Математическое моделирование.
Лабораторная работа №1.2

Русначенко Николай

26 Октября, 2015

1 Постановка Задачи

Задана функция $f(x)$ с граничными условиями $g_i(x), i = \overline{1,2}$, для которой требуется найти экстремумы. Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} f(x) = 3e^{\frac{-(x_1+2x_2)^2}{2}} \to extr; \\ g_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \\ g_2(x) = e^{x_1^2} - 2 \leq 0. \end{cases}$$

2 Решение

Составим обобщенную ф-ци лагранжа, которая имеет вид (общий вид, см. 2).

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j g_j(x)$$

2.1 Условия экстремумов первого порядка

Условие стационарности обобщеной функции, и вычислим частные производные ф-ции лагранжа по x_1, x_2:

$$\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,2}; \quad \lambda_j \neq 0, j = \overline{0,2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -3\lambda_0(x_1 + 2x_2)e^{-\frac{(x_1+2x_2)^2}{2}} + 4\lambda_1 x_1 + 2x_1\lambda_2 e^{x_1^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -6\lambda_0(x_1 + 2x_2)e^{-\frac{(x_1+2x_2)^2}{2}} + 2\lambda_1 x_2$$

$$-9\lambda_0(x_1 + 2x_2)e^{-\frac{(x_1+2x_2)^2}{2}} + \lambda_1(4x_1 + 2x_2) + 2\lambda_2 x_1 e^{x_1^2} = 0$$

Условие допустимости решения:

$$g_i(x^e) \leq 0, \quad i = \overline{1,2}$$

Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i g_i(x^e) = 0, \quad i = \overline{1,2}$$

Условия неотрицательности и неположительности не рассматриваются в виду условия задачи.

Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -9\lambda_0(x_1 + 2x_2)e^{-\frac{(x_1+2x_2)^2}{2}} + \lambda_1(4x_1 + 2x_2) + 2\lambda_2 x_1 e^{x_1^2} = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \\ e^{x_1^2} - 2 \leq 0 \\ \lambda_1(2x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0 \\ \lambda_2(e^{x_1^2} - 2) = 0 \end{cases}$$

2.2 Поиск экстремумов

Необходимо рассмотреть два случая

1. $\lambda_0 = 0$
2. $\lambda_0 \neq 0$, при этом $\dfrac{\lambda_j^e}{\lambda_0^e} = \lambda_j^{e\prime}$

В первом случае, система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1(4x_1 + 2x_2) + 2\lambda_2 x_1 e^{x_1^2} = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \\ e^{x_1^2} - 2 \leq 0 \\ \lambda_1(2x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0 \\ \lambda_2(e^{x_1^2} - 2) = 0 \end{cases}$$

Из последних двух уравнений получаем, что при условии $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$x_1^e = \pm\sqrt{\ln 2}$$

$$x_2^e = 2(1 - \ln 2)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(\ln 2 - 1 \pm 2\sqrt{\ln 2})}{\pm\sqrt{\ln 2}}$$

В случае, если $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, получим (решением этой системы является область с нефиксированными значениями x_1, x_2):

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \\ x_1 \in [-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}] \end{cases}$$

В случае $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, получим (решением этой системы является область с нефиксированным значением x^2):

$$\begin{cases} 2\lambda_2 x_1 e^{x_1^2} = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \\ x_1 \in [-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}] \\ \lambda_2(e^{x_1^2} - 2) = 0 \end{cases}$$

В случае, когда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, получим (Решением этой системы является область):

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \\ x_1 \in [-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}] \end{cases}$$

2.3 Проверка достаточных условий экстремума

Проверим достаточные условия экстремума для точек, полученных на предыдущем этапе ($\lambda_0 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$). Для этого, необходимо:

$$d^2L(x^e, \lambda^e) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \bigg|_{x^e, \lambda^e} > 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L(x^e, \lambda_0^e, \lambda^e)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,n} \tag{2}$$

Вычислим $d^2L(x, \lambda)$:

$$-27\lambda_0(1-(x_1+2x_2)^2)e^{-\frac{(x_1+2x_2)^2}{2}} + 6\lambda_1 + 2\lambda_2(e^{x_1^2} + 2x_1^2 e^{x_1^2})$$

При подстановке значений λ_i^e, x_i^e, получим:

$$\frac{\lambda_1^e}{\lambda_2^e} = \frac{-\sqrt{\ln 2}}{\ln 2 - 1 + 2\sqrt{\ln 2}} > \frac{-(4+8\ln 2)}{6} \quad (-0.61 > -1.59)$$

$$\frac{\lambda_1^e}{\lambda_2^e} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\ln 2 - 1 - 2\sqrt{\ln 2}} > \frac{-(4+8\ln 2)}{6} \quad (-0.41 > -1.59)$$

Условие 2 выполнено в предыдущем разделе в процессе вычисления λ_i^e, x_i^e. Дополнительные условия проверки не требуются в виду того, что по условию требуется определить экстремумы, а также $m = 0$.

2.4 Вычисление значений функции в точках экстремума

Вычислим значение функции в:

$$f(x) = 3e^{\frac{-(x_1+2x_2)^2}{2}}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\ln 2}$$

$$x_2 = 2(1 - \ln 2)$$

Подставим x_1, x_2:

$$f(x_1 = \sqrt{\ln 2}, x_2) = \mathbf{1.054}$$

$$f(x_1 = -\sqrt{\ln 2}, x_2) = \mathbf{2.92}$$