



به نام خدا

## پاسخ تمرین اول ساختمان داده‌ها و الگوریتم

الگوریتم‌ها و حل مسئله - پیچیدگی زمانی - الگوریتم‌های بازگشتی

استاد:

دکتر روستایی

استادیار:

عرشیا عموزاد

۱. یادآوری: اگر  $f(n)$  و  $g(n)$  توابعی صعودی باشند و  $\log(f(n))$  از  $\log(g(n))$  رشد بیشتری داشته باشد، آنگاه  $f(n)$  از  $g(n)$  رشد بیشتری دارد. البته در صورتی که رشد لگاریتم توابع از مرتبه‌ی یکسانی شود، نمی‌توان درباره‌ی هم مرتبه بودن توابع اظهار نظر کرد.

$$\log(g(n)) = \log(n^{\log n}) = \log^2 n$$

$$\log(f(n)) = \log(\log^n n) = n \log(\log(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(f(n))}{\log(g(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(\log(n))}{\log^2(n)}$$

$$\log n = m, n = 2^m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^m \log(m)}{m^2} = \infty \Rightarrow g(n) = O(f(n))$$

۲. مانند سوال قبل رفتار می‌کنیم.

$$\log f(n) = \log n \cdot \log 4 = 2 \log n = \Theta(\log n)$$

$$\log g(n) = \log^2(n) = \Theta(\log^2 n)$$

$$\log h(n) = 2 \log(\log(n)) = \Theta(\log(\log(n)))$$

$$\Rightarrow h(n) \leq f(n) \leq g(n)$$

۳. عمل جستجوی خطی اگر target در arr[1] باشد. بهترین حالت است و تعداد مقایسه‌ها  $O(1)$  است. اگر target در arr[n] باشد، یا اصلاً نباشد، بدترین حالت است و n مقایسه انجام می‌شود.

بررسی حالت متوسط معمولاً دشوار است زیرا باید با در نظر گرفتن تمام حالات ممکن میانگین گرفت.

اگر target با احتمال p در arr باشد در نتیجه با احتمال (1-p) در آن وجود ندارد. در این صورت داریم:

$$\frac{p}{n} (\sum_{i=1}^n i) + (1-p)n = \frac{p(n+1)}{2} + (1-p)n$$

$$\text{که با } p = 0.5 \text{ می‌شود: } \frac{3n+1}{4}$$

۴. خیر فرض کنید  $f(n) = n$  و  $g(n) = n^{1+\sin n}$ . این مثال درستی نتایج ذکر شده را نقض می‌کند.

۵. یادآوری:

$$a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

طبق نکته‌ی بالا خواهیم داشت:

$$f_3(n) = f_5(n) = e^{\log n \cdot \log \log n}$$

حال توابع را بصورت لگاریتمی با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\ln f_1 \sim 1.01 \ln n$$

$$\ln f_2 \sim (\sqrt{n}) \cdot \ln 2$$

$$\ln f_4 \sim (\ln n)^2$$

$$\ln f_3 = \ln f_5 \sim \ln n \cdot \ln \ln n$$

با مقایسه لگاریتم توابع، ترتیب صعودی توابع از کوچک به بزرگ خواهد شد:

$$f_1 < f_3 \equiv f_5 < f_4 < f_2$$