1 Численное решение одномерной краевой задачи.

Необходимо найти приближенное решение краевой задачи на числовой оси $x \in [0, l]$.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$

$$\begin{cases} \left(\alpha_1 \dfrac{du}{dx} + \beta_1 u\right)_{x=0} = \psi_1 \\ \left(\alpha_2 \dfrac{du}{dx} + \beta_2 u\right)_{x=l} = \psi_2 \end{cases}$$

Вариант 8, условия задачи:

- $u = e^x - x$
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- $\beta_1 = \beta_2 = 1$

В качестве методов численного построения исходной функции u, необходимо рассмотреть:

1. *Метод Бубнова-Галеркина*, при использовании тригонометрического базиса.
2. *Метод Коллокаций* с использованием RBF-Гаусса базиса.

При тестировании методов, необходимо рассмотреть отклонение численного решения задачи u_m от аналитических значений функции u в тех же точках, по следующей формуле

$$\Delta = \sum_{i=0}^{points} (u(x) - u_m(x))^2 \tag{1}$$

2 Решение поставленной задачи.

Вычислим производные исходной функции u:

$$u'(x) = e^x - 1$$

$$u''(x) = e^x$$

Подставим функцию u в систему граничных условий для получения значений на границах отрезка $[0, l]$:

$$\begin{cases} \psi_1 = (\alpha_1(e^x - 1) + \beta_1(e^x - x))_{x=0} \\ \psi_2 = (\alpha_2(e^x - 1) + \beta_2(e^x - x))_{x=l} \end{cases}$$

$$u''_x = e^x$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 1 \\ u|_{x=l} = e^l - l \end{cases}$$

Аппроксимация значений функции u заключается в представлении функции в следующем виде:

$$u(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

Где $\{\varphi_i\}, i = \overline{1, k}$ — система базисных векторов. Базисный вектор φ_0 можно представить в следующем виде:

$$\varphi_0(x) = A + Bx$$

Вычислим коэффициенты A, B:

$$\varphi_0(0) = A$$

$$\varphi_0(l) = B$$

Для этого, необходимо подставить φ_0 в начальные граничные условия, и получим:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{e^l - l - 1}{l} \end{cases}$$

На остальные базисные вектора накладываются следующие условия:

$$\begin{cases} \varphi_k|_{x=0} = 0 \\ \varphi_k|_{x=l} = 0 \\ k = \overline{1,k} \end{cases}$$

В качестве такого базиса рассмотрим следующие вектора:

$$\varphi_k = sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Составим функцию F, которая будет иметь вид:

$$F(x) = [L(u) - f(x)] = 0$$

Метод Галеркина заключается в поиске коэффициентов $a_i, i = \overline{1,k}$, на основе решение СЛАУ следующего вида:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l F(x)\varphi_1(x)dx = 0 \\ \dots \\ \int\limits_0^l F(x)\varphi_n(x)dx = 0 \end{cases}$$

Подставляя разложение функции в базисный ряд (для случая $k = 3$), получим:

$$\int\limits_0^l \left(-(\frac{pi}{l})^2 \left[a_1 sin(\frac{\pi x}{l}) + 4sin(\frac{2\pi x}{l}) + sin(\frac{3\pi x}{l})\right] - e^x\right) sin(\frac{\pi x}{l}dx = 0$$
$$\int\limits_0^l \left(-(\frac{pi}{l})^2 \left[a_1 sin(\frac{\pi x}{l}) + 4sin(\frac{2\pi x}{l}) + sin(\frac{3\pi x}{l})\right] - e^x\right) sin(\frac{2\pi x}{l}dx = 0$$
$$\int\limits_0^l \left(-(\frac{pi}{l})^2 \left[a_1 sin(\frac{\pi x}{l}) + 4sin(\frac{2\pi x}{l}) + sin(\frac{3\pi x}{l})\right] - e^x\right) sin(\frac{3\pi x}{l}dx = 0$$

Отсюда можно вывести формулу для вычисления коэффициента a_{ij} для матрицы

СЛАУ, а также формулу для вычисления коэффициента b_i:

$$\begin{cases} a_{ij} = -(\frac{j\pi}{l})^2 \int\limits_0^l sin(\frac{\pi x i}{l}) sin(\frac{\pi x j}{l}) dx \\ b_i = \int\limits_0^l e^x sin(\frac{\pi x i}{l}) dx \end{cases}$$

Решив СЛАУ, получим вектор решений $\{a_{ir}\}, i = \overline{1, k}$.

2.1 Результат применения метода.

В качестве правой границы, коэффициент l рассматривается равным 1. Увеличивая количество базисных векторов, можно получить повышение качества аппроксимации (основываясь на значения метрики Δ). При длине шага равной 10^{-2}, были получены следующие значения Δ :

1. $k = 1$, $\Delta = 0.013$;
2. $k = 2$, $\Delta = 0.004$;
3. $k = 4$, $\Delta = 2.3 \cdot 10^{-4}$;
4. $k = 8$, $\Delta = 9.110^{-6}$.

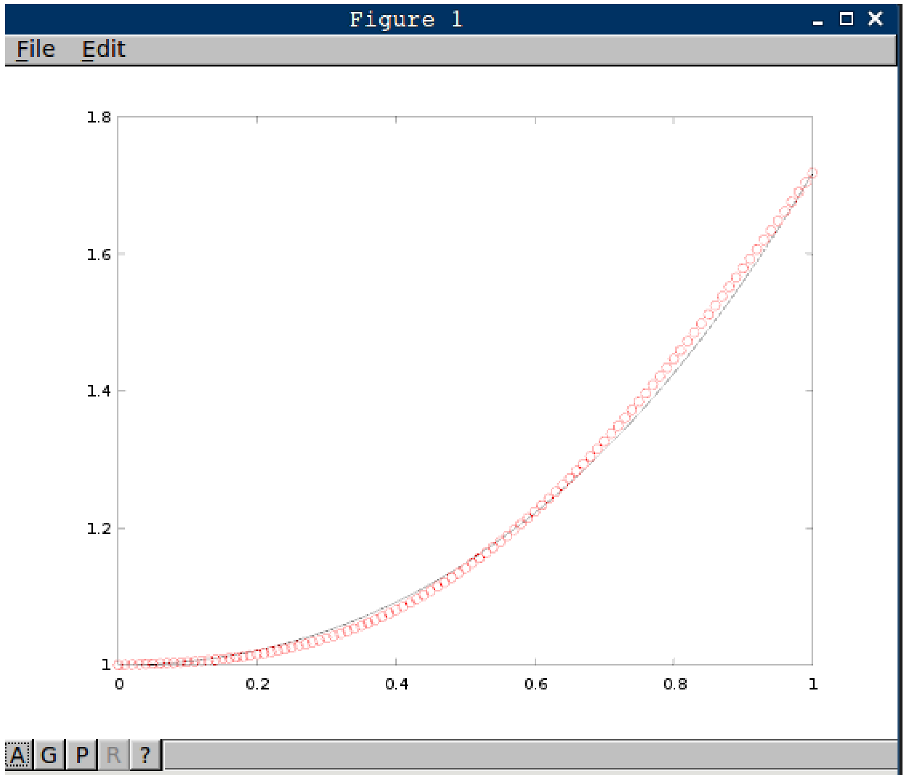


Рис. 1 – Приближение функции u методом аппроксимации Бубнова-Галеркина, при $k = 1$.

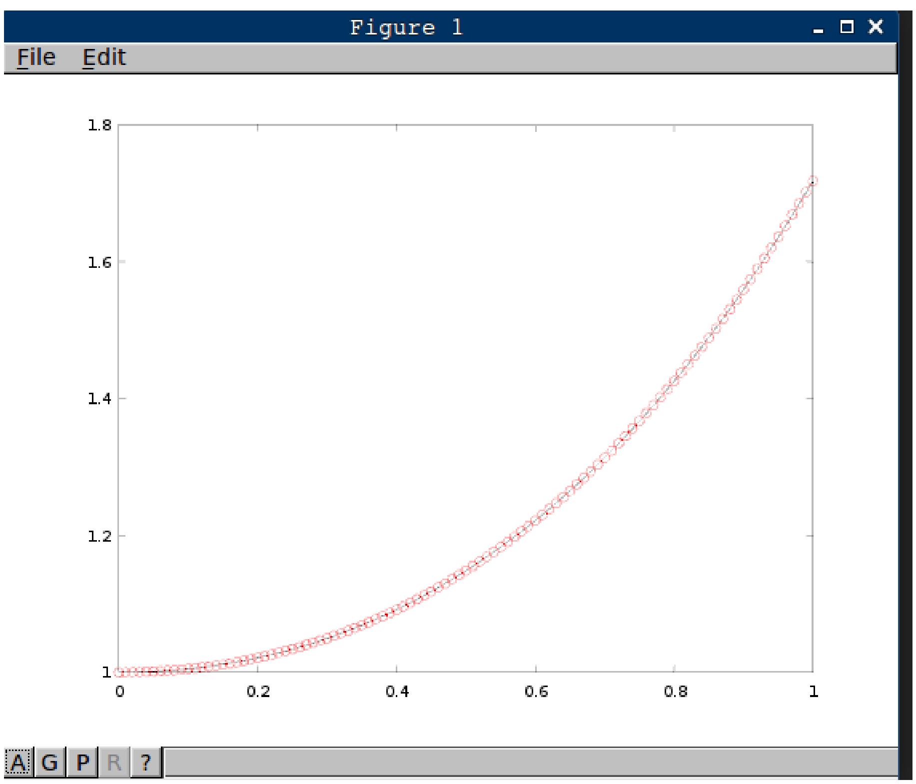


Рис. 2 – Приближение функции u методом аппроксимации Бубнова-Галеркина, при $k = 8$.

3 Метод Коллокаций.

Для этого метода был выбран RBF базис следующим образом (базисные вектора, как и в случае с методом Бубнова-Галеркина, должны принимать нулевое значение на границах краевой задачи):

$$\varphi_k = (x^2 - xl)e^{-\dfrac{(x-kh)^2}{\sigma^2}}$$

Здесь в качестве h – обозначется размер шага.

Разложение функции u в ряд на основе базисных векторов, представляется следующим образом:

$$u(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

В методе Коллокаций вводится функция R следующим образом:

$$R(x, c_1, \ldots, c_n) = L(u) - f(x) = L(U_0) - f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(u_i) = 0$$

Для того, чтобы найти коэффициенты c_i, которые бы аппроксимировали значения реальной функции на основе ее представления через ряд базисных векторов, необходимо решить следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, \ldots, c_n) = 0 \\ \ldots \\ R(x_n, c_1, \ldots, c_n) = 0 \end{cases}$$

3.1 Реализация и результат выполнения.

Применим оператор $L(\varphi_i)$, и получим φ''_x:

$$\varphi''_{0x} = 0$$

$$\varphi''_x = \left(2 - ((2x-l)\frac{2(x-kh)}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2}(x^2 - l)) - 2\frac{2(x-kh)}{\sigma^2}(2x - l - (x^2 - xl)\frac{2(x-kh)}{\sigma^2})\right) e^{-\dfrac{(x-kh)^2}{\sigma^2}}$$

Выбранные параметры вспомогательные параметры следующие:

- $\sigma = 1$;

- $h = \dfrac{1}{k}$.

Высокая точность аппроксимается, при условии выбора RBF базиса (см. формулу 3), в случае малых значений l ($l \approx 0.1$). При этом, при росте числа используемых базисных векторов, коэффициент Δ понижается, что свидетельствует о повышении точности приближения к аналитической функции.

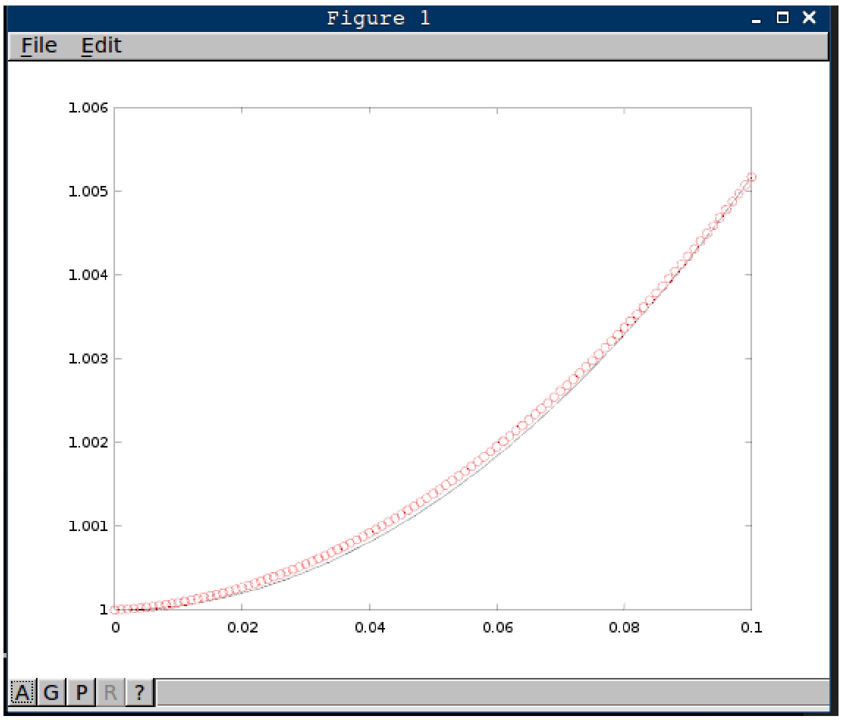
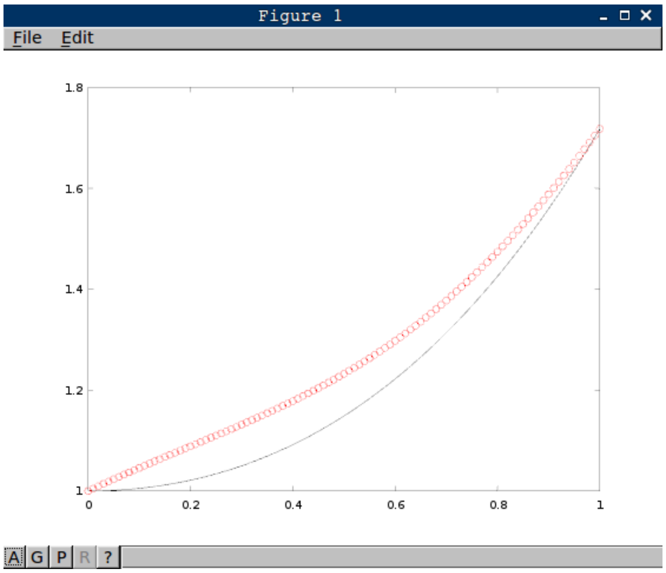


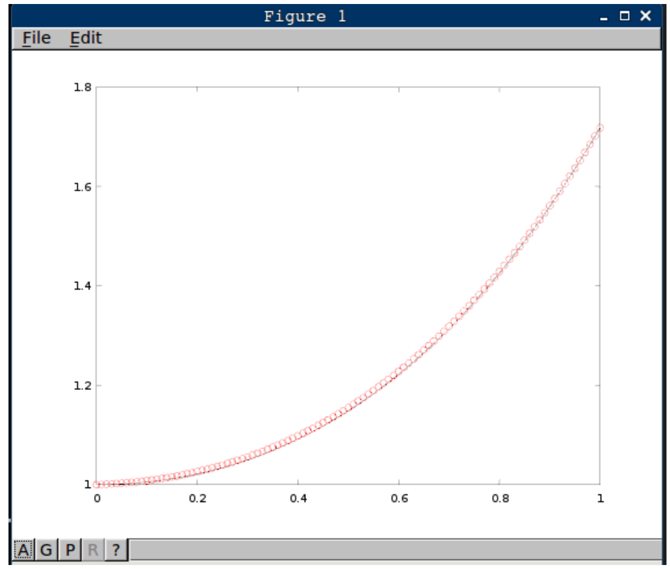
Рис. 3 – Аппроксимация при $l = 0.1$, шаг=0.01, $\sigma = 1$

В случае $l > 1$, наблюдается появление скачков аппроксимационной функции, поскольку была найдена другая функция, которая также удовлетворяет краевым условиям.

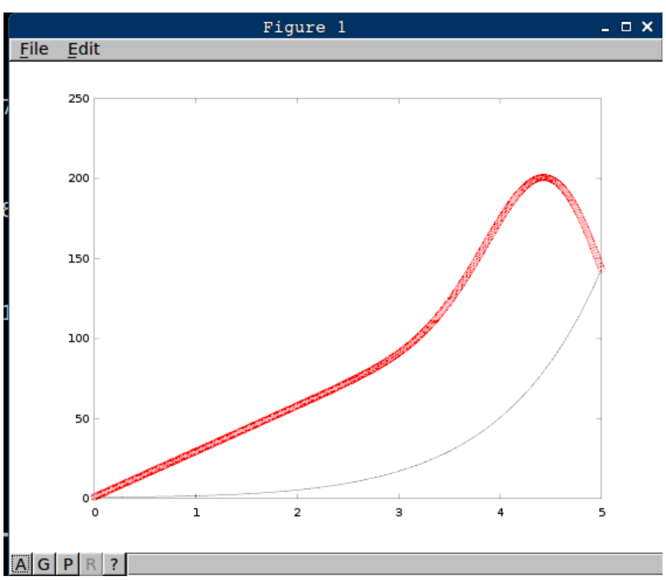
Для устранения скачков и изменения параметров апроксимации, были подкорректированы параметры σ.



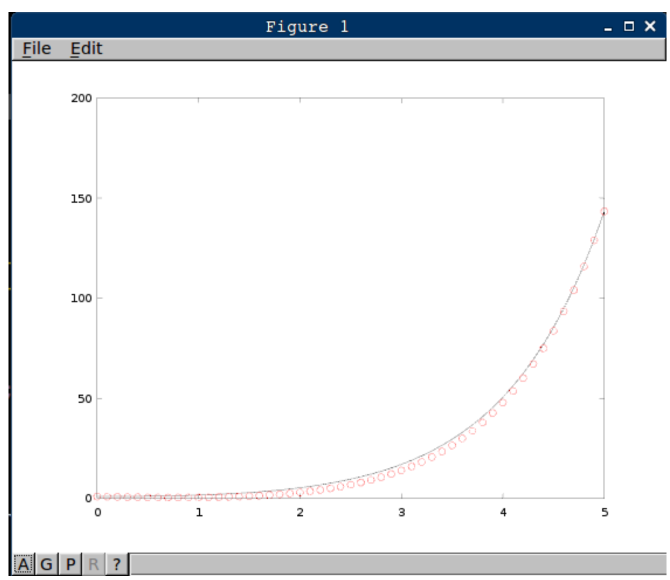
(a) Аппроксимация при $l = 1$, шаг=0.1, $\sigma = 1$



(b) Аппроксимация при $l = 1$, шаг=0.1, $\sigma = \mathbf{5}$



(a) Аппроксимация при $l = 5$, шаг=0.01, $\sigma = 1$



(b) Аппроксимация при $l = 5$, шаг=0.1, $\sigma = \mathbf{20}$