

Группа М3210 К работе допущен _____

Студент Арсланова Лена Рустямовна Работа выполнена _____

Преподаватель Хвастунов Николай Николаевич Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по моделированию № 1

1. Условие:

«Мертвая петля»

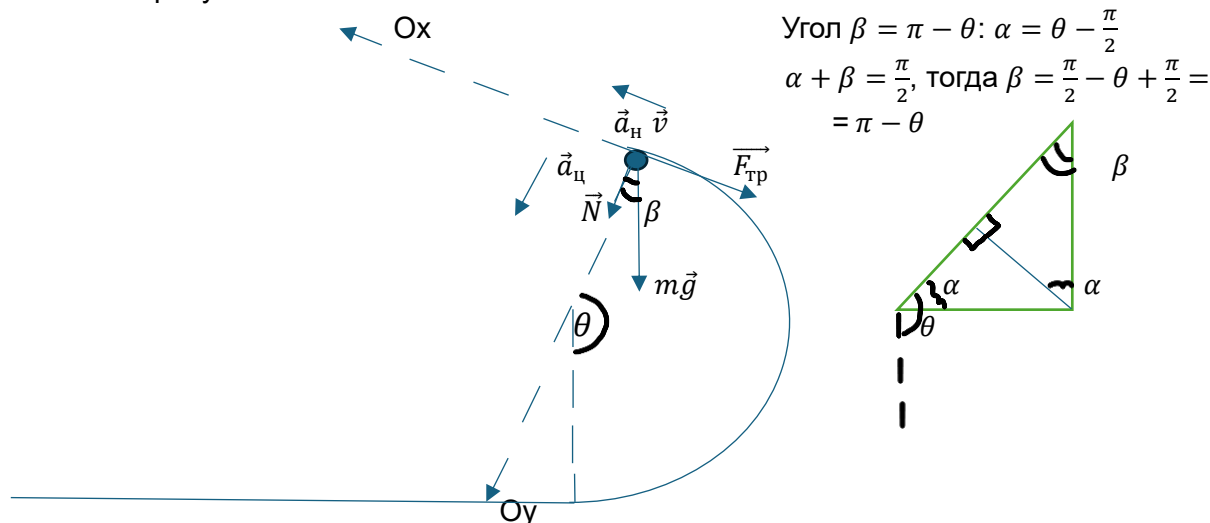
Тело массой m , разгоняется в горизонтальной плоскости и попадает на вертикально расположенный фрагмент кольца (дугу) радиуса R и угловым размером a ($\pi/2 \leq a \leq 3\pi/2$). Определить скорость тела, необходимую для прохождения всей длины дуги. Изобразить траекторию тела после отрыва от дуги. Дуга имеет коэффициент трения μ .

Где $m = 2$ кг, $R = 4$ м, $a = \pi/2 + \pi/3$ рад, $\mu = 0,02$ (2 вариант)

2. Вывод формул и расчеты:

Тело движется по вертикально расположенной дуге с начальной скоростью v_0 , и нам нужно определить минимальное значение v_0 , чтобы оно смогло пройти всю дугу.

Схематический рисунок:



Запишем уравнение движения направлениях осей Ox и Oy (на рисунке указано). Пусть θ – угол, который изменяется от 0 до a .

- Уравнение движения в направлении Oy : на тело действуют нормальная сила N , направленная перпендикулярно к поверхности дуги и направленна к центру окружности, и сила тяжести. Сила тяжести mg всегда направлена вертикально вниз, вне зависимости от положения тела на дуге. Проекция mg на ось Oy равна $mg \cos \beta =$

$-mg\cos\theta$ Так как тело движется по окружности радиуса R , оно испытывает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$, поэтому по второму закону Ньютона:

$$N - mg\cos\theta = m \frac{v^2}{R},$$

$$\text{тогда } N = mg\cos\theta + m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

- Уравнение движения в направлении Ox : на тело действуют $F_{тр} = \mu N$, направленная противоположно направлению движения и проекция силы тяжести $mg\sin\theta = mg\sin\theta$, которая направлена вдоль дуги. По второму закону Ньютона

$$ma = mg\sin\theta - \mu N \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ и (2) в (1): } m \frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu(mg\cos\theta + m \frac{v^2}{R})$$

$$\text{Разделим обе стороны на } m: \frac{dv}{dt} = g\sin\theta - \mu(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}) \quad (3)$$

- Преобразуем уравнение (3) через производную θ : $s(\theta) = \theta R$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{dv^2}{2ds} = \frac{dv^2}{2Rd\theta}, \quad (4)$$

Тогда (4) в (3):

$$\text{Отсюда } \frac{dv^2}{2Rd\theta} = g\sin\theta - \mu \frac{v^2}{R} - \mu g\cos\theta$$

Пусть $v^2 = w$, умножим каждую часть уравнения на $2Rd\theta$ и получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение, которое решим с помощью программы на Python:

$$dw = (2Rg\sin\theta - 2\mu w - 2R\mu g\cos\theta)d\theta$$

```
import sympy as sp
import math

theta, A, B, C = sp.symbols('theta A B C')
R, g, mu = 4, 9.8, 0.02

w_p = A * sp.sin(theta) + B * sp.cos(theta)
w_p_prime = sp.diff(w_p, theta)

eq = sp.simplify(w_p_prime + (2 * R * g * sp.sin(theta) - 2 * mu * w_p - 2 * R * mu * g * sp.cos(theta)))

system = [eq.coeff(sp.sin(theta)), eq.coeff(sp.cos(theta))]
solution = sp.solve(system, (A, B))

w_p = solution[A] * sp.sin(theta) + solution[B] * sp.cos(theta)

w_h = C * sp.exp(-2 * mu * theta)

w_total = w_h + w_p

initial_condition_eq = sp.Eq(w_total.subs(theta, 5 * sp.pi / 6), 0)
C_val = sp.solve(initial_condition_eq, C)[0]

w_final = w_total.subs({theta: 0, C: C_val})

print("Начальная скорость равна", math.sqrt(w_final), "м/с")
```

Программа выдает ответ: начальная скорость равна 12.280721175314406 м/с

Траектория движения тела после отрыва от дуги:

