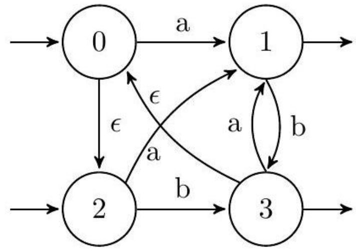
I Exercice CCP



1. Déterminiser cet automate.
2. Construire une expression régulière dénotant le langage reconnu par cet automate.
3. Décrire simplement avec des mots le langage reconnu par cet automate.

II Langage local, linéaire et automate de Glushkov

1. Construire l'automate de Glushkov reconnaissant $(ab+b)^*b$.
2. Montrer que si e est une expression linéaire alors $L(e)$ est un langage local.
3. Montrer qu'il existe un nombre fini de langages locaux sur un alphabet fixé.
4. Soient $\mathcal{L}_{\text{rat}}$, $\mathcal{L}_{\text{loc}}$, $\mathcal{L}_{\text{lin}}$ l'ensemble des langages rationnels, locaux et linéaires (c'est à dire décrits par une expression rationnelle linéaire). Quelles sont les inclusions entre ces 3 ensembles? Ces inclusions sont-elles strictes?

III Stabilité des langages rationnels

Pour chacune des propositions suivantes, expliquer pourquoi elle est vraie ou donner un contre-exemple :

1. Si L est rationnel et $L \subseteq L'$ alors L' est rationnel.
2. Si L' est rationnel et $L \subseteq L'$ alors L est rationnel.
3. Si L est rationnel alors L^* est rationnel.
4. Si L^* est rationnel alors L est rationnel.
5. Si L est rationnel sur un alphabet Σ alors $\Sigma^* \setminus L$ (complémentaire de L) est rationnel.
6. Une union finie de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n rationnels $\implies \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ rationnel).
7. Une union dénombrable de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n, ... rationnels $\implies \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k$ rationnel).
8. Une intersection finie de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n rationnels $\implies \bigcap\limits_{k=1}^{n} L_k$ rationnel).
9. Une intersection dénombrable de langages rationnels est rationnel (L_1, ..., L_n, ... rationnels $\implies \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} L_k$ rationnel).

IV Calcul des ensembles $P(L)$, $S(L)$, $F(L)$

Soit L un langage. On rappelle les définitions du cours :

- $P(L) = \{a \in \Sigma \mid a\Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$ (premières lettres des mots de L)
- $S(L) = \{a \in \Sigma \mid \Sigma^* a \cap L \neq \emptyset\}$ (dernières lettres des mots de L)
- $F(L) = \{u \in \Sigma^2 \mid \Sigma^* u \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$ (facteurs de longueur 2 des mots de L)

Dans la suite, on utilise le type suivant d'expression rationnelle :

```
type 'a regexp =
    | Vide | Epsilon | L of 'a
    | Union of 'a regexp * 'a regexp
    | Concat of 'a regexp * 'a regexp
    | Etoile of 'a regexp
```

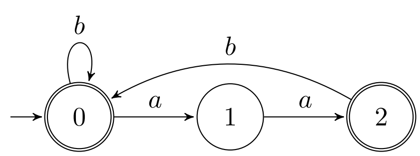
1. Écrire une fonction `has_eps : 'a regexp -> bool` déterminant si le langage d'une expression rationnelle contient ε.
2. Écrire une fonction `union : 'a list -> 'a list -> 'a list` telle que, si `l1` et `l2` sont des listes sans doublon (ce qu'on suppose être le cas...), `union l1 l2` renvoie une liste sans doublon contenant les éléments des deux listes. Par exemple, `union [1; 2] [3; 1]` peut renvoyer `[1; 2; 3]` (l'ordre des éléments de la liste de retour n'importe pas).
3. Écrire une fonction `prefixe` de type `'a regexp -> 'a list` telle que `prefixe e` renvoie $P(L(\texttt{e}))$.
4. Que faudrait-il modifier à `prefixe` pour obtenir une fonction `suffixe` renvoyant $S(L)$?
5. Écrire une fonction `produit : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list` effectuant le produit cartésien de 2 listes : si `l1` et `l2` sont des listes, `produit l1 l2` renvoie une liste de tous les couples distincts composés d'un élément de `l1` et un élément de `l2`. Par exemple, `produit [1; 2] [3; 1]` peut renvoyer
`[(1, 3); (1, 1); (2, 3); (2; 1)]` (l'ordre des éléments de la liste de retour n'importe pas).
6. En déduire une fonction `facteur` de type `'a regexp -> ('a * 'a) list` telle que `facteur e` renvoie $F(L(\texttt{e}))$.

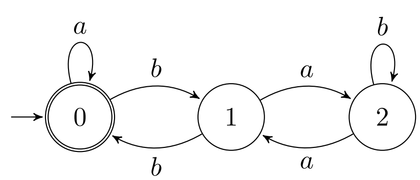
V Reconnaissable $\implies$ rationnel avec le lemme d'Arden

1. (Lemme d'Arden) Soient A et B deux langages tels que $\varepsilon \notin A$. Montrer que l'équation $L = AL \cup B$ (d'inconnue le langage L) admet pour unique solution A^*B.

Soit $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe. Si $q_i \in Q$ est un état, on pose $L_i = \{m \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_i, m) \in F\}$ (étiquettes des chemins de q_i vers un état final). En écrivant des relations entre les L_i puis en résolvant de proche en proche avec le lemme d'Arden, on obtient une expression rationnelle pour le langage L_0 de l'automate.

2. Appliquer cette méthode pour trouver une expression rationnelle pour chacun des automates ci-dessous. En remplaçant a par 0 et b par 1, que reconnaît le 2ème automate?





VI Reconnaissable $\implies$ rationnel par prog. dyn. ($\approx$ Floyd-Warshall)

Soit $(\Sigma, Q, 0, F, \delta)$ un automate déterministe dont les états sont des entiers de 0 à n (et 0 est l'état initial).
Soit $L(i, j, k)$ le langage des étiquettes des chemins de i à j n'utilisant que des états intermédiaires strictement inférieurs à k.

1. Montrer que $L(i, j, 0)$ est rationnel, pour tous les états i, j.
2. Prouver une équation de récurrence sur $L(i, j, k)$.
3. En déduire, par récurrence, que tout langage reconnaissable est rationnel.

VII Racine d'un langage

Soit L un langage reconnaissable sur Σ. Montrer que $\sqrt{L} = \{m \in \Sigma^* \mid m^2 \in L\}$ est un langage reconnaissable.