Jeux à deux joueurs

Quentin Fortier

February 21, 2023

Rappels sur les graphes : Définition

Dans ce cours, on considère des graphes orientés. Revoir aussi le cours de première année.

Définition

Un graphe orienté est un couple (V, E) où V est un ensemble fini de sommets et $E \subseteq V \times V$ est un ensemble fini d'arêtes.

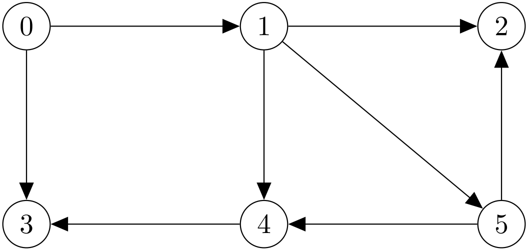
Rappels sur les graphes : Représentation

Représentations possibles d'un graphe $G = (V, E)$:

1. Matrice d'adjacence : par une matrice carrée `A` telle que `A[i][j]` vaut 1 si $(i, j) \in E$ et 0 sinon.
2. Liste d'adjacence : par une liste `L` telle que `L[i]` est la liste des sommets adjacents à i.
3. Dictionnaire d'adjacence : par un dictionnaire `D` telle que `D[i]` est la liste des sommets adjacents à i.

Exercice

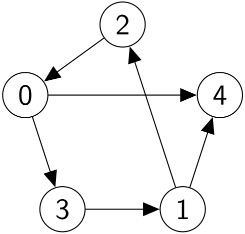
Représenter le graphe suivant des trois manières possibles (matrice d'adjacence, liste d'adjacence, dictionnaire d'adjacence).



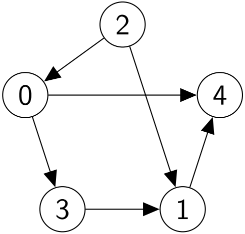
Rappels sur les graphes : Graphe acyclique

Définition

- Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.
- Un graphe est **acyclique** s'il ne contient pas de cycle.



Graphe ayant un cycle



Graphe acyclique

Rappels sur les graphes : Graphe acyclique

Définition

Un **puit** t est un sommet qui n'a pas de successeur (il n'existe pas d'arête allant vers t).

Exercice

Montrer que tout graphe acyclique possède un puit.

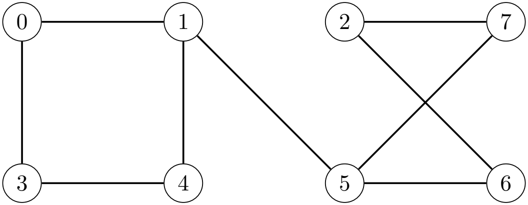
Rappels sur les graphes : Graphe biparti

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** s'il existe une partition $V = V_A \sqcup V_B$ telle que toute arête de E a une extrémité dans V_A et une extrémité dans V_B.

Question

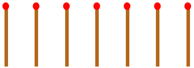
Montrer que le graphe ci-dessous est biparti, en donnant une partition de ses sommets.



Jeux à deux joueurs

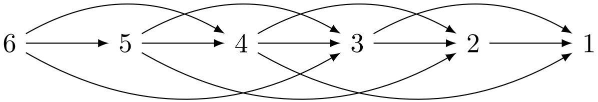
On s'intéresse à un jeu à deux joueurs (Alice et Bob), qui se joue chacun son tour. On suppose qu'Alice commence. Un joueur a perdu lorsqu'il n'a plus de coup possible.

Exemple (jeu de Nim) : il y a n allumettes. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 allumettes. Le joueur qui retire la dernière allumette a perdu.



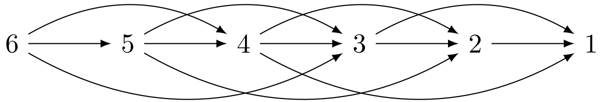
Exemple (jeu de Nim) : il y a n allumettes. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 allumettes. Le joueur qui retire la dernière allumette a perdu.

On peut représenter le jeu par un graphe où les sommets sont les configurations et les arêtes sont les coups possibles :

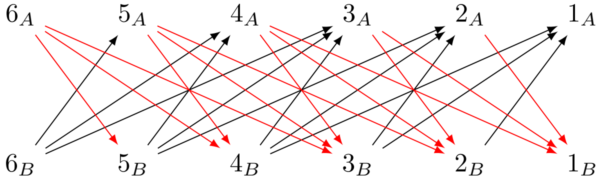


C'est un graphe acyclique, chaque chemin correspondant à une séquence de coups.

Jeux à deux joueurs



Pour caractériser parfaitement une situation de jeu, il faut savoir aussi qui est le joueur qui doit jouer. On peut donc considérer le graphe biparti où les sommets sont dupliqués, pour chaque joueur :



Les arêtes rouges correspondent aux coups possibles pour Alice.

Jeux à deux joueurs : Stratégie

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti acyclique, avec $V = V_A \sqcup V_B$.

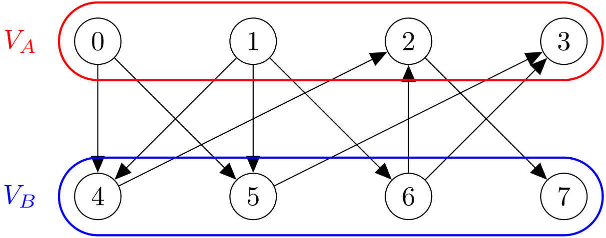
Définition

- Le jeu commence en un **sommet initial** $v \in A$.
- Une **partie** est un chemin commençant en v dont les arêtes sont choisies alternativement par Alice et Bob.
- L'ensemble P_A des puits de V_A sont les situations où Alice perd.
- Une **stratégie** pour Alice est une fonction $f : V_A \setminus P_A \to V_B$ telle que $\forall v \in V_A$, $(v, f(v)) \in E$.
  On définit une stratégie pour Bob de façon symétrique.
- Une **stratégie gagnante** pour Alice est une stratégie f qui permette à Alice de gagner, quel que soit la stratégie de Bob.

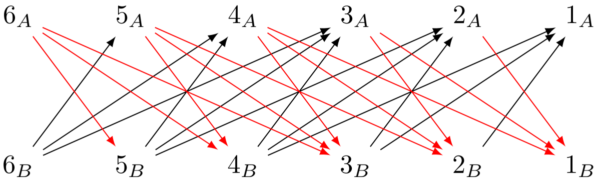
Les définitions sont similaires pour Bob, en échangeant A et B.

Exercice

Donner une stratégie gagnante pour Alice dans le jeu suivant, où le sommet initial est 0.



Jeux à deux joueurs : Stratégie



Exercice

On considère le jeu de Nim avec initialement n allumettes.

1. Montrer que si $n \equiv 1[4]$ alors Bob a une stratégie gagnante.
2. Montrer que si $n \not\equiv 1[4]$ Alice a une stratégie gagnante.

Jeux à deux joueurs : Attracteur

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti acyclique, avec $V = A \sqcup B$.

Définition

1. $v \in V$ est une **position gagnante** pour Alice si elle possède une stratégie gagnante pour une partie qui commence en v.
2. L'**attracteur** A d'Alice est l'ensemble des position gagnantes pour Alice.

Les définitions sont similaires pour Bob.

Exemple : l'attracteur d'Alice dans le jeu de Nim est l'ensemble des configurations où il reste n allumettes avec $n \not\equiv 1[4]$.

Jeux à deux joueurs : Attracteur

On peut calculer l'attracteur d'Alice de proche en proche :

- Soit $A_0 = T_B$ (gagnants pour Alice).
- Soit $A_1 = \{u \in V_A \mid \exists (u, v) \in E, v \in A_0\}$ l'ensemble des sommets de A qui permettent à Alice d'aller sur un sommet de A_0.
- Soit $A_2 = \{u \in V_B \mid \forall (u, v) \in E, v \in A_1\}$ l'ensemble des sommets de B qui mènent forcément vers un sommet de A_1.
- ...

De façon générale :

- Si k est pair : $A_{k+1} = \{u \in V_B \mid \forall (u, v) \in E, v \in A_k\}$
- Si k est impair : $A_{k+1} = \{u \in V_A \mid \exists (u, v) \in E, v \in A_k\}$

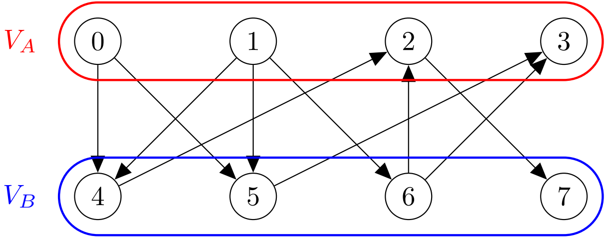
(A_k est l'ensemble des positions gagnantes pour Alice en k coups)
S'il y a n sommets, un chemin possède au plus $n - 1$ arêtes d'où :

$$A = \bigcup^{n-1} A_k$$

Jeux à deux joueurs : Attracteur

Exercice

Donner l'attracteur d'Alice pour le jeu ci-dessous, où $V_A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $P_A = \{3\}$.



Jeux à deux joueurs : Attracteur

Un sommet v est un attracteur dans l'un des trois cas suivants :

- $v \in P_B$.
- $v \in V_A$ et il existe un attracteur w tel que $(v, w) \in E$.
- $v \in V_B$ et pour tout $(v, w) \in E$, w est un attracteur.

Exercice

Écrire une fonction `attracteurs(G, fA)` renvoyant la liste des attracteurs d'Alice dans le graphe `G` représenté par dictionnaire d'adjacence, où `fA` est une fonction indiquant si un sommet appartient à V_A.

Jeux à deux joueurs : Attracteur

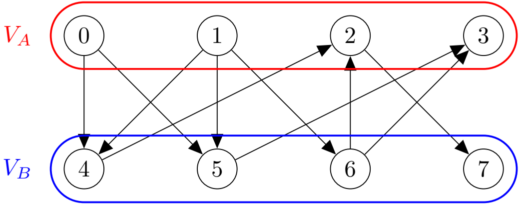
```python
def attracteurs(G, fA):
    d = {} # d[v] = True si v est un attracteur
    def aux(v): # détermine si v est un attracteur
        if v not in d:
            succ = [aux(w) for w in G[v]]
            if len(G[v]) == 0:
                d[v] = not fA(v)
            elif fA(v):
                d[v] = any(succ)
            else:
                d[v] = all(succ)
        return d[v]
    return [v for v in G if aux(v)]
```

`any(L)` détermine si au moins un élément de `L` est vrai.
`all(L)` détermine si tous les éléments de `L` sont vrais.
<u>Exercice</u> : Réimplémenter `any` et `all`.

Jeux à deux joueurs : Attracteur

Exercice

Utiliser la fonction `attracteurs(G, fA)` pour trouver les attracteurs d'Alice dans le jeu ci-dessous.




```
G = {
    0: [4, 5], 1: [4, 5, 6], 2: [7], 3: [],
    4: [2], 5: [3], 6: [3], 7: []
}
attracteurs(G, lambda v: v < 4)
```

Jeux à deux joueurs : Attracteur

Exercice

Utiliser la fonction `attracteurs(G, fA)` pour trouver les attracteurs d'Alice dans le jeu de Nim (avec n allumettes).

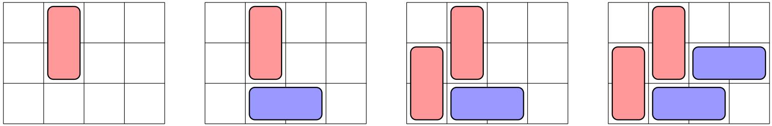
```python
def nim(n):
    G = {}
    for i in range(1, n + 1):
        for j in ['A', 'B']:
            if (i, j) not in G:
                G[(i, j)] = []
            for k in range(i + 1, i + 4):
                if k <= n:
                    G[(i, j)].append((k, 'A' if j == 'B' else 'B')
    return G

attracteurs(nim(9), lambda v: v[1] == 'A')
```

Jeux à deux joueurs : Jeu du domineering

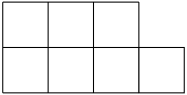
Le jeu du domineering est un jeu de plateau où Alice place un domino vertical et Bob un domino horizontal. Un joueur qui ne peut plus jouer perd.

<u>Exemple de partie</u> :

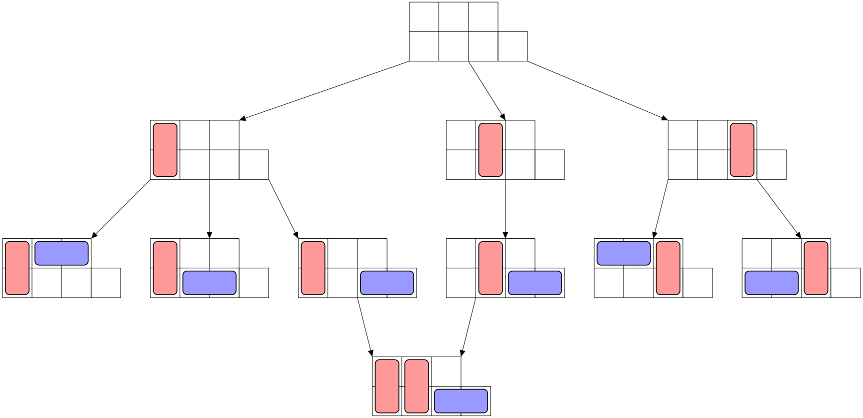


Exercice

1. Dessiner le graphe des configurations pour le jeu de domineering sur le plateau ci-dessous. Il n'est pas nécessaire de dupliquer les configurations car on sait quel joueur doit joueur (en comptant le nombre de dominos).
2. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante.
3. Trouver l'attracteur d'Alice.



Jeux à deux joueurs : Jeu du domineering



Jeux à deux joueurs : Match nul

Dans certains jeux (morpion...), il peut y avoir match nul.
Il faut alors spécifier trois types de puits : gagnants pour Alice, gagnants pour Bob et match nul.

Un sommet v est alors attracteur si un des cas suivants est vérifié :

- v est un puit gagnant pour Alice.
- $v \in V_A$ et il existe un attracteur w tel que $(v, w) \in E$.
- $v \in V_B$ et pour tout $(v, w) \in E$, w est un attracteur.