



به نام خدا

پاسخ تمرین اول ساختمان داده‌ها و الگوریتم

الگوریتم‌ها و حل مسئله - پیچیدگی زمانی - الگوریتم‌های بازگشتی

استاد:

دکتر رستمی

استادیار:

عرشیا عموزاد

۱. یادآوری: اگر $f(n)$ و $g(n)$ توابعی صعودی باشند و $\log(f(n))$ از $\log(g(n))$ رشد پیشتری داشته باشد، آنگاه $f(n)$ از $g(n)$ رشد پیشتری دارد. البته در صورتی که رشد لگاریتم توابع از مرتبه‌ی یکسانی شود، نمی‌توان درباره هم مرتبه بودن توابع اظهار نظر کرد.

$$\log(g(n)) = \log(n^{\log n}) = \log^2 n$$

$$\log(f(n)) = \log(\log^n n) = n \log(\log(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(f(n))}{\log(g(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(\log(n))}{\log^2(n)}$$

$$\log n = m, n = 2^m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^m \log(m)}{m^2} = \infty \Rightarrow g(n) = O(f(n))$$

۲. مانند سوال قبل رفتار می‌کنیم.

$$\log f(n) = \log n \cdot \log 4 = 2 \log n = \Theta(\log n)$$

$$\log g(n) = \log^2(n) = \Theta(\log^2 n)$$

$$\log h(n) = 2 \log(\log(n)) = \Theta(\log(\log(n)))$$

$$\Rightarrow h(n) \leq f(n) \leq g(n)$$

۳. عمل جستجوی خطی اگر target در arr[1:n] باشد. بهترین حالت است و تعداد مقایسه‌ها $O(1)$ است. اگر target در arr[n] باشد، یا اصلاً نباشد، بدترین حالت است و n مقایسه‌انجام می‌شود.

بررسی حالت متوسط معمولاً دشوار است زیرا باید با در نظر گرفتن تمام حالات ممکن میانگین گرفت.
اگر target با احتمال p در arr باشد در نتیجه با احتمال (1-p) در آن وجود ندارد. در این صورت داریم:

$$\frac{p}{n} (\sum_{i=1}^n i) + (1-p)n = \frac{p(n+1)}{2} + (1-p)n$$

$$\text{که با } p = \frac{3n+1}{4} \text{ می‌شود:}$$

۴. خیر فرض کنید $n = f(n)g(n) = n^{1+\sin n}$. این مثال درستی نتایج ذکر شده را نقض می‌کند.

۵. یادآوری:

$$a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

طبق نکته‌ی بالا خواهیم داشت:

$$f_3(n) = f_5(n) = e^{\log n \cdot \log \log n}$$

حال توابع را بصورت لگاریتمی با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\ln f_1 \sim 1.01 \ln n$$

$$\ln f_2 \sim (\sqrt{n}) \cdot \ln 2$$

$$\ln f_4 \sim (\ln n)^2$$

$$\ln f_3 = \ln f_5 \sim \ln n \cdot \ln \ln n$$

با مقایسه لگاریتم توابع، ترتیب صعودی توابع از کوچک به بزرگ خواهد شد:

$$f_1 < f_3 \equiv f_5 < f_4 < f_2$$