№2

d) $$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{n} \sim N(0,1) \quad \text{ЦПТ маркова}$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - M\xi\right)\sqrt{\frac{n}{D\xi}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - M\xi \sim N\left(0, \frac{D\xi}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N\left(M\xi, \frac{D\xi}{n}\right)$$

f) $f_{(ij)}(u, v)$ – ?

№2

б) $p_{(ij)}(u,v) - ?$ $1 \le i < j \le n$

Рассмотрим $p_{(ij)}$ как: $p_{(ij)}(u,v) = \dfrac{P(\overbrace{X_{(i)} \in (u, u+du), X_{(j)} \in (v, v+dv)}^{\text{событие } A})}{du\,dv}$

Событие A можно переформулировать

в следующие события, которые должны пройти одновременно, т.е $A = A_1 \cdot \ldots \cdot A_5$

Событие	кол-во вар-ов	Вер-ть одного
A_1) - один ~~из~~ элемент $\in (u, u+du)$	n	$p(u)du$
A_2) - один элемент $\in (v, v+dv)$	$n-1$	$p(v)dv$
A_3) - $(i-1)$ эл-ов $< u$	C_{n-2}^{i-1}	$F^{i-1}(u)$
A_4) $(j-i-1)$ эл-ов $\in (u, v)$	C_{n-i-1}^{j-i-1}	$(F(v)-F(u))^{j-i-1}$
A_5) оставшиеся $(n-j)$ эл-ов $> v$	$(1-F(v))^{n-j}$	1

В итоге имеем

$$p_{(ij)}(u,v) = \frac{P(A)}{du\,dv} = \frac{P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)\cdot P(A_5)}{du\,dv} =$$

$$= \frac{n p(u)du \cdot (n-1) p(v) dv \cdot C_{n-2}^{i-1} \cdot C_{n-i-1}^{j-i-1} \cdot 1 \cdot F^{i-1}(u) \cdot (F(v)-F(u))^{j-i-1} \cdot (1-F(v))^{n-j}}{\cancel{du\,dv}} =$$

$$= \frac{n!}{(n-j)!\,(i-1)!\,(j-i-1)!} \cdot F^{i-1}(u) \cdot (F(v)-F(u))^{j-i-1} \cdot (1-F(v))^{n-j} \cdot p(u) \cdot p(v)$$

$F(x) = 1 - e^{-x}$ $\quad p(x) = e^{-x}$ $\quad (x \in (0, +\infty))$

$$p_{(ij)}(u,v) = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-i-1)!\,(i-1)!} \cdot (1-e^{-u})^{i-1} (e^{-u} - e^{-v})^{j-i-1} \cdot (e^{-v})^{n-j} \cdot e^{-(u+v)} \quad (0,+\infty)\times(0,+\infty)$$

Ответ: где $1 \le i < j \le n$

$$p_{(ij)}(u,v) = \frac{n!\, e^{-(u+v)}}{(n-j)!\,(j-i-1)!\,(i-1)!} \cdot e^{-v(n-j)} \cdot (1-e^{-u})^{i-1} \cdot (e^{-u} - e^{-v})^{j-i-1} \quad (0,+\infty)\times(0,+\infty)$$