

به نام خدا



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده ریاضی

درس مبانی ریاضی علوم داده

ترم اول ۱۴۰۵

تکلیف تئوری دوم

۱. دو روش کاهش بعد را توضیح دهید و تفاوت آن‌ها و محل کاربرد هر کدام را مشخص کنید.

۲. برای یک ماتریس  $n \times d$  مثل  $A$  تعریف می‌کنیم:

$$\|A\|_{2,k} = \max_{\substack{x: \|x\|=1 \\ x \perp v_1, v_2, \dots, v_{k-1}}} \|Ax\|_2$$

همچنین فرض کنید مقادیر تکین  $A$  به ترتیب  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$  و بردار تکین‌های سمت راست  $A$  به ترتیب  $v_1, v_2, \dots, v_r$  باشند.

الف) ثابت کنید  $\|A\|_{2,k} = \sigma_k$ .

ب) ثابت کنید برای هر  $1 \leq k \leq r$   $\sigma_k \leq \frac{\|A\|_F}{\sqrt{k}}$ .

ج) ثابت کنید برای هر  $1 \leq k \leq r$ ، یک ماتریس با رنک  $k$  مثل  $B$  پیدا می‌شود که

$$\|A - B\|_{2,1} \leq \frac{\|A\|_F}{\sqrt{k}}$$

راهنمايی:  $\|A\|_F$  همان نرم فربنیوس ماتریس  $A$  است.

۳. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times d$  باشد. همچنین تعریف

$$A^* = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t$$

الف) اگر  $A^* = A^{-1}$  وارون پذیر باشد، ثابت کنید  $d = n$ .

ب) هر کدام از روابط زیرکه درست است را ثابت کنید و برای هر کدام که غلط است مثال نقض بیاورید.

$$A^* = (A^t A)^* A^t \quad A^* A = I \quad A A^* A = A \quad \|v_1^t A^*\|_2 = \min_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Ax\|} (a)$$

۴. فرض کنید  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$  اعداد ثابت باشند.

الف) مقدار ماکسیمم عبارت  $\sum_{i=1}^r c_i^2 = 1$  را تحت شرط  $\sum_{i=1}^r c_i^2 \sigma_i^2$  بدست آورید.

ب) اگر علاوه بر شرط  $\sum_{i=1}^r c_i^2 = 1$  شرط  $\sum_{i=1}^r c_i = 0$  داشته باشیم، ماکسیمم  $\sum_{i=1}^r c_i^2 \sigma_i^2$  را بدست آورید.

۵. فرض کنید ماتریس  $A$  با ابعاد  $n \times d$  را در اختیار دارید. بردار  $d$ -بعدی  $x$  به شما داده می‌شود. می‌دانیم محاسبه دقیق  $Ax$  به زمان  $O(nd)$  نیاز دارد. الگوریتمی با زمان اجرای  $O\left(\frac{n+d}{\epsilon^2}\right)$  طراحی کنید که بردار  $Ax$  را با خطای  $\epsilon > 0$  محاسبه کند.

منظور از خطای  $\epsilon$  این است که اگر  $y$  خروجی الگوریتم ما باشد، داشته باشیم:

$$\|y - Ax\| \leq \epsilon \|A\|_F \|x\|$$

منظور از زمان اجرای الگوریتم، تعداد عملیات‌های ضرب و جمع است. راهنمایی: از قسمت ج سوال دوم استفاده کنید.

۶. ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

الف) با استفاده از روش *power method* با  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و تا سه تکرار، تقریبی از بردار تکین راست اول را محاسبه کنید.

ب) مقادیر دقیق بردار تکین راست اول و بردار تکین چپ اول و مقدار تکین اول  $A$  را محاسبه و با پاسخ بخش الف مقایسه کنید. توضیح دهید که در عمل کدام روش مناسب‌تر است؟

پ) فرض کنید ماتریس  $A$  یک پایگاه‌داده امتیازدهی رستوران‌ها باشد، به طوری که هر سطر مربوط به یک نفر و هر ستون نماینده یک رستوران است و هر مقدار  $a_{ij}$  نشان میدهد که شخص  $i$  چقدر رستوران  $j$  را می‌پسندد.

در این حالت توضیح دهید:

- بردار تکین راست اول ( $v_1$ ) چه مفهومی دارد؟
- بردار تکین چپ اول ( $u_1$ ) چه چیزی را بازتاب می‌کند؟
- شکاف بین  $\sigma_2$  و  $\sigma_1$  بیانگر چیست؟

۷. یک ماتریس  $n \times d$  مثل  $A$  را بلوکی گوییم هرگاه بتوان آن را بصورت  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ . اگر  $A$  بلوکی باشد، بردار تکین‌ها و مقدار تکین‌های  $A$  چه ارتباطی با بردار تکین‌ها و مقدار تکین‌های  $C$  و  $B$  دارند؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۸. فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نقطه در فضای  $d$ -بعدی باشند و  $X$  یک ماتریس  $n \times d$  باشد که هر سطر آن مختصات یکی از این نقاط است. فرض کنید به جای مختصات نقاط، فقط ماتریس  $D$  شامل فاصله‌های جفتی بین نقاط را در اختیار داریم.

توجه کنید مجموعه نقاطی که ماتریس  $D$  را تولید می‌کنند یکتا نیست؛ زیرا اگر دستگاه مختصات را انتقال دهیم، بچرخانیم یا نسبت به محوری بازتاب دهیم، فاصله‌ها تغییر نمی‌کنند. بنابراین مبدأ را طوری انتخاب کنید که مرکز هندسی نقاط روی مبدأ قرار گیرد. یعنی:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

الف) نشان دهید درایه‌های  $XX^T$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x_i x_j^T = -\frac{1}{2} \left[ d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_{ik}^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_{kj}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_{kl}^2 \right].$$

ب) الگوریتمی بنویسید که بتوان با استفاده از  $D$ ، ماتریس  $X$  (با سطرهای  $x_i$ ) را به دست آورد.

## نکات تکمیلی :

- تکالیف فقط از طریق سامانه یکتا ارسال شود.
- در صورت مشاهده تقلب، نمره تکلیف صفر لحاظ می‌شود.
- در صورت وجود هرگونه ابهام سوالات خود را در گروه تلگرامی همین درس و یا از آیدی تلگرام @Setareh\_Ghafouri بپرسید.