

Лекция 13. Элементы алгебры логики

Термин «**логика**» происходит от древнегреческого “logos”, означающего «слово, мысль, понятие, рассуждение, закон».

Алгеброй логики называется аппарат, который позволяет выполнять действия над высказываниями.

Алгебру логики называют также **алгеброй Буля**, или **булевой алгеброй**, по имени английского математика Джорджа Буля, разработавшего в XIX веке ее основные положения.

Алгебра — это операции (например: сложение, умножение и т.д.) над элементами какого-то множества (в школьной алгебре это множество действительных чисел).

Буль решил, что для его алгебры элементом будет высказывание. Т.к. высказывание может быть либо истинным, либо ложным, Буль решил, что элементы будут принимать всего два значения — 0 (ложь) и 1 (истина).

Он ввел три операции над этими элементами, хорошо известными в логике с аристотелевских времен:

- И (объединение, конъюнкция),
- ИЛИ (разделение, дизъюнкция) и
- НЕ (отрицание, инверсия).

Производя эти операции над элементами (высказываниями), мы в итоге узнаем, истинны они или ложны (равны 1 или 0).

В булевой алгебре высказывания принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, X, Y.

В алгебре Буля введены три основные логические операции с высказываниями: сложение, умножение, отрицание.

Определены аксиомы (законы) алгебры логики для выполнения этих операций. Действия, которые производятся над высказываниями, записываются в виде логических выражений.

Логические выражения могут быть простыми и сложными.

Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логические операции. В простом логическом выражении возможно только два результата — либо «истина», либо «ложь». (Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно).

Сложное логическое выражение содержит высказывания, объединенные логическими операциями. По аналогии с понятием функции в алгебре сложное логическое выражение содержит аргументы, которыми являются высказывания.

В качестве основных логических операций в сложных логических выражениях используются следующие:

- НЕ (логическое отрицание, инверсия);
- ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция);

- И (логическое умножение, конъюнкция).

Логическая операция НЕ применяется к одному аргументу, в качестве которого может быть и простое, и сложное логическое выражение.

Результатом операции НЕ является следующее:

- если исходное выражение истинно, то результат его отрицания будет ложным;
- если исходное выражение ложно, то результат его отрицания будет истинным.

Для операции отрицания НЕ приняты следующие условные обозначения:

не А, \neg , not А, $\neg A$.

Результат операции отрицания НЕ определяется следующей таблицей истинности:

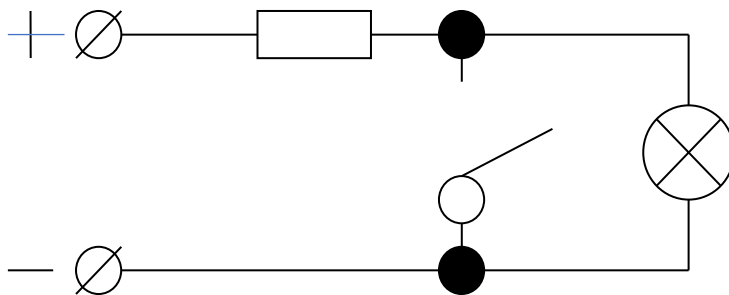
A	не А
0	1
1	0

Результат операции отрицания истинен, когда исходное высказывание ложно, и наоборот.

примеры отрицания.

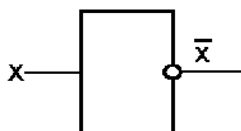
1. Высказывание «Земля вращается вокруг Солнца» истинно. Высказывание «Земля не вращается вокруг Солнца» ложно.
2. Высказывание «4 — простое число» ложно. Высказывание «4 — не простое число» истинно.

Простейшая иллюстрация – электрическая цепь.



Сигнал на выходе (лампочка горит, то есть, =1) появляется только в том случае, если ключ НЕ включен (т.е. = 0)

В ЭВМ отрицание реализуется электронной схемой «инвертор»



Логическая операция ИЛИ выполняет функцию объединения двух высказываний, в качестве которых может быть и простое, и сложное логическое выражение. Высказывания, являющиеся исходными для логической операции, называют аргументами.

Результатом операции ИЛИ является выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда истинно будет хотя бы одно из исходных выражений.

Применяемые обозначения: A или B , $A \vee B$, A or B .

Результат операции ИЛИ определяется следующей таблицей истинности:

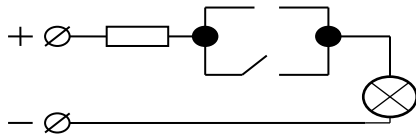
A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Результат операции ИЛИ истинен, когда истинно A , либо истинно B , либо истинно и A и B одновременно, и ложен тогда, когда аргументы A и B — ложны.

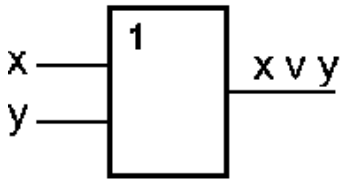
Пример:

Рассмотрим высказывание «Знания или везение — залог сдачи экзаменов». "Успешно сдать экзамен может тот, кто все знает, или тот, кому повезло (например, вытянут единственный выученный билет), или тот, кто все знает и при этом выбрал «хороший» билет.

Электрическая схема: сигнал на выходе будет равен 0 (лампочка не горит) только в том случае, если оба (все) ключа выключены (равны 0). Иначе говоря, сигнал на выходе будет равен 1, когда выполняется условие ИЛИ (когда включен ИЛИ первый ключ, ИЛИ второй, ИЛИ оба ключа).



Функцию ИЛИ можно реализовать диодной схемой, называемой дизъюнктором или схемой сборки (схема как бы собирает единицы на входе и выдает на выходе в виде одной единицы).



Логическая операция И выполняет функцию пересечения двух высказываний (аргументов), в качестве которых может быть и простое, и сложное логическое выражение. Результатом операции И является выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда истинны оба исходных выражения.

Применяемые обозначения: A и B , $A \wedge B$, A & B , A and B .

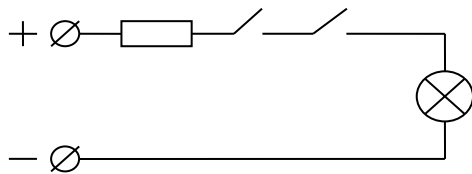
Результат операции И определяется следующей таблицей истинности:

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0

1	0	0
1	1	1

Результат операции И истинен тогда и только тогда, когда истинны одновременно высказывания А и В, и ложен во всех остальных случаях.

Электрическая схема: сигнал на выходе будет равен 1 (лампочка горит) только тогда, когда оба ключа включены (равны 1). Иначе говоря, сигнал на выходе будет равен 1 только тогда, когда выполняются условия И (включены И первый, И второй ключи)



Может реализовываться диодной схемой, которая называется конъюнктом, схемой совпадения (сигнал на выходе равен 1 только тогда, когда совпадает во времени единицы на всех входах).