Bacanje atomske bombe (B-2)

Seminarski rad u okviru kursa
Osnove matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Babić Marko, Marjanović Stefan, Nićković Teodora
mi17077@alas.matf.bg.ac.rs
mi17141@alas.matf.bg.ac.rs
mi16057@alas.matf.bg.ac.rs

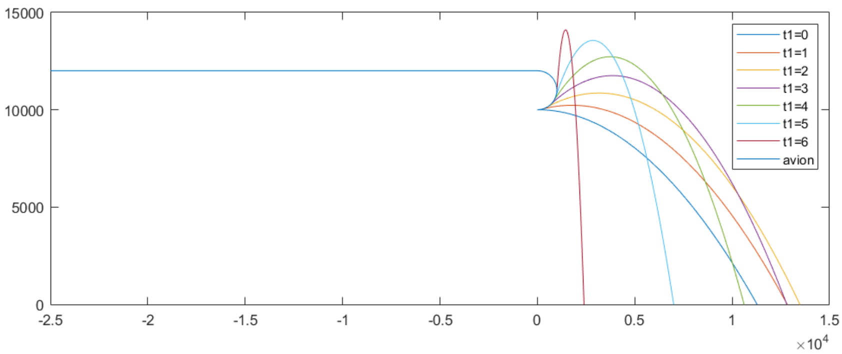
Maj 2021.

Sadržaj

1 Deo I - Opis problema

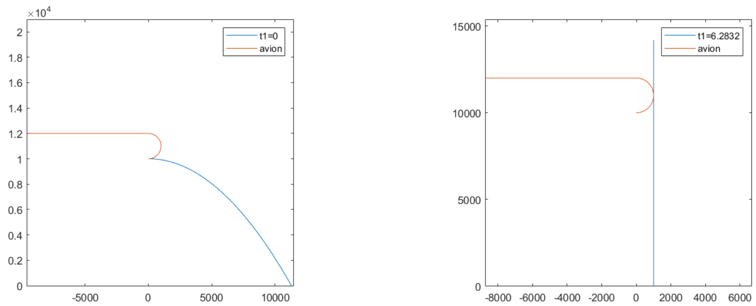
Bombarder B-2 leti na visini od $10000m$ brzinom od $900km/h$ i u trenutku $t = 0$ kreće u vertikalni zaokret prečnika $1000m$, nakon kojeg se vraća u suprotnom smeru istom brzinom. U nekom trenutku $t_1 > 0$ on izbacuje atomsku bombu koja slobodno pada i eksplodira na zemlji praveći udarni talas brzine $350m/s$. Potrebno je izračunati u kom trenutku i na kojoj daljini od cilja udarni talas stiže avion i odrediti optimalno t_1 tako da ta daljina bude što veća.

Prikažimo sada na grafiku kako bi izgledale putanje aviona i ispaljenih atomskih bombi za nekoliko različitih trenutaka $t1$.



Slika 1: Prikaz putanja atomske bombe za razne t_1 (s)

Obeležićemo trenutak u kom avion završava zaokret sa t_2. Odmah primećujemo da se ovde radi o modelu u kome se projektil ispaljuje pod nekim uglom, što je model kosog hitca. Takođe, kako se u zadatku traži da poluprečnik udarnog talasa eksplozije bude najveći, ima smisla za t_1 razmatrati samo slučajeve u intervalu $[t_0, t_2/2]$, jer nakon toga avion ulazi u drugu polovinu zaokreta, i projektil bi išao u nepovoljnom smeru za taj ishod. Takođe je zanimljivo primetiti i dva ekstremna slučaja - u trenutku izbacivanja $t_1 = 0$ radi se o horizontalnom hitcu, a u trenutku ispaljivanja $t_1 = t_2/2$ (polovina zaokreta) radi se o vertikalnom hitcu naviše.



Slika 2: Levo: horizontalni hitac, desno: vertikalni hitac naviše

Trenutak ekplozije, tačnije trenutak pada bombe, zavisiće od trenutka ispaljivanja t_1, i njega ćemo označiti sa t_{eksp}. Od trenutka ispaljivanja zavisi i ugao pod kojim se projektil izbacuje (sa x-osom), kao i ugao koji avion zaklapa sa y-osom u trenutku izbacivanja. Ta dva ugla su jednaka, i označićemo ih sa $\theta(t)$. Potrebno je odrediti i trenutak susreta $t_{susreta}$ udarnog talasa i aviona, po tome odrediti poluprečnik udarnog talasa, a onda i optimalan trenutak t_1 tako da taj poluprečnik bude najveći.

2 Deo II - Modeliranje

Model ćemo podeliti na nekoliko delova. Prvo je potrebno modelirati kretanje aviona, to jest poziciju aviona u zavisnosti od trenutka t, $(x_{aviona}(t), y_{aviona}(t))$. Nakon toga, potrebno je modelirati kretanje projektila u zavisnosti od trenutka ispaljivanja t_1, kao i od t, $(x_{projektila}(t_1, t), y_{projektila}(t_1, t))$. Na kraju, potrebno je odrediti trenutak eksplozije t_{eksp} u zavisnosti od t_1, i tada imamo sve potrebne informacije za model. Potrebno je još samo odrediti trenutak susreta, $t_{susreta}$ i koliki će biti poluprečnik udarnog talasa tad, pa naći t_1 za koje je on najveći.

2.1 Kretanje aviona

Kretanje aviona podelićemo na dva dela - na deo koji provede u zaokretu, $[t_0, t_2]$, i na deo koji provede u horizontalnom letu u negativnom smeru x-ose, $[t_2, t_{susreta}]$. Prvo treba odrediti t_2. To dobijamo kao $t_2 = l/v_0$, gde je l dužina luka koji avion pravi tim zaokretom (pređeni put), a v_0 brzina aviona. Dobijamo da je $t_2 = 12.56$, pa se možemo vratiti na grafik iz prvog dela i uveriti se da je specijalan slučaj za vertikalni hitac naviše baš na sredini toga.

U prvom delu kretanja, pozicija aviona se u datom trenutku može opisati sa

$$(x(t), y(t)) = (r\sin(\theta), (1000 - r\cos(\theta)) + 10000)$$

gde je r poluprečnik zaokreta, a θ ugao koji avion trenutno zaklapa sa y-osom. Međutim, znamo da ugao zavisi od vremena, kao i da avion zaustavlja zaokretanje kada je ugao koji gradi sa y-osom π. Zato ugao možemo predstaviti kao

$$\theta(t) = \frac{t\pi}{t_2}$$

a to uvrstiti u gornju formulu za poziciju aviona.

U drugom delu kretanja, avion se kreće konstantnom brzinom horizontalno po x-osi, na visini od $12000m$. Trivijalno dobijamo formulu za njegovu poziciju, i to je

$$(x(t), y(t)) = (v_0(t - t_2), 12000m)$$

.

2.2 Kretanje projektila

Potrebno je izvesti formule za kretanje projektila po modelu kosog hitca. Znamo da je t_1 trenutak ispaljivanja. Od početnih uslova imamo da je

$$(x_0, y_0) = (x_{aviona}(t_1), y_{aviona}(t_1)),$$

što je zapravo

$$(x_0, y_0) = (r\sin(\theta(t_1)), (1000 - r\cos(\theta(t_1))) + 10000),$$

kao i

$$(v_{x0}, v_{y0}) = (v_0\cos(\theta(t_1)), v_0\sin(\theta(t_1)))$$

$$(a_{x0}, a_{y0}) = (0, -g).$$

Znamo da je ubrzanje drugi izvod pozicije po vremenu, pa integraljenjem toga dobijamo brzinu, koja je prvi izvod pozicije po vremenu.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

postaje

$$\frac{dx}{dt} = c_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_2.$$

Ubacivanjem početnih uslova dobijamo da su konstante $c_1 = v_0\cos(\theta(t_1))$ i $c_2 = v_0\sin(\theta(t_1))$, pa je konačna formula za brzinu

$$(v_x, v_y) = (v_0\cos(\theta(t_1)), -gt + v_0\sin(\theta(t_1))).$$

Daljim integraljenjem toga dobijamo da je formula za poziciju projektila

$$x(t) = v_0\cos(\theta(t_1))t + r\sin(\theta(t_1))$$

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0\sin(\theta(t_1))t + (1000 - r\cos(\theta(t_1))) + 10000).$$

2.3 Određivanje trenutka eksplozije

Nakon što smo izmodelirali kretanje aviona i projektila, potrebno je odrediti i trenutak eksplozije u zavisnosti od trenutka ispaljivanja. On se dešava baš u trenutku kada projektil pada na zemlju, tj. kada je njegova y-koordinata jednaka nuli, $y(t) = 0$.

$$\frac{-gt^2}{2} + v_0\sin(\theta(t_1))t + (1000 - r\cos(\theta(t_1))) + 10000) = 0.$$

$$t_{1/2} = \frac{-v_0\sin(\theta(t_1)) \pm \sqrt{(v_0\sin(\theta(t_1)))^2 + 2g(1100 - r\cos(\theta(t_1)))}}{-g}$$

Ova jednačina će imati dva rešenja, ali nama je relevantno samo ono koje je veće od t_1. Tako dobijamo t_{eksp}.

2.4 Određivanje vremena susreta i poluprečnika udarnog talasa

Brzina širenja udarnog talasa je $350m/s$. Susret aviona i udarnog talasa dešava se u trenutku kada je poluprečnik udarnog talasa jednak distanci između pozicije aviona i mesta pada bombe na zemlji. Poluprečnik lopte udarnog talasa može se opisati u zavisnosti od vremena kao

$$R(t) = v_{eksp}(t - t_{eksp})$$

a distanca između posmatranih pozicija kao

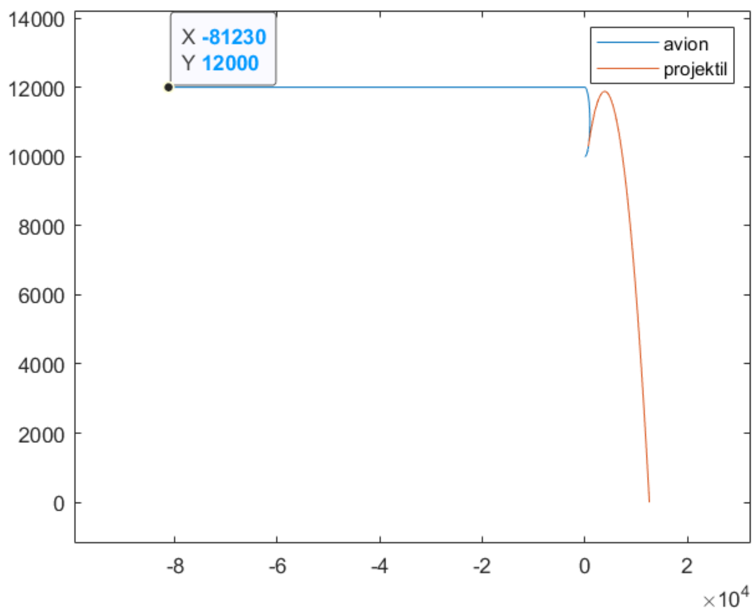
$$D(t) = \sqrt{(-x_{aviona}(t) + x_{eksplozije}(t_1))^2 + 12000^2}.$$

Trenutak susreta je ono t za koje je razlika $R(t) - D(t) = 0$, i baš to $R(t)$ je traženi poluprečnik.

Traženje trenutka ispaljivanja t_1 odredićemo nekom numeričkom metodom.

3 Deo III - Implementacija i diskusija rezultata

Implementacija modela urađena je u MATLAB-u i celokupan model može se naći u repozitorijumu projekta pod nazivom *model.m*. Određen je optimalan trenutak $t1$ sa greškom $\epsilon = 0.001$, što smatramo da je dovoljno precizno u odnosu na druge parametre modela. Dobijeno je da je optimalno $t_1 = 3.135$ i da je poluprečnik udarnog talasa u trenutku sustizanja aviona $R = 94600m$. Vreme susreta je $t_{susreta} = 337.49$. Prikazujemo i grafik sa završnom pozicijom aviona u trenutku susreta.



Slika 3: Prikaz putanja atomske bombe za razne t1 (s)