*Лекция 3. Предел функции. Свойства пределов*

*На предыдущей лекции было дано определение* ***функции как отображения*** *из X в Y*. *X называется областью определения функции. Областью значений* *функции называется множество всевозможных значений* *, когда* *.Напомним кратко и другие важные определения.*

*Функция f*(*x*) *называется монотонно возрастающей на X, если для .*

*Функция f*(*x*) *называется монотонно убывающей на X, если для .*

*Функция f*(*x*) *называется строго монотонно возрастающей на X, если для .*

*Функция f*(*x*) *называется строго монотонно убывающей на X, если для .*

*Если различным значениям xотвечают различные значения y****,*** *то* ∀*y*∈*Y*∃!*x*∈*X*:*f*(*x*)*=y.*

*Полученная зависимость y→x называется обратной функцией и обозначается f-1*. Область значений прямой функции становится областью определения обратной функции и наоборот, область определения прямой функции превращается в область значений обратной функции.

***Теорема 4.*** *Если f*(*x*) *строго монотонна на X и имеет область значений Y, то на Y существует обратная функция .*

Для доказательства этого утверждения достаточно отметить выполнение условия единственности *x*в выражении ∀*y*∈*Y*∃!*x*∈*X:f*(*x*)*=y ,* которое следует из строгой монотонности функции.

Графиком функции называется геометрическое место точек на плоскости вида:  или, что тоже, геометрическое место точек .

*Cуперпозицией функцийf* и*g*называется отображение

*g:T→X,f:X→Y,:T→Y.* Пишут также*y = f*(*g*(*t*)) *и называют сложной функцией.*

*Функция ограничена на множестве Х,если существует такое b, что для любого x из Х значения функции не превосходят данного числаb(*∃*b*∀*x*∈*X:|f(x)|≤b).*

*Функцияограничена сверху на множестве X, если* ∃*b*∀*x*∈*X*:*f*(*x*)≤*b.*

*Функция ограничена снизу на множестве X, если*∃*b*∀*x∈X*:*f*(*x*)≥*b.*

Были подробно рассмотрены [***элементарные функции***](http://www.kaf30.mephi.ru/books/ILL/slide22.swf)

Функции: *константаy=const, степеннаяy=xa, показательнаяy=ax*(*a*>0)*, логарифмическая, тригонометрические и их обратные называются основными элементарными функциями*.

*Всякая функция, полученная применением конечного числа арифметических операций и суперпозиций над основными элементарными функциями, называется элементарной функцией.*

**Пример 16**. Многочлен *n* степени

=*a*0*+ a*1*x+…+ am-*1*xm-*1*+ amxm*(*am*≠0),

дробно рациональная функция



***Перейдем к важнейшему понятию анализа - пределу функции***

Для отого введем сначала понятие окрестности точки.

*Окрестность числа a обозначается U*ε(*a*)*=*(*a-*ε,*a+*ε), ε>0*,*

*окрестность символа +*∞*обозначаетсяUb*(*+*∞)=(*b,+*∞) (*b – любое число*)*,*

*окрестность -*∞*обозначаетсяUa*(*-∞*)*=*(-∞*,a*) (*a – любое число*)*,*

*окрестность* ∞*обозначаетсяUc*(*∞*)*=*(*-*∞*,c*)∪(*c,*∞) (*c – любое число*)*.*

*Проколотаяокрестность*, *a*-*число.*

*Проколотаяокрестность*=*Ub*(+∞)*.*

*Проколотаяокрестность*=*Ua*(-∞)*.*

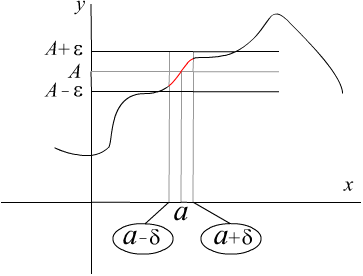
*Проколотаяокрестность*=*Uc*(∞)*.*

***Определение 17 (предела функции по Коши): Задана функция f(x)с областью определения X. Будем предполагать, что X содержит некоторую проколотую окрестность точкиa.***

*** , если∀ε>0∃δ>0∀x,0<|x - a|<δ,x∈X:|f(x)-A|<ε (1.16)***

***Геометрическое определение****: A – является пределом функции f*(*x*) *при x→a, если для любой окрестности A существует проколотая окрестность a, такая, что* (***x∈***∩***X)⇒(f(x)∈U(A)).***

***Геометрическая интерпретация определения предела****A при х стремящемся к конечному числуa*. Аналогично определяется предел функции, когда-число, ).



*Рис. 1.32*

Например:

, если***∀b∃δ>0∀x,0<|x–x0|<δ, x∈X: f(x)>b. (1.17)***

, если***∀c∃a∀x, x<a, x∈X: |f(x)|>c. (1.18)***

***Определение 18. Односторонние пределы. Предел*** [***слева***](http://www.kaf30.mephi.ru/books/ILL/slide38.swf)***, предел*** [***справа***](http://www.kaf30.mephi.ru/books/ILL/slide37.swf)

Пусть *f*(*x*) определена на интервале *X=*(*c,a*) *,* где *a* – число.Предел слева определяется следующим образом:

. (1.18)

Стандартное обозначение одностороннего предела слева:

А.

Аналогично определяется *предел справа*, именно.

. (1.19)

Стандартное обозначение одностороннего предела справа: 

*Связь предела с односторонними пределами*

Пусть функция *f(x)* определена на (*a,b*) за исключением, быть может, точки *x*0∈(*a,b*) .

***Утверждение1.*** *Для того, чтобы существовал предел ,* (*A – число*) *н. и д. существование односторонних пределов и их равенство числу A.*

 (1.20)

**Доказательство** этого утверждения следует непосредственно из определения.

***Замечание******1.***Утверждение верно и для A=+∞ ,-∞,но формально не верна для*A*=∞.

Пример: *f*(*x*)=1/*x, x*0=0,

**

***Критерий Коши существования конечного предела функции***

Пусть *X* область определения функции *f* содержит проколотую окрестность точки *a .*

**Условие Коши** для *f*(*x*)в окрестности *a* (для предела ):

∀ε>0∃**∀*x′,x′′*∈**∩*X*:*|f*(*x′*) *- f*(*x′′*)*|<*ε.(1.21)

Сформулируем условие Коши для других случаев.

Односторонние пределы:

Предел справа () : ∀ε>0∃δ>0∀*x′,x′′*∈(*a,a+*δ)∩*X:|f*(*x′*)*-f*(*x′′*)*|<*ε.

Предел слева () :∀ε>0∃δ>0∀*x′,x′′*∈(*a-*δ*, a*)∩*X:|f*(*x′*)*-f*(*x′′*)*|<*ε.

Условие Коши для +∞ (): *f* определена в окрестности +∞

∀ε>0∃*b*∀*x′,x′′*∈(*b,+*∞)∩*X*:*|f(x′) - f(x′′)|<*ε.

Условие Коши для -∞ (): *f* определена в окрестности -∞

∀ε>0∃*a*∀*x′,x′′*∈(-∞,*a*)∩*X:|f*(*x′*) *- f*(*x′′*)*|<*ε.

Условие Коши для ∞ (): *f* определена в окрестности ∞

∀ε>0∃*a*∀*x′,x′′*∈(-∞*,a*)∩ (∞*,a*)∩*X:|f*(*x′*) *- f*(*x′′*)*|<*ε.

***Теорема 5.*** *(****Критерий Коши****). Для существования конечного предела необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяла условию Коши в окрестности a.*

***Доказательство.*** *Необходимость.* Пусть ε>0*,* для ε/2 ∃**∀*x*∈**∩*X*:

*|f*(*x*)*-A|<*ε/2*.* Для *x′,x′′∈*∩*X* получим требуемое неравенство

*|f*(*x*′) *- f*(*x*′′)*|<|f*(*x*′) *- A|+|f*(*x*′′) *-A| <*ε/2*+*ε/2*=*ε*.*

***Задание на дом****: Доказать Достаточность*

***Свойства функций, имеющих предел***

*1. Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел*

Область определения *X* функции *f* содержит некоторую проколотую окрестность .

Функция *f* локально ограничена в точке *a*, если она ограничена в некоторой окрестности этой точки. Для числа *a* определение локальной ограниченности выглядит следующим образом:

∃*M*∃δ*>*0∀*x*∈*U*δ(*a*)∩*X*:*|f(x)|*≤*M.*

Для*a = +∞*∃*M*∃*b*∀*x∈Ub*(*+*∞)∩*X:|f(x)|*≤*M.*

***Теорема 6.*** *Функция f*(*x*) *, имеющая конечный предел при x→a , локально ограничена в a.*

***Доказательство****:*ε*=*1*, M=*max{*|A-*1*|, |A+*1*|,f*(*a*)} или *M=*max{*|A-*1*|,|A+*1*|*}(последнее в случае, если функция не определена в *a* )*.*

***Замечание2****.* Теорема верна и в случае  ,.

*2.*[*Сохранение знака функции, имеющей ненулевой предел в точке*](http://www.kaf30.mephi.ru/books/ILL/slide51.swf)

Будем предполагать, что область определения *X* функции *f* содержит некоторую Тогда справедлива следующая

***Теорема 7****.*

В этом случае говорят, что функция *f*(*x*) сохраняет знак числа *A* в некоторой окрестности a.

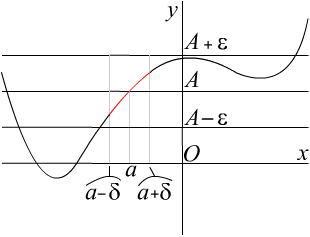
***Доказательство****.* Для

ε*=*.

***Замечание* 3**. 

***Замечание* 3**. Теорема верна и в случае





*Рис.1.33*

***Предел сложной функции***

Пусть функция *f*(*x*) определена на *X,* функция *g*(*t*) определена на *T* с областью значений *G⊂X.* Тогда на *T* определена суперпозиция*F*(*t*)*=f*(*g*(*t*))*, t*∈*T.* При этих условиях справедлива

***Теорема 8****. Пустьg*(*t*) *определена на*

*T=* (α,β)\{*t*0}*,t*0∈ (α,β)*.Функция f*(*x*) *определена на* (*a,b*)\{*x*0},

* иg*(*t*)≠*x*0, *если t≠t*0 *,=A.*

*Тогда * (1.22)

***Доказательство****:* возьмём ε>0для него ∃δ>0∀*x*∈**:

*f*(*x*)∈*U*ε(*A*)*,* далее, для δсуществуетη>0∀*t*∈*:g*(*t*) ∈*,* если*t*≠*t*0 *,* то*g*(*t*)≠*x*0*.* таким образом, *g*(*t*)∈**и, следовательно, *f*[*g(t*)]∈*U*ε(*A*)*.*

***Переход к пределу в неравенствах***

***Теорема 9****.Если f*(*x*)*, g*(*x*) *определены на *,*x*0*∈*(*a,b*) *и f*(*x*)*≤g*(*x*) *на  и существуют пределы, А и B числа, то A*≤*B.*

Аналогично, для случая *f*(*x*)*<g*(*x*)*.*

*Теорема.Если f*(*x*)*, g*(*x*) *определены на*,*x*0*∈*(*a,b*) *и f*(*x*)*<g*(*x*) *на и существуют пределы, А и B числа, то A*≤*B.*

Эти утверждения следуют из соответствующих теорем о пределах последовательностей, используя определение предела по Гейне.

***Арифметические операции над пределами***

Везде в этом пункте рассматриваются конечные пределы.

1), , если ∃.

2) , если существуют конечные пределы , .

3) , если существуют конечные пределы , .

*Следствие:*, если существует конечный предел .

4) ∃⇒∃

5) g(*x*)≠0,, ∃⇒∃

***Замечание 4.*** Аналогичные свойства имеют место для односторонних пределов.