МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

Факультет информатики и систем управления

Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №1
по курсу «Методы оптимизации»

«Необходимые и достаточные условия существования безусловного и условного экстремума»

Выполнил:
студент ИУ9-111
Выборнов А. И.

Руководитель:
Каганов Ю. Т.

Москва 2016

1. Задача 1

1.1. Постановка задачи

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 3 * x_1 + x_2 * x_3 + 6 * x_2 + 2$.

1.2. Решение

Необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\nabla f(x) = 0,$$

где $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 3 * x_1 + x_2 * x_3 + 6 * x_2 + 2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \\ 2x_3 + x2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В результате решения вышеприведённой системы, находим две стационарные точки: $x_1^l = (1, -4, 2)$ и $x_2^l = (-1, -4, 2)$.

Запищем матрицу Гессе для исходной функции:

$$H = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проверяем выполнение достаточного условия для точки x_1^l:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 6 > 0, \\ \Delta_2 = 12 > 0, \\ \Delta_3 = 18 > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Получили, что матрица Гессе $H(x_1^l)$ положительно определена и точка x_1^l является точкой локального минимума.

Проверяем выполнение достаточного условия для точки x_2^l:

$$\begin{cases} \Delta_1 = -6 < 0, \\ \Delta_2 = -12 < 0, \\ \Delta_3 = -18 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Получили, что для точки x_2^l достаточное условие не выполняется.

Проверяем выполнение необходимого условия второго порядка для точки x_2^l. Критерий проверки необходимых условий экстремума второго порядка не выполняется. Следовательно x_2^l - не точка экстремума.

Нашли точку экстремума $x_1^l = (1, -4, 2)$, которая является точкой локального минимума и $f(x_1^l) = -12$.

2. Задача 2

2.1. Постановка задачи

Найти экстремум функции $f(x)$ (подобрать α):

$$\begin{cases} f(x) = (x_1^3 - \alpha)^2 + x_2^2 \to extr, \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ g_2(x) = -x_1 \leq 0. \end{cases}$$

2.2. Решение

Составим обобщённую функцию Лагранжа, которая имеет вид:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j g_j(x).$$

Получим необходимые условия экстремума первого порядка. Условие стационарности обощённой функции:

$$\frac{\delta L(x, \lambda_0, \lambda)}{\delta x_i} = 0, i = 1, 2.$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} + \frac{\delta L}{\delta x_2} = 6\lambda_0(x_1^3 - \alpha)x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 + 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0.$$

Условие допустимости решения:

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ g_2(x) = -x_1 \le 0. \end{cases}$$

Условия неотрицательности и неположительности не рассматриваются в виду условия задачи. Условие дополняющей нежёсткости:

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2(-x_1) = 0. \end{cases}$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\lambda_0(x_1^3 - \alpha)x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 + 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ -x_1 \le 0, \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2(-x_1) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1. $\lambda_0 = 0$,
2. $\lambda_0 \ne 0$, при этом $\frac{\lambda_j}{\lambda_0} = \lambda'_j$.

2.2.1. Случай 1 ($\lambda_0 = 0$)

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ -x_1 \le 0, \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2(-x_1) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$, тогда получаем два решения $x^l = (0, \pm 1)$. Пусть $\lambda_1 = 0$, тогда $\lambda_2 = 0$ и получаем систему решений:

$$\begin{cases} (x_1^l)^2 + (x_2^l)^2 - 1 \leq 0, \\ x_1^l \in [0, 1], \\ x_2^l \in [-1, 1]. \end{cases}$$

2.3. Проверка достаточных условий экстремума

Проверим достаточные условия экстремума для точек, полученных на предыдущем этапе ($\lambda_0 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$). Для этого необходимо $d^2L(x^l, \lambda^l) > (<)0$.

Получаем $d^2L(x^l, \lambda^l) = 4\lambda_1 \neq 0$. То есть, точки $x^l = (0, \pm 1)$ является точками локальных экстремумов.

2.4. Вычисление значений функции в точках экстремума

$$f([0, 1]) = \alpha^2 + 1$$

$$f([0, -1]) = \alpha^2 + 1$$