Основные формулы, используемые при решении задач по теме «Матрицы».

Над матрицами можно выполнять определенные действия, которые, по аналогии с числами, называются сложение, вычитание и умножение. Так же существует действие, которое определяется только для матриц – это транспонирование матриц и нахождение обратной матрицы к данной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МАТРИЦ

Суммой двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц. Аналогично, разностью двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

Произведением матрицы на число есть матрица того же порядка, что и матрица элементы которой получены умножением соответствующих элементов матриц на число.

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 0 & 24 & 9 \end{pmatrix}$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ МАТРИЦ

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$A + \theta = A$$

$$A - \theta = A$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

$$1 \cdot A = A$$

$$0 \cdot A = \theta$$

$$m \cdot (k \cdot A) = (m \cdot k) \cdot A$$

$$(m + k) \cdot A = m \cdot A + k \cdot A$$

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Если количество столбцов матрицы равно числу строк матрицы то для них определена матрица размерности которую называют её произведением. Элементы матрицы
 находятся по правилу: элемент равен сумме попарных произведений элементов строки матрицы и столбца матрицы :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sn}b_{sj}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 + 0 + 0 + 2 \\ 2 - 1 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Но бывают матрицы, для которых выполняется равенство A*B=B*A такие матрицы называются перестановочными или коммутирующими. Такие матрицы будут обязательно квадратными.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) & (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

Если в матрице размерности (m*n) заменить строки столбцами с соответствующими номерами, то получинcz транспонированную матрицу размерности (n*m) .

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\mathrm{T}}{}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратная матрица A−1 — матрица, произведение которой на исходную матрицу A равно единичной матрице E:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{T} \cdot A^{T} = \left(A \cdot A^{-1}\right)^{T} = E^{T} = E$$

$$\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$