Толегенов Арслан
группа 25.Б82
домашнее задание по дискре

9 октября 2025 г.

1.2. Докажите следующие равенства в отношениях

а) $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$

Докажем $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$:

$$\textbf{Пусть } X \in P(A \cap B) \to X \subseteq A \cap B$$

$$\textbf{Из } X \subseteq A \cap B \Rightarrow X \subseteq A \land X \subseteq B$$

Значит, $X \in P(A) \land X \in P(B)$, т.е. $X \in P(A) \cap P(B)$.

Докажем $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$:

$$\textbf{Пусть } X \in P(A) \cap P(B). \quad \text{Тогда } X \in P(A) \land X \in P(B), \text{ т.е. } X \subseteq A \land X \subseteq B$$

Значит, $X \subseteq A \cap B$, т.е. $X \in P(A \cap B)$.

Из 1 и 2 следует равенство.

Пример строго выполнения не требуется, так как это равенство.

б) $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$

Доказательство включению:

$$\textbf{Пусть } X \in P(A) \cup P(B)$$

$$\textbf{Тогда } X \subseteq A \lor X \subseteq B$$

В любом случае $X \subseteq A \cup B$, значит $X \in P(A \cup B)$.

Пример строгого включения:

$$A = \{1\}, B = \{2\}$$

Тогда $A \cup B = \{1, 2\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

$$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Множество $\{1, 2\} \in P(A \cup B)$, но $\notin P(A) \cup P(B)$. Включение строгое.

в) $P(A \backslash B) \subseteq (P(A) \backslash P(B)) \cup \{\emptyset\}$

Доказательство включения:

Пусть $X \in P(A \backslash B)$ Тогда $X \subseteq A \backslash B$

Из $A \backslash B \subseteq A$ следует $X \subseteq A$, т.е. $X \in P(A)$

1) Если $X = \emptyset$, то $X \in \{\emptyset\}$, значит $X \in (P(A) \backslash P(B)) \cup \{\emptyset\}$

2) Если $X \neq \emptyset$, то $X \subseteq A \backslash B$ означает, что X не содержит элементов из B, поэтому $X \nsubseteq B$, и $X \notin P(B)$.

Но $X \in P(A)$, значит $X \in P(A) \backslash P(B)$, и тем более $X \in (P(A) \backslash P(B)) \cup \{\emptyset\}$.

В обоих случаях отношение выполняется.

Пример строгого включения:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2\}$$

$$A \backslash B = \{1\}$$

$$P(A \backslash B) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

$$P(A) \backslash P(B) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$$

$$(P(A) \backslash P(B)) \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

Сравниваем:

$$P(A \backslash B) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

Правая часть: $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ множество $\{1, 2\}$ лежит в правой части, но не лежит в левой. Включение строгое.

1. Доказать следующее

а) $A \subseteq B \cap C \iff A \subseteq B$ **и** $A \subseteq C$

Показать в прямую сторону ($\Rightarrow$):

$$\text{Пусть } A \subseteq B \cap C$$

Возьмём $\forall x \in A$. Тогда $x \in B \cap C$, значит $x \in B$ и $x \in C$.
Так как x произвольный элемент A, получаем $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$.
Доказательство в обратную сторону ($\Leftarrow$):

$$\text{Пусть } A \subseteq B \text{ и } A \subseteq C$$

Возьмём $\forall x \in A$. Тогда $x \in B$ (т.к. $A \subseteq B$) и $x \in C$ (из $A \subseteq C$), значит $x \in B \cap C$. Следовательно $A \subseteq B \cap C$.

б) $A \subseteq B \backslash C \iff A \subseteq B$ **и** $A \cap C = \emptyset$

Доказательство в прямую сторону ($\Rightarrow$):

$$\text{Пусть } A \subseteq B \backslash C$$

1. Так как $B \backslash C \subseteq B$, то $A \subseteq B$.
2. Предположим, что $A \cap C \neq \emptyset$, тогда $\exists x \in A \cap C$.
Но $x \in A \to x \in B \backslash C \to x \notin C$, противоречие с $x \in C$.
Значит, $A \cap C = \emptyset$.
Доказательство в обратную сторону ($\Leftarrow$):

$$\text{Пусть } A \subseteq B \text{ и } A \cap C = \emptyset$$

Возьмём $\forall x \in A$. Тогда $x \in B$ и $x \notin C$ (так как если $x \in C$, то $x \in A \cap C$, что неверно). Значит, $x \in B \backslash C$. Следовательно, $A \subseteq B \backslash C$.

Задача 1.9

В Думе 1600 депутатов образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.

Доказательство

1. **Подсчитаем общее число включений депутатов в комитеты** (пары «депутат–комитет»):

$$16000 \times 80 = 1\,280\,000.$$

2. **Среднее число комитетов на депутата:**

$$\frac{1\,280\,000}{1600} = 800.$$

3. **Рассмотрим тройки** (D, A, B), где депутат D входит в комитеты A и B $(A \neq B)$.
Число таких троек равно

$$S = \sum_{i=1}^{1600} \binom{x_i}{2},$$

где x_i — число комитетов, в которых состоит депутат i.

4. **Оценим S снизу.**
Функция $f(x) = \binom{x}{2}$ выпукла при $x \geq 0$. По неравенству Йенсена:

$$\frac{S}{1600} \geq \binom{800}{2} = \frac{800 \cdot 799}{2} = 319\,600.$$

Отсюда

$$S \geq 1600 \cdot 319\,600 = 511\,360\,000.$$

5. **Предположим противное:** любые два комитета имеют не более трёх общих членов.
Всего пар комитетов:

$$\binom{16000}{2} = \frac{16000 \cdot 15999}{2} = 127\,992\,000.$$

Тогда

$$S \leq 3 \cdot 127\,992\,000 = 383\,976\,000.$$

6. Противоречие:

$$511\,360\,000 \leq S \leq 383\,976\,000$$

неверно. Значит, предположение ложно.

Конечный ответ:

$\boxed{\text{Найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.}}$

Задача 1.4

Для каждой из функций найти область значений и указать, является ли функция инъективной, сюръективной, биекцией.

(а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1$;

(б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$;

(в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1$;

(г) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$;

(д) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$;

(е) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(ж) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(з) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$;

(и) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin x$.

Решение

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1$
Область значений: $\mathbb{R}$ (линейная функция с ненулевым угловым коэффициентом).
Инъективность: Да, $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \implies x_1 = x_2$.
Сюръективность: Да, $\forall y \in \mathbb{R}$ уравнение $3x+1 = y$ имеет решение.
Биективность: Да.

(б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$
Область значений: $[1, +\infty)$, так как $x^2 \geq 0$.
Инъективность: Нет, $f(1) = f(-1) = 2$.
Сюръективность: Нет, область значений не совпадает с $\mathbb{R}$.
Биективность: Нет.

(в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1$
Область значений: $\mathbb{R}$ (кубический многочлен неограничен и непрерывен).
Инъективность: Да, $x_1^3 = x_2^3 \implies x_1 = x_2$.
Сюръективность: Да.
Биективность: Да.

(г) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$
Область значений: $(0, +\infty)$.
Инъективность: Да, e^x строго возрастает.
Сюръективность: Нет, $e^x > 0$ для всех x.
Биективность: Нет.

(д) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$
Область значений: $[1, +\infty)$, поскольку $3x^2 + 1 \geq 1$.
Инъективность: Нет, $f(x) = f(-x)$.
Сюръективность: Нет.
Биективность: Нет.

(е) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$
Область значений: $[-1, 1]$ (синус на этом отрезке возрастает).
Инъективность: Да, на $[-\pi/2, \pi/2]$ синус строго возрастает.
Сюръективность: Нет, область значений только $[-1, 1]$.
Биективность: Нет.

(ж) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$
Область значений: $[0, 1]$.
Инъективность: Нет, $\sin x = \sin(\pi - x)$.
Сюръективность: Нет.
Биективность: Нет.

(з) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$
Область значений: $[-1, 1]$ (совпадает с кодоменом).
Инъективность: Нет, синус периодичен.

Сюръективность: Да, все значения кодомена достигаются.
Биективность: Нет.

(и) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin x$
Область значений: $\mathbb{R}$ (функция неограничена по модулю и меняет знак).
Инъективность: Нет, $f(n\pi) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.
Сюръективность: Да.
Биективность: Нет.

Ответ

№	$E(f)$	Инъективна	Сюръективна	Биективна
(a)	$\mathbb{R}$	Да	Да	Да
(b)	$[1, +\infty)$	Нет	Нет	Нет
(c)	$\mathbb{R}$	Да	Да	Да
(d)	$(0, +\infty)$	Да	Нет	Нет
(e)	$[1, +\infty)$	Нет	Нет	Нет
(f)	$[-1, 1]$	Да	Нет	Нет
(g)	$[0, 1]$	Нет	Нет	Нет
(h)	$[-1, 1]$	Нет	Да	Нет
(i)	$\mathbb{R}$	Нет	Да	Нет

Даны $g : A \to B$ и $f : B \to C$. Рассмотрим композицию $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. Определить, какие утверждения верны:

(а) **Если g инъективна, то $g \circ f$ инъективна.**

(б) **Если f и g сюръективны, то $g \circ f$ сюръективна.**

(в) **Если f и g биекции, то $g \circ f$ биекция.**

(г) **Если $g \circ f$ инъективна, то f инъективна.**

(д) **Если $g \circ f$ инъективна, то g инъективна.**

(е) **Если $g \circ f$ сюръективна, то f сюръективна.**

Решение задачи 1.5

Примечание: В условии задачи композиция $g \circ f$ определена как $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. В стандартной математической нотации это соответствует композиции $f \circ g$. В решении мы будем использовать обозначение $g \circ f$, как в условии, но подразумевая функцию $h(x) = f(g(x))$, которая отображает $A \to C$.

(0) **а)Утверждение ложно.** Если g инъективна, не обязательно, что $g \circ f$ инъективна.

Контрпример. Пусть множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{5\}$. Определим функции:

- $g \colon A \to B$ как $g(1) = 3$, $g(2) = 4$. Функция g инъективна, так как разным элементам из A соответствуют разные элементы из B.
- $f \colon B \to C$ как $f(3) = 5$, $f(4) = 5$.

Рассмотрим композицию $(g \circ f)(x) = f(g(x))$:

- $(g \circ f)(1) = f(g(1)) = f(3) = 5$.
- $(g \circ f)(2) = f(g(2)) = f(4) = 5$.

Поскольку $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(2)$, но $1 \neq 2$, композиция $g \circ f$ не является инъективной.

(0) **б)Утверждение верно.**

Доказательство. Пусть функции $g \colon A \to B$ и $f \colon B \to C$ сюръективны. Мы должны доказать, что композиция $g \circ f \colon A \to C$ сюръективна. Это значит, что для любого элемента $c \in C$ существует элемент $a \in A$ такой, что $(g \circ f)(a) = c$.

Возьмём произвольный элемент $c \in C$. Так как функция f сюръективна, по определению существует $b \in B$ такой, что $f(b) = c$. Далее, так как функция g сюръективна, для этого элемента $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $g(a) = b$.

Теперь рассмотрим значение композиции в точке a:

$$(g \circ f)(a) = f(g(a)) = f(b) = c.$$

Таким образом, для любого $c \in C$ мы нашли $a \in A$, что и доказывает сюръективность композиции $g \circ f$. □

(0) **в)Утверждение верно.**

Доказательство. Биекция — это функция, которая одновременно инъективна и сюръективна.

1. **Инъективность.** Пусть f и g инъективны. Докажем, что $g \circ f$ инъективна. Пусть $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$. По определению композиции, $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$. Поскольку f инъективна, из $f(y_1) = f(y_2)$ следует $y_1 = y_2$. В нашем случае $g(a_1) = g(a_2)$. Поскольку g инъективна, из $g(a_1) = g(a_2)$ следует $a_1 = a_2$. Следовательно, $g \circ f$ инъективна.

2. **Сюръективность.** Как доказано в пункте (б), если f и g сюръективны, то их композиция $g \circ f$ также сюръективна.

Поскольку композиция $g \circ f$ является и инъективной, и сюръективной, она является биекцией. □

(0) **г)Утверждение ложно.** Если $g \circ f$ инъективна, не обязательно, что f инъективна.

Контрпример. Пусть $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5\}$. Определим функции:

- $g \colon A \to B$ как $g(1) = 2$.
- $f \colon B \to C$ как $f(2) = 4$, $f(3) = 4$. Функция f не инъективна, так как $f(2) = f(3)$, но $2 \neq 3$.

Композиция $g \circ f \colon A \to C$ отображает единственный элемент:

$$(g \circ f)(1) = f(g(1)) = f(2) = 4.$$

Функция, определённая на множестве из одного элемента, всегда является инъективной (тривиальный случай). Таким образом, $g \circ f$ инъективна, но f — нет.

(0) **д)Утверждение верно.**

Доказательство. Пусть композиция $g \circ f$ инъективна. Докажем, что функция g инъективна. Предположим, что $g(a_1) = g(a_2)$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$. Нам нужно показать, что $a_1 = a_2$.

Применим функцию f к обеим частям равенства $g(a_1) = g(a_2)$:

$$f(g(a_1)) = f(g(a_2)).$$

Это по определению означает:

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2).$$

Поскольку по условию композиция $g \circ f$ инъективна, из этого равенства следует, что $a_1 = a_2$. Таким образом, мы показали, что из $g(a_1) = g(a_2)$ следует $a_1 = a_2$, что и доказывает инъективность функции g. □

(0) **е)Утверждение верно.**

Доказательство. Пусть композиция $g \circ f \colon A \to C$ сюръективна. Докажем, что функция $f \colon B \to C$ сюръективна. Это значит, что для любого элемента $c \in C$ существует $b \in B$ такой, что $f(b) = c$.

Возьмём произвольный элемент $c \in C$. Так как $g \circ f$ сюръективна, существует $a \in A$ такой, что $(g \circ f)(a) = c$. Распишем композицию: $f(g(a)) = c$.

Обозначим $b = g(a)$. Поскольку $g \colon A \to B$, элемент b принадлежит множеству B. Мы получили, что для произвольного $c \in C$ существует $b \in B$ (а именно, $b = g(a)$) такой, что $f(b) = c$. Это по определению означает, что функция f сюръективна. □

Итог

Верными являются утверждения: **(б), (в), (д), (е)**.

Задача 1.8 У каждого из жителей города N число знакомых составляет не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

Доказательство

Рассмотрим граф, где вершины — жители города, рёбра — знакомства. По условию, степень каждой вершины не меньше $0.3n$, где n — число жителей.

Стратегия выбора кандидатов:

1. Выберем первого кандидата a произвольно.
2. Множество жителей, не знакомых с a, обозначим U. Так как степень a не меньше $0.3n$, то $|U| \leq 0.7n$.
3. Будем выбирать второго кандидата b среди всех жителей, кроме a.

Оценка числа проголосовавших:

Житель v придет на выборы, если знаком хотя бы с одним из a или b. То есть не придут только те, кто не знаком ни с a, ни с b.

- Не знакомы с a — это множество U, $|U| \leq 0.7n$.
- Для $v \in U$: чтобы v не пришел, нужно, чтобы b также не был знаком с v. У v степень $\geq 0.3n$, значит, незнакомых с v — не более $0.7n$ (включая a).

Фиксируем a. Для каждого $v \in U$ число жителей, не знакомых с v, не больше $0.7n$, причем a уже среди них. Значит, других незнакомых с v — не более $0.7n - 1$.

Вероятностное рассуждение:

Выберем b случайно равновероятно из $n-1$ жителей (кроме a). Для $v \in U$:

$$\mathbb{P}(v \text{ не знаком с } b) \leq \frac{0.7n-1}{n-1}.$$

При $n \geq 10$ это меньше 0.7.

Ожидаемое число жителей, не пришедших на выборы:

$$\mathbb{E}[\text{не пришли}] \leq \sum_{v \in U} \mathbb{P}(v \text{ не знаком с } b) \leq 0.7n \cdot 0.7 = 0.49n.$$

Следовательно, ожидаемое число пришедших:

$$\mathbb{E}[\text{пришли}] \geq n - 0.49n = 0.51n.$$

Заключение:

Существует хотя бы один выбор b, при котором число пришедших не меньше матожидания, то есть не меньше $0.51n > \frac{n}{2}$.

Конечный ответ:

$\boxed{\text{Можно так провести выборы мэра из двух кандидатов,}}$

$\boxed{\text{что в них примет участие не менее половины жителей.}}$

Задача 1.6 Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

Решение задачи 1.6

Доказательство. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ — множество из n учащихся. Каждое посещение группы — это подмножество $G_j \subseteq S$.

Условия: 1. После посещения никакие двое из группы не могут быть вместе в другой группе. 2. К концу года учащиеся могут ходить только поодиночке.

Это означает, что каждая пара учащихся побывала вместе ровно в одной группе.

Требуется доказать, что если k — количество посещений, и $k > 1$, то $k \geq n$.

Рассмотрим следующее:

1. Для каждого ученика s_i, быть в группе G_j означает, что он поссорился с другими участниками этой же группы. 2. Рассмотрим все пары учащихся: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ пар. 3. Каждая пара учащихся появляется ровно в одной из k групп. 4. Если предположить, что $k < n$, то в каждой группе будет меньше n человек.

Теперь использовать принцип Дирихле: - Если $k < n$, у нас не хватает «ячей» (групп) для уникальных пар. Это означает, что некоторые пары должны были бы встретиться более одного раза, что противоречит условиям задачи.

Следовательно, $k \geq n$. $\square$