

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА**  
**Факультет информатики и систем управления**  
**Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий**

Лабораторная работа №2  
по курсу «Математическое моделирование»

Выполнил:  
студент ИУ9-111  
Выборнов А. И.  
  
Руководитель:  
Домрачева А. Б.

Москва 2015

# 1. Постановка задачи

Рассматриваются 6 станций чешского метрополитена. Для каждой станции, вручную была посчитана следующая информация с точностью до месяца:

- Среднее число пассажиров, вошедших с данной станции в метрополитена в день.
- Среднее число пассажиров, вышедших с данной станции в день.

Данные для 6 станций (A0, A1, B0, B1, C0, C1) приведены в таблице 1. Строки соответствуют месяцам, столбцы станциям метро, причём префикс "th" соответствует вошедшим пассажирам, а префикс "r" вышедшим.

Таблица 1: Данные о числе пассажиров проходящих через станции Пражского метро

m/s	thA0	rA0	thA1	rA1	thB0	rB0	thB1	rB1	thC0	rC0	thC1	rC1
1	16551	14899	30746	27320	32822	29553	21002	18793	17084	15365	4544	3118
2	16810	14292	22558	20155	25314	22567	40022	35436	29096	25876	17519	16162
3	14434	13046	28001	24916	36918	32720	35118	31145	38639	34226	38841	34819
4	20891	18696	32958	29255	46677	41259	20283	18164	23690	21145	37324	33492
5	13773	12468	28277	25159	16909	15212	41746	36944	29087	25868	16717	15461
6	14739	13313	36763	32398	21889	19569	40458	35817	21993	20494	40099	35920
7	24713	22040	34650	30735	34998	31040	19478	17460	30082	26738	42244	37797
8	10127	9278	33590	29808	23285	20791	22974	21353	18776	17263	22099	20170
9	14689	13269	12239	11126	21561	19282	25348	23430	34808	31290	40895	36617
10	13047	11833	35848	31784	37778	33472	25336	22586	26192	23751	17519	16162
11	16487	14843	38451	34061	29376	26120	23743	22025	18230	16784	38841	34819
12	14345	12968	18573	16668	32822	29553	29751	27282	37085	33283	37324	33492

Предположим, что связь между данными и метрополитеном, к которому они относятся — неизвестна. Необходимо применить метод кластеризации с целью объединить наиболее коррелирующие данные в соответствующую станцию метрополитена. В качестве алгоритма кластеризации рассматривается k-means.

## 2. Кластеризация методом k-means

*k-means* (метод *k-средних*) — наиболее популярный метод кластеризации. Действие алгоритма таково, что он стремится минимизировать суммарное квадратичное отклонение точек кластеров от центров этих кластеров.

Алгоритм разбивает множество элементов векторного пространства на заранее известное число кластеров  $k$ . Основная идея заключается в том, что на каждой

итерации перевычисляется центр масс для каждого кластера, полученного на предыдущем шаге, затем векторы разбиваются на кластеры вновь в соответствии с тем, какой из новых центров оказался ближе по выбранной метрике. Алгоритм завершается, когда на какой-то итерации не происходит изменения центра масс кластеров. Это происходит за конечное число итераций, так как количество возможных разбиений конечного множества конечно, а на каждом шаге суммарное квадратичное отклонение не увеличивается, поэтому заикливание невозможно.

У метода k-means есть несколько существенных проблем:

- Не гарантируется достижение глобального минимума суммарного квадратичного отклонения  $V$ , а только одного из локальных минимумов.
- Результат зависит от выбора исходных центров кластеров, их оптимальный выбор неизвестен.
- Число кластеров надо знать заранее.

### 3. Реализация

В рамках работы был реализован метод k-means на языке python, метод принимает на вход множество точек  $X$  и желаемое количество кластеров  $k$ ,

```
def kmeans(X, k):
    def equal(a,b):
        return set([tuple(x) for x in a]) == set([tuple(x) for x in b])

    def clusterize(X, centers):
        clusters = defaultdict(list)
        for x in X:
            cluster_index = min([(i[0], np.linalg.norm(x-centers[i[0]])) \
                                for i in enumerate(centers)], key=lambda t:t[1])[0]
            clusters[cluster_index].append(x)
        return clusters

    def get_centers(clusters):
        centers = []
        for k in sorted(clusters.keys()):
            centers.append(np.mean(clusters[k], axis = 0))
        return centers

    old_centers = random.sample(X, k)
    centers = random.sample(X, k)

    while not equal(centers, old_centers):
        old_centers = centers
        clusters = clusterize(X, centers)
        centers = get_centers(clusters)

    return (centers, clusters)
```

## 4. Тестирование

В рамках решения задачи рассматриваются точки в двумерном пространстве, где одна из осей задаёт среднее число пассажиров, вошедших с данной станции метрополитена в день, а другая среднее число пассажиров, вышедших с данной станции в день. Каждая точка определяет одну станцию в один из 12 месяцев.

Все точки были поданы на вход k-means с заданным значением числа кластеров равном 6. Так как результат алгоритма k-means зависит от выбора исходных центров кластеров, а они, в нашем случае, выбираются случайным образом, то было проведено множество запусков программы кластеризации, рассмотрим два из них:

### 4.1. Случай 1

Были получены следующие результаты кластеризации — каждому кластеру соответствует список станций метро в него попавших, которые разделены пробелами:

1. A0 A0 A1 C1
2. A0 A0 A1 B0 B0 B0 B1 B1 B1 B1 B1 C0 C0 C1
3. A1 A1 A1 A1 A1 B0 B0 B0 B0 B0 B1 C0 C0 C1 C1
4. A1 B0 B1 B1 B1 C0 C1 C1 C1 C1 C1
5. A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A1 B0 C0 C0 C0 C1 C1 C1
6. A1 A1 A1 B0 B0 B1 B1 B1 C0 C0 C0 C0

Результаты провизуализированы на рисунке 1. На нём большие голубые точки задают центры полученных кластеров, а голубые линии связывают между собой принадлежащие одному кластеру точки. Точки принадлежащие разным станциям метро, раскрашены разным цветом.

### 4.2. Случай 2

Были получены следующие результаты кластеризации — каждому кластеру соответствует список станций метро в него попавших, которые разделены пробелами:

1. A0 A0 A1 A1 B0 B0 B0 B1 B1 B1 B1 B1 C0 C0 C0 C0 C1
2. A1 A1 B0 B0 B1 B1 C0 C0 C1 C1 C1 C1 C1 C1

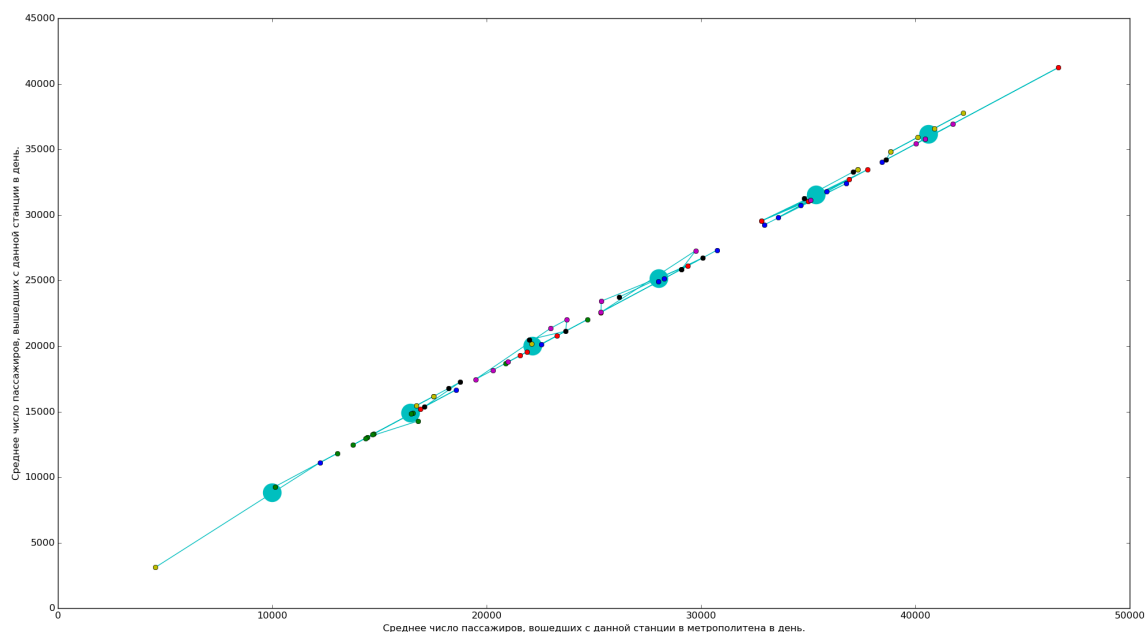


Рисунок 1 — Визуализация результатов кластеризации

3. A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A0 A1 B0 C0 C1 C1 C1 C1
4. A1 A1 A1 A1 B0 B0 B0 B1 C0
5. B0 B1 C1
6. A1 A1 A1 B0 B0 B1 B1 B1 C0 C0 C0 C0

Результаты провизуализированы на рисунке 2. На нём большие голубые точки задают центры полученных кластеров, а голубые линии связывают между собой принадлежащие одному кластеру точки. Точки принадлежащие разным станциям метро, раскрашены разным цветом.

Из результатов кластеризации видно, что в обоих случаях в целом кластеры не совпали с данными о станциях, что позволяет сделать вывод о сильной однородности входных данных. Также можно заметить, что достаточно много точек станции A0 (в первой случае 8, во втором 10) попали в рамки одного кластера, что говорит, об заметном отличии данных о станции A0, от остальных.

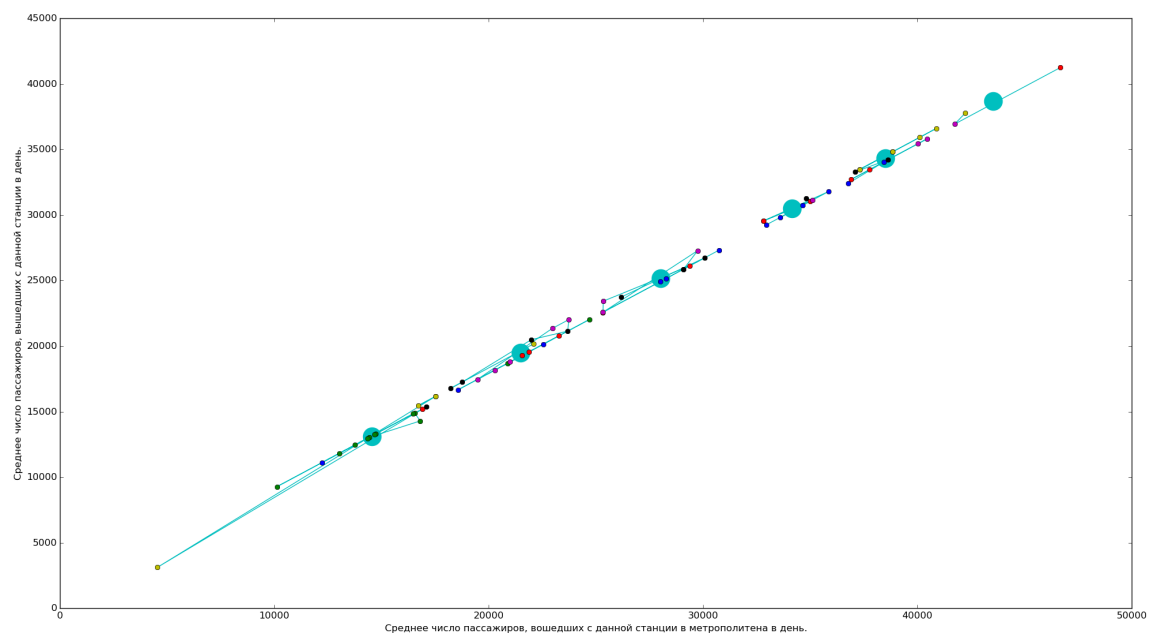


Рисунок 2 — Визуализация результатов кластеризации