Команда №3

Задание №1

Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Заметим, что при разложении функции $\boldsymbol{ln(x+1)}$ в ряд Маклорена получается следующий ряд (схожий с рядом заданном в условии): $\boldsymbol{ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1}}$

(Разложение функции $\boldsymbol{ln(x+1)}$ в ряд Маклорена:

$f(x) = ln(x+1)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f''^{(0)} = -1$

$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f'''(0) = 2$

$f^{IV}(x) = -2 \times \frac{3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{6}{(1+x)^4}$ $\qquad f^{IV}(0) = -6$

…

$$ln(x+1) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \cdots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1}$)

Учтём, что область сходимости ln(1+x): x ∈ (-1; 1], поэтому можно подставить 1.
Заметим, что при $\boldsymbol{x = 1}$ ряд, полученный при разложении функции $\boldsymbol{ln(x+1)}$ примет тот же вид, что и ряд, заданный в условии: $\boldsymbol{ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot 1^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} =}$
$\boldsymbol{ln(1+1) = ln\,2 \approx 0,69}$

Ответ : $\qquad \boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2}$

Задание №2

Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$$\boldsymbol{y' = xy + ln(x+y), \quad y(1) = 0, \quad k = 5}$$

Мы ищем решение в виде ряда Тейлора:

$$\boldsymbol{y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots}$$

1) Давайте подставим x = 1 в исходное уравнение, тогда:

$$\boldsymbol{y'(1) = 1 \cdot y(1) + ln(1 + y(1)) = 1 \cdot 0 + ln(1+0) = 0}$$

2) Найдем вторую производную:

$$\boldsymbol{y'' = 1 \cdot y + xy' + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y}y' = y + xy' + \frac{1}{x+y}(1+y')}$$

Подставим x = 1:

$$\boldsymbol{y''(1) = y(1) + 1 \cdot y'(1) + \frac{1}{1+y(1)}(1 + y'(1)) = 0 + 1 \cdot 0 + \frac{1+0}{1+0} = 1}$$

3) Найдем третью производную:

$$\boldsymbol{y''' = y' + 1 \cdot y' + xy'' + \frac{y''(x+y) - (1+y')(1+y')}{(x+y)^2} =}$$

$$\boldsymbol{= 2y' + xy'' + \frac{y''(x+y) - (1+y')^2}{(x+y)^2}}$$

Подставим x = 1:

$$\boldsymbol{y'''(1) = 2y'(1) + 1 \cdot y''(1) + \frac{y''(1)(1+y(1)) - (1+y'(1))^2}{(1+y(1))^2} =}$$

$$\boldsymbol{= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{1 \cdot (1+0) - (1+0)^2}{(1+0)^2} = 0 + 1 + 0 = 1}$$

4) Найдем четвертую производную:

$$\boldsymbol{y^{(4)} = 2y" + 1 \cdot y" + xy''' +}$$
$$\boldsymbol{+\frac{(y'''(x+y) + y"(1+y') - 2(1+y')y")(x+y)^2 - 2(x+y)(1+y')(y"(x+y) - (1+y')^2)}{(x+y)^4}}$$

Подставим x = 1:

$$\boldsymbol{y^{(4)}(1) = 3y"(1) + 1 \cdot y'''(1) +}$$
$$\boldsymbol{+\frac{(y'''(1)\cdot 1 + y"(1)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot y"(1))\cdot 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot (y"(1)\cdot 1 - 1^2)}{1^4} = 4 + 0 = 4}$$

Тогда получим:

$$\boldsymbol{y = 0 + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{4}{4!}(x-1)^4 + \ldots}$$
$$\boldsymbol{= 0 + 0(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \ldots}$$

Ответ: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4} + o((x-1)^4)$

Задание №3

Найдите сумму числового ряда с помощью разложения функции f(x) *в ряд Фурье.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

f(x) = $|\sin x|$, $x \in (-\pi; \pi)$

Функция f(x) – четная, так как $|\sin(-x)| = |\sin(x)|$
Ряд будет содержать только косинус члены, так как функция f(x) – четная, sin(nx) – нечетная, их произведение является нечетной функцией, а интеграл нечетной функции по симметричному промежутку будет равен нулю:

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx) dx = 0$$

Таким образом, для четной функции f(x) ряд Фурье примет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos(nx)$$

Найдем коэффициенты a_0 и a_n по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$$

- Находим коэффициент a_0

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |\sin x|dx$$

На промежутке $[0; \pi]$ $\sin x \geq 0$, значит $|\sin x| = \sin x$, значит:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}((-\cos\pi) - (-\cos 0)) = \frac{2}{\pi}\cdot(1 + 1) = \frac{4}{\pi}$$

- Теперь найдём коэффициент a_n

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x \cdot cos(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(sin(x+nx) + \sin(x - nx))\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sin((1+n)x) + \sin((1 - n)x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi} sin((1+n)x)\ dx + \int_0^{\pi}\sin((1 - n)x))\ dx) =$$

Отдельно рассмотрим интегралы:

$$\int_0^{\pi}\sin((1+n)x)\ dx = \frac{-\cos((n+1)x)}{n+1}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-cos((n+1)\cdot\pi)}{n+1} - \left(\frac{-cos((n+1)\cdot 0)}{n+1}\right) =$$

$$= /cos(k\pi) = (-1)^k/ = \frac{-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{-1}{n+1} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^{\pi}\sin((1 - n)x)\ dx = \frac{-\cos((1 - n)x)}{1 - n}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-cos((1 - n)\cdot\pi)}{1 - n} - \left(\frac{-cos((1 - n)\cdot 0)}{1 - n}\right) =$$

$$= /cos(k\pi) = (-1)^k/ = \frac{-(-1)^{1-n}}{1 - n} - \frac{-1}{1 - n} = \frac{1 - (-1)^{1-n}}{1 - n} = \frac{1 - (-1 \cdot (-1)^n)}{1 - n} =$$

$$= \frac{1 + (-1)^n}{1 - n}$$

Их сумма:

$$\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1 + (-1)^n}{1 - n} = \frac{(1 - (-1)^{n+1}) \cdot (1-n) + (1 + (-1)^n) \cdot (n+1)}{1 - n^2}$$

Рассмотрим числитель:

$$(1 - (-1)^{n+1}) \cdot (1 - n) + (1 + (-1)^n) \cdot (n+1) =$$
$$= 1 - n - (-1)^{n+1}(1 - n) + n + 1 + (-1)^n \cdot (n+1) =$$
$$= 2 + (-1)^n(n+1) - (-(-1)^n)(1-n) = 2 + (-1)^n(n+1+1 - n) =$$
$$= 2 + 2 \cdot (-1)^n = 2 \cdot (1 + (-1)^n)$$

Тогда получаем:

$$\frac{-2 \cdot (1 + (-1)^n)}{n^2 - 1}$$

В результате коэффициент a_n:

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1}$$

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + 1}{(2k)^2 - 1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1}, n - \text{четное} \\ 0, \ n - \text{нечетное} \end{cases}$$

Тогда разложение в ряд Фурье искомой функции:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

Подставляем x = $\frac{\pi}{2}$:

$$cos\left(2k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

Домножим на $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

В результате:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

Задание №4

Найдите разложение функции $f(x)$ в цепную дробь и ряд Маклорена. Придайте аргументу x из области сходимости некоторое значение и сравните точность разложений по нескольким первым членам разложения.

$$f(x) = e^{-4x}$$

(Рекомендуемый источник: Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, Хованский А.Н., 1956)

$$f(x) = f(0) + \frac{f\ '(0)x}{1!} + \frac{f\ ''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f\ '(x) = -4e^{-4x} \qquad f\ '(0) = -4$$

$$f\ ''(x) = 16e^{-4x} \qquad f\ ''(0) = 16$$

$$f'''(x) = -64e^{-4x} \qquad f'''(0) = -64$$

$$\ldots$$

$$f^n(x) = (-1)^n\cdot 4^n\cdot e^{-4x} \qquad f^n(0) = (-1)^n\cdot 4^n$$

$$f(x) = 1 + \frac{-4x}{1!} + \frac{16x^2}{2!} + \frac{-64x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n\cdot 4^n\cdot x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n\cdot\frac{4^n\cdot x^n}{n!})$$

Область сходимости. Мы знаем, что:

$$e^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}$$

В нашем случае: $\beta = -4x;\ \beta \epsilon \mathbb{R} \implies x \epsilon \mathbb{R}$

$$e^{-4x} = 1 - 4x + 8x^2 - \frac{32}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n 4^n x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n\,=\,0}^{\infty}((-1)^n\cdot\frac{4^n x^n}{n!}$$

Рассмотрим $(1+x)^{\nu}$ и e^x

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{– Второй замечательный предел}$$

Пусть $n = \frac{t}{x}$, $x \neq 0$

$$n\to\infty \Longrightarrow \frac{t}{x}\to\infty \Longrightarrow t\to\infty$$

$\lim\limits_{\frac{t}{x}\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = e$ (возьмем обе части в степень)

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = e^x$

$$(1+x)^{\nu} = 1 + \frac{\nu x}{1+x} - \frac{(1+\nu)x}{2} - \frac{(1-\nu)x}{3(1+x)} - \frac{(2+\nu)x}{2} - \ldots - \frac{(n-\nu)x}{(2n+1)(1+x)} - \ldots$$

Область сходимости x ∈ (-1; 1)

Разложение из книги (2.5)

Пусть x заменим на $\frac{x}{\nu}$ и $\nu \longrightarrow \infty$, тогда область сходимости x ∈ (-∞; +∞)

для e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \ldots - \frac{x}{2} + \frac{x}{2n+1} - \ldots \quad \textbf{(1)}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots$$
$$= b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4}$$
$$- \frac{a_4 a_5 b_2 b_6}{(b_4 b_5 + a_4) b_6 + b_4 a_6} - \ldots - \frac{a_{2n} - a_{2n} -_1 b_{2n} -_4 b_{2n}}{(b_{2n} -_2 b_{2n-1} + a_{2n-1}) b_{2n} + b_{2n} -_2 a_{2n}} - \ldots$$

Сжимаем **(1)** по этой формуле:

$$e^x = 1 - \frac{2x}{-2+x} - \frac{2x^2}{6 \cdot 2} + \frac{4x^2}{10 \cdot 2} + \ldots + \frac{4x^2}{4(2x+1)}$$

Получаем:

$$e^x = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \ldots + \frac{x^2}{2(2n+1)} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \ldots}}}$$

Запишем для первых 3-х членов:

$$e^x = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10}}}$$

Распишем x = -1:

$$e = 1 + \cfrac{2}{2 - 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10}}} \approx 2{,}718$$

Заменим x на -4x

$$e^{-4x} = 1 + \frac{-8x}{2+4x} + \frac{16x^2}{6} + \ldots + \frac{16x^2}{2(2n+1)} + \ldots$$

$$e^{-4x} = 1 + \cfrac{-8x}{2 + 4x + \cfrac{16x^2}{6 + \cfrac{16x^2}{10 + \ldots}}}$$

x = 1

$e^{-4} \approx 0{,}01831$

глубина = 5

$$1 + \cfrac{-8 \cdot 1}{2 + 4 + \cfrac{16}{6 + \cfrac{16}{10 + \cfrac{16}{2 \cdot 7 + \cfrac{16}{18}}}}} \approx 0{,}0183$$

Посчитаем e^{-4} с помощью ряда Маклорена:

$$e^{-4} = 1 - 4 + 8 - \frac{32}{3} + \frac{256}{4!} - \frac{256 \cdot 4}{5!} \approx -3{,}53$$

Заметим, что расчет с помощью цепной дроби намного более точен и приблизителен к верному ответу, чем расчет с помощью ряда Маклорена при том же количестве, взятых членов. Отсюда можем сделать вывод, что алгоритм цепной дроби предпочтительнее и эффективнее. Но это не значит, что расчет с помощью ряда Маклорена не даст верный результат, давайте попробуем получить ответ с большим количеством членов.

$$e^{-4} = 1 - \frac{4}{1!} + \frac{16}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} - \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!} - \frac{4^7}{7!} + \frac{4^8}{8!} - \frac{4^9}{9!} + \frac{4^{10}}{10!} - \frac{4^{11}}{11!} + \frac{4^{12}}{12!} - \frac{4^{13}}{13!} + \frac{4^{14}}{14!} - \frac{4^{15}}{15!} \approx 0{,}0182$$

Подготовили:

1. Арсланова Лена
2. Биктимирова Салима
3. Пашкова Ксения
4. Терентьева Надежда
5. Шипилова Александра