ЛЕКЦИЯ № 9

Методы
условной оптимизации

Методы условной оптимизации

(методы математического программирования с учетом ограничений)

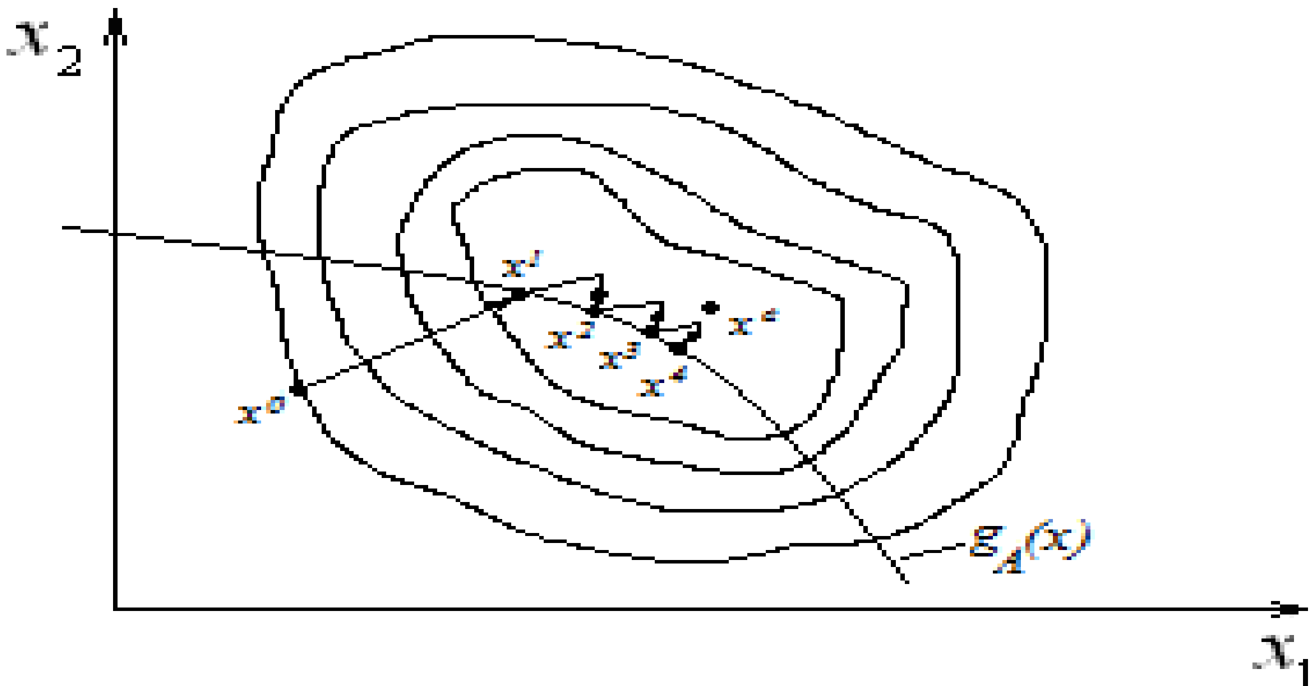
Методы нелинейного программирования.

1. ***Прямые методы*** – это методы, где последовательно решаются задачи оптимизации таким образом, что на каждом этапе процесс решения не выходит за пределы активных ограничений.
   1.1. **Методы проекции градиента**
   1.2. **Методы решения уравнений Куна-Таккера**.

2. ***Двойственные методы*** – ряд методов, которые строят вспомогательную функцию по аналогии с двойственной функцией Лагранжа.
   2.1. **Методы штрафных функций**.
      2.1.2. **Методы внешних штрафов.**
      2.1.3. **Методы внутренних штрафов (метод барьерных функций).**
      2.1.4. **Метод последовательной безусловной оптимизации (МПБМ-SUMT).**
   2.2. **Лагранжевы методы.**
      2.2.1. **Метод Удзавы и Эрроу-Гурвица.**
      2.2.2. **Методы модифицированных функций Лагранжа.**

1. Прямые методы.

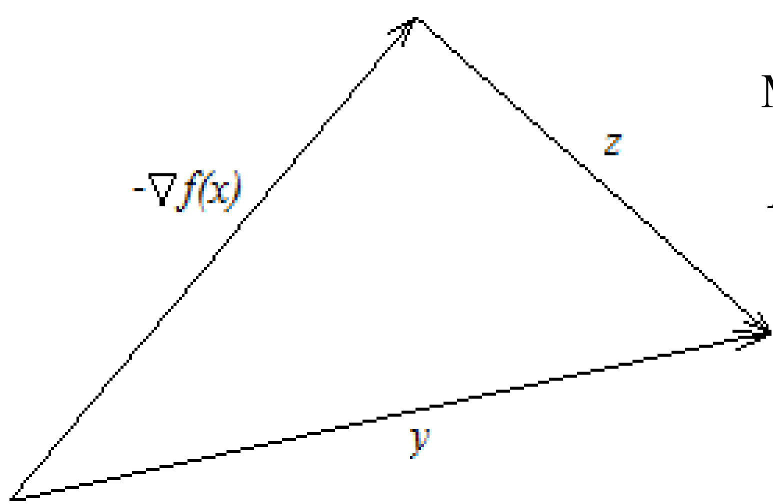
Метод проекции градиента



Целевая функция и функции ограничений нелинейны.

Метод проекции градиента

Из *x0* идем по градиенту. Попадаем на активное ограничение. «Продолжаем» градиент, но проектируем его на касательную гиперповерхность в этой точке. Градиент должен быть спроектирован, и получится новый вектор.



Можно записать:

$$-\nabla f(x) + y = z$$

Матрица проектирования:

$$P^0 = E - A^{0T}\left[A^0 A^{0T}\right]^{-1} A^0$$

Ограничения можно линеаризовать в данной точке, разложив в ряд Тейлора и сохранив первые два члена.

$$-\nabla f(x) + y = z = -\nabla f(x) + \left(A^{0T}\left[A^0 A^{0T}\right]^{-1} A^0\right)\nabla f(x) = -P^0 \nabla f(x)$$

Метод проекции градиента

<u>Алгоритм</u>

<u>Ш0.</u> Выбор начальной точки *x0*, *k*=0.

<u>Ш1.</u> Определение множества индексов активных ограничений *I0*(*xk*) – для данных точек x_k.

<u>Ш2.</u> Формирование матрицы коэффициентов линейных ограничений, соответствующих активным ограничениям.

Вычисление $\left\{P^0 = E - A^{0T}\left[A^0 A^{0T}\right]^{-1} A^0; y^k == -P^0 \nabla f(x^k)\right\}$

Если [z_k=0], то {перейти на Ш4}.

<u>Ш3</u>. Иначе если $\left[z^k \neq 0\right]$, то вычислить шаг $\left\{\alpha_{\max} = \max\left(\alpha \mid x^k + \alpha z^k \in X\right)\right\}$

$$\left\{x^{k+1} = Arg\min\left(f(x^k + \alpha z^k)\right); k = k+1; \text{переход на Ш1}\right\}$$

<u>Ш4.</u> Вычислить $\left\{y^k = -A^{0T}\left[A^0 A^{0T}\right]^{-1} A^0 \nabla f(x)\right\}$. Если $\left[y \geq 0\right]$, то $\left\{x^e = x^k; \text{конец}\right\}$

Иначе {выводим текущее ограничение из числа активных; переход на Ш2}.

Решение уравнений Куна-Таккера

ЗВП в классической постановке:

$$x^e = Arg\min_{x\in X} f(x)$$

$$x_i \geq 0, i = 1 \ldots n$$

$$g_j(x) = 0, j = 1 \ldots m$$

Функция Лагранжа: $$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

Условия существования экстремального решения: $$\begin{cases} \nabla_x L(x,\lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\det(\nabla_x^2 L(x,\lambda)) \begin{cases} < 0 \rightarrow \max \\ > 0 \rightarrow \min \\ = 0 \rightarrow \text{точка перегиба, седло} \end{cases}$$

Решение уравнений Куна-Таккера

Решаем систему уравнений методом Ньютона:

$$\begin{cases} \nabla_x f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla_x g_j(x) = 0 \\ g_j(x) = 0 \end{cases}$$

Система уравнений является нелинейной. Линеаризуем уравнения, записав в виде двух членов ряда Тейлора:

$$\begin{cases} \nabla_x f(x^k) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \nabla_x g_j(x^k) + \frac{1}{2}\left[\nabla_x^2 f(x^k) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \nabla_x^2 g_j(x^k)\right]\left(x^{k+1} - x^k\right) + \sum_{j=1}^{m} \nabla_x g_j(x^k)\left(\lambda^{k+1} - \lambda^k\right) = 0 \\ g_j(x^k) + \nabla_x g_j(x^k)\left(x^{k+1} - x^k\right) = 0 \end{cases}$$

Решение уравнений Куна-Таккера

Перенесем первый член функции Лагранжа в правую часть, и в левой части останется:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k) & \nabla_x g_1^k & \dots & \nabla_x g_m^k \\ \nabla_x g_1^k & & & \\ \dots & & 0 & \\ \nabla_x g_m^k & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x L(x, \lambda) \\ -g(x) \end{bmatrix}$$

- система (m+n) линейных уравнений.

Матрица Якоби: $J^k = \left[\nabla_x g_1^k \dots \nabla_x g_m^k\right]^T$

Матрица Гессе: $H^k = \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k)$

Решение уравнений Куна-Таккера

Формируем систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} H^k & J^{kT} \\ J^k & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x f(x^k) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k g_j(x^k) \\ -g(x^k) \end{bmatrix}$$

Получим:

$$\begin{bmatrix} H^k & J^{kT} \\ J^k & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x f(x^k) \\ -g(x^k) \end{bmatrix}$$

Теперь можно использовать метод Ньютона для решения этой задачи. А можно и квазиньютоновский метод. Обозначим

$$\Gamma^{k+1} \approx \begin{bmatrix} H^k & J^{kT} \\ J^k & 0 \end{bmatrix}$$

Можно представить $$\Gamma^{k+1} = \Gamma^k + \Delta\Gamma^k$$

и использовать квазиньютоновский метод.

Решение уравнений Куна-Таккера

Достоинства метода: Суперлинейная сходимость.

Недостатки:

1. функция должна быть выпуклой в области поиска экстремума;
2. начальная точка должна быть выбрана близко к оптимальному решению, иначе сходимость решения не гарантируется.

Метод решения уравнений Куна-Таккера используется совместно с другими методами, в частности с методами штрафных функций. Тогда решение состоит из двух этапов:

1) нахождение приемлемой начальной точки $X0$ методом штрафных функций.

2) нахождение методом решения уравнений Куна-Таккера оптимального решения Xe.

Двойственные методы.

1. Методы штрафных функций.

1.1. Метод внешних штрафов.

Пусть даны *f(x)*, *gj(x)* – выпуклые функции.
Задача выпуклого программирования:

$$
\begin{cases}
x^e = Arg\min\limits_{x\in X} f(x) \\
x_i \ge 0, i = 1\ldots n \\
g_j(x) = 0;\ j = 1\ldots l \\
g_j(x) \le 0;\ j = l+1\ldots m.
\end{cases}
$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(x) + \sum_{j=l+1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

Надо решить задачу таким образом, чтобы:

$$x^e = Arg\min_{x\in X} L(x,\lambda,\mu), x \subset E^n$$

$$\lambda^e = Arg\max_{\lambda\in\Lambda} L(x,\lambda,\mu), \lambda \subset E^l$$

$$\mu^e = Arg\min_{\mu\in \mathrm{M}} L(x,\lambda,\mu), \mathrm{M} \subset E^{m-l}$$

Методы штрафных функций.
Метод внешних штрафов.

Виды штрафных функций

1.Квадратичная функция

Запишем штрафную функцию в виде:

$$\Phi_Q(x, p^{(s)}) = f(x) + \frac{p^{(s)}}{2}\sum_{j=1}^{l}[\max(g_j(x))]^2 + \frac{p^{(s)}}{2}\sum_{j=l+1}^{m}\max[0, g_j(x)]^2$$

p(s) называется параметром штрафа.

Решая задачу, получаем не только *xe*, но и (приближенно) множители Лагранжа.

$$\nabla_x \Phi_Q(x, p) = \nabla_x f(x) + p^{(s)}\sum_{j=1}^{l} g_j \nabla g_j(x) + p^{(s)}\sum_{j=l+1}^{m} g_j \nabla g_j(x)$$

В данном случае можно аппроксимировать:

$$\lambda_j \approx p^{(s)} g_j(x),\ j = 1...l$$

$$\mu_j \approx p^{(s)} g_j(x),\ j = l+1...m$$

Методы штрафных функций.
Метод внешних штрафов.

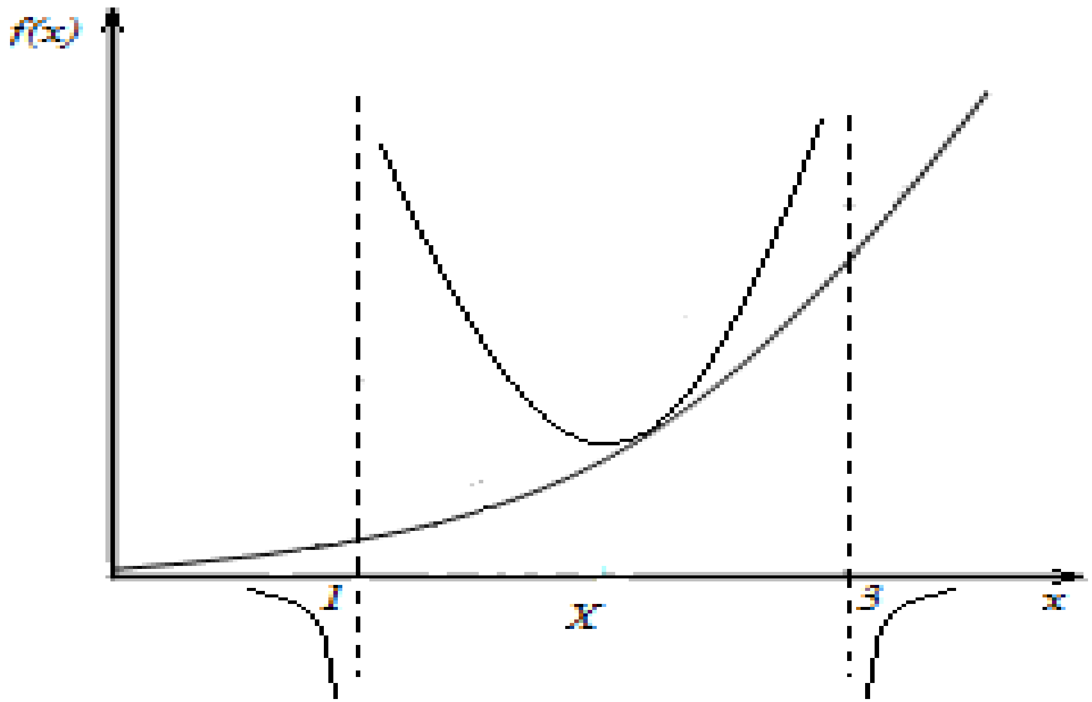
Точные штрафные функции

$$\Phi_p(x,p) = f(x) + p\sum_{j=1}^{m} \max|g_j^+(x)|\, H[g_j^+(x)]$$

Параметр штрафа р не меняется.

$H[g_j^+(x)]$ - Функция Хевисайда.

Методы штрафных функций.
Метод внутренних штрафов.



Задача – найти экстремум, не выходя за пределы допустимой области. Для этого можно найти функции, которые образуют барьеры при достижении области, близкой к границе.

Методы штрафных функций.
Метод внутренних штрафов.

Метод обратных функций

Барьерная функция: $$\Psi_I(x, q^{(s)}) = f(x) + q^{(s)} \sum_{j=1}^{m} \psi_j[g_j(x)] \ ,$$

где можно представить $$\psi_j[g_j(x)] = \frac{1}{g_j(x) + \varepsilon}$$

$$\Psi_I(x, q^{(s)}) = f(x) - \frac{1}{r_0^{(s)}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x) + \varepsilon}$$

$q^{(s)}$ называется параметром барьера (параметром штрафа).

Последовательно решая задачу, попадаем в точку экстремума.

Методы штрафных функций.
Метод внутренних штрафов.

<u>Метод логарифмических функций.</u>

$$\psi_j\left[g_j(x)\right] = \ln(-g_j(x));$$

$$q^{(s)} = -\frac{1}{r_0^S}$$

Методы штрафных функций.

Метод последовательной безусловной минимизации (SUMT)

Это комбинация предыдущих методов – формирование штрафных функций из двух компонент:

$$F(x, r^{(s)}) = f(x) + \Phi(x, r^{(s)}) + \Psi(x, r^{(s)})$$

Общая штрафная функция: $P(x, r^{(s)}) = \Phi(x, r^{(s)}) + \Psi(x, r^{(s)})$

Этот метод почти аналогичен методу штрафных и барьерных функций. Сначала точка загоняется в допустимую область, а потом на основании свертки решается задача безусловной оптимизации.

I этап. Минимизация общей штрафной функции. $x^0 = Arg \min_{x \in X} P(x, r^{(s)})$

II этап. Поиск точки экстремума. $x^e = Arg \min F(x, r^{(s)})$

Методы штрафных функций.

Метод последовательной безусловной минимизации (SUMT)

Алгоритм метода последовательной безусловной оптимизации

***Этап I.* Задать r_0, ε_0, *i=0*;** $P(x,r) = \Phi(x,r) + \Psi(x,r)$.

Ш.1. Задать $x^{(0)}$ – начальное значение, пока не попали в ОДЗ. И ищем

$$x^0 = Arg\min P(x,r)$$

Если штрафная функция – выпуклая дифференцируемая, то можно использовать методы первого порядка (квазиньютоновские, Флетчера-Ривза). Если функция имеет разрывы в производной, можно использовать методы нулевого порядка (Нелдера-Мида, Хука-Дживса, Розенброка).

Ш.2. Если $\left[\left|P(x,r^{(s)}) - P(x,r^{(s-1)})\right| < \varepsilon,\right]$ то $\left\{x^0 = x^s; \text{конец}\right\}$.

Иначе переход на *Ш.1*.

Методы штрафных функций.

Метод последовательной безусловной минимизации (SUMT)

Этап II. $x^e = Arg\min F(x, r^{(s)})$

Ш.0. Задать *r0, ε0, i=0.*

Ш.1. Свертка смешанной вспомогательной функции

$$F(x,r) = f(x) + \Phi(x,r) + \Psi(x,r)$$

При этом $r^i = r^{i-1} \cdot r_0$ Т.е., например, если начинаем с точки r_0 ,

можно выбрать $r_0 = 1.618$, но в диапазоне $1.5 \le r_0 \le 4$.

Ш.2. Найти точку $x_i^e = Arg\min F(x, r_i)$

с помощью метода безусловной минимизации.

Ш.3. Условие останова

Если $[|F(x_i, r_i) - F(x_{i-1}, r_{i-1})| < \varepsilon]$, то $\{x^e = x_i; \text{конец}\}$

Иначе $[r_{i+1} = r_i \cdot r_0; i = i+1; \textit{переход на Ш}.2]$.

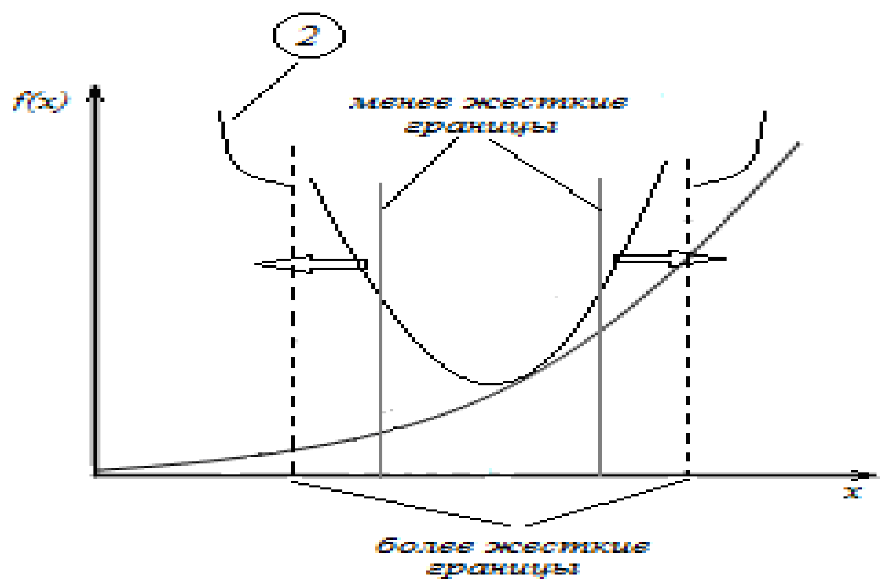
Методы штрафных функций.

Метод последовательной безусловной минимизации (SUMT)

Распишем штрафную функцию:

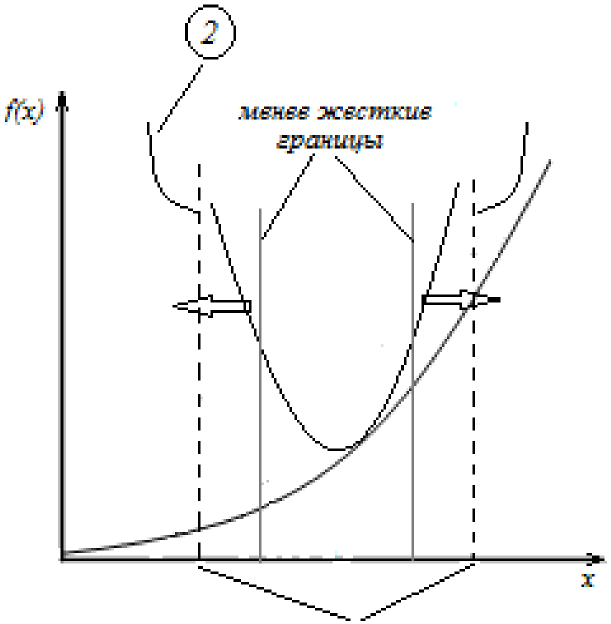
$$P(x, r_i) = r_i \sum_{j=1}^{k} [g_j^+(x)]^2 H[g_j^+(x)] - \frac{1}{r_i} \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{g_j(x) + \varepsilon} + \Phi_{II}(x, r)$$

Можно проранжировать ограничения по степени важности (обычно наиболее важны параметрические, а функциональные обычно не очень жесткие). Для более жестких ограничений используют барьерные функции, для менее жестких – штрафные функции.



Методы штрафных функций.

Метод последовательной безусловной минимизации (SUMT)



При приближении к жестким границам функция резко увеличивается, и не имеет права выходить за границы. Но иногда может быть «прокалывание» границ (см. стрелки на рис.). Число ε дает возможность задать определенное значение. Но надо добавить еще штрафную функцию на внешние границы. И вводят функцию

$$\Phi_{II}(x;r)$$

Достоинства :

Метод штрафных функций позволяет быстро получить приближение к экстремуму, но как правило не сам экстремум (если функция имеет сложную овражную структуру, может не получиться сам экстремум).

Недостатки:

При дальнейшем увеличении *ri* штрафная функция становится сильно овражной и задача оптимизации становится плохо обусловленной.

Методы функций Лагранжа.

Классические лагранжевы методы .

Методы Удзавы и Эрроу-Гурвица.

Методы состоят в решении двойственной задачи:

$w(\lambda)=\min L(x,\lambda)$. При этом строится последовательность подзадач.

$$w(\lambda)=\min_{x\in X}[f(x)+\lambda^{(k)\tau}g(x)]=f(x^{(k)})+\lambda^{(k)\tau}g(x^{(k)}).$$

При этом $x^{(k)}=Arg\min_{x\in X}[f(x)+\lambda^{(k-1)\tau}g(x)],\lambda^{(k)}=Arg\max_{\lambda\in\Lambda}[f(x^{(k)})+\lambda^T g(x^{(k)})].$

Задача решается с одновременным вычислением x(k) и λ(k). То есть ищется вектор, соответствующий седловой точке

$$\begin{bmatrix} x^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$$

Эти методы обладают существенным недостатком – они не гарантируют сходимости. Таких недостатков лишены методы модифицированных функций Лагранжа. При решении задач этими методами сохраняется хорошая обусловленность матрицы Гессе.

Методы функций Лагранжа.
Методы модифицированных функций Лагранжа.

Один из первых и наиболее простой ММФЛ был предложен независимо Хестеном и Пауэллом в 1969г. Он состоит в следующем: квадратичная штрафная функция дополняется членом, содержащим множители Лагранжа. Поиск осуществляется по переменным проектирования x и по двойственным переменным λ. Решается последовательность задач вида: $\begin{cases} x_i^e = Arg \min\limits_{x \in X} L_g(x, r, \lambda) \\ \lambda_i^e = Arg \max L_g(x, r, \lambda) \end{cases}$, где $L_g(x, r, \lambda) = f(x) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{m} [g_j^+(x)]^{2m} + \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j g_j^+(x)$

- обобщенный лагранжиан.

При этом r=const для всех итераций, поэтому плохая обусловленность не возникает.

Методы функций Лагранжа.
Методы модифицированных функций Лагранжа.

Алгоритм ММФЛ:

Ш. 0: Задать: ε, δ, r (r=const: 1≤r≤10).
Ш. 1: Задать: x0, λ0 (λ0=1); k=0.
Ш. 2: Вычислить методом минимизации (Ф-Р, КНМ или другим)

$$\left\{x^e = Arg\min_{x\in X} L(x, r, \lambda^{(k)}); x^{(k)} = x^{e(k)}\right\}.$$

***Ш. 3*: Вычислить** $\left\{\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + rg_j(x); k = k+1\right\}.$

***Ш. 4*: Если** $[L_g(x^{(k)}, r, \lambda^{(k)}) - f(x^{(k)}) \le \varepsilon) \wedge (\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \le \delta)]$, то $\left\{x^{e*} = x^{(k)}; конец\right\}$,
иначе {переход на Шаг 2}.

Примечание.

Вместо квадратичной штрафной функции $\frac{r}{2}\sum[g_j^+(x)]^2$ может быть использована “точная” штрафная функция $r\sum\left|g^+(x)\right|$, но в этом случае следует использовать методы минимизации 0-го порядка .