ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТОМОГРАФИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

Radon, J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwärte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. – Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl., 69 (1917), pp. 262-277.

Компьютерная томография

(А. Кормак, Г.Н. Хаунсфилд) – Нобелевская премия (1979)

Биохимические приложения КТ

(А. Клуг) – Нобелевская премия (1982)

ПРИЛОЖЕНИЯ

- медицинская диагностика и визуализация
- электронная микроскопия
- диагностика плазмы
- гравиметрия
- геология
- сейсмология
- неразрушающий контроль качества изделий
- оптика
- химия
- радиолокация
- астрономия и астрофизика

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000.

[2] *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.

[3] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГТУ, 1994.

[4] *Захарова Т.В., Шестаков О.В.* Вейвлет-анализ и его приложения. М.: ИНФРА-М, 2012.

[5] *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

[6] *Сизиков В.С.* Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001.

[7] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1987.

[8] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.

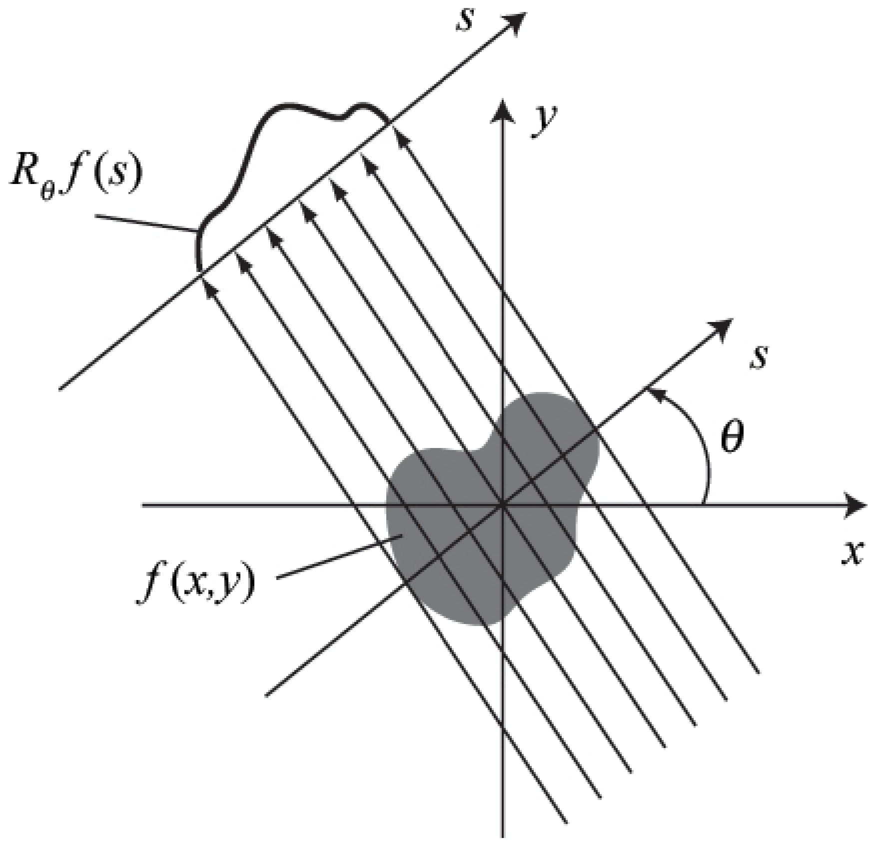
[9] *Троицкий И.Н.* Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989.

[10] *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.

[11] *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.

Пример (рентгенодиагностика)

- Тонкий линейный пучок рентгеновских лучей просвечивает плоское сечение тела.
- Изменение интенсивности излучения в результате прохождения через тело фиксируется детектором.
- Подобные измерения проводятся для всевозможных направлений просвечивающего пучка.
- В результате обработки данных эксперимента получается двумерное изображение в плоскости сечения тела.



Пусть функция $f(x, y) \in L_2(R^2)$ – коэффициент поглощения (ослабления) рентгеновских лучей в точке (x, y) рассматриваемого плоского сечения $\Omega \subset R^2$.

При этом

$$\operatorname{supp} f(x, y) = \Omega.$$

Тогда относительное уменьшение интенсивности излучения J на малом отрезке Δl в точке (x, y) равно

$$\Delta J = f(x, y)\Delta l.$$

Пусть J_0 – начальная интенсивность пучка,

J_L – интенсивность пучка после его прохождения через тело.

Имеем

$$\frac{dJ}{J} = -f(x, y)dl$$

В результате

$$\frac{J_L}{J_0} = \exp\left(-\int_L f(x, y)dl\right),$$

где L – прямая в плоскости сечения, совпадающая с направлением пучка.

Так как величина J_L / J_0 измеряется для всевозможных прямых, лежащих в плоскости сечения, то в результате рассматриваемая проблема сводится к задаче определения функции $f(x, y)$ по ее интегралам

$$R_L[f] = \int\limits_L f(x, y)dl,$$

взятым по каждой из прямых L, лежащих в плоскости сечения.

Преобразование Радона и его свойства

Нормальное уравнение прямой на плоскости:

$$L: \quad x\cos\theta + y\sin\theta = s,$$

где $|s|$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую L, а θ – угол между осью Ox и перпендикуляром.

Преобразование Радона R – это отображение функции $f(x,y)$, заданной на плоскости, во множество ее интегралов по всем прямым $L(s,\theta)$, лежащим в этой плоскости:

$$R[f](s,\theta) = \int\limits_{L(s,\theta)} f(x,y)\,dl.$$

Если уравнение прямой задано в параметрическом виде

$$x = s\cos\theta - t\sin\theta,$$

$$y = s\sin\theta + t\cos\theta$$

тогда

$$R[f](s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s\cos\theta - t\sin\theta, s\sin\theta + t\cos\theta\right)dt =$$

$$= \int_{R^2} f(x,y)\delta\left(x\cos\theta + y\sin\theta - s\right)dxdy,$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака одного переменного.

Свойства преобразования Радона

1) *Однородность*:

$R[f](s,\theta)$ – однородная функция степени 1, т.е. для $\alpha \neq 0$

$$R[f](\alpha s, \alpha\theta) = \frac{1}{|\alpha|} R[f](s,\theta)$$

2) *Четность*:

$$R[f](-s,-\theta) = R[f](s,\theta).$$

3) *Линейность*. Для любых функций f_1, f_2 и постоянных a_1, a_2:

$$R[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 R[f_1] + a_2 R[f_2].$$

4) Смещению функции в пространственной области соответствует сдвиг проекций вдоль s, причем величина сдвига зависит от угла зондирования:

$$R\left[f(x-a, y-b)\right] = R\left[f\left(s - a\cos\theta - b\sin\theta, \theta\right)\right].$$

5) Преобразование Радона от производных $f(x, y)$:

$$R\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right] = \cos\theta \frac{\partial R[f](s, \theta)}{\partial s},$$

$$R\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] = \sin\theta \frac{\partial R[f](s, \theta)}{\partial s}.$$

6) Производные преобразования Радона:

$$\frac{\partial R[f](s, \theta)}{\partial \cos\theta} = -\frac{\partial}{\partial s} R[xf(x, y)](s, \theta),$$

$$\frac{\partial R[f](s, \theta)}{\partial \sin\theta} = -\frac{\partial}{\partial s} R[yf(x, y)](s, \theta).$$

Задача обращения преобразования Радона

(обратная задача вычислительной томографии)

$$R[f](s,\theta) \to f(x,y)$$

Случай радиально-симметричной функции

Пусть

$$f(x,y)=\begin{cases} f_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) & при \quad x^2+y^2\le r^2 \\ 0 & при \quad x^2+y^2>r^2 \end{cases}$$

где $f_0(z)$ непрерывна на отрезке $[0,r]$

Преобразование Радона в этом случае не зависит от θ:

$$R[f](s,\theta)\equiv R[f](s),$$

Верно соотношение

$$\int_s^R \frac{2f_0(z)dz}{\sqrt{z^2 - s^2}} = R[f](s) \quad (0 \le s \le r) \qquad (1)$$

– уравнение Абеля (интегральное уравнение 1-го рода относительно неизвестной функции $f_0(z)$ с переменным пределом интегрирования, ядро которого имеет интегрируемую особенность).

Интеграл в (1) определен для любой $f_0(z) \in C[0, r]$.

<u>Формула обращения преобразования Радона</u>

$$f_0(z) = -\frac{1}{\pi z}\frac{d}{dz}\int_z^r \frac{sR[f](s)ds}{\sqrt{s^2 - z^2}} \qquad (2)$$

Решение (2) единственно в пространстве непрерывных функций, и радиально-симметричная функция

$$f(x, y) = f_0\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

однозначно определяется своим преобразованием Радона.

При этом задача решения уравнения (1) корректна, если интегральный оператор в левой части (1) действует из пространства $C[0, r]$ в пространство непрерывных на $[0, r]$ функций, обращающихся в нуль в точке r, а

$$R[f](r) = 0.$$

Пусть функция $f(x, y)$ принадлежит пространству Шварца, т.е. пространству бесконечно дифференцируемых на плоскости функций таких, что

$$\sup_{(x,y)\in R^2} \left| x^k y^l \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| < \infty$$

для всевозможных наборов неотрицательных целых чисел $k, l, n, i, j \quad (n = i + j)$. Для функций с такими свойствами преобразование Радона существует и при $s \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ выполняется оценка

$$| R[u](s,\theta) | \leq \frac{C}{(1+s^2)^{3/2}},$$

где C – положительная постоянная.

Проекционная теорема

Между двумерным преобразованием Фурье функции $f(x,y)$

$$\hat{f}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\,f(x,y)dxdy$$

и одномерным преобразованием Фурье ее радоновского образа $R[f](s,\theta)$ по переменной s

$$\hat{R}[f](\omega,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\omega s}\,R[f](s,\theta)ds$$

существует следующая связь:

$$\hat{f}(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{R}[f](\omega,\theta) \qquad (3)$$

Метод Фурье-синтеза реконструкции $f(x,y)$ по ее проекциям

По заданной $R[f](s,\theta)$ вычисляется преобразование Фурье $\hat{R}[f](\omega,\theta)$, затем из (3) находится $\hat{f}(\omega_1,\omega_2)$ и, с помощью обратного преобразования Фурье, окончательно восстанавливается искомое распределение $f(x,y)$.

Алгебраический метод восстановления с помощью метода коллокации с кусочно-постоянными базисными функциями

Пусть требуется восстановить функцию f с носителем в $\Omega \subset R^2$ по известным проекциям

$$R_j \equiv R[f](s_j, \theta_j), \quad j=1,\ldots,N. \tag{4}$$

Покроем Ω малыми квадратами S_m, $m=1,\ldots,M$, и будем считать, что f принимает постоянное значение f_m на каждом из них.

Положив

$$A_{jm} = длина(L_j \bigcap S_m),$$

получим следующую СЛАУ относительно вектора неизвестных

значений f_m

$$A_j U = f_j,\ \ j = 1, \ldots, N \tag{5}$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} A_{j1} & \cdots & A_{jM} \end{pmatrix}, \quad F = (f_1 \quad \cdots \quad f_M)^{\mathrm{T}}$$

Итерационная схема Качмажа:

$$f_j = f_{j-1} + \lambda (R_j - A_j f_{j-1}) A_j^{\mathrm{T}} / | A_j |^2,$$

где $| A_j |$ – евклидова норма вектора A_j.

Для выполнения одной итерации нужно выполнить $O\left(N\sqrt{M}\right)$ арифметических операций.

Алгебраический алгоритм восстановления с помощью метода наименьших квадратов

Искомое решение запишем в виде

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{M}c_k\psi_n(x,y), \tag{6}$$

где $\psi_n(x,y)$ – элементы полной системы координатных функций.

Подставим (6) в (4) и определим задачу минимизации квадратичного функционала:

$$J=\sum_j\left[\sum_n c_n R[\psi_n](s_j,\theta_j)-R_j\right]^2.$$

Согласно МНК, приравнивая производные J по c_k нулю, получаем СЛАУ с симметричной матрицей

$$AC=g, \tag{7}$$

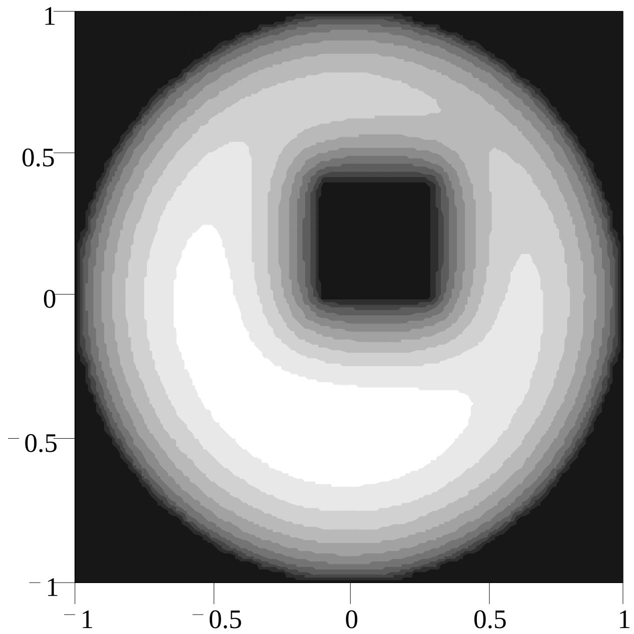
где

$$\begin{gathered} a_{q,r} = \sum_i \sum_j R[\psi_q](s_i, \theta_j) R[\psi_r](s_i, \theta_j), \\ g_r = \sum_i \sum_j R_j R[\psi_r](s_i, \theta_j). \end{gathered} \tag{41}$$

Решив (7), например, методом итераций, найдем коэффициенты c_k разложения (6).

Задача решения СЛАУ (7) является некорректной. Неявная регуляризация достигается путем выбора ограниченного не слишком большого числа членов M последовательности (6).

Пример 1. Рассмотрим область Ω, представляющую собой круг единичного радиуса с центром в начале координат с вырезанным из него квадратом со стороной 0.4 и центром в точке *x*=0.1, *y*=0.2.



Функция f, обращающаяся в ноль на $\partial\Omega$:

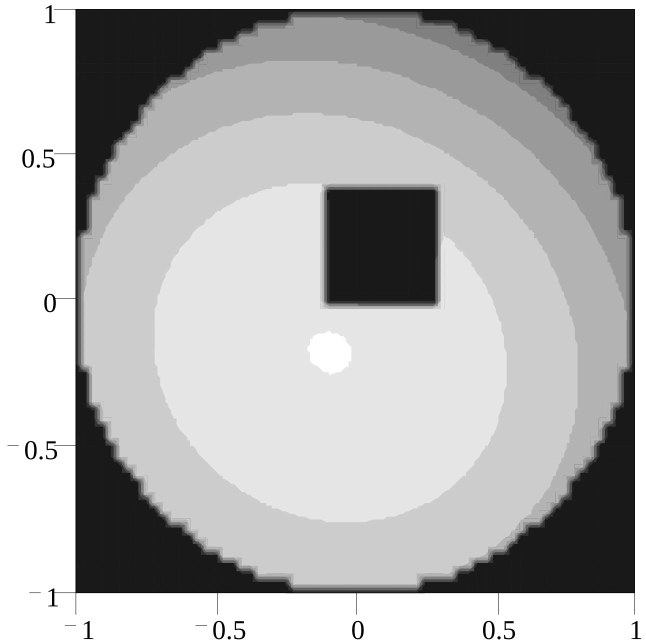
$$f(x, y) = \sqrt{\sin \omega(x, y)}\,.$$

Рассмотрим ее приближение по известным сечениям

$$s_i = -1 + i/8, \quad (i = \overline{0,16}), \quad \theta_j = j\pi/12, \quad (j = \overline{0,11})$$

с помощью линейной комбинации вида

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_{m+n=0}^{M} c_{m,n} x^m y^n$$



Пример 2. Примем те же исходные данные, что и в предыдущем примере. В качестве системы базисных функций выберем *B*-сплайны Шенберга:

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j (x-j)_+^k,$$

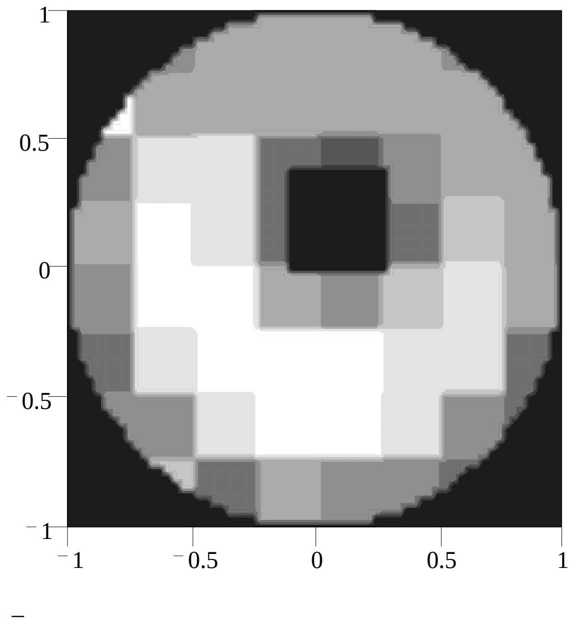
где k – порядок (степень) сплайна, C_n^k – биномиальные коэффициенты, а

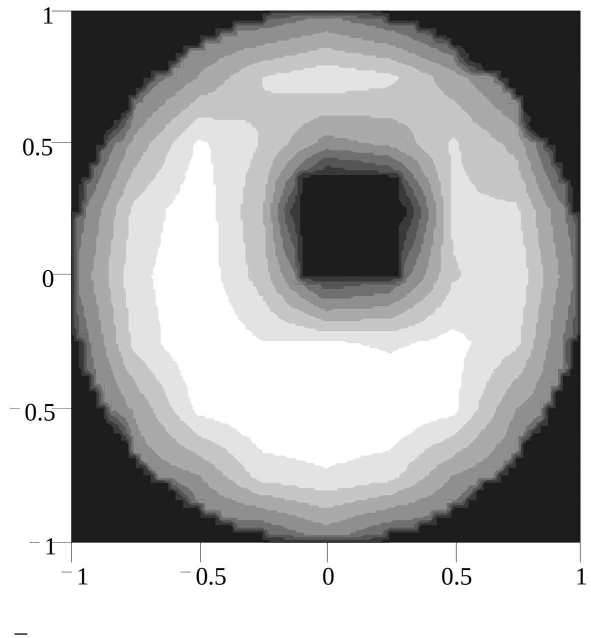
$$x_+^k = \begin{cases} x^k, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Рассмотрим приближение вида

$$\tilde{u}(x,y)=\sum_{i=-N-[k/2]}^{N+[(k-1)/2]}\sum_{j=-N-[k/2]}^{N+[(k-1)/2]}B_k\left(\frac{x+1}{h}-i-\frac{1+(-1)^k}{4}\right)\cdot B_k\left(\frac{y+1}{h}-j-\frac{1+(-1)^k}{4}\right)$$

Здесь $h=2/N$. Положим *N*=8. На рис. приведены расчеты для сплайнов *k*=0 (*а*), *k*=1 (*б*).





Пример 3. Рассмотрим полутоновую модель фантома головы человека, созданную с помощью пакета *Matlab Image Processing Toolbox*. Данная модель хорошо иллюстрирует особенности, присущие реальным томографическим изображениям головы. Яркая эллиптическая оболочка вдоль внешней стороны является аналогом черепа в разрезе. Многочисленные эллипсы внутри являются аналогами деталей мозга или опухолей. Полутоновое изображение имеет размер 64х64 пикселя. Преобразование Радона выполнялось в 18 направлениях с 64 параллельными проекциями на каждый угол поворота. Результаты реконструкции для различных значений частоты среза представлены на рисунках.