随机过程

第一章 预备知识

§1.1 概率空间

• 样本空间：给定一个非空集合Ω，若它包含了所研究随机试验的所有可能结果ω，则称之为样本空间

• 事件域/σ代数：F是Ω的部分子集构成的集合，若F满足如下三点，则称之为事件域/σ-代数

花体F $\mathcal{F}$

① $\Omega \in F$

② $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$ （逆运算封闭）

③ $A_i \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ （可列并运算封闭）

F中的元素，称之为随机事件。是样本空间的子集。

• 概率公理化定义：

概率：$F \to [0,1]$上的函数P是概率，若满足如下条件：

① 非负性：$\forall A \in F$，$P(A) \geq 0$

② 规范性：$P(\Omega) = 1$

③ 可列可加性：当$A_i \in F$，且A_i之间互不相容（交集为空），则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

可测空间：(Ω, F)，F对可列交运算也封闭。

概率空间：(Ω, F, P)

• 条件概率：

两个随机事件A, B，且$P(B) > 0$，则在B发生的条件下，A发生的概率：$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

乘法公式：若$P(A_1A_2\cdots A_n) > 0$，则 $P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) = P(A_1A_2\cdots A_n)$

全概率公式：设B_i，$i=1,2,\cdots,n$是Ω的一个分割，即$B_i \cap B_j = \phi$，$\Omega = \sum_{k=1}^{n} B_k$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

贝叶斯公式：$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$

§1.2 随机变量及其分布

• 随机变量：给定概率空间(Ω, F, P)，定义在样本空间上的实值函数$X(\omega)$。

如果$X(\omega)$满足 $\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in F$，则该函数$X(\omega)$是随机变量。

• 随机变量X即为样本空间到实数集的映射。 $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$，即满足$X(\omega) \leq x$的所有$\omega$的集合，它是一个随机事件，可简写为$\{X \leq x\}$，它$\in F$，就保证P有意义，因为P的定义域是F

Date

·分布函数：给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及其上的一个随机变量 X，

X的分布函数 $F(x) = P\{X \le x\}$，$x \in R$，也可写作 $F_X(x)$

·性质：① 有界 $0 \le F(x) \le 1$ $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$

② 单调不降 $\forall x_1 < x_2$，$F(x_1) \le F(x_2)$

③ 右连续 $F(x+0) = F(x)$

离散型随机变量：$p_i = P(X = x_i)$ 为X的概率分布列。分布函数 $F(x) = \sum\limits_{x_i \le x} P(X = x_i)$

数字特征：$E(X^k) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i^k p_i$ $(k \ge 1)$ 是X的k阶原点矩。当k=1时是期望

$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i$ 是X的方差

常见分布：① 二项分布：$b(n,p)$ $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$ n次试验的成功次数

② 几何分布：(0-1试验中，第一次成功所需次数) $X \in \{1,2,3,\cdots\}$ $p_k = p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$

③ 泊松分布（强度为λ） $p_k = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$

连续型随机变量：

若存在非负函数 $f(x)$ 使X的分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，$f(t)$ 是概率密度函数(pdf)

$F'(x) = f(x)$

·数字特征：$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k \cdot f(x)dx$ $f(x)dx$ 是概率

·常见分布：① 均匀分布：$U(a,b)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

② 指数分布：$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ 参数 $\lambda > 0$ 无记忆性

③ Γ分布（大写的γ）

④ 正态分布：$N(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 标准正态分布：$N(0,1)$

·多维随机变量：

同一概率空间中的多个随机变量：$X_1, X_2, X_3, \cdots X_n$，称 $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是n维随机变量（向量）

·特别地，若n=2，(X_1, X_2) 可写成更有辨识度的 (X, Y)

联合分布函数：$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$（二维）

边缘分布函数：$F_X(x) = P\{X \le x\}$，$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$

联合概率密度：$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dxdy$

边缘概率密度：$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$