МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА
Факультет информатики и систем управления
Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №1
по курсу «Теория игр и исследование операций»

«Двойственность в линейном программировании»

Выполнил:
студент ИУ9-111
Выборнов А.И.

Руководитель:
Басараб М.А.

Москва 2015

1. Цель работы

Постановка двойственной задачи (ДЗ) линейного программирования по прямой задаче (ПЗ). Решение соответствующей двойственной задачи по прямой задаче.

2. Постановка задачи

Поставить и решить двойственную задачу, соответствующую приведённой прямой задаче:

$$F = cx \to max,$$

$$Ax \leq b,$$

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$c = [2, 5, 3], A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, b^T = [6, 6, 2]$$

3. Решение

Прямая задача:

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 0.5x_2 + x_3 \leq 2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Находим решение ПЗ симплекс-методом (приведено в главе 4):

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \end{cases}$$

$$max(F(x)) = 16.75$$

Согласно указанным правилам формулируем ДЗ ЛП:

$$\Phi = 6y_1 + 6y_2 + 6y_3 \to min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 2, \\ y_1 + 2y_2 + 0.5y_3 \geq 5, \\ 2y_1 + y_3 \geq 3. \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Каноническая форма ДЗ имеет вид:

$$\Phi = 6y_1 + 6y_2 + 6y_3 \to min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_4 = 2, \\ y_1 + 2y_2 + 0.5y_3 - y_5 = 5, \\ 2y_1 + y_3 - y_6 = 3. \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Решение ДЗ:

$$\begin{cases} y_1 = 0.13, \\ y_2 = 1.75, \\ y_3 = 2.75. \end{cases}$$

$$max(\Phi(x)) = 16.75$$

Таким образом, решения прямой и двойственной задач совпадают.

4. Решение ПЗ

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 0.5x_2 + x_3 \leq 2. \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Избавимся от неравенства - получим задачу в канонической форме:

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6, \\ 0.5x_2 + x_3 + x_6 = 2. \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \tag{1}$$

Пусть x_4, x_5, x_6 — базисные переменные, x_1, x_2, x_3 — свободные переменные. Тогда имеем:

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max,$$
$$\begin{cases} x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2), \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3). \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \tag{2}$$

Исходная симплекс-таблица записывается в виде:

	s_{i0}	x_1	x_2	x_3
x_4	6	2	1	2
x_5	6	1	**2**	0
x_6	2	0	0.5	1
F	0	-2	-5	-3

Так как в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, то найдено опорное решение: $x = [0, 0, 0, 6, 6, 2], F(x) = 0$. В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально.

x_2 — разрешающий столбец, так как значение в строке таблицы, соответствующей целевой функции по модулю максимально.

Найдем минимальное положительное отношение элемента свободных членов s_{i0} к соответствующем элементу в разрешающем столбце. Минимальное положительное отношение в строке x_5, выберем её в качестве разрешающей.

Пересчитываем симплекс таблицу:

	s_{i0}	x_1	x_5	x_3
x_4	3	1.5	-0.5	2
x_2	3	0.5	0.5	0
x_6	0.5	-0.25	-0.25	**1**
F	15	0.5	2.5	-3

В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. В качестве разрешающего столбца выбираем x_3 и в качестве разрешающей строки выбираем x_6 (причины выбора аналогичны описанным выше).

Пересчитываем симплекс таблицу:

	s_{i0}	x_1	x_5	x_6
x_4	2	**2**	0	-2
x_2	3	0.5	0.5	0
x_3	0.5	-0.25	-0.25	1
F	16.5	-0.25	1.75	3

В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. В качестве разрешающего столбца выбираем x_1 и в качестве разрешающей строки выбираем x_4 (причины выбора аналогичны описанным выше).

Пересчитываем симплекс таблицу:

	s_{i0}	x_1	x_5	x_6
x_4	1	0.5	0	0.5
x_2	2.5	-0.25	0.5	0
x_3	0.75	0.125	-0.25	0.75
F	16.75	0.125	1.75	2.75

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому таблица определяет оптимальное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \end{cases}$$

$$max(F(x)) = 16.75$$

Проверим полученное решение на допустимость:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2.5, \\ x_3 = 0.75. \\ x_4 = 6 - (2x_1 + x_2 + 2x_3) = 6 - (4.5 + 1.5) = 0, \\ x_5 = 6 - (x_1 + 2x_2) = 6 - (1 + 5) = 0, \\ x_6 = 2 - (0.5x_2 + x_3) = 2 - (1.25 + 0.75) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение допустимое, так как все переменные неотрицательны.