

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА**
Факультет информатики и систем управления
Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №4
по курсу «Теория игр и исследование операций»
«Матричные игры с нулевой суммой. Смешанные стратегии»

Выполнил:
студент ИУ9-111
Выборнов А.И.
Руководитель:
Басараб М.А.

Москва 2015

1. Цель работы

Постановка антагонистической игры двух лиц в нормальной форме. Найти решение игры в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку) за обоих игроков.

2. Постановка задачи

Матрица стратегий имеет вид:

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	4	1	17	18
a_2	4	14	6	16
a_3	0	14	14	13
a_4	6	13	4	15
a_4	12	11	3	16

Необходимо решить матричную игру в смешанных стратегиях за обоих игроков.

3. Решение

Найдем смешанные стратегии для игрока А. Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 12x_5 \geq g, \\ x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 13x_4 + 11x_5 \geq g, \\ 17x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq g, \\ 18x_1 + 16x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 16x_5 \geq g, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

где g — минимальный выигрыш.

Разделим систему на функцию g:

$$\begin{cases} 4u_1 + 4u_2 + 6u_4 + 12u_5 \geq 1, \\ u_1 + 14u_2 + 14u_3 + 13u_4 + 11u_5 \geq 1, \\ 17u_1 + 6u_2 + 14u_3 + 4u_4 + 3u_5 \geq 1, \\ 18u_1 + 16u_2 + 13u_3 + 15u_4 + 16u_5 \geq 1, \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1/g. \end{cases}$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$\begin{aligned} W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 &\rightarrow \min, \\ \begin{cases} 4u_1 + 4u_2 + 6u_4 + 12u_5 \geq 1, \\ u_1 + 14u_2 + 14u_3 + 13u_4 + 11u_5 \geq 1, \\ 17u_1 + 6u_2 + 14u_3 + 4u_4 + 3u_5 \geq 1, \\ 18u_1 + 16u_2 + 13u_3 + 15u_4 + 16u_5 \geq 1, \end{cases} \\ u_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Находим оптимальное решение:

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{1}{28}, u_2 = 0, u_3 = \frac{5}{392}, u_4 = 0, u_5 = \frac{1}{14}, \\ W = \frac{47}{392}, \\ g = \frac{1}{W} = \frac{392}{47}. \end{aligned}$$

Оптимальные стратегии:

$$\begin{aligned} x_1 = u_1 g &= \frac{1}{28} * \frac{392}{47} = \frac{14}{47}, \\ x_2 = u_2 g &= 0, \\ x_3 = u_3 g &= \frac{5}{392} * \frac{392}{47} = \frac{5}{47}, \\ x_4 = u_4 g &= 0, \\ x_5 = u_5 g &= \frac{1}{14} * \frac{392}{47} = \frac{28}{47}, \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока А равна:

$$(\frac{14}{47}, 0, \frac{5}{47}, 0, \frac{28}{47})$$

Для нахождения смешанной стратегии игрока В составим систему:

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 + 17v_3 + 18v_4 \leq h, \\ 4v_1 + 14v_2 + 6v_3 + 16v_4 \leq h, \\ 14v_2 + 14v_3 + 13v_4 \leq h, \\ 6v_1 + 13v_2 + 4v_3 + 15v_4 \leq h, \\ 12v_1 + 11v_2 + 3v_3 + 16v_4 \leq h, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1. \end{cases}$$

где h – максимальный проигрыш игрока В.

Разделим систему на h :

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 + 17v_3 + 18v_4 \leq 1, \\ 4v_1 + 14v_2 + 6v_3 + 16v_4 \leq 1, \\ 14v_2 + 14v_3 + 13v_4 \leq 1, \\ 6v_1 + 13v_2 + 4v_3 + 15v_4 \leq 1, \\ 12v_1 + 11v_2 + 3v_3 + 16v_4 \leq 1, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1/h. \end{cases}$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$\begin{aligned} &v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rightarrow \max. \\ &\begin{cases} 4v_1 + v_2 + 17v_3 + 18v_4 \leq 1, \\ 4v_1 + 14v_2 + 6v_3 + 16v_4 \leq 1, \\ 14v_2 + 14v_3 + 13v_4 \leq 1, \\ 6v_1 + 13v_2 + 4v_3 + 15v_4 \leq 1, \\ 12v_1 + 11v_2 + 3v_3 + 16v_4 \leq 1, \end{cases} \\ &v_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Решение имеет вид:

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{5}{196}, v_2 = \frac{6}{196}, v_3 = \frac{19}{392}, v_4 = 0 \\Z &= \frac{47}{392}, \\H &= \frac{1}{W} = \frac{392}{47}.\end{aligned}$$

Частоты выбора стратегий:

$$\begin{aligned}y_1 &= v_1 h = \frac{5}{196} * \frac{392}{47} = \frac{10}{47}, \\y_2 &= v_2 h = \frac{6}{196} * \frac{392}{47} = \frac{12}{47}, \\y_3 &= v_3 h = \frac{19}{392} * \frac{392}{47} = \frac{19}{47}, \\y_4 &= v_4 h = 0,\end{aligned}$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока В равна:

$$\left(\frac{10}{47}, \frac{12}{47}, \frac{19}{47}, 0\right)$$