

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА**
Факультет информатики и систем управления
Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №3
по курсу «Теория игр и исследование операций»

«Целочисленное линейное программирование. Метод ветвей и границ»

Выполнил:
студент ИУ9-111
Выборнов А.И.
Руководитель:
Басараб М.А.

Москва 2015

1. Цель работы

Постановка задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ (МВГ).

2. Постановка задачи

Найти целочисленный вектор $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ как решение следующей задачи ЦЛП:

$$F = cx \rightarrow \max,$$

$$Ax \leq b,$$

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$c = [2, 5, 3], A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, b^T = [6, 6, 2]$$

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 0.5x_2 + x_3 \leq 2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \in Z_+^0.$$

3. Решение задачи ЦЛП методом полного перебора

Находим решение задачи ЛП симплекс-методом (приведено в главе 5):

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \end{cases}$$
$$\max(F(x)) = 16.75$$

Все допустимые целочисленные решения: $(0,1,0)$, $(0,2,0)$, $(0,3,0)$, $(0,1,1)$, $(0,2,1)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,1)$, $(1,2,1)$

Полный перебор всех вариантов даёт два решения:

$$x = (1, 2, 1), x = (0, 3, 0),$$
$$F(x) = 15.$$

4. Решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ

Решим исходную задачу ЛП. Сменим знак ЦФ, введем фиктивные переменные x_4, x_5, x_6 :

$$F = -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$
$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3). \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in Z_+^0.$$

Исходная симплекс-таблица имеет вид:

| | s_{i0} | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|----------|-------|-------|-------|
| x_4 | 6 | 2 | 1 | 2 |
| x_5 | 6 | 1 | 2 | 0 |
| x_6 | 2 | 0 | 0.5 | 1 |
| F | 0 | -2 | -5 | -3 |

Конечная симплекс таблица:

| | s_{i0} | x_1 | x_5 | x_6 |
|-------|----------|-------|-------|-------|
| x_4 | 1 | 0.5 | 0 | 0.5 |
| x_2 | 2.5 | -0.25 | 0.5 | 0 |
| x_3 | 0.75 | 0.125 | -0.25 | 0.75 |
| F | 16.75 | 0.125 | 1.75 | 2.75 |

Решение задачи ЛП симплекс-методом:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \end{cases}$$

$$F = 16.75$$

Осуществим ветвление по переменной x_2 :

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

4.1. Ветвь $x_2 \geq 3$

$$F = -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3), \\ x_7 = -3 - (-x_2). \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in Z_+^0.$$

| | s_{i0} | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|----------|-------|-------|-------|
| x_4 | 6 | 2 | 1 | 2 |
| x_5 | 6 | 1 | 2 | 0 |
| x_6 | 2 | 0 | 0.5 | 1 |
| x_7 | -3 | 0 | -1 | 0 |
| F | 0 | -2 | -5 | -3 |

Получили решение: $X_1 = 0, X_2 = 3, X_3 = 0.5, F = 16.5$.

Осуществим ветвление по переменной x_3 :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_3 \geq 1 \end{cases}$$

4.1.1. Ветвь $x_3 = 0$

$$F = -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3), \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in Z_+^0.$$

Так как x_3 равно 0, то заменим эту переменную на 0, получим:

$$F = -2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2), \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in Z_+^0.$$

| | s_{i0} | x_1 | x_2 |
|-------|----------|-------|-------|
| x_4 | 6 | 2 | 1 |
| x_5 | 6 | 1 | 2 |
| x_6 | 2 | 0 | 0.5 |
| F | 0 | -2 | -5 |

Получили решение: $X_1 = 0, X_2 = 3, X_3 = 0, F = 15$.

4.1.2. Ветвь $x_3 \geq 1$

$$F = -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3), \\ x_7 = -1 - (-x_3). \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in Z_+^0.$$

| | s_{i0} | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|----------|-------|-------|-------|
| x_4 | 6 | 2 | 1 | 2 |
| x_5 | 6 | 1 | 2 | 0 |
| x_6 | 2 | 0 | 0.5 | 1 |
| x_7 | -1 | 0 | 0 | -1 |
| F | 0 | -2 | -5 | -3 |

Получили решение: $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, F = 15$.

4.2. Ветвь $x_2 \leq 2$

$$F = -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3), \\ x_7 = 2 - x_2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in Z_+^0.$$

| | s_{i0} | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|----------|-------|-------|-------|
| x_4 | 6 | 2 | 1 | 2 |
| x_5 | 6 | 1 | 2 | 0 |
| x_6 | 2 | 0 | 0.5 | 1 |
| x_7 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | -2 | -5 | -3 |

Получили решение: $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, F = 15$.

Методов ветвей и границ получили два оптимальных решения:

$$x = (1, 2, 1), x = (0, 3, 0),$$

$$F(x) = 15.$$

5. Решение исходной задачи ЛП

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 0.5x_2 + x_3 \leq 2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Избавимся от неравенства - получим задачу в канонической форме:

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6, \\ 0.5x_2 + x_3 + x_6 = 2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (1)$$

Пусть x_4, x_5, x_6 — базисные переменные, x_1, x_2, x_3 — свободные переменные. Тогда имеем:

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3). \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (2)$$

Исходная симплекс-таблица записывается в виде:

| | s_{i0} | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|----------|-------|----------|-------|
| x_4 | 6 | 2 | 1 | 2 |
| x_5 | 6 | 1 | 2 | 0 |
| x_6 | 2 | 0 | 0.5 | 1 |
| F | 0 | -2 | -5 | -3 |

Так как в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, то найдено

опорное решение: $x = [0, 0, 0, 6, 6, 2]$, $F(x) = 0$. В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученное решение не оптимально.

x_2 — разрешающий столбец, так как значение в строке таблицы, соответствующей целевой функции по модулю максимально.

Найдем минимальное положительное отношение элемента свободных членов s_{i0} к соответствующему элементу в разрешающем столбце. Минимальное положительное отношение в строке x_5 , выберем её в качестве разрешающей.

Пересчитываем симплекс таблицу:

| | s_{i0} | x_1 | x_5 | x_3 |
|-------|----------|-------|-------|----------|
| x_4 | 3 | 1.5 | -0.5 | 2 |
| x_2 | 3 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| x_6 | 0.5 | -0.25 | -0.25 | 1 |
| F | 15 | 0.5 | 2.5 | -3 |

В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученное решение не оптимально. В качестве разрешающего столбца выбираем x_3 и в качестве разрешающей строки выбираем x_6 (причины выбора аналогичны описанным выше).

Пересчитываем симплекс таблицу:

| | s_{i0} | x_1 | x_5 | x_6 |
|-------|----------|----------|-------|-------|
| x_4 | 2 | 2 | 0 | -2 |
| x_2 | 3 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| x_3 | 0.5 | -0.25 | -0.25 | 1 |
| F | 16.5 | -0.25 | 1.75 | 3 |

В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученное решение не оптимально. В качестве разрешающего столбца выбираем x_1 и в качестве разрешающей строки выбираем x_4 (причины выбора аналогичны описанным выше).

Пересчитываем симплекс таблицу:

| | s_{i0} | x_1 | x_5 | x_6 |
|-------|----------|-------|-------|-------|
| x_4 | 1 | 0.5 | 0 | 0.5 |
| x_2 | 2.5 | -0.25 | 0.5 | 0 |
| x_3 | 0.75 | 0.125 | -0.25 | 0.75 |
| F | 16.75 | 0.125 | 1.75 | 2.75 |

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому таблица опре-

деляет оптимальное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \end{cases}$$
$$\max(F(x)) = 16.75$$

Проверим полученное решение на допустимость:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \\ x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3) = 6 - (4.5 + 1.5) = 0, \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2) = 6 - (1 + 5) = 0, \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3) = 2 - (1.25 + 0.75) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение допустимое, так как все переменные неотрицательны.