TD - Kruskal et Dijkstra

I Application des algorithmes

1. $a - b \to d - f \to b - d \to$
2. Impossible
3. b-e ($M = \{be\}$) ; c-f ($M = \{be, cf\}$); a-f-c-h ($M = \{be, af, ch\}$) ; d-g ($M = \{be, af, eh, dg\}$)

II Plus courts chemin et Dijkstra

III Plus large chemin

Habituellement, le poids d'un chemin est: $W_C = \sum_{e \in C} w(e)$
Ici: $l(C) = \min_{e \in C}(w(e))$
Supposons que C ne soit pas un plus large chemin de u à v. Alors $\exists C'$ chemin de u à v plus large ($l(C') > l(C)$) et alors

$$\min_{e' \in C'} w(e') > \min_{e \in C} w(e)$$

Soit $e = \{x, y\} \in C$ de poids min, si $\sigma = (V, E_T)$ considérons le graphe $T - e = (V, E_T - e)$ (l'arbre T dans lequelle on enlève e).
$T - e$ contient deux composantes connexes V_x et V_y tq $u \in V_x$ et $v \in V_y$.
C' relie $u \in V_u$ à $v \in V_v$, donc $\exists e'$, arrête de C' entre V_u et V_v.
$T - e + e'$ est un arbre couvrant car:

1. connexe : car contient une composante connexe
2. contient autant d'arrêtes que T $(n-1)$

$w(T - e + e') = w(T) - w(e) + w(e') > w(T)$ or $-w(e) + w(e') > 0$ car $w(e') \geq \min_{e' \in C} w(e') > \min_{e \in C} w(e)(= w(e))$

Absurde car T est maximum, d'où le résultat.

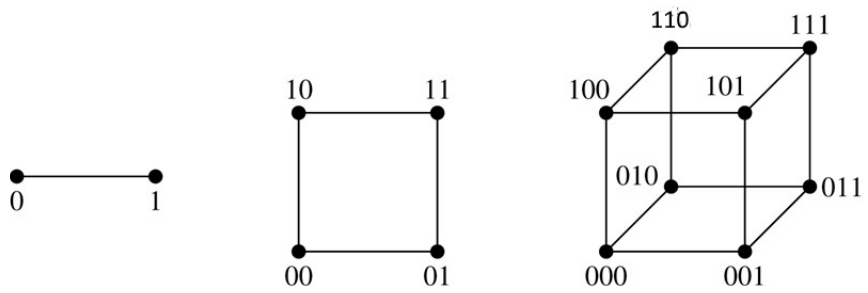
IV Questions sur les arbres couvrants de poids minimum

1. Soit T un arbre couvrant de poids minimum, supposons qu'un tel $e \in T$,
   $\exists e' \in C - e$ tq $e' \notin T$ (sinon C serait entièrement dans T)
   $T - e$ contient deux composantes connexes V_u et V_v. $C - e$ est un chemin de u à v donc possède une arrête e' dont les extremités sont dans V_u et V_v.
   $T - e + e'$ est un arbre couvrant (connexe et $(n-1)$ arrêtes) de poids $w(T) - w(e) + w(e') < w(T)$
   $\implies$ **Absurde**

V Mise a jour d'arbre couvrant de poids minimum

VI Hypercube

1.



Q_1 Q_2 Q_3

2. 2^n sommets, $deg(v) = n$ donc $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| \implies |E| = n2^{n-1}$