Exercices Oral Centrale

Exercice 1

1. Soit $A,\ B \in D_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a clairement que $A + \lambda B$ est de diagonale nulle, donc $A + \lambda B \in D_n$. On a clairement $D_n \subset E_n$, donc D_n est un sous-espace vectoriel de E. La dimension de D_n est $n(n-1)$ et une base de D_n est $(E_{i,j})_{i \neq j \in [\![1,n]\!]^2}$.

2. Soit $A,\ B \in T_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a clairement que $A + \lambda B$ est de trace nulle, donc $A + \lambda B \in T_n$. On a clairement $T_n \subset E_n$, donc T_n est un sous-espace vectoriel de E. La dimension de T_n est $n^2 - 1$ et une base est $(E_{i,j})_{i \neq j \in [\![1,n]\!]} \cup (E_{i,i} - E_{n,n})_{i \in [\![1,n-1]\!]}$

3. (a)

```python
def diag(n):
    return np.diag(np.random.rand(n))
```

(b)

```python
def matrice(A, B):
    return np.dot(A, B) - np.dot(B, A)
```

(c)

```python
n = 5
A = diag(n)
B = np.random.rand(n, n)
print(matrice(A, B))
```

La matrice obtenue est une matrice de diagonale nulle.

4. Soit A une matrice diagonale et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que $AB - BA \in D_n$ Notons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = (b_{i,j})$. On a alors si $i \in [\![1, b]\!]$, $(ab)_{i,j} = \lambda_i b_{i,i}$ De même, $(ba)_{i,i} = \lambda_i b_{i,i}$, d'où $(ab - ba)_{i,i} = 0$. Ainsi $AB - BA \in D_n$ 5. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir $Card(S_M) = 1$. En effet si $(A, B) \in S_M$, alors $(-B, A)$ et $(B, -A)$ appartiennent aussi à S_M Donc $|S_m = 1| \iff A = B = -A \iff A = B = (0)$ *i.e.* or si $A = B = (0)$, $AB - BA = (0)$, or si $M = (0)$ alors $S_M = \{(A, B) | AB = BA\} \neq \{0\}$. Ainsi il n'existe pas de M tel que $|S_M| = 1$

Exercice 2

1.

```python
univers = [-1, 1]

def temps(a, b):
n = -1
S_n = 0
while -a <= S_n <= b:
    S_n += univers[np.random.randint(0, 2)]
    n += 1
return n
```

2.

```python
def moyenne(a, b):
    return np.average(np.array([temps(5, 7) for _ in range(10000)]))
```

Après plusieurs exécutions, on obtient une moyenne fini, donc T prend des valeurs finies. C'est en tous cas la conjecture que l'on peut faire.