ЛЕКЦИЯ 7. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

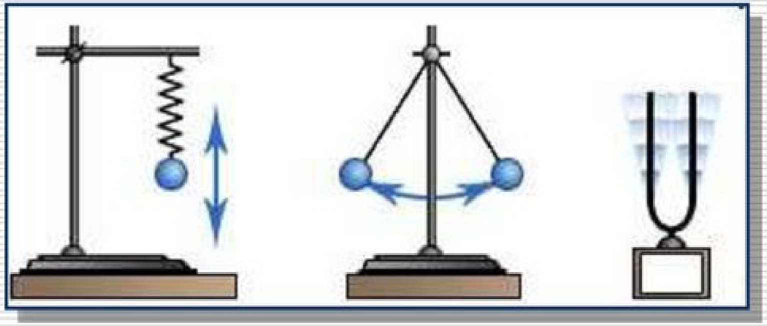
Давыдов Василий Андреевич

доктор физико-математических наук, профессор,
davydov@mirea.ru

Определение колебания

- Внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные повторяющиеся процессы, например, процесс работы сердца.
- Аналогично и в технике есть разнообразные повторяющиеся процессы
- Все эти явления подчиняются общим закономерностям, которые рассмотрим на примере механических колебаний.

- Колебания – это периодически повторяющиеся движения или изменения параметров, которые характеризуют состояние системы.
- Колебания могут быть разной природы:
  - механические,
  - тепловые,
  - электрические и т. п.



Виды колебаний

- гармонические,
- периодические
- затухающие,
- вынужденные

- Простейшим видом колебаний является гармонические колебания, но чаще встречаются периодические колебания.

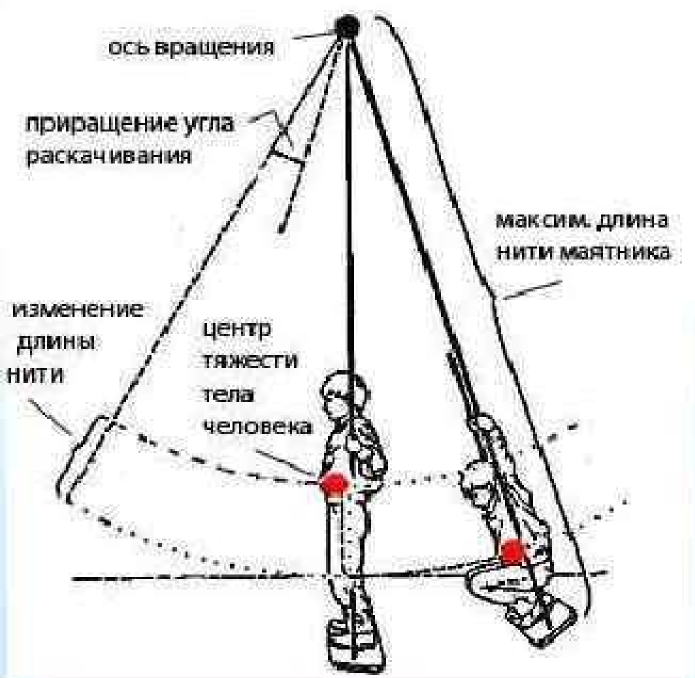
Систему, совершающую колебательные движения, называют осциллятором.

Параметрические колебания

Параметрическими называются колебания, при которых меняются периодически какие-либо параметры колебательной системы, от которых зависят частота и амплитуда ее колебаний.

Например: длина нити маятника, масса груза, жесткость пружины, положение центра тяжести, момент инерции тела,

Здесь энергия колебательного движения маятника будет поддерживаться за счет работы, совершаемой человеком по изменению параметров системы.



- Автоколебаниями называются незатухающие колебания, которые могут существовать в системе без воздействия на неё внешних периодических сил.

Маятниковые часы

Часы с балансиром.

Спусковой механизм часов:
1 — балансир;
2 — анкерная вилка;
3 — спусковое колесо

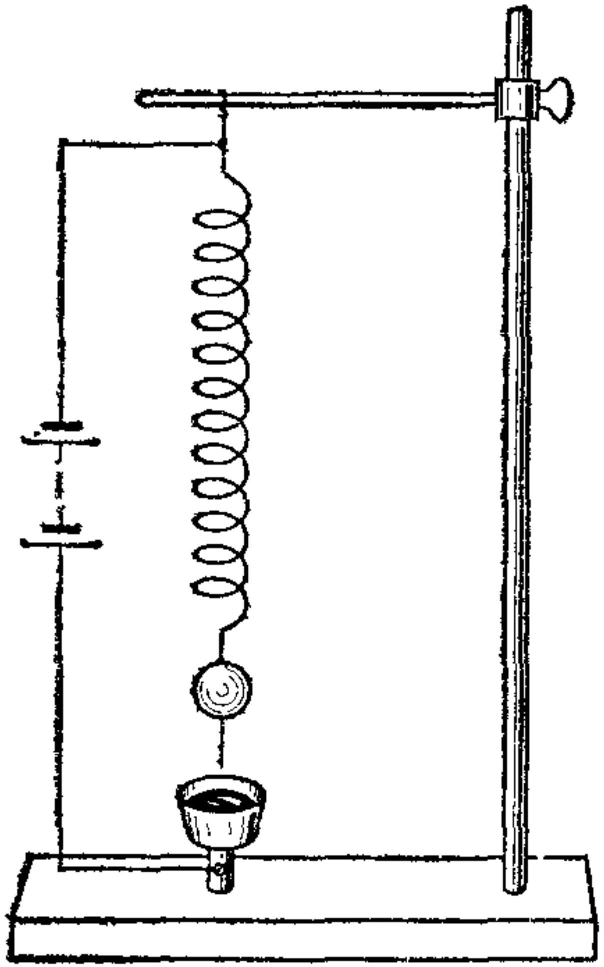
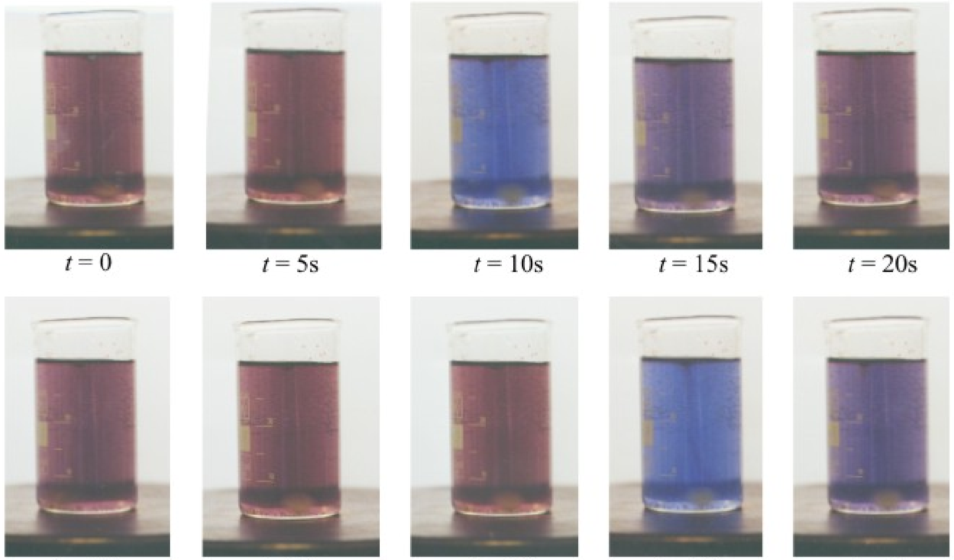


Рис. 55. Автоколебания груза на пружине

Химические колебания

Реакция Белоусова - Жаботинского



$t = 0$ $t = 5s$ $t = 10s$ $t = 15s$ $t = 20s$

$t = 25s$ $t = 30s$ $t = 35s$ $t = 40s$ $t = 45s$

Свободные гармонические колебания

- Колебательное движение

Колебаниями называются процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени. Колебания считают свободными, если они совершаются за счет запаса энергии, первоначально сообщенной системе, при отсутствии какого-либо внешнего воздействия. В идеальном случае, если нет потерь энергии, колебания будут незатухающими и могут длиться бесконечно долго.

- Гармонические колебания

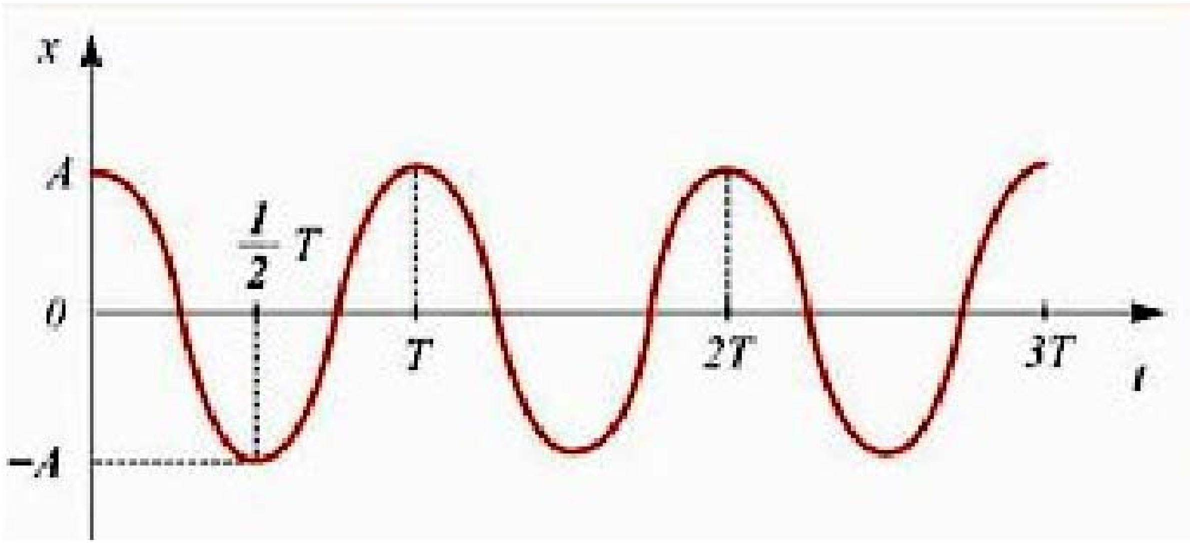
Физическая природа колебательных процессов может быть разной. Различают механические колебания, электромагнитные колебания и др. Наиболее простыми являются так называемые гармонические колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Такие колебания описываются уравнением вида

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

A – амплитуда колебаний
$\varphi(t)=\omega_0 t+ \varphi_0$ – фаза колебаний [рад]
ω_0 – циклическая (круговая) частота колебаний [рад/с]
φ_0 – начальная фаза колебаний [рад]

Напомним, что $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$
T_0 – период колебаний [с],
$1/T_0 = f_0$ - частота колебаний [Гц]

Гармонические колебания



Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

- Каноническое дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Любой гармонический процесс, независимо от его физической природы, описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$$

Любое решение, удовлетворяющее этому уравнению, описывает гармонический процесс.

- Решение канонического дифференциального уравнения

Убедимся, что функция $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ является решением указанного дифференциального уравнения

$$\mathrm{v}(t)=\frac{dx}{dt}=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t+\varphi_0),$$

$$a(t)=\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

Амплитуды колебаний скорости и ускорения, соответственно,
$\mathrm{v}_{\max}=\omega_0 A$ и $a_{\max}=\omega_0^2 A$

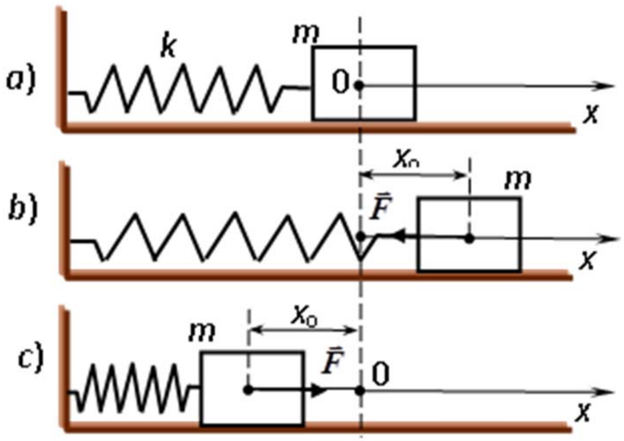
Видно, что при произвольных значениях амплитуды *A* и фазы φ_0 будет выполняться $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$

- Сдвиг фазы

Отметим, что частота изменения скорости и ускорения при гармонических колебаниях одинакова. Однако, колебания скорости и ускорения оказываются сдвинутыми по фазе относительно колебаний смещения $x(t)$

$$\mathrm{v}(t)=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi/2),\qquad a(t)=A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi)$$

Свободные механические колебания. Горизонтальный пружинный маятник



- Горизонтальный пружинный маятник

Рассмотрим пружинный маятник, показанный на рисунке. Груз массой *m* прикреплен к вертикальной стенке с помощью пружины, жесткостью *k*, и может скользить без трения по горизонтальной поверхности.

- Дифференциальное уравнение колебаний

Если силы сопротивления пренебрежимо малы, маятник будет совершать свободные незатухающие гармонические колебания. Дифференциальное уравнение этих колебаний выводится из второго закона Ньютона, согласно которому *F* = -*kx* = *ma*.

Поскольку $a = \ddot{x}$, получаем $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$ $\ddot{x} + (k/m)x = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

где введено обозначение $\boxed{k/m = \omega_0^2}$.

Канонический вид дифференциального уравнения гармонических колебаний

Общее решение этого уравнения имеет вид $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$. Две неизвестные константы *A* и φ_0 определяются из начальных условий: $x(0) = x_0$, $\dot{x} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = x_0 \cos\omega_0 t}$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$ $\Leftarrow$ Период колебаний

Энергия механических колебаний

- Скорость и ускорение груза

Скорость груза v и его ускорение *a* также будут меняться по гармоническому закону. Скорость получим, продифференцировав выражение $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$. Тогда

$$\mathrm{v} = \dot{x}(t) = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t = -\mathrm{v}_0 \sin\omega_0 t$$

где $\mathrm{v}_0 = x_0\omega_0$ это максимальная скорость груза. Для ускорения имеем, соответственно

$$a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x}(t) = -x_0\omega_0^2 \cos\omega_0 t = -a_0 \cos\omega_0 t$$

где $a_0 = x_0\omega_0^2$ это максимальное ускорение груза. Видно, что $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

- Энергия колебаний

В отсутствие сил сопротивления движению, полная энергия системы *W*, включающая в себя кинетическую энергию груза и энергию деформации пружины, остается постоянной

$$W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \mathrm{const}$$

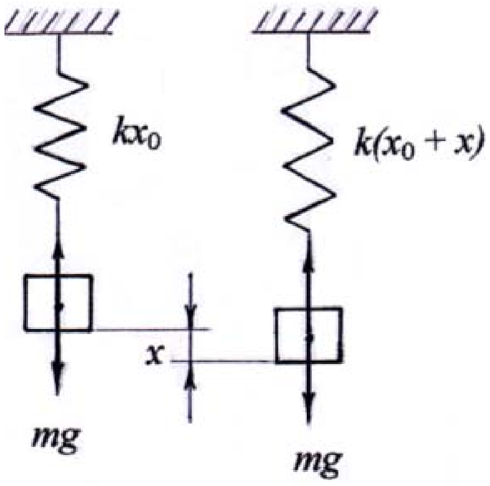
Ее можно выразить либо как максимальную кинетическую энергию груза (когда *x* = 0 и пружина не деформирована), либо как максимальную потенциальную энергию пружины (когда скорость груза v = 0). Закон сохранения энергии имеет вид

$$W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}$$

Энергия гармонических колебаний

- **Потенциальная энергия**:
  $П = kx^2/2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi_0)$
- **Кинетическая энергия:**
  $K = mv^2/2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \phi_0) = \frac{1}{2}кA^2\sin^2(\omega_0 t + \phi_0)$
- **Полная энергия:**
  $E = П + K = const = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2$
- Для гармонических колебаний:
  $\langle K \rangle = \langle П \rangle = \frac{1}{2}E$

Свободные механические колебания. Вертикальный пружинный маятник



- **Вертикальный пружинный маятник**

Вертикальный пружинный маятник показан на рисунке. Груз массой m подвешен на пружине жесткостью k . В положении равновесия пружина растянута на длину x_0 за счет действия силы тяжести.

- **Дифференциальное уравнение колебаний**

В положении равновесия силы, действующие на грузик уравновешивают друг друга, то есть $mg = kx_0$. При смещении грузика от положения равновесия на x со стороны пружины на тело будет действовать сила $F = -k(x_0 + x)$. Знак минус означает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению.

По второму закону Ньютона имеем $ma = mg - k(x_0 + x)$. Принимая во внимание равенство сил в положении равновесия грузика, получаем уравнение колебаний в виде

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + (k/m)x = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Канонический вид дифференциального уравнения гармонических колебаний

Частота и период собственных колебаний

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}, \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

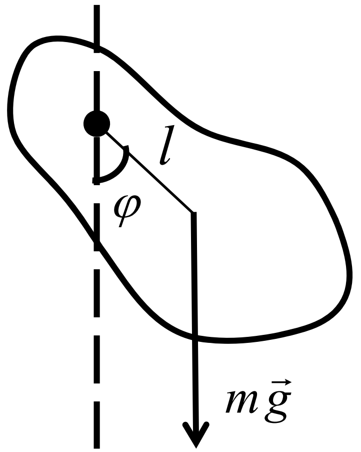
Физический маятник

- Физический маятник

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$I\varepsilon_z = M_z$$

где M_z – момент всех внешних сил относительно оси вращения, *I* – момент инерции твердого тела относительно оси вращения, ε_z - угловое ускорение относительно оси вращения. Ось вращения *z* перпендикулярна плоскости рисунка.



- Дифференциальное уравнение колебаний

Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \ ,$$

где l – расстояние от оси вращения до центра масс тела, *m* – масса тела. Для малых колебаний, когда $\sin\varphi \approx \varphi$, получаем

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$$

Приводим полученное уравнение к каноническому виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

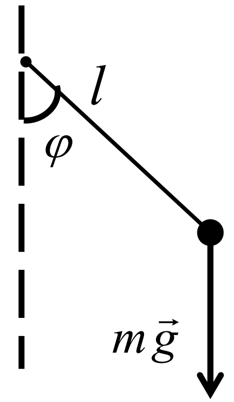
- Период колебаний физического маятника

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}}$$

Математический маятник

- Математический маятник

Математическим маятником называется тело небольших размеров, подвешенное на длинной невесомой и нерастяжимой нити. При этом размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь (приближение материальной точки).



- Частота и период колебаний математического маятника

Если длина нити l, а масса тела *m*, то момент инерции материальной точки относительно оси, проходящей через точку подвеса будет $I = ml^2$. Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае расстояние *a* от оси подвеса до центра масс тела равно длине нити l, получим для частоты и периода малых колебаний математического маятника выражения

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,,}\qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

- Приведенная длина физического маятника

Сравнение формул для физического и математического маятника приводит к выводу, что период колебаний физического маятника равен периоду колебаний математического маятника с длиной $l_{\text{пр}} = I/ma$. Величина $l_{\text{пр}}$ называется приведенной длиной физического маятника. Используя теорему Штейнера докажем, что всегда $l_{\text{пр}} > a$. Действительно,

$$l_{\text{пр}} = I/ma = (I_C + ma^2)/ma = a + I_C/ma\,,$$

откуда сразу видно, что $l_{\text{пр}} > a$.

Гармонические колебания: как решать задачи

- Подведем итог и определим последовательность действий при решении задач на колебания:

(1) применяя законы физики, составляем дифференциальное уравнение для одного из параметров колебательного процесса (например, для линейной координаты, угловой координаты, заряда конденсатора, электрического тока цепи, напряжения и т. д.) ;

(2) приводим это уравнение к каноническому виду $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где *x* указанный параметр колебательного процесса;

(3) не решая это уравнение можно сразу выписать выражение для периода колебаний $T = 2\pi/\omega_0$;

(4) общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\ ,$$

две неизвестные константы *A* и φ_0 определяются из начальных условий: $x(0)=x_0$ и $\dot{x} = 0$.

Примеры решения задач

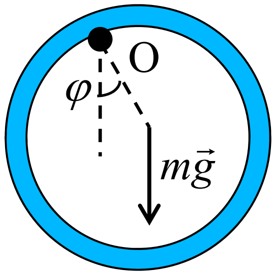
- Условие задачи

Обруч диаметром *D* висит на гвозде, вбитом в стенку, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний *T* обруча.

- Решение задачи

Обруч, совершающий колебания вокруг оси, проходящей через его верхнюю точку O перпендикулярно плоскости рисунка, представляет собой физический маятник. Период колебаний физического маятника равен (l - расстояние от оси подвеса до центра масс обруча)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\frac{D}{2}}}$$



Момент инерции обруча *I* относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, найдем по теореме Штейнера

$$I = I_c + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 = \frac{mD^2}{2}$$

Период малых колебаний обруча будет равен

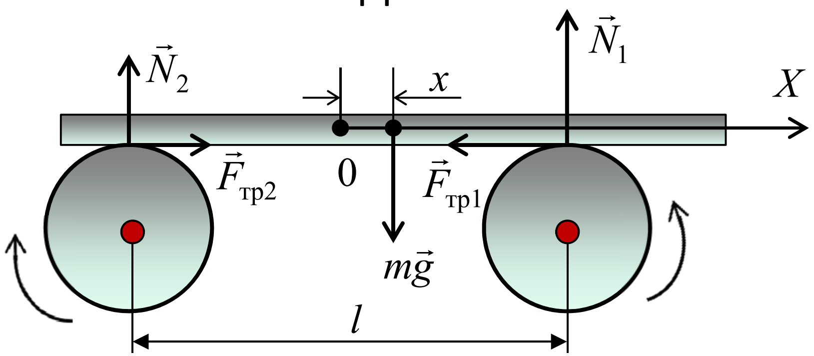
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\frac{D}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mD^2}{2}}{mg\frac{D}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}}$$

Примеры решения задач

- Условие задачи

На два цилиндра, вращающихся навстречу друг другу, положили массивную доску. Найдите период малых колебаний доски в продольном направлении, если коэффициент трения между доской и цилиндрами μ , а расстояние между осями цилиндров l.

- Решение задачи



Когда центр доски находится посередине между осями цилиндров, силы реакции цилиндров равны $N_1 = N_2$, откуда следует равенство сил трения $F_{тр1} = F_{тр2}$, т.е. доска находится в равновесии. При смещении доски на расстояние x вправо силы N_1 и $F_{тр1}$ увеличиваются, а силы N_2 и $F_{тр2}$ уменьшаются, и возникает возвращающая сила $F = F_{тр1} - F_{тр2}$.

Так как доска не вращается, то суммарный момент всех сил относительно оси, проходящей перпендикулярно рисунку через точку О расположенную посредине между осями цилиндров, равен нулю

$$N_1\frac{l}{2} - N_2\frac{l}{2} - mgx = 0\,,$$

откуда находим проекцию возвращающей силы на ось X: $F_x = -(\mu N_1 - \mu N_2) = -\frac{2\mu mgx}{l}$

Уравнение второго закона Ньютона в проекции на ось X имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2\mu g}{l}x = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2\mu g}{l} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}}}$$

Спасибо за внимание!