Задача

Дано квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t \ll T$$

$$\varphi(u) = u^3 \qquad u(x,t) = x^2 \cdot t^2 + x + 1$$

Необходимо найти численное решение уравнения, то есть функцию $u = u(x,t)$ при заданных краевых условиях

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(1,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Найдем для данных функций $\varphi(u)$ и $u(x,t)$ функцию $f(x,t)$ и начальные, а также граничные условия:

$$f(x,t) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6tx^2 * (t^2 * x^2 + x + 1)^2 - 2t^2$$

$$\begin{cases} u_0(x) = x + 1 \\ \mu_1(t) = 1 \\ \mu_2(t) = t^2 + 2 \end{cases}$$

Разностная схема. Метод Ньютона.

Введем сеточную функцию $\omega_{h\tau}$:

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{x_i = ih, t_J = j\tau; \quad i = 0,1,\dots,N;\ j = 0,1,\dots,M; h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{1}{M}\}$$

На данной сеточной функции нелинейную относительно $y_{i,j+1}$ разностную схему

$$\frac{\varphi(y_{i,j+1}) - \varphi(y_{i,j})}{\tau} = (y_{\bar{x}x})_{i,j+1} + f_{i,j}$$

Для определения решения $y_{i,j+1}$ на новом слое мы имеем нелинейное уравнение

$$\varphi(y_{i,j+1}) - \tau(y_{\bar{x}x})_{i,j+1} - \tau f_{i,j} = \varphi(y_{i,j})$$

Используем для его решения метод Ньютона

$$\varphi(y_{i,j+1}^k) = -\varphi'(y_{i,j+1}^k) \cdot (y_{i,j+1}^{k+1} - y_{i,j+1}^k)$$

$$\varphi(y_{i,j+1}^k) + \varphi'(y_{i,j+1}^k) \cdot (y_{i,j+1}^{k+1} - y_{i,j+1}^k) - \tau \cdot ((y_{\bar{x}x})_{i,j+1}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) = \varphi(y_{i,j}^{k+1})$$

При этом изменяются граничные условия:

$$\begin{cases} y_{0,j}^{k+1} = \mu_1(t_{j+1}) \\ y_{N,j}^{k+1} = \mu_2(t_{j+1}) \end{cases}$$

Метод Ньютона продолжает работу пока не выполниться:

$$\left|y_{i,j+1}^{k+1} - y_{i,j+1}^{k}\right| \ll \varepsilon.$$

Метод встроим в прогонку, которая устойчива при:

$$\varphi'(y) \geq 0$$

Для этого перепишем уравнение в виде:

$$\varphi'\left(y_{i,j+1}^{k}\right) \cdot \left(y_{i,j+1}^{k+1}\right) - \tau \cdot (y_{\bar{x}x})_{i,j+1}^{k+1} = \varphi\left(y_{i,j}^{k+1}\right) + \varphi'\left(y_{i,j+1}^{k}\right) y_{i,j+1}^{k} - \varphi\left(y_{i,j+1}^{k}\right) + \tau \cdot f_{i,j}^{k+1}$$

$$F_{i,j}^{k} = \varphi'\left(y_{i,j+1}^{k}\right) \cdot y_{i,j+1}^{k} - \varphi\left(y_{i,j+1}^{k}\right) + \varphi\left(y_{i,j}^{k+1}\right) + \tau \cdot f_{i,j}^{k+1}$$

$$\varphi'\left(y_{i,j+1}^{k}\right) \cdot \left(y_{i,j+1}^{k+1}\right) + \frac{\tau}{h^2} \cdot y_{i+1,j+1}^{k+1} - \frac{2 \cdot \tau}{h^2} y_{i,j+1}^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} \cdot y_{i-1,j+1}^{k+1} = -F_{i,j}^{k}$$

$$\frac{\tau}{h^2} \cdot y_{i+1,j+1}^{k+1} - \left(\varphi'\left(y_{i,j+1}^{k}\right) + \frac{2 \cdot \tau}{h^2}\right) \cdot y_{i,j+1}^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} \cdot y_{i-1,j+1}^{k+1} = -F_{i,j}^{k}$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

Коэффициенты метода прогонки имеют вид:

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{\tau}{h^2} \\ B = \varphi'\left(y_{i,j+1}^{k}\right) + \dfrac{2 \cdot \tau}{h^2} \\ C = \dfrac{\tau}{h^2} \end{cases}$$

Данная схема устойчива в С и сходится со скоростью $O(h^2 + \tau)$.