Лекция 7

Формальные методы описания семантики

§36. Абстрактный синтаксис и структурная индукция

Утверждение. (*Метод математической индукции.*) Если высказывание $P(1)$ истинно, а из истинности $P(k)$ следует истинность высказывания $P(k+1)$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) : P(n)$ – истинно.

Примечание. Предположение истинности $P(k)$, из которого выводится истинность $P(k+1)$, называется *гипотезой индукции*.

Определение. Говорят, что функция $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ задана *индуктивно*, если вычисление $h(n)$ определяется соотношениями:

1. $h(1) = a$;
2. $h(k) = F(h(k-1))$, где $k > 1$, $F : A \longrightarrow A$.

Легко доказать, что $(\forall k \in \mathbb{N}) : \exists_1 h(k)$.

Пример. Функция $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ индуктивно определяет члены геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q:

1. $\gamma(1) = a$;
2. $\gamma(k) = q \cdot \gamma(k-1)$.

Здесь $F(x) = q \cdot x$, $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Пример. Функция $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ вычисляет числа Фибоначчи:

$\varphi(k) = n$, где $\langle n, m \rangle = f(k)$.

При этом функция $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ задана индуктивно:

1. $f(1) = \langle 1, 1 \rangle$;
2. $f(k) = \langle b, a+b \rangle$, где $\langle a, b \rangle = f(k-1)$.

Здесь $F(x, y) = \langle y, x+y \rangle$, $F : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$.

Определение. Мы будем называть *абстрактным синтаксисом* упрощённую грамматику языка, в которой отсутствует информация, гарантирующая построение уникальных деревьев вывода.

Определение. Пусть $G = \langle T, N, S, P\rangle$ – грамматика.
Мы будем называть *синтаксическим доменом*, соответствующим нетерминальному символу $X \in N$, множество синтаксических деревьев, полученных из X по правилам P.

Замечание. Синтаксические деревья – конечные. Они содержат терминальные символы в качестве листовых вершин.

Обозначение. Синтаксическое дерево, полученное по правилу $X \to u$, мы будем обозначать $d^{X \to u}$.

Абстрактный синтаксис языка While:

$n \in$ Num – числовые константы;
$x \in$ Var – переменные;
$a \in$ Aexp – арифметические выражения;
$b \in$ Bexp – логические выражения;
$S \in$ Stm – операторы.

$$n ::= 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \mid n\,0 \mid n\,1 \mid \ldots \mid n\,9$$
$$x ::= \texttt{var}\, n$$
$$a ::= n \mid x \mid a_1 + a_2 \mid a_1 \cdot a_2 \mid a_1 - a_2$$
$$b ::= \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2$$
$$S ::= x := a \mid \texttt{skip} \mid S_1; S_2 \mid \texttt{if}\, b\, \texttt{then}\, S_1\, \texttt{else}\, S_2 \mid \texttt{while}\, b\, \texttt{do}\, S$$

Пример. Вычисление факториала для начального значения, связанного с переменной x_2.

$x_1 := 1;\ \texttt{while}\,\neg\,(x_2 = 1)\ \texttt{do}\,(x_1 := x_1 \cdot x_2;\ x_2 := x_2 - 1)$.

Утверждение. (*Метод структурной индукции.*) Если высказывание P истинно для деревьев нулевой глубины, а из истинности P для деревьев, глубина которых меньше k, следует истинность P для деревьев, глубина которых равна k, то P истинно для любого *конечного* дерева.

Понятие индуктивно заданной функции может быть расширено для структурной индукции.

Определение. Пусть D – синтаксический домен, соответствующий нетерминалу X.
Говорят, что функция $h : D \longrightarrow A$ задана *индуктивно*, если для каждого правила вида $X \to u$ определено соотношение:
$h\left(d^{X\to u}\right) = F^{X\to u}\left(h\left(d_1\right), \ldots, h\left(d_n\right)\right)$, где
n – количество вхождений X в u;
$d_1, \ldots, d_n$ – дочерние по отношению к $d^{X\to u}$ синтаксические деревья, соответствующие вхождениям X в u;
$F^{X\to u} : A^n \longrightarrow A$ – некоторая функция, которая для случаев $n = 0$ вырождается в константу.

Пример. Функция $\mathcal{N} : \mathsf{Num} \longrightarrow \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{N}[\![0]\!] & = & 0, \\
\mathcal{N}[\![1]\!] & = & 1, \\
\dots & & \\
\mathcal{N}[\![9]\!] & = & 9, \\
\mathcal{N}[\![n\,0]\!] & = & 10 \cdot \mathcal{N}[\![n]\!], \\
\mathcal{N}[\![n\,1]\!] & = & 10 \cdot \mathcal{N}[\![n]\!] + 1, \\
\dots & & \\
\mathcal{N}[\![n\,9]\!] & = & 10 \cdot \mathcal{N}[\![n]\!] + 9.
\end{array}$$

Легко доказать, что $(\forall n) : \exists_1\, \mathcal{N}\,(n)$.

§37. Системы переходов, семантики и семантические функции

Определение. *Система переходов* – это упорядоченная тройка

$$\langle \Gamma, T, \rhd \rangle$$

где Γ – это множество *конфигураций*, $T \subseteq \Gamma$ – множество *терминальных* конфигураций, а $\rhd \subseteq \Gamma \times \Gamma$ – *отношение переходов*.

Для отношения переходов должно выполняться
$(\forall \gamma \in T)\,(\nexists \gamma' \in \Gamma) : \gamma \rhd \gamma'$.

Все конфигурации $\gamma \in \Gamma \setminus T$ такие, что $(\nexists \gamma' \in \Gamma) : \gamma \rhd \gamma'$, называются *тупиковыми*.

Определение. *Детерминированная система переходов* – это система переходов $\langle \Gamma, T, \rhd \rangle$, для которой справедливо, что $((\forall \gamma \in \Gamma)\,(\exists_1\, \gamma') : \gamma \rhd \gamma')$.

Определение. *Семантика* для синтаксического домена D – это кортеж

$\left\langle D, \Sigma, \Sigma_{start}, \Sigma_{final}, \Gamma, \rhd \right\rangle$, где

Σ – множество состояний вычисления;
$\Sigma_{start} \subseteq \Sigma$ – множество входных состояний вычисления;
$\Sigma_{final} \subseteq \Sigma$ – множество выходных состояний вычисления;

$\left\langle \Gamma, \Sigma_{final}, \rhd \right\rangle$ – система переходов, множество конфигураций Γ которой состоит из конфигураций вида:
– $\langle d, \sigma \rangle$, означающей, что синтаксическая конструкция $d \in D$ должна быть выполнена для состояния $\sigma \in \Sigma$;
– σ, представляющей одно из финальных состояний вычисления (это терминальная конфигурация, то есть $\sigma \in \Sigma_{final}$).

Замечание. Семантика является *детерминированной*, если система переходов $\left\langle \Gamma, \Sigma_{final}, \rhd \right\rangle$ – детерминированная.

Пример. Семантика для арифметических выражений языка While:

$\langle \mathsf{Aexp},\ \mathsf{Env} \cup \mathbb{Z},\ \mathsf{Env},\ \mathbb{Z},\ \Gamma,\ \rhd \rangle$, где

Aexp – синтаксический домен арифметических выражений;
$\mathsf{Env} \cup \mathbb{Z}$ – множество состояний вычисления;
Env – множество начальных состояний вычисления;
$\mathbb{Z}$ – множество конечных состояний вычисления;
Γ – множество конфигураций.

В случае естественной семантики («большие шаги») отношение переходов $\rhd$ задаёт, например, такие переходы:
$\langle 6 \cdot (2 - x)\,, [x \mapsto 10] \rangle \ \rhd\ -48$,
$\langle 10 \cdot 20, [x_1 \mapsto -1, x_2 \mapsto 4] \rangle \ \rhd\ 200$.

Для редукционной семантики («малые шаги») отношение $\rhd$ содержит переходы:
$\langle 6 \cdot (2 - x)\,, [x \mapsto 10] \rangle \ \rhd\ \langle 6 \cdot (2 - 10)\,, [x \mapsto 10] \rangle$,
$\langle 10 \cdot 20, [x_1 \mapsto -1, x_2 \mapsto 4] \rangle \rhd \langle 200, [x_1 \mapsto -1, x_2 \mapsto 4] \rangle$,
$\langle 200, [x_1 \mapsto -1, x_2 \mapsto 4] \rangle \rhd 200$.

Определение. *Семантическая функция* $\mathcal{S} : D \longrightarrow \left(\Sigma_{start} \hookrightarrow \Sigma_{final}\right)$, выражающая *наблюдаемое поведение* детерминированной семантики $\left\langle D, \Sigma, \Sigma_{start}, \Sigma_{final}, \Gamma, \rhd \right\rangle$, определяется как

$$\mathcal{S}[\![d]\!]\,(\sigma) = \begin{cases} \sigma', & \text{если } \langle d, \sigma \rangle \rhd^{\star} \sigma'; \\ \mathbf{undef} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение. Говорят, что детерминированные семантики $\left\langle D, \Sigma, \Sigma_{start}, \Sigma_{final}, \Gamma, \rhd_1 \right\rangle$ и $\left\langle D, \Sigma, \Sigma_{start}, \Sigma_{final}, \Gamma, \rhd_2 \right\rangle$ эквивалентны,

если $(\forall d \in D)\,(\forall \sigma \in \Sigma_{start}) :\ (\mathcal{S}_1[\![d]\!]\,(\sigma) = \sigma') \Leftrightarrow (\mathcal{S}_2[\![d]\!]\,(\sigma) = \sigma')$,

где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ – семантические функции, выражающие наблюдаемое поведение этих семантик.

Определение. *Окружение* (environment) – это функция, отображающая множество переменных в множество их значений.

Пример. Множество Env окружений для языка While состоит из функций вида $\mathsf{Var} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, которые мы будем записывать в виде списка пар «переменная$\mapsto$значение»:
$[x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 3,\ x_3 \mapsto -10]$

Обозначение. Если $f : X \longrightarrow Y$, $x \in X$, $y \in Y$, то функция $f\,[x \mapsto y] : X \longrightarrow Y$ определяется как

$$f\,[x \mapsto y]\,(x') = \begin{cases} y, & \text{если } x = x'; \\ f\,(x') & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Если имеется окружение σ, то в результате присвоения некоторого значения i переменной x получается окружение $\sigma\,[x \mapsto i]$.

Пример. Семантическая функция $\mathcal{A} : \mathsf{Aexp} \longrightarrow (\mathsf{Env} \longrightarrow \mathbb{Z})$ для арифметических выражений языка While (задаётся индуктивно):

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}[\![n]\!]\,(\sigma) & = & \mathcal{N}\,(n)\,, \\
\mathcal{A}[\![x]\!]\,(\sigma) & = & \sigma\,(x)\,, \\
\mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!]\,(\sigma) & = & \mathcal{A}[\![a_1]\!]\,(\sigma) + \mathcal{A}[\![a_2]\!]\,(\sigma)\,, \\
\mathcal{A}[\![a_1 \cdot a_2]\!]\,(\sigma) & = & \mathcal{A}[\![a_1]\!]\,(\sigma) \cdot \mathcal{A}[\![a_2]\!]\,(\sigma)\,, \\
\mathcal{A}[\![a_1 - a_2]\!]\,(\sigma) & = & \mathcal{A}[\![a_1]\!]\,(\sigma) - \mathcal{A}[\![a_2]\!]\,(\sigma)\,.
\end{array}
$$

Пример. Если добавить в язык операцию «унарный минус», то определение функции $\mathcal{A}$ нужно расширить предложением:

$$\mathcal{A}[\![-a]\!]\,(\sigma) = -\mathcal{A}[\![a]\!]\,(\sigma).$$

Альтернативный способ, противоречащий индуктивному заданию функции:

$$\mathcal{A}[\![-a]\!]\,(\sigma) = \mathcal{A}[\![0 - a]\!]\,(\sigma).$$

Пример. Семантическая функция $\mathcal{B}$: Bexp $\longrightarrow$ (Env $\longrightarrow$ T) для логических выражений языка While (задаётся индуктивно):

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}[\![\texttt{true}]\!](\sigma) &= \mathbf{tt}, \\
\mathcal{B}[\![\texttt{false}]\!](\sigma) &= \mathbf{ff}, \\
\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!](\sigma) &= \begin{cases} \mathbf{tt}, & \text{если } \mathcal{A}[\![a_1]\!](\sigma) = \mathcal{A}[\![a_2]\!](\sigma), \\ \mathbf{ff}, & \text{если } \mathcal{A}[\![a_1]\!](\sigma) \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!](\sigma), \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![a_1 \leq a_2]\!](\sigma) &= \begin{cases} \mathbf{tt}, & \text{если } \mathcal{A}[\![a_1]\!](\sigma) \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!](\sigma), \\ \mathbf{ff}, & \text{если } \mathcal{A}[\![a_1]\!](\sigma) > \mathcal{A}[\![a_2]\!](\sigma), \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![\neg b]\!](\sigma) &= \begin{cases} \mathbf{tt}, & \text{если } \mathcal{B}[\![b]\!](\sigma) = \mathbf{ff}, \\ \mathbf{ff}, & \text{если } \mathcal{B}[\![b]\!](\sigma) = \mathbf{tt}, \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!](\sigma) &= \begin{cases} \mathbf{tt}, & \text{если } \mathcal{B}[\![b_1]\!](\sigma) = \mathbf{tt} \text{ и } \mathcal{B}[\![b_2]\!](\sigma) = \mathbf{tt}, \\ \mathbf{ff}, & \text{если } \mathcal{B}[\![b_1]\!](\sigma) = \mathbf{ff} \text{ или } \mathcal{B}[\![b_2]\!](\sigma) = \mathbf{ff}. \end{cases}
\end{aligned}$$

§38. Естественная семантика (семантика «больших шагов»)

В естественной семантике все переходы имеют вид $\langle d, \sigma \rangle \rhd \sigma'$. Это означает, что выполнение синтаксической конструкции d из состояния вычисления σ завершается, и результирующим состоянием будет σ'.

Определение. Правило естественной семантики $\left\langle D, \Sigma, \Sigma_{start}, \Sigma_{final}, \Gamma, \rightarrow \right\rangle$ записывается в виде

$$\frac{\left\langle \widehat{d_1},\, \widehat{\sigma_1} \right\rangle \rightarrow \widehat{\sigma'_1}, \cdots, \left\langle \widehat{d_n},\, \widehat{\sigma_n} \right\rangle \rightarrow \widehat{\sigma'_n}}{\left\langle \widehat{d},\, \widehat{\sigma} \right\rangle \rightarrow \widehat{\sigma'}}, \text{ если } \ldots$$

Здесь $\widehat{d}, \widehat{d_i} \subseteq D$, $\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma_i} \subseteq \Sigma_{start}$, $\widehat{\sigma'_i} \subseteq \Sigma_{final}$ – обобщённые записи подмножеств множеств D и Σ (образцы с метапеременными).

При этом $\widehat{d_1}, \cdots, \widehat{d_n}$ – это либо непосредственные поддеревья $\widehat{d}$, либо деревья, сконструированные из непосредственных поддеревьев $\widehat{d}$.

Над чертой – *предпосылки*, под чертой – *следствия*, справа – *условия*, правила без предпосылок – *аксиомы* (записываются без гор. черты).

Пример. Естественная семантика для операторов языка While.

$$[\text{assign}_{ns}] \qquad \langle x := a,\ \sigma\rangle \to \sigma\,[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,(\sigma)]$$

$$[\text{skip}_{ns}] \qquad \langle \texttt{skip},\ \sigma\rangle \to \sigma$$

$$[\text{comp}_{ns}] \qquad \frac{\langle S_1,\ \sigma\rangle \to \sigma', \quad \langle S_2,\ \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle S_1; S_2,\ \sigma\rangle \to \sigma''}$$

$$\left[\text{if}^{\mathbf{tt}}_{ns}\right] \qquad \frac{\langle S_1,\ \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ \sigma\rangle \to \sigma'},\ \text{если}\ \mathcal{B}[\![b]\!]\,(\sigma) = \mathbf{tt}$$

$$\left[\text{if}^{\mathbf{ff}}_{ns}\right] \qquad \frac{\langle S_2,\ \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ \sigma\rangle \to \sigma'},\ \text{если}\ \mathcal{B}[\![b]\!]\,(\sigma) = \mathbf{ff}$$

$$\left[\text{while}^{\mathbf{tt}}_{ns}\right] \qquad \frac{\langle S,\ \sigma\rangle \to \sigma', \quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ \sigma\rangle \to \sigma''},\ \text{если}\ \mathcal{B}[\![b]\!]\,(\sigma) = \mathbf{tt}$$

$$\left[\text{while}^{\mathbf{ff}}_{ns}\right] \qquad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ \sigma\rangle \to \sigma,\ \text{если}\ \mathcal{B}[\![b]\!]\,(\sigma) = \mathbf{ff}$$

Каждое правило семантики является схемой для порождения некоторого множества переходов.

Определение. Мы будем называть переходы, порождаемые правилами семантики, *экземплярами* этих правил.

Пример. Одним из экземпляров аксиомы [assign$_{ns}$] является переход $\langle x_1 := 1,\ [x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 0]\rangle \to [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 0]$

Пример. Одним из экземпляров правила [comp$_{ns}$] является переход $\langle x_1 := 5;\ x_2 := 3,\ [x_1 \mapsto 4]\rangle \to [x_1 \mapsto 5,\ x_2 \mapsto 3]$

Вывод перехода $\langle d, \sigma\rangle \to \sigma'$ в некоторой семантике связан с построением *дерева семантического вывода*, корнем которого является выводимый переход, листьями – экземпляры аксиом семантики.

Пример. Дерево семантического вывода для перехода

$$\langle (x_3 := x_2;\ x_2 := x_1)\,;\ x_1 := x_3,\ \sigma_1\rangle \to \sigma_4$$

записывается так:

$$\frac{\dfrac{\langle x_3 := x_2,\ \sigma_1\rangle \to \sigma_2, \quad \langle x_2 := x_1,\ \sigma_2\rangle \to \sigma_3}{\langle x_3 := x_2;\ x_2 := x_1,\ \sigma_1\rangle \to \sigma_3}, \quad \langle x_1 := x_3,\ \sigma_3\rangle \to \sigma_4}{\langle (x_3 := x_2;\ x_2 := x_1)\,;\ x_1 := x_3,\ \sigma_1\rangle \to \sigma_4}, \text{ где}$$

$\sigma_1 = [x_1 \mapsto 4,\ x_2 \mapsto 5]$,
$\sigma_2 = [x_1 \mapsto 4,\ x_2 \mapsto 5,\ x_3 \mapsto 5]$,
$\sigma_3 = [x_1 \mapsto 4,\ x_2 \mapsto 4,\ x_3 \mapsto 5]$,
$\sigma_4 = [x_1 \mapsto 5,\ x_2 \mapsto 4,\ x_3 \mapsto 5]$.

Пусть требуется построить дерево семантического вывода для некоторой синтаксической конструкции d из состояния вычисления σ. Для этого требуется найти правило семантики, левую часть следствия которого можно отождествить с конфигурацией $\langle d, \sigma \rangle$. При этом возможны два случая:

1. Если найденное правило является аксиомой, и условия этой аксиомы выполняются, то мы можем сразу же определить выходное состояние вычисления. Тем самым построение дерева семантического вывода завершается.

2. Если найденное правило содержит предпосылки, то мы пытаемся построить деревья семантического вывода для каждой предпосылки. В случае успешного построения этих деревьев мы обязаны проверить условия, связанные с правилом, и, если эти условия выполняются, мы можем определить выходное состояние вычисления.

Пример. Покажем процесс построения дерева вывода T для оператора

$$\texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)$$

из состояния вычисления $\sigma_1 = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 2]$.

1. Согласно правилу $\left[\text{while}^{\mathbf{tt}}_{ns}\right]$:

$$T = \frac{T_1, \quad T_2}{\langle \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_1 \rangle \to \sigma_6}, \text{ где}$$

$$T_1 = \frac{\cdots}{\langle x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_1 \rangle \to \sigma_3},$$

$$T_2 = \frac{\cdots}{\langle \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_3 \rangle \to \sigma_6}.$$

2. Согласно правилу [comp$_{ns}$]:

$$T_1 = \frac{T_3, \quad T_4}{\langle x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_1 \rangle \to \sigma_3}, \text{ где}$$

$T_3 = \langle x_2 := x_2 \cdot 2,\ \sigma_1 \rangle \to \sigma_2$ (аксиома [assign$_{ns}$]),
$T_4 = \langle x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_2 \rangle \to \sigma_3$ (аксиома [assign$_{ns}$]).

Учитывая, что $\sigma_1 = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 2]$, получаем
$\sigma_2 = \sigma_1\,[x_2 \mapsto 4] = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 4]$,
$\sigma_3 = \sigma_2\,[x_1 \mapsto 1] = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 4]$.

3. Согласно правилу $\left[\text{while}^{\mathbf{tt}}_{ns}\right]$:

$$T_2 = \frac{T_5, \quad T_6}{\langle \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \texttt{ do } (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_3\rangle \to \sigma_6}, \text{ где}$$

$$T_5 = \frac{\cdots}{\langle x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_3\rangle \to \sigma_5},$$

$$T_6 = \frac{\cdots}{\langle \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \texttt{ do } (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_5\rangle \to \sigma_6}.$$

4. Согласно правилу [comp$_{ns}$]:

$$T_5 = \frac{T_7, \quad T_8}{\langle x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_3 \rangle \to \sigma_5}, \text{ где}$$

$T_7 = \langle x_2 := x_2 \cdot 2,\ \sigma_3 \rangle \to \sigma_4$ (аксиома [assign$_{ns}$]),
$T_8 = \langle x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_4 \rangle \to \sigma_5$ (аксиома [assign$_{ns}$]).

Учитывая, что $\sigma_3 = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 4]$, получаем
$\sigma_4 = \sigma_3\,[x_2 \mapsto 8] = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 8]$,
$\sigma_5 = \sigma_4\,[x_1 \mapsto 0] = [x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 8]$.

5. Согласно аксиоме $\left[\text{while}^{\mathbf{ff}}_{ns}\right]$:

$T_6 = \langle \mathtt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \mathtt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_5 \rangle \to \sigma_6$, где

$\sigma_6 = \sigma_5 = [x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 8]$.

§39. Редукционная семантика (семантика «малых шагов»)

В редукционной семантике используются два вида переходов:

$\langle d, \sigma \rangle \rhd \langle d', \sigma' \rangle$ – частичное выполнение синтаксической конструкции d из состояния вычисления σ (оставшаяся часть вычислений выражается промежуточной конфигурацией $\langle d', \sigma' \rangle$);

$\langle d, \sigma \rangle \rhd \sigma'$ – выполнение синтаксической конструкции d из состояния вычисления σ завершается, и результирующим состоянием становится σ'.

Правила редукционной семантики записываются в том же виде, что и правила естественной семантики.

Из естественной семантики в редукционную также переходит понятие *дерева семантического вывода*.

Пример. Редукционная семантика для операторов языка While.

$[\text{assign}_{rs}]$ $\quad \langle x := a,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \sigma\,[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,(\sigma)]$

$[\text{skip}_{rs}]$ $\quad \langle \mathtt{skip},\, \sigma\rangle \Rrightarrow \sigma$

$$\left[\text{comp}^1_{rs}\right] \qquad \frac{\langle S_1,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \left\langle S_1',\, \sigma'\right\rangle}{\langle S_1; S_2,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \left\langle S_1'; S_2,\, \sigma'\right\rangle}$$

$$\left[\text{comp}^2_{rs}\right] \qquad \frac{\langle S_1,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \sigma'}{\langle S_1; S_2,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle S_2,\, \sigma'\rangle}$$

$\left[\text{if}^{\mathbf{tt}}_{rs}\right]$ $\quad \langle \mathtt{if}\; b\; \mathtt{then}\; S_1\; \mathtt{else}\; S_2,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle S_1,\, \sigma\rangle$, если $\mathcal{B}[\![b]\!]\,(\sigma) = \mathbf{tt}$

$\left[\text{if}^{\mathbf{ff}}_{rs}\right]$ $\quad \langle \mathtt{if}\; b\; \mathtt{then}\; S_1\; \mathtt{else}\; S_2,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle S_2,\, \sigma\rangle$, если $\mathcal{B}[\![b]\!]\,(\sigma) = \mathbf{ff}$

$[\text{while}_{rs}]$ $\quad \langle \mathtt{while}\; b\; \mathtt{do}\; S,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle \mathtt{if}\; b\; \mathtt{then}\; (S; \mathtt{while}\; b\; \mathtt{do}\; S)\; \mathtt{else}\; \mathtt{skip},\, \sigma\rangle$

Пример. Дерево вывода для перехода

$$\langle (x_3 := x_2;\, x_2 := x_1)\,;\, x_1 := x_3,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle x_2 := x_1;\, x_1 := x_3,\, \sigma'\rangle$$

записывается так:

$$\frac{\dfrac{\langle x_3 := x_2,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \sigma'}{\langle x_3 := x_2;\, x_2 := x_1,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle x_2 := x_1,\, \sigma'\rangle}}{\langle (x_3 := x_2;\, x_2 := x_1)\,;\, x_1 := x_3,\, \sigma\rangle \Rrightarrow \langle x_2 := x_1;\, x_1 := x_3,\, \sigma'\rangle},\ \text{где}$$

$\sigma = [x_1 \mapsto 4,\, x_2 \mapsto 5]$,
$\sigma' = [x_1 \mapsto 4,\, x_2 \mapsto 5,\, x_3 \mapsto 5]$.

Определение. *Последовательность семантического вывода* для синтаксической конструкции d из состояния σ – это либо конечная последовательность конфигураций $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, либо бесконечная последовательность конфигураций $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$.
При этом $\gamma_0 = \langle d, \sigma \rangle$, $\gamma_i \Rrightarrow \gamma_{i+1}$ и γ_k – это либо терминальная, либо тупиковая конфигурация.

Определение. Говорят, что выполнение синтаксической конструкции d из состояния вычисления σ *завершается*, если существует конечная последовательность вывода, начинающаяся с $\langle d, \sigma \rangle$.
При этом выполнение *успешно*, если $\langle d, \sigma \rangle \Rrightarrow^\star \sigma'$.

Определение. Говорят, что выполнение синтаксической конструкции d из состояния вычисления σ *зацикливается*, если существует бесконечная последовательность вывода, начинающаяся с $\langle d, \sigma \rangle$.

Пример. Покажем процесс построения последовательности вывода для оператора

$$\texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)$$

из состояния вычисления $\sigma_1 = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 2]$.

1. Согласно правилу [while$_{rs}$]:

$$
\begin{array}{l}
\langle \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_1\rangle \Rrightarrow \\
\quad \langle \texttt{if}\ \neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{then}\ (\\
\qquad (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\qquad \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1) \\
\qquad) \\
\quad \texttt{else} \\
\qquad \texttt{skip}, \\
\quad \sigma_1\rangle
\end{array}
$$

2. Согласно правилу $\left[\text{if}^{\mathbf{tt}}_{rs}\right]$:

$$
\begin{array}{l}
\langle \texttt{if} \neg (x_1 = 0) \;\texttt{then}\; (\\
\quad (x_2 := x_2 \cdot 2;\; x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\quad \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \;\texttt{do}\; (x_2 := x_2 \cdot 2;\; x_1 := x_1 - 1) \\
\quad) \\
\texttt{else} \\
\quad \texttt{skip}, \\
\sigma_1\rangle \Rrightarrow \\
\quad \langle (x_2 := x_2 \cdot 2;\; x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\quad\; \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \;\texttt{do}\; (x_2 := x_2 \cdot 2;\; x_1 := x_1 - 1)\,, \\
\quad\; \sigma_1\rangle
\end{array}
$$

3. Согласно правилу $\left[\mathsf{comp}^1_{rs}\right]$:

$$\cfrac{\cfrac{\langle x_2 := x_2 \cdot 2,\ \sigma_1\rangle \Rrightarrow \sigma_2}{\langle x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_1\rangle \Rrightarrow \langle x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_2\rangle}}{\begin{array}{l}\langle (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,; \\ \ \mathtt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \mathtt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,, \\ \ \sigma_1\rangle \Rrightarrow \\ \quad \langle x_1 := x_1 - 1; \\ \quad\ \mathtt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \mathtt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,, \\ \quad\ \sigma_2\rangle\end{array}}$$

Учитывая, что $\sigma_1 = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 2]$, получаем $\sigma_2 = \sigma_1\,[x_2 \mapsto 4] = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 4]$.

4. Согласно правилу $\left[\mathrm{comp}^1_{rs}\right]$:

$$\frac{\langle x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_2\rangle \Rrightarrow \sigma_3}{\begin{array}{l}\langle x_1 := x_1 - 1; \\ \ \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,, \\ \ \sigma_2\rangle \Rrightarrow \\ \quad \langle \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_3\rangle\end{array}}$$

Учитывая, что $\sigma_2 = [x_1 \mapsto 2,\ x_2 \mapsto 4]$, получаем $\sigma_3 = \sigma_2\,[x_1 \mapsto 1] = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 4]$.

5. Согласно правилу [while$_{rs}$]:

$$
\begin{array}{l}
\langle \mathtt{while} \neg (x_1 = 0) \ \mathtt{do} \ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\, ,\ \sigma_3 \rangle \Rrightarrow \\
\quad \langle \mathtt{if} \neg (x_1 = 0) \ \mathtt{then} \, (\\
\qquad (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\, ; \\
\qquad \mathtt{while} \neg (x_1 = 0) \ \mathtt{do} \ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1) \\
\qquad) \\
\quad \mathtt{else} \\
\qquad \mathtt{skip}, \\
\quad \sigma_3 \rangle
\end{array}
$$

6. Согласно правилу $\left[\mathsf{if}^{\mathbf{tt}}_{rs}\right]$:

$$
\begin{array}{l}
\langle \mathtt{if} \neg (x_1 = 0) \ \mathtt{then} \, (\\
\quad (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\quad \mathtt{while} \neg (x_1 = 0) \ \mathtt{do} \ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1) \\
\quad) \\
\mathtt{else} \\
\quad \mathtt{skip}, \\
\sigma_3\rangle \Rrightarrow \\
\quad \langle (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\quad\ \mathtt{while} \neg (x_1 = 0) \ \mathtt{do} \ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,, \\
\quad\ \sigma_3\rangle
\end{array}
$$

7. Согласно правилу $\left[\mathrm{comp}^1_{rs}\right]$:

$$\dfrac{\dfrac{\langle x_2 := x_2 \cdot 2,\ \sigma_3\rangle \Rrightarrow \sigma_4}{\langle x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_3\rangle \Rrightarrow \langle x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_4\rangle}}{\begin{array}{l}\langle (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,; \\ \ \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,, \\ \ \sigma_3\rangle \Rrightarrow \\ \quad \langle x_1 := x_1 - 1; \\ \quad\ \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,, \\ \quad\ \sigma_4\rangle \end{array}}$$

Учитывая, что $\sigma_3 = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 4]$, получаем $\sigma_4 = \sigma_3\,[x_2 \mapsto 8] = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 8]$.

8. Согласно правилу $\left[\mathrm{comp}^1_{rs}\right]$:

$$\frac{\langle x_1 := x_1 - 1,\ \sigma_4\rangle \Rrightarrow \sigma_5}{\begin{array}{l}\langle x_1 := x_1 - 1;\\ \ \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\\ \ \sigma_4\rangle \Rrightarrow\\ \quad \langle \texttt{while}\,\neg\,(x_1 = 0)\ \texttt{do}\ (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,,\ \sigma_5\rangle\end{array}}$$

Учитывая, что $\sigma_4 = [x_1 \mapsto 1,\ x_2 \mapsto 8]$, получаем $\sigma_5 = \sigma_4\,[x_1 \mapsto 0] = [x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 8]$.

9. Согласно правилу [while$_{rs}$]:

$$
\begin{array}{l}
\langle \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \ \texttt{do} \ (x_2 := x_2 \cdot 2; \ x_1 := x_1 - 1)\,, \ \sigma_5 \rangle \Rrightarrow \\
\quad \langle \texttt{if} \neg (x_1 = 0) \ \texttt{then} \, (\\
\quad\quad (x_2 := x_2 \cdot 2; \ x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\quad\quad \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \ \texttt{do} \ (x_2 := x_2 \cdot 2; \ x_1 := x_1 - 1) \\
\quad\quad) \\
\quad \texttt{else} \\
\quad\quad \texttt{skip}, \\
\quad \sigma_5 \rangle
\end{array}
$$

10. Согласно правилу $\left[\mathsf{if}_{rs}^{\mathbf{ff}}\right]$:

$$
\begin{array}{l}
\langle \texttt{if} \neg (x_1 = 0) \texttt{ then} \, (\\
\quad (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1)\,; \\
\quad \texttt{while} \neg (x_1 = 0) \texttt{ do } (x_2 := x_2 \cdot 2;\ x_1 := x_1 - 1) \\
\quad) \\
\ \texttt{else} \\
\quad \texttt{skip}, \\
\ \sigma_5\rangle \Rrightarrow \\
\quad \langle \texttt{skip},\ \sigma_5\rangle
\end{array}
$$

11. И, наконец, по правилу $[\mathsf{skip}_{rs}]$:

$\langle \texttt{skip},\ \sigma_5\rangle \Rrightarrow \sigma_5$.