

Лабораторная работа №8

Задание 1

Постановка задачи

Дан процесс, связанный с изменением выходного напряжения $U_{\text{вых}}$ на обкладках конденсатора электрической цепи, которая включает активное сопротивление $R = 2$ Ом и конденсатор с емкостью $C = 0.01$ Ф. Построить переходную характеристику заряда конденсатора по схеме RC цепочки с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, $U_{\text{вх}} = 50$ В:

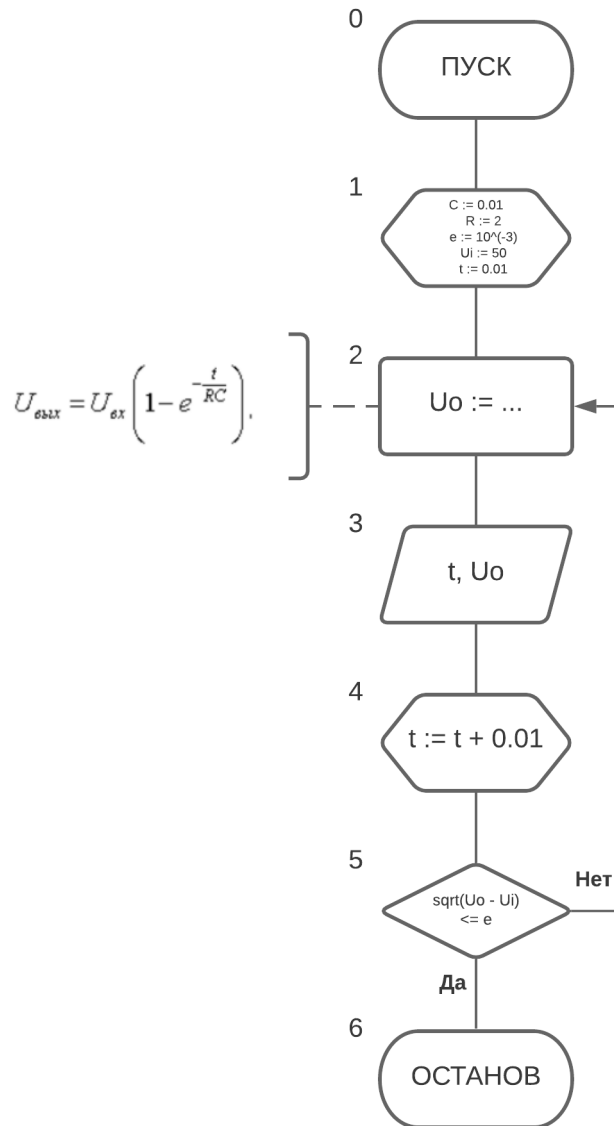
$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

начальное значение $t = 0.01$, с шагом 0.01

Математическая модель

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Блок-схема



Описание переменных

Переменная	Тип	Суть
C	real	Ёмкость конденсатора
R	real	Сопротивление
t	real	Время
e	real	Точность ε
Uo	real	Выходное напряжение
Ui	real	Входное напряжение

Код программы

```
main.pas
1  program LR8_Z1;
2  uses
3      math;
4
5  var
6      C, R, t, e, Uo, Ui: real;
7
8  begin
9      C := 0.01;
10     R := 2;
11     e := power(10, -3);
12     Ui := 50;
13     t := 0.01;
14
15     repeat
16         Uo := Ui * (1 - exp((-1 * t) / (R * C)));
17         writeln('Выходное напряжение при t = ', t:2:2, ': ', Uo:0:8);
18         t := t + 0.01;
19     until abs(Uo - Ui) <= e;
20 end.
```

input

Compiled Successfully. memory: 1572 time: 0.04 exit code: 0

```
Выходное напряжение при t = 0.01: 19.67346701
Выходное напряжение при t = 0.02: 31.60602794
Выходное напряжение при t = 0.03: 38.84349199
Выходное напряжение при t = 0.04: 43.23323584
Выходное напряжение при t = 0.05: 45.89575007
Выходное напряжение при t = 0.06: 47.51064658
Выходное напряжение при t = 0.07: 48.49013083
Выходное напряжение при t = 0.08: 49.08421806
Выходное напряжение при t = 0.09: 49.44455017
Выходное напряжение при t = 0.10: 49.66310265
Выходное напряжение при t = 0.11: 49.79566143
Выходное напряжение при t = 0.12: 49.87606239
Выходное напряжение при t = 0.13: 49.92482804
Выходное напряжение при t = 0.14: 49.95440590
```

Задание 2

Постановка задачи

Вычислить $e(x)$ с точностью 10^{-4} . Начальные условия: $k = 1$, $U_0 = 1$, $S_0 = 1$, $x = 0.5$

Представить математическое обоснование вывода ряда!

Математическая модель

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Заменяем $\frac{x^k}{k!}$ на U_k

Найдем рекуррентную зависимость, анализируя соседние члены ряда:

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}}$$

Тогда каждый последующий член ряда будет равен:

$$U_k = M \cdot U_{k-1}$$

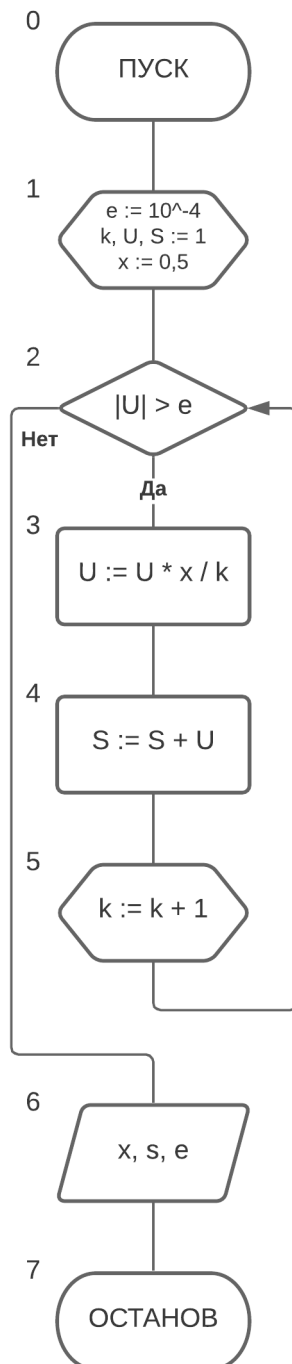
Найдем M , учитывая, что $k! = (k-1)! \cdot k$ $x^k = x^{k-1} \cdot x$

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}} = \frac{\frac{x^k}{k!}}{\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{x^k \cdot (k-1)!}{k! \cdot x^{k-1}} = \frac{x^{k-1} \cdot x \cdot (k-1)!}{(k-1)! \cdot k \cdot x^{k-1}} = \frac{x}{k}$$

Сумма членов ряда будет равна:

$$S_k = S_{k-1} + U_k$$

Блок-схема



Описание переменных

Переменная	Тип	Суть
k	real	Переменная k из мат. модели
e	real	Точность ε
x	real	Показатель степени
U	real	Текущее значение
S	real	Следующее значение

Код программы

```
main.pas  F9
1  program LR8_Z2;
2  uses
3      math;
4  var
5      k, e, x, U, S: real;
6  begin
7      e := power(10, (-4));
8      k := 1;
9      U := 1;
10     S := 1;
11     x := 0.5;
12
13     while abs(U) > e do
14     begin
15         U := U * x / k;
16         S := S + U;
17         k := k + 1;
18     end;
19
20     writeln('e в степени ', x:0:1, ' = ', s:0:4, ' (точность: ', e:0:4, ').');
21 end.
```

input

Compiled Successfully. memory: 1524 time: 0.03 exit code: 0

e в степени 0.5 = 1.6487 (точность: 0.0001).

Задание 3

Постановка задачи

Вычислить $\sin(x)$ с точностью 10^{-4} . Начальные условия: $k = 1$,
 $U_0 = x$, $S_0 = x$, $x = \pi/6$

$$\sin x \approx (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Представить математическое обоснование вывода ряда!

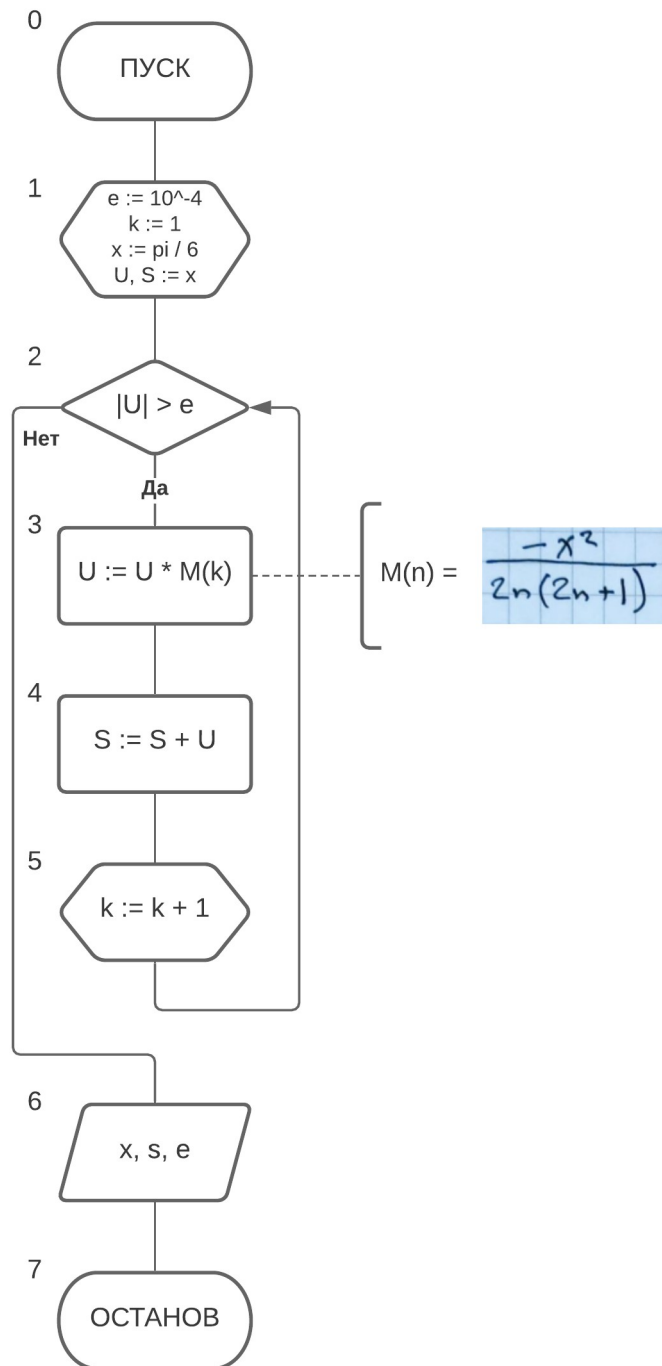
Математическая модель

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx (-1)^0 \cdot \frac{x^{2 \cdot 0 + 1}}{(2 \cdot 0 + 1)!} + (-1)^1 \frac{x^{2 \cdot 1 + 1}}{(2 \cdot 1 + 1)!} \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Handwritten derivation on grid paper:

$$\begin{aligned} M &= \frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^n \cdot x^{2n-1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} \cdot (2n-1)!}{(2n+1)! \cdot (-1)^n \cdot x^{2n-1}} \\ &= \frac{-x^2}{2n(2n+1)} \end{aligned}$$

Блок-схема



Описание переменных

Переменная	Тип	Суть
k	real	Переменная k из мат. модели
e	real	Точность ε
x	real	Аргумент ф-ии $\sin(x)$
U	real	Текущее значение
S	real	Следующее значение

Код программы

```
main.pas
1  program LR8_Z3;
2  uses
3      math;
4  var
5      k, e, x, U, S: real;
6  begin
7      e := power(10, (-4));
8      x := pi() / 6;
9      k := 1;
10     U := x;
11     S := x;
12
13     while abs(U) > e do
14     begin
15         U := U * (-1 * (sqr(x))) / (2 * k * (2 * k + 1));
16         S := S + U;
17         k := k + 1;
18     end;
19
20     writeln('sin(', x:0:4, ') = ', s:0:4, ' (точность: ', e:0:4, ').');
21 end.
```

input

Compiled Successfully. memory: 1620 time: 0.01 exit code: 0

sin(0.5236) = 0.5000 (точность: 0.0001).

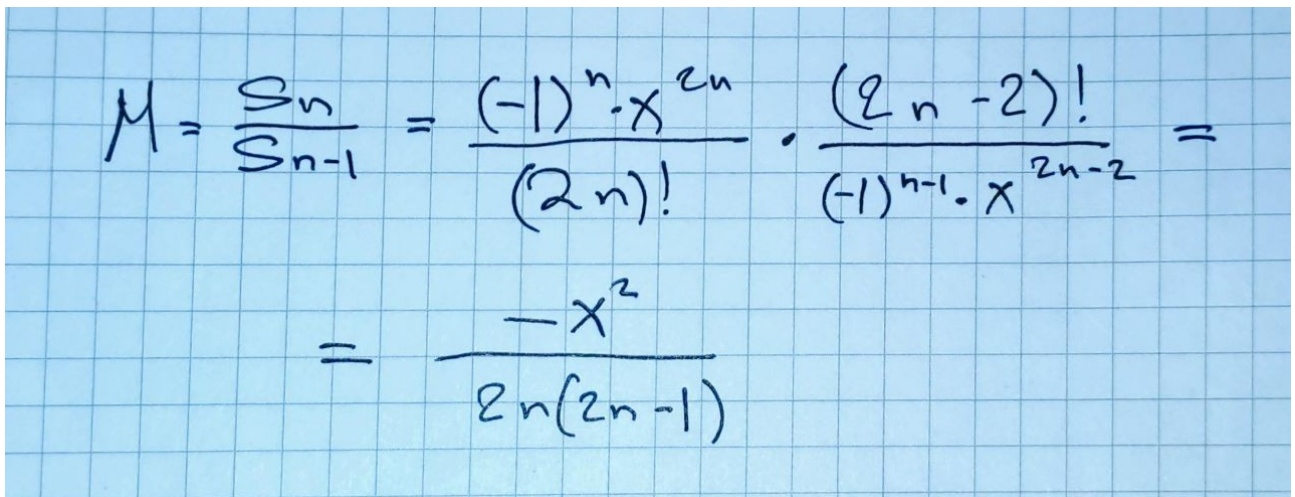
Задание 4

Постановка задачи

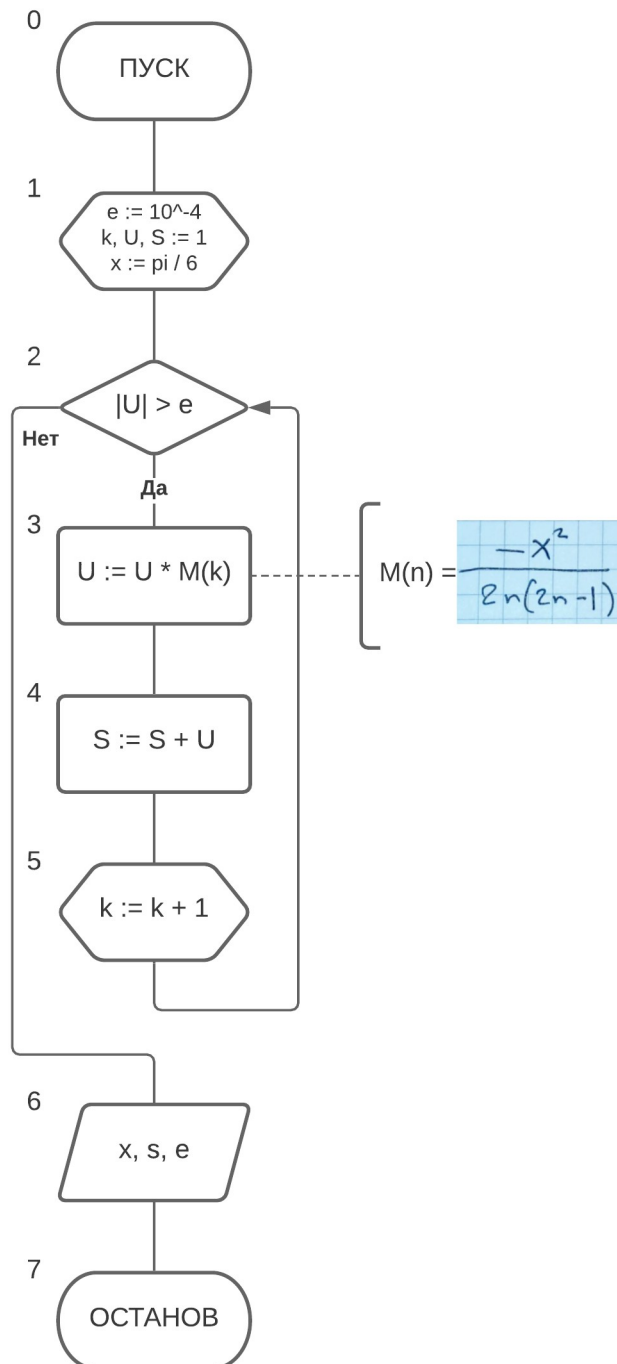
Вычислить $\cos(x)$ с точностью 10^{-4} . Начальные условия: $k = 1$, $U_0 = 1$, $S_0 = 1$, $x = \pi/6$

Математическая модель

$$\begin{aligned}\cos(x) &\approx (-1)^0 \cdot \frac{x^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0)!} + (-1)^1 \cdot \frac{x^{2 \cdot 1}}{(2 \cdot 1)!} \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}M = \frac{S_n}{S_{n-1}} &= \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}} = \\ &= \frac{-x^2}{2n(2n-1)}\end{aligned}$$

Блок-схема



Описание переменных

Переменная	Тип	Суть
k	real	Переменная k из мат. модели
e	real	Точность ε
x	real	Аргумент ф-ии $\cos(x)$
U	real	Текущее значение
S	real	Следующее значение

Код программы

```

main.pas  F9
1  program LR8_Z3;
2  uses
3      math;
4  var
5      k, e, x, U, S: real;
6  begin
7      e := power(10, (-4));
8      x := pi() / 6;
9      k := 1;
10     U := 1;
11     S := 1;
12
13     while abs(U) > e do
14     begin
15         U := U * (-1 * sqr(x)) / (2 * k * (2 * k - 1));
16         S := S + U;
17         k := k + 1;
18     end;
19
20     writeln('cos(', x:0:4, ') = ', s:0:4, ' (точность: ', e:0:4, ').');
21 end.

```

input

Compiled Successfully. memory: 1508 time: 0 exit code: 0

```
cos(0.5236) = 0.8660 (точность: 0.0001).
```