Задача

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2, t) \qquad 0 < x_{1,2} < 1 \qquad 0 < t \ll T$$

$$u(x,t) = (x_1^4 + x_2^4)t^2 + x_1 + x_2$$

Необходимо найти численное решение этого уравнения, то есть $u = u(x_1, x_2, t)$ при заданных краевых условиях

$$\begin{cases} u(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t) \\ u(1, x_2, t) = \mu_2(x_2, t) \\ u(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t) \\ u(x_1, 1, t) = \mu_4(x_1, t) \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \end{cases}$$

Найдем для данных функций $u(x_1, x_2, t)$ функцию $f(x_1, x_2, t)$ и начальные, а также граничные условия:

$$f(x_1, x_2, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2t(x_1^4 + x_2^4) - 12t^2x_1^2 - 12t^2x_2^2$$

$$\begin{cases} \mu_1(x_2, t) = (x_1^4)t^2 + x_2 \\ \mu_2(x_2, t) = (1 + x_2^4)t^2 + 1 + x_2 \\ \mu_3(x_1, t) = (x_1^4)t^2 + x_1 \\ \mu_4(x_1, t) = (x_1^4 + 1)t^2 + x_1 + 1 \\ u_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Неявная схема переменных направлений

Заменим $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ разностными аналогами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = L_1(u) = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = L_2(u) = \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2}$$

Имеем начальный слой (n), для нахождения решения на $(n+1)$ слое вводится промежуточный слой $\left(n+\frac{1}{2}\right)$, на котором так же вычисляет значение $y^{n+\frac{1}{2}}$, которое формально можно рассматривать как значение y при $t = t_n + \frac{\tau}{2}$. Переход от слоя (n) к слою $(n+1)$ совершается в два этапа с шагом $\frac{\tau}{2}$:

$$\frac{y_{i,j}^{n+1/2} - y_{i,j}^{n}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{y_{i+1,j}^{n+1/2} - 2y_{i,j}^{n+1/2} + y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n} - 2y_{i,j}^{n} + y_{i,j-1}^{n}}{h_2^2} + f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^{n+1/2}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{y_{i+1,j}^{n+1/2} - 2y_{i,j}^{n+1/2} + y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n+1} - 2y_{i,j}^{n+1} + y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} + f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

Вычитая из1-го уравнения 2-е, получим равенство, связывающее значения $y_{i,j}^{n+1/2}$ со значениями искомой сеточной функции y на слоях (n) и $(n+1)$:

$$y_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\left(y_{i,j}^{n+1} + y_{i,j}^{n}\right)}{2} - \frac{\tau}{4} \cdot \Lambda_2\left(y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^{n}\right)$$

которое должно выполняться на всех узлах сетки вплоть до граничных. Это равенство позволяет получить граничные условия для $y_{i,j}^{n+1/2}$:

$$:y(x,0) = u_0(x)$$

$$y_{i,j}^{n+1} = \mu_{i,j}^{n+1}$$

$$y_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mu_{i,j}^{n+1} + \mu_{i,j}^{n}\right) - \frac{\tau}{4} \cdot \Lambda_2\left(\mu_{i,j}^{n+1} - \mu_{i,j}^{n}\right)$$

$$i_{1,2} = 0; \quad i_{1,2} = N_{1,2}$$

Выведем формулы для решения этой задачи:

Для первого уравнения перенесем все неизвестные $y_{i,j}^{n+1/2}$ в левую часть, а $y_{i,j}^{n}$ и $f_{i,j}^{n}$ в правую:

$$\frac{2}{\tau}y_{i,j}^{n+1/2} - \frac{y_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2y_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + y_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} = \frac{\tau}{2}y_{i,j}^{n} + \frac{y_{i,j+1}^{n} - 2y_{i,j}^{n} + y_{i,j-1}^{n}}{h_2^2} + f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

Следовательно, это равенство можно переписать в виде:

$$\frac{1}{h_1^2}\cdot y_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\cdot\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{\tau}\right)\cdot y_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_1^2}\cdot y_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -F_{i,j}$$

Где:

$$F_{i,j} = \frac{2}{\tau}\cdot y_{i,j}^{n} + \frac{1}{h_2^2}\cdot y_{i,j+1}^{n} - \frac{2}{h_2^2}\cdot y_{i,j}^{n} + \frac{1}{h_2^2}\cdot y_{i,j-1}^{n} + f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

Для второго уравнения получаем:

$$\frac{2}{\tau}y_{i,j}^{n+1} - \frac{y_{i,j+1}^{n+1} - 2y_{i,j}^{n+1} + y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} = \frac{2}{\tau}y_{i,j}^{n+1/2} + \frac{y_{i+1,j}^{n+1/2} - 2y_{i,j}^{n+1/2} + y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

Тогда:

$$\frac{1}{h_2^2}\cdot y_{i,j+1}^{n+1} - 2\cdot\left(\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{\tau}\right)\cdot y_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{h_2^2}\cdot y_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} = -F_{i,j}$$

Где:

$$F_{i,j} = \frac{2}{\tau}\cdot y_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{h_1^2}\cdot y_{i+1,j}^{n+1/2} + \frac{2}{h_1^2}\cdot y_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{h_1^2}\cdot y_{i-1,j}^{n+1/2} + f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, n = \overline{0, M - 1}$$