C - \sqrt{\frac{C}{|\lambda A_i|}}\right)\right|}\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda \left(A_i \left| \frac{\lambda A_i}{|\lambda A_i|} \left(C - \sqrt{\frac{C}{|\lambda A_i|}}\right)\right| - b_i\right)$$

$$\|x_{k+1} - x^*\|^{۲} = \|x_k - x_* - \alpha g\|^{۲} = \|x_k - x^*\|^{۲} + \alpha^{۲}\|g\|^{۲} - ۲\alpha\, g^\top (x_k - x_*)^{-۲}$$

$$\|x_{k+1} - x^*\|^{۲} - \|x_k - x^*\|^{۲} = \alpha^{۲}\|g\|^{۲} - ۲\alpha\, g^\top (x_k - x^*)$$

$$< \alpha\left(۲(f - f^*) - ۲\underbrace{g^\top (x_k - x^*)}_{f - f^*}\right) \qquad \alpha < ۲\frac{f-f^*}{\|g\|^{۲}}$$

$$= ۰$$

$$\Longrightarrow \|x_{k+1} - x^*\|^{۲} < \|x_k - x^*\|^{۲}$$

$$\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\|$$

(5-3

minimize $x_1^2+2x_2^2-x_1x_2-x_1$

$x_1+2x_2\le 2$

$x_1-4x_2\le -3$

$5x_1+76x_2\le 1$

$\longrightarrow$

$L(x,\lambda)=x_1^2+2x_2^2-x_1x_2-x_1+\lambda_1(x_1+2x_2+2)+\lambda_2(x_1-4x_2+3)+\lambda_3(5x_1+76x_2-1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-x_2-1+(\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=4x_2-x_1+(2\lambda_1-4\lambda_2+76\lambda_3)$$

KKT
$$\begin{cases} x_1+2x_2\le -2\\ x_1-4x_2\le -3\\ 5x_1+76x_2\le 1\\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,2,3\\ \lambda_1(x_1+2x_2+2)=0\\ \lambda_2(x_1-4x_2+3)=0\\ \lambda_3(5x_1+76x_2-1)=0\\ 2x_1-x_2-1+(\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3)=0\\ 4x_2-x_1+(2\lambda_1-4\lambda_2+76\lambda_3)=0\end{cases}$$

$\lambda_1=0\to\lambda_2=0\to\lambda_3=0\to \begin{cases}x_2=2x_1\\4x_2=x_1\end{cases}\to x_2=x_1=0\to x_1+2x_2>-2\quad \emptyset$

$\lambda_1=0\to\lambda_2=0\to\lambda_3\neq 0\to \begin{cases}5x_1+76x_2-1=0\\2x_1-x_2-1+5\lambda_3=0\\4x_2-x_1+76\lambda_3=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=\frac{1468}{3103}\\x_2=-\frac{233}{12412}\\\lambda_3=\frac{89}{12412}\end{cases}\to x_1+2x_2>-2\to\emptyset$

$\lambda_1=0\to\lambda_2\neq 0\to\lambda_3=0\to \begin{cases}x_1-4x_2+3=0\\2x_1-x_2-1+\lambda_2=0\\4x_2-x_1-4\lambda_2=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=\frac{4}{7}\\x_2=\frac{25}{28}\\\lambda_2=\frac{3}{4}\end{cases}\to x_1+2x_2>-2\quad\emptyset$

$\lambda_1=0\to\lambda_2\neq 0\to\lambda_3\neq 0\to \begin{cases}x_1-4x_2+3=0\\5x_1+76x_2-1=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=-\frac{7}{3}\\x_2=\frac{1}{6}\\\lambda_2=\frac{1375}{288},\ \lambda_3=\frac{61}{288}\end{cases}\to 5x_1+76x_2>1\to\emptyset$

$\lambda_1\neq 0\to\lambda_2\neq 0\to\lambda_3\neq 0\to\begin{cases}x_1+2x_2+2=0\\x_1-4x_2+3=0\\5x_1+76x_2-1=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=-\frac{7}{3}\\x_2=\frac{1}{6}\end{cases}$ شرایط صادق است ✓

با استفاده از CVX

$\longrightarrow$ $x_1=-2.33$, $x_2=0.1667$, $\lambda_1\simeq 1.9$, $\lambda_2=3.47$, $\lambda_3=0.59$ $\xrightarrow{KKT}$

$x_1+2x_2\le -2$ ✓

$x_1-4x_2\le -3$ ✓

$5x_1+76x_2\le 1$ ✓

$\lambda_1(x_1-2x_2+2)\simeq 0$ ✓

$\lambda_2(x_1-4x_2+3)\simeq 0$ ✓

$\lambda_3(5x_1+76x_2-1)\simeq 0$ ✓

$2x_1-x_2-1+(\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3)=0$ ✓

$4x_2-x_1+(2\lambda_1-4\lambda_2+76\lambda_3)=0$ ✓

3 – b)

جدول زیر بدست آمد:

$\delta 1$	$\delta 2$	P^*_{exact}	$P^*_{prediction}$
0	0	8.2	8.2
0	-0.1	8.7	8.6
0	+0.1	7.9	7.9
-0.1	0	8.6	8.4
-0.1	-0.1	8.8	8.8
-0.1	+0.1	8.3	8.1
+0.1	0	8.2	8.0
+0.1	-0.1	8.7	8.4
+0.1	+0.1	7.8	7.7

همانطور که مشاهده می‌کنید، رابطه

$$P^*_{prediction} < P^*_{exact}$$

برای تمام ردیف ها برقرار است. در کتاب بیان شده است که در صورتی مسئله محدب باشد و *Slater's Condition* برقرار باشد این رابطه صحیح است. اثبات را در زیر آورده ام.

در صورتیکه مسئله محدب باشد و شرایط *Slater* برقرار باشد، داریم:

$$p^* = g(\lambda^*, v^*) \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \, f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i^* \, h_i(x) \leq f_0(x) + {\lambda^*}^T u + {v^*}^T V$$

$$\Rightarrow \; p^* - {\lambda^*}^T u + {v^*}^T V \leq \; f_0(x)$$

کد در زیربخش سوال ۳ در فایل *main.m* قرار دارد.

minimize e^{-x} (a_6

s.t. $\frac{x^2}{y} \leq 0$ ، $D = \{(x,y) \mid y > 0\}$

$\frac{x^2}{y} \leq 0 \xrightarrow{y>0}$ محدب

objective function : محدب ⟶ مسئله محدب

قید : محدب

$$\boxed{e^{-x^*} = e^{-0} = 1 = p^* \quad x^* = 0 \ ، \ y^* > 0}$$: مقدار بهینه

تنها مقدار ممکن برای x صفر است ←

$L(x,y) = e^{-x} + \lambda \frac{x^2}{y}$ ، $g(\lambda) = \inf_{x,y} e^{-x} + \lambda \frac{x^2}{y}$ (b

$\lambda > 0$

با x بزرگ به صفر میل میکند

x^2 و y مثبت است ← اگر $\lambda \geq 0$ ← حاصل صفر است

اگر $\lambda < 0$ ← $-\infty$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\lambda}{\text{maximize}} \ 0 \quad \Longrightarrow \quad d^* = 0$$

$\lambda \geq 0$ duality gap $-d^* + p^* = 1$

از طریق متلب کد مسئله را پیاده سازی کردم اما به ارور خوردم که موفق به حل آن جز در یک مورد نشدم. برطرف کردن مشکل باعث تغییر مسئله dual و در نتیجه مقدار optimal آن می‌شود که یعنی به جواب درستی نمیرسیم.

c) شرایط slater's condition را ندارد چون نقطه‌ای در $\{(x,y) \mid y > 0\}$ وجود ندارد که $\frac{x^2}{y} < 0$ ارضا شود

پس شرایط slater's برقرار نیست.

(d

minimize e^{-x}

s.t. $\frac{x^2}{y} \leq u$

$y > 0$

$\longrightarrow L(x,y,\lambda) = e^{-x} + \lambda\left(\frac{x^2}{y} - u\right)$, $\lambda > 0$

$g(\lambda) = \inf_{x,y>0} L(x,y,\lambda)$

اگر $u<0 \longrightarrow \frac{x^2}{y} \leq -|u| \longrightarrow$ شرط هیچوقت برقرار نمی‌شود $\Longrightarrow \underset{u<0}{p^*(u)} = \infty$

اگر $u=0 \longrightarrow p^*(0) = 1$

اگر $u>0 \longrightarrow \frac{x^2}{y} \leq u \longrightarrow x \to \infty$, $y \to \infty$; بیشتر از x $\Longrightarrow p^*(u) = 0$

$$\underbrace{p^*(u)}_{0} \geq \overset{1}{p^*(0)} - \lambda^* \frac{u}{\oplus} \xrightarrow{\text{اگر } u>0} 0 \geq 1 - \lambda^* \frac{u}{\oplus}$$

که میتواند این نابرابری برقرار نباشد

$\Longleftarrow$ نابرابری به‌صورت عمومی برقرار نیست

(a – ۵

$$\underset{}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i, y_i) \quad \longrightarrow \quad L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i, y_i) + \lambda_1 (Ax + s) + \lambda_2 (Ay + t)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + s = 0$$

$$Ay + t = 0$$

Dual Decomposition:

Higher Level:
$$\underset{\lambda_1, \lambda_2}{\text{maximize}} \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1 s + \lambda_2 t$$

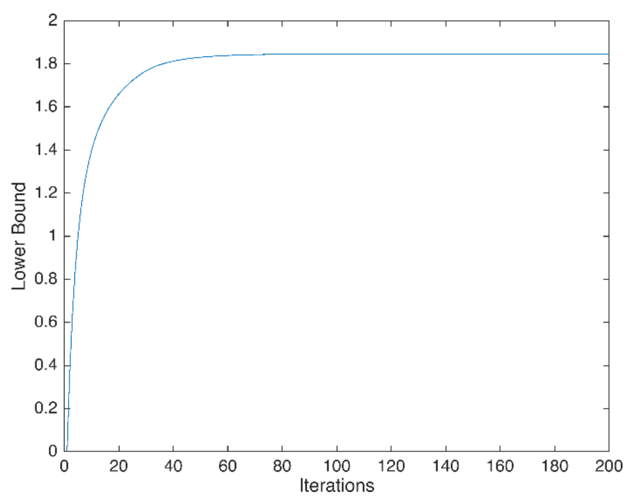
Lower Level:
$$\underset{x_i, y_i}{\text{minimize}} \quad \phi_i(x_i, y_i) + \lambda_1 A^i x_i + \lambda_2 A^i y_i$$
$$\text{s.t.} \quad x_i, y_i \geq 0$$

⇐ ابتدا Lower Level با λ_1 و λ_2 داده شده حل می‌شود. سپس در higher level طبق رابطه زیر آپدیت می‌کنیم:

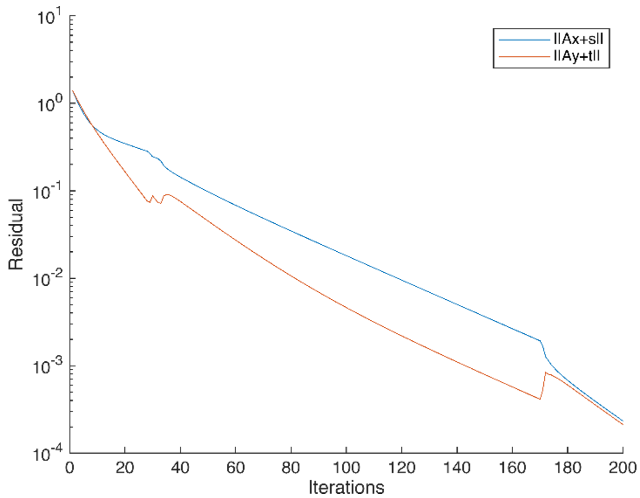
$$\nabla g = [Ax + s \;,\; Ay + t]$$

```
λ1 = λ1 + transpose(step_size * (A*x + s));
λ2 = λ2 + transpose(step_size * (A*y + t));
```

b) نتایج: باند پایین



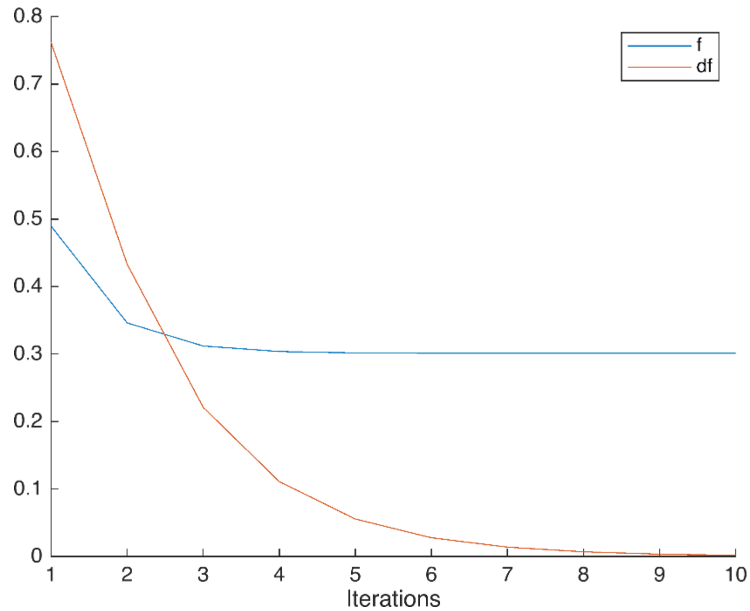
باقی‌مانده:



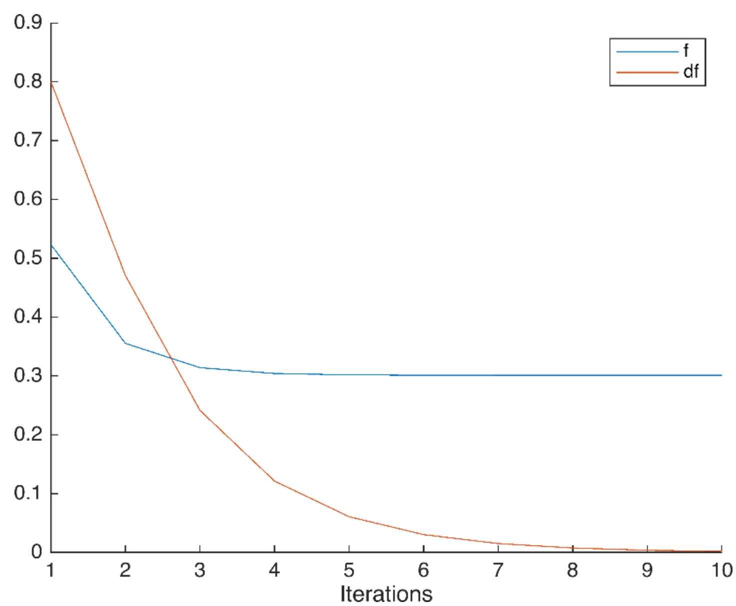
کد در زیربخش سوال ۵ فایل *main.m* قرار دارد.

۶- a)

با شروع از نقطه اولیه ۱:

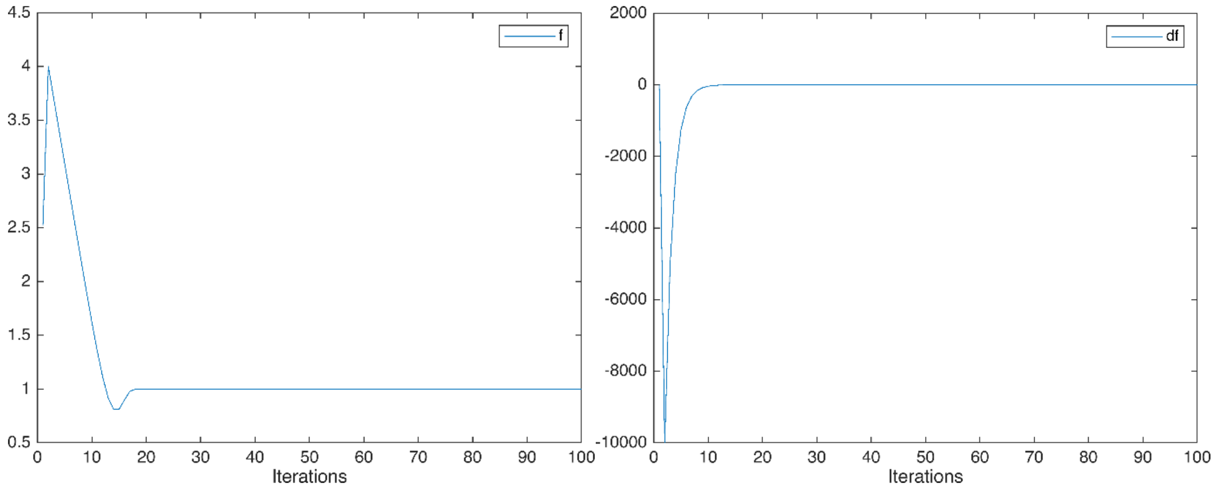


با شروع از نقطه اولیه ۱.۱:



انتظار داشتم مقدار به مقدار بهینه *log10(2)* میل کنیم که این اتفاق افتاده است.

b) با شروع از نقطه اولیه ۳:



انتظار داشتم به مقدار بهینه *1-log(1)* میل کنم که این اتفاق افتاده است. در این سوال به دلیل حرکت *x* به منفی من از *Projection* نیز استفاده کردم و با اینکار به نتایج درست رسیدم.