I Petites questions

1. Montrer que dans tout graphe avec au moins 2 sommets, il existe 2 sommets de même degré.
2. Montrer qu'un arbre avec un sommet de degré 2017 possède au moins 2017 feuilles (une feuille est un sommet de degré 1).
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre minimum de composantes connexes d'un graphe à n sommets et $n-k$ arêtes?
4. Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe alors G ou $\overline{G} := (V, \overline{E})$ est connexe. Est-il possible que les deux soient connexes?
5. (Théorie de Ramsey) Montrer que dans tout graphe à 6 sommets, on peut trouver 3 sommets tous adjacents ou 3 sommets sans adjacence.

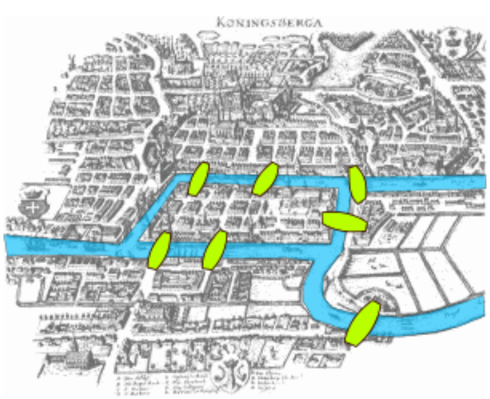
II Théorème de Mantel (graphe sans triangle)

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans cycle de longueur 3 (un triangle).

1. Montrer que pour toute arête $e = \{u, v\}$ de G, $\deg(u) + \deg(v) \leq |V|$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg(v)^2 \leq |V||E|$.
3. En déduire que $|E| \leq \dfrac{|V|^2}{4}$ (théorème de Mantel).
4. Donner un exemple de graphe sans cycle de longueur 3 et vérifiant $|E| = \dfrac{|V|^2}{4}$.

Remarque : le théorème de Turán donne, plus généralement, le nombre maximum d'arêtes que peut contenir un graphe sans sous-graphe complet de taille p. Pour $p = 3$ on retrouve le théorème de Mantel.

III Graphe eulérien



Euler (1736) s'est demandé s'il était possible de traverser tous les ponts de la ville de Königsberg exactement une fois.
Un **tour eulérien** dans un graphe est un cycle qui passe une fois exactement par chaque arête. Un graphe est **eulérien** s'il possède un tour eulérien.

1. Montrer que tous les sommets d'un graphe eulérien sont de degrés pairs.
2. Réciproquement, montrer qu'un graphe connexe $G = (V, E)$ dont les sommets sont de degrés pairs est eulérien. Écrire en pseudo-code un algorithme pour trouver un cycle eulérien. Quelle est sa complexité?
3. Est-il possible de traverser tous les ponts de Königsberg exactement une fois?
4. À quelle condition nécessaire et suffisante un graphe orienté contient un cycle eulérien?

Application : une liste de **De Bruijn** d'ordre p est une liste cyclique de bits contenant chaque mot binaire de longueur p exactement une fois.

5. Donner des listes de De Bruijn d'ordres 2 et 3.
6. Quelle est la longueur d'une liste de De Bruijn d'ordre p?
7. Comment déterminer en $\mathrm{O}(n)$ si une liste de taille n est De Bruijn d'ordre p? Implémenter cette méthode en OCaml, en utilisant par exemple une liste chaînée cyclique.

On veut montrer l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour cela on considère le **graphe orienté de De Bruijn** dont les sommets sont les mots de longueurs $p-1$ et avec un arc de u à v si $u = b_1 m$ et $v = m b_2$, où b_1 et b_2 sont des bits.

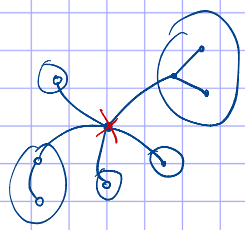
8. Dessiner le graphe de De Bruijn pour $p = 3$.
9. Montrer que ce graphe est eulérien et en déduire l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$.

TD Graphe : Définitions

I.

1) Soit G un graphe à n sommets, avec $n \geq 2$. Si tous les n degrés sont $\neq$, chaque sommet à son degré entre 0 et $n-1$, alors il existe un sommet de degré k, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le sommet de degré $n-1$ est relié à celui de 0 : Absurde !

2)



f = nb de feuilles.

Formules des degrés :

$$\sum \deg(v) = 2|E|$$

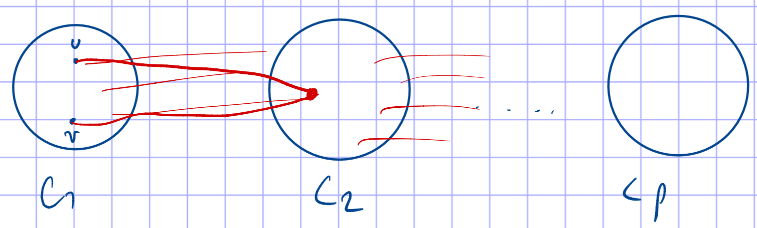
$$\underbrace{2017 + f + \dots}_{\geq 2 \times (n-f-1)} = 2|E| = 2 \times (n-1)$$

donc $2(n-1) \geq 2017 + f + 2 \times (n-f-1)$

$0 \geq 2017 - f$ d'où $f \geq 2017$.

4) Supposons G non-connexe $\Rightarrow$ G a $p > 1$ comp. connexes.

Mq $\bar{G}$ est connexe :



① Si u, v sont dans des composantes connexes $\neq$ alors $\{u, v\} \in \bar{G}$

② Sinon u, v sont dans la même comp. connexes, ainsi ils sont tous les deux reliés à un même point d'une autre compo. connexe.

II

1. les voisins de u, v sont disjoints :

Soit $\mathcal{V}(u) =$ voisins de u

$\mathcal{V}(v) =$ voisins de v

$$|V| \geqslant |\underbrace{\mathcal{V}(u) \cup \mathcal{V}(v)}_{\subseteq V}| = \underbrace{|\mathcal{V}(u)|}_{deg(u)} + \underbrace{|\mathcal{V}(v)|}_{deg(v)}$$

2. $$\sum_{(u,v) \in E} (deg(u) + deg(v)) \leqslant |V||E|$$

$= \sum_{u \in V} n(u) \, deg(u)$ où $n(u) =$ nb de fois que $deg(u)$ apparait dans $(*)$

$= deg(u)$.

II.

1) Soit G un graphe eulérien, il possède un tour eulérien c.

Soit x un sommet de G.

Par définition, c contient toutes les arêtes de G donc les $\deg(x)$ arêtes de x.

Quand on parcourt c, on arrive autant de fois en x qu'on en repart.

Donc $\deg(x) \equiv 0\ [2]$.

2). Si tous les sommets de G sont de degrés pair, $x_0 \in V$.

Comme ts les deg sont ≥ 2, il existe un cycle c_1 qui ne passe jamais 2x par la même arête

- Si $E \subset C_1$, c'est bon.
- Sinon, soit e une arête de G qui n'est pas dans C_1, dont une extrémité est ds C_1.

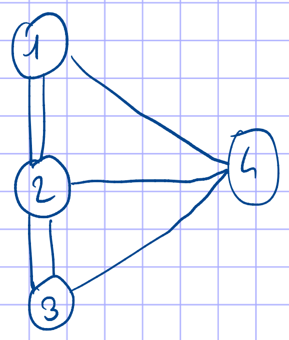
Soit $E(c_1)$ = arêtes de c_1.

$H = G - E(c_1)$

Tous les sommets de H sont de deg pair.

$H_1, \dots, H_p$ les composantes connexes de H

On itère.



aucun sommet de deg pair.

4) $\forall x \in V$,

$$\underbrace{\deg^+(x)}_{\text{degré sortant}} = \overbrace{\deg^-(x)}^{\text{entrant}}$$

5) * ordre 2 : 0011

* ordre 3 : 11101000

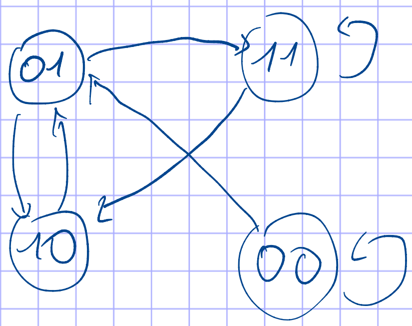
6) il y a 2^p à p bits.

La fonction qui à un indice i d'une suite de De Bruijn associe le mot de taille p commençant en i est une bijection.

Les 2^p indices.

7).

8).



9) $\forall v \in V$, $deg^+(v) = 2 = deg^-(v)$

Donc d'après 4), le graphe est eulérien