КОНСУЛЬТАЦИЯ К ЭКЗАМЕНУ

по дисциплине «Математический анализ (1 семестр)»

1)В каждом билете 9 задач, по одной задаче из 9 основных тем курса.

2)Длительность машинного экзамена 90 минут.

3)Баллы: задачи из 1,2 тем по 4 балла; из 3,4 тем по 5 баллов; из 5,6,7 тем по 6 баллов; из 8,9 тем по 7 баллов. Итого: максимальное количество баллов за машинный экзамен 50, наименьшее 16 баллов. Студент, набравший количество машинных баллов меньше 16, получает оценку неудовлетворительно. Студентам, набравшим машинные баллы от16 до 50, активно работающим в семестре, оценка может быть повышена преподавателем и лектором от 0 до 25 баллов.

4)Оценки: 61-75 отлично; 46-60 хорошо; 16-45 удовлетворительно.

Рассмотрим образцы задач из каждой 9 тем.

Тема 1. Вычисление предела функции.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

при $x \to 0$	при $\alpha(x) \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\mathrm{tg}x \sim x$	$\mathrm{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\mathrm{arctg}x \sim x$	$\mathrm{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x\ln a$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$(1+x)^a - 1 \sim ax$	$(1+\alpha(x))^a - 1 \sim a\alpha(x)$

1) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

Каким способом целесообразнее это сделать? Сколько способов известно?

1.Так как имеем неопределенность 0/0, можно применить правило Лопиталя.

2.Использовать способ домножения на сопряженное выражение.

3.После замены переменной t=1-x можно а) применить таблицу эквивалентностей или б) формулу Тейлора

2) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})\left|t=\sqrt{x}\right|=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t}}-t)=$ $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+\sqrt{t^2+t}-t^2}{\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t}}+t}=0{,}5.$

В этом примере использовали метод сравнения порядков бесконечно больших функций.

Тема 2. Раскрытие показательно-степенных неопределенностей.

При раскрытии таких неопределенностей 1 в ∞ , ∞^0 , 0^0 используется формула:

$$\lim_{x\to x_0}\mathbf{u(x)}^{\mathbf{v(x)}} = \mathbf{e}^{\lim_{x\to x_0}\mathbf{v(x)\ln u(x)}}$$

1)Вычислить предел: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{tgx}}$ =1/e

Какие виды неопределенностей возникают при вычислении таких пределов? [0/0]

2)Вычислить предел: $\lim_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{1/x}$

Каким способом раскрываются возникающие неопределенности при вычислении пределов показательно-степенных функций?

Тема 3. Непрерывность функции. Точки разрыва. Классификация точек разрыва

Пусть функция y=f(x) определена в области D.

Определение 1. Функция y=f(x) называется **непрерывной в точке x_0,** если:

1)$x_o\in D$; 2)$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)$; 3) $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Замечание 1. $\lim_{x\to x_0}f(x)\,\exists$ тогда и только тогда, когда $\exists$оба односторонних предела и они равны $f(x_0)$т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$$

Определение.2. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции y=f(x), если нарушено хотя бы одно из условий 1), или 2), или 3). А именно:

x_0-точка разрыва 1-го рода, если $\exists\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A, \exists\lim_{x\to x_0+0}=B$; А не равно В (рис.1а);

X_0-точка **устранимого разрыва**, если а)нарушено1), но при этом А=В; (рис.1б) или 1)выполнено, А=В, но они **не равны $f(x_0)$.**

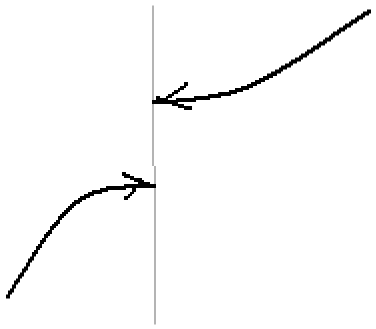

Рис.1а

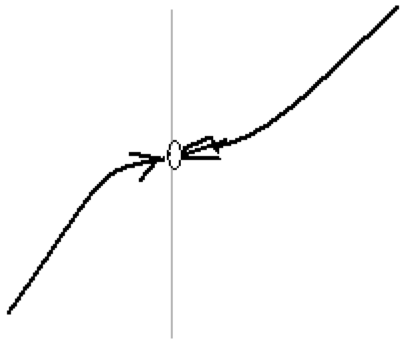

Рис.1б

x_0-**<u>точка разрыва 2-го рода</u>**, если хотя бы один из односторонних пределов **равен бесконечности или не существует**.(Рис.2 иллюстрирует не все, а лишь некоторые ситуации).

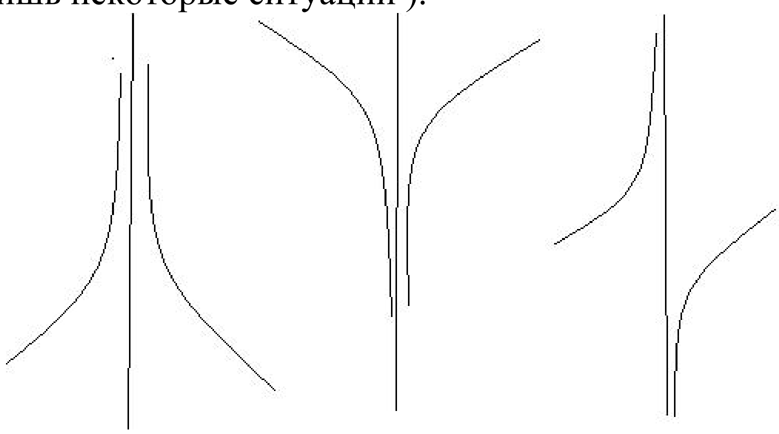

Рис.2

1)Выяснить характер точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

2)Выяснить характер точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \ge 1. \end{cases}$$

3) Найти точки разрыва функции и определить характер разрыва.

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}; \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = const$$

x=0-точка устранимого разрыва.

$$4) f(x) = \begin{Bmatrix} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2{,}5 \\ 2x - 7, & 2{,}5 \le x \le 4 \end{Bmatrix}$$

Функция непрерывна на интервалах (0,1), (1;2,5),(2,5;4). Исследуем поведение функции на границах интервалов.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2\sqrt{x} = f(1) = 2;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1}(4-2x) = 2 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1} - \textbf{точка непрерывности}.$$

$\lim_{x\to 2,5-0} f(x) = \lim_{x\to 2,5}(4-2x) = 4-5 = -1;$ $\lim_{x\to 2,5+0} f(x) = \lim_{x\to 2,5}(2x-7) = 2\cdot\frac{5}{2}=-7 = -2;$

$-1 \neq -2 \Rightarrow$X=2,5-точка разрыва 1-го рода.

Тема 4. Вычисление производных.

1)Вычислить производную функции в точке x=4

$$y = \frac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7} - 9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}.$$

2)Вычислить производную функции в точке x=0

$$y = \ln\left(e^x+1\right) + \frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6\left(e^x+1\right)^3}.$$

Геометрический и механический смысл производной.

Тема 5. Производная функции, заданной параметрически.

1)Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \mathrm{tg}^2\, t. \end{cases}$ в точке М(1/2;1)

2)Как определяются первая и вторая производные функции, заданной параметрически?

$\mathbf{y'_x = y'_t\ / x'_t\ ; x=x(t). \quad y''_{xx}=(y'_x)'_t / x'_t, x=x(t).}$

Применим эту формулу к решению данной задачи**.**

1.$\mathbf{y'_{x=}}$ **2 tgt/ -2sint**$\mathbf{\cos^3 t_{=} -1/\cos^4 t}$**, x=**$\mathbf{\cos^2 t}$**. 2.** $\mathbf{y''_{xx=--}}$ $\mathbf{(_{-4})}$**(-sint)/-2**$\mathbf{\cos^5 t}$**sintcost=2/**$\mathbf{\cos^6 t}$**, x=**$\mathbf{\cos^2 t}$**. 3.**Найдем t, при котором x=1/2=$\cos^2$t, y=1=tg^2t. Из системы получаем t=π/4. **4. $\mathbf{y''_{xx}}$ (**π/4)=16,

Замечание2.При дифференцировании функции, заданной параметрически, нужно первую производную преобразовать так, чтобы легче было вычислить вторую производную.

Тема 6. Применение производных.

1)Найти угловой коэффициент нормали к графику функции
$y \cdot \cos x = \sin(x - y)$. в точке М(0;0)

Какие применения производной вы знаете?

2)Найти наименьшее значение функции на отрезке

$$y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}, \quad [-3,\ 4].$$

Для каких функций существуют на отрезке их наименьшее и наибольшее значения и как их найти?

Тема 7. Экстремумы функции

1)Найти координаты точки экстремума функции $y = (x+4)e^{-(x+3)}$.

Сформулируйте определение локального экстремума функции.

2)Найти координаты точки экстремума функции $y=x^2 + 2ln(x)$

Теоремы о необходимом условии экстремума и о достаточном условии экстремума по первой производной и по второй производной**.**

Тема 8. Точки перегиба функции

1)Найти координаты точки перегиба функции $y = (x+4)e^{-(x+3)}$.

Дать определение точек перегиба. Теорема о необходимом условии точки перегиба. Теорема о достаточном условии точки перегиба.

2)Найти координаты точки перегиба функции $y = x^2/(x-1)$.

3) Найти координаты точки перегиба функции $y = \ln\dfrac{x}{x+2} + 1.$

ОДЗ: x/x+2 >0 (Найдите!)

y'=2/x(x+2)(Проверьте!). y''=-4(x+1)/x^2 $(x+2)^2$. x=-1,о,-2 не принадлежат ОДЗ, следовательно, точек перегиба нет.

Замечание 3. В задачах тем 7 и 8 надо предварительно находить ОДЗ заданной функции и проверять являются найденные точки критическими 1 и 2 рода соответственно. А затем проверять **по**

соответствующим достаточным условиям наличие в них точек экстремума или точек перегиба

Тема 9. Дифференцирование функций нескольких переменных

В этой теме представлены задачи 3-х типов:

1. Найти частные производные 1-го порядка функции 2-х переменных f(x,y) (**x,y независимые переменные**) в заданной точке.

Пример1.Дана функция $f(x,y) = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Найти $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$

В ответе указать сумму полученных результатов.

2. Найти частные производные 1-го порядка функции 2-х переменных f(x,y) **(x,y зависимые переменные от t)** в заданной точке.

Пример2. Дана функция $f(x,y) = tg\left(x^2y^2\right)$, где $x = \sin t,\quad y = \cos t$. Найти $\frac{df}{dt}$ при t=π.

По какой формуле вычисляется $\frac{df}{dt}$ в этом случае?

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

3. Функция $z = z(x,y)$задана неявно уравнением: F(x,y,z(x,y)=0. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке. *Неявная функция двух переменных* определяется уравнением $F(x,y,z) = 0$, где *x* и *y*– независимые переменные, *z=z(x,y)*– функция этих переменных. Частные производные этой функции находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Пример3.Функция $z = z(x,y)$задана неявно уравнением:. $2x^2 - y^2 - 3z^2 - yz + x = 0$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)$, считая z положительным. **В ответе указать сумму полученных результатов.**

Решение. 1)z'_x=-(4x+1)/-(6z+y), z'_y=-(2y+z)/(6z+y).

2)Найдем значение z при x=1, y=-1 с учетом, что z>0, подставив точку (1,-1) в F(x,y,z(x.y)=$2x^2$-y^2 -$3z^2$ –yz+x=0. Получим квадратное уравнение: $3z^2$-z-2=0 z_1 =1, z_2 =-2/3. Берем z=1>0.

3) z'_x (1,-1)=1, z'_y (1,-1)=0,2 Их сумма 1+0,2=1,2