

Математический анализ – II. Лекции

Содержание

Лекция 1 (10.02.2026)	1
Первообразная. Неопределенный интеграл	1
Лекция 2 (17.02.2026)	5
Лекция 3 (24.02.2026)	5
Тригонометрические подстановки	5
Интегрирование тригонометрических выражений	5
Тип I	5
Тип II	5
Тип III	5
Тип IV	7



Лекция 1 (10.02.2026)

Первообразная. Неопределенный интеграл

Определение (Первообразная). Пусть на $(a; b)$ определена и непрерывна функция $f(x)$. Функция $F(x)$, дифференцируемая на $(a; b)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx$$

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции $f(x)$ на $(a; b)$, то они отличаются на константу.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные $f(x)$. Рассмотрим $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$$

То есть, $\varphi'(x) = 0$ на $(a; b)$.

Пусть $\varphi(x) = C$, $F_1(x) - F_2(x) = C$, $F_1(x) = F_2(x) = +C$.

По теореме Лагранжа: $[x_0; x]$, x_0 – фиксированная, x – произвольная, $[x_0; x] \subset (a; b)$.

Для $\varphi(x) : \zeta \in [x_0; x]$

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(x_0) &= \varphi'(\zeta)(x - x_0) \\ \varphi'(\zeta) &= 0 \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) &= 0 \\ \varphi(x) &= \varphi(x_0)\end{aligned}$$

□

Определение. График первообразной называется *интегральной кривой*.

Определение. Множество всех первообразных на $(a; b)$ называется *неопределенным интегралом*:

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

- dx – переменная (выражение) интегрирования
- $f(x)$ – подинтегральная функция
- $f(x)dx$ – подинтегральное выражение

Определение. Процесс нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием*. Правильность проверяется дифференцированием.

Свойство (Основные свойства неопределенного интеграла).

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d \int f(x)dx = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Свойство (Инвариантность формулы интегрирования). $\varphi(x)dx = d\varphi(x)$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство.

$$\int f(u(x))\varphi'(x)dx = \left[\begin{matrix} u = \varphi(x) \\ du = u'(x)dx \end{matrix} \right] = \int f(u)du = F(u) + C$$

□

Пример.

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

Свойство (Линейность неопределенного интеграла).

$$\begin{aligned} \int a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) dx \\ = a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + \dots + a_n \int f_n(x)dx \end{aligned}$$

Теорема (Таблица интегралов).

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
10. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
14. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
15. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
18. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
19. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
20. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + a^2| + C$
21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
22. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ («высокий» логарифм)
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$ («длинный» логарифм)
24. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$
25. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + C$
26. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ — домашка, по частям

Методы интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование: преобразование подинтегральной функции (выражения) для сведения интеграла с использованием свойств к одному или нескольким табличным интегралам. Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x^4} &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

2. Замена переменной или подстановка

1. Подстановка:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \left[\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = u'(t) dt \end{matrix} \right] = \int (f(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \Phi(t) + C = [t = \varphi^{-1}(x)] = F(x) + C \end{aligned}$$

2. Замена переменной (подстановка $\varphi(x) = t$ подбирается):

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right] = \int f(t)dt$$

3. Интегрирование по частям

Теорема. Пусть дано:

- $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на $(a; b)$
- $u'(x)v(x)$ и $u(x)v'(x)$ имеют первообразные

Тогда:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Так называемая формула интегрирования по частям.

Доказательство.

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int vdu + \int udv \\ uv &= \int vdu + \int udv \\ \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned}$$

□

Хотим проинтегрировать $\int P_n(x)f(x)dx$, где $P_{n(x)}$ — многочлен n -ой степени. Типы $f(x)$:

- I тип: $e^x, a^x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sin x, \cos x, \dots$
 - $u = P_n(x)$
 - $dv = f(x)dx$
- II тип: $\ln x, \log_a x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x, \arcsin x, \arccos x, \dots$
 - $u = f(x)$
 - $dv = P_{n(x)}dx$
- III тип: $\sqrt{a^2 - x^2}, \dots$ (так называемые возвратные интегралы)

Пример:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-3}dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x-3} \\ t^2 + 3 = x \\ dx = 2tdt \end{array} \right] = \int (t^2 + 3)t \cdot 2t \cdot dt \\ &= 2 \int (t^4 + 3t^2)dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C \\ &= \frac{2}{5}(\sqrt{x-3})^5 + 2(\sqrt{x-3})^3 + C \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{2 - x^2} dx = \dots$$

Лекция 2 (17.02.2026)

сори заболел

Лекция 3 (24.02.2026)

Тригонометрические подстановки

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \begin{cases} x = a \sin t \ (x = a \cos t), \ dx = a \cos dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{cases} = \int R(\sin t, \cos t) dt$
2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \begin{cases} x = a \operatorname{tg} t \ (a = \operatorname{ctg} t), \ dx = \frac{adt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \end{cases} = \int R(\sin t, \cos t) dt$
3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} = a \sec t \ (x = \operatorname{cosec} t = \frac{a}{\sin t}) \\ dx = -\frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \end{cases} = \int R(\sin t, \cos t) dt$

Интегрирование тригонометрических выражений

Тип I

1. $\int \sin mx \cdot \cos nx \ dx = [\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))]$
2. $\int \sin mx \cdot \sin nx \ dx = [\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))]$
3. $\int \cos mx \cdot \cos nx \ dx = [\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))]$

Тип II

$$\int \operatorname{tg}^n x \ dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \ dx \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\int \operatorname{ctg}^n x \ dx = \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \operatorname{ctg}^2 x \ dx \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Примеры:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \ dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg}^7 x dx = \int \operatorname{ctg}^5 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{ctg}^5 x dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg}^5 x dx = \dots$$

Тип III

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \ dx$$

1. m или n — положительное нечетное

$$\cos^n x = \cos^{n+1} x = \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} \cdot \cos x = (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$$

$$\int \frac{(1 - \sin^2 x)^k \cos x}{\sin^m x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^k d(\sin x)}{\sin^m x}$$

Пример:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^6 x} dx$$

2. m и n — отрицательное четное

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)^2(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x - \cos 2x + \cos^3 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx + \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{16} - \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 2x) \, d(\sin 2x) \\ &= \dots \end{aligned}$$

3. m и n — четные, хотя бы одно из них отрицательное ($m + n = 2k$, то есть отрицательное четное)

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \begin{cases} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \frac{dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ x = \arctg t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] \\ &= \int t^4 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} \\ &= \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C \\ &= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C \end{aligned}$$

Тип IV

Рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x = 2 \arctg t \\ \frac{1}{2} dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right] \\ \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{t + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + 3 \cos x}{1 + 4 \sin x - 5 \cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] \\ &= \int \frac{\frac{t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}}{1 + \frac{4t}{1+t^2} - \frac{5(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{t + 3(1-t^2)}{1 + t^2 + 4t - 5(1-t^2)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \dots \end{aligned}$$

1. $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$:

$$t = \cos x$$

2. $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$:

$$t = \sin x$$

3. $R(\sin x, \cos x)$ — четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$:

$$t = \operatorname{tg} x$$

Примеры:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \left[\begin{array}{l} R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \\ t = \operatorname{tg} x \\ x = \arctg x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} \\ &= \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \left[\begin{array}{l} \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ dx = d(x + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$