МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

Факультет информатики и систем управления

Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №6

по курсу «Математическое моделирование»

«Моделирование прыжков на батуте»

Выполнил:
студент ИУ9-111
Выборнов А. И.

Руководитель:
Домрачева А. Б.

Москва 2015

1. Постановка задачи

Моделировать прыжок на батуте. Коэффициент упругости батута k, масса прыгуна m. Считать, что для набора высоты прыгун отталкивается n раз, прыгает в вертикальном направлении. Построить зависимость набранной высоты от количества прыжков.

2. Построение математической модели

Введём энергию E_{jump}, которую прыгун тратит при каждом отталкивании.

С целью упрощения и ввиду того, что для батута задан единственный коэффициент упругости k, будем полагать что батут представляет собой пружинную систему с минимальным коэффициентом упругости k, где за место груза - прыгун. Каждый новый прыжок, будет вызывать всё меньшее смещение батута. Для этого представим батут как пружину с фиксированной длиной $l = 1$м, для которой коэффициент упругости изменяется с k, когда пружина не сжата до $+\infty$ когда пружина сжата до нуля.

Функция $f_k(\Delta x)$, задающая изменения коэффициента упругости в зависимости от смещения батута от начального положения показана на рисунке 1. Выразим функцию, представленную на рисунке, как $f_k(\Delta x) = -\frac{1}{\Delta x - 1} + k - 1$ (Это только один из возможных вариантов).

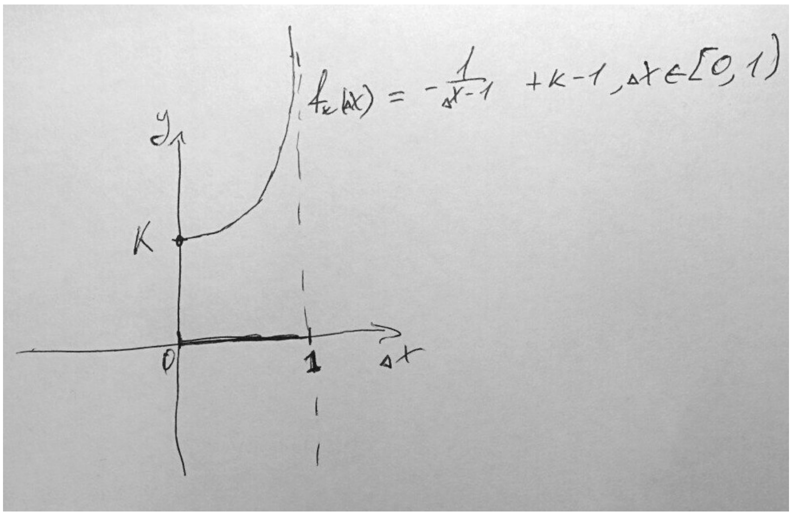

Рисунок 1 — График зависимости коэффициент упругости от смежения батута

Будем считать, что система будет вести себя как пружинный маятник, когда прыгун касается батута. В момент прыжка, он отталкивается от батута и на прыгуна действует только сила тяжести. Когда он приземляется, он тут же снова отталкивается.

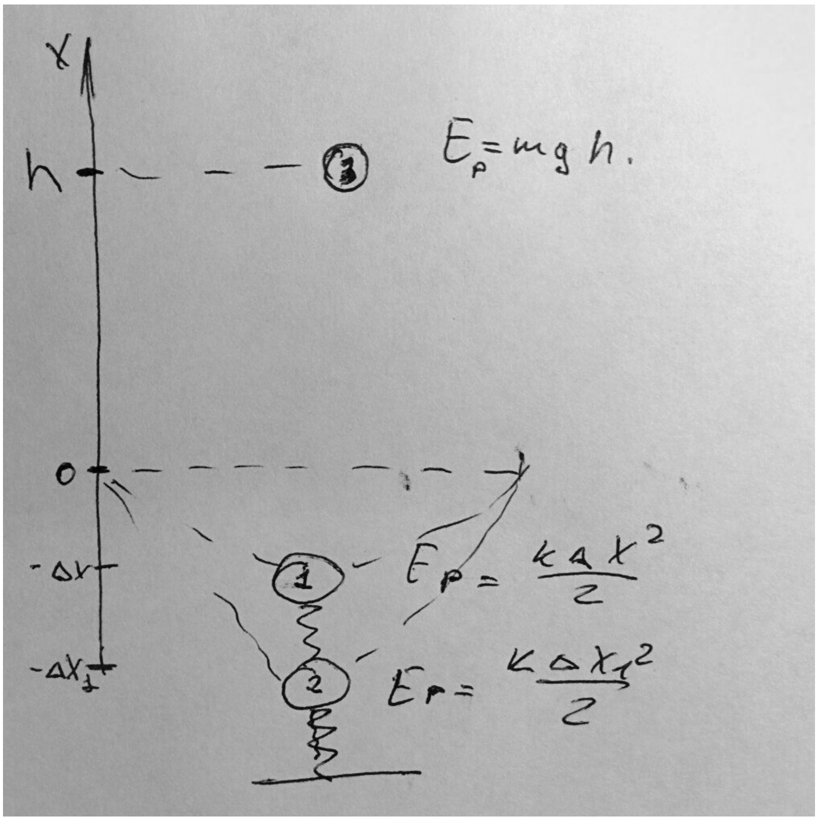

Рисунок 2 — Физическая схема задачи

На вход мы имеем массу прыгуна m, функцию, задающую коэффициент упругости батута $f_k(\Delta x)$, энергию отталкивания прыгуна E_{jump}, количество толчков n. Необходимо найти зависимость высоты прыжка от количества прыжков $h(n)$.

На рисунке 2 показана схема задачи. Цифрами 1,2,3 - показаны состояния системы. Состояние 1 соответствует моменту приземления, батут сместился на Δx. Состояние 2 соответствует положению прыгуна сразу после толчка, батут смещён на Δx_1. Состояние 3 соответствует наивысшей точке, до которой он допрыгнул, прыгун находится на высоте h.

В состоянии 1 система имеет энергию $E_1 = \frac{f_k(\Delta x)\Delta x^2}{2}$, затем прыгун затратил энергию E_{jump} на прыжок и переместился в состояние 2. В состоянии 2 система имеет энергию $E_2 = \frac{f_k(\Delta x_1)\Delta x_1^2}{2}$. То есть совершена работа E_{jump}, которая равна изменению энергии системы: $E_2 - E_1$. Получили уравнение:

$$E_{jump} - (\frac{f_k(\Delta x_1)\Delta x_1^2}{2} - \frac{f_k(\Delta x)\Delta x^2}{2}) = 0$$

Разрешив это уравнение относительно Δx_1, можно получить значение Δx_1 по Δx.

Получили алгоритм, которая позволяющий находить новое смещение батута после прыжка, на основании предыдущего смещения батута.

Пусть после толчка прыгун находится в состоянии 1, а после того как он подпрыгнул, самый высокой точкой его полёта была точка, соответствующая состоянию 3. В состоянии 3 система имеет энергию $E_3 = mgh$. По закону сохранения энергии энергия в состоянии 1 и состоянии 3 равна, то есть:

$$\frac{f_k(\Delta x)\Delta x^2}{2} = mgh$$

Выразим высоту:

$$h(\Delta x) = \frac{f_k(\Delta x)\Delta x^2}{2mg}$$

Получили зависимость высоты прыжка от смещения батута перед прыжком.

Теперь мы можем построить итеративный процесс следующий образом: начиная с смещения $\Delta x = 0$ симулируем прыжок и получаем новое смещение $\Delta x_1(\Delta x)$. Затем находим высоту прыжка $h(\Delta x_1)$. Присваиваем $\Delta x = \Delta x_1$. Повторяем n раз.

3. Реализация

Ниже представлена реализация итеративного алгоритма, описанного в главе 2:

```
f_k = lambda x: -1/(x-1) + k - 1
f = lambda dx, dx1: f_k(dx1)*dx1**2 - f_k(dx)*dx**2 - 2*E_jump

h = lambda dx: k*dx**2*1.0/(2*m*g)
new_dx = lambda dx: min(
    fsolve(lambda dx1: f(dx, dx1), max(dx, 1e-5))[0],
    1-1e-5
)

dx = 0
for i in range(1, n+1):
    dx = new_dx(dx)

    print dx, h(dx)
```

4. Результаты работы

Программа, описанная выше была запущена с параметрами: $m = 80$кг, $k = 5000$Н/м, $E_{jump} = 240$Дж, $n = 10$. Полученная зависимость максимальной высоты от количества прыжков изображена на рисунке 3. Зависимость смещения батута от количества прыжков представлена на рисунке 4.

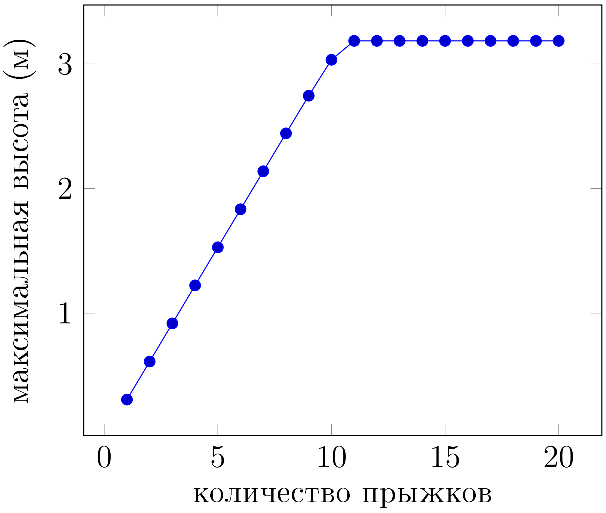

Рисунок 3 — Зависимость максимальной высоты от количества прыжков

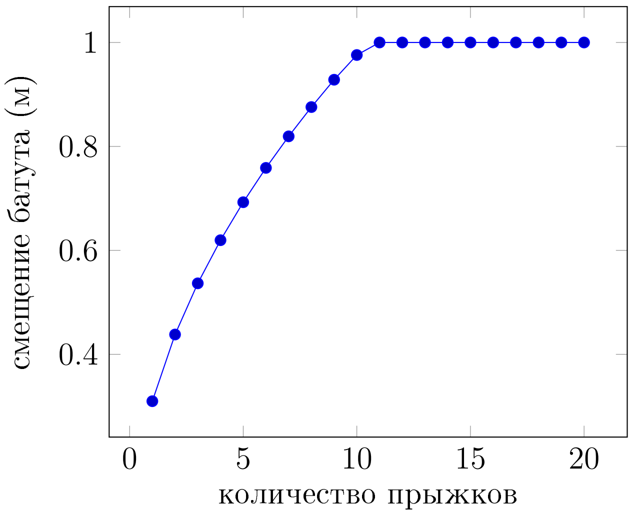

Рисунок 4 — Зависимость смещения батута от количества прыжков

5. Выводы

Из результатов работы программы, описанных в главе 4, видно что зависимость максимальной высоты прыгуна от количества прыжков линейная, но ограничена максимально возможной "раскачкой" батута. Также видно, что с каждым прыжком уменьшается изменение смещения батута.