# Защита информации

Павел Юдаев

МГТУ им. Баумана, Кафедра ИУ-9

Москва, 2014

# Раздел 8 - Криптографические хэш функции

## Опр.

детерминированная ф-я $H : M \to T$ - *хэш функция*, если $|M| \gg |T|$

## Опр.

*Коллизия* для H - это пара $m_0, m_1 \in M : H(m_0) = H(m_1)$

## Опр.

Функция H наз. *устойчивой к коллизиям*, если для любого явно описанного алгоритма $A \in \mathrm{PPT}$,
$Adv_{CR}[A, H] = P(A$ дает коллизию для H$) < \varepsilon(log(|T|))$
пренебр. малая.

На практике нужно $\forall A : time(A) < N$
$Adv_{CR}[A, H] = P(A$ дает коллизию для H$) < \varepsilon = const$

Следствие 1: если H уст. к коллизиям, по паре $(m, t)$ трудно найти $m_1 : t = H(m_1)$.

Следствие 2: если H уст. к коллизиям, трудно найти два сообщения $m, m_1 : H(m) = H(m_1)$

## Опр.

Функция H наз. *стойкой к восстановлению прообраза*, если по $t$ трудно найти прообраз $m : t = H(m)$.

$\forall A \in \mathrm{PPT}\ Adv_{PI}[A, H] = P(t \xleftarrow{R} T \ \Rightarrow A(t) = x : H(x) = t) < \varepsilon$

## Утверждение

Если H стойкая к коллизиям, то она стойкая к восстановлению прообраза.

## Док-во

$x \xleftarrow{R} M$, $H(x) = t$. Пусть $A(t) = x' : H(x') = t$.
Т.к. $|M| \gg |T|$, с высокой вер-ю $x' \neq x$.

(рисунок)

## Опр.

Функция H наз. *криптографической хэш функцией*, если она стойкая к коллизиям и к восстановлению прообраза.

## Утверждение

$\forall$ хэш функции $H : M \to \{0,1\}^n$ за время $O(2^{n/2})$ можно найти коллизию с вер-тью более 0.5.

## Док-во

Применить парадокс дней рождения.

## Скорость хэш функций

AMD Opteron, 2.2 GHz, Linux, Crypto++ v5.6

| | function | digest size (bits) | Speed (MB/sec) | generic attack time |
|---|---|---|---|---|
| NIST standards | SHA-1 | 160 | 153 | $2^{80}$ |
| | SHA-256 | 256 | 111 | $2^{128}$ |
| | SHA-512 | 512 | 99 | $2^{256}$ |

(Лучший алгоритм поиска коллизий для SHA-1 требует вычисл. хэша для $2^{52}$ сообщ.)

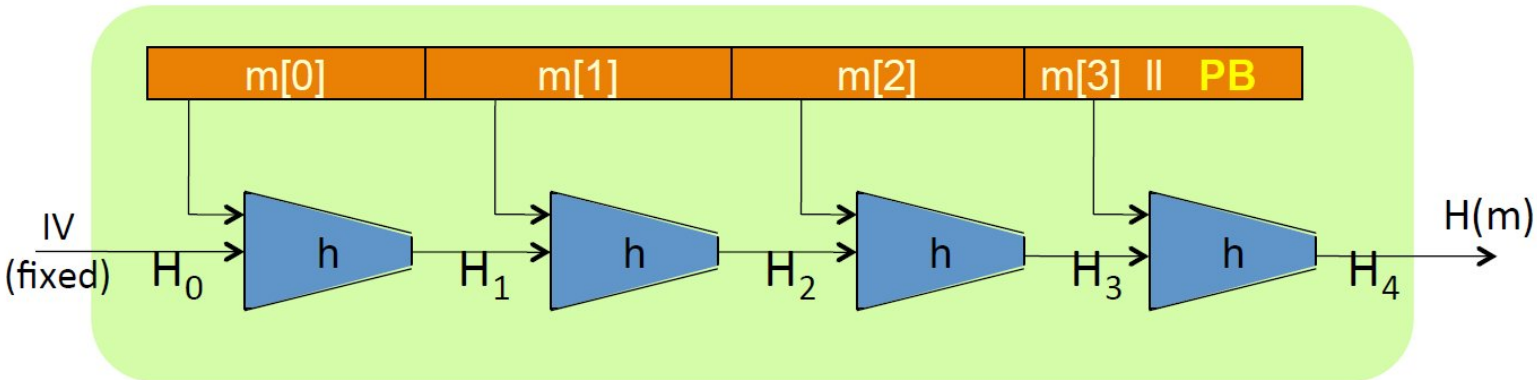
Поиск коллизий на квантовом компьютере (для справки)

| | обычн. комп. | квант. комп. |
|---|---|---|
| Блочн. шифр $C : K \times X \to X$, перебор ключей | $O(\lvert K \rvert)$ | $O(\lvert K \rvert^{1/2})$ |
| Хэш $H : M \to T$, поиск коллизий | $O(\lvert T \rvert^{1/2})$ | $O(\lvert T \rvert^{1/3})$ |

# Раздел 8 - Криптографические хэш функции

## Конструкция Меркля-Дамгарда (Merkle-Damgard) - построение хэш функций на основе функции сжатия

По функции сжатия $h : T \times X \to T$ постр. хэш функцию $H : X^{\leq L} \to T$




PB - дополнение до длины блока, $(10..0||msg\_len)$, длина поля $msg\_len$ - 64 бита

## Теорема 1

если $h$ устойчива к коллизиям, то $H$ - тоже.

Т.е., чтобы построить устойч. к коллизиям хэш функцию, достаточно
построить устойч. к коллизиям функцию сжатия.

## Док-во

покажем, что коллизия $h$ необх. для коллизии $H$,
т.е. коллизия $H \Rightarrow$ коллизия $h$.
Пусть $H(M) = H(M')$, $M \neq M'$. Построим коллизию для $h$.

## Док-во (Продолжение)

В нашей конструкции для $M$ и $M'$ имеем две последовательности

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $IV = H_0$ | $H_1$ | ... | $H_t$ | $h(H_t,\ M_t\|\|PB) = H_{t+1} = H(M)$ |
| $IV' = H'_0$ | $H'_1$ | ... | $H'_r$ | $h(H'_r,\ M'_r\|\|PB') = H'_{r+1} = H(M')$ |

Справа $h(H_t,\ M_t||PB) = H_{t+1} = H'_{r+1} = h(H'_r,\ M'_r||PB')$

Если $H_t \neq H'_r$ или $M_t \neq M'_r$ или $PB \neq PB'$,
то имеем коллизию для $h$ на последнем шаге.

## Док-во (Продолжение)

Иначе имеем $H_t = H'_r$ & $M_t = M'_r$ & $PB = PB'$, след-но $t = r$.

След-но на предыд. шаге величины были равны:

$$h(H_{t-1},\ M_{t-1}) = H_t = H'_t = h(H'_{t-1},\ M'_{t-1})$$

Снова, если $H_{t-1} \neq H'_{t-1}$ или $M_{t-1} \neq M'_{t-1}$, то имеем коллизию для $h$.

## Док-во (Продолжение)

След-но на предыд. шаге величины были равны:

$$H_{t-1} = H'_{t-1} \ \& \ M_{t-1} = M'_{t-1}$$

Пройдем по всем шагам, тогда: либо мы встретим коллизию для $h$,
либо $\forall i \ M_i = M'_i$, т.е. $M = M'$ - против. с тем, что $M \neq M'$.

Ч.т.д.

## Функция сжатия на основе блочного шифра

$(E, D)$ - блочный шифр, $E,\ D : K \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$

Если ф-я сжатия $h(H, m) := E(m, H)$,

то она имеет коллизии $(H, m), (H', m')$:
случ. одноблочные $m, m'$,
пусть $H' = D(m', E(m, H)) \Rightarrow\ h(H', m') = E(m', H') = h(H, m)$.

Не годится для конструкции М.-Д.

## Опр.

Функция сжатия Дэвиса-Мейера (Davies, Meyer) - это $h(H, m) = E(m, H) \oplus H$.

## Теорема 2

Пусть (E,D) - идеальный шифр (т.е. это |K| различных перестановок множества M). Тогда для того, чтобы найти коллизию функции Дэвиса-Мейера $h(H, m) = h(H', m')$, необх. не менее $O(2^{n/2})$ вычислений шифра.

Т.е. достигается теоретическая граница. Без док-ва.

Другие варианты с одним $\oplus$ не уст. к коллизиям. Без док-ва.

(*) С двумя $\oplus$ многие варианты уст. к коллизиям,
но это медленнее на целый $\oplus$, напр.

$h(H, m) = E(m, H) \oplus H \oplus m$
$h(H, m) = E(H \oplus m, m) \oplus m$

## Пример

Х/ф SHA-256 (2001):

- Конструкция Меркля-Дамгарда
- Функция сжатия Дэвиса-Мейера
- Блочный шифр SHACAL-2

## Функция сжатия, основанная на задаче из класса NP

Выберем случайное простое число $p$ длиной 2000 бит и случайные целые $1 \leq u, v \leq p - 1$.

Пусть $h(H_i, m_i) = u^{H_i} \cdot v^{m_i} \ mod \ p$
(операции в конечном поле $\mathbb{Z}_p$)

### Утверждение

Чтобы найти коллизию для $h$, необх. найти дискретный логарифм нек. элемента из $\mathbb{Z}_p$, а это - задача из класса NP.

Недостаток $h$: медленно работает.

# Раздел 8 - Криптографические хэш функции

## MAC на основе хэш функции, устойчивой к коллизиям

Общий вид.

Пусть $I = (S, V) : K \times M \to T$ - MAC короткого сообщения, напр., AES для неск. блоков.
Пусть $H : M^{big} \to M$.

Определим $I^{big} = (S^{big}, V^{big}) : K \times M^{big} \to T$:
$S^{big}(k, m) = S(k, H(m))$,
$V^{big}(k, m, t) = V(k, H(m), t)$

(рисунок)

### Пример

$S(k, m) = AES_{2-block-cbc}(k, SHA256(m))$ - криптостойкий MAC.

## Теорема 3 (Достаточность)

Если $I$ - криптостойкий MAC и $H^{big}$ устойчивая к коллизиям х/ф, то $I^{big}$ - криптостойкий MAC.

## Док-во (Набросок. От противного.)

Пусть $y := H(m),\ t := S(k, y) = S(k, H(m))$.
1) $A$ может найти $m' \neq m :\ H(m') = H(m)$. Против.: $H$ устойч. к коллизиям.
2) $A$ не может найти коллизию H, но может найти новую верную пару $(m, t)$ для $I^{big}$
$\Leftrightarrow$ $A$ может найти новую верную пару $(y, t)$ для $I$. Против.: MAC $I$ - криптостойкий.
Ч.т.д.

(рисунок)

## Теорема 4 (Необходимость)

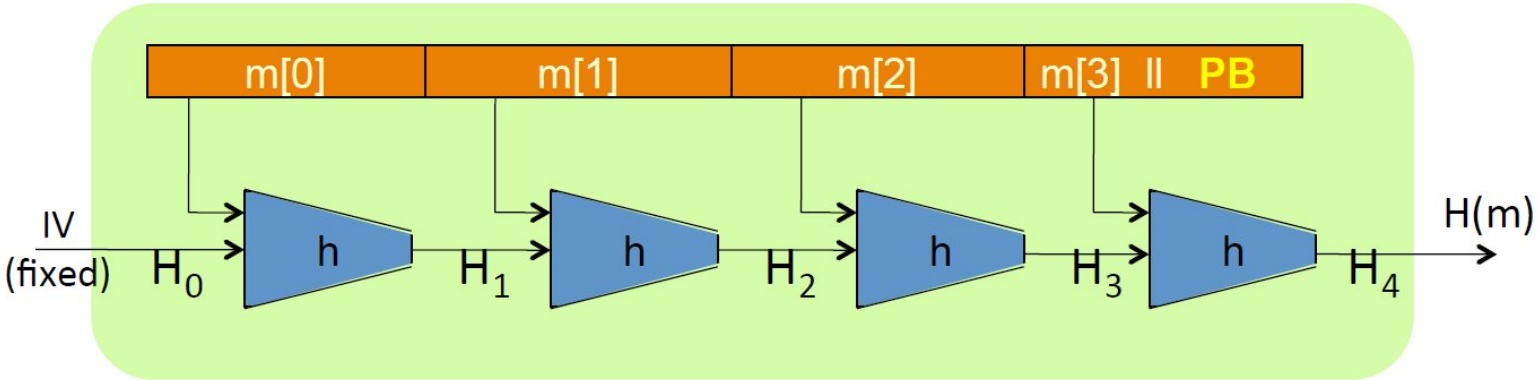
Если $I^{big}$ криптостойкий, то $H$ устойчивая к коллизиям х/ф.

## Док-во

(От противн.) Пусть злоум-к может найти коллизию $m_0 \neq m_1 : H(m_0) = H(m_1)$. Тогда $S^{big}$ не криптостойкий:
1) злоум-к получает $t = S(k, m_0)$
2) злоум-к предъявляет пару $(m_1, t)$.
Ч.т.д.

## HMAC - Hash-MAC

MAC на основе x/ф SHA-256



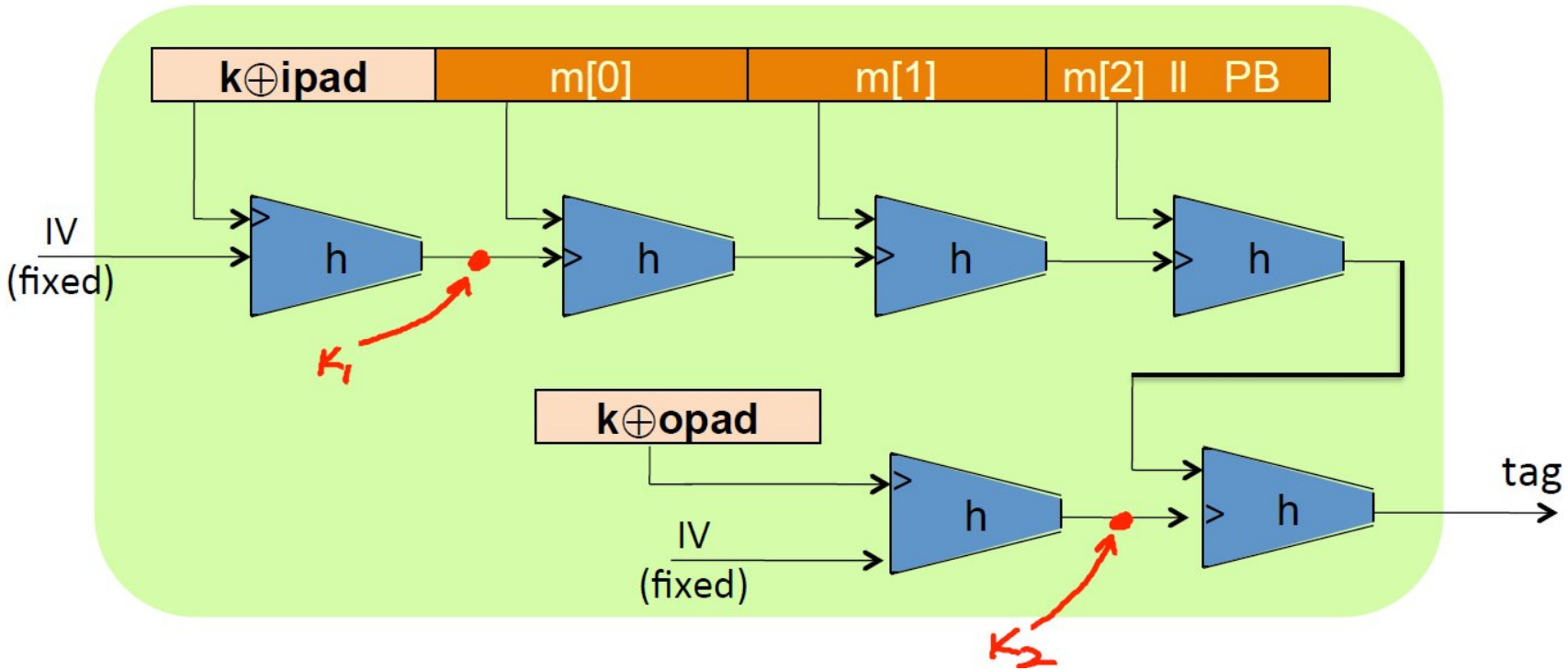

Хэш Меркля-Дамгарда, устойч. к коллизиям. Построим MAC на его основе.

Примитивно: $S(k, m) = H(k||m)$ или $k$ вместо IV...

Проблема: $S(k, m) \Rightarrow S(k, m||PB||w) = h(w, S(k, m))$

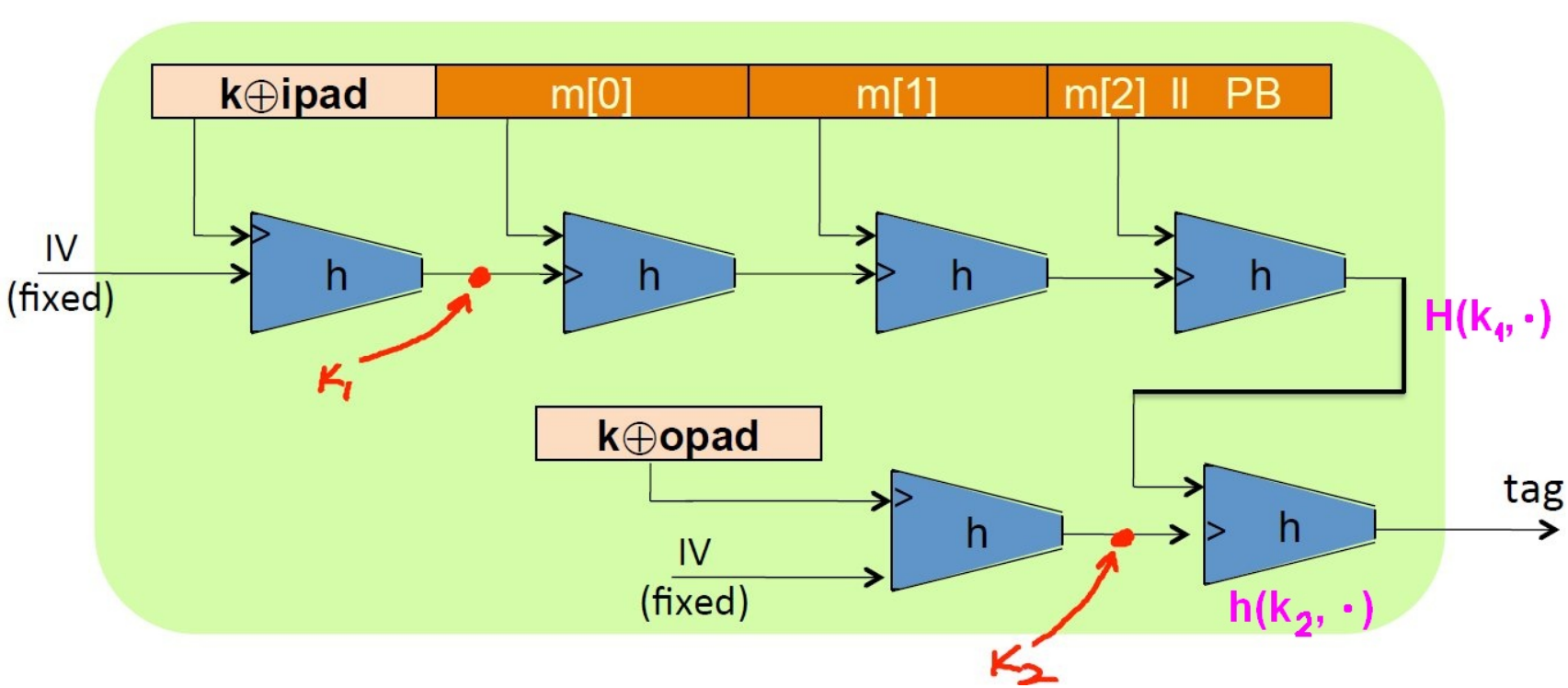
## Опр.

HMAC: $S(k, m) = H(k \oplus opad || H(k \oplus ipad || m))$. H - это SHA256.




opad, ipad - разные, открытые, одноблочные константы.

$\Rightarrow$ $k_1$, $k_2$ разные. (Похоже на CBC-MAC.)




$\hat{H} := H(k_1, \cdot)$ - SHA256, параметризованная секр. ключом $k_1$. Устойчивая к коллизиям по $m$.

$h(k_2, \cdot)$ - ф. сжатия Д.-М., уст. к коллизиям по $m$.

MAC $\hat{h}$: $S(k_2, m) = h(k_2, m)$.

## Теорема 5

Пусть $\hat{H}$ - устойчивая к коллизиям х/ф.
Пусть $\hat{h}$ - криптостойкий MAC для сообщений фикс. длины.
Тогда HMAC - криптостойкий MAC для сообщений произв. длины.

## Док-во (Набросок)

Аналогично тому, что было ранее для MAC.

Срок жизни ключа:
HMAC криптостойкий при $q^2/|T| < \varepsilon$

HMAC используется:
в TLS/SSL и во мн. др. сетевых протоколах.

## Атаки на HMAC по сторонним каналам
Side-channel attacks

- по времени выполнения сравнения. Тривиальный программный код:

```
def Verify(key, msg, t):
  return t == HMAC(key, msg)
```

Размер тэга - 256 бит. Сравнение ленивое, побайтно.

Злоум-к за 256 запросов может узнать правильное значение первого байта тэга. Потом - второго байта...

Напишем код, который принудительно сравнивает все байты... компилятор может соптимизировать!

Поэтому - решение:

```
def Verify(key, msg, t):
  mac = HMAC(key,msg)
  return HMAC(key, mac) == HMAC(key, t)
```

Злоум-к не знает, какие значения сравниваются.

## Литература к лекции

нет