Лекция 11. Дифференциальное исследование функций

1.Условия монотонности функции

Теорема 15(необходимое и достаточное условие постоянства функции на отрезке по первой производной) .

Для того, чтобы непрерывная на $[a,b]$ *и дифференцированная в*(a,b) *функция* $f(x)$ *была постоянной на* $[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\equiv 0$ *на* (a,b).

Доказательство вытекает из следствия теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

Теорема 16 (необходимое и достаточное условие монотонности функции по первой производной).

Для того, чтобы непрерывная на $[a,b]$, *дифференцируемая в* (a,b) *функция* $f(x)$ *была неубывающей (невозрастающей) на* $[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ *на* (a,b).

***Доказательство*. Необходимость.**

Дано: дифференцируемая f(x)-неубывающая. **Доказать:** $f'(x)\geq 0$

Из того, что функция неубывающая вытекает $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, далее переходим к пределу, который существует в силу дифференцируемости f(x).

***Достаточность*.**

Дано: $f'(x)\geq 0$ на (a,b). **Доказать: f (x)** – неубывающая на [a,b].

Если $x'<x''$, то по теореме Лагранжа

$f(x'')-f(x')=f'(\xi)(x''-x')$ откуда и следует требуемая монотонность.

Теорема 17(необходимое и достаточное условие строгой монотонности функции на отрезке по первой производной)

Для того, чтобы непрерывная на $[a,b]$, *дифференцируемая в* (a,b) *функция* $f(x)$ *была строго монотонно возрастающей (убывающей) на* $[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ *на* (a,b) *и чтобы не существовало промежутка* $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, *на котором* $f'(x)\equiv 0$.

Утверждение теоремы является непосредственным следствием теоремы 16

Следствие 1. Для непрерывной на $[a,b]$, дифференцируемой в (a,b) функции $f(x)$ условие $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на (a,b) влечет строгое монотонное возрастание (убывание).

Пример 1. Доказать, что для любого n функция

$f_n(x)=x(\pi/2-\mathrm{arctg}\,nx)$ строго монотонно возрастает на $[0, +\infty)$.

$f'_n(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,nx - \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\pi}{2} - g(nx)$, где $g(u) = \mathrm{arctg}\,u + \frac{u}{1+u^2}$.Имеем $g'(u)=$ $\frac{1}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}=\frac{2}{(1+u^2)^2}>0$.

$g(0)=0$, $g(+\infty)=\pi/2$. Таким образом, $g(nx) <\pi/2$ и, следовательно, $f'_n(x) = \frac{\pi}{2} - g(nx) > 0$.

2.Локальные максимальные и минимальные значения функций (экстремумы)

Определение 4.(точки локального максимума функции) *Пусть* $f(x)$ *задана на* $[a,b]$ *и* $x_0 \in (a,b)$, x_0 *называется точкой локального максимума функции* $f(x)$, *если в некоторой окрестности точки* x_0 *выполнено неравенство* $f(x) \leq f(x_0)$ (2.43.1.)

и точкой локального строгого максимума, если в некоторой **проколотой окрестности точки** x_0 выполнено неравенство $f(x)<f(x_0)$. (2.43.2)

Аналогично определяются: минимум, строгий минимум.

Экстремум локальный: в точке локальный минимум или локальный максимум.

Экстремум строгий: в точке строгий локальный минимум или строгий локальный максимум. Это можно сформулировать, как сохранение знака приращения функции $f(x) - f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 .

Теорема 18 (Необходимое условие экстремума).

Если x_0 *– точка экстремума функции* f *и существует* $f'(x_0)$, *то* $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Следует из теоремы Ферма.

Определение 5.(стационарной точки). *Точка, в которой* $f'(x_0)=0$ *называется стационарной точкой.*

Замечание 1. Таким образом, у дифференцируемой функции экстремум следует искать среди стационарных точек.

Пример 2. $f(x)=x^2$. Точка x=0- стационарная точка, и у $f(x)=x^3$, x=0-стационарная точка, но в первом случае эта точка-точка минимума, а во втором- в этой точке экстремума нет.

Определение 4.1.(Критической точкой 1 рода)

$\boldsymbol{x_0}$ **--- критическая точка 1 рода** функции f(x), если *f(x) непрерывна в точке* x_0 и выполняется **одно** из условий: 1) $f'(x_0)=0$ (стационарная точка); 2) $f'(x_0)= \infty$ (точка острого экстремума); 3) $f'(x_0)$ не существует (точка углового экстремума)

Теорема 19. (Первое достаточное условие экстремума)

Пусть1) точка x_0 *--- критическая точка 1 рода f(x).2) f(x) дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *и 3)* $f'(x)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0, *то* x_0 *есть точка строгого экстремума, причем если*

производная меняет знак с минуса на плюс, то это минимум,

производная меняет знак с плюса на минус, то это максимум.

Доказательство. Применить теорему 17 на $[x_0-\delta, x_0]$ и на

$[x_0, x_0+\delta]$.

Пример 3. Y=|x|. x=0-точка углового минимума.

Вопрос: Как быть, если первая производная функции равна 0 и в некоторой окрестности этой точки?

Теорема 20 (Второе достаточное условие экстремума (по второй производной))

Пусть1) x_0 *– стационарная точка функции* f *и 2)* $\exists f''(x_0) \neq 0$, *тогда, если* $f''(x_0)>0$, *то в точке строгий минимум, если* $f''(x_0)<0$, *то в точке строгий максимум.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0)>0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

Из теоремы о сохранении знака в некоторой проколотой окрестности будет выполнено неравенство

$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0$, или $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$. Тогда для $x > x_0$ будет

$f'(x) > 0$, а для $x < x_0$: $f'(x) < 0$.

Аналогично для случая $f''(x_0)<0$.

Задача. Из квадратного листа сделать выкройку коробки, открытой сверху, наибольшего объема

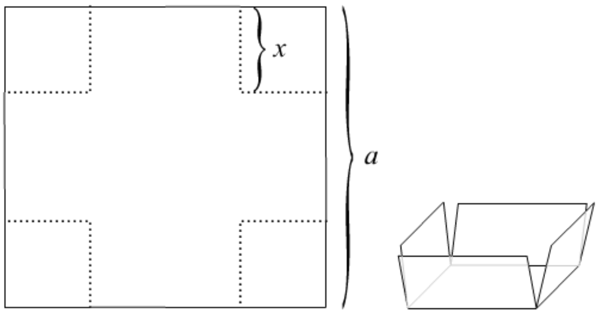

Рис.2.8

Объем коробки равен $(a\text{-}2x)^2x$. Для поиска максимального объема вычислим производную

$f'(x)=(4x^3\text{-}\ 4ax^2\ +a^2x)'=12x^2\text{-}\ 8ax+\ a^2$. Нули производной

$$x_{1,2}=\frac{8a\pm\sqrt{64a^2-48a^2}}{24}=\frac{8a\pm 4a}{24}=\frac{a}{2};\frac{a}{6}$$

Таким образом, $x=\frac{a}{6}$.

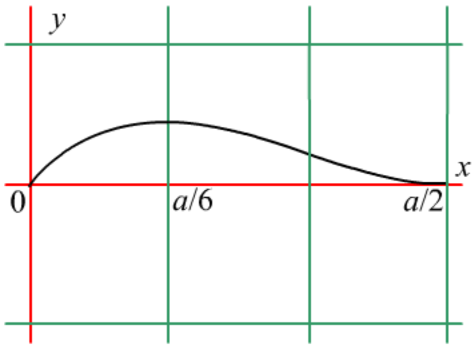

Рис 2.9

Исследование функций на экстремум по знаку высших производных

Пусть x_0 стационарная точка функции f, $f(x)$ n-раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 причем

$f'(x_0)=\ f''(x_0)=\ldots=\ f^{(n\text{-}1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0$. В этом случае по формуле Тейлора с остатком Лагранжа будет выполнено равенство $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$.

1) $n=2k$

Если $f^{(2k)}(x_0)>0$, то в x_0 наблюдается строгий локальный минимум. Если $f^{(2k)}(x_0)<0$, то в x_0 наблюдается строгий локальныймаксимум.

2) $n=2k+1$

x_0 не является точкой экстремума, так как приращение функции $f(x)-f(x_0)$ имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0.

Пример 4. $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x - \frac{x^4}{12}$, в точке 0.

$f'(x)=\operatorname{sh} x - \sin x - \frac{x^3}{3}$, $f'(0)=0$,

$f''(x)=\operatorname{ch} x - \cos x - x^2$, $f''(0)=0$,

$f'''(x)=\operatorname{sh} x + \sin x - 2x$, $f'''(0)=0$,

$f^{(4)}(x)=\operatorname{ch} x + \cos x - 2$, $f^{(4)}(0)=0$,

$f^{(5)}(x)=\operatorname{sh} x - \sin x$, $f^{(5)}(0)=0$,

$f^{(6)}(x)=\operatorname{ch} x - \cos x$, $f^{(6)}(0)=0$,

$f^{(7)}(x)=\operatorname{sh} x + \sin x$, $f^{(7)}(0)=0$,

$f^{(8)}(x)=\operatorname{ch} x + \cos x$, $f^{(8)}(0)=2>0$. Поэтому в точке 0 имеется строгий локальный минимум.

.***Выпуклость функции, точки перегиба***

Хорда, соединяющая точки $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$ графика функции $f(x)$задается функцией

$$y=L(x, x_1, x_2) = f(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (*)$$

Это проверяется подстановкой координат x_1, x_2в правую часть (*).

Определение 5.(выпуклости вверх) *Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на $[a,b]$, если для $\forall x_1<x<x_2$ из$[a,b]$*

$$L(x,x_1,x_2) = f(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \le f(x). \qquad (2.43.3.)$$

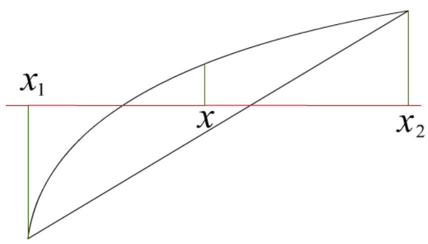

Рис.2.10

Аналогично определяется выпуклая вниз функция. Можно дать определение строгой выпуклости, заменив нестрогое неравенство на строгое в (2.43.3.)

Замечание 2.*(о выпуклости функции вверх (вниз) в точке)* *Функция f(x)-выпуклая **вверх (вниз)** в точке x, если существует окрестность этой точки, в которой график функции расположен **под (над)** касательной, проведенной в точке (x,f(x)).*

Теорема 21 (Достаточное условие выпуклости).

Если f непрерывна на $[a,b]$, дважды дифференцируема в (a,b) и $f''(x)>0$ на (a,b), то f строго выпукла вниз.

Доказательство. Для любых x_1, x, x_2, $a\le x_1<x<x_2\le b$ имеем

$$\text{под}= = \left[f(x) - f(x_1)\right]\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \left[f(x) - f(x_2)\right]\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} =$$

$$f'(\xi_1)\frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f'(\xi_2)\frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = -f''(\xi_3)(\xi_2 - \xi_1)\frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Участвующие в этих соотношениях величины расположены на оси в показанном на рисунке 2.11 порядке.

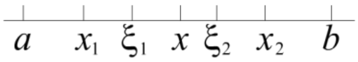

Рис. 2.11

Определение 6.(точки перегиба) *Точка* x_0 *называется* ***точкой перегиба*** *функции* f, *если в точке* x_0 *существует касательная и в некоторой окрестности точки* x_0 *график* f *лежит по разные стороны от касательной.*

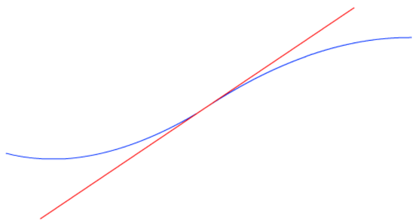

Рис.2.12

Теорема 22 (Необходимое условие точки перегиба)

Если f *дважды непрерывно-дифференцируема в окрестности точки перегиба* x_0, *то* $f''(x_0)=0$.

Доказательство. Предположим противное $f''(x_0) \neq 0$. По теореме о сохранении знака $f''(x)$ сохраняет знак в окрестности точки x_0. Применим формулу Тейлора с остатком Лагранжа

Левая часть этого равенства имеет смысл уклонения точки графика функции от касательной. Это, в свою очередь, означает, что график функции лежит с одной стороны от касательной. $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$ не меняет знак. Противоречие!

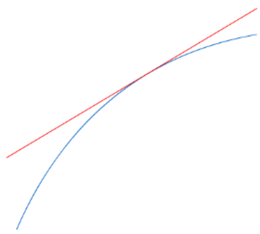

Рис.2.13

Теорема 23 (Достаточное условие точки перегиба)

1) $\exists f''(x)$ *в* $U(x_0)$ *и* $f''(x_0)=0$

2) f'' *меняет знак при переходе через точку* x_0.

Тогда x_0 *точка перегиба.*

Доказательство. По формуле Тейлора с остатком Лагранжа

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 .$$

Следствие 2. *Если* $f''(x_0)=0$ *и* $f'''(x_0)\neq 0$*, то* x_0 *– точка перегиба*.

Доказательство. При данных условиях f'' будет монотонной, и будет менять знак при переходе через x_0.

Определение 6.1 (Критических точек 2 рода)

$\boldsymbol{x_0}$ **--- критическая точка 1 рода** функции f(x), если *f(x) непрерывна в точке* x_0 и выполняется **одно** из условий: 1) $f''(x_0)=0$; 2) $f''(x_0)=\infty$; 3) $f''(x_0)$ не существует.

Замечание3 Используя определение 6.1,, теоремы 22 и 23 можно записать в следующих формулировках**.**

Теорема 22.1 (Необходимое условие точки перегиба)

Если x_0 - точка перегиба, то она критическая точка 2 рода.

Теорема 23.1 (**Достаточное условие точки перегиба)**

Пусть 1) $\boldsymbol{x_0}$ **-**критическая точка 2 рода**; 2)**в некоторой окрестности этой точки существует $f''(x)$; 3)в некоторой проколотой окрестности этой точки $\exists$ $f''(x)$ и она меняет знак при переходе через точку $\boldsymbol{x_0}$, тогда $\boldsymbol{x_0}$ ***-точка перегиба.***

Замечание 4.Этой лекцией заложены теоретические основы дифференциального исследования функции и построения ее графика