

Группа М3210 К работе допущен _____

Студент Арсланова Лена Рустямовна Работа выполнена _____

Преподаватель Хвастунов Николай Николаевич Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по моделированию № 1

1. Условие:

«Мертвая петля»

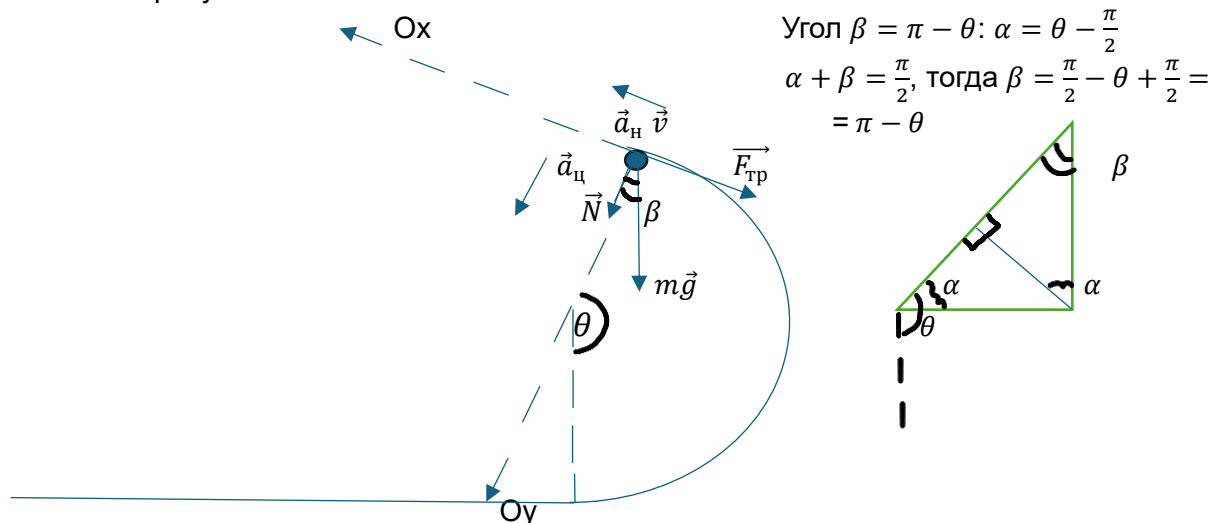
Тело массой m , разгоняется в горизонтальной плоскости и попадает на вертикально расположенный фрагмент кольца (дугу) радиуса R и угловым размером a ($\pi/2 \leq a \leq 3\pi/2$). Определить скорость тела, необходимую для прохождения всей длины дуги. Изобразить траекторию тела после отрыва от дуги. Дуга имеет коэффициент трения μ .

Где $m = 2$ кг, $R = 4$ м, $a = \pi/2 + \pi/3$ рад, $\mu = 0,02$ (2 вариант)

2. Вывод формул и расчеты:

Тело движется по вертикально расположенной дуге с начальной скоростью v_0 , и нам нужно определить минимальное значение v_0 , чтобы оно смогло пройти всю дугу.

Схематический рисунок:



Запишем уравнение движения направлениях осей Ox и Oy (на рисунке указано). Пусть θ – угол, который изменяется от 0 до a .

- Уравнение движения в направлении Oy : на тело действуют нормальная сила N , направленная перпендикулярно к поверхности дуги и направленная к центру окружности, и сила тяжести. Сила тяжести mg всегда направлена вертикально вниз, вне зависимости от положения тела на дуге. Проекция mg на ось Oy равна $mg \cos \beta =$

$-mg\cos\theta$ Так как тело движется по окружности радиуса R , оно испытывает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$, поэтому по второму закону Ньютона:

$$N - mg\cos\theta = m \frac{v^2}{R},$$

$$\text{тогда } N = mg\cos\theta + m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

- Уравнение движения в направлении Ox : на тело действуют $F_{тр} = \mu N$, направленная противоположно направлению движения и проекция силы тяжести $mg\sin\theta = mgsin\theta$, которая направлена вдоль дуги. По второму закону Ньютона

$$ma = mgsin\theta - \mu N \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ и (2) в (1): } m \frac{dv}{dt} = mgsin\theta - \mu(mg\cos\theta + m \frac{v^2}{R})$$

$$\text{Разделим обе стороны на } m: \frac{dv}{dt} = gsin\theta - \mu(gcos\theta + \frac{v^2}{R}) \quad (3)$$

- Преобразуем уравнение (3) через производную θ : $s(\theta) = \theta R$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{dv^2}{2ds} = \frac{dv^2}{2Rd\theta}, \quad (4)$$

Тогда (4) в (3):

$$\text{Отсюда } \frac{dv^2}{2Rd\theta} = gsin\theta - \mu \frac{v^2}{R} - \mu gcos\theta$$

Пусть $v^2 = w$, умножим каждую часть уравнения на $2Rd\theta$ и получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение, которое решим с помощью программы на Python:

$$dw = (2Rgsin\theta - 2\mu w - 2R\mu gcos\theta)d\theta$$

Из (1) можно вычислить скорость при отрыве, учитывая, что $N=0$

$$N = mg\cos\theta + m \frac{v^2}{R}$$

$$mg\cos\theta = -m \frac{v^2}{R}$$

$$g\cos\theta = -\frac{v^2}{R}$$

$$-Rg\cos\theta = v^2$$

$$v = \sqrt{-Rg\cos\theta}$$

$$v = \sqrt{-Rg\cos\theta}$$

$$v = \sqrt{-4 \cdot 9,8 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$v = 5.83 \text{ м/с}$$

```
import sympy as sp
import math

# Определяем переменные и константы
theta, A, B, C = sp.symbols('theta A B C')
R, g, mu = 4, 9.8, 0.02

# Частное решение для неоднородного уравнения: w_p = A * sin(theta) + B * cos(theta)
w_p = A * sp.sin(theta) + B * sp.cos(theta)
w_p_prime = sp.diff(w_p, theta)

# Составляем и упрощаем уравнение для частного решения
eq = w_p_prime + (2 * R * g * sp.sin(theta) - 2 * mu * w_p - 2 * R * mu * g * sp.cos(theta))
```

```

sp.cos(theta))

# Получаем систему уравнений для A и B
system = [eq.coeff(sp.sin(theta)), eq.coeff(sp.cos(theta))]
solution = sp.solve(system, (A, B))

# Подставляем найденные значения A и B в частное решение
w_p = solution[A] * sp.sin(theta) + solution[B] * sp.cos(theta)

# Общее решение однородного уравнения
w_h = C * sp.exp(-2 * mu * theta)

# Полное решение как сумма частного и общего решения
w_total = w_h + w_p

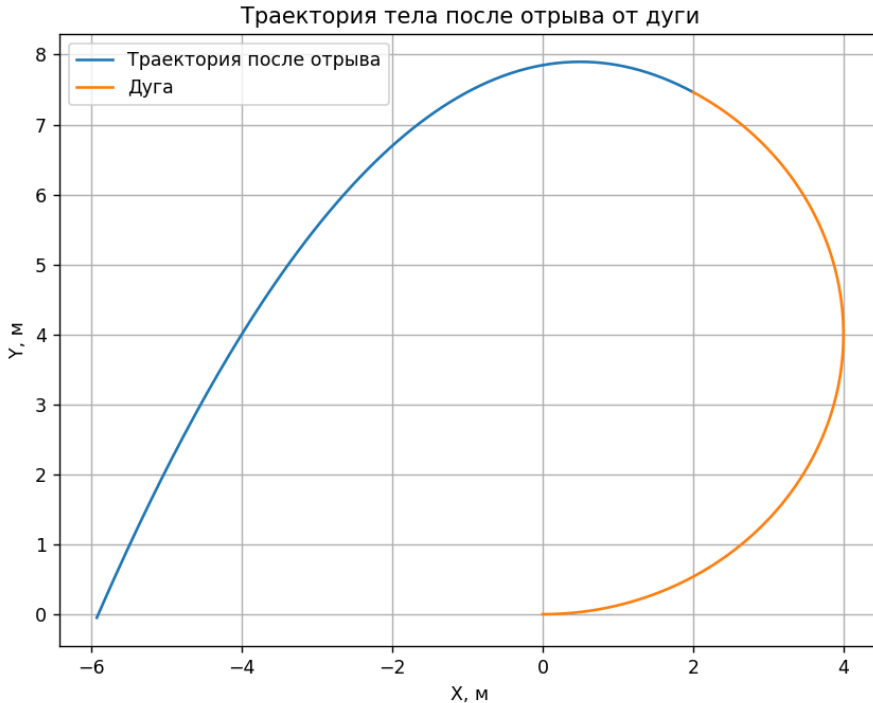
# Начальное условие: при theta = 5*pi/6, w = 5.83
v_final = 5.83
initial_condition_eq = sp.Eq(w_total.subs(theta, 5 * sp.pi / 6), v_final)
C_val = sp.solve(initial_condition_eq, C)[0]

# Находим значение w_total при theta = 0
w_final = w_total.subs({theta: 0, C: C_val})

# Результаты
print("Начальная скорость равна", math.sqrt(w_final.evalf()), "м/с")

```

Программа выдает ответ: начальная скорость равна 12.541520680871926м/с
Траектория движения тела после отрыва от дуги:



```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Константы
m = 2 # Масса тела, кг
R = 4 # Радиус кольца, м
alpha = np.pi / 2 + np.pi / 3 # Угловой размер дуги, рад
mu = 0.02 # Коэффициент трения
g = 9.81 # Ускорение свободного падения, м/с^2

```

```

v_fin = 5.83 # Минимальная скорость для прохождения дуги

# Моделирование траектории после отрыва
def simulate_trajectory(v0, theta, R, g):
    dt = 0.01 # Шаг по времени
    x = R * np.sin(theta)
    y = R * (1 - np.cos(theta)) # Начальные координаты
    vx = v0 * np.cos(theta)
    vy = v0 * np.sin(theta) # Начальные скорости
    trajectory_x = [x]
    trajectory_y = [y]

    while y >= 0: # Пока тело находится выше земли
        x += vx * dt
        y += vy * dt - 0.5 * g * dt**2 # Учет ускорения свободного падения
        vy -= g * dt # Изменение вертикальной скорости
        trajectory_x.append(x)
        trajectory_y.append(y)

    return trajectory_x, trajectory_y

# Угол отрыва (в данном случае, конечный угол дуги)
theta = alpha

# Траектория после отрыва
trajectory_x, trajectory_y = simulate_trajectory(v_fin, theta, R, g)

# Параметрическое представление дуги
theta_values = np.linspace(0, alpha, 100)
arc_x = R * np.sin(theta_values)
arc_y = R * (1 - np.cos(theta_values))

# График траектории
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(trajectory_x, trajectory_y, label='Траектория после отрыва')
plt.plot(arc_x, arc_y, label='Дуга')
plt.xlabel('X, м')
plt.ylabel('Y, м')
plt.title('Траектория тела после отрыва от дуги')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```