ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.1

Необходимые и достаточные условия существования безусловного и условного экстремума.

1. Необходимые и достаточные условии безусловного экстремума.

Постановка задачи

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на множестве $X \in R^n$. Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^e \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на R^n:

$$f\left(x^e\right)=\min_{x\in R^n} f\left(x\right);\ f\left(x^e\right)=\max_{x\in R^n} f\left(x\right) \qquad (1)$$

Стратегия решения задачи

Находятся точки $x^e \in R^n$ локальных экструмумов с помощью необходимых и достаточных условий первого и второго порядков. Вычисляются значения $f(x^e)$ функции в найденных точках экстремумов.

- **Необходимые условия экстремума первого порядка.**

Пусть точка $x^e \in R^n$ - точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дифференцируема в точке x^e. Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x^e равен нулю т.е. $\nabla f(x^e)=0.$ (2)

- **Необходимое условие экстремума второго порядка.**

Пусть точка $x^e \in R^n$ точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^e. Тогда матрица Гессе $H(x^e)$ функции $f(x)$, вычисленной в точке x^e является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной) т.е.

$$H(x^e)\ge 0, \quad (H(x^e)\le 0) \qquad (3)$$

- **Достаточные условия экстремума.**

Пусть функция $f(x)$ в точке $x^e \in R^n$ дважды дифференцируема, её градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной) т.е.

$$\nabla f(x^e)=0 \text{ и } H(x^e)>0, (H(x^e)<0) \qquad (4)$$

Тогда точка x^e есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n.

Определение 1. Рассмотрим определитель матрицы Гессе $H(x^e)$ вычисленной в стационарной точке x^e

$$\det H(x^e)=\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

1. Определители $\Delta_1=h_{11}, \Delta_2=\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n=\begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$ называются *угловыми минорами.*
2. Определители m-го порядка $(m<n)$, получающиеся из определителя матрицы $H(x^e)$ вычеркиванием каких либо $(n-m)$ строк и $(n-m)$ столбцов с одними и теми же номерами, называются *главными минорами*.

Для проверки выполнения достаточных условий экстремума и необходимых условий второго порядка используются два способа.

<u>Первый способ</u> (с помощью угловых и главных миноров).

А. Критерий проверки достаточных условий экстремума. (критерий Сильвестра).

1. *Для того, чтобы матрица Гессе* $H(x^e)$ *была положительно определенной (* $H(x^e)>0$ *) и точка* x^e *являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны:*

$$\Delta_1>0, \Delta_2>0,\ldots,\Delta_n>0. \qquad (5)$$

2. *Для того, чтобы матрица Гессе* $H(x^e)$ *была отрицательно определенной (* $H(x^e)<0$ *) и точка* x^e *являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного :*

$$\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0,\ldots,(-1)^n\Delta_n>0. \qquad (6)$$

Б. Критерий проверки необходимых условий экстремума второго порядка.

1. *Для того чтобы матрица Гессе* $H(x^e)$ *была положительно полуопределенной (*$H(x^e)\geq 0$*) и точка* x^e *может быть являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гессе были неотрицательны.*

2. *Для того чтобы матрица Гессе* $H(x^e)$ *была отрицательно полуопределенной (*$H(x^e)\leq 0$*) и точка* x^e *возможно являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка были положительны.*

<u>Второй способ</u> (с помощью собственных значений матрицы Гессе).

Собственные значения $\lambda_i, i=1,\ldots,n$ *матрицы* $H(x^e)$ *размера (*$n\times n$*) находятся как корни характеристического уравнения(алгебраического уравнения* n *-й степни):*

$$\left|H(x^e)-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} h_{11}-\lambda & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22}-\lambda & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

В этом случае, для того чтобы точка экстремума была минимумом *все собственные значения должны быть положительными* т.е. $\forall\lambda_i>0, i=1,\ldots,n$.

Замечание1. Собственные значения вещественной симметричной матрицы $H(x^e)$ *вещественны.*

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка в форме (2) и найти стационарные точки x^e в результате решения системы n в общем случае нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Для численного решения могут быть использованы методы простой итерации, Зейделя, Ньютона.

Шаг 2. В найденных стационарных точках x^e проверить выполнение достаточных, а если они не выполняются, то необходимых условий второго порядка с помощью одного из двух способов.

Шаг 3. Вычислить значения $f(x^e)$ в точках экстремума.

ЗАДАНИЯ

1. **Найти экстремум функций:**

1.1. $f(x)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_1+x_1x_2+2x_3$;

1.2. $f(x)=x_1^3+x_2^2+x_3^2-3x_1+x_2x_3+6x_2+2$;

1.3. $f(x)=-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-4x_3^2$;

1.4. $f(x)=x^3-2x^2+x+1$;

1.5. $f(x) = (x_1^2 - x_2)^4 + (x_2^2 - x_1)^2$ *;*

1.6. $f(x) = 5x^6 - 36x^5 - \dfrac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36$ *;*

1.7. $f(x) = \sum_{i=1}^{3}(x_i - 1)^2 - \sum_{i=2}^{3} x_i x_{i-1}$ *;*

1.8. $f(x) = \sum_{i=1}^{2}\left(100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2\right)$ *;*

1.9. $f(x) = (x_1^2 - 4x_2)^2 + (x_2^2 - 2x_1 + 4x_2)^2$

На множестве R^n .

2. **Записать необходимые условия экстремума первого порядка.**
3. **Проверить выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке двумя способами.**
4. **Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.**