

TD - Kruskal et Dijkstra

I Application des algorithmes

1. $a - b \rightarrow d - f \rightarrow b - d \rightarrow$
2. Impossible
3. b-e ($M = \{be\}$) ; c-f ($M = \{be, cf\}$) ; a-f-c-h ($M = \{be, af, ch\}$) ; d-g ($M = \{be, af, eh, dg\}$)

II Plus courts chemin et Dijkstra

III Plus large chemin

Habituellement, poids d'un chemin :

$$W_C = \sum_{e \in C} w(e)$$

Ici: $l(C) = \min_{e \in C} w(e)$

Supposons que C ne soit pas un plus large chemin de u à v . Alors $\exists C'$ chemin de u à v plus large ($l(C') > l(C)$)

$$\min_{e' \in C'} w(e') > \min_{e \in C} w(e)$$

Soit $e = \{x, y\} \in C$ de poids min, si $\sigma = (V, E_T)$ considérons le graphe $T - e = (V, E_T - e)$ (l'arbre T dans laquelle on enlève e).

$T - e$ contient deux composantes connexes V_x et V_y tq $u \in V_x$ et $v \in V_y$.

C' relie $u \in V_u$ à $v \in V_v$, donc $\exists e'$, arrête de C' entre V_u et V_v .

$T - e + e'$ est un arbre couvrant car:

1. connexe : car contient une composante connexe
2. contient autant d'arrêtes que T ($n - 1$)

$$w(T - e + e') = w(T) - w(e) + w(e') > w(T) \text{ or } -w(e) + w(e') > 0 \text{ car } w(e') \geq \min_{e' \in C'} w(e') > \min_{e \in C} w(e) (= w(e))$$

Absurde car T est maximum, d'où le résultat.

IV Questions sur les arbres couvrants de poids minimum

1. Soit T un arbre couvrant de poids minimum, supposons qu'un tel $e \in T$,
 $\exists e' \in C - e$ tq $e' \notin T$ (sinon C serait entièrement dans T)
 $T - e$ contient deux composantes connexes V_u et V_v . $C - e$ est un chemin de u à v donc possède une arrête e' dont les extrémités sont dans V_u et V_v .
 $T - e + e'$ est un arbre couvrant (connexe et $(n - 1)$ arrêtes) de poids $w(T) - w(e) + w(e') < w(T)$
 \Rightarrow **Absurde**

V Mise a jour d'arbre couvrant de poids minimum

VI Hypercube

1.

2. 2^n sommets, $\deg(v) = n$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \implies |E| = n2^{n-1}$$