ЛЕКЦИЯ № 3

Математические основы оптимизации

Основные понятия теории множеств.

1.1. Задание множеств

А) Перечислением: $X = \{x_1, x_2, x_3 ... x_n\}$, где x_i

i - й элемент множества X, n - число элементов.

Б) Заданием свойств: $X = \{x \in X | P(x)\}$, где $P(x)$

- предикат, определяющий свойства множества *X*.

В) Примеры числовых множеств:

$n \in N$ - натуральный ряд чисел. $N = \{1,2,3,...\infty\}$

$z \in Z$ - множество целых чисел $Z = \{-\infty,...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\infty\}$

$q \in Q$ - множество рациональных чисел $Q = \{\frac{z_i}{z_j} \in Q | \forall i, j \in N\}$

$r \in \Re$ - множество действительных чисел.

1. Основные понятия теории множеств.

Г) Произведение множеств.

Прямое произведение множеств:

$$\Re^2 = \Re^1 \otimes \Re^1$$

$\Re^n = \Re^1 \otimes \Re^1 \otimes .... \otimes \Re^1$ - прямое произведение множеств *n* раз.

1.2. Операции над множествами.

1.2.1. Объединение множеств.

Пусть ***A*** и ***B*** некоторые множества $x \in A, y \in B$

Тогда объединением множеств называется операция

$$A \bigcup B \equiv \{x, y \in C \mid (\forall x \in A) \vee (\forall y \in B) \Rightarrow x, y \in C\}$$

1.2.2. Пересечение множеств.

Пусть ***A*** и ***B*** некоторые множества $x \in A, y \in B$

Тогда пересечением множеств называется операция

$$A \bigcap B \equiv \{x, y \in D \mid (\exists x \in B\} \wedge (\exists y \in A) \Rightarrow x, y \in D\}$$

2. Краткий экскурс в функциональный анализ.

2.1. Векторное пространство.

Векторное пространство над полем $\Re$
представляет собой множество ***X*** (элементы этого множества называются векторами), для (α,x) которого определены две операции: *умножение на скаляры* и *сложение векторов.* Они должны обладать следующими свойствами:

1. Каждой паре векторов **x** $\in X$ **y** ставится в соответствие вектор **x+y**. При этом, если также **z,** тогда

x+y=y+x – свойство коммутативности,

x+(y+z)=(x+y)+z – свойство ассоциативности.

2. Каждой паре $\alpha x \in X$, где $\alpha \in R$ и $x \in X$ сопоставляется вектор $\alpha x \in X$

2. Краткий экскурс в функциональный анализ.

2.2. Линейное пространство R^n (n – размерность пространства)

Элементами линейного пространства (линеала) являются R объекты a, b, c.

Свойства линейного пространства:

1. a,b $\in R^n$,тогда a+b=c $\in R^n$

2. x $\in R^n$, $\lambda \in R_1$, λx = f – произведение на скаляр при этом для $\forall x, y, z \in R^n$

и $\forall \lambda, \mu$ выполняются аксиомы:

1)x + y = y + x – коммутативность сложения;

2)x + (y + z) = (x + y) + z – ассоциативность сложения;

3)$\exists$ 0 $\in$ Rn, такой, что x + 0 = x; существование нулевого элемента для сложения;

4)$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ – ассоциативность умножения скаляров;

5)$\exists$ 1$\in$ R1 такой, что1*x = x; существование единичного элемента для умножения;

6)λ(x + y) = λx + λy – дистрибутивность умножения на скаляр;

7)(λ+μ) x = λx + μx - дистрибутивность умножения на вектор.

2.Краткий экскурс в функциональный анализ.

2.3. Евклидово пространство

Вводится скалярное произведение: $(a,b)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$

$$E^n \subset R_2^n, \|a\| = (a,a)^{1/2} = [\sum_{i=1}^{n} a_i^2]^{1/2}.$$

2.4. Метрическое пространство M

Метрическим пространством называется всякое множество M, в котором для любых 2-х его элементов a и b введено вещественное неотрицательное число, называемое расстоянием, обозначаемое d (a, b). Например, для евклидового пространства:

$$d(a,b) = \|a-b\| = [\sum_{i=1}^{n} (a-b)^2]^{1/2}$$

Пространство, обладающее евклидовой метрикой обозначается l_2^n или E^n.

2.Краткий экскурс в функциональный анализ.

2.5. Гильбертово пространство (аналог евклидова пространства в функциональном пространстве).

Расстояние в гильбертовом пространстве:

$$d[f_1(x), f_2(x)] = \left\{ \int_{x \in X} [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Норма гильбертова пространства: $\|f(x)\| = [\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx]^{1/2}.$

2.6. Общее конечномерное пространство R_p^n

$$\|a\|_p = \left[\sum |a_i|^p \right]^{1/p}$$

$$\begin{cases} p = 1; \|a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\ p = \infty; \|a\|_\infty = \max |a_i| \end{cases}$$

2.Краткий экскурс в функциональный анализ.

2.7. Общие функциональные пространства

Норма функционального пространства:

$$\left\| f(x) \right\|_p = \left\{ \int\limits_{x \in X} \left| f(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}$$

2.8. Банахово пространство.

Полное нормированное пространство называется банаховым (банаховым является евклидово и гильбертово пространства).

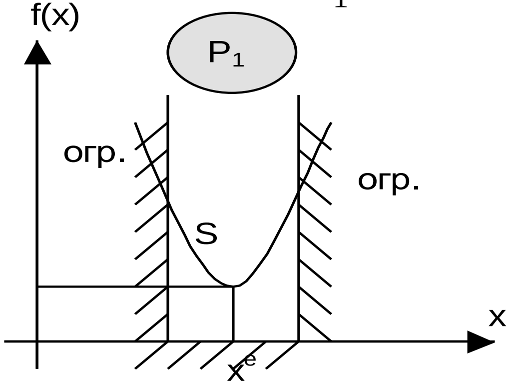
2.9. Понятие функционала.

Оператор, заданный на некотором множестве в метрическом пространстве, значения которого вещественные и комплексные числа, называется функционалом.

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

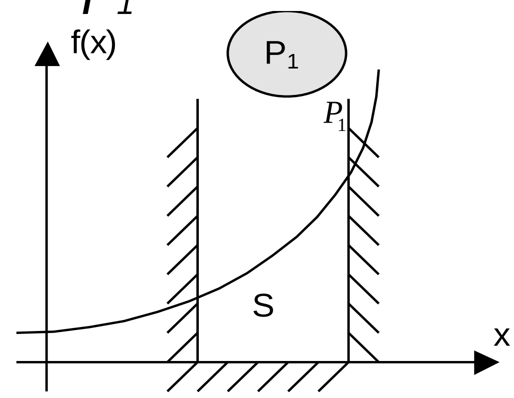
3.1. Задачи оптимизации.

Задача P_1



$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ g_j(x) \le 0;\ j = 1,\dots,m \\ x \in S \cap U_\varepsilon(x^\varepsilon) \end{cases}$$

Задача *P1*



$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ g_j(x) \le 0 \\ x \in S \cap U_\varepsilon(x^\varepsilon) \end{cases}$$

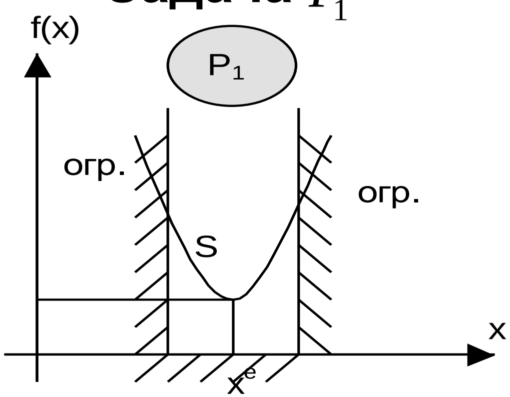
Решением задачи P_1 называется любой вектор $x \in S$, удовлетворяющий ограничениям

$$\begin{cases} g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots,m \\ x \in S \end{cases}$$

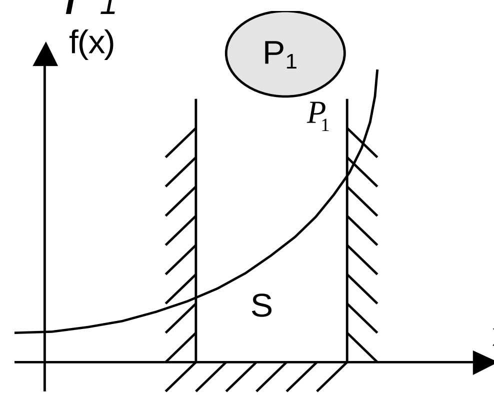
3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

3.1. Задачи оптимизации.

Задача P_1



Задача *P1*



Оптимальным решением (или глобальным оптимумом) задачи P1 называется решение xe, минимизирующее f(x) – целевую функцию на множестве всех решений S (xe$\in$S).

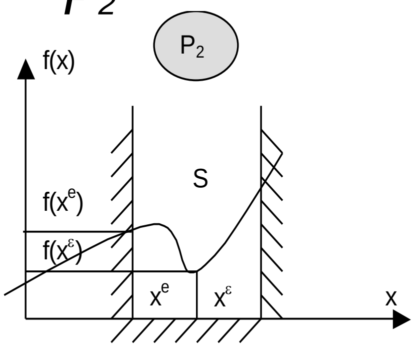
3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

3.1. Задачи оптимизации.

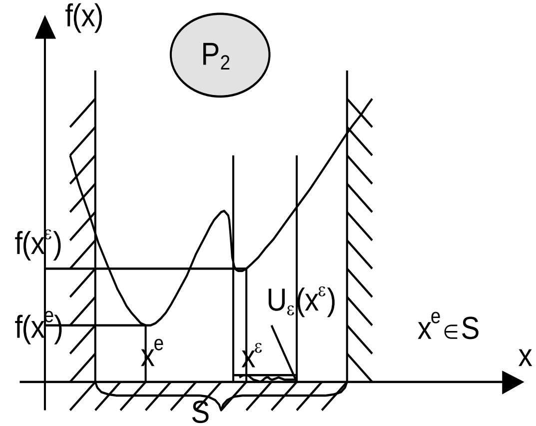
Полимодальная функция. *P2*

Задача

P2



$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ g_j(x) \le 0 \\ x \in S \cap U_\varepsilon(x^\varepsilon) \end{cases}$$



Локальным оптимумом задачи P2 является вектор xε, для которого существует окрестность Uε(xε) такая, что xε является оптимальным решением задачи P1 на множестве Uε(xε).

Глобальным оптимумом задачи P2 является решение, удовлетворяющее условию $f(x^e) \le \min\{f(x_i^\varepsilon)\}, f(x) \le \{f(x_1^\varepsilon), f(x_2^\varepsilon),..., f(x_k^\varepsilon)\}.$

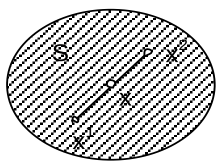
Множество локальных оптимумов, включающее также глобальный оптимум, носит название множество эффективных решений Xe = {xe,xε}.

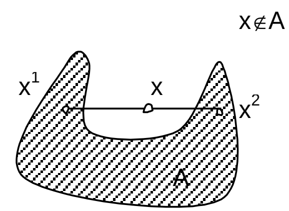
<u>3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа</u>.

<u>3.2. Выпуклые множества</u>.

<u>Определение 1</u>: Множество S $\subset$ Rn называется выпуклым, если

$$S \overset{d}{=} \{x \in S \mid (\forall x^1, x^2 \in S) \,\&\, (\forall \lambda \in [0,1]) \Rightarrow \forall x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in S\}.$$





<u>Обобщение</u>: Пусть $x^i \in S \subset R^n$, тогда $x \in S$ – выпуклая комбинация этих точек, если существуют числа (коэффициенты) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ $(0 \le \mu_i \le 1)$, такие, что

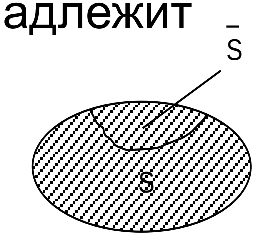
$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \quad \text{и} \quad x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x^i = \mu_i x^i.$$

Множество S $\subset$ Rn – выпукло, тогда и только тогда, если любая выпуклая комбинация точек из S принадлежит S.

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

3.2. Выпуклые множества.

Определение 2: Выпуклой оболочкой множества S (не обязательно выпуклого) является множество $\hat{S}$, если любая выпуклая комбинация точек из S принадлежит $\hat{S}$.



Свойства выпуклых множеств:

объединение конечного числа выпуклых множеств не всегда является выпуклым;

пересечение конечного числа выпуклых множеств всегда является выпуклым множеством.

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

3.2. Выпуклые множества.

Свойства выпуклых множеств:

Определение 3:

1. Внутренность множества А - I(A); $I(A) \stackrel{d}{=} \{x \in A \,|\, (\forall \bar{x} \in A) \Rightarrow U_{\varepsilon}(\bar{x}) \in A\}$

- открытое множество;

2. **Граница** множества А - Г(А): $\Gamma(A) \stackrel{d}{=} \{x \in A \,|\, (\exists \bar{x} \in A) \Rightarrow U_{\varepsilon}(\bar{x}) \notin A]$

- граница множества;

3. **Замыкание** множества $A - \tilde{A} \stackrel{d}{=} I(A) \cup \Gamma(A).$

Примеры:

Открытый интервал (a,b).

Замкнутый интервал [a,b].

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

- **Определение 4:** Множество K $\subset R^n$ называется компактным, если из любой последовательности $\{x_k\}$ $k \in N$ элементов из K можно выделить подпоследовательность $\{x_l\}$, $l \in L$

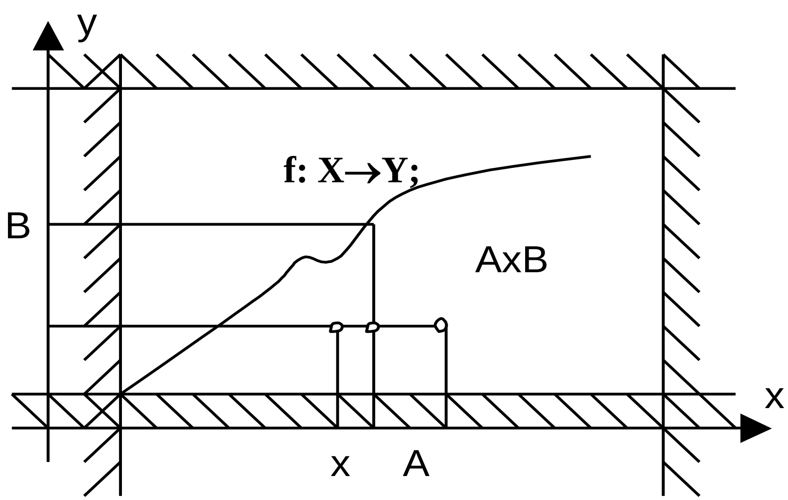
(L $\subset$ N), сходящемуся к элементу из K.

- **Свойство 4:** Множество K $\subset R^n$

является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

Отображения и функции.



1. **Отображения:** f: X→Y; $f \subset X^*Y$; $X \subset R^n$; $Y \subset R^m$.

Если A ⊂ X и B ⊂ Y, то f: A→B(f ⊂ AxB). Отображение f может быть как однозначным, так и многозначным. Однозначное отображение называется функциональным.

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

Функциональное отображение.

f: X→Y; X $\subset E^n$, Y $\subset E^1$; y = f(x), где x $\in$ X, y $\in$ Y.

Если функция имеет обратную функцию, то она представляет одно - однозначное отображение.

Операторное отображение.

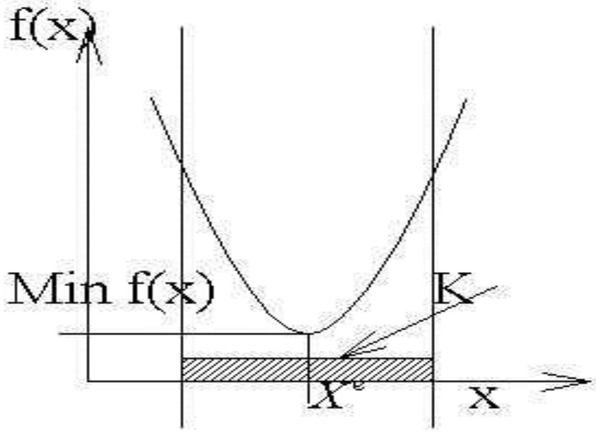
F: X → Y, где X $\subset E^n$, Y $\subset E^m$ обобщение понятия функционального отображения.

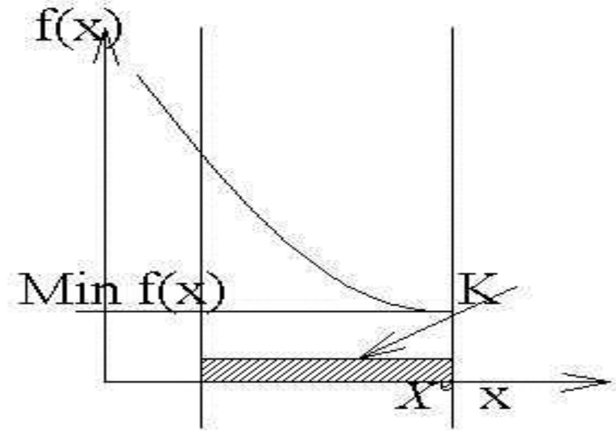
Теорема Вейерштрасса (теорема имеет фундаментальное значение для решения задач оптимизации): Если f – непрерывная действительная функция, область определения которой задана на компактном множестве K $\subset \boldsymbol{R}^n$,

(K – замкнуто и ограничено), то задача $\left.\begin{matrix} \min f(x) \\ x \in K \end{matrix}\right\}$ имеет решение $x^e \in K$

3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

4.Выпуклые функции.





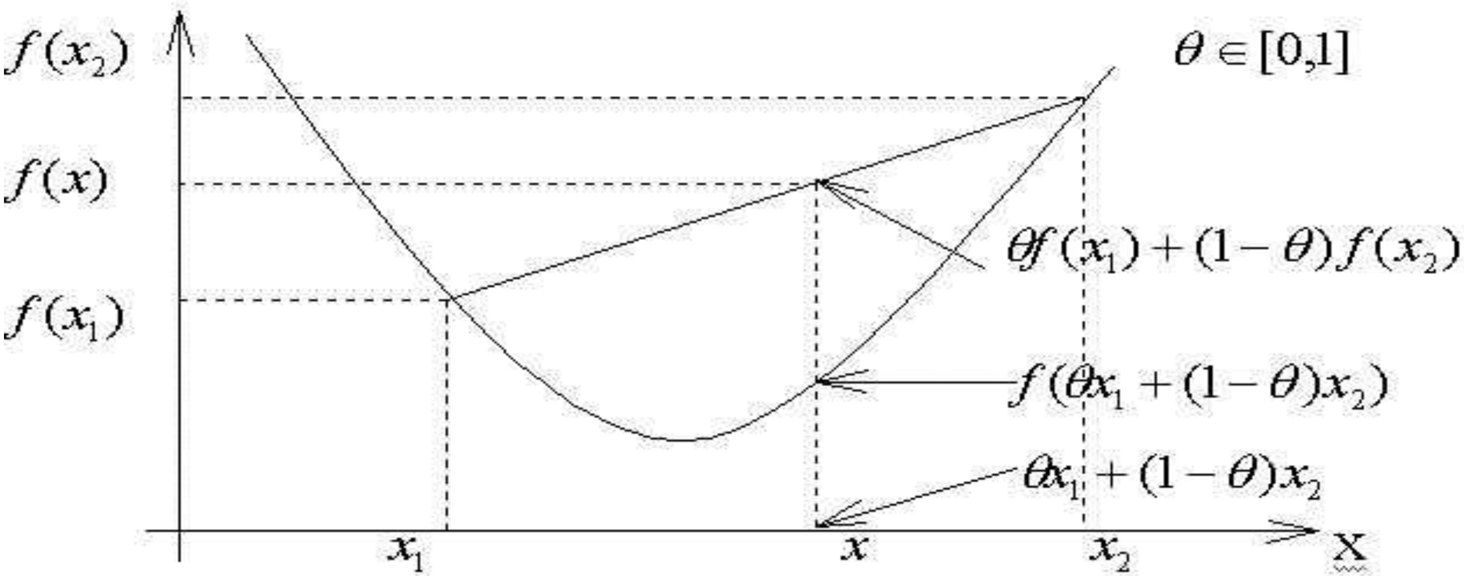
4.1.Выпуклые (вниз) функции.

Выпуклой будем называть функцию, которая удовлетворяет следующему условию:

$$f(x) = \{ y \in Y, y \in f(x) \;\big|\; (\forall x_1, x_2 \in X)\,\&\,(\forall \theta \in [0,1]) \Rightarrow f[\theta x_1 + (1-\theta) x_2] < \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2) \}$$

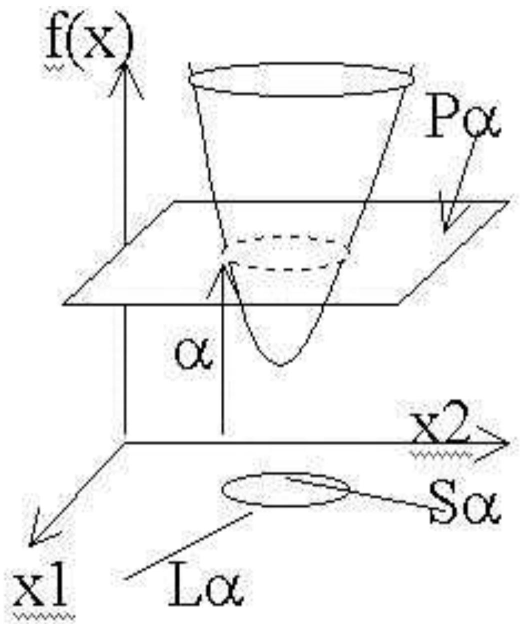
<u>3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.</u>

4.1. <u>Выпуклые функции.</u>



3. Основные понятия и определения конечномерного выпуклого анализа.

4.2. Множества уровня.



Пусть f(x) – выпуклая функция. Зададим плоскость $P(\alpha) \subset E^n$ при f(x) = α.

Тогда Sα - сечение уровня,

Lα- линия уровня.

$$S_\alpha = \{x \in X \mid \exists \alpha \in E^1 \Rightarrow f(x) \le \alpha\}$$

$$L_\alpha = \{x \in X \mid \exists \alpha \in E^1 \Rightarrow f(x) = \alpha\}$$