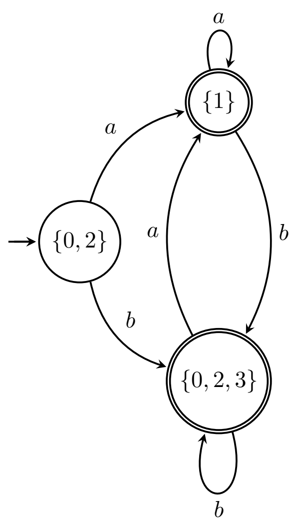
TD Rationnel $\Longleftrightarrow$ Reconnaissable

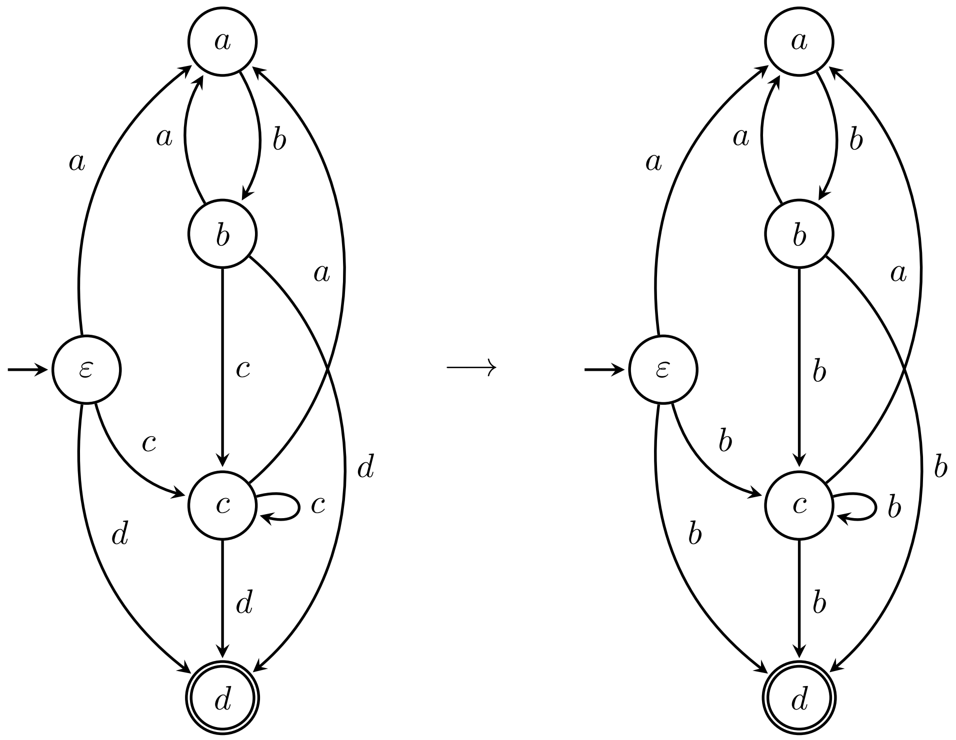
I Exercice CCP

1.



II Langage local, linéaire, automate de Glushkov

1. — Linéarisation : $L = (ab + c)^* d$
   — $P(L) = \{a, c, d\}$
   — $S(L) = \{d\}$
   — $F(L) = \{ab, ba, ca, bd, cd, bc, cc\}$



III Stabilité des langages rationnels

1. Non, $\underbrace{\varnothing}_{\text{rat.}} \subset \underbrace{\{a^n b^n \to n \in \mathbb{N}\}}_{\text{non-rat.}}$.
2. Non plus, $\underbrace{\{a^n b^n \to n \in \mathbb{N}\}}_{\text{non-rat.}} \subset \underbrace{\Sigma^*}_{\text{rat.}}$.

3. Oui, par définition d'un langage rationnel.
4. Non, $L = \{\text{palyndrome}\}$ non rat. mais $L^* = \Sigma^*$ est rationnel.
5. Oui, voir démonstration cours (inversé états finals et initiaux).
6. Oui, par récurrence et stabilité d'un langage par union.
7. Non, $\cup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\{a^k b^k\}}_{\text{rat.}} = \underbrace{\{a^n b^n \to n \in \mathbb{N}\}}_{\text{non-rat.}}$.
8. Oui, car $\cap L_k =$ Complementaire $\cup$ complementaire L_k (par 5 et 6).
9. Non, par l'absurde.

IV Calcul des ensembles $P(L)$, $S(L)$ et $F(L)$

V Reconnaissable $\implies$ rationnel avec le lemme d'Arden

1. — Analyse :

$$\begin{aligned} L &= AL \cup B \\ &= A(AL \cup B) \cup B \\ &= A^2 L \cup AB \cup B \\ &= A^k L \cup A^{k-1} B \cup ... AB \cup B \\ \forall k,\ L &= \cup_{i=0}^{k-1} (A^i B) \cup A^k L \\ \forall i,\ A^i B &\subset L \end{aligned}$$

   Donc $A^* B \subset L$

   — Finir de recopier récurrence...

2.

$$L_0 = aL_1 \cup bL_0 \cup \varepsilon \quad (1)$$
$$L_1 = aL_2 \quad (2)$$
$$L_2 = \varepsilon \cup bL_0 \quad (3)$$

Remplacer (2) dans (1) : L
Remplacer dans (3) : L
Lemme d'Arden $\implies$ $L_0 = (a^2 b \cup b)^* (a^2 \cup \varepsilon)$