

TD - Graphe

I Petites Questions

II Théorème de Mantel

1. Soit $(u, v) \in E$. Comme chaque sommet de $G - u - v$ n'est connecté qu'à u ou v (car sinon triangle), alors

$$\deg(u) + \deg(v) \leq |V|$$

2. En réécrivant la somme, on a l'égalité :

$$\sum_{v \in V} \deg(v)^2 = \sum_{(u,v) \in E} \deg(u) + \deg(v) \leq |E||V|$$

3. Comme $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, alors d'après Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \deg(v)^2 &\geq \frac{(\sum_{v \in V} \deg(v))^2}{|V|} = \frac{4|E|^2}{|V|} \\ \text{donc } \frac{4|E|^2}{|V|} &\leq |E||V| \\ \text{d'où } |E| &\leq \frac{|V|^2}{4} \end{aligned}$$

4. Les graphes bipartis au nombres de sommets paire fonctionnent.