Величко Арсений Александрович
ИВТ 1 курс, 2 группа, 3 подгруппа
Предмет: Основы компьютерной алгебры

Лабораторная работа 2

Задание 2.1: «Математические объекты и их представления»

Возьмём несколько понятий компьютерной алгебры на рассмотрение:

- Компьютерная алгебра — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике, и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре;
- Компьютерная алгебра возникла в середине XX века на стыке математики и информатики. Это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов. Синонимами термина «компьютерная алгебра» являются «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования», «формальные вычисления»;
- Компьютерная алгебра рассматривает такие объекты, которые имеют слишком вычислительный характер, чтобы встречаться в книгах по алгебре, и слишком алгебраический характер, чтобы быть представленными в учебниках по информатике;
- Компьютерная алгебра (в отличие от численных методов) занимается разработкой и реализацией аналитических методов решения математических задач на компьютере и предполагает, что исходные данные, как и результаты решения, сформулированы в аналитическом (символьном) виде.

Свойства представлений математический объектов в компьютерной алгебре

Пусть задано множество объектов M и множество представлений R, между которыми установлено соответствие. Тогда представление называется каноническим, если соответствие является взаимно однозначным, т.е. каждому объекту $m \in M$ соответствует один и только один элемент $r \in R$. Представление множества объектов M называется нормальным, если только для одного (особого) элемента множества объектов, так называемого нулевого элемента, существует единственное представление в множестве представлений R. Чтобы распознать, являются ли два объекта m1 и m2 одним и тем же объектом, в случае

Величко Арсений Александрович
ИВТ 1 курс, 2 группа, 3 подгруппа
Предмет: Основы компьютерной алгебры

канонического представления достаточно сравнить их представления r1 и r2 . Чтобы узнать, являются ли два разных представления r1 и r2, представлением одного и того же объекта в случае нормального представления необходимо произвести алгебраическую операцию получения нулевого объекта и, если полученное представление (r1 – r2) есть представление нулевого объекта, то тогда r1 и r2 соответствуют одному объекту из множества M.

Проблема идентичности объектов.

Пример. X + Y и Y + X – два разных представления одного и того же объекта – полинома. Важность проблемы идентичности объектов в системах компьютерной алгебры обусловлена с одной стороны, существованием у объектов (всюду определённых) алгебраических свойств, а с другой – невозможностью выполнения операции деления, если второй операнд равен нулю (обнаруживаемой и автоматически нейтрализуемой компьютером). Проблема идентичности наиболее легко разрешается для канонических представлений, разрешима (но с большими трудностями) для нормальных представлений, не разрешима для всех остальных представлений. Если мы не можем установить, представляют ли r1 и r2 один и тот же объект, то как корректность выполненных вычислений, так и результат этих вычислений сомнительны.

Плотные и разреженные представления.

Особую роль в представлениях математических объектов играют нулевые и иные особые элементы алгебраических структур (в частности, бесконечности, пустые множества или соотношения неопределённостей). Различают два способа моделирования особых элементов: 1) Представлять и хранить особые элементы в структурах данных; 2) Представлять и хранить не сами особые элементы, а соглашения о работе с такими элементами. При втором способе возникает возможность получения более компактного представления данных и более эффективных преобразований над данными. В плотных представлениях хранятся все особые элементы, а в разреженных представлениях – особые элементы не хранятся.

Целые числа

могут представляться в компьютере со знаком или без знака. Целые числа без знака обычно занимают в памяти компьютера один или два байта. В однобайтовом формате принимают значения от 000000002 до 111111112. В двухбайтовом формате – от 00000000 000000002 до 11111111 111111112. Целые числа со знаком обычно занимают в памяти компьютера один, два или четыре байта, при этом самый левый (старший) разряд содержит информацию о знаке числа.

Величко Арсений Александрович
ИВТ 1 курс, 2 группа, 3 подгруппа
Предмет: Основы компьютерной алгебры

Система вещественных чисел

в математических вычислениях предполагается непрерывной и бесконечной, т.е. не имеющей ограничений на диапазон и точность представления чисел. Однако в компьютерах числа хранятся в регистрах и ячейках памяти с ограниченным количеством разрядов. В следствие этого система вещественных чисел, представимых в машине, является дискретной (прерывной) и конечной. При написании вещественных чисел в программах вместо привычной запятой принято ставить точку. Для отображения вещественных чисел, которые могут быть как очень маленькими, так и очень большими, используется форма записи чисел с порядком основания системы счисления.

Алгебраическим называется число,

являющееся решением уравнения: P(x) = 0 где P(x) – полином от одной переменной с целыми коэффициентами.

Алгебраической называется функция,

являющаяся решением уравнения: G (x) = 0 где G (x) – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами – полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами. Простым радикалом называется положительная дробная степень от полинома с целыми коэффициентами. Вложенным же радикалом называется положительная дробная степень от выражения, содержащего радикалы.

Для представления простых радикалов

необходимо ввести новую квазипеременную – r1, обозначающую этот радикал. С помощью квазипеременной описывается вхождение степеней простого радикала в другие выражения. При этом необходимо учитывать, что порождающий полином удовлетворяет условию: G (r1) = 0. Для простых радикалов можно построить канонические представления, однако их редко применяют в системах компьютерной алгебры по следующим причинам: (1) алгоритмы получения таких представлений, как правило, неэффективны и нерациональны; (2) сами канонические представления не упрощают, а усложняют вид выражений с радикалами, предъявляемый пользователю.

Для получения канонического представления

простого радикала следует (после введения квазипеременной) разрешить следующие проблемы: (1) Проблема неоднозначности дробно-рациональных отношений радикалов. (2) Проблема независимости радикалов друг от друга (в случае работы с несколькими радикалами). (3) Проблема приведения дробно-рациональных функций к виду со знаменателями, свободными от радикалов

Для вложенных радикалов

выбор канонического представления является еще более сложным, чем для простых радикалов. Однако характер возникающих при этом задач сохраняется. Во-первых, необходимо ввести новые квазипеременные. Во-вторых, необходимо решить те же проблемы (1) (2) (3), которые относятся к простым радикалам.

Ключевая проблема построения канонического представления

для алгебраических функций общего вида – это проблема определения их взаимозависимости. Существует два способа решения указанной проблемы: (1) Факторизация порождающего полинома алгебраической функции и анализ её результатов (2) Построение примитивных элементов поля алгебраических функций. Оба способа разрешения взаимозависимости рациональных функций вычислительно трудоёмки, поэтому в системах компьютерной алгебры канонические представления для алгебраических функций не применяются

1-й способ решения проблемы взаимозависимости.

Если порождающий алгебраическую функцию полином неприводим, т.е. не разложим на множители (полиномы с целыми коэффициентами), то корни уравнения P (x) = 0 (алгебраические функции) независимы. Таким образом, для поиска независимых алгебраических функций необходимо решить задачу факторизации полинома от нескольких переменных. Более того, если у нас есть несколько порождающих полиномов, возникает задача разложения полиномов на множители над алгебраическими полями, что довольно сложно. Т.е., если есть два неприводимых полинома P1 и P2, это еще не значит, что корни второго полинома не являются независимыми в терминах корней первого полинома.

2-й способ решения проблемы взаимозависимости.

Примитивным элементом поля алгебраических функций (алгебраических чисел) называется алгебраическая функция (алгебраическое число), с помощью которой можно выразить все остальные элементы такого поля.

Матрица

имеет вид a11 a1m an1 anm , где aij – некоторые аналитические выражения, i=1, …, n; j=1, …, m. Или A=(aij) n, m. Если n и m – заданные явно натуральные числа, то и запись матрицы может быть конкретной. Если в записи матрицы присутствует только правая часть, то такое представление называется явным. Если запись матриц осуществлена в односимвольном виде, т.е. левой частью (A), то такое представление называется неявным. Плотные матрицы — это матрицы с большим кол-вом ненулевых элементов. Представляются в виде прямоугольной таблицы или массива. Алгоритм Барейса - семейство методов исключения без использования дробей, т.е. таких, где все необходимые деления выполняются точно. Разреженные матрицы – их методы запоминания с символьными элементами аналогичны методам запоминания различных полиномов; можно использовать списки вида {(aij, i, j)}, где aij – значение элемента (аналитическое выражение), i, j – номер строки и столбца, указывающие положение этого эл-та в матрице.