

I Petites questions

- Montrer que dans tout graphe avec au moins 2 sommets, il existe 2 sommets de même degré.
- Montrer qu'un arbre avec un sommet de degré 2017 possède au moins 2017 feuilles (une feuille est un sommet de degré 1).
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre minimum de composantes connexes d'un graphe à n sommets et $n - k$ arêtes?
- Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe alors G ou $\overline{G} := (\overline{V}, \overline{E})$ est connexe. Est-il possible que les deux soient connexes?
- (Théorie de Ramsey) Montrer que dans tout graphe à 6 sommets, on peut trouver 3 sommets tous adjacents ou 3 sommets sans adjacence.

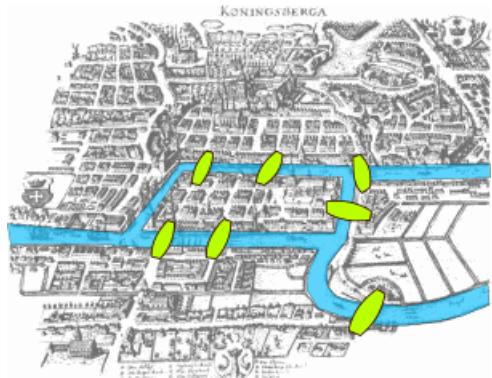
II Théorème de Mantel (graphe sans triangle)

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans cycle de longueur 3 (un triangle).

- Montrer que pour toute arête $e = \{u, v\}$ de G , $\deg(u) + \deg(v) \leq |V|$.
- En déduire que $\sum_{v \in V} \deg(v)^2 \leq |V||E|$.
- En déduire que $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$ (théorème de Mantel).
- Donner un exemple de graphe sans cycle de longueur 3 et vérifiant $|E| = \frac{|V|^2}{4}$.

Remarque : le théorème de Turán donne, plus généralement, le nombre maximum d'arêtes que peut contenir un graphe sans sous-graphe complet de taille p . Pour $p = 3$ on retrouve le théorème de Mantel.

III Graphe eulérien



Euler (1736) s'est demandé s'il était possible de traverser tous les ponts de la ville de Königsberg exactement une fois.

Un **tour eulérien** dans un graphe est un cycle qui passe une

fois exactement par chaque arête. Un graphe est **eulérien** s'il possède un tour eulérien.

- Montrer que tous les sommets d'un graphe eulérien sont de degrés pairs.
- Réciproquement, montrer qu'un graphe connexe $G = (V, E)$ dont les sommets sont de degrés pairs est eulérien. Écrire en pseudo-code un algorithme pour trouver un cycle eulérien. Quelle est sa complexité?
- Est-il possible de traverser tous les ponts de Königsberg exactement une fois?
- À quelle condition nécessaire et suffisante un graphe orienté contient un cycle eulérien?

Application : une liste de **De Bruijn** d'ordre p est une liste cyclique de bits contenant chaque mot binaire de longueur p exactement une fois.

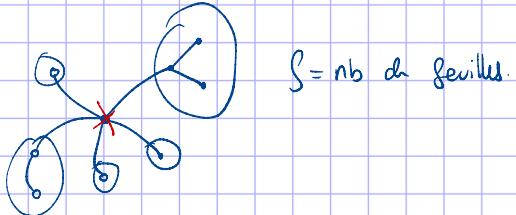
- Donner des listes de De Bruijn d'ordres 2 et 3.
- Quelle est la longueur d'une liste de De Bruijn d'ordre p ?
- Comment déterminer en $O(n)$ si une liste de taille n est De Bruijn d'ordre p ? Implémenter cette méthode en OCaml, en utilisant par exemple une liste chaînée cyclique.
- On veut montrer l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour cela on considère le **graphe orienté de De Bruijn** dont les sommets sont les mots de longueurs $p - 1$ et avec un arc de u à v si $u = b_1m$ et $v = mb_2$, où b_1 et b_2 sont des bits.
- Dessiner le graphe de De Bruijn pour $p = 3$.
- Montrer que ce graphe est eulérien et en déduire l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$.

TD Graphes : Définitions

I.

1). Soit G un graphe à n sommets, avec $n \geq 2$. Si tous les n degrés sont \neq , chaque sommet à son degré entre 0 et $n-1$, alors il existe un sommet de degré k , $1 \leq k \leq n-1$ dont le sommet de degré $n-1$ est relié à celui de 0 . Absurde!

2)



formules des degrés:

$$\sum \deg(v) = 2|E|$$

||

$$2\alpha_0 + \beta + \dots = 2|E| = 2 \times (n-1)$$

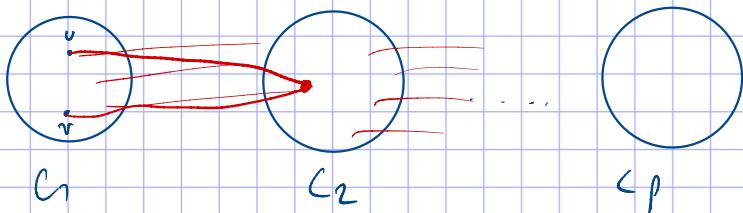
$\geq 2 \times (n-S-1)$

$$\text{donc } 2(n-1) \geq 2\alpha_0 + \beta + 2 \times (n-S-1)$$

$$0 \geq 2\alpha_0 - S \text{ d'où } S \geq 2\alpha_0.$$

b) Supposons G non connexe $\Rightarrow G$ a $p \geq 1$ comp. connexes.

Mg \overline{G} est connexe:



① Si u, v sont dans des composantes connexes \neq alors $\{u, v\} \in \overline{G}$

② Sinon u, v sont dans la même comp. connexe, ainsi ils sont tous les deux reliés à un même point d'une autre compo. connexe(s).

II

1. les voisins de u, v sont disjoints.

Soit $\mathcal{V}(u) = \text{voisins de } u$

$\mathcal{V}(v) = \text{voisins de } v$

$$|V| \geq |\mathcal{V}(u) \cup \mathcal{V}(v)| = |\mathcal{V}(u)| + |\mathcal{V}(v)|$$
$$\leq v \quad \deg(u) \quad \deg(v)$$

2. $\sum_{(uv) \in E} (\deg(u) - \deg(v)) \leq |V| |E|$

$$= \sum_{u \in V} n(u) \deg(u) \quad \text{où } n(u) = \text{nb de voisins de } u$$

que $\deg(u)$ apparaît dans (*)

$$= \deg(u).$$

II.

1) Soit G un graphe euclidien, il possède un bar euclidien C .

Soit x un sommet de G .

Par définition, C contient toutes les arêtes de G alors $\deg(x)$ arêtes de x .

Quand on parcourt C , on arrive autour de x en x qu'on en repart.

$$\text{De } \deg(x) = O(|C|).$$

2). Si tous les sommets de G sont de degrés pairs, $v_0 \in V$.

Comme tous les $\deg(v_i) \geq 2$, il existe un cycle C , qui ne passe jamais 2x par la même arête.

- Si $E \subset C$, c'est bon.

- Sinon, soit e une arête de G qui n'est pas dans C , dont un extrémité est dans C .

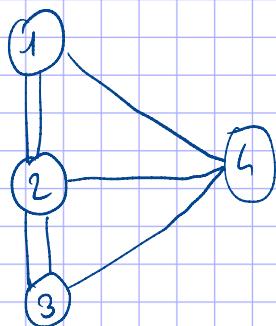
Soit $E_{(v_0)} = \text{arêtes de } v_0$.

$$U = G - E_{(v_0)}$$

Tous les sommets de U sont de degrés pairs.

U_1, \dots, U_p les composantes connexes de U

On itère.



avec tous sommets de degrés pairs.

3) $\forall x \in V$,

$$\underbrace{\deg^+(x) = \deg^-(x)}_{\begin{array}{l} \text{entrant.} \\ \text{degré} \\ \text{sortant} \end{array}}$$

5) * ordre 2: 0011

* ordre 3: 11101000

6) si g a 2^k à p blets.

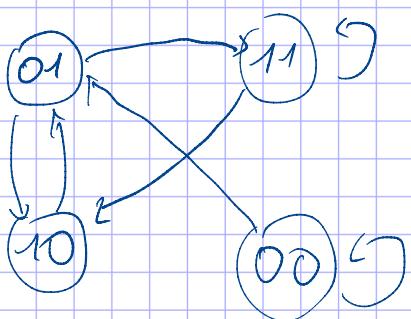
La fonction qui à un indice i d'une suite de De Bruijn associe

le mot de taille p commençant en i est une bijection.

Les 2^k indices.

7).

8).



g) $\forall v \in V, \deg^+(v) = 2 = \deg^-(v)$

Donc d'après 4), le graphe est eulerien