ЛЕКЦИЯ №1

Введение.

Основные понятия.

Понятие оптимальности

Понятие оптимальности предполагает наличие критериев оценки качества решения. При этом должно достигаться экстремальное значение этих критериев при удовлетворении некоторых ограничивающих условий.

С точки зрения математики задачи, поставленные таким образом, называются экстремальными. Это задачи, для которых ищется экстремум – т.е. минимум или максимум некоторой функции или функционала при заданных ограничениях.

Понятие оптимальности

В наиболее общем виде задачу оптимального проектирования можно поставить как экономическую, то есть записать её с точки зрения принципа ЗАТРАТЫ-ЭФФЕКТИВНОСТЬ. При этом общий критерий эффективности может быть выражен следующим образом.

$$\max I = \max E - \min C,$$ где

I - экономическая эффективность от внедрения инновации (т. е. новой конструкции);

E - экономическая эффективность эксплуатации объекта проектирования;

C - затраты на производство и эксплуатацию (себестоимость).

Понятие оптимальности

Обычно используют частные оптимизационные модели, позволяющие выразить математические соотношения частных критериев и ограничений через выбранные переменные проектирования (например: линейные размеры элементов, площади поперечных сечений, моменты инерции сечений и т. п.). Например, в качестве условий поиска оптимального решения могут быть выбраны различные функции, зависящие от переменных проектирования.

Например:

min P – вес конструкции;

max G – жесткость конструкции;

max S – прочность конструкции;

max U – устойчивость конструкции.

Понятие оптимальности

Ищется минимум веса

$$x^{opt} = Arg\min_{x\in X} P(x, y),$$

которому соответствует вектор оптимальных переменных проектирования . (*x* – переменные проектирования, варьируемые в процессе оптимизации; *X* - область допустимых значений переменных проектирования).

$$Arg\min P(x, y)$$

- означает получение вектора проектирования *(Arg)*, соответствующего минимальному значению критерия оптимизации, которым в данном случае является вес конструкции. При этом для каждого варианта переменных проектирования *x* решается система уравнений состояния

$$H(x,y) = 0,$$

описывающие физические процессы, протекающие в конструкции (уравнения равновесия, динамические уравнения колебательной системы и т. п.).

Понятие оптимальности

Соответственно переменные проектирования и переменные состояния могут быть представлены в векторном виде:

x^{opt} - оптимальное решение;

$$x^{opt} = [x_1^{opt}, ..., x_n^{opt}]^{\mathrm{T}}$$

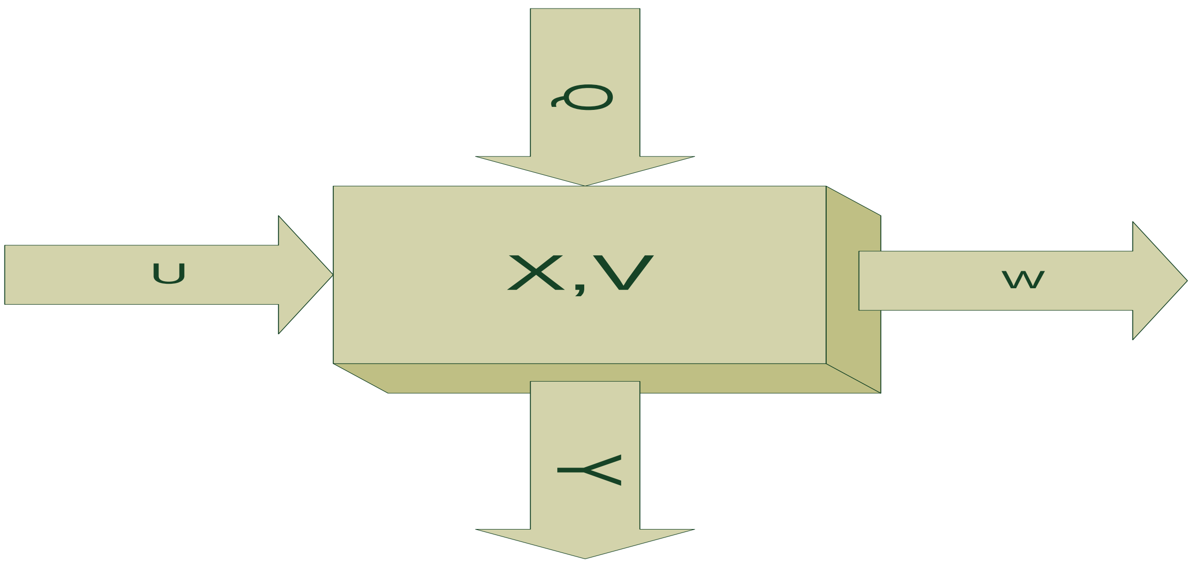
-оптимальный вектор переменных проектирования (площади поперечного сечения, моменты инерции сечения, коэффициенты жесткости, коэффициенты демпфирования и т. п.)

$$y = [y_1, ..., y_m]^{\mathrm{T}}$$

- вектор переменных состояния (перемещения, деформации напряжения и т.п.);

Понятие оптимальности

МОДЕЛЬ



ПАРАМЕТРЫ

Q - внешние
X - внутренние
Y - выходные

ПЕРЕМЕННЫЕ

U - входные
V - фазовые
W – выходные (состояния)

Понятие оптимальности

<u>Общая формулировка задачи оптимального проектирования</u>

$$\begin{cases} x^{opt} = Arg\min F(x, y, c, s) \\ g_i(x_i) \le 0, i = \overline{1, n} \\ g_j(x, y, c, s) \le 0, \ j = \overline{1, m} \\ H_k(x, y, c, s) = 0, k = \overline{1, p} \end{cases}$$

Понятие оптимальности

Общая формулировка задачи оптимального проектирования

Область допустимых значений переменных проектирования (ОДЗ)

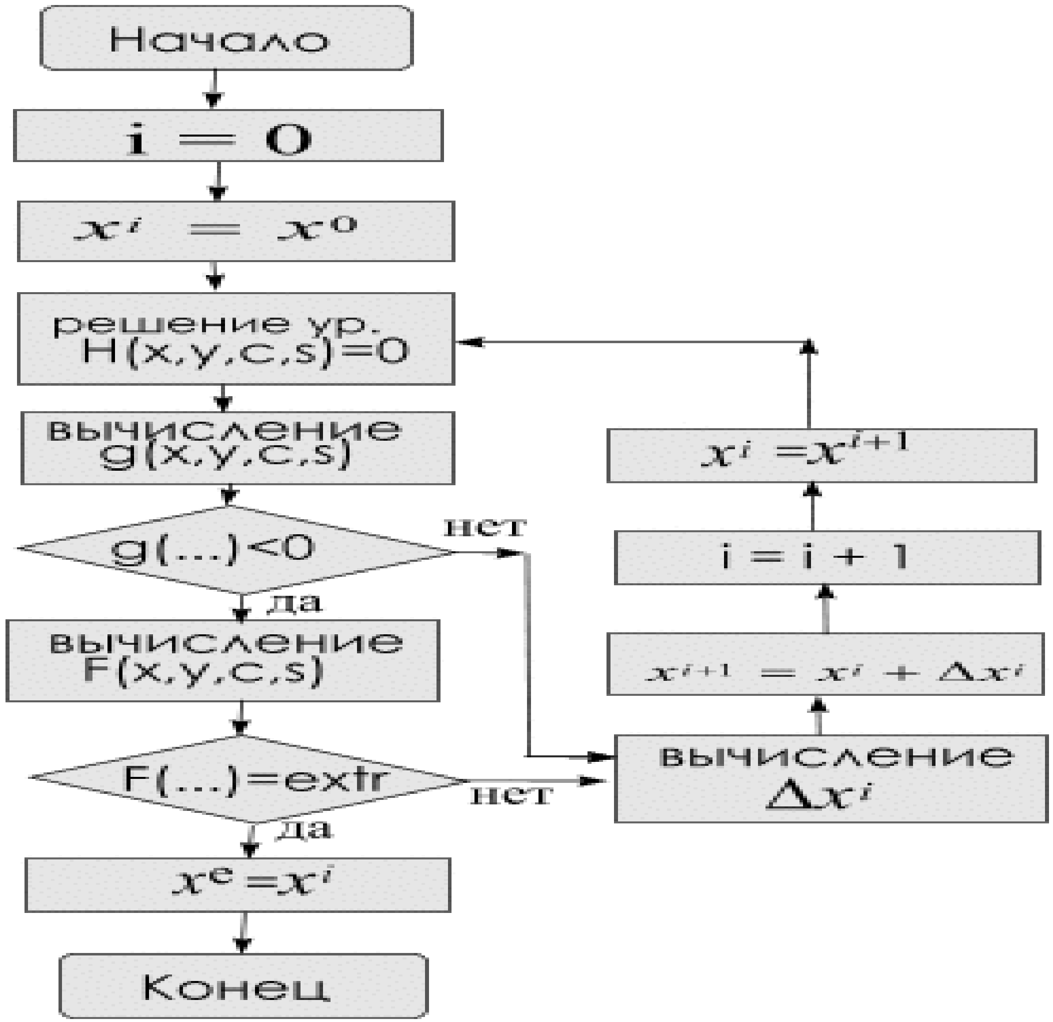
$x \in X \subset R^n$

определяется параметрическими $g_i(x_i) \le 0, i = \overline{1, n}$

и функциональными $g_j(x, y, c, s) \le 0, j = \overline{1, m}$

ограничениями (размерности *n* и *m* соответственно). Решение системы уравнений состояния $H_k(x, y, c, s) = 0, k = \overline{1, p}$ позволяют находить значения переменных состояния *у* при фиксированных значениях переменных проектирования *х*. В свою очередь найденные значения переменных состояния позволяют определять значения функциональных ограничений, что даёт возможность выделить область допустимых значений переменных проектирования. В зависимости от конкретной задачи уравнения состояния могут быть представлены различными видами уравнений: алгебраическими, дифференциальными, интегральными, интегро-дифференциальными и т.п. При этом вектор переменных проектирования *х* определяется областью допустимых значений переменных проектирования *X*, т.е. $x \in X \subset R^n$, (где *n* – размерность пространства переменных проектирования).

Условный алгоритм численной оптимизации



Решение оптимизационной задачи

Найденное решение $x^e = x_i$

носит название ***эффективной точки***. Это решение не обязательно соответствует точному решению задачи поиска экстремума. Точное решение называется ***критической точкой*** x^{opt}

В отличие от него реальное решение, полученное в результате численного алгоритма с учетом условия останова, является приближенным. При этом реальная точка экстремума может лежать за пределами области допустимых решений ***X*** (ОДЗ). В процессе решения происходит приближение к этой точке и, в какой-то момент, поиск решения может оказаться на границе области допустимых решений, тогда соответствующее ограничение либо нарушено $g_{ja}(x,y,c,s) > 0,\ j_a = Ja$

либо превращается в равенство $g_{ja}(x,y,c,s) = 0,\ ja = Ja$

. Множество таких ограничений носит название ***множество активных ограничений.***

Понятие оптимальности

При построении оптимизационной модели можно выделить несколько этапов.

1. Выбор переменных состояния, конструктивных параметров, параметров нагрузки и построение исходной математической модели в виде уравнений состояния.
2. Выбор переменных проектирования, и определение целевой функции или целевого функционала.
3. Выбор параметрических и функциональных ограничений и завершение построения оптимизационной модели.

Понятие оптимальности

Классификация оптимизационных моделей.

- ***Линейные.***
- ***Нелинейные.***
- ***Одноэкстремальные.***
- ***Многоэкстремальные.***
- ***Однокритериальные.***
- ***Многокритериальные.***
- ***Детерминированные.***
- ***Стохастические.***
- ***Задачи вариационного исчисления.***
- ***Задачи оптимального управления.***
- ***Модели, включающие различного типа неопределенности.***

Понятие оптимальности

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

Основные требования, предъявляемые к конструкции хвостовой части вертолёта “COBRA”:

1. Обеспечение минимального веса конструкции.
2. Обеспечение минимальной уязвимости конструкции.

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

Было предложено два концептуальных проекта:

1.<u>Корпус закрытого типа</u>.

<u>2. Корпус открытого типа (стержневая форма)</u>.

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

1.<u>Корпус закрытого типа</u>.

<u>Конечные элементы:</u>

-стержни;

-балки;

-панели;

-мембраны.

Материал: дюраль.

$\sigma_{тс}=\sigma_{тр}=280$ МПа; $n=1{,}2\div1{,}8$; $\rho=2{,}7$ г/см^3; $E=0{,}8*10^5$ МПа, $[\sigma]=150$ МПа; $\mu=0{,}3$.

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

2.<u>Корпус открытого типа (стержневая форма)</u>.

M=6; Nj=18;

M – число секций;

Nj – число стержней в секции.

Конечные элементы: стержни трубчатого сечения.

Площадь поперечного сечения: i - номер стержня, i=1,…,Nj, j – номер секции, j = 1,…,M.

<u>Построение оптимизационной модели</u>.

<u>Рассмотрим I секцию: 4 узла; 18 стержней; 4*3=12 степенй свободы.</u>

Во всей конструкции:

Число узлов 28 (6*4+4=28);

Число стержней 108 (6*18=108);

Число степеней свободы 72 (6*4*3=72).

Выбор переменных проектирования будем производить используя эвристические соображения о характере нагружения.

Nj=18 – число стержней в секции;

M=6 – число секций.

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

2.<u>Корпус открытого типа (стержневая форма)</u>.

1. <u>Критерий оптимизации</u> – вес конструкции:

$$\min P = \rho g \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_j} l_{ij} A_{ij} .$$

<u>2. Переменные проектирования.</u>

xij=Aij – площадь поперечного сечения i-го стержня в j-ой секции;

x11⇒ I группа (1,2,3,4);

x21⇒ II группа (5,6,7,8,9,10,11,12)

x31⇒ III группа (13,14,15,16)

x41⇒ IV группа (17,18)

Всего 6 секций, 24 переменных. Тогда <u>критерий оптимальности (целевая функция)</u> может быть записан в виде:

$$\min F = \sum_{J=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_j} l_{ij} x_{ij} .$$

$y_{1k} = z_{1k}$

Пример. Построение оптимизационной модели хвостовой части вертолёта “COBRA”.

2.<u>Корпус открытого типа (стержневая форма)</u>.

<u>3 . Уравнения состояния (конечноэлементная модель)</u>.

А) K(x)z1=S – уравнения упругих перемещений;

K(x) – матрица жесткости;

z1 – узловые перемещения;

S – внешняя нагрузка.

Б) K(x)z2=λM(x)z2 – уравнения собственных колебаний;

M(x) – матрица инерционных характеристик элементов конструкции;

z2 – собственные формы колебаний;

$$\min F = \sum^{M} \sum^{N_j} l_{ij} x_{ij}.$$

λ - собственные значения.

λi– квадраты собственных частот колебаний элементов конструкций;

Всего 144 уравнения.

<u>4. Переменные состояния (144 переменных состояния)</u>.

$$z_{1k} = [u_k, v_k, w_k]$$

- узловые перемещения к-го узла (72 переменных).

- собственные формы колебаний; <u>Ограничения</u>.

5.1. <u>Параметрические ограничения</u>.

D*српij=24 мм; A*ij=53мм2; t*ij=0,7 мм; A**ij=1000 мм2.

5.2. <u>Функциональные ограничения</u>.

А) Напряжения: Б) Критические силы: В) Перемещения: Г) Частота собственных колебаний всей конструкции: Гц.