

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

«Численное решение одномерной краевой задачи (глобальные базисные функции)»

На интервале числовой оси $x \in [0, l]$ найти приближенное решение краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad (1)$$

$$\begin{cases} \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \right)_{x=0} = \psi_1, \\ \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \right)_{x=l} = \psi_2. \end{cases} \quad (2)$$

Функцию правой части $f(x)$ и величины ψ_1, ψ_2 определить путем подстановки известного точного решения в левые части дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2).

Поиск решения осуществлять после предварительного сведения исходной краевой задачи к задаче с однородными краевыми условиями (2) путем замены

$$y(x) = u(x) - U(x),$$

где

$$U(x) = A + Bx,$$

A и B – неопределенные коэффициенты.

Приближенное решение следует искать в виде разложения по системе глобальных базисных функций ϕ_k , априори удовлетворяющих краевым условиям (2):

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=0}^N c_k \phi_k(x),$$

с последующим сведением к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов c_k одним из проекционных методов (в методе Петрова использовать два типа базисов: аппроксимирующий / поверочный). Расчет коэффициентов СЛАУ производить по одной из квадратурных формул (прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса).

Сравнить полученное решение с точным и оценить погрешность аппроксимации по норме в пространствах $L_2(0, l)$ и $C(0, l)$ в зависимости от числа базисных функций N .

Варианты заданий

№ пп	Точное решение $u(x)$	Краевые условия				Базисные полиномы $\phi_k(x)$	Метод решения
		α_1	α_2	β_1	β_2		
1	$e^x \sin^2 x$	0	0	1	1	алгебраические	Бубнова-Галеркина
2	$x^2 \ln(x+l)$	1	0	0	1	тригонометрические	Бубнова-Галеркина
3	$\sqrt{x} \cdot \cos x$	0	1	1	0	алгебраические	наименьших квадратов
4	$x^2 \sin x$	1	0	1	1	тригонометрические	наименьших квадратов

5	$\sin x + x \cos x$	0	1	1	1	алгебраические	Петрова (алгебр./триг.)
6	$x^2 + \cos x$	1	1	1	0	тригонометрические	Петрова (триг./алгебр.)
7	$\ln(x+l) - x e^x$	1	1	0	1	алгебраические	Бубнова- Галеркина
8	$e^x - x$	0	0	1	1	тригонометрические	Бубнова- Галеркина
9	$\sqrt[3]{x+l} + x^2$	1	0	0	1	алгебраические	наименьших квадратов
10	$x^2 e^{-x}$	0	1	1	0	тригонометрические	наименьших квадратов

Отчет должен содержать:

- постановка исходной задачи (вариант);
- задача с однородными краевыми условиями;
- выражения для расчета коэффициентов СЛАУ;
- графики результатов расчетов (приближенное решение);
- графики зависимости погрешности от числа базисных функций;
- исходный код программы.