# ЛЕКЦИЯ № 6

## Методы математического программирования

# 1. Классификация ММП.

$\tau$

1. *Сеточные методы.*
   - *Равномерная сетка.*
   - *ЛП- последовательности.*
1. ***Методы спуска.***
   - ***Методы одномерной оптимизации.***
   - ***Методы безусловной оптимизации.***
   - ***Методы условной оптимизации.***
2. ***Методы многоэкстремальной оптимизации.***
   - ***Методы «мультистарта».***
   - ***Методы «тяжелого шарика».***
   - ***Комбинации методов глобального случайного поиска и локального поиска.***
3. ***Методы многокритериальной оптимизации.***
   - ***Методы «идеальной точки»***
   - ***Методы последовательной оптимизации по критериям.***
   - ***Методы многоуровневой оптимизации***
4. ***Методы оптимизации в условиях неопределенности.***
   - ***Нечеткие вычисления. Неточные вычисления. Стохастические модели.***
   - ***Генетические алгоритмы.***
   - ***Нейросетевые алгоритмы.***
   - ***Гибридные алгоритмы.***

# 2. Стратегия методов спуска.

Методы математического программирования основаны на использовании итерационных алгоритмов поиска значений переменных проектирования $\bar{x}$ , отвечающих экстремуму целевой функции при заданных ограничениях. При этом строится алгоритмическое отображение над функцией спуска $\varphi(x)$, включающей как целевую функцию $f(x)$, так и функции ограничений $g(x)$.

# 2. Стратегия методов спуска.

ЗВП $\begin{cases} \begin{cases} x^e = Arg\min f(x), \ x \in \mathrm{X}; \\ x_i \geq 0, \ i = 1,\dots,n; \end{cases} \\ g_j(x) \leq 0, \ j = 1,\dots,m. \end{cases}$

$$x^e, \bar{x} \in \Omega_\varepsilon, \bar{x} = \lim_{k \to N} x^k$$

Выпуклая функция:

$$\varphi(x) = \varphi[f(x), g(x)]$$

$$\varphi : \mathrm{X} \to R$$

$$\mathrm{X} \subset \mathrm{E}^n$$

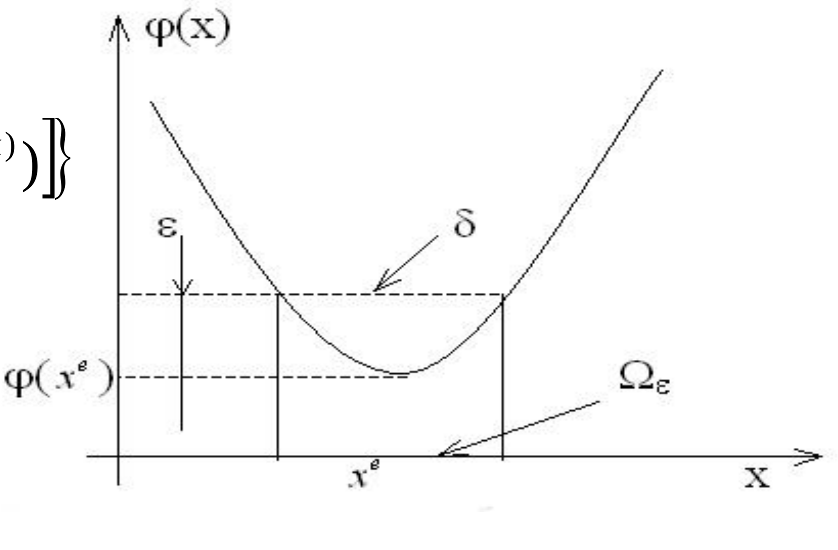
$$\Omega_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon(x) \subset \mathrm{E}^n$$

Алгоритмическое отображение состоит в том, что требуется на каждой итерации производить поиск $x^{(k+1)} = \mathrm{A}\{\varphi[f(x^{(k)}), g(x^{(k)})]\}$ так, чтобы

$$\varphi(x^{(k+1)}) \leq \varphi(x^{(k)})$$

$$\|x^e - \bar{x}\| \leq \delta \qquad x^e, \bar{x} \in \Omega_\varepsilon$$

$$|f(x^e) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$



# 2. Стратегия методов спуска.

**Стратегия ММП** для ЗВП состоит в выборе $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ таким образом, чтобы $\varphi(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) \le \varphi(x^{(k)})$ для $\forall x^{(k)} \subset X$

При этом для большинства методов МП $\Delta x^{(k)} = \alpha^{(k)} d^{(k)}$,

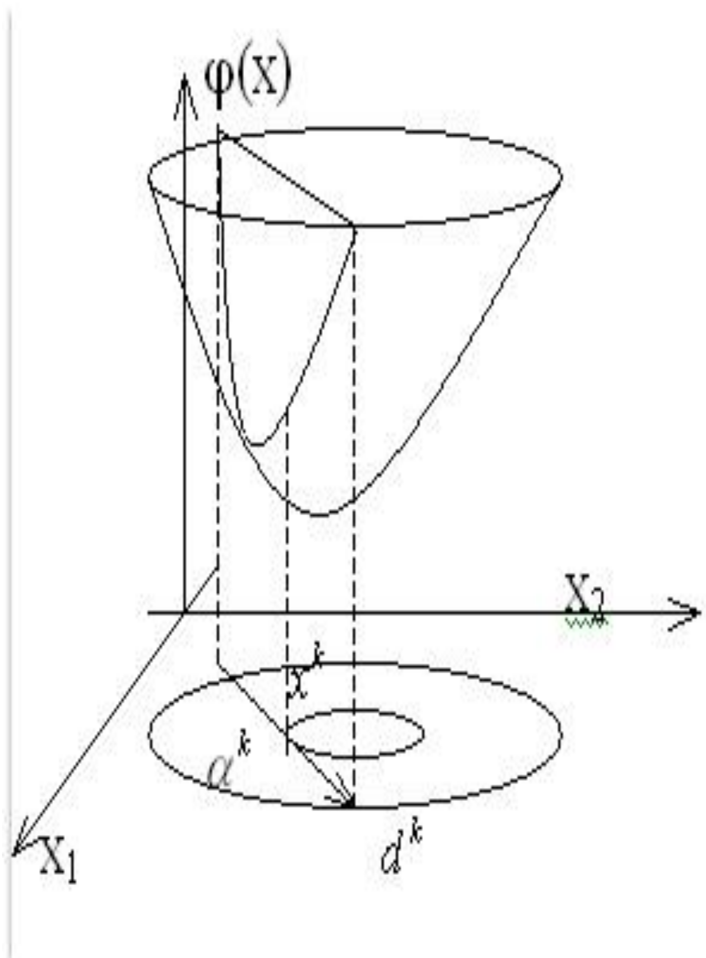
где $d^{(k)} \in E^n$ – направление поиска, $\alpha^{(k)} \in E^1$ – шаг в направлении поиска.

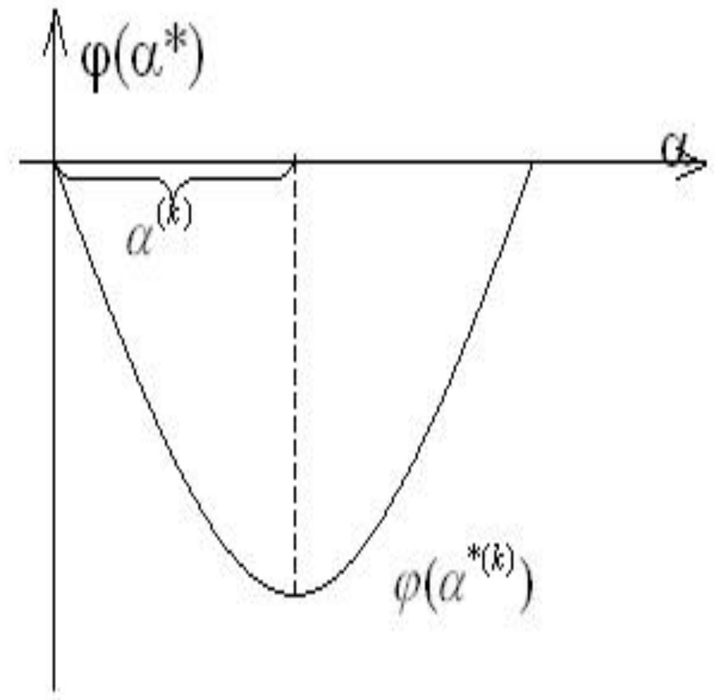
Решение задачи ММП состоит в следующем:

1.Выбор направления поиска на каждой итерации оптимизации $d^{(k)} \in X \subset E^n$

2. Выбор величины шага $\alpha^{*(k)} \in E^1$ таким образом, чтобы $\alpha^{*(k)} = Arg \min \varphi(x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)})$ в направлении вектора $d^{(k)} \in X \subset E^n$

# 2. Стратегия методов спуска.



# Простейшие методы ММП для решения ЗВП.

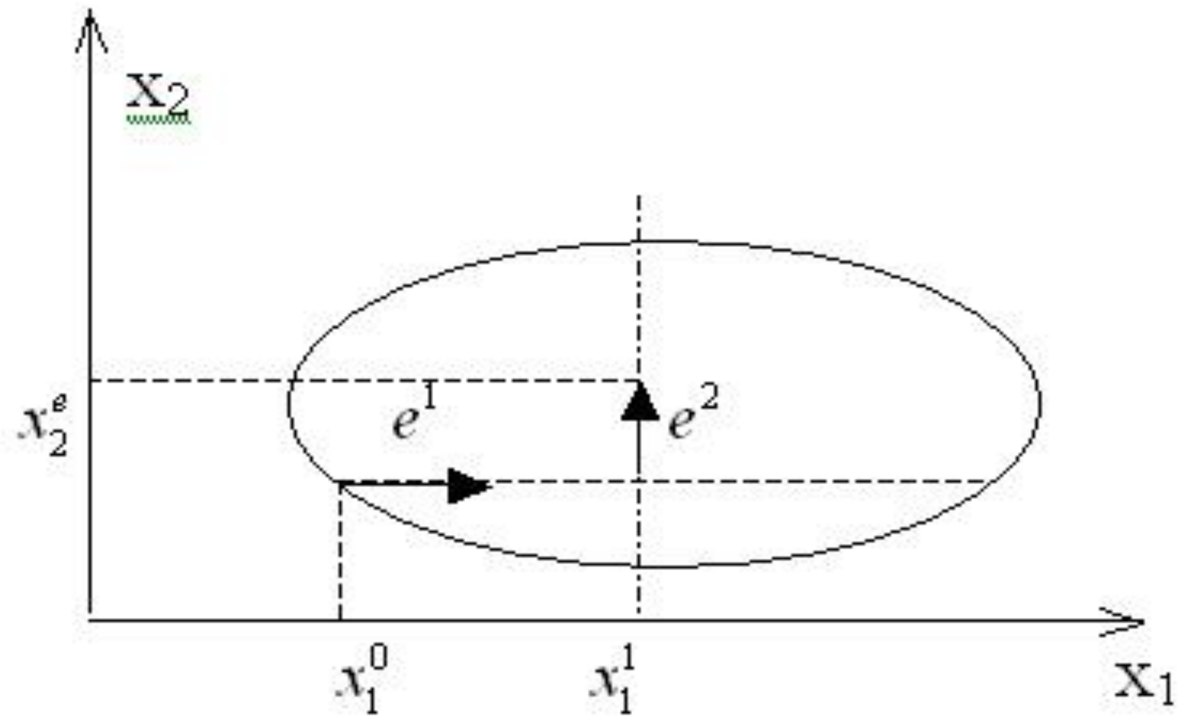
Их можно разбить на 3 основных класса:

1. Методы 0-го порядка (не использующие производные).
2. Методы 1-го порядка (использующие 1-е производные).
3. Методы 2-го порядка (использующие 2-е производные).

Рассмотрим простейшие представители каждого из этих классов.

# Метод покоординатного спуска (метод 0-го порядка)

Функция $\varphi(x) \in C^0(X)$ – непрерывная функция.



# Алгоритм:

Ш1. Направление $d^k$ - выбирается вдоль координаты $x_k$ от точки $x^{(k)}$, т.е. $d^{(k)} = \frac{x_k}{\|x_k\|} = e^k$

Ш2. Определяется величина шага $\alpha^{*(k)} = Arg\min_{\alpha \in E^1} \varphi(x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)})$

Ш3. Формируется новое значение $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{*(k)} d^{(k)}$

Ш4. Проверка сходимости:

Если $(|\varphi(x^{(k+1)}) - \varphi(x^{(k)})| \le \varepsilon, \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \delta)$ , то *КОНЕЦ*

Иначе к=к+1 и переход на Ш 1.

Достоинства: возможность оптимизации для задач с недифференцируемыми функциями.

Недостатки:

1. Низкая скорость сходимости (сублинейная, т.е. $\gamma$<1)

2. Возможность зацикливания при плохой обусловленности задачи, т.е. когда функция $\varphi$(x) имеет овражный характер.

# Обусловленность задачи

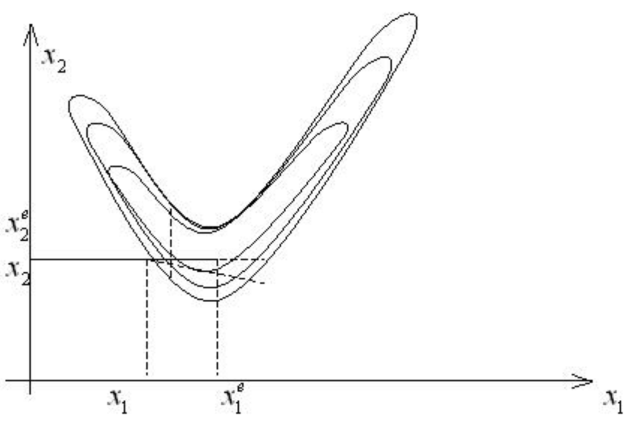
Определяется числом обусловленности матрицы Гессе (если она существует), т.е. отношением $\chi = \dfrac{L}{l}$ .

Где L - максимальное собственное число $H(x^{(k)})$,

*l* – минимальное собственное число $H(x^{(k)})$ .

В случае отсутствия матрицы Гессе числом обусловленности может быть отношение:

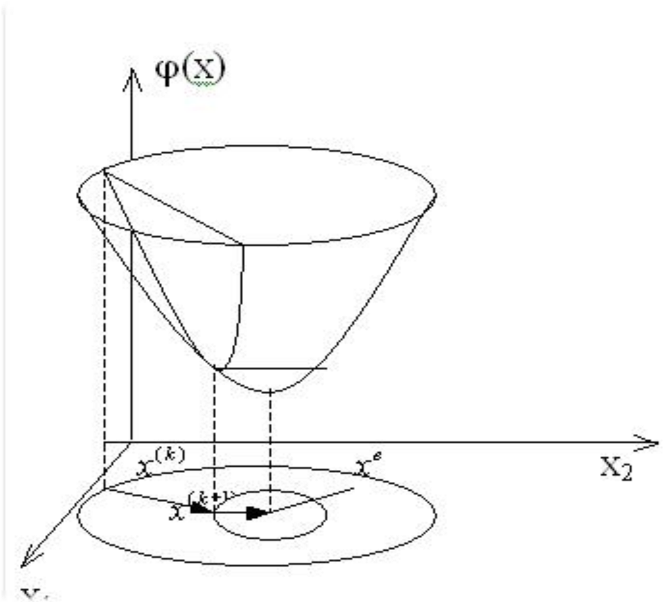
$$\chi = \lim_{\delta \to 0} \frac{\sup \left\| x^{(k)} - x^e \right\|^2}{\inf \left\| x^{(k)} - x^e \right\|^2} .$$

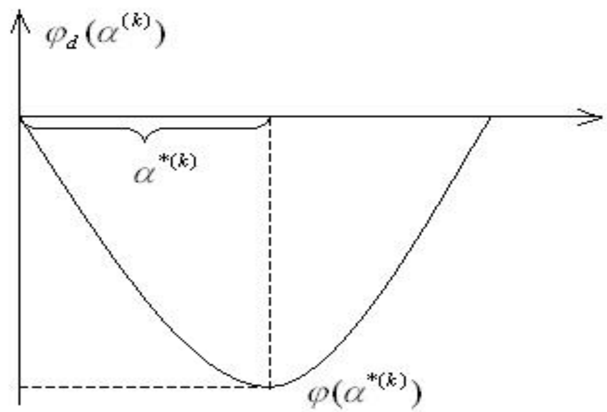


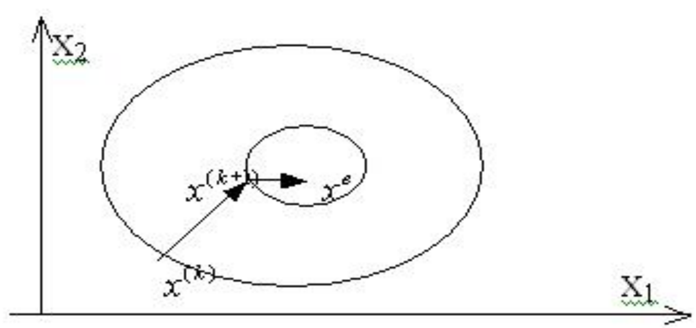

<u>Пример</u> функция Розенброка :

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2^2 - x_1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

# ***Метод наискорейшего спуска (метод 1-го порядка).***



# <u>Метод наискорейшего спуска (метод 1-го порядка).</u>

***Функция*** $\varphi(x) \in C^1(X)$ ***- класс 1 раз дифференцируемых функций.***

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$$

Разложим функцию $\varphi(x^k + \alpha^{(k)} d^{(k)})$ – в ряд Тейлора, тогда, если учитывать только 2 члена ряда, получим:

$$\varphi(x^{(k+1)}) = \varphi(x^{(k)}) + \nabla^T \varphi(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} + o(\left\|\Delta x^{(k)}\right\|)$$

Для того, чтобы функция уменьшалась, необходимо, чтобы $d^{(k)} \sim -\nabla \varphi(x^{(k)})$

$d^{(k)} = -\dfrac{\nabla \varphi(x^{(k)})}{\left\|\nabla \varphi(x^{(k)})\right\|}$ . Тогда $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{\nabla \varphi(x^{(k)})}{\left\|\nabla \varphi(x^{(k)})\right\|} \alpha^{*(k)}$

При этом $\alpha^{*(k)} = Arg \min_{x \in E^1} \varphi(x^{(k)} + \alpha^{*(k)} d^{(k)})$

<u>Особенность МНС:</u> $\nabla^T \varphi(x^{(k+1)}) \nabla \varphi(x^{(k)}) = 0;$ то есть $d^{(k+1)T} I d^{(k)} = 0$ .

<u>Достоинства.</u> Линейная скорость сходимости для функций φ(x) близких к квадратичным.

<u>Недостатки:</u>

1. Функция $\varphi(x) \in C^1(X)$ – должна быть дифференцируема.
2. Возможность зацикливания при плохой обусловленности задачи.

# Метод Ньютона (метод второго порядка).

Условием использования этого метода является: $\varphi(x) \in C^2(X)$,

а также условие выпуклости φ(x) в окрестности точки поиска.

Точка $x^*$ – стационарная точка (точка локального экстремума )

Пусть: $\varphi(x^*) = \min(\varphi(x))$ Тогда :

$\bar{x} \in U_\varepsilon(x^*)$ $\varphi(x^*) = \varphi(\bar{x} + \Delta x) = \varphi(\bar{x}) + \nabla^T \varphi(x)\Delta x^* + \frac{1}{2}\Delta x^T H(\bar{x})\Delta x + o(\|\Delta x\|^3)$

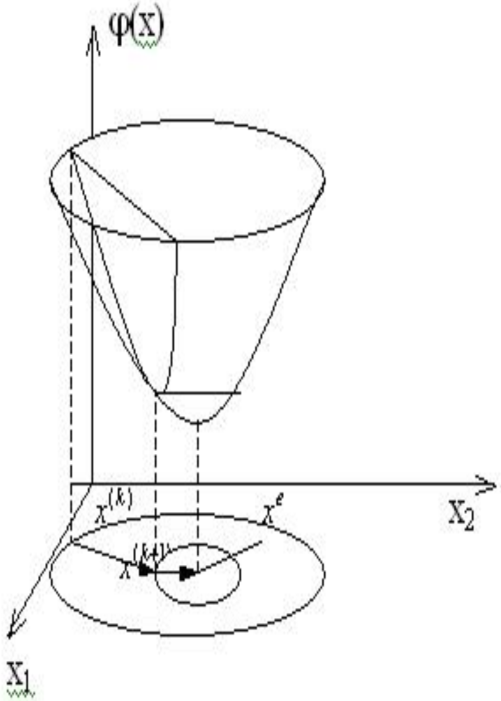
$x^* = \bar{x} + \Delta x$ где $H(\bar{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$

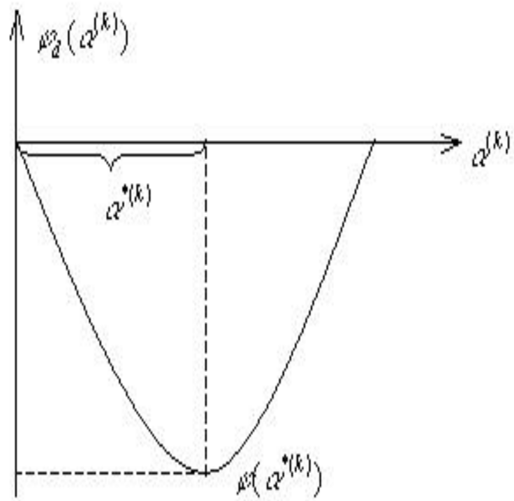
Разложение функции φ(x*) в окрестности x* в ряд Тейлора до 3-го члена дает квадратичную аппроксимацию этой функции в Uε(x*):

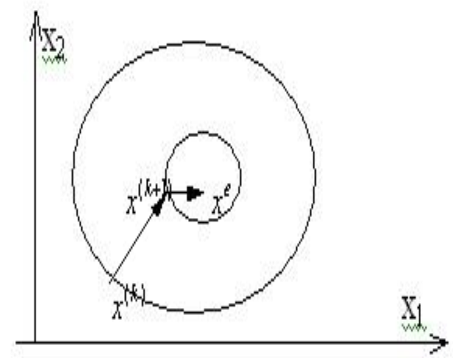
$$O = \nabla\varphi(\bar{x}) + H^T(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \cdot x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)})\nabla\varphi(x^{(k)}).$$

$$d^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)})\nabla\varphi(x^{(k)})\,;\ \alpha^{*(k)} = Arg\min\varphi_d(\alpha^{(k)});\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{*(k)}d^{(k)}\ .$$

# Метод Ньютона (метод второго порядка).



# Метод Ньютона (метод второго порядка).

Сопряженность: $d^{(k+1)}H^{-1}(x^{(k)})d^{(k)} = 0$

Достоинства :

Для функций, близких к квадратичным, скорость сходимости алгоритма суперлинейная.

Недостатки:

1.Необходимость вычисления $H^{-1}(x^{(k)})$ .

2.Процесс решения сильно зависит от выбора $x^{(0)}$ (т.е. от начальной точки).

3.Функция φ(x) должна быть выпуклой во всех точках $x^{(k)}$ , то есть $\det H(x^k) > 0$ .