ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.2

Необходимые и достаточные условия существования безусловного и условного экстремума.

2. Необходимые и достаточные условия условного экстремума.

Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда множество допустимых решений X задаётся равенствами и неравенствами, т.е.

$$f(x^e) = \min_{x \in X} f(x); \; f(x^e) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (1)$$

Где $X = \left\{ x \left| \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \; j = 1,..,m; \; m < n \\ g_j(x) \le 0, \; j = m+1,\dots,p \end{array} \right. \right\}$, m и p - числа; $f(x)$ - целевая функция,

$g_j(x), \; j = 1,..., p$ - функции, задающие ограничения (условия).

Будем считать функции $f(x); \; g_j(x), \; j = 1,..., p$ дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве R^n. При $p = m$ задача (1) со *смешанными ограничениями* преобразуется в задачу с *ограничениями типа равенств*, а при $m = 0$ в задачу с *ограничениями типа неравенств.*

Определение 1. Функция

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x) \qquad (2)$$

называется *обобщенной функцией Лагранжа,* числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p$ - *множителями Лагранжа,* $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_p]^T$. *Классической функцией Лагранжа* называется функция

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x). \qquad (3)$$

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ.

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \; j = \overline{1, m}; \quad g_j(x) \le 0, \; j = m+1, \dots, p.$, определяющие множество допустимых решений $X \in R^n$. Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^e \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на X:

$$f(x^e) = \min_{x \in X} f(x); \; f(x^e) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (4)$$

где $X = \left\{ x \left| \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \; j = 1,..,m; \; m < n \\ g_j(x) \le 0, \; j = m+1,\dots,p \end{array} \right. \right\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^e локальных экстремумов с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядков при ограничениях типа равенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f(x^e)$ функции в найденных точках локального экстремума.

- **Необходимые условия экстремума первого порядка.**

Пусть точка $x^e \in R^n$ есть точка локального экстремума в задаче (4). Тогда числа $\lambda^e{}_0, \lambda^e{}_1, ..., \lambda^e{}_p$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

- Условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^e, \lambda_0^e, \lambda^e)}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n; \qquad (5)$$

- *Условие допустимости решения:*

$$g_j(x^e) = 0, \quad j = 1, \ldots, m; \quad g_j(x^e) \le 0, \; j = m+1, \ldots, p \qquad (6)$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1(x^e), \ldots, \nabla g_m(x^e)$ *в точке* x^e *линейно независимы (выполняется условие регулярности), то* $\lambda_0^e \ne 0$.

- *Условие неотрицательности для условного минимума:*

$$\lambda_j^e \ge 0, \; j = \overline{m+1, p}.$$

(*Условие неположительности для условного максимума:* $\lambda_j^e \le 0, \; j = \overline{m+1, p}.$).

- *Условие дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_j^e g_j(x^e) = 0, \; j = \overline{m+1, p}.$$

Замечание 1. Точка экстремума , удовлетворяющая системе (5), (6) при $\lambda_0^e \ne 0$ называется *регулярной,* а при $\lambda_0^e = 0$ *-нерегулярной* . Случай $\lambda_0^e = 0$ отражает вырожденность ограничений. При этом в обобщенной функции Лагранжа исчезает член содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях экстремума не используется информация, предоставляемая градиентом целевой функции.

Замечание 2. При решении задач проверка условий регулярности затруднена, т.к. точка x^e заранее неизвестна. Поэтому, как правило, рассматриваются два случая $\lambda_0^e = 0$ и $\lambda_0^e \ne 0$. Если $\lambda_0^e \ne 0$, в системе (5) полагают $\lambda_0^e = 1$. Это эквивалентно делению систему уравнений на λ_0^e и замене $\frac{\lambda_j^e}{\lambda_0^e}$ на λ_j^e. При этом обощенная функция Лагранжа становится классической, а сама система (5) имеет вид :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(x^e, \lambda^e)}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n; \\ &g_j(x^e) = 0, \; j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \qquad (7)$$

- **Необходимое условие экстремума второго порядка.**

Пусть точка $x^e \in R^n$ *регулярная точка локального минимума (максимума) в задаче (7) и имеется решение* (x^e, λ^e) *системы (7). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^e, λ^e), *неотрицателен (неположителен):*

$$\begin{aligned} &d^2 L(x^e, \lambda^e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \ge 0, \\ &(d^2 L(x^e, \lambda^e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \le 0). \end{aligned} \qquad (8)$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \qquad (9)$$

- **Достаточные условия экстремума**

Пусть имеется точка (x^e, λ^e), *удовлетворяющая системе уравнений (7). Если в этой точке*

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \ge 0,$$

$$(d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \le 0).$$

для любых ненулевых $dx \in R^n$, *таких, что*

$$dg_j(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=\overline{1,m},$$

то точка x^e *является точкой локального минимума.*

регулярная точка локального минимума (максимума) в задаче (7) и имеется решение (x^e, λ^e) *системы (7).*

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j g_j(x)$$

Шаг 2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка

А) $\dfrac{\partial L(x^e,\lambda_0^e,\lambda^e)}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1,n};$ **Б)** $g_j(x)=0,\quad j=\overline{1,m};\ g_j(x^e)\le 0,\ j=m+1,\dots,p;$

В) $\lambda_j^e \ge 0,\ j=\overline{m+1,p}$ (для минимума), $\lambda_j^e \le 0,\ j=\overline{m+1,p}$ (для максимума);

Г) $\lambda_j^e g_j(x^e)=0,\ j=\overline{m+1,p}.$

Шаг 3. Решить систему уравнений для двух случаев $\lambda_0=0$ и $\lambda_0\ne 0$ (при этом $(\dfrac{\lambda_j^e}{\lambda_o^e}=\lambda_j^{e\,\prime}$). В результате находится точка x^e.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j > 0,$$

$$(d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j < 0).$$

и $\dfrac{\partial L(x^e,\lambda_0^e,\lambda^e)}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1,n};\quad dg_j(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=\overline{1,m}.$

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

А) Определить число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств;

Б) Если $l=n$ и $\lambda_j^e>0$ для всех $j\in J_a$, т.е. всех активных ограничений-неравенств, то в точке x^e - локальный минимум. Если $l=n$ и $\lambda_j^e<0$ для всех $j\in J_a$, т.е. всех активных ограничений-неравенств, то в точке x^e - локальный максимум. Если $l<n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

А) Записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^e,λ^e):

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \ge 0,$$
;
$$(d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \le 0).$$

Б) Записать условия, накладываемые на первые дифференциалы ограничений-равенств и активных в точке x^e ограничений-неравенств:

$$\begin{aligned} &dg_j(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=\overline{1,m},\quad и\ j\in J_a;\ \lambda_j^e>0\ (\lambda_j^e<0);\\ &dg_j(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}dx_i\le 0,\qquad j\in J_a;\ \lambda_j^e=0; \end{aligned} \tag{10}$$

В) Исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих (10). Если $d^2L(x^e,\lambda^e)>0$, то в точке x^e - условный локальный минимум. Если $d^2L(x^e,\lambda^e)<0$ то в точке x^e - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, если нет, то в точке x^e нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции $f(x)$ в точках экстремума x_k^e.

ЗАДАНИЯ

1. Найти экстремум функций:

1.1. $\begin{cases} f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2+x_1x_2\to extr\\ g_1(x)=x_1^2+x_2^2-52\le 0. \end{cases}$;

1.2. $\begin{cases} f(x)=(x_1^3-\alpha)^2+x_2^2\to extr\\ g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1\le 0, \qquad \text{подобрать } \alpha\ ;\\ g_2(x)=-x_1\le 0. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} f(x)=x_1^2+2x_1x_2+(x_2-2)^2\to \min\\ g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1\le 0,\\ g_2(x)=-x_1\le 0,\\ g_3(x)=-x_2\le 0. \end{cases}$;

1.4. $\begin{cases} f(x)=3x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2\to \min\\ g_1(x)=4-x_1-x_2\le 0;\\ g_2(x)=-x_1\le 0;\ g_3(x)=-x_2\le 0. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} f(x)=4x_1^2+4x_1+x_2^2-8x_2+5\to \min\\ 2x_1-x_2-6=0. \end{cases}$

1.6. $$\begin{cases} f(x) = (x_1+2)^2 + (x_2+2)^2 - 10 \to extr \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ g_2(x) = -x_1 \le 0, \\ g_3(x) = -x_2 \le 0. \end{cases}$$

1.7. $$\begin{cases} \left\{ f(x) = e^{\frac{-(x_1+2x_2)^2}{2}} \to extr; \right. \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \le 0, \\ g_2(x) = 3e^{x_1^2}. \end{cases}$$

1.8. $$\begin{cases} \left\{ f(x) = 3e^{\frac{-(x_1+2x_2)^2}{2}} \to extr; \right. \\ g_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2 \le 0, \\ g_2(x) = e^{x_2^2}. \end{cases}$$

1.9. $$\begin{cases} f(x) = (x_1 - x_2)^2 + ((x_1 + x_2 - 10)/3)^2 \to extr; \\ g_1(x) = 4x_1^2 + x_2 - 2 \le 0. \end{cases}$$

На множестве R^n.

2. **Записать необходимые условия экстремума первого порядка.**
3. **Проверить выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке двумя способами.**
4. **Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.**