# Специальные разделы высшей математики. Лекции

## Содержание


Лекция 1 (04.02.2026) ... 1
- Евклидовы пространства ... 1
- Евклидово нормированное пространство ... 3
- Евклидовы пространства ... 4
- Угол между векторами. Ортогональность ... 6
- Ортогональные системы векторов ... 6

Лекция 2 (11.02.2026) ... 7
- Ортогональные системы векторов. Матрица Грама ... 7
- QR-разложение $A_n$ ... 8
- Ортогональное дополнение ... 9

Лекция 3 (18.02.2026) ... 10
- Ортогональная проекция, ортогональная составляющая ... 10

Лекция 4 (25.02.2026) ... 11
- Линейный оператор ... 11
- Матрица линейного оператора ... 12


itmo.arslee.me

# Лекция 1 (04.02.2026)

## Евклидовы пространства

**Определение (Метрическое пространство).** *Метрическое пространство* — множество $M$, на котором задана функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1. Положительная определенность:
$$\rho(x, y) \geq 0$$
$$\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$
2. Симметричность:
$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$
3. Неравенство треугольника:
$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

*Пример.*

1. $x \in \mathbb{R} : \quad \rho(x, y) = |x - y|$
2. $x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
3. Пусть дано:
   - $C_{[a;b]}$ – множество определенных и непрерывных на $[a; b]$ функций,
   - $f(t), g(t) \in C_{[a;b]}, \ t \in [a; b]$.

   Тогда $\rho(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.

**Определение (Нормированное пространство).** *Нормированное пространство* — линейное пространство $V$, в котором задано отображение $\|x\| : V \to \mathbb{R}$ — *норма*, удовлетворяющее свойствам:

1. Положительная определенность:
$$\forall x \in V. \quad \|x\| \geq 0$$
$$\forall x \in V. \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$
2. Линейность:
$$\forall x \in V. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|\lambda x\|$$
3. Неравенство треугольника:
$$\forall x, y \in V. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

*Пример.*

1. $x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$

2. $x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_{\max} = \max_{i=\overline{1,\,n}}(|x_i|)$

**Определение (Скалярное произведение).** *Скалярное произведение* — функция, определенная на вещественном линейном пространстве $V$ вида $(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1. Симметричность:

$$(x, y) = (y, x)$$

2. Билинейность:

$$(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda(x, y), \quad (x + z, y) = (x, y) + (z, y), \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

3. Положительная определенность:

$$(x, x) \geq 0,\ (x, x) = 0 \iff x = 0$$

**Определение (Евклидово пространство).** Линейное пространство $V$, на котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством* и обозначается $\mathcal{E}$ *(как маленькая епсилон, но как бы большая).*

$$\dim \mathcal{E} = \dim V$$

*Пример.*

1. $V = \mathbb{R}^n : \quad (x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos \angle(x, y)$
2. $V = \mathbb{R}^n : \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} = x_i y_i$
3. $C_{[a;b]} : \quad (f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$

**Определение (Эрмитово пространство).** *Эрмитово пространство* — линейное пространство $V$ на множестве $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(x, y) : V \times V \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее свойствам:

1. Полуторалинейность:

$$\forall x, y \in V. \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (zx, y) = z(x, y) = (x, \overline{z}y)$$

2. Эрмитова симметричность:

$$\forall x, y \in V. \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

3. Положительная определенность:

$$\forall x \in V \setminus \{0\}. \quad (x, x) > 0$$

**Теорема (Неравенство Коши-Буянковского).**

$$\forall x, y \in \mathcal{E}. \quad |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $x$ и $y$ линейно зависимы.

*Доказательство.* Рассмотрим два случая.

1. $\boldsymbol{y = \vec{0}}$.

$$\left(x, \vec{0}\right) = \left(x, 0 \cdot \vec{0}\right) = 0 \cdot \left(x, \vec{0}\right) = 0$$

2. $\boldsymbol{y \neq \vec{0}}$.

   Пусть $f(t) = (x + ty, x + ty),\ t \in \mathbb{R}$.

   Преобразуем $f$:

$$\begin{aligned} f(t) &= (x, x) + t(x, y) + t(y, x) + (y, y) \\ &= t^2(y, y) + 2t(x, y) + (x, x) \\ &\geq 0 \quad (\text{по определению}) \end{aligned}$$

   Рассмотрим ее дискриминант:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \\ &\implies (x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \\ &\implies |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \end{aligned}$$

   Теперь покажем линейную зависимость.

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \leq 0 \\ f(t) \geq 0 \end{cases} \implies \quad t_0 - \text{единственный корень для } f(t) = 0$$

   Рассмотрим уравнение $f(t) = 0$:

$$f(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + t_0 y, x + t_0 y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + t_0 y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -t_0 y$$

   Из последнего перехода следует, что $x$ и $y$ линейно зависимы.

□

## Евклидово нормированное пространство

**Определение (Норма евклидового пространства).** Пусть $\mathcal{E}$ — евклидово пространство. *Нормой* (длиной) вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

**Свойство (Свойства нормы).**

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Доказательство.*

1. По определению.
2. $$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$$
3. $$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + 2(x + y) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \qquad (\text{по Коши-Буянковского: } (x, y) \leq |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|) \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

   Следовательно, $\|(x, y)\| \leq \|x\| + \|y\|$.

□

## Евклидовы пространства

**Определение.**

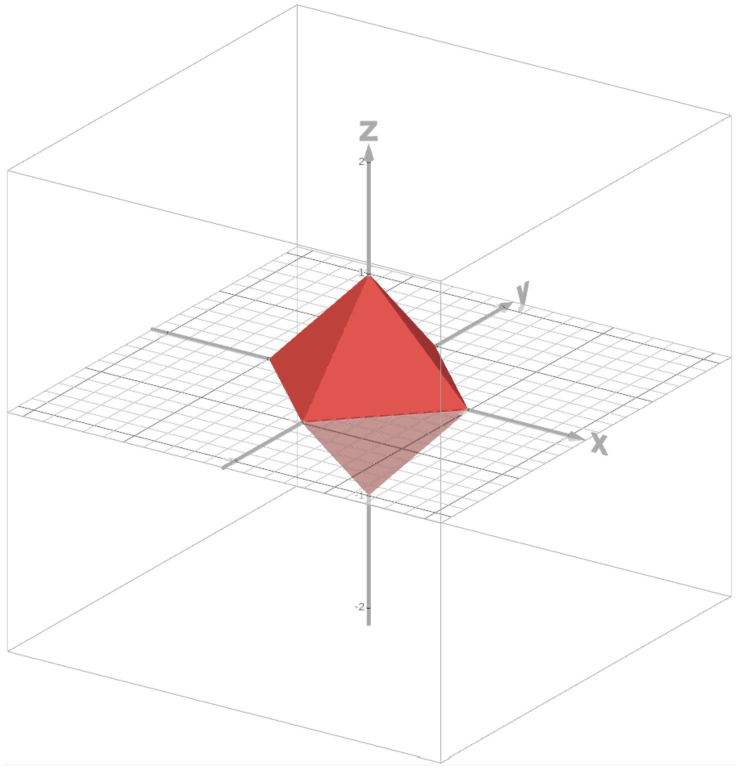
1. Стандартная/евклидова/шаровая/сферическая норма:

$$\|x\|_{\mathcal{E}} = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

2. Окаэдрическая/манхэттенская норма:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Если $\|x\|_1 \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^3$, то ГМТ — октаэдр:




3. Кубическая/чебышевская норма:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,\ n}}(|x_i|)$$

4. $C_{[a;b]}$, $\quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$

5. Норма матриц — неотрицательное число, характеризующее «размер» или «величину» матрицы. Норма матрицы удовлетворяет всем свойствам нормы. Различные виды представлены в определениях ниже.

**Определение (Операторные нормы матриц).**

- Столбцовая норма:

$$\|A\|_1 = \max_{i=\overline{1,\ n}} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

- Строчная норма:

$$\|A\|_\infty = \max_{j=\overline{1,\ m}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Спектральная норма (для квадратной матрицы):

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $A^T \cdot A$

**Определение (Неоператорные нормы матриц).** Норма Фробениуса (для квадратной матрицы):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T \cdot A)}$$

## Угол между векторами. Ортогональность

По неравенству Коши-Буянковского:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad x, y \in \mathcal{E}$$

Отсюда:

$$\frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \qquad |\cos\varphi| \leq 1 \qquad 0 \leq \cos\varphi \leq 1,\ \ \varphi \in [0; \pi]$$

**Определение (Ортогональные векторы).** Векторы $x$, $y$ — *ортогональны*, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то есть

$$(x, y) = 0$$

## Ортогональные системы векторов

**Определение (Ортогональная система векторов).** Система $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{E}$ называется *ортогональной*, если все векторы попарно ортогональны:

$$(a_i, a_j) = 0, \quad i \neq j$$

**Определение (Ортонормированная система векторов).** Система векторов $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{E}$ называется *ортонормированной*, если она ортогональная и норма каждого вектора равна 1:

$$\forall i \in \overline{1,\ n}. \quad \|a_i\| = 1$$

**Теорема (О линейной независимости ортогональной системы).** Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

*Доказательство.* Пусть дана ортогональная система $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$. Рассмотрим ее линейную комбинацию

$$\vec{y} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + ... + \lambda_k\vec{a_k} = \vec{0}.$$

Возьмем скалярное произведение двух частей равенства на вектор $\vec{a_1}$:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a_1}, \vec{y}) &= (\vec{a_1},\ \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_k\vec{a_k}) \\
&= (\vec{a_1}, \lambda_1\vec{a_1}) + (\vec{a_1}, \lambda_2\vec{a_2}) + \ldots + (\vec{a_1}, \lambda_k\vec{a_k}) \\
&= \lambda_1(\vec{a_1}, \vec{a_1}) + \lambda_2(\vec{a_1}, \vec{a_2}) + \ldots + \lambda_k(\vec{a_1}, \vec{a_k}).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим первое слагаемое. Поскольку система ортогональная, то

$$\lambda_1(\vec{a_1}, \vec{a_1}) = 0.$$

Произведение $(\vec{a_1}, \vec{a_1})$ не может быть равно нулю, так как по свойству скалярного произведения следовало бы $\vec{a_1} = \vec{0}$, что противоречит формулировке теоремы. Значит, $\lambda_1 = 0$.

Аналогично переберем все векторы и получим, что все $\lambda_i$ равны нулю. □

# Лекция 2 (11.02.2026)

## Ортогональные системы векторов. Матрица Грама

**Теорема (Пифагора, обобщенная).** Для любой ортогональной системы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|a_i\|^2$$

*Доказательство.*

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{k} (a_i, a_i) \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ a_1 + a_2, \ldots, a_k) \\
&= (a_1, a_1) + (a_1, a_2) + \ldots + (a_1, a_k) + \text{ну крч все комбинации} \\
&\qquad /\text{ну крч все } (a_i, a_j) \text{ равны нулю тк ортогональн}/ \\
&= \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \ldots + \|a_k\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|a_i\|^2
\end{aligned}
$$

□

**Теорема (Обобщенная формула скалярного произведения).** Пусть дано:
- Линейно независимая система $S = (l_1, l_2, \ldots l_n) \in \mathcal{E}^n$
- $x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_n l_n$
- $y = y_1 l_1 + y_2 l_2 + \ldots + y_n l_n$

Тогда:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (l_i, l_j)$$

*Доказательство.* todo □

**Определение (Матрица Грама).** *Матрицей Грама* системы веткоров $S = (l_1, l_2, ..., l_n)$ называется матрица $G_S$ размера $k \times k$, элементы которой являются скалярным произведением векторов системы:

$$G_S = \begin{pmatrix} (l_1, l_1) & (l_1, l_2) & \dots & (l_1, l_n) \\ (l_2, l_1) & (l_2, l_2) & \dots & (l_2, l_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (l_n, l_1) & (l_n, l_2) & \dots & (l_n, l_n) \end{pmatrix}$$

**Свойство (Свойства матрицы Грама).**

1. Симметричность: $G = G^T$
2. Положительная определенность всех главных угловых миноров:

$$|(l_1, l_1)| \geq 0, \quad \begin{vmatrix} (l_1, l_1) & (l_1, l_2) \\ (l_2, l_1) & (l_2, l_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

3. Если $S$ линейно независимая, то $\det G_S \neq 0$
4. Если $S$ ортогональная, то $G_S$ — диагональная
5. Если $S$ ортонормированная, то $G_S = E$
   - $(x, y) = \text{todo}$

**Теорема.** todo крч пусть даны две лком по базису ну тогда

$$(x, y) = X^T G_S Y$$

где X, Y todo

**Теорема.** Любую линейно независимую систему векторов евклидового пространства можно ортогонализовать.

*Доказательство.* Конструктивный процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

впадлу □

## QR-разложение $A_n$

1. Считая каждый столбец $A_n$ вектором $a_i$, необходимо ортогонализировать систему векторов с последующим нормированием, получить матрицу $Q_n$, где каждый вектор-столбец ортонормирован

2. $A = QR$, где $R$ — матрица проекций, получавшихся в процессе ортогонализации (верхнетреугольная):

$$\begin{cases} R = Q^{-1}A \\ Q^T = Q^{-1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad R = Q^T A$$

## Ортогональное дополнение

Пусть даны $x, (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{E}^n$ такие, что $x \perp (a_1, a_2, ..., a_k)$. Отсюда:

$$\begin{aligned} & x \perp (a_1, a_2, ..., a_k) \\ & \Longrightarrow x \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \\ & \Longrightarrow x \perp L(a_1, a_2, ..., a_k) \\ & \Longrightarrow x \perp \text{подпространству } \mathcal{E}^n \end{aligned}$$

Проверим:

$$\left(x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, a_i) = 0 \qquad \square$$

**Определение (Ортогональное дополнение).** Множество векторов

$$L^{\perp} = \left\{x \in \mathcal{E}^n \mid \forall a \in L : (x, a) = 0\right\}$$

называется *ортогональным дополнением* к подпространству $L \subset \mathcal{E}$

**Свойство (Свойства $L^{\perp}$).**
1. $L^{\perp} \subset \mathcal{E}^n$
2. $\mathcal{E} = L \oplus L^{\perp}$
3. $\dim \mathcal{E} = \dim L + \dim L^{\perp}$
4. $(L^{\perp})^{\perp}$

*Доказательство.* (Пункты 2-3, остальные самостоятельно).

Рассмотрим $L \subset \mathcal{E}$. Пусть $S = \{l_1, l_2, ..., l_k\}$ — ортонормированный базис $L$ (он существует, так как можно ортонормировать).

Дополним $S$ до ортонормированного базиса $\mathcal{E}^n$:

$$S_{\mathcal{E}} = \left\{ \underbrace{l_1,\ l_2,\ ...,\ l_k}_{L},\ \underbrace{l_{k+1},\ l_{k+2},\ ...,\ l_n}_{L_1} \right\}$$

Пусть $x \in \mathcal{E}^n$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i l_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i l_i}_{\substack{\in L \\ \dim L = k}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} x_i l_i}_{\substack{\in L_1 \subset \mathcal{E}^n \\ \dim L_1 = n-k}}$$

Подпространство $L_1$ совпадает с ортогональным дополнением $L^\perp$, т.к. векторы $l_{k+1}, ..., l_n$ ортогональны всем векторам из $L$, следовательно, эти векторы ортогональны подпространству $L$, то есть принадлежат $L^\perp$. Так как $L^\perp$ — подпространство по свойству (1), то $L_1 \subset L^\perp$.

Обратно. Покажем, что $L^\perp \subset L_1$. Выберем $y \in \mathcal{E}^m$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i$. Пусть $y \in L^\perp$, то есть $y \perp \{l_1, ..., l_k\}$, то есть $y \perp L$.

$$(y, l_1) = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} y_i l_i + \sum_{i=k+1}^{n} y_i l_i,\ l_1\right) = 0 \qquad y_1(l_1, l_1) + 0 = 0 \qquad y_1 = 0$$

$$(y, l_2) = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} y_i l_i + \sum_{i=k+1}^{n} y_i l_i,\ l_2\right) = 0 \qquad y_2(l_2, l_2) + 0 = 0 \qquad y_2 = 0$$

$$...$$

$$(y, l_n) = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} y_i l_i + \sum_{i=k+1}^{n} y_i l_i,\ l_n\right) = 0 \qquad y_n(l_n, l_n) + 0 = 0 \qquad y_n = 0$$

Итак,

$$\begin{cases} y = \sum_{i=k+1}^{n} y_i l_i = y_{n+1} l_{k+1} + ... + y_n l_n \\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n = 0 \end{cases} \implies y \in L^\perp$$

Наконец,

$$\begin{cases} L_1 \subset L^\perp \\ L^\perp \subset L_1 \end{cases} \implies L^\perp = L_1$$

Таким образом, $\mathcal{E}^n = L \oplus L^\perp$.

Если $L = k$, а $L^\perp = n = k$, то $\dim \mathcal{E}^n = k + n - k = n$. □

# Лекция 3 (18.02.2026)

## Ортогональная проекция, ортогональная составляющая

Рассмотрим $L$ и $L^\perp$, $L \oplus L^\perp = \mathcal{E}^n$

**Определение (Коэффициенты Фурье).** Пусть дано:
- Ортонормированная система $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \mathcal{E}^n$
- $b \in \mathcal{E}^n$

Тогда $(b, a_1)$, $(b, a_2)$, ..., $(b, a_n)$ называются *коэффициентами Фурье* вектора $b$ относительно $S$.

**Определение (Ортогональная проекция на подпространство).** Ортогональной проекцией вектора $b$ на подпространство $L$ называют вектор-проекцию, ортогональную дополнению $L^{\perp}$.

- $b_1 = \mathrm{pr}_L b$ — ортогональная проекция $b$ на $L$
- $b_2 = \mathrm{ort}_L b$ — ортогональная составляющая к $L$

$$b = b_1 + b_2, \quad b_1 \in L, \quad b_2 \in L^{\perp}$$

**Теорема.** Пусть дано:
- $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ — ортонормированный базис подпространства $L$
- $a$ — произвольный вектор $\mathcal{E}^n$

Тогда координаты $\mathrm{pr}_L a$ в этом базисе являются коэффициентами Фурье вектора $a$ относительно $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$, то есть

$$\mathrm{pr}_L a = \sum$$

# Лекция 4 (25.02.2026)

## Линейный оператор

**Определение (Оператор).** *Оператором* называется отображение, действующее из одного линейного пространства в другое или внутри одного пространства.

Обозначения:
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ldots$ — оператор
- $A, B, C, \ldots$ — матрица оператора
- $\mathcal{A}(x) \equiv \mathcal{A}x$

**Определение (Линейный оператор).** Пусть $V$ и $W$ — линейное пространство над полем $F$. Отображение $\mathcal{A} : V \to W$ называется *линейным оператором*, если

$$\forall x, y \in V. \quad \forall \alpha \in F. \quad \begin{cases} \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) & \text{(аддитивность)} \\ \mathcal{A}(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x) & \text{(однородность)} \end{cases}$$

Если $V = W$, то есть $\mathcal{A} : V \to V$, то $\mathcal{A}$ называется *линейным преобразованием* в пространстве $V$.

Два оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают, если

$$\forall x \in V. \quad \mathcal{A}x = \mathcal{B}x$$

*Пример.*
1. Нулевой оператор:

$$\mathcal{O} : V \to V \qquad \mathcal{O}(x) = \vec{0}$$

2. Тождественный оператор:

$$\mathcal{I} : V \to V \qquad \mathcal{I}(x) = x$$

3. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Оператор проектирования (проектор):

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} : V \to L_1 \qquad \mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} : V \to L_2$$

4. Оператор дифференцирования:

$$\mathcal{D} : P[x]_n \to P[x]_n \qquad \mathcal{D}(1) = 0 \quad \mathcal{D}(x) = 1 \quad \mathcal{D}(x^2) = 2x \quad \ldots$$

5. Оператор интегрирования:

$$\mathcal{P} : C[a;b] \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{P}(f) = \int_b^a f(x)dx$$

6. Оператор вида $\mathcal{A}(B) = A \cdot B$, где $A, B \in M_n$
7. Оператор поворота

## Матрица линейного оператора

Пусть дано:

- Линейное пространство $V$, $\dim V = n$ $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис
- Линейное пространство $W$, $\dim W = m$ $\{u_i\}_{i=1}^m$ – базис
- Линейный оператор $\mathcal{A} : V \to W$

Воздействуем $\mathcal{A}$ на базис $V$:

$$\begin{gathered}\mathcal{A}e_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \ldots + \alpha_{1m}u_m \\ \mathcal{A}e_2 = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \ldots + \alpha_{2m}u_m \\ \ldots \\ \mathcal{A}e_n = \alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}u_2 + \ldots + \alpha_{nm}u_m\end{gathered}$$

Выделим коэффициенты $\alpha_{ij}$ в матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**Определение (Матрица линейного оператора).** *Матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}$ в базисах $e$ и $u$ называется матрица $A_e^u = (\alpha_{ij}) \in F_{m \times n}$, столбцы которой являются координатами образов базисных векторов $\mathcal{A}e_j$ в базисе $u$:

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i \qquad j = \overline{1,\, n}$$

*Пример.* Оператор проектирования:

$$\mathcal{P}_{Oxy}^{\parallel Oz} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad A_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Свойство (Свойства матрицы линейного оператора).** Пусть дано:

1. $(\mathcal{A}x)_e = A_e x$
2. Матрица единичного (нулевого) оператора является единичной (нулевой)
3. Матрица суммы операторов равна сумме операторов: $(A + B)_e = A_e + B_e$
4. $(\alpha A)_e = \alpha \cdot A_e$
5. $(A \cdot B)_e = A_e \cdot B_e$
6. todo
7. todo

**Теорема.** Задание линейного оператора равносильно заданию его матрицы в фиксированной паре базисов.