

Graphes : définitions

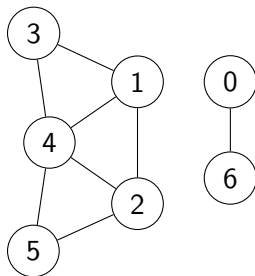
Quentin Fortier

September 4, 2022

Graphe = dessin?

Un graphe est constitué :

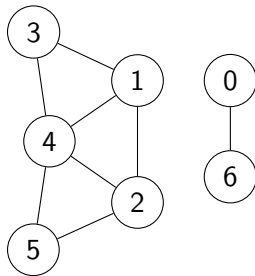
- ❶ de **sommets** (**vertices** en anglais), représentés par des points
- ❷ d'**arêtes** (**edges** en anglais), représentés par des traits entre les points



Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

- 1 V est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2 E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



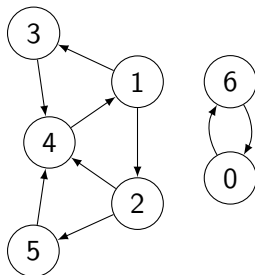
Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$E = \{\{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

Définition formelle

Un **graphe orienté** est un couple $\vec{G} = (V, \vec{E})$ où :

- 1 V est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2 $\vec{E} \subseteq V \times V$ est un ensemble de **couples** de sommets (appelés **arcs**)



Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$\vec{E} = \{(0, 6), (6, 0), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\}$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté $\deg(v)$, est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v .
- Si $e \in E$, on note $G - e$ le graphe obtenu en supprimant e :
 $G - e = (V, E - \{e\})$.
- Si $v \in V$, on note $G - v$ le graphe obtenu en supprimant v :
 $G - v = (V - \{v\}, E')$, où E' est l'ensemble des arêtes de E n'ayant pas v comme extrémité.

Formule des degrés

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- ① $2|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
- ② $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

Autre preuve : récurrence sur le nombre d'arêtes.

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

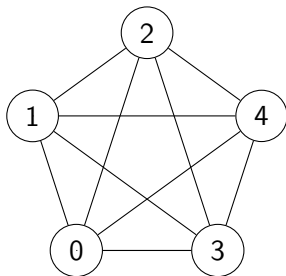
Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Application : existe t-il un graphe dont les sommets ont pour degrés 1, 2, 2, 3, 5 ?

Graphe complet

Un **graphe complet** est un graphe non orienté possédant toutes les arêtes possibles.



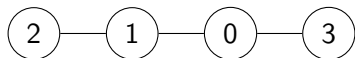
Un graphe complet avec n sommets a $\binom{n}{2}$ arêtes : c'est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à n sommets.

De façon générale, tout graphe à n sommets et m arêtes vérifie $m = O(n^2)$.

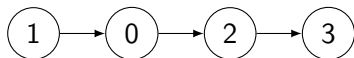
Chaque sommet a degré $n - 1$.

Chemin

Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives différentes.



Chemin (non orienté) entre 2 et 3



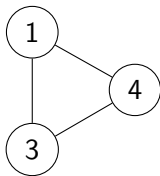
Chemin (orienté) de 1 à 3

La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.

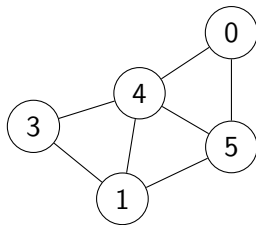
La **distance** de u à v est la plus petite longueur d'un chemin de u à v (∞ si il n'y a pas de chemin) : c'est une distance au sens mathématique.

Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



Graphe non connexe



Graphe connexe

Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe à n sommets?

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
- ② Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe à $n + 1$ sommets.

- Si G a un sommet v de degré 1 alors $G - v$ est un graphe *connexe* à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G - v$ a au moins $n - 1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes.
- Sinon, tous les sommets de G sont de degré ≥ 2 .
Alors $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2(n + 1) \geq 2n$.
Donc $|E| \geq n$, ce qui montre $\mathcal{H}(n + 1)$.

Soit $u, v \in G \setminus V$
 Il y a donc de v à w
 dans $G \setminus V$:
 6 cases $\Rightarrow \exists$ chemin L
 de v à w dans G
 ① $G \setminus V \subseteq E$: E est unifié
 de $G \setminus V$
 ② $G \setminus V \subseteq E$: G est unifié
 de $E \Rightarrow OK$

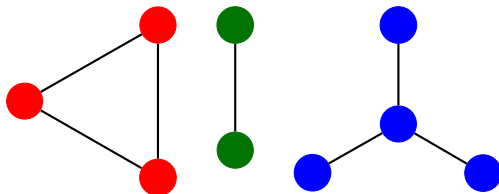
$u \xrightarrow{v} w$

Composantes connexes

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté $G = (V, E)$:

$$u \sim v \iff \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

Les classes d'équivalences V / \sim sont les sous-graphes connexes maximaux (au sens de \subseteq) de G , ils sont appelés **composantes connexes**.



Un graphe avec 3 composantes connexes.

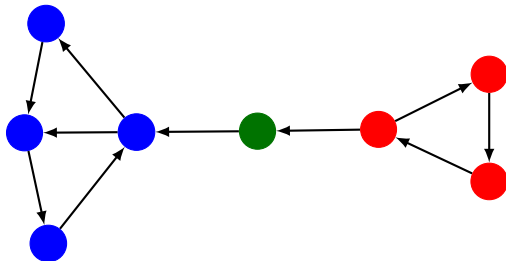
Composantes fortement connexes

Si $\vec{G} = (V, \vec{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \iff$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \rightsquigarrow\!\!\rightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

Les classes d'équivalences $V / \rightsquigarrow\!\!\rightsquigarrow$ sont appelées **composantes fortement connexes**.



Un graphe orienté avec 3 composantes fortement connexes.

Composantes fortement connexes

Si $\vec{G} = (V, \vec{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \iff$ il existe un chemin de u à v »
n'est pas une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \longleftrightarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

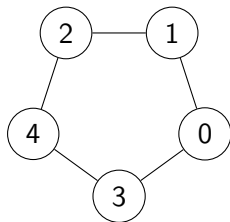
Les classes d'équivalences V / \longleftrightarrow sont appelées **composantes fortement connexes**.



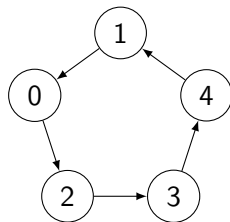
Le graphe des composantes fortement connexes est acyclique.

Cycle

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



Cycle non orienté



Cycle orienté

Un cycle avec n sommets a n arêtes.
Le degré de chaque sommet est 2.

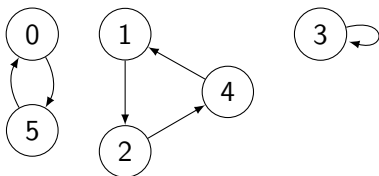
Exemples

Soit σ une permutation de $\{0, \dots, n-1\}$.

On peut lui associer un graphe orienté (V, \vec{E}) où :

- ❶ $V = \{0, \dots, n-1\}$
- ❷ $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)), \forall v \in V\}$

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:



Les cycles d'une permutation sont celles de son graphe.

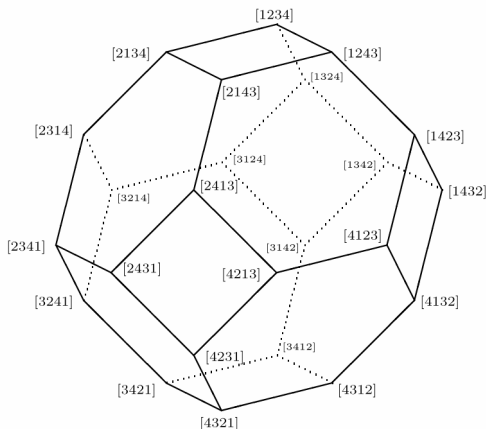
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, \dots, n-1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets : $n!$

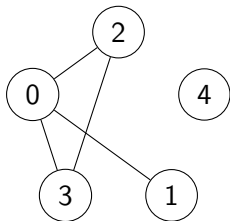
Degré de chaque sommet : $\binom{n}{2}$

Nombre d'arêtes : $\frac{n!}{2} \binom{n}{2}$

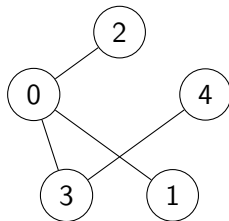


Graphe acyclique

Un graphe est **acyclique** (ou : sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle



Graphe acyclique

Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe acyclique à n sommets?

Graphe acyclique

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1 .

Preuve : Supposons que tous les sommets soient de degrés ≥ 2 .

Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont ≥ 2).

Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

Remarque : tout graphe acyclique avec au moins 2 sommets contient 2 sommets de degré ≤ 1 . *(par un chemin et disjoints sur les extrémités)*

Graphe acyclique

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n - 1$ arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
- ② Supposons $\mathcal{H}(n)$. D'après le lemme, un graphe G acyclique à $n + 1$ sommets possède un sommet v de degré ≤ 1 .
Comme G est acyclique, $G - v$ l'est aussi et a au plus $n - 1$ arêtes, par $\mathcal{H}(n)$.
Donc G a au plus $n - 1 + \deg(v) \leq n$ arêtes, ce qui montre $\mathcal{H}(n + 1)$.

Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- ① • T est **connexe acyclique**. (des arbres)
- ② • T est connexe et a $n - 1$ arêtes.
- ③ • T est acyclique et a $n - 1$ arêtes.
 - Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T .

Preuve : au tableau.

① \Rightarrow ② : T est connexe donc a au moins $n-1$ arêtes, T est acyclique donc au plus $n-1$ arêtes, i.e. : T possède $n-1$ arêtes.

② \Rightarrow ③ : Si T a un cycle C
Soit e , une arête de C , Alors $T - e$ est connexe et possède $n-2$ arêtes.



Absurde!

③ \Rightarrow ① : Si T n'est pas connexe, soit C un composante connexe de T
En ajoutant une arête e , $T + e$ est acyclique et il y a n arêtes \Rightarrow Absurde!



Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- T est **connexe acyclique**.
- T est connexe et a $n - 1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n - 1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T .

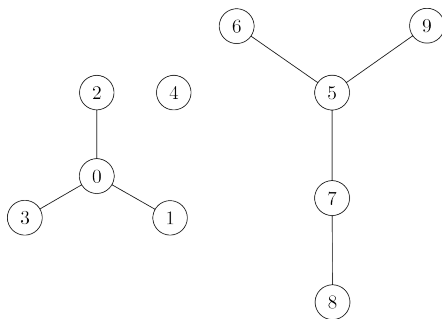
Preuve : au tableau.

Un arbre est **couvrant** s'il contient tous les sommets.

Les « arbres » que l'on a vu avant étaient enracinés. Ici il n'y a pas de racine.

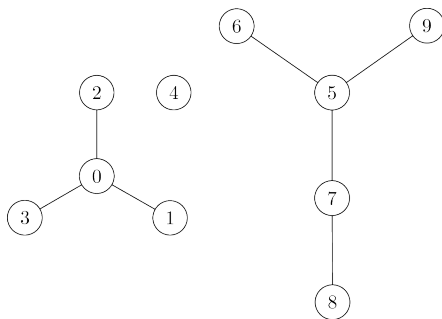
Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :



Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :

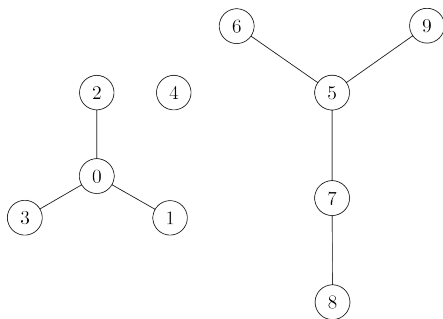


Lemme

Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :



Lemme

Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

Exercice

Quel est le nombre d'arêtes d'une forêt à n sommets, composée de k arbres ?