МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЯ

Пусть внутри ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ необходимо найти решение операторного уравнения

$$Au = f \qquad (1)$$

с однородными граничными условиями

$$L_i u = 0, \quad i = \overline{1, N} \qquad (2)$$

на границе $\partial\Omega$.

f – известная функция;
A, L – дифференциальные операторы
(в частном случае L – тождественный оператор)

Пусть выбран базис

$$\{\varphi_k\},$$

каждая функция которого удовлетворяет ГУ (2)

$$L\varphi_k = 0$$

Решение задачи (1)–(2) ищется в виде

$$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{K} c_k \varphi_k \,. \qquad (3)$$

Очевидно при этом

$$L\tilde{u} = \sum_{k=0}^{K} c_k L\varphi_k = 0.$$

<u>Задача</u>: найти неопределенные компоненты c_k.

Методы минимизации невязки

Подставив разложение (3) в уравнение (1)

$$A\tilde{u} = f\,,$$

найдем невязку

$$\delta(\mathbf{x}; c_1, ..., c_K) = \sum_{k=1}^{K} c_k A\varphi_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$$

$$(\mathbf{x} \in \Omega)$$

Необходимо выбрать набор $\{c_k\}$ так, чтобы получить невязку, наименее уклоняющуюся от нуля.

1 Метод коллокации

Выберем в области Ω *K* точек $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{K}$ и потребуем, чтобы в этих точках невязка была равна нулю:

$$\delta(\mathbf{x}_j; c_1, \ldots, c_K) = 0$$

$$(j = \overline{1, K})$$

Т.е.

$$\sum_{k=1}^{K} c_k A\varphi_k(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j), \quad (j = \overline{1, K})$$

Считая краевые условия задачи и оператор *A* линейными, получаем в результате систему *K* линейных алгебраических уравнений с *K* неизвестными.

Преимущества метода коллокации:

- простота вычислений;
- после вычисления постоянных c_k обычно нетрудно проследить характер невязки вне точек $\mathbf{x}_j$ и сделать заключение о погрешности решения.

Основной недостаток:

сложность выбора узлов коллокации $\mathbf{x}_j$.

Проблема эффективно решается при использовании в качестве базиса $\{\varphi_k\}$ финитных функций, например, *B*-сплайнов.

Модификация метода коллокации

Выбирается $N > K$ точек коллокации $\mathbf{x}_j$, а постоянные c_k находятся по методу наименьших квадратов, т.е. из условия

$$Q(c_1,...,c_K) = \sum_{j=1}^{N} \delta^2(\mathbf{x}_j; c_1,...,c_K) \to \min.$$

Соответствующая СЛАУ

$$\frac{\partial Q}{\partial c_k} = 2\sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{x}_j; c_1,...,c_K) \frac{\partial \delta(\mathbf{x}_j; c_1,...,c_K)}{\partial c_k} = 0, \quad (k = \overline{1,K})$$

Т.е.

$$\sum_{m=1}^{K} c_m \sum_{j=1}^{N} \Big(A\varphi_k(\mathbf{x}_j) \cdot A\varphi_m(\mathbf{x}_j) \Big) = \sum_{j=1}^{N} \Big(A\varphi_k(\mathbf{x}_j) f(\mathbf{x}_j) \Big)$$

$$(k = \overline{1,K})$$

2 Метод наименьших квадратов (МНК)

Потребуем, чтобы квадрат нормы невязки

$$I(c_1,...,c_K) = \left\|\delta(\mathbf{x};c_1,...,c_K)\right\|_{L_2}^2 = \int\limits_{\Omega}\delta^2(\mathbf{x};c_1,...,c_K)d\mathbf{x}$$

был минимален в пространстве $L_2(\Omega)$. Соответствующая СЛАУ для отыскания c_k имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 2\int\limits_{\Omega}\delta(\mathbf{x};c_1,...,c_K)\frac{\partial\delta(\mathbf{x};c_1,...,c_K)}{\partial c_k}d\mathbf{x} = 0, \quad (k=\overline{1,K})$$

Т.е.

$$\sum_{m=1}^{K} c_m \int\limits_{\Omega} A\varphi_k(\mathbf{x})A\varphi_m(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} A\varphi_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$(k=\overline{1,K})$$

Взвешенный МНК

Если для вычисления интегралов прибегнуть к квадратурам

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f(\mathbf{x}_j)$$

с весами α_j, то придем к системе

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta(\mathbf{x}_j; c_1, \ldots, c_K) \frac{\partial \delta(\mathbf{x}_j; c_1, \ldots, c_K)}{\partial c_k} = 0$$

$$(k = \overline{1, K})$$

с точностью до весовых коэффициентов совпадающей с системой обобщенного метода коллокации:

$$\sum_{m=1}^{K} c_m \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j A\varphi_k(\mathbf{x}_j) \cdot A\varphi_m(\mathbf{x}_j) \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j A\varphi_k(\mathbf{x}_j) f(\mathbf{x}_j) \right)$$

$$(k = \overline{1, K})$$

3 Метод Бубнова-Галеркина

Этот метод определяется условием ортогональности невязки системе функций $\{\varphi_k\}$:

$$\left(\delta(\mathbf{x};c_1,...,c_K),\,\varphi_k(\mathbf{x})\right)=\int\limits_{\Omega}\delta(\mathbf{x};c_1,...,c_K)\varphi_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0$$

$$(k=\overline{1,K})$$

Если уравнение $Au=f$ линейное, то получаем СЛАУ:

$$\sum_{m=1}^{K}c_m\int\limits_{\Omega}\varphi_k(\mathbf{x})A\varphi_m(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega}\varphi_k(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$(k=\overline{1,K})$$

Модификация метода Бубнова-Галеркина
(метод Петрова)

состоит в замене системы $\{\varphi_k\}$ некоторой другой полной в $L_2(\Omega)$ системой функций $\{\psi_k\}$.

В этом случае СЛАУ:

$$\sum_{m=1}^{K} c_m \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) A\varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$(k = \overline{1, K})$$

Применение описанных методов обеспечивает сходимость в среднем, а в некоторых случаях – равномерную сходимость к решению краевой задачи. Для улучшения типа сходимости можно вместо скалярного произведения (и соответствующей нормы) в $L_2(\Omega)$ *воспользоваться скалярным произведением пространства Соболева* $H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$*, что усложняет вычислительную сторону дела.*

4 Энергетические методы

Часто краевую задачу сводят к вариационной задаче о минимуме функционала $J(u)$, руководствуясь тем или иным энергетическим принципом, характеризующим данное физическое поле.

Если краевые условия линейны и однородны, то множество функций, удовлетворяющих им, образует линейное пространство $X(\Omega)$. Предположим, что оператор A положителен на $X(\Omega)$:

$$(Au,u) > 0 \quad \forall u \in X(\Omega), \quad u \neq 0.$$

Величина (Au,u) в этом случае часто оказывается пропорциональной энергии, необходимой для возбуждения поля $u(\mathbf{x})$.

Поле, соответствующее уравнению $Au = f$, сообщает минимум функционалу

$$J(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \|u\|_A^2 - 2(u, f)$$

Подставив (3), получим

$$J(c_1, ..., c_K) = \left\| \sum_{k=1}^{K} c_k \varphi_k \right\|_A^2 - 2\sum_{k=1}^{K} c_k (\varphi_k, f)$$

Приравняв нулю частные производные $\partial J / \partial c_k$, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{K} c_m (A\varphi_m, \varphi_k) = (\varphi_k, f), \quad k = \overline{1, K},$$

называемую *системой Ритца.*

Определитель этой системы – определитель Грама – отличен от нуля, если система $\{\varphi_k\}_{k=1}^K$ линейно независима. Если к тому же система $\{\varphi_k\}_{k=1}^K$ полна в $X(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_A$ и выполняется условие

$$(Au,u) \ge \gamma \|u\|^2, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0$$

(т.е. оператор A является положительно определенным на $X(\Omega)$), то существует единственное решение u_0 краевой задачи и

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} c_k \varphi_k - u_0 \right\| \to 0$$

при $K \to \infty$.

При данных условиях система Ритца эквивалентна системе, используемой в методе Бубнова-Галеркина.

Преимущество системы Ритца:
из условия симметричности $(Au, v) = (u, Av)$ оператора *A* следует возможность преобразовать коэффициенты $(A\varphi_m, \varphi_k)$ к симметричному виду $[\varphi_m, \varphi_k]$ с понижением порядка дифференцирования функций φ_k.

Пример. Оператор Лапласа

$$A = \Delta$$

5 Метод Куранта

Метод Ритца, определяемый формулой можно рассматривать как частный случай *метода Куранта*, который позволяет получать более сильную сходимость. При этом минимизируется функционал

$$G(u) = (Au, u) - 2(u, f) + \|Au - f\|^2_{H^s(\Omega)},$$

где

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega)} = \sum_{|q| \le s} (D^q u, D^q u)_{L_2(\Omega)}.$$

Если краевая задача линейна, то метод Куранта также приводит к СЛАУ.

6 Метод Трефтца

Предположим, что

$$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{K} c_k \varphi_k$$

при любом выборе постоянных c_j удовлетворяет однородному уравнению

$$A\tilde{u} = 0$$

И необходимо выбрать эти постоянные, чтобы наилучшим образом удовлетворить неоднородным граничным условиям. (см. вышеприведенные методы). На практике удобно применять тот или иной вариант метода коллокации, требуя, чтобы граничные условия удовлетворялись на некоторой системе точек границы рассматриваемой области. См. также МГЭ.

ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть

Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$

$\partial\Omega$ – граница Ω

$\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$

$$D^{\alpha} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

α_i – целые, такие что $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Функциональные пространства:

$C(\bar{\Omega})$ – пространство непрерывных функций на $\bar{\Omega}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

$C^{(k)}(\bar{\Omega})$ – банахово пространство функций, имеющих непрерывные в $\bar{\Omega}$ производные до порядка *k* включительно; норма имеет вид

$$\|f\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^{\alpha} u(x)|$$

$L_p(\Omega)$ – банахово пространство функций, *p*-я степень модуля которых интегрируема по Ω; норма имеет вид

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty.$$

При $p = \infty$ $L_\infty(\Omega)$ – совокупность измеримых функций *u*, ограниченных или почти всюду ограниченных. При этом норма определяется как «существенная грань» $|u(x)|$, т.е. как наименьшее из чисел *M*, для которых неравенство $|u(x)| \le M$ выполняется почти всюду:

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{supvrai}_{x \in \Omega} | u(x) |$$

Гильбертово пространство $L_2(\Omega)$:

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \|u\|_{L_2(\Omega)} = (u, u)^{1/2}$$

Гильбертово пространство $W_2^k(\Omega)$ – пополнение множества бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций по норме

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u |^2 \, dx \right)^{1/2}$$

скалярное произведение имеет вид

$$(u,v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx$$

В частном случае $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Пространство $W_2^k(\Omega)$ называется также *пространством Соболева* $H^k(\Omega)$.

Гильбертово пространство $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ состоит из функций, принадлежащих $W_2^1(\Omega)$ и равных нулю на $\partial\Omega$. Норма и скалярное произведение определяются, как и в $W_2^1(\Omega)$.