Задание 1

(4) $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$

Известно, что мн-во преобразований f, g порождает полугруппу $S=\langle f, g\rangle$ преобразований мн-ва X, которая сост. из эл-ов $f, g, f^2, fg, gf, g^2, \dots$

$f^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{matrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&1&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&1&1\end{matrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$

$fg=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$ $gf=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$

$g^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$

Задание 2

(4) $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&3&2&5&2\end{pmatrix}$ $aa=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&3&2&3\end{pmatrix}$ $aaa=\begin{matrix}1&2&3&4&5\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&2&3&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&3&2&3&2\end{matrix}$

$aaaa=\begin{matrix}1&2&3&4&5\\2&2&3&2&3\end{matrix}$

Видно, что $aaaa \Rightarrow aa$, т.е. есть на 4 преобразовании наблюдается цикличность. Тогда, если считать элементы, начиная с 2-х, то каждый $2k$-й элемент будет иметь преобразование $\begin{matrix}1&2&3&4&5\\2&2&3&2&3\end{matrix}$, где $k\in N$, т.е. $T=2$

Задание 3

$S = \langle x, y : xy = yx,\ x^2 = y,\ y^3 = y \rangle$

Выделим полную систему представителей классов конгруэнции ε, которая опр. соотношениями данного копредставления. Для этого последовательно рассмотрим слова данн. длины и выделим те, которые не будут экв. м/д. собой отн. конгр. ε.

Сначала рассм. слова длины 1: x, y – не экв. м/д. собой отн. конгр. ε.

Длины 2: $x^2 = y$, xy, $yx = xy$, y^2, только слова y^2, xy не экв. отн. конгр. ε и др. ранее выделенным словам.

Длины 3: $x^3 = x^2x = yx$, $xyx = x^2y$, $x^2y = y^2$, xy^2 ($y^3 = y$)

Из этих слов только слово xy^2 не экв отн конгр ε и ранее выдел.

Длины 4: $xy^2x = x^2y^2 = yy^2 = y^3 = y$, $xy^2y = xy^3 = xy$ – все эти слова экв. отн. конгр ε ранее выделенным словам.

Значит $S = \{x, y, y^2, xy, xy^2\}$ – полная сист. предст. классов конгр. ε. Операция $\cdot$ этих слов опр. с точностью до конгр. ε по след. табл. Кэли: