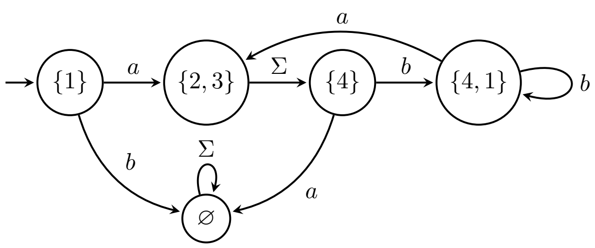
TD - Automates

I Algorithmes de déterminisation

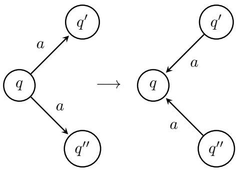
1. 

2. $L = a((b|a)bb^*a)^*$

II Clôture des langages reconnaissables

1. Soit $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ tq $L = L(A)$

   Soit $A' = (\Sigma, Q, I, F, \delta')$ où $\delta'(q, a) = \{q' | \delta(q', a) = q\}$

   - Mq : $m \in L(\tilde{A}) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow m \in \widetilde{L(A)}$

     $m = m_1...m_n \in L(\tilde{A})$

     $\Leftrightarrow \exists$ chemin $q_0 \leftarrow q_1... \leftarrow q_n$ dans $\tilde{A}$

     $\Leftrightarrow \exists$ chemin $q_0 \rightarrow q_1... \rightarrow q_n$ dans A

     $\Leftrightarrow m_1...m_n \in L(A)$

     $\Leftrightarrow \tilde{m} \in L(A)$

     $\Leftrightarrow \in \widetilde{L(A)}$

2. Soit $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ tq $L = L(A)$

   Soit $A' = (\Sigma, Q, I, F', \delta)$ où F' est l'ensembles des états co-accessibles dans A,

   $m \in L(A') \Leftrightarrow m \in Pref(L)$

   Soit $A'' = (\Sigma, Q, I', F, \delta)$ où I' est l'ensembles des états accessibles dans A

   Soit $A''' = (\Sigma, Q, I', F', \delta)$

3. - H_n : "Si e est une expression rationnelle de taille n alors il existe une expression rationnelle pour $Pref(e)$"

   - H_1, $e = \varnothing, \varepsilon, a \in \Sigma$

     $Pref(\varnothing) = \varnothing$, $Pref(\varepsilon) = \varepsilon$, $Pref(a) = \varepsilon|a$

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons H_k, $\forall k \leq n$

     Soit e expression rationnelle de taille $n + 1$:

     (a) Si $e = e_1|e_2$: $Pref(e) = Pref(e_1)|Pref(e_2)$, une expression rationnelle

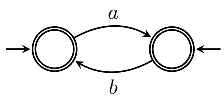
     (b) Si $e = e_1e_2$: $Pref(e) = Pref(e_1)|e_1Pref(e_2)$, une expression rationnelle

     (c) Si $e = e_1^*$: $Pref(e) = e1^*Pref(e_1)$, une expression rationnelle

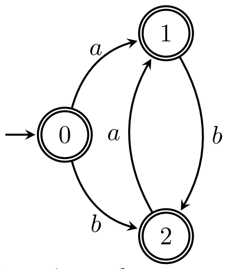
   - $Suff(L) = \widetilde{Pref(\tilde{L})}$, or $\tilde{L}$ est rationnelle d'apres cours, donc $\widetilde{Pref(\tilde{L})}$ est également rationnelle d'après ce que l'on vient de démontrer.

   - $Fact(L) = Suff(Pref(L))$

III Reconnaissable ou non ?

1. 

   Ainsi, il existe un automate A_1 tel que $L(A_1) = L_1$ donc L_1 est reconnaissable.

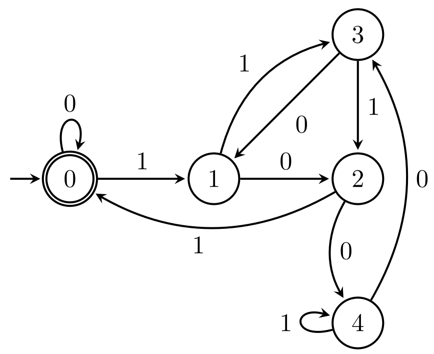
2. 

   De même, il existe un automate A_2 tel que $L(A_2) = L_2$ donc L_2 est reconnaissable.

3. Même démo que pour $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$:
   $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\} = L_3 \cap a^* b^* \implies L_3$ non reconnaissable.

4. $$\begin{array}{ccc} \underline{m_1 \ldots m_n 0}_2 & = & 2 \times \underline{m_1 \ldots m_n}_2 \\ \equiv & & \equiv \\ k[5] & \longrightarrow & 2k[5] \end{array}$$

   $$\begin{array}{ccc} \underline{m_1 \ldots m_n 1}_2 & = & 2 \times \underline{m_1 \ldots m_n}_2 + 1 \\ \equiv & & \equiv \\ k[5] & \longrightarrow & 2k+1[5] \end{array}$$

   $\implies$ 

5. Supposons L_5 reconnaissable,
   Soit n l'entier donné par le Lemme de l'Étoile,
   Il existe p, nombre premier supérieur à n
   Soit $u = a^p$. $u \in L_5$ et $|u| \geq n$ donc :
   $\exists x, y, z \in \Sigma^*$ tq $u = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$
   $\exists i, jk$ tq $x = a^i$, $y = a^j$, $z = a^k$
   $xy^{i+k}z = a^i a^{j(i+k)} a^k = a^{(i+k)(1+j)} \notin L_5$ car $k \geq 2$
   Absurde, donc L_5 non reconnaissable.

IV Algorithmes sur les automates

V Oral ENS info

VI Algorithme KMP

VII Résiduel