Déduction naturelle

Quentin Fortier

March 9, 2023

Système déductif : Définition

La **logique propositionnelle** définit la valeur de vérité d'une formule en considérant toutes les valeurs possibles des variables booléennes.

La **déduction naturelle** formalise la notion de preuve mathématique.

Système déductif : Définition

Définition

Un **séquent**, noté $\Gamma \vdash A$, est constitué d'un ensemble Γ de formules logiques et une formule logique A.

Intuitivement : $\Gamma \vdash A$ signifie que sous les hypothèses Γ, on peut déduire A.

Règles d'inférence

Définition

Une **règle d'inférence** est constituée :

- d'un ensemble de séquents appelés **prémisses**
- d'un séquent appelé **conclusion**.

Une règle sans prémisse est appelée **axiome**.

Notation pour une règle d'inférence :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash P_1 \qquad \Gamma_2 \vdash P_2 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash P_n}{\Gamma \vdash A}.$$

Règles d'inférence

Définition

Une **preuve** d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est un arbre dont les nœuds sont des séquents, les arcs des règles d'inférence et la racine est $\Gamma \vdash A$.

Notation d'une preuve de $\Gamma \vdash A$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A_1} \qquad \dots \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma_n \vdash A_n}}{\Gamma \vdash A}$$

Déduction naturelle

La **déduction naturelle** est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

Déduction naturelle

La **déduction naturelle** est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

Déduction naturelle

La **déduction naturelle** est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

- Affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ aff}$$

Déduction naturelle : Implication

Pour chaque connecteur logique ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}$

Déduction naturelle : Implication

Pour chaque connecteur logique ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}$
- Règle d'élimination, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}{\ldots \vdash \ldots}$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (**modus ponens**) :

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\to$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$$

- Élimination de $\to$ (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to_e$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ \text{ax}}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow_i$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (**modus ponens**) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)$

Déduction naturelle : Implication

Question

Prouver le séquent $A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \to (B \to C)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash B \to A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash B$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash B \to C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash B$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash C$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$A \to (B \to C), B \to A \vdash B \to C$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$}
\end{prooftree}
$$

Où $\Gamma = \{A \to (B \to C), B \to A, B\}$.

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du $\wedge$:

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

Il y a deux règles d'élimination pour le $\wedge$: on peut utiliser l'une ou l'autre.

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

Remarque : on peut aussi généraliser les règles avec différents contextes Γ, Γ' (ce qui revient à avoir le même contexte puis appliquer aff), pour simplifier les preuves.
Ainsi, on peut aussi utiliser :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

Question

Montrer $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

Question

Montrer $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \to C \vdash A \wedge B \to C}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,\text{ax}}{A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{(A \wedge B) \to C, A, B \vdash C}\,\to_e}{(A \wedge B) \to C, A \vdash B \to C}\,\to_i}{(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)}\,\to_i
$$

Question

Montrer $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$.

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}\ \vee_e$$

Exercice

1. Montrer $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B$.
2. On admet aussi $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$.
   En déduire $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\wedge$:

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\wedge$:

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Remarque : il n'est pas possible de démontrer $\neg\neg A \vdash A$ sans règle supplémentaire (tiers-exclu ou raisonnement par l'absurde).

Déduction naturelle : Vrai $\top$ et faux $\perp$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

Déduction naturelle : Vrai $\top$ et faux $\perp$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_i$$

- Élimination de $\perp$ (faux) :

Déduction naturelle : Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_i$$

- Élimination de $\bot$ (faux) :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \top_e$$

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \mathsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \mathsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}\ \mathsf{te}$$

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \textsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}\ \textsf{te}$$

Question

Montrer qu'en ajoutant l'une de ces règles à la logique intuition, on peut obtenir l'autre.

Correction de la déduction naturelle

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un **modèle** pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall \varphi \in \Gamma \cup \{A\},\ [\![\varphi]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Correction de la déduction naturelle

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un **modèle** pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall \varphi \in \Gamma \cup \{A\}, [\![\varphi]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

Correction de la déduction naturelle

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un **modèle** pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall \varphi \in \Gamma \cup \{A\}, \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

On peut montrer :

- Correction : Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.
- Complétude (HP) : Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

<u>Preuve</u> : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \models A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

- $\wedge_i$ Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$

  Par récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
  Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

$\wedge_i$ Supposons T de la forme : $$\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

$\wedge_e$ Supposons T de la forme : $$\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g)$$

Par récurrence sur T_1, $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A \wedge B$.

Les autres cas sont similaires.