Лекция 12. Асимптоты функций. Общая схема исследования и построения графика функции

Определение 7. *Пусть f определена на полуоси x>c. Прямая y=ax+b называется* ***наклонной асимптотой при $x\to+\infty$,*** *если* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$. (1)

Пусть f определена на полуоси x < c . Прямая y=ax+b ***называется наклонной асимптотой при $x\to-\infty$,*** *если* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$. (2)

Пример 1.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x+1}=\frac{(x+1)^2-4x-4+6}{x+1}=x+1-4+\frac{6}{x+1}.$$

Из полученного равенства получаем: f(x)- (x-3) стремится к 0 *при* $x\to+\infty$, следовательно, асимптотой функции в рассматриваемом предельном переходе является прямая y=x-3 (по определению 7).

В дальнейшем рассматривается лишь случай $+\infty$ **(**для $x\to-\infty$, аналогично).

Теорема 24. *Пусть f(x) определена на [c,+ ∞). Для того, чтобы прямая y=ax+b была наклонной асимптотой функции f (x),необходимо и достаточно, чтобы существовали* ***конечные*** *пределы*

1) $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ (3)

2) $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$ (4)

Доказательство

Необходимость. ***Дано***: существует наклонная асимптота, т.е. выполняется (1). ***Доказать*** существование (3) и (4). Доказательство очевидно. Провести самостоятельно.

Достаточность. ***Дано***: выполнение (3) и (4). ***Доказать*** (1).Для доказательста подставьте (3) и (4) в левую часть (1), получится 0, что и требовалось доказать.

Пример 2.

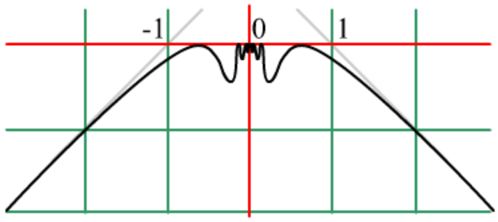

Рис. 2.13

Наклонные асимптоты: в $+\infty$ линия $y=-x+1$, в $-\infty$ линия $y=x+1$. ***Почему?***

Определение 8 (Вертикальная асимптота)

Функция f определена на $(a,a+\delta)$. *Линия x=a называется вертикальной асимптотой, если* $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$, *аналогично при* $x\to a-0$ и *при* $x\to a$.

Утверждение 1. Для существования **вертикальной асимптоты** графика функции y=f(x) в точке a необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a+0}f(x)$ или $\lim_{x\to a-0}f(x)$ был равен бесконечности, то есть

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ или } \lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty \ ,$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty.$$

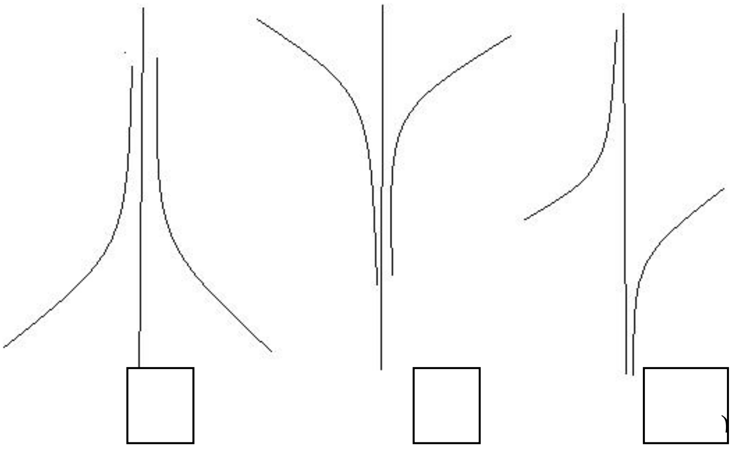

рис.2.13.1

а) б) в)

На рисунке 2.13.11а) односторонние пределы функции положительны.

В случае 2.13.1 б) односторонние пределы функции отрицательны.

В случае 2.13.1в) односторонние пределы имеют разные знаки и $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Замечание 1. Из утверждения 1вытекает (как следствие): если x=a – точка разрыва 2 рода f(x), то прямая x=a - вертикальная асимптота этой функции.

Определение 8.1 Прямая **y=b** называется **горизонтальной асимптотой** кривой y=f(x), если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

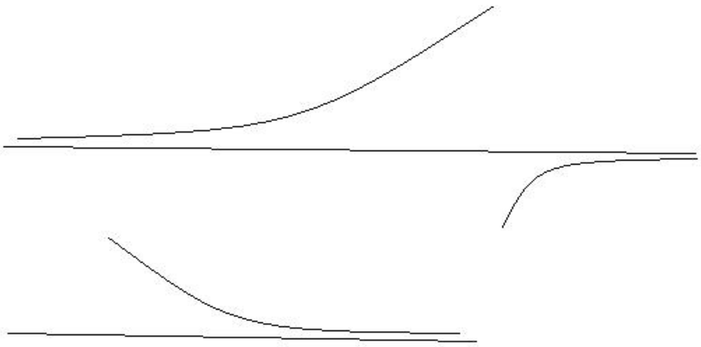

рис.2.13.2.

<u>**Пример 3.**</u> y=x arctgx Найти асимптоты этой функции.

Особенность этой функции в том, что её график имеет разные наклонные асимптоты при $x\to +\infty$ $и$ $x \to -\infty$.

y(0)=0; функция непрерывна на всей числовой прямой. Найдём асимптоту при $x\to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(xarctgx - \frac{\pi}{2}x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx - \pi/2}{1/x}[п.л.] = -1$$

Асимптота $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ при x>0.

Заметим, что функция чётная: y(-x)=y(x). Отсюда следует, что её график симметричен относительно оси ОУ, и при $x \to -\infty$ он имеет наклонную асимптоту $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.

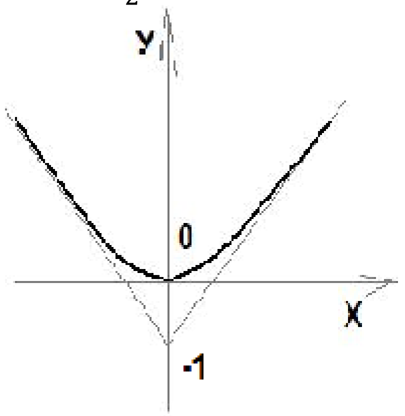

Рис.2.13.3

<u>Пример 4.</u> $y = x + \frac{1}{x-1}$. Найти асимптоты этой функции.

x=1- точка разрыва второго рода, следовательно, по замечанию 1 x=1- вертикальная асимптота. Убедимся в этом, используя определение 8.

Заметим, что при больших значениях переменной x второе слагаемое по абсолютной величине гораздо меньше, чем первое слагаемое, и функция «ведёт себя» как линейная функция y=x.

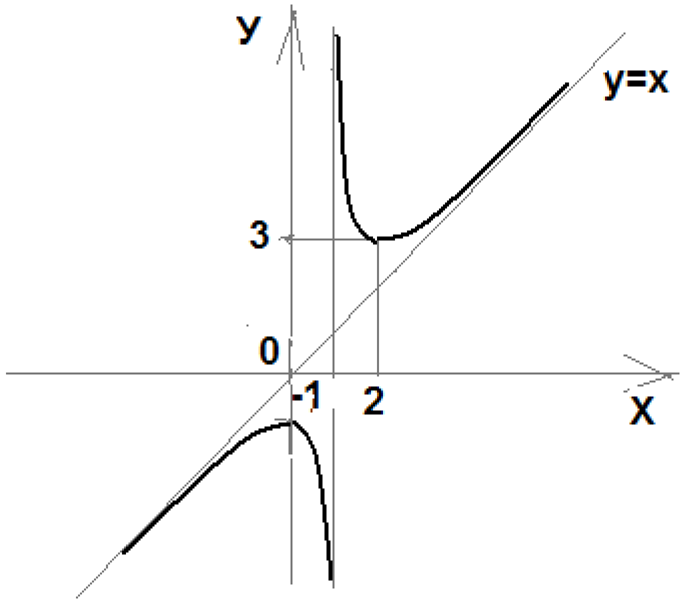

рис.2.13.4

$$\lim_{x\to1} y(x) = \infty, \quad \text{k} = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1\,, \quad b = 0.$$

График этой функции имеет вертикальную асимптоту x=1 и наклонную асимптоту y=x.

<u>Пример</u> 5 . $y = \frac{x^2}{(x+3)^2}$

x=-3- точка разрыва второго рода.

График этой функции имеет горизонтальную асимптоту y=1 и вертикальную асимптоту x=-3. Действительно,

$$\lim_{x\to -3} y(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2}{(x+3)^2} = +\infty,\ \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2+6x+9} = 1.$$

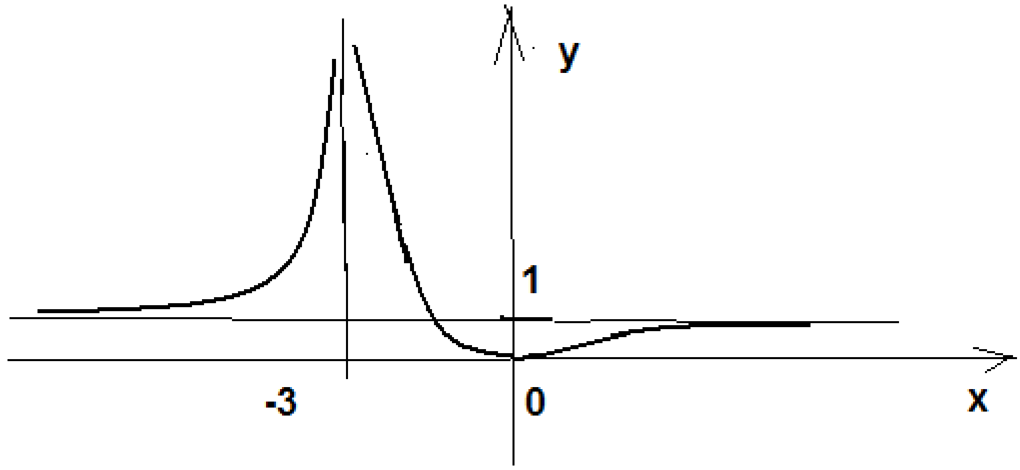

Рис.2. 13.5

Замечание 2 Для нахождения наклонных асимптот параметрически заданных функций поступают похожим образом. Вначале разыскиваются значения параметра t_0, для которых $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$. Далее коэффициенты наклонной асимптоты находятся из соотношений

1) $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$

2) $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - a\, x(t)) = b,$

при условии, что указанные пределы существуют.

Для нахождения вертикальной асимптоты вида $x{=}x_0$ параметрически заданных функций находят t_0такие, что $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$. Для горизонтальной асимптоты $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$

Общая схема построения графиков

Алгоритм

1. Элементарное исследование

1) Область определения.

2)Симметрия (четность, нечетность). Периодичность, Т-период.

3) Пределы на границе области определения, точки разрыва, их тип.

4) Асимптоты.

5)Точки пересечения функции с координатными осями. Нули функции.

6) Эскиз графика.

2. Дифференциальное исследование функции

1) По первой производной.

а) Интервалы монотонности, б)критические точки 1 рода, экстремумы (заполняется таблица, как показано ниже).

2)По второй производной.

а) Интервалы выпуклости, б) критические точки 2 рода, точки перегиба

3) Уточнение эскиза графика

Замечание3. Отыскание глобальных максимумов и минимумов на отрезке производится среди точек трех типов:

1) стационарные точки
2) особые точки (где не существует производная)
3) граничные точки.

Пример 6.

$y=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$ (Краткое исследование)

Асимптоты $y/x\to 1,\ x\to\pm\infty$

$$y(x)-x=\frac{x^3-3x^2-x^3}{(x^2(x-3))^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{x^5(x-3)}+x^2}=\frac{-3x^2}{x^2\left(1+\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x})}+(1-\frac{3}{x})^{\frac{2}{3}}\right)}\to -1 \text{ при } x\to\pm\infty$$

.

Асимптота $y=x-1$

$$y'=\frac{x-2}{x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}},\ y''=-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}(x-3)^{\frac{5}{3}}}$$

Критические точки1 рода 0,2,3

t	(-∞,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
$\dot{x}$	+		+		-
x	-∞↑ -3	-3	-3 ↑ 1	1	1 ↓ -∞
Диапазон x	(-∞,-3)		(-3,1)		(-∞,1)
dy/dx	-	0	+	3	+
y(x)	∞↓-2	-2	-2↑2	2	-∞↑2
d^2y/dx^2	+∪		+∪		-∩

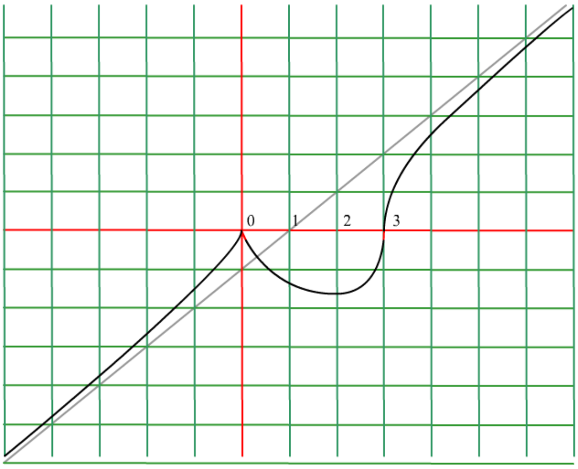

Рис. 2.14

Пример7. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ и построить ее график.

Решение

1. Элементарное исследование

1). Функция определена на всей числовой прямой, кроме точки $x=-1$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль, т. е. $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; $x=-1$ – точка разрыва.

2). Функция заведомо не обладает свойствами четности или нечетности, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат (см. п.1.5). Поэтому исследование функции нужно выполнять на всей числовой прямой.

3). Найдем точки пересечения графика функции $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ с осями координат. При $x=0$ получим y = 0, т. е. O (0; 0). В этой точке график пересекает обе координатные оси.

4). Помечаем знаками + и – интервалы, на которых функция принимает соответственно положительные и отрицательные значения (рис.2.17)

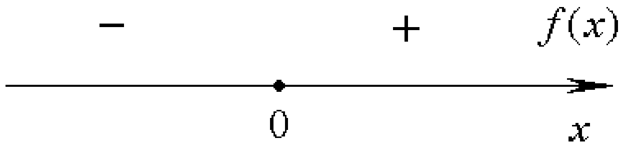

Рис. 2.15

5). В точке разрыва x = – 1 существует вертикальная асимптота x = – 1, так как $\lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1\pm0}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty$.

Горизонтальной асимптоты график не имеет, поскольку

$$\lim_{x\to-\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\pm\infty$$

Выясним наличие наклонных асимптот:

$$k=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to-\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=-1.$$

Пределы, определяющие k и b, совпадают при $x\to\pm\infty$, поэтому $y=\frac{1}{2}x-1$– двусторонняя наклонная асимптота кривой.

6). Эскиз графика вместе с уточнениями изображен на рис.2.18.

2. Дифференциальное исследование

1) Имеем $y'=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Критические точки находим из условия $y'=0$, откуда $x^2(x+3)=0$, т.е. $x=-3$ и $x=0$. Функция может переходить от возрастания к убыванию или наоборот в критических точках $x_1=-3$; $x_2=0$ и в точке разрыва $x=-1$. Эти точки разбивают область определения на четыре интервала монотонности: $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$. На рис. 2.16 показаны знаки $f'(x)$ в этих интервалах.

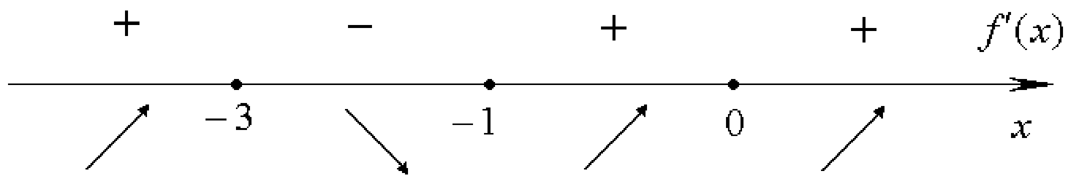

Рис.2.16

Согласно достаточному признаку экстремума, $x=-3$ – точка максимума; при $x=0$ экстремума нет. Соответствующие значения функции составляют $f(-3)=-27/8$, $f(0)=0$. Касательная в точке максимума горизонтальна, так как $k_{x=-3}=f'(-3)=0$.

1) Имеем $y''=3x/(x+1)^4$, поэтому все возможные точки перегиба находим из уравнения $3x/(x+1)^4=0$, т. е. $x=0$. Направление выпуклости кривой может изменяться в точках перегиба и в точках разрыва функции. Точка разрыва $x=-1$ и возможная точка перегиба $x=0$ разбивают всю область определения на три интервала $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$, внутри которых направление выпуклости не меняется. Знаки y'' в этих интервалах показаны на рис. 2.17

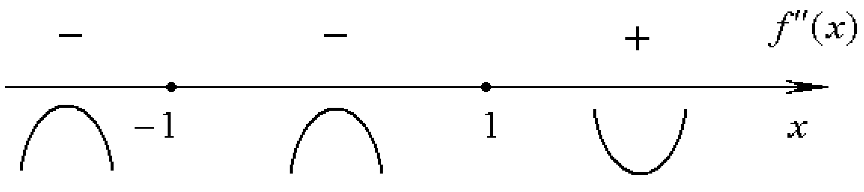

Рис. 2.17

В интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ кривая выпукла вверх. В точке $x=0$ кривая меняет выпуклость вверх на выпуклость вниз; так как $f(0)=0$, то $O(0;0)$ – точка перегиба графика. Угловой коэффициент касательной в этой точке $k_{x=0}=f'(0)=0$, поэтому касательная в точке перегиба горизонтальна и совпадает с осью Ox.

3. Уточнение эскиза графика

Помечаем на чертеже точку пересечения с осями координат, она же точка перегиба, точку экстремума. Строим асимптоту, а затем уточненный график исследуемой функции (рис.2.18).

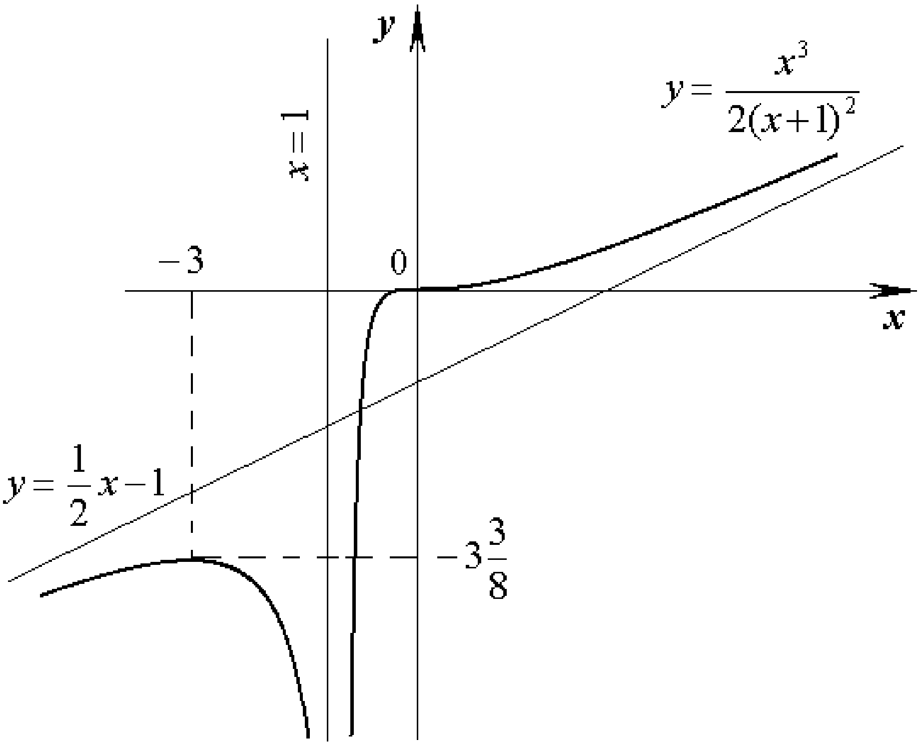

Рис. 2.18

<u>**Пример 8**</u>. $y=-\sqrt[4]{|x^2-1|^3}$

Особенности этого графика - чётность и «угловые» критические точки.

1.Элементарное исследование

1)Область определения функции – вся числовая ось $(-\infty,+\infty)$; множество значений: $(-\infty,0]$.

2)Функция чётная. Поэтому возможно исследовать функцию, например, на правой полуоси и симметрично график отобразить относительно оу.

3) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$. Точек разрыва нет.

4)Асимптот нет. (Проверьте!)

5) Корни: x=-1, x=+1.

6)Эскиз графика: уточненный график изображен на рис.4.

2.Дифференциальное исследование.

1)По первой производной

Раскроем знак модуля:

$y(x)=\left\{\begin{matrix} -\sqrt[4]{(x^2-1)^3}, & |x|>1 \\ -\sqrt[4]{(1-x^2)^3}, & |x|<1 \end{matrix}\right\}$; тогда производная равна

$$y'(x)=\frac{-3|x|}{2\sqrt[4]{|x^2-1|}}$$

Критические точки 1 рода функции: x=1, x=-1, x=0. Исследуйте промежутки знаков постоянства производной по таблице, аналогичной примеру 7.

Делаем вывод: все три критические точки функции являются точками экстремума. Точки +1, -1- критические точки 1 рода с вертикальной касательной; точка x=0- точка минимума с горизонтальной касательной.

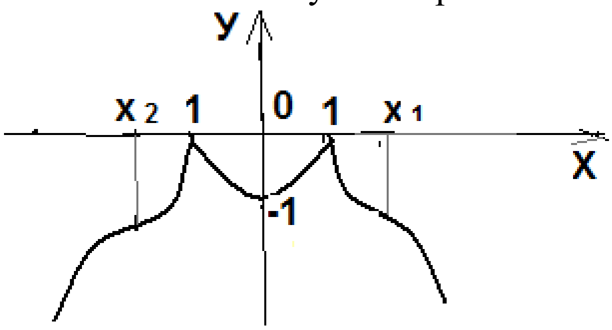

Рис.2.19

2)Вторая производная функции имеет вид: $y'' = -\frac{3}{4}\frac{(x^2-2)}{(x^2-1)^{5/4}}$;

Точки перегиба: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. (проверьте!) Составьте таблицу для второй производной самостоятельно, аналогично примеру 7

3.Уточненный график приведен на рис.2/19.

Определение 8.2. (Глобального экстремума функции на отрезке)

Глобальный максимум (минимум) - это наибольшее М (наименьшее m) значение функции среди всех локальных максимумов, минимумов и ее значений на концах отрезка. **М и m –глобальный экстремум функции на отрезке**. По теореме Вейерштрасса он всегда существует для функций, непрерывных на этом отрезке.

Следовательно, отыскание глобальных максимумов и минимумов на отрезке производится среди значений функции в точках двух типов:

1)критические точки 1 рода,

2)граничные точки отрезка.

Пример 9. Найти наибольшее значение функции на отрезке

$$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2, \quad [-3,\ 3].$$

Решение.

Убедитесь, что функция непрерывная на заданном отрезке и дифференцируема внутри.

1)Найдите первую производную, по ней критические точки 1 рода этой функции. Это точки x=-1, 5; (проверьте!). Точка x=3, в которой производная равна 0, совпадает с правым концом отрезка, в ней только левосторонняя производная (точка не является стационарной) Вычислим значения функции в точках -1 и 5: f(-1)=f(5)=-2

2)Значения функции на конах отрезка (в граничных точках) равны:f(-3)=f(3)=2

Из сравнения значений функции, полученных в 1) и 2), берм максимальное значение.

Ответ: 2.