

# Математический анализ — II. Лекции

## Содержание

Лекция 1 (10.02.2026) .....	1
Первообразная. Неопределенный интеграл .....	1
Лекция 2 (17.02.2026) .....	5
Лекция 3 (24.02.2026) .....	5
Тригонометрические подстановки .....	5
Интегрирование тригонометрических выражений .....	5
Тип I .....	5
Тип II .....	5
Тип III .....	5
Тип IV .....	7



# Лекция 1 (10.02.2026)

## Первообразная. Неопределенный интеграл

**Определение (Первообразная).** Пусть на  $(a; b)$  определена и непрерывна функция  $f(x)$ . Функция  $F(x)$ , дифференцируемая на  $(a; b)$  называется *первообразной* функции  $f(x)$ , если

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)dx$$

**Теорема.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — первообразные функции  $f(x)$  на  $(a; b)$ , то они отличаются на константу.

*Доказательство.* Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — первообразные  $f(x)$ . Рассмотрим  $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ .

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$$

То есть,  $\varphi'(x) = 0$  на  $(a; b)$ .

Пусть  $\varphi(x) = C$ ,  $F_1(x) - F_2(x) = C$ ,  $F_1(x) = F_2(x) + C$ .

По теореме Лагранжа:  $[x_0; x]$ ,  $x_0$  — фиксированная,  $x$  — произвольная,  $[x_0; x] \subset (a; b)$ .

Для  $\varphi(x) : \zeta \in [x_0; x]$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\zeta)(x - x_0)$$

$$\varphi'(\zeta) = 0$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)$$

□

**Определение.** График первообразной называется *интегральной кривой*.

**Определение.** Множество всех первообразных на  $(a; b)$  называется *неопределенным интегралом*:

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

- $dx$  — переменная (выражение) интегрирования
- $f(x)$  — подинтегральная функция
- $f(x)dx$  — подинтегральное выражение

**Определение.** Процесс нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием*. Правильность проверяется дифференцированием.

**Свойство (Основные свойства неопределенного интеграла).**

1.  $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2.  $d \int f(x)dx = f(x)dx$
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$
4.  $\int a f(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
5.  $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

**Свойство (Инвариантность формулы интегрирования).**  $\varphi(x)dx = d\varphi(x)$ .

Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C$ , где  $u = \varphi(x)$  — произвольная дифференцируемая функция.

*Доказательство.*

$$\int f(u(x))\varphi'(x)dx = \left[ \begin{matrix} u = \varphi(x) \\ du = u'(x)dx \end{matrix} \right] = \int f(u)du = F(u) + C$$

□

*Пример.*

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

**Свойство (Линейность неопределенного интеграла).**

$$\begin{aligned} & \int a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) \\ &= a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + \dots + a_n \int f_n(x)dx \end{aligned}$$

**Теорема (Таблица интегралов).**

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
3.  $\int e^x dx = e^x + C$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
9.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
10.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
11.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
12.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
13.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
14.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
15.  $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
17.  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
18.  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
19.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
20.  $\int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 \pm a^2| + C$
21.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
22.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$  («высокий» логарифм)
23.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$  («длинный» логарифм)
24.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$
25.  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + C$
26.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$  — домашка, по частям

Методы интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование: преобразование подинтегральной функции (выражения) для сведения интеграла с использованием свойств к одному или нескольким табличным интегралам. Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x^4} &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

2. Замена переменной или подстановка

1. Подстановка:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \left[ \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right] = \int (f(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \Phi(t) + C = [\Phi(\varphi^{-1}(x))] = F(x) + C \end{aligned}$$

2. Замена переменной (подстановка  $\varphi(x) = t$  подбирается):

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[ \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right] = \int f(t)dt$$

### 3. Интегрирование по частям

**Теорема.** Пусть дано:

- $u(x)$  и  $v(x)$  определены и дифференцируемы на  $(a; b)$
- $u'(x)v(x)$  и  $u(x)v'(x)$  имеют первообразные

Тогда:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Так называемая формула интегрирования по частям.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} d(uv) &= vdu + u dv \\ \int d(uv) &= \int vdu + \int u dv \\ uv &= \int vdu + \int u dv \\ \int u dv &= uv - \int vdu \end{aligned}$$

□

Хотим проинтегрировать  $\int P_n(x)f(x)dx$ , где  $P_{n(x)}$  — многочлен  $n$ -ой степени. Типы  $f(x)$ :

- I тип:  $e^x, a^x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sin x, \cos x, \dots$ 
  - $u = P_n(x)$
  - $dv = f(x)dx$
- II тип:  $\ln x, \log_a x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x, \arcsin x, \arccos x, \dots$ 
  - $u = f(x)$
  - $dv = P_{n(x)}dx$
- III тип:  $\sqrt{a^2 - x^2}, \dots$  (так называемые возвратные интегралы)

Пример:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-3}dx &= \left[ \begin{array}{l} t = \sqrt{x-3} \\ t^2 + 3 = x \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int (t^2 + 3)t \cdot 2t \cdot dt \\ &= 2 \int (t^4 + 3t^2)dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C \\ &= \frac{2}{5}(\sqrt{x-3})^5 + 2(\sqrt{x-3})^3 + C \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{2-x^2} dx = \dots$$

## Лекция 2 (17.02.2026)

сори заболел

## Лекция 3 (24.02.2026)

### Тригонометрические подстановки

1. 
$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left[ \begin{array}{l} x = a \sin t \ (x = a \cos t), \ dx = a \cos t \, dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right] = \int R(\sin t, \cos t) dt$$
2. 
$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left[ \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t \ (a = \operatorname{ctg} t), \ dx = \frac{a dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \end{array} \right] = \int R(\sin t, \cos t) dt$$
3. 
$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left[ \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} = a \operatorname{sec} t \ (x = \operatorname{cosec} t = \frac{a}{\sin t}) \\ dx = -\frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right] = \int R(\sin t, \cos t) dt$$

### Интегрирование тригонометрических выражений

#### Тип I

1. 
$$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx = \left[ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \right]$$
2. 
$$\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \left[ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \right]$$
3. 
$$\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \left[ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \right]$$

#### Тип II

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\int \operatorname{ctg}^n x \, dx = \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \operatorname{ctg}^2 x \, dx \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Примеры:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg}^7 x dx = \int \operatorname{ctg}^5 x \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{ctg}^5 x dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg}^5 x dx = \dots$$

#### Тип III

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

1.  $m$  или  $n$  — положительное нечетное

$$\cos^n x = \cos^{n+1} x = \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} \cdot \cos x = (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$$

$$\int \frac{(1 - \sin^2 x)^k \cos x}{\sin^m x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^k d(\sin x)}{\sin^m x}$$

Пример:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^6 x} dx$$

2.  $m$  и  $n$  — отрицательное четное

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)^2(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x - \cos 2x + \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{16} - \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) \\ &= \dots \end{aligned}$$

3.  $m$  и  $n$  — четные, хотя бы одно из них отрицательное ( $m + n = 2k$ , то есть отрицательное четное)

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Пример:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \frac{dx}{\cos^4 x} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] \\
&= \int t^4 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} \\
&= \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C \\
&= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

#### Тип IV

Рациональная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ :

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ \frac{1}{2} dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x + 3 \cos x}{1 + 4 \sin x - 5 \cos x} dx &= \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] \\
&= \int \frac{\frac{t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}}{1 + \frac{4t}{1+t^2} - \frac{5(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{t + 3(1-t^2)}{1+t^2+4t-5(1-t^2)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \dots
\end{aligned}$$

1.  $R(\sin x, \cos x)$  — нечетная относительно  $\sin x$ , то есть  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ :

$$t = \cos x$$

2.  $R(\sin x, \cos x)$  — нечетная относительно  $\cos x$ , то есть  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ :

$$t = \sin x$$

3.  $R(\sin x, \cos x)$  — четная относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ , то есть  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ :

$$t = \operatorname{tg} x$$

Примеры:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \left[ \begin{array}{l} R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \\ t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[ \begin{array}{l} \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ dx = d(x + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$